طبیعیات

(میکانیات)

میکانیات

پہلا پرچہ

برائے

بی۔ایس سی (سال اول)

نظامتِ فاصلاتی تعلیم

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد

پیش لفظ

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کے پیش کردہ بی ایس سی سال اول کی اس کتاب کے نصاب میں میکانیات کے مضمون سے بحث کی گئی ہے۔ یہ موضوع سائنس کے تین سالہ ڈگری کورس کے سال اول میں پڑھائے جانے والے مضمون کی بنیادی ضروریات کی تکمیل کرتے ہیں۔طلبہ کی سہولت کی خاطر نصاب کو بلاکوں میں بانٹا گیا ہے ہر بلاک چند اکائیوں پر مشتمل ہے۔عمومی طور پر ہر ایک اکائی میں مضمون کی خصوصی معلومات کے ایک علاقے کا احاطہ کیا گیا ہے۔ ماہرین نے ان اکائیوں کو ایک ایسے خاکے کے تحت تیار کیا ہے جس میں طلبا بغیر کسی وقت کے ان کو پڑھ کر سمجھ سکیں۔ ہر اکائی کی ابتدا اس کی غرض وغایت کے بیان سے ہوتی ہے جس کے بعد اکائی کے مطالعے سے حاصل ہونے والے مقاصد کو بیان کیا گیا ہے۔کتاب کے آخر میں چند مشقیں دی گئی ہے تاکہ طلبا مضمون میں اپنی لیاقت کا محاسبہ کرسکیں۔ ہر بلاک کے اختتام پر ایسی اصطلاحات کی ایک فرہنگ دی گئی ہے۔جن سے طلبا عموماً واقف نہیں رہتے۔

فہرست

(سپلمنٹری نصاب)

	Elasticity Materials	لچک کے مادے	11.	اکائی
	Hook's Law	ہوکس کا کلیہ	11.1	
	Stress-strain digram	زور اور بگاڈ ڈائگرام	11.2	
	Elastic modulus	لچک معیار	11.3	
	Young's modulus	ینگ معیار	11.3.1	
	Rigidity modulus	استواری معیار	11.3.2	
	Bulk modulus	حجمی معیار	11.3.3	
	Relation between elastic constant	لچک کے متقلات میں رشتہ	11.4	
	Relation between y & n	y اور n میں رشتہ	11.4.1	
	Relation between y & k	y اور k میں رشتہ	11.4.2	
	Relation between k & n	k اور n میں رشتہ	11.4.3	
	Relation between y,n & k	y,n اور k میں رشتہ	11.4.4	
	Poisson's Ratio	پائسان کی نسبت	11.5	
	Work done in elastic material	لچک کے مادے میں کام	12.	اکائی
	Work done in stretching and twisting a wire	تناؤ والے تار اور مروڑی والے تار میں کام	12.1	
	Work done in stretching a wire	تناؤ والے تار میں کام	12.1.1	
	Work done in twisting a wire	مروڑ والے تار میں کام	12.1.2	
	Twisting coulpe on a cylindrical	سلینڈ ریکل پر مروڑی جفتہ	12.2	
	Determination of wire rigidity modulus and moment of inertia	تار کے مادے کی جمود کا معیار اثر اور استواری کا معیار	13.	اکائی
	Torsional Pedulum	مروڈی رقاص	13.1	
	Searle's methods	سرل کا طریقہ	13.2	
46-64	Special theory of reletivity	خصوصی نظریہ اضافیت	14.	اکائی
	Frame of reference	حوالے کے فریم	14.1	

اکائی 1:   ویکٹر: ویکٹر الجبراء میزانیئے اور سمتیوں کی ضرب

1.1 اغراض ومقاصد

یہ اکائی میزانیئے اور سمتیوں سے واقف کراتی ہے اور اسکی تفہیم مثالوں کے ذریعہ ویکٹر الجبرا کے تمام اصولوں کو سمجھاتی ہے۔
اس اکائی کو مکمل کر لینے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ:۔

1۔ ویکٹر الجبراء کو سمجھ سکیں گے۔

2۔ میزانیے اور سمتوں کے درمیان امتیاز کر سکیں گے۔

1.2 تمہید

طبعی دنیا میں ہم طبیعی مقداروں کو میزانیے اور سمتیہ میں درجہ بندی کر سکتے ہیں۔ دونوں میں اہم فرق یہ ہیکہ سمتیہ (Vector) کے ساتھ سمت منسلک ہوتی ہے جبکہ میزانیہ کے ساتھ ایسا نہیں ہوتا ہے۔ لہٰذا سب سے پہلے ہم سمتوں کے بارے میں جانکاری حاصل کریں گے کہ سمتیہ کیا ہے؟ سمتیوں کو کیسے جمع، تفریق یا ضرب کیا جاتا ہے۔ سمتیوں کو کسی حقیقی عدد سے ضرب کریں تو ہمیں کیا حاصل ہوتا ہے۔

ایک مستوعا میں کسی شئے کی رفتار اور اسراع کو تعریف کرنے کے لئے ہم سمتیوں کا استعمال کر سکیں۔ کسی مستوعا میں حرکت کی آسان مثال کے طور پر ہم ہموار اسراعی حرکت کا مطالعہ کرینگے۔

1.3 میزانیے اور سمتیے (Scalars & Vectors)

ایک میزانیہ مقدار وہ مقدار ہوتی ہے جس میں صرف عددی قدر (Magnitude) ہوتی ہے۔ اس کو صرف ایک عدد اور موزوں اکائی کے ساتھ ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

مثالیں: دو نقاط کے درمیان کی دوری، کسی شئے کی کمیت (Mass) اور کسی جسم کی تپش وغیرہ۔

میزانیہ کے استعمال میں وہی اصول لاگو ہوتے ہیں جو عام طور پر الجبراء میں لائے جاتے ہیں جیسے کہ ہم اعداد کے ساتھ کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر اگر کسی مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی علی الترتیب 1 میٹر اور 5 میٹر ہو تو اسکا احاطہ (perimeters) یعنی چاروں بازوؤں کی لمبائیوں کی جمع (1m+5m+1m+5m)، (1 میٹر+5 میٹر+1 میٹر+5 میٹر) = 12m ہوگا۔ یہاں پر ہر بازو کی لمبائی ایک میزانیہ ہے اور احاطہ بھی ایک میزانیہ ہے۔ اسی طرح اگر کسی ایک دن کا زیادہ سے زیادہ تپش $45.6^\circ C$ اور کم سے کم تپش $25.2^\circ C$ ہو تو ان دونوں کا فرق $10.4^\circ C$ ہوگا۔

ایک سمتیہ وہ ہے جس میں عددی قدر اور سمت دونوں ہوتے ہیں۔ اور وہ جمع کے کلیہ مثلث (Triangle Law of Addition) یا جمع کے کلیہ متوازی الاضلاع (Parallelogram Law of Addition) کی تعمیل کرتا ہے۔ لہٰذا ایک سمتیہ کو اس کی قدر

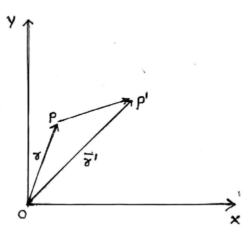
کے عدد اور سمت کے ذریعہ ظاہر کرتے ہیں۔ مثالیں نقل مقام (Displacement)، رفتار (Velocity)، اسراع (Accelaration) اور قوت (Force) وغیرہ ہیں۔

سمتیہ کو ظاہر کرنے کے لیے ہم اس مواد میں اس سمتیہ کے حرف کے اوپر تیر لگا کر بتائیں گے جیسے $\vec{V}$ اس میں V اور $\vec{V}$ دونوں ہی رفتار سمتیہ کو ظاہر کرتے ہیں۔ سمتیہ کی عددی قدر کو اکثر ہم اس کی مطلق قدر کہتے ہیں اور اسے $\overline{V} = v$ کے ذریعہ ظاہر کرتے ہیں۔

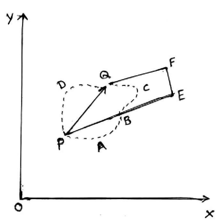
1.4 مقام اور نقل مقام سمتیے (Position and Displacement Vectors)

کسی مستوی میں متحرک شئے کے مقام کو ظاہر کرنے کے لیے ہم آسانی سے کسی نقطہ '0' کو مبداء (Origin) کے طور پر مانتے ہیں۔ فرض کرو کہ دو مختلف اوقات t اور t^1 پر شئے کے مقامات علی الترتیب P اور P^1 میں (شکل 1.1)

ہم P کو O سے ایک خط مستقیم سے جوڑ دیتے ہیں۔ اس طرح $\vec{OP}$ وقت t پر شئے کا مقام سمتیہ ہوگا۔ اس خط کے آخری سرے پر ایک تیر کا نشان لگا دیتے ہیں۔ اسے کسی علامت r سے پیش کرتے ہیں یعنی $\overline{OP} = \vec{r}$ اسی طرح نقطۂ P^1 کو ایک دوسرے مقام سمتیہ $\vec{OP^1}$ یعنی $\vec{r^1}$ کی لمبائی اسکی عددی قدر کو ظاہر کرتی ہے اور O سے دیکھنے پر P اور P^1 جس سمت میں واقع ہوں، سمتیہ کی سمت بھی وہی کہلائے گی۔ اگر شئے P سے حرکت کر کے P^1 پر پہنچ جاتی ہے تو سمتیہ PP^1 (جسکی P پر اور چوٹی P^1 پر ہے) نقطہ P (وقت t) سے P^1 (وقت t^1) تک حرکت کا نقل مقام یا نقل مقام سمتیہ (Displacement Vector) کہلاتا ہے۔



شکل 1.1



شکل 1.2

یہاں یہ بات ذہن نشین کرنا ہے کہ نقل مقام سمتیہ کو ایک خط مستقیم سے ظاہر کرتے ہیں جو شئے کے آخری مقام کو اسکی ابتدائی مقام سے جوڑتا ہے اور یہ اس حقیقی راستے پر انحصار کرتا جو شئے کے ذریعہ نقاط کے درمیان طئے کیا جاتا ہے۔

شکل 1.2 کے مطابق ابتدائی مقام P اور انتہائی مقام Q کے درمیان طئے کردہ دوریاں جیسے PDQ، PABCQ اور PBEFQ الگ الگ ہیں۔ لیکن نقل مقام سمتیہ $\vec{PQ}$ ہر حال میں وہی ہے۔ لہٰذا ''کسی بھی دو نقاط کے درمیان نقل مقام سمتیہ کی عددی قدر یا تو متحرک شئے کی راہ کی لمبائی سے کم ہوتی ہے یا اسکے برابر ہوتی ہے''۔

1.5 سمتیوں کی مساویت (Equality of Vectors)

دو سمتیوں $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کو صرف تبھی برابر کہا جا سکتا ہے جب ان کی عددی قدر میں برابر ہوں اور انکی سمت یکساں ہو۔

میزانیوں کی جمع و تفریق صرف انہیں مقداروں کیلئے بامعنی ہوتی ہے جن کی اکائیاں ایک جیسی ہوتی ہیں۔

ہمارے مطالعہ میں سمتیوں کے مقامات متعین نہیں ہیں۔ اس لیے جب ایک سمتیہ کو خود اس کے متوازی منتقل کرتے ہیں تو سمتیہ پر کوئی

فرق نہیں ہوتا ہے۔اس طرح کے سمتیہ کو ہم آزاد سمتیہ کہتے ہیں۔

1.6 حقیقی اعداد سے سمتیوں کی ضرب (Multiplication of Vectors by Real Numbers)

اگر ایک سمتیہ $\vec{A}$ کو کسی مثبت عدد λ سے ضرب کریں تو ہمیں ایک سمتیہ ہی ملتا ہے جس کی عددی قدر $\vec{A}$ کی عددی قدر کی λ گنا ہو جاتی ہے اور جس کی سمت بھی وہی ہے جو $\vec{A}$ کی سمت ہے۔اس حاصل ضرب کو ہم $\lambda\vec{A}$ لکھتے ہیں

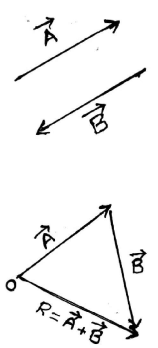
i.e. $\left|\lambda\vec{A}\right| = \lambda\left|\vec{A}\right|$, (اگر $(\lambda > 0)$)

مثال کے طور پر اگر $\vec{A}$ کو 2 سے ضرب کیا جائے تو حاصل سمتیہ $2\vec{A}$ ہوگا۔جس کی سمت $\vec{A}$ کی سمت ہوگی۔اور عددی قدر $\left|\vec{A}\right|$ کی دوگنی ہوگی۔

سمتیہ $\vec{A}$ کو اگر ایک منفی عدد λ سے ضرب کریں تو سمتیہ $\lambda\vec{A}$ حاصل ہوتا ہے جس کی سمت $\vec{A}$ کی سمت کی مخالفت ہے اور جس کی عددی قدر $\left|\vec{A}\right|$ کی $(-\lambda)$ گنی ہوتی ہے۔

1.7 سمتیوں کی جمع و تفریق (Addition and Substraction of Vectors)

سمتیوں کی مساویت کی تعریف کی رو سے سمتیے جمع کے قانون مثلث یا جمع کے متوازی الاضلاع کے قانون کی تعمیل کرتے ہیں۔
آیئے اب ہم ترسیمی طریقے سے جمع کے اس قانون کو بیان کریں گے۔



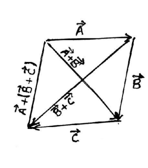
شکل 1.3

کسی مستوی میں واقع دو سمتیوں $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ پر غور کرتے ہیں (ملاحظہ کریں شکل نمبر 1.3)۔ ان سمتیوں کو ظاہر کرنے والے خطوط کی لمبائیاں سمتیوں کی عددی قدروں کے تناسب ہوتی ہیں۔جمع $\vec{A}+\vec{B}$ حاصل کرنے کے لیے شکل (1.3) کے مطابق ہم سمتیہ $\vec{B}$ اس طرح رکھتے ہیں کہ اس کی دم سمتیہ $\vec{A}$ کی چوٹی پر ہو۔پھر ہم $\vec{A}$ کی دم کو $\vec{B}$ کے سرے سے جوڑ دیتے ہیں۔یہ خط $\overline{OQ}$ حاصل سمتیہ R کو ظاہر کرتا ہے جو سمتیوں $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کا حاصل جمع ہے۔چونکہ سمتیوں کے جوڑنے کے اس طریقے میں ایک سمتیہ کی چوٹی کو دوسرے کی دم سے جوڑتے ہیں اس لیے اس ترسیمی طریقے کو چوٹی سے دم (ہیڈ تو ٹیل (Head to tail) طریقے کے نام سے بھی جانا جاتا ہے۔دونوں سمتیے اور ان کا حاصل کسی مثلث کے تین ضلع تشکیل دیتے ہیں۔

اس لیے اس طریقے کو سمتیوں کی جمع کا کلیہ مثلث (Traiangle method of Vector addition) بھی کہتے ہیں۔

جیسا کہ شکل 1.4 میں دکھایا گیا ہے کہ سمتیوں $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کو پہلے جوڑ کر اور پھر سمتیہ کو جوڑنے پر جو نتیجہ حاصل ہوتا ہے، وہ وہی ہے جو سمتیوں $\vec{B}$ اور $\vec{C}$ کو پہلے جوڑ کر پھر سمتیہ $\vec{A}$ کو جوڑنے پر ملتا ہے یعنی

$$\left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\vec{C}=\vec{A}+\left(\vec{B}+\vec{C}\right)$$


شکل 1.4

دو مساوی اور مخالف سمتیوں کو جوڑنے پر کیا نتیجہ ملتا ہے؟

ہم دوسمتیوں $\vec{A}$ اور $-\vec{A}$ جو $\vec{A}$ کا مساوی لیکن مخالف ہے۔ان کی جمع $\vec{A}+\left(-\vec{A}\right)$ ہے کیونکہ سمتیوں کی قدریں وہی ہیں لیکن سمتیں مخالف ہیں۔اس لیے حاصل کی قدر 0 سے ظاہر کی جاتی ہے اور اسے null سمتیہ یا صفری (Zero) سمتیہ کہتے ہیں۔

$$\vec{A}-\vec{A}=0;|0|=0$$

$$\vec{A}+0=\vec{A}$$

$$\lambda\vec{0}=0$$

$$0\vec{A}=0$$

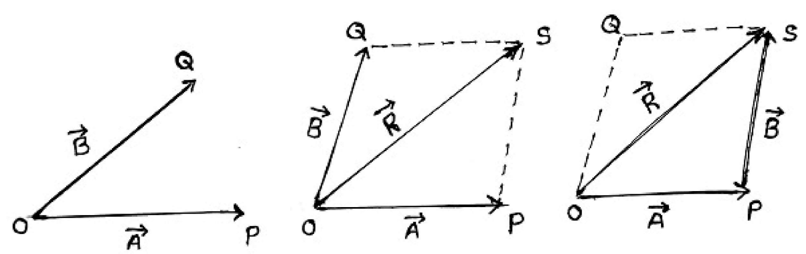
صفر سمتیہ کا طبیعی مطلب کیا ہے؟ فرض کروں کہ کسی وقت t پر کوئی شئے $\vec{P}$ پر ہے اور $\vec{P^1}$ تک جا کر پھر $\vec{P}$ پر واپس آ جاتی ہے۔ ایسی حالت میں شئے کا نقل مقام کیا ہوگا؟ چونکہ ابتدائی اور انتہائی مقام منطبق ہو جاتے ہیں اس لیے نقل مقام صفری سمتیہ ہوگا۔

دوسمتیوں $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کے فرق کو ہم دوسمتیوں $\vec{A}$ اور $-\vec{B}$ کی جمع کے طور پر درج ذیل سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+\left(-\vec{B}\right)$$

سمتیہ $-\vec{B}$ کو سمتیہ $\vec{A}$ میں جوڑ کر $\vec{A}-\vec{B}$ حاصل ہوتا ہے۔

متوازی الاضلاع کے طریقے کا استعمال کر کے بھی ہم دوسمتیوں کی جمع حاصل کر سکتے ہیں۔



(a) (b) (c)

شکل 1.5

فرض کرو کہ ہمارے پاس دوسمتیہ $\overline{A}$ اور $\overline{B}$ ہیں۔ان سمتیوں کو جوڑنے کیلئے انکی دم کو ایک مشترک بنیادی نقطہ 0 پر لاتے ہیں جیسا کہ شکل 1.5(a) میں دکھایا گیا ہے۔ پھر ہم $\overline{A}$ کی چوٹی سے $\overline{B}$ کے متوازی ایک خط کھینچتے ہیں۔اور $\overline{B}$ کی چوٹی سے $\overline{A}$ کے متوازی الاضلاع OQSP پورا کرتے ہیں۔جس نقطہ پر یہ دونوں خط ایک دوسرے کو قطعہ کرتے ہیں' اسے مبداء O سے جوڑ دیتے ہیں۔حاصل سمتیہ $\overline{R}$ کی سمت میں ہوگی۔(شکل نمبر (1.5(b)) شکل نمبر 1.5(c) میں سمتیوں $\overline{A}$ اور $\overline{B}$ کا حاصل نکالنے کیلئے قانون مثلث (Triangle Law) کا استعمال دکھایا گیا ہے۔دونوں شکلوں سے ظاہر ہیکہ دونوں طریقوں سے ایک ہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔لہٰذا دونوں طریقے مساوی ہیں۔

1.8 اکائی سمتیہ (Unit Vector):

اکائی سمتیہ وہ ہوتا ہے جس کی عددی قدر ایک ہو اور محض سمت کا تعین کرنے کیلئے اس کا استعمال ہوتا ہے۔ شکل نمبر 1.6 میں دکھائے گئے دو ابعادی نظام کے y,x اور z محوروں کے موافق اکائی سمتیوں کو ہم علی الترتیب $\hat{i}$ ، $\hat{j}$ اور $\hat{k}$ کے ذریعہ ظاہر کرتے ہیں کیونکہ یہ سبھی اکائی سمتیہ ہیں اس لئے $|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$

یہ اکائی سمتیے ایک دوسرے پر نمودار ہیں۔ دوسرے سمتیوں سے ان کی الگ شناخت کے لیے ہم نے اس مواد میں ان کے اوپر ایک کیپ (^) لگا دیا ہے کیونکہ اس مواد میں ہم صرف دو ابعادی حرکت کا مطالعہ کر رہے ہیں لہذا ہمیں صرف دو اکائی سمتیوں کی ضرورت ہوگی۔

کسی مستوی (Linear) میں ایک سمتیہ $\vec{A}$ کو ظاہر کرنے کے لیے ہمارے پاس دو طریقے ہیں:۔

(i) اس کی عددی قدر A اور اس کے ذریعہ X- محور کے ساتھ بنائے گئے زاویہ θ کے ذریعہ

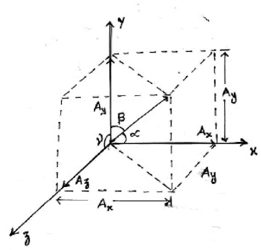
یا

(ii) اس کے اجزا A_x اور A_y کی قدریں درجہ ذیل مساوات سے معلوم کی جا سکتی ہے۔

$$A_x = A\,Cos\,\theta$$

$$A_y = A\,Sin\,\theta$$

اگر A_x اور A_y معلوم ہوں تو A اور θ کی قدر حسب ذیل سے معلوم کی جا سکتی ہے۔



$$A_x^2 + A_y^2 = A^2Cos^2\theta + A^2Sin^2\theta$$

یا

اور $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x};\ \theta = \tan^{-1}\left[\frac{A_y}{A_x}\right]$$

شکل 1.6

اسی طرح ہم نے ایک x-y مستوی میں کسی سمتیہ کو اس کے اجزاء میں جز تجزیہ کیا ہے لیکن اسی طریقے کے ذریعے کسی سمتیہ $\vec{A}$ کا تین ابعاد میں x ،y اور z محوروں کے مطابق، تین اجزاء میں جز تجزیہ کیا جا سکتا ہے۔ اگر A اور x ،y اور z محوروں کے درمیان زاویہ علی الترتیب α ، β اور θ ہوں تو

$$Ax = ACos\alpha,\ Ay = ACos\beta,\ Az = ACos\theta$$

$$\overline{A} = A_x i + A_y j + A_z K$$

سمتیہ A کی عددی قدر

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

1.9 کسی مستوی میں مستقل اسراع کے ساتھ حرکت (Motion in a Plane with Constant):

(Acceleration

فرض کرو کہ کوئی شئے ایک مستوی x-y میں حرکت کررہی ہے اوراس کے اسراع یعنی a کی قدر مستقل ہے۔کسی وقفہ وقت میں اوسط اسراع اس مستقل اسراع کے برابر ہوگا۔فرض کریں کہ کسی وقت t=0 پر شئے کی رفتار V_o اور وقت t پر اس کی رفتار V ہے۔تب تعریف کے مطابق

$$a = \frac{v - v_0}{t - o} = \frac{v - v_0}{t}$$

یا

$$V - V_o = at \Rightarrow V = V_o + at$$

اب ہم دیکھیں گے کہ وقت کے ساتھ مقام سمتیہ r کس طرح بدلتا ہے۔

فرض کریں کہ o اور t وقت پر ذرّے کے مقام سمتیے $\vec{r}_o$ اور $\vec{r}$ ہیں اوران وقت میں ذرّے کی رفتار $\vec{V}_o$ اور $\vec{V}$ ہے۔ہم جانتے ہیں کہ نقل اوسط رفتار اور وقفہ وقت کا ضربیہ ہوتا ہے۔

$$r - \vec{r}_o = \left(\frac{V_o + V}{2}\right)t = \left(\frac{(V_o + at) + V_o}{2}\right)t$$

$$= V_o t + \frac{1}{2}at^2$$

اس لئے $r = r_o + V_o t + \frac{1}{2}at^2$

اس مساوات کا مشتق (Derivations) یعنی $\frac{d\vec{r}}{dt}$ $(V = V_o + at)$ دیتا ہے اور ساتھ ہی t=o وقت پر $\vec{r} = \vec{r}o$ کی شرط کو بھی پورا کرتا ہے اس لیے مساوات $r = r_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ کو اجزا کی شکل میں درج ذیل کے طور پر ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$x = x_o + V_{ox}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$y = y_o + V_{oy}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

اس مساوات کی ایک تشریح یہ ہے کہ x اور y سمتوں میں حرکات ایک دوسرے پر منحصر نہیں ہوتی ہیں یعنی کسی مستوی (دو ابعاد) میں حرکت کو دو الگ الگ ہم وقتی یک بعدی مستقلہ اسراعی حرکتوں، جو باہمی عمودی سمتوں میں ہوں کے طور پر سمجھ سکتے ہیں۔یہ ایک اہم نتیجہ ہے جو دو ابعاد میں شئے کی حرکت کے تجزیے میں کارگر ہوتا ہے۔یہ نتیجہ تین ابعادی حرکت کے لیے بھی ہے۔

1.10 خلاصہ:

(1) میزانیہ مقداریں: وہ مقداریں ہیں جن میں صرف عددی قدریں (Magnitudes) ہوتی ہیں۔دوری، چال، کمیت اور درجہ حرارت میزانی مقداروں کی چند مثالیں ہیں۔

(2) سمتیہ مقداریں: وہ مقداریں جن میں قدر اور سمت دونوں ہوتی ہیں۔جیسے نقل، رفتار: اسراع وغیرہ۔یہ مقداریں سمتیہ الجبراء کے کچھ مخصوص اصولوں کی تعمیل کرتی ہیں۔

(3)اگر کسی سمتیہ $\vec{A}$ کو کسی حقیقی عدد λ سے ضرب کریں تو ہمیں ایک دوسرے سمتیہ $\vec{B}$ حاصل ہوتا ہے جس کی عددی قدر $\vec{A}$ کی عددی قدر کی λ گنا ہوتی ہے۔ نئے سمتیہ کی سمت یا تو $\vec{A}$ کی سمت ہوتی ہے یا اس کے مخالف، یہ اس پر منحصر ہوتی ہے کہ λ مثبت ہے یا منفی۔

(4)دو سمتیوں $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کو جوڑنے کے لیے ترسیمی طریقہ جس کے لیے یا تو سرے دم یا پھر متوازی الاضلاع کا طریقہ کا استعمال کرتے ہیں۔

(5)Nullیا صفری سمتیہ ایسا سمتیہ ہوتا ہے جس کی عددی قدر صفر ہوتی ہے۔

(6)سمتیہ $\vec{B}$ کو $\vec{A}$ سے نفی کرنے کے عمل کو ہم $\vec{A}$ اور $-\vec{B}$ کو جوڑنے کے طور پر لیتے ہیں۔ $\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$

(7)کسی سمتیہ $\vec{A}$ کو کسی مستوی میں واقع دو سمتیوں aاور b کی سمت میں جز تجزیہ(Resolve) کر سکتے ہیں۔ $\vec{A}=\lambda a+\mu b$ یہاں λ اور μ حقیقی اعداد ہیں۔

(8)کسی سمتیہ $\vec{A}$ سے وابستہ اکائی سمتیہ وہ سمتیہ ہے جس کی عددی قدر ایک ہوتی ہے اور وہ $\vec{A}$ کی سمت میں واقع ہوتا ہے۔ اکائی سمتیہ $\hat{n}=\dfrac{\vec{A}}{|A|}$

1.11 مختصر ترین سوالات:

(1) ذیل کے طبیعی مقداروں میں بتائیے کہ کون سی سمتیہ ہے اور کون سی میزانیہ۔

حجم، کمیت، چال، اسراع، کثافت، مول کی تعداد، رفتار، زاویاتی تعدد، نقل مقام، زاویائی رفتار۔

(2) ذیل میں سے کوئی دو میزانیہ مقداروں کو چنئے۔

قوت، زاویاتی معیار حرکت، کام، برقی رو، خطی معیار حرکت، برقی میدان، اوسط رفتار، مقناطیسی معیار اثر، اضافی رفتار۔

(3) درج ذیل میں سے ایک سمتیہ مقدار شامل ہے۔ اس لیے چنئے۔

درجہ حرارت، دباؤ، دھکا، وقت، جفت، توانائی، تجاذبی قوت، رگڑ کی شرح۔

1۔ سمتیوں کے متوازی الاضلاع کے کلیہ کو بیان کرو؟ اور حاصل کی قیمت اور سمت کی مساوات اخذ کرو۔

2۔ اکائی سمتی، صفر سمتی اور مقام سمتی کو بتلاؤ۔

3۔ اگر $P=2\hat{i}+4\hat{j}+14\hat{k}$ اور $Q=4\hat{i}+4\hat{j}+10\hat{k}$ تب $P+Q$ کو قدر معلوم کرو۔

4۔ کیا یہ ممکن ہے کہ صفر سمتیہ کا جز غیر صفر رہے گا۔

5۔ میزانیہ اور سمتیہ کی تعریف مثال کے ذریعہ کیجئے۔

1.12 سفارش کردہ کتابیں Reference Book

1. Shanti Narayan, P.K. Mittal, Vector Algebra,s chand

2. Dr. Rishi Kumar Jha, Dr. Anshuman Signh, Vector Algebra

3. Prasun Kumar nayak, Vector Algebra and anelysis with Applications

4. S.P. Kuil, Vector Analysis tensor analysis and linera vector space

اکائی 2۔حرکت کے کلیات

LAWS OF MOTION

2.1 تمہید

اس اکائی میں ہم اپنی توجہ طبعیات کے اس بنیادی سوال کی طرف مرکوز کرینگے کہ اجسام میں حرکت کس وجہ سے پیدا ہوتی ہے؟
آ یئے سب سے پہلے ہم اپنے عام تجربات کی طرف اس سوال کے جواب کا اندازہ لگائیں۔کسی کھیل کے میدان میں سکون کی حالت میں موجود فوٹ بال کو حرکت فراہم کرنے کے لیے کسی نہ کسی کو اس پر ٹھوکر ضرور مارنی ہوتی ہے۔ ہماری ہتھیلی پر رکھے کسی پتھر کو اوپر اچھالنے کے لیے ہمیں اسے اوپر کی طرف اچھالنا پڑتا ہے۔ہلکی ہوا پیڑ کی شاخوں کو جھلا دیتی ہے۔طاقتور ہوا کا جھونکا تو ہماری اجسام کو تک لڑھکا سکتا ہے۔ان عام تجربات سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ کسی جسم کو حالت سکون سے حرکت میں لانے کے لیے کسی بیرونی ذریعۂ جاندار یا غیر جاندار کے ذریعۂ قوت لگانے کی ضرورت ہوتی ہے۔اسی طرح حرکت کو روکنے یا کم کرنے کے لیے بھی بیرون قوت کی ضرورت ہوتی ہے۔مختصراً کسی ساکن' جسم کو حرکت دینے اور متحرک جسم کو روکنے کے لیے قوت کی ضرورت ہوتی ہے اور اس قوت کو فراہم کرنے کے لیے کسی بیرونی ذریعہ میں بھی ہوسکتا ہے۔ یہ بیرونی ذریعہ اس جسم کے (contact) میں بھی ہوسکتا ہے اور نہیں بھی۔

2.2 حوالے کے فریم (فریم آف ریفرنس) Frame of Reference

ایک متحرک بس یا گاڑی میں اچھالا گیا پتھر (Stone) بس یا گاڑی میں بیٹھے ہوئے شخص کو ایک (straight line) خط مستقیم میں حرکت کرتا ہوا دکھائی دیتا ہے جب کہ زمین پر ٹھہرے ہوئے ایک اور شخص کو پتھر کی حرکت کا راستہ (curved) ناقص دکھائی دیتا ہے۔اس مشاہدہ سے یہ بات ثابت ہوتی ہے کہ کسی باڈی کی حرکت کا بیان اس وقت تک بے معنی ہے جب تک کہ اس کے کوآرڈینیٹ سسٹم (coordinate system) کی وضاحت نہ کی جائے جس میں پیمائش کی گئی ہے۔وہ کوآرڈینیٹ جس کے لحاظ سے کسی باڈی کی حرکت کا اظہار کیا جاتا ہے' فریم آف ریفرنس' کہلاتا ہے۔

2.3 جمودی حوالے کا فریم (انرشیل فریم آف ریفرنس) Inertial Frame of Reference

حوالے کے ایسے فریم جن میں متحرک اجسام نیوٹن کے کلیات اور میکانیات کے دیگر کلیات کی پابندی کرتے ہیں' جمودی حوالے کے

فریم کہلاتے ہیں۔ان فریموں میں ایسے اجسام جو بیرونی قوتوں کے زیر اثر نہ ہوں یا تو حالت سکون میں ہوں گے یا پھر ہموار رفتار سے متحرک ہوں گے۔یعنی جمودی حوالے کے فریم میں بیرونی قوت کی غیر موجودگی میں ایک جسم حالت سکون میں ہوگا یا ہموار رفتار سے خط مستقیم میں متحرک ہوگا۔

2.4 غیر جمودی حوالے کا فریم (نان انرشیل فریم آف ریفرنس) Non-Inertial Frame of Reference

حوالے کا ایسا فریم جس میں ایک جسم بلا کسی بیرونی قوت کی عمل آوری کے اسراع کے ساتھ حرکت کرتا ہے' غیر جمودی حوالے کا فریم کہلاتا ہے۔ایسے کسی حوالے کے فریم میں نیوٹن کے کلیات حرکت کی پابندی نہیں ہوتی۔

آئزک نیوٹن (Isaac Newton) 1642ء میں انگلینڈ کے وولس تھارپے نام کے شہر میں پیدا ہوئے' اتفاق سے اسی سال گیلیلیو کا انتقال ہوا۔ان کی ریاض اور طبیعیات کی بنیادی دریافتیں ہیں۔منفی اور کسری قوت نماؤں کی بائی نومیل تھیورم' کیل کولس (احصاء) کی ابتداء تجاذ ید کا مقلوب مربعی کلیہ' سفید روشنی کے اسپیکٹرم وغیرہ۔

1684ء میں اپنے دوست ایڈمنڈ ہیلی کی حوصلہ افزائی پر نیوٹن نے اپنے سائنسی کاموں کو رکھنا شروع کیا اور ''دی پرنسپیا میتھیمیٹیکا'' (The Principia Mathematica) نام کی عظیم کتاب کی تخلیق کی جو کسی بھی دور میں تخلیق کی گئی عظیم کتابوں میں سے ایک مانی جاتی ہے۔ اس کتاب میں انھوں نے حرکت کے تینوں کلیات اور تجاذبہ کے آفاقی کلیہ کو واضح طور پر پیش کیا جو کیپلر کے سیاری مداروں کے تین کلیات کی باقاعدہ تشریح کرتے ہیں۔

1704ء میں نیوٹن نے ایک دیگر منفرد کتاب آپٹکس (Optics) پیش کی جس میں ان کے روشنی اور رنگ سے متعلق کام کا خلاصہ پیش کیا گیا تھا۔کاپرنکس نے جس سائنسی انقلاب کو حرکت دی اور جسے کیپلر اور گیلیلیو نے تیزی سے آگے بڑھایا اسی کو نیوٹن نے شاندار تکمیل کی۔ نیوٹنی میکانیات نے ارضی اور ملکیاتی مظاہر کو یکجا کیا۔ایک نئی ریاضی مساوات زمین پر سیب کے گرنے اور زمین کے چاروں طرف چاند کے طواف کرنے کو معین کرسکتی تھی۔

خلاصہ کے طور پر اگر بیرونی قوت صفر ہے تو حالت سکون میں واقع جسم حالت سکون میں ہی رہتا ہے اور حرکت پذیر جسم متواتر ہموار رفتار سے متحرک رہتا ہے۔اشیاء کی اس خصوصیت کو جمود (Inertia) کہتے ہیں۔جمود سے مراد ہے' تبدیلی کے لیے مزاحمت' کوئی جسم اپنی حالت سکون یا ہموار حرکت کی حالت میں تب تک کوئی تبدیل نہیں کرتا جب تک کوئی بیرونی قوت ایسا کرنے کے لیے اسے مجبور نہیں کرتی۔

نیوٹن کے گیلیلیو کے تصورات کی بنیاد پر حرکت کے تین کلیات پر مشتمل جوان کے نام سے جانے جاتے ہیں' ایک میکانیت کی بنیاد رکھی۔گیلیلیو کے جمود کا کلیہ اس کا ابتدائی نقطہ تھا جس کو نیوٹن نے حرکت کے پہلے کلیہ کے طور پر پیش کیا۔

2.5 نیوٹن کا حرکت کا پہلا کلیہ (Newston's First Law of Motion):

''ہر ایک جسم تب تک اپنی حالت سکون میں یا خط مستقیم میں ہموار حرکت کی حالت میں رہتا ہے جب تک کوئی بیرونی قوت اسے اس کے خلاف کرنے پر مجبور نہیں کرتی۔''

اب حالت سکون یا ہموار خطی حرکت دونوں ہی میں صفر اسراع اثر انداز ہوتا ہے۔لہذا حرکت کے پہلے کلیہ کو آسان الفاظ میں بھی ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

”اگر کسی جسم پر لگنے والی کل بیرونی قوت صفر ہوتو اس کا اسراع بھی صفر ہوتا ہے۔غیر صفر اسراع تبھی ہو سکتا ہے جب جسم پر کوئی بیرونی قوت عمل کرتی ہو۔“

جب ہم ایک کار کی حرکت پر غور کرتے ہیں جس میں وہ کار سکون کی حالت سے حرکت شروع کر کے اپنی چال میں اضافہ کرتی ہے اور پھر ہموار سیدھی سڑک پر پہنچ کر ہموار رفتار سے حرکت کرتی ہے جب یہ حالت سکون میں ہوتی ہے تب اس پر کوئی مجموعی قوت نہیں ہوتی۔ چال میں اضافہ کے وقت اس میں اسراع ہوتا ہے۔کل بیرونی قوت کے سبب ایسا ہونا چاہیے۔کار کے اسراع کی وضاحت کسی بھی طریقہ سے اندرونی قوت کے ذریعہ نہیں کی جاسکتی۔لیکن ایہ حقیقت ہے اگر یہاں سڑک پر کسی بیرونی قوت کے بارے میں غور کیا جاتا ہے تو یہ رگڑ کی قوت ہے۔ جب اسی پر غر کیا جاتا ہے تو کار کی حرکت میں اسراع کا سبب رگڑ کی قوت ہے۔ جب کار ہموار رفتار سے حرکت کرتی ہے تب بھی اس پر کوئی مجموعی بیرونی قوت نہیں ہوتی۔

حرکت کے پہلے کلیہ میں شامل جمود کی خاصیت بہت ہی عیاں نظر آتی ہے۔فرض کرو کہ ہم کسی رکی ہوئی بس میں غیر محتاط طور پر کھڑے ہیں اور اچانک بس کا ڈرائیور بس کو چلا دیتا ہے تو ہم جھٹکے کے ساتھ پیچھے کی طرف گر پڑتے ہیں۔اسی طرح کا واقعہ تیزی کے ساتھ چلتی بس کے اچانک رکنے پر بھی ہوتا ہے۔ ہمارے پیر رگڑ کی وجہ سے رک جاتے ہیں کیونکہ قوت رگڑ پیروں اور بس کے فرش کے درمیان اضافی حرکت نہیں ہونے دیتی لیکن جسم کا باقی حصہ جمود (Inertia) کی وجہ سے آگے کی طرف حرکت کرتا رہتا ہے۔نتیجاً ہم آگے کی طرف پھینک دیئے جاتے ہیں۔ بحالی عضلاتی قوتیں پھر فعال ہو جاتی ہیں اور جسم کو حالت سکون میں لے آتی ہیں۔

2.6 نیوٹن کے حرکت کا دوسرا کلیہ (Newston's Second Law of Motion)

نیوٹن کا پہلا کلیہ اس سادہ صورت سے تعلق رکھتا ہے جس میں کسی جسم پر جملہ بیرونی قوت صفر ہوتی ہے۔حرکت کا دوسرا کلیہ اسی صورت سے تعلق رکھتا ہے جس میں جسم پر ایک مجموعی قوت لگ رہی ہو۔ یہ کلیہ جملہ بیرونی قوت اور جسم کے اسراع میں رشتہ بتاتا ہے۔

کسی جسم کے معیار حرکت (Momentum) کو اس کی کمیت m اور رفتار V کے حاصل ضرب کے ذریعہ معلوم کی جاتی ہے اور اسے p سے ظاہر کیا جاتا ہے جیسے

$$P = mv \rightarrow \qquad (1)$$

جہاں معیار حرکت ایک سمتیہ ہے۔عام تجربات سے اجسام کی حرکات پر قوتوں کے اثر پر غور کرتے وقت ہمیں معیار حرکت کی اہمیت کا پتہ چلتا ہے۔

اگر دو پھتر، ایک ہلکا اور دوسرا بھاری ایک ہی عمارت کی چوٹی سے گرائے جاتے ہیں تو زمین پر کھڑے کسی شخص کے لیے بھاری پتھر کے مقابلے ہلکے پتھر کو لپکنا آسان ہوتا ہے۔اسی طرح کسی جسم کی کمیت ایک اہم پیرامیٹر ہے جو حرکت پر قوت کے اثر کو متعین کرتا ہے۔

اس مشاہدہ سے اس بات کا پتہ چلتا ہے کہ کمیت اور رفتار کا حاصل ضرب یعنی معیار حرکت ہی حرکت پر قوت کے اثر کے لیے بنیادی اہمیت رکھتا ہے۔

فرض کرو کہ مختلف کمیتوں کے دو اجسام پر جو ابتداء میں سکون کی حالت میں ہیں، ایک fixed قوت ایک fixed وقفہ وقت کے لیے لگائی جاتی ہے تو ہلکا جسم نسبتاً بھاری جسم کے مقابلے زیادہ رفتار اختیار کر لیتا ہے۔لیکن وقفہ وقت کے آخر میں تجربہ یہ ظاہر کرتا ہے کہ ہر ایک جسم

ہموار معیار حرکت حاصل کرتا ہے۔اس طرح ''ہموار وقت کے لیے لگائی گئی ہموار قوت مختلف اجسام میں ہموار معیار حرکت کی تبدیلی کرتی ہے۔یہ حرکت کے دوسرے کلیہ کے لیے اہم مرحلہ ہے۔یہ کیفیتی تجربہ ہمیں نیوٹن کے حرکت کے دوسرے کلیہ کی طرف اشارہ کرتا ہے جسے نیوٹن نے کچھ اس طرح پیش کیا تھا

''کسی جسم میں معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح لگائی گئی قوت کے راست متناسب ہوتی ہے اور اس سمت میں ہوتی ہے جس سمت میں قوت کام کرتی ہے۔''

اگر m کمیت کے کسی جسم پر کوئی قوت f وقفہ وقت Δt تک لگانے پر اس جسم کی رفتار میں v سے $\Delta \upsilon$ کی تبدیلی ہوتی ہے یعنی جسم کے ابتدائی معیار حرکت $P = mv$ میں ($\Delta p = m\Delta \upsilon$) کی تبدیلی ہو جاتی ہے۔تب حرکت کے دوسرے کلیہ کے مطابق

یعنی $F \alpha \frac{\Delta p}{\Delta t}$

$F = k\frac{\Delta p}{\Delta t}$ یہاں k ایک مستقل ہے

اگر $\Delta t \to 0$ ' تب $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ ' t کی نظر سے p کا تفرقی ضریب (Differential Co-efficient) بن جاتا ہے۔ جسے $\frac{dp}{dt}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اس طرح سے $F = K\frac{dp}{dt} \to 2$

کسی (fixed) کمیت m کے لیے

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} \qquad (\because p = mv)$$

$$= \mathrm{m}\frac{dv}{dt} = ma \qquad (\because a = \frac{dv}{dt})$$

$$(\therefore \frac{dp}{dt} = \mathrm{ma}) \to 3$$

یعنی دوسرے کلیہ کو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$F = k.ma \to 4$$

اگر ہم k=1 چنتے ہیں تب دوسرا کلیہ اس طرح ہو جاتا ہے۔

$$F = \frac{dp}{dt} = m.a \to 5$$

S1 اکائیوں میں' ایک اکائی قوت وہ ہوتی ہے جو 1kg. کے جسم میں $1 m/s^2$ کا اسراع پیدا کر دیتی ہو۔اس اکائی قوت کو نیوٹن کہتے ہیں۔اس کی علامت N ہے۔

$$1N = 1kg.m/s^2$$

2.7 جھٹکا (Impulse):

مثال کے طور پر جب کوئی گیند کسی دیوار سے ٹکرا کر واپس آتی ہے تب دیوار کے ذریعہ گیند پر لگنے والی قوت بہت کم وقت کے لیے عمل پذیر رہتی ہے تو بھی یہ قوت گیند کے معیار حرکت کی سمت بدلنے کے لیے کافی ہوتی ہے۔ اکثر ان حالات میں قوت اور قوت کا حاصل ضرب جو جسم کے معیار حرکت کی تبدیلی ہے، جھٹکا یا دھکا کہتے ہیں۔

قوت x مدت = جھٹکا = معیار حرکت میں تبدیلی $\rightarrow$ 6

معیاد حرکت میں ایک تبدیلی پیدا کرنے کے لیے کم وقت کے لیے عمل پذیر رہنے والی بڑی قوت کو جھٹکا پیدا کرنے والی قوت کہتے ہیں۔ دیگر قوتوں کی طرح جھٹکا پیدا کرنے والی قوت بھی قوت ہی ہے مگر یہ بڑی قوت ہوتی ہے اور کم وقت کے لیے عمل کرتی ہے۔

2.8 نیوٹن کے حرکت کا تیسرا کلیہ (Newton's Third Law of Motion)

ہم جانتے ہیں کہ حرکت کا دوسرا کلیہ کسی جسم پر لگی بیرونی قوت اور اس میں پیدا اسراع میں رشتہ بتاتا ہے۔ کونسا ذریعہ بیرونی قوت فراہم کرتا ہے۔ اس سوال کا سادہ جواب یہ ہے کہ کسی جسم پر لگنے والی قوت ہمیشہ ہی کسی دوسرے جسم کی وجہ سے پیدا ہوتی ہے۔

فرض کرو جسم B، جسم A پر کسی بیرونی قوت کو پیدا کرتا ہے۔ تب یہ سوال بھی اٹھتا ہے کہ کیا جسم A بھی جسم B پر کسی بیرونی قوت کو پیدا کرتا ہے۔ کچھ مثالوں میں جواب واضح طور پر معلوم ہوتے ہیں۔ اگر آپ کسی لچھے دار کمانی کو اپنی ہاتھوں سے دبائیں تو وہ کمانی آپ کے ہاتھوں پر قوت لگائی ہے۔ آپ اسی قوت کو محسوس کر سکتے ہیں۔

جب کبھی تجاذبی کشش کے سبب زمین کسی پتھر کو نچلی سمت میں کھینچتی ہے، کیا پتھر زمین پر کوئی قوت لگاتا ہے۔ اس کا جواب واضح نہیں ہے کیونکہ پتھر کے ذریعہ زمین پر لگی قوت کے اثر کو نہیں دیکھ سکتے۔ لیکن نیوٹن کے مطابق اس کا جواب ہے ہاں پتھر بھی زمین پر ایک مساوی مخالف قوت لگاتا ہے۔ ہمیں اس قوت کا احساس نہیں ہو پاتا، اس کی وجہ نہایت بھاری ہونے کے سبب زمین کی حرکت پر پتھر کے ذریعہ لگنے والی کم قوت کا اثر ناقابل لحاظ ہوتا ہے۔

اسی طرح نیوٹن میکانیات کے مطابق، قدرتی ماحول میں قوت کبھی بھی اکیلی نہیں پائی جاتی۔ دو اجسام کے درمیان واقع باہمی بین عمل (Interaction) کو ہی قوت کہا جاتا ہے۔ قوت ہمیشہ جوڑوں میں واقع ہوتی ہے۔ ساتھ ہی دو اجسام کے درمیان باہمی قوتیں ہمیشہ مساوی اور مخالف سمتوں میں ہوتی ہیں۔ نیوٹن نے اس تصور کو حرکت کے تیسرے کلیہ کے طور پر پیش کیا۔

''ہر ایک عمل کا ہمیشہ ایک مساوی اور مخالف ردِ عمل ہوتا ہے''۔

2.9 آیئے اس کلیہ کے اہم نکات پر غور کریں۔

1۔ تیسرے کلیہ کو آسان اور واضح الفاظ میں اس طرح بھی کہا جا سکتا ہے۔

''قوت ہمیشہ جوڑوں (pairs) میں واقع ہوتا ہے۔ جسم A پر B کے ذریعہ لگائی گئی قوت جسم B پر A کے ذریعہ لگائی گئی قوت کے مساوی اور مخالف ہوتی ہے۔

2۔ تیسرے کلیہ کے مطابق، عمل۔ ردِ عمل سے پہلے آتا ہے۔ یعنی عمل سبب ہے اور اسی سے ہونے والا ردِ عمل اس کا اثر۔ A پر B کے ذریعہ لگائی گئی قوت اور A کے ذریعہ B پر لگائی گئی قوت ایک ہی ساعت میں عمل پذیر ہوتی ہے۔ اس بنیاد پر ان میں سے کسی بھی ایک کو عمل اور دوسرے کو

ردعمل کہا جاسکتا ہے۔

3۔ عمل اور ردعمل قوتیں دو مختلف اجسام پر عمل کرتی ہیں اس لیے دو اجسام A اور B کے جوڑے پر غور کیجئے۔ تیسرے کلیہ کے مطابق

$$F_{AB} = -F_{BA}$$

(B پر A کے ذریعہ لگائی گئی قوت)۔ =(A پر B کے ذریعہ لگائی گئی قوت)

اس طرح، اگر ہم کسی ایک جسم (A یا B) کی حرکت پر غور کرتے ہوں تو دونوں قوتوں میں سے جسم کے لیے صرف ایک ہی قوت بامعنی ہوتی ہے۔

2.10 نمونہ سوالات:

1۔ نیوٹن کے حرکت کے کلیات پر نوٹ لکھیں۔

2۔ حوالے کے فریم (Frame of Reference) سے کیا مراد ہے؟

3۔ جمودی حوالے کے فریم کی تعریف کیجئے۔

4۔ معیار حرکت (momentum) کی تعریف کیجئے اور اس کی مساوات کو اخذ کیجئے۔

5۔ جھٹکا (Impluse) سے کیا مراد ہے؟

6۔ نیوٹن کا دوسرا کلیہ بیان کیجئے۔اس کے ذریعہ F= ma کو اخذ کیجئے۔

7۔ نیوٹن کا تیسرا کلیہ بیان کیجئے۔

8۔ معیار حرکت اور دھکہ کی تعریف کیجئے۔

یونٹ4۔ عام تفرقی مساوات (آرڈینری ڈیفرنشیل ایکویشنز)

4.1 تمہید (انٹروڈکشن) Introduction:

طبعیات میں ڈیفرنشیل ایکویشنز اہم رول ادا کرتے ہیں۔ ڈیفرنشیل ایکویشنز کی مدد سے کئی فزیکل سسٹمس کی ڈائنامکس کو سمجھایا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر ایک وائبریٹنگ اسٹرنگ کی حرکت اور راکٹ کی حرکت کو سمجھانے کے لیے الکٹروڈائنامکس کی ایڈوانسڈ ایکویشنز جیسے شروڈنگر ایکویشن اور میاکس ویل ایکویشنز کی ضرورت پیش آتی ہے۔ تب سوال یہ پیدا ہوتا ہے کہ ڈیفرنشیل ایکویشنز کیا ہے؟

ڈیفرنشیل ایکویشنز' ایک گروپ آف ایکویشنز ہیں جو ڈیری ویٹیوز پر مشتمل ہوتی ہے۔

(a) بنیادی طور پر ڈیفرنشیل ایکویشنز کو دو قسموں میں بانٹا جاتا ہے

(b) جنہیں آرڈینری ڈیفرنشیل ایکویشنز اور پارشیل ڈیفرنشیل ایکویشنز کہا جاتا ہے۔

یہاں ہم آرڈینری ڈیفرنشیل ایکویشنز استعمال میں لے آئیں گے۔ تمہاری اطلاع کے لیے یہ بتانا ضروری ہے کہ پارشیل ڈیفرنشیل ایکویشنز وہ ایکویشنز ہیں جو دو یا زیادہ انڈی پنڈنٹ ویری ایبلس کے ڈیری ویٹیوز پر مشتمل ہوتے ہیں۔ جب کہ آرڈی نری ڈیفرنشیل ایکویشنز آرڈینری ڈیری ویٹیوز پر مشتمل ہوتے ہیں۔ یعنی سنگل انڈی پنڈنٹ ویری ایبل کے ساتھ والے ڈیری ویٹیوز۔

یہ انڈی پنڈنٹ ویری ایبل اور اُن کے ڈیری ویٹیوز کے بیچ کے رشتے تو ظاہر کرتا ہے۔ آنے والے سیکشن میں ہم آرڈینری ڈیفرنشیل ایکویشنز کا ترتیب (رسمی طور) سے تعارف کرائیں گے۔

4.2 آرڈی نری ڈیفرنشیل ایکویشنز:

ایک آرڈی نری ڈیفرنشیل ایکویشنز (ODE) کسی فنکشن y(x) اور اُس کے ڈیری ویٹیوز کے درمیان کے رشتے کو بتاتا ہے۔

$$\frac{d^n y(x)}{dx^n} = y^n(x)$$

ODE کو سب سے عام (عمومی) طور پر اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$F(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots\ldots y^{(n)}) = 0$$

یہاں پر 'n' کو ODE کے آرڈر کہتے ہیں۔

کسی مساوات میں آنے والے سب سے بڑے ڈیری ویٹیوز (ہائیر ڈیری ویٹیوز) کے آرڈر کو ODE کا آرڈر کہتے ہیں۔

یہاں ایک اور اہم بات پر بھی کام کرنے کی ضرورت ہیں وہ ہیں ODE کی ڈگری، یا ئر آرڈر ڈیری ویٹیو کا پاور ڈگری ہوتا ہے۔

نیچے باکس میں آرڈر اور ڈگری کی مثالیں دی گئی ہے۔

مثلاً $$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + x\frac{dy}{dx} + y = 0$$ Order =2,degree=3

ایک nth آرڈینری ڈیفرنشیل ایکویشنز کی سب سے شکل اس طرح لکھی جا سکتی ہے۔

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + - - - - + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)\,\mathrm{y} = \mathrm{f(x)}$$

یہاں پر $a_0(1)$ ، $a_1(x)$ کو ایکویشن کی کوافی شنٹس (coefficients) کہتے ہیں جب کی f(x) نان ہوموجینیز ٹرم کہلاتی ہے۔

اگر $f(x) = 0$ ہوموجینیز ڈیفرنشیل
اور $f(x) = 0$ نان ہوموجینیز ڈیفرنشیل

اگر کوافی شنٹس a_n x پر منحصر ہے تو وہ ویری ایبل کہلائیں گے ورنہ وہ کانسٹنٹ کہلاتے ہیں۔

4.2.1 فرسٹ آرڈر آرڈینری ڈیفرنشیل ایکویشنز:

یہ ایسی مساوات ہوتی ہے جس میں صرف dy/dx موجود ہوتا ہے یعنی فرسٹ آرڈر ڈیری ویٹیو کسی y یا x کے فنکشن کا مساوی ہوتا ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y)$$

اوپر دیئے ایکویشنز کا آرڈر ایک ہے، چنانچہ یہ ایک فرسٹ آرڈر فرسٹ ڈگری ODE طبعیات میں کئی طرح کے فرسٹ آرڈر فرسٹ ڈگری ODE استعمال ہوتے ہیں۔ اب ہم ان مساوات کے حل پر تفصیلی بحث کریں گے۔

(A) سیپر یبل ۔ ویریبل مساوات::۔

ایک سیپر یبل ویری ایبل مساوات کو اس طرح سے لکھا جائے گا۔

$$\frac{dy}{dx} = F(x)\mathrm{g(y)} \_\_\_\_\_\_ 1$$

اوپر دی گئی مساوات میں f(x) اور g(y)، x اور y کے علاحدہ فنکشنز ہے یا وہ مستقل (کانسٹنٹ) ہوں گے۔ ایکویشن (1) کو اس طرح سے لکھیں گے جس ے کہ x پر منحصر ٹرمس ایکویشن ایک طرف اور y پر منحصر ٹرمس ایکویشن کا دوسری طرف ہوگئی، یعنی ہم ان کو الگ کریں گے اور پھر ان کو انٹی گریٹ کریں گے۔

$$\int \frac{dy}{gy} = \int F(x)dx$$

اوپر دی گئی مساوات کوحل کرنے کو ہم دونوں انٹی گریٹ کومعلوم کریں گے۔ عام طور پر ایک پہلے آرڈر کی تفریقی مساوات کا حل، ایک بار انٹی گریشن کرنے سے حاصل ہوتا ہےاوراس میں ایک انٹی گریشن کا مستقل ہوتا ہے۔آیئے اب ایک مثال دیکھتے ہیں۔

$$\frac{dy}{dx} = x + xy$$

$$\frac{dy}{dx} = x(1+y)$$ R.H.S فیکٹریز

$$\int \frac{dy}{(1+y)} = \int x dx \Rightarrow ln(1+y) = \frac{x^2}{2} + c$$

$$1 + y = \exp\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$$ C آربیٹری مستقل

(B) لینئر ایکویشنز:

لینئر فرسٹ آرڈر ڈیفرنشیل ایکویشنزطبعیات میں استعمال ہونے والے (ڈیفرنشیل ایکویشنز) تفریقی مساوات کی ایک خاص قسم (جماعت) ہےاوراس کی سب سے عام شکل اس طرح ہوتی ہے۔

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x) \_\_\_\_\_ 2$$

اب فرض کیجئے ایک فنکشن $\mu(x)$ ہے، جسے انٹی گریٹنگ فیکٹر کہتے ہے۔اس فنکشن $\mu(x)$ کی مدد سے ہم ایکویشنز (2) کو حل کریں گے۔ $\mu(x)$ کوایکویشنز (2) سے ضرب دینے پر ہمیں حاصل ہوگا

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)y = \frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)\mathrm{Q}(x) \_\_\_\_\_ 3$$

اس ایکویشن کوانٹی گریٹ کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا

$$\mu(x)y\int \mu(x)\mathrm{Q}(x)dx \_\_\_\_\_ 3A$$

اب ہم انٹی گریٹنگ فیکٹر $\mu(x)$ کی مقدار کوایکویشن (3) سے حاصل کریں گے۔

$$\frac{d\mu}{dx} + [\mu(x)y] = \mu(x)\frac{dy}{dx} + y\frac{d\mu(x)}{dx} = \mu\frac{dy}{dx} + \mu py$$

اس مساوات میں ایک جیسی دکھنے والی ٹرمس کا مقابلہ کریں گےتو ہمیں حاصل ہوگا

$$\frac{d\mu}{dx} + \mu(x)p(x) \_\_\_\_\_ 4$$

اس مساوات کوانٹی گریٹ کرنے پر

$$\mu(x) = \exp[\int p(x)dx]$$

اب ہم اس طریقہ کار کو ایک مثال کے ذریعہ سمجھائیں گے۔

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x$$

مساوات 4 کو انٹی گریٹنگ فیکٹر کرنے پر $\mu(x) = \exp[\int 2x dx]$

$\mu(x) = \exp(x^2)$ (مساوات 3A)

$$y.\exp(x^2) = 4\int x\exp(x^2)dx$$

انٹی گریٹنگ کرنے پر

$$y.\exp(x^2) = 2\exp(x^2) + c$$

$$y = 2 + c\exp[-x^2]$$

4.3 (اعلیٰ ترتیب کا عام تفریقی مساوات) Higher Order Ordinary Differential Equations

اب تک ہم نے پہلے ترتیب یا فرسٹ آرڈر ODE پر بحث کی' آیئے اب ہم اپنی توجہ دوسرے اور اس سے زیادہ یا اعلیٰ ترتیب (ہائیر آرڈر) کے ODE اور ان کے حال پر کرتے ہیں۔اس سے پہلے ہم ایک اہم اصول' اصولِ انطباق پر بحث کریں گے جس کا ہائیر آرڈر ODE کو حل کرنے میں استعمال ہوتا ہے۔

4.3.1 سوپر پوزیشن پرنسپل (اصول انطباق)

کسی بھی اعلیٰ ترتیب (ہائیر آرڈر) تفریقی مساوات کے زیادہ حل ہوتے ہیں۔

ایک عام لینئر ODE جس کا آرڈر n ہے اُس کو اس طرح لکھا جائے گا۔

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + - - - - + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)\,y = 0$$

اس مساوات کے 'n' لینئر لی انڈی پنڈنٹ سلیوشنز یا حل ہوتے ہے' ان سب حلوں کا مجموعہ (لینئر سوپوزیشن) بھی ایک حل ہوگا۔فرض کیجئے کہ $y_1(x), y_2(x) \ldots\ldots y_n(x)$ ایکیوشن A کا حل ہے' تو ان کا جوڑ (لینئر کامبی نیشن)

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + C_ny_n(x)$$

'n' سلیوشنز کا مجموعہ یا لینئر سوپر پوزیشن کہلائے گا اور یہ بھی مساوات (A) کا حل ہوگا۔

کسی بھی فنکشن یا سلیوشن کے (خطی انڈی پنڈنس) لینئر انڈی پنڈنس کے لیے ضروری ہے کہ

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + C_ny_n(x) = 0$$

اور یہ مساوات صفر (0) ہوگی جب

$$C_1 = C_2 = \dots\dots\dots\dots\dots = C_{n=0}$$

آ گے آنے والے حصے (سیکشن) میں مختلف اقسام کے دوسری ترتیب کو تفریقی مساوات (اسنڈنگ آرڈر ODE) پر بحث کریں گے۔

4.3.2 سیکنڈ آرڈر ہوموجینیز ایکیوشن وتھ کانسٹنڈ کوافی شنٹ (دوسری ترتیب کی یکساں تفریقی مساوات مستقل شرح کا ساتھ)

ایک عام سیکنڈ آرڈر ہوموجینیز مساوات پر غور کیجئے، جس کو معیاری شکل (اسٹنڈرڈ فام) میں اس طرح لکھا جائے گا۔

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_0\frac{dy}{dx} + q_0y = 0 \qquad 1$$

جہاں P_0 اور Q_0 مستقل یا کانسٹنٹ ہے۔اوپر دی گئی مساوات کو حل کرنے کے لیے ہم کیرکٹرسٹک ایکویشن کا تریقے کو استعمال کریں گے۔مساوات (1) کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$(D^2 + p_0D + q_0)y = 0 \qquad 2$$

یہاں D ایک قطعی آپریٹر (لینیئر آپریٹر) ہے جو $D = \frac{d}{dx}$ کے مساوی ہے۔

مساوات (2) میں بریکٹ کے اندر والی مقدار کو صفر کے مساوی کیا جانے پر حاصل ہونے والی الجبریک (ایکویشن) مساوات ہوگی

$$D^2 + p_0D + q_0 = 0 \qquad 3$$

اور اس آکسیلری یا کیریکٹرسٹک مساوات کہتے ہیں۔اس الجبریک مساوات (3) کو حل کرنے سے ہمیں دوسرے ترتیب (سیکنڈ آرڈر) ODE کا حل حاصل ہوگا۔آیئے اب مساوات (3) کو حل کرنے کی ترکیب دیکھتے ہیں۔الجبریک مساوات ایکیوشن (3) کی شکل کے روٹس تین اقسام کے ہوتے ہیں

(i) رئیل (حقیقی) اوران ایکیول (غیر مساوی)

(ii) رئیل اورا یکیول (مساوی)

(iii) کامپلکس۔کانجوگیٹ پیر (جوڑی)

پہلا کیس(i):۔ روٹس رئیل اور غیر مساوی

فرض کیجئے کہ 'a' اور 'b' مساوات (3) کے روٹس ہیں، تب ہمیں

$(D - a)(D - b)\,y = 0$

$(D - a)\,y_1 = 0 \qquad (D - b)\,y_2 = 0$

$Dy_1 = ay_1$ __________3A $Dy_2 = by_2$

________3B

اوپر دئے گئے دو مساواتوں سے ہم دیکھ سکتے ہے کہ کس طرح ایک سیکنڈ آرڈر مساوات دو پہلے ترتیب (فرسٹ آرڈر) کی مساواتوں میں تبدیل ہوگئی۔ اب ہم پچھلے سیکشن میں فرسٹ آرڈر لینیئر ڈیفرنشیل مساوات کے حل کے استعمال سے مساوات 3(A) اور 3(B) کو حل کریں گے۔ 3(A) اور 3(B) اس طرح لکھیں گے

$$y_1 = c_1 e^{ax}, y_2 = c_2 e^{bx}$$

اب سب سے عام یا عمومی حل (جنرل سلیوشن) اوپر دئے گئے دو قاطی انڈی پنڈنٹ حلوں y_1 اور y_2 کا قطعی جوڑ (لینیئر کامبی نیشن) ہوگا

$$y = y + y_2, y = c_1 e^{ax} + c_2 e^{bx}$$

دوسرا کیس (ii): جب روٹس رئیل اور مساوی (رئیل اور ایکیول)

دونوں روٹس مساوی ہے یعنی $a = b$ ایسی صورت میں

$$(D-a)(D-a)y = o \text{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 3c}$$

$y_1 = C_3 e^{ax}$ اس صورت کا حل ہوگا

دوسرا قاطی (لنئیر لی) انڈی پنڈنٹ سلیوشن معلوم کرنے کے لیے فرض کیجئے کہ

$(D-a)\, y_2 = u$ ______________3d

اس مساوات کے استعمال مساوات (3c) بن جائے گا

$(D-a)\, u = 0$

اب اوپر دئے گئے مساوات ایک فرسٹ آرڈر ODE ہے اور اس کا حل ہوگا

$u = C_4 e^{ax}$

اگر ہم اب 'u' کو مساوات 3d میں قائم مقام (سبٹی ٹیوٹ) کریں گے تو

$(D-a)\, y_2 = C_4 e^{ax}$

$(Dy_2 - ay_2) = C_4 e^{ax}$

اب یہ مساوات بھی ایک ہی فرسٹ آرڈر ODE ہیں اور قطعی فرسٹ آرڈر ODE کی حل کی مدد سے

$$y_2 = (C_5x + C_6)e^{ax}$$

اس طرح مساوات (2) کا عمومی حل (جنرل سلیوشن) ہوگا

$$y = y_1 + y_2 = C_4e^{ax} + (C_5x + C_6)e^{ax}$$

$$y = (Mx + N)e^{ax}$$

جہاں پر متغیرہ کی تعارفِ نو (ری ڈیفائننگ وریئیبل) اس طرح کی

$$M = C_5 \quad , \quad N = C_4+C_6$$

تیسرا کیس (iii) جب روٹس کامپلکس کانجوگیٹ پیر ہیں

اس حال کیس (i) کی طرح ہی معلوم کریں گے، صفائے اس کے $b = a^*$ یعنی 'a' 'b' کا کامپلکس کانجوگیٹ ہوگا۔

4.3.3 دوسری ترتیب کی غیر یکساں تفریقی مساوات (Second Order Non-homgeneous differentail equations)

Mایک دوسری ترتیب کی نان ہوموجینیز تفریقی مساوات جس کے مستقل شرح ہے کی معیاری شکل (اسٹناڈرڈ فام) ہوگی۔

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_0\frac{dy}{dx} + q_0y = f(x) \_\_\_\_\_\_\_\_ 4$$

اوپر دی گئی مساوات کو حل کرنے کا کوئی طریقہ ہیں۔ ہم 'سکسیس سیوانٹی گریشن' کے طریقہ کو استعمال کریں گے جو سیکشن 1.3.2 میں استعمال کئے گئے طریقہ مماثل (similar) ہے۔ مساوات (4) کے لیے کیریکٹرسٹک مساوات اس طرح ہوگی۔

$$(D^2 + p_0D + q_0)y = f(x) \_\_\_\_\_\_\_\_ 5$$

فرض کریئے کہ 'a' اور 'b' مساوات 5 کے روٹس ہے، تب

$$(D - a)(D - b)y = f(x)$$

$$(D - a)u = f(x) \_\_\_\_\_\_\_\_ 5A$$

جہاں ہم نے $(D - b)y = u$ ________5B مانا ہے۔

اس طرح اب ہمارے دو فرسٹ آرڈر ODE (پہلی ترتیب کی مساوتیں ہیں) جنہیں ہم آسانی سے حل کرسکتے ہیں۔ مساوات 5A کو 2.1.B میں دئے طریقے سے حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا

$$u(e^{bx}\int f(x)e^{-ax}dx + c_1e^{ax} = \overline{G}(x)$$

اوپر حاصل ہونے والی 'u' کے مقدار کو مساوات 5B میں قائم مقام (بدلے گئے) سبسٹی ٹیوٹ کریں گے،اور حل کریں گے تو

$$y(x) = e^{bx}\int \overline{G}(x)e^{-bx}dx + c_2 e^{bx}$$

یہ مساوات 4 کا مطلوبہ حل ہے، سکسیس سیوانٹی گریشن کی مدد سے کسی بھی Second Order Non-homgeneous differentail equations کا حل معلوم کیا جاسکتا ہے۔اگر f(x) کی شکل پیچیدہ ہوتو اس طریقہ کو استعمال کرنا مشکل ہوتا ہے۔

4.4 گلاسری:(Glossary)

ڈیری ویٹیو:۔ڈیری ویٹیو (مشتق) کسی شئے (dependant variable) میں کسی دوسری شئے (independent variable) کے حساب سے مقابلہ ہونے والا بدلاؤ کی پیائش کرتا ہے۔مثال کے طور پر رفتار (velocity) وقت کے ساتھ پوسیشن نے بدلاؤ کی پیائش کرتا ہے۔

آرڈر (ترتیب):۔کسی مساوات میں ظاہر ہونے یا آنے والا سب اعلیٰ (Highest) ڈیریویٹیو ۔

ڈگری (درجہ):۔کسی بھی مساوات میں سب سے اعلیٰ ترتیب کے ڈیریکیٹیو کی طاقت جب مساوات میں مکمل طاقت (integer power) ہو۔

لینئر ایکویشن (قطعی مساوات): ایسی مساوات جس میں ہر شئے (ٹرم) یا تو مستقل ہوتی ہے یا مستقل اور متغیر (variable) کا ضرب ہوتی ہے۔

سوپر پوزیشن:۔ہائیر آرڈر (اعلیٰ ترتیب) کے ODE کے مختلف سیلوشن کا جوڑ (کامبی نیشن) بھی اس مساوات کا ایک سیلوشن ہوتا ہے۔

4.5 یاد رکھنے کے نکات (Points to remeber)

☆ تفریقی مساوات (ڈیفرنشیل ایکیوشن) ایسی مساوات ہوتی ہے جس میں ڈیریویٹیوس ہوتا ہیں۔

☆ تفریقی مساوات میں سب سے اعلیٰ (highest) ڈیریویٹف کے ترتیب (آرڈر) کی بنیاد پہ انہیں پہلے، دوسرے یا اکیلا ترتیب کی تفریقی مساوات کہتے ہیں۔

☆ آرڈی نری ڈیفرنشیل ایکویشنز (ODE) ایسی مساوات ہوتے ہے جس میں آرڈینری ڈیریویٹفس ہوتے ہیں یعنی واحد انڈی پنڈنٹ وریبلس کے ڈیریویٹفس ۔

ایسی تفریقی مساوات جو صفر کے برابر ہو جسے یکساں (ہوموجینیز) ڈیفرنشیل ایکویشن کہتے ہیں جبکہ اگر وہ کسی فنکشن f(x) کے برابر ہو تو اُسے غیر یکساں (نان ہوموجینیز) ڈیفرنشیل ایکویشن کہتے ہیں۔

☆ اس چیاپٹر میں ہم نے دوطرح کے ڈیریویٹفس پہلے ترتیب (فرسٹ آرڈر) کے ODE پر نظر ڈالی۔

- سپریبل ویرئیبل ایکویشن:۔ایسی مساوات کوحل کرنے کے لیے پہلے ہم ویریبلس کوالگ (سپریٹ) کریں گےاور پھر انہیں انٹی گریٹ کریں گے۔

- لینئر فرسٹ آرڈر ODE:۔جس کاحل ہم انٹی گریٹنگ فیکٹر طریقہ سے معلوم کرتے ہیں۔

☆ اعلیٰ ترتیب کی تفریقی مساوات (ہائیر آرڈر ڈیفرنشیل ایکویشن) کےایک سے زیادہ سیلوشن ہوتے ہیں اوران سیلوشن کا جوڑ (لینئر کامبینیشنز) بھی ایک سیلوشن ہوتاہے،اسے اصول انطباق یا سوپر پوزیشن پرنسپل کہتے ہیں۔

☆ ایک دوسری ترتیب کے ODE (سیکنڈ آرڈر) کوحل کرنے کے لئے ہم نے کیریکٹرسٹک ایکویشن کے طریقہ کا استعمال کیا جہاں ODE کوایک الجبریک مساوات میں تبدیل کیا جاتا ہے۔اس طرح ایک سیکنڈ آرڈر ODE، پہلے ترتیب (فرسٹ آرڈر) کے ODE میں تبدیل ہوجاتاہےاوران کاحل آسانی سے معلوم کیا جاسکتاہے۔

4.6 نمونہ امتحانی سوالات:

I۔ ذیل کےسوالوں کے جواب تفصیل سے دیجیے۔

(1) $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-2y=0$ مساوات کوحل کیجیے۔

(2) $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$ کلاسیکلی لینئر ہارمونک آسیلیٹر کے مساوات کوحل کریں۔

(3) $\frac{d^2f}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}+ay=0$ مساوات کوحل کیجیے

(4) $\frac{d^2y}{dx^2}-2y'+y=2\cos x$ مساوات کوسیکس سیوانٹی گریشنس کے ذریعہ حل کیجیے۔

II۔ ذیل کےسوالوں کے جواب مختصر سے دیجیے۔

(1) سپریشن آف ویروبلس کے ذریعہ $\frac{dy}{dx}-xy^2=0$ مساوات کوحل کیجیے۔

(2) سپریشن آف ویروبلس کے ذریعہ $x^3y^1=xy^2=4y^2$ مساوات کوحل کیجیے۔

(3) $\frac{dy}{dx}-ycatx+\cos ecx=0$ انٹی گریٹنگ فیکٹر کومعلوم کیجیے۔

(4) $\frac{dy}{dx}+x=\frac{y}{x}$ ڈیفرینشیل مساوات کوحل کیجیے۔

(5) ایک فزیکل پراسیس دی گئی تفرقی مساوات کے مطابق کام کرتاہے۔ $\frac{dF}{dt}=-\lambda F, F(t=0)=F_0$، دیے گئے انشیل کنڈیشن ابتدائی شریعت کی مدد سے F(t) کومعلوم کیجیے۔

اکائی 12 ٹھوس اجسام کی لچک کے خواص

ساخت

12.1 اغراض و مقاصد:

اس اکائی میں لچک کے مفہوم کو سمجھایا گیا ہے اور اس کے ادراک کے لئے زور اور بگاڑ انکے باہمی ربط کی تشریح کی گئی ہے۔ اس اکائی کو مکمل کر لینے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ :

1. ٹھوس اجسام کی لچک کے مستقلوں کی تعریف کر سکیں۔
2. لچک کے مختلف مستقلات کے درمیان ربط کو جان سکیں۔
3. لچک کے مستقلات اور مادی اشیاء کی طاقت کے مابین پائے جانے والے رشتوں کی توضیح کر سکیں۔

12.2 تمہید :

سائنس اور ٹکنالوجی دونوں میں ٹھوس اجسام کی لچک کے خواص بہت اہمیت کے حامل ہیں۔ ان خواص کی تخمین سے ہمیں جوہر اور روانوں (Ions) کے مابین عامل قوتوں کے بارے میں معلومات حاصل ہوتی ہیں۔ ٹھوس اجسام کی ساخت میں بندشی قوتوں کی نوعیت کو سمجھنے کے ضمن میں یہ معلومات اہم ہو جاتی ہیں۔ چونکہ مادی اجسام کے میکانی رویئے کو ان کی لچک کے خواص کی مدد سے بیان کیا جاتا ہے اس لئے انجینئرنگ اور ڈیزائننگ میں ان کی پیائش اہمیت کی حامل ہوتی ہے۔

ٹھوس کے سالمات کا درمیانی فاصلہ ایک خاص قیمت سے زیادہ ہو تو یہ سالمات ایک دوسرے کو اپنی طرف کھینچتے ہیں۔ فاصلے کی یہی خاص قیمت ''توازنی فاصلہ (Equilibrium Distance)'' کہلاتی ہے۔ اگر بین سالماتی فاصلے اس توازنی قیمت سے کم ہوں تو ان کے درمیان ایک دافع قوت وقوع میں آتی ہے اور توازنی حالت میں یہی کشش اور دفع کی قوتیں ایک دوسرے کو زائل کر دیتی ہیں۔

جب ہم ایک سلاخ کو کھینچتے ہیں تو یہی بیرونی قوتیں جوہر در جوہر منتقل ہوتی ہو اور سلاخ کے دوسرے سرے تک پہونچ جاتی ہیں جس کی وجہ سے بین سالماتی فاصلوں میں آہستہ آہستہ اضافہ ہوتا جاتا ہے اور ان کے درمیان قوت کشش عمل پیرا ہو جاتی ہے جو سلاخ کو اپنے اصلی ابعاد پر واپس لانے کی متقاضی ہوتی ہے۔ اگر سلاخ کو بھینچا جائے تو سالمات ایک دوسرے کو دفع کرتے ہیں اور دفع قوت کا تقاضہ ہوتا ہے کہ سلاخ اپنی اصلی شکل پر عود کرائے۔ جب بیرونی قوت کو ہٹا لیا جاتا ہے تو کشش اور دفع کی ان قوتوں کے مجموعی اثر کے تحت سلاخ اپنی اصلی شکل اور سائیز پر واپس آجاتی ہے لچک، جسم کی اسی خاصیت کا نام ہے۔

بیرونی قوتوں کو ہٹانے کے بعد اگر جسم فوری اپنی شکل اور سائیز پر واپس آجائے تو یہی جسم کامل لچک دار جسم کہلائے گا۔ ایک کھینچی ہوئی ربر کی پٹی یا ایک خمیدہ دھاتی پتر ان میں بگاڑ پیدا کرنے والی قوتوں کے ہٹانے پر اپنی اصلی ہئیت پر واپس آجاتے ہیں اس لئے ان کے مادے لچکدار کہلائیں گے۔ سیسے کی ایک پتری کو موڑنے کے بعد اگر چھوڑ دیا جائے تو سیسے کی پتری مڑ تو جاتی ہے، پر از خود اصلی وضع پر واپس نہیں آتی۔ لہٰذا سیسہ لچک دار نہیں ہے۔ ایسے مادے جو بیرونی قوتوں کے ہٹائے جانے کے بعد اپنی اصلی حالت پر واپس نہیں آتے بلکہ اپنی بگڑی ہوئی شکل پر

ہی قائم رہنے کا رجحان رکھتے ہیں ، پلاسٹک (Plastics) کہلاتے ہیں۔ قدرت میں ہمیں نہ کوئی کامل لچک دار مادے ملتے ہیں اور نہ ہی کامل پلاسٹک۔ کوارٹز (Quartz)ریشہ قریب قریب کامل لچک دار ہے اسی لئے تعلقی تار کے طور پر استعمال کیا جاتا ہے۔پٹی (Putty)ڈھلنے والے جسم کی ایک مثال ہے جو پلاسٹک کہلاتی ہے۔ اکثر مادے ان دو انتہاؤں کے بین ہوتے ہیں۔

12.5 ہوکس کا کلیہ (Hooks Law) :

اگر ہم ایک تار کو لے کر اسے کھینچتے جائیں تو ایک حد ایسی آئے گی کہ اس کو عبور کرنے کے بعد اگر کھینچنے والی قوت کو ہٹا دیا جائے تو تار اپنے اصلی طول پر واپس نہیں آئے گا اور تار میں ایک مستقل بگاڑ پیدا ہو جائے گا۔ اس حد کو لچک کی حد(Elastic Limit) کہتے ہیں۔ رابرٹ ہوک(Robert Hook) نے زور اور اس سے پیدا ہونے والی بگاڑ میں تعلق بتانے والا ایک کلیہ پیش کیا جس کو اسی کے نام سے موسوم کیا جاتا ہے۔ اس کلیہ کو اس طرح بیان کیا جاتا ہے "لچک کی حد کے اندر زور اور بگاڑ میں راست تناسب ہوتا ہے۔یعنی

تشریح:

زور $\propto$ بگاڑ

زور(Strain) $\propto$ بگاڑ(Stress)

لچک کا مقیاس $= \dfrac{stress\text{ زور}}{strain\text{ بگاڑ}}$ = (E) ایک مستقل(Constant)

اس مستقلE کو معیار لچک یا لچک کا مقیاس کہا جاتا ہے۔ اب ہم لچک کے مختلف معیاروں کی تعریفیں کریں گے۔

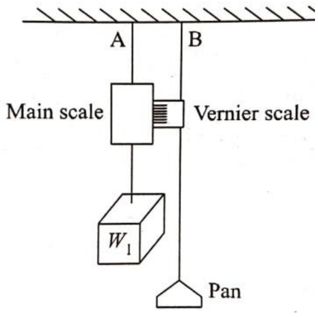
اس کی SI اکائی Nm^{-2} ہے یا(Pa)Pascal ہے CGS اکائی $dynecm^{-2}$ اور ابعادی ضابطہ($ML^{-1}T^{-2}$)مقیاس لچک اور زور کے اکائیاں اور ابعاد ایک ہی ہیں۔

12.5.1 دھاتی تار پر اضافہ بوجھ کا ردعمل, زور(Stress)اور بگاڑ(Straing) کا خم /ڈائیگرام:

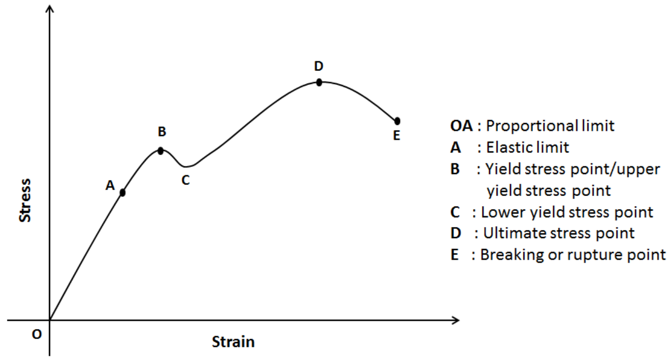
:(Behaviour of a metal wire under increasing load)

دو دھاتی تار A,B پر اضافہ بوجھ معلوم کرنے کے لئے A ایک دھاتی تار کو ایک استواری سہارے سے لٹکایا جاتا ہے۔ اور دوسرے سرے پر بوجھ بڑھایا جاتا ہے۔ B دھاتی تار کو A سے فکسڈ(Fixed) کیا جاتا ہے۔ A تار کو Main scale اور B تار پر Vernier Scale کو لگا دیا جائے۔ شکل 1.1 کی طرح ہے۔

تار A پر بوجھ کو بڑھاتے ہوئے Vernier اور main scale رِڈینگ کو معلوم کیا جائے۔ اس وقت تک کہ تار ٹوٹ نہ جائے۔ ایک ترسیم Y محور پر زور اور x محور پر بگاڑ کھینچی جائے جو شکل 1.2 کی طرح ہے۔



شکل:1.2



شکل۔1.1

گراف کا حصہ OA ایک خط مستقیم ہے۔ نقطہ A تک بوجھ کے لگانے پر تار کے طول میں بہت کم اضافہ ہوتا ہے۔ اس حصہ میں یعنی نقطہ A تک زور راست تناسب ہوتا ہے۔ بگاڑ کے بالفاظ دیگر یہ ہک (Hooke) کے کلیہ کی پابندی کرتا ہے۔ تار پر لگایا ہوا بوجھ ہٹالیا جائے تو وہ پھر اپنے ابتدائی طول پر آجاتا ہے۔ نقطہ A کو نسبتی حد (Proportional Limit) کہتے ہیں۔

نقطہ A سے آگے نقطہ B تک گراف ترسیم زرا سا منحنی ہے۔ اگر ترسیم میں O اور B کے درمیان کسی بھی مقام پر تار سے بوجھ کو ہٹالیا جائے تب یہ اپنی ابتدائی حالت پر واپس لوٹ آتا ہے۔ نقطہ B کو لچک کی حد (Elastic Limit) کہتے ہیں لیکن A اور B کے درمیان زور فساد کے تناسب نہیں ہوتا۔

بعض مادوں میں ہک (Hookes) کا کلیہ نقطہ B تک پابندی کرتا ہے۔ ایسے مادوں میں نقطہ A اور B دوسرے پر منطق ہوتے ہیں۔ یعنی نقطہ A لچکی حد ہوگا۔ نقطہ B کے بعد اگر تار کے بوجھ میں مسلسل اضافہ کیا جائے تو تار مغلوب (Yield) ہونے لگتا ہے۔ اسے وزن کو جس کے لگانے کے بعد تار میں لچک کے خواص باقی نہ رہیں۔ نقطہ مغلوبیت (Yield Point) کہتے ہیں۔

یہاں تار ہک (Hooke) کے کلیہ کی پابندی نہیں کرتا اور اگر اس پر سے بوجھ ہٹالیا جائے تو وہ اپنی اصلی حالت کو اختیار بھی نہیں کرتا۔ اس حصہ میں یعنی نقطہ B سے C تک تار کے بوجھ میں ذرا بھی اضافہ کیا جائے تو بگاڑ میں بہت زیادہ اضافہ ہوجاتا ہے۔ اس طرح کے ردِ عمل کو ترسیم میں ٹوٹی ہوئی خطہ سے ظاہر کیا گیا ہے۔ جو x محور پر 'o' پر نہیں بلکہ 'p' پر خطا کرتی ہے۔ اس طرح سے OP ایک دائی تغیر ہے۔ گراف کے اس حصہ میں تار کے طول میں ایک مستقل اضافہ کو (Permanent Set) کہا جاتا ہے۔ نقطہ 'C' کے بعد بوجھ میں اضافے کے بغیر ہی تار کے طور میں خود بہ خود اضافہ ہوتا جاتا ہے۔ اور تار باریک ہونے لگتا ہے یعنی اس کے قطر میں مسلسل کمی ہونے لگتی ہے۔ نقطہ 'D' کے بعد تار میں پتلا پن ہموار طور پر زیادہ دیر نہیں ٹکے گا اور تار میں پھوٹن واقع ہوگی۔ اور فوری طور پر زور کم ہوجائے گا۔ خود بہ خود حصہ DE حاصل ہوگا۔ نقطہ E پر تار بالا آخر ٹوٹ جائے گا۔ E کو نقطہ شکستگی (Breaking Point) کہتے ہیں۔

اگر لچکی حد اور نقطہ شکستگی کے درمیان بگاڑ زیادہ ہو اسے مادوں کو تمرد (Ductile) کہتے ہیں۔ اسے مادوں کے باریک تار بنا سکتے ہیں۔

اگر لچکی حد اور نقطہ شکستگی کے درمیان فاصلہ بہت چھوٹا سا یہ تار لچکی حد پار کرتے ہی ٹوٹ جائے اسے مادے کو پھوٹک (Brittle) کہتے ہیں۔

12.5.2 لچک کی تھکان(Elastic Fatigue) :

جب ایک جسم پر مسلسل زور لگایا جاتا ہے۔ لچک کی حد کے اندر ہی وہ کمزور پڑ جاتا ہے۔ کیونکہ یہ لچکی خصوصیت عارضی طور پر کھو بیٹھتا ہے اگر جسم کی موجودہ حالت کو جانیں بغیر زیادہ زور لگائیں تب اس میں شرح پیدا ہو گی اور جسم ٹوٹ جائے گا۔ یہ زور شکستگی سے کم زور پر بھی ٹوٹ سکتا ہے۔ مثلاً ایک دھاتی تار جیسے تانبہ کے تار کو ایک دفعہ موڑنے پر یہ نہیں ٹوٹتا ہے لیکن جب اسے مسلسل ایک ہی مقام پر موڑنے پر یہ ٹوٹ جاتا ہے۔ یہ مزوری یا لچک کی خاصیت میں پیدا ہونے والا عارضی نقصان جب کہ تار پر مسلسل زور لگایا جائے لچک کی تھکان(Elastic Fatigue) کہا جاتا ہے۔ اگر عناصر کو کچھ وقت تک رکھ چھوڑ دیا جائے یعنی اس پر کچھ وقت کے لئے فساد یا بگاڑ عائد نہ کیا جائے یہ اپنے اصلی لچکی خصوصیت حاصل کر لے گا۔

12.5.3 تناؤ والے تار اور مروڑی والے تار میں کیا گیا کام

:(Work done in stretching and work done in twisting a wire)

a) تناؤ والے تار میں کیا گیا کام(Stretching wire in work done):

فرض کرو کہ ایک پتلا ہموار تار جس کا طبعی طول 'L' اور عرضی تراش کا رقبہ 'A' ہے۔ ایک سرے کو مستقل رکھ کر دوسرے سرے پر بیرونی قوت عائد کی جائے تب تار میں تناؤ ہو گا۔ اور یہ قوت ہمیشہ اس تار کے تناؤ کے مساوی ہو گی اور اسرہ(acceleration) صفر ہو گا۔

اندرونی لچک کی قوت 'f' اور تار میں اضافہ 'x' ہو تو ینگ کا معیار Y یعنی۔

$$Y = \frac{Stress\ \text{زور}}{Strain\ \text{بگاڑ}}$$

$$Y = \frac{f/A}{x/L}$$

$$Y = \frac{fL}{Ax}$$

$$f = \frac{YAX}{L} \qquad \text{------}(1)$$

تناسبی حد کے اندر اضافی طول عائد کی جائے تب دو قوتیں راست تناسب ہو گی۔ بیرونی قوت 'f' عائد کی جائے تب تار میں تناؤ 'dx' ہو گا۔

طئے شدہ کام۔(2) $dw = f dx$

مساوات(1) اور(2) سے

$$dw = \frac{YAX}{L} dx$$

‘L’ تار میں کل کام کے لیئے $x=l$, x=o حد کے اندر مجموعی اظہار(Integrating expression)ہو گا۔

$$\int dw = \int_o^l \frac{YAX}{L} dx$$

$$W = \frac{YA}{L} \int_o^l x dx$$

$$W = \frac{YA}{L} \left[\frac{x^2}{2}\right]_o^l$$

$$W = \frac{YA}{L} \left[\frac{l^2}{2} - \frac{o^2}{2}\right]$$

$$W = \frac{YA}{L} \frac{l^2}{2}$$

$$W = \frac{YAl}{L} \frac{l}{2} \quad \text{------(3)}$$

مساوات(1)سے $f = \frac{YAx}{L}$

تار میں کل تناؤ ہو تو x=l اور f=mg تب

$$mg = \frac{YAx}{L} \quad \text{.........} \quad (4)$$

مساوات(3)اور(4)سے

$$W = Mg.\frac{l}{2}$$

$$W = \frac{1}{2} mgl$$

$$W = \frac{1}{2} F.l \qquad (\because F = mg)$$

یہ مساوات ہی تناؤ والے تار میں کیا گیا کام ہے۔

b) مروڑنا تار میں کیا گیا کام(Work done in twisting a wire) :

فرض کرو کہ ایک استوانی(Cylindrical) تار کا طول 'L' اور نصف قطر (radius) 'r' ہے۔ ایک سرے کو مستقل رکھ کر دوسرے سرے پر ٹارک(Torque)عائد کی جائے تب تار میں مروڑی زاویہ 'θ' ہو گا۔

مروڑنا تار میں ہوا کل کام توانائی بالقوں کی شکل میں محفوظ ہو گی۔یعنی

$$e = c\theta \qquad \text{.........} \qquad (1)$$

مروڑنا تار کا زاویہ 'θ' ہو تب تار میں ہوا کام

$$ed\theta = c\theta d\theta$$

'L' مروڑی تار میں کل کام کے لیئے $x=0$, $x=\theta$ حد کے اندر مجموعی اظہار ہو گا یعنی

$$W = \int_o^\theta c\theta d\theta$$ مروڑنا تار میں ہوا کل کام

$$W = c \int_o^\theta \theta d\theta$$

$$W = C\left[\frac{\theta^2}{2}\right]_o^\theta$$

$$W = C\left[\frac{\theta^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right]$$

$$W = \frac{c\theta^2}{2}$$

$$W = \frac{1}{2}.c\theta^2$$

یہ مساوات ہی مروڑی تار میں کیا گیا کام ہے۔

مثال: اگر ینگ کے معیار لچک ایک سادہ کا $1.2\text{x}10^{11}\text{Nm}^{-2}$ ہے تب تار کو جس کا طول 1.5m اور عرفی تراش کا رقبہ 2mm^2 ہے کو 4kg بوجھ جو اس کے نچلے سرے سے لٹکایا گیا ہے کے لیے کیا گیا کام معلوم کرو۔

حل:

$Y=1.2\text{x}10^{11}$ N m^{-2} ; L=1.5m ; A=2mm^2 = $2\text{x}10^{-6}$ m^2 ; M= 4 Kg

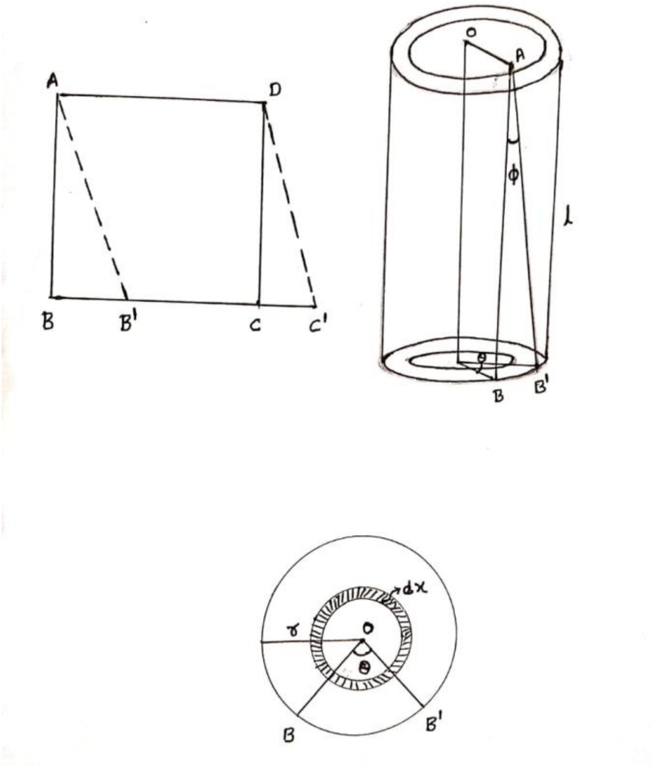
W=کام $= \frac{1}{2}$ تانی ہوئی قوت x اضافہ طول

$$\text{لیکن}\ e = \frac{FL}{AY}$$

$$w = \frac{1}{2} \times \frac{F^2L}{AY} = \frac{1}{2} \times \frac{(Mg)^2L}{AY} = \frac{1}{2} \times \frac{(4\times9.8)^2\times1.5}{2\times10^{-6}\times1.2\times10^{11}} = 0.0096\text{J}$$

استوانی پر مروڑی جفتہ (Twisting couple on a cylindrical) :

جزی معیار (Shearing Modulus) کی ایک خاصی اہمیت ہی مروڑنا (Twisting) ہے۔ استوانیا (Cylindrical) مروڑنا کی ایک رخہ کا مستعطیل (Rectangular) ABCD ہے۔ اس مستعطیل پر ایک قوت ٹارک (Torque) عمل کررہے ہے جس کی وجہ سے سطح ABCD بگڑ کر ABC'D' ہو جاتی ہے۔



شکل: 1.3

فرض کرو کہ ایک استوانی سلاخ (rod) کا طول 'l' اور نصف قطر (radius) 'r' ہے۔ ایک سرے کو مستقل رکھ کر دوسرے سرے سلاخ کی طول مستوی عمود پر مروڑی جفتہ (Twisting couple) عائد کی جائے تب تار میں طولی مروڑ کا زاویہ 'θ' ہو گا۔ اس سلاخ کے دوسرے سرے پر مروڑنی بحالی جفتہ (Twisting restoring couple) متضاد (Opposite) کی وجہ سے مساوی ہونگے۔ اس جفتہ کو معلوم کرنے کے لیے ٹھوس استوانی (Solid Cylindrical) میں عدد وسیع (Large Number) ہم مرکز (Concentric) مہین والڈ (Thin walled) استوانی یاں بنتے ہیں۔

فرض کرو کہ ایک کھوکھلا استوانی کا نصف قطر 'x' اور ریڈیل موٹائی (Radial Thickness) 'dx' ہے۔ سلاخ کو مروڑنے پر زاویہ 'θ' اور رم (rim) کا استوانی جزی زاویہ 'θ' ہوگا۔ جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے۔

$$BB' = l\emptyset \qquad \text{i.e}$$

$$x\theta = l\emptyset \qquad (BB' = x\theta)$$

$$\emptyset = \left(\frac{x}{l}\right)\theta \qquad \text{.........} \qquad (1)$$

اس مساوات سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ 'x' اگر اعظم (Maximum) ہو تو θ اعظم قدر ہوگا اور استوانی کی سب سے باہری حصہ کی بگاڑ اعظم ہو تو اندرونی حصہ اقل (Minimum) ہوگا۔

جزی زور (Shearing Stress) یکسانہ ہو تو استواری معیار (Rigidity modulus) N یعنی

$$N = \frac{(Shearing\ Stress)\ \text{جزی زور}}{(Shearing\ angle)\ \text{جزی زاویہ}}$$

$$N = \frac{F}{\emptyset}$$

$$F = N\emptyset \qquad \text{.......} \qquad (2)$$

مساوات (1) اور (2) سے

$$F = \frac{Nx\theta}{l} \qquad \text{.........} \qquad (2)$$

کھوکھلا استوانی کا رقبہ = $2\pi xdn$

رقبہ کے اوپر کل جزی قوت = $F \times Area$ (رقبہ)

کل جزی قوت = $2\pi ndx.\frac{Nx\theta}{l}$

$$2\pi N \frac{\theta}{l} x^2 dx \qquad =$$

OO' محور(axis) پر معیار حرکت(Momentum) کی قوت =

$$2\pi N \frac{\theta}{l} x^2 dx . x \qquad =$$

$$2\pi N \frac{\theta}{l} x^3 dx \qquad =$$

کل مروڑ جفتہ استوانی کے لیے x=0, x=r حد میں مجموعی اظہار(Integration expression) ہو گا۔

$$C = \int_o^r 2\pi N \frac{\theta}{l} x^3 dx$$

$$= \frac{2\pi N\theta}{l} \int_o^r x^3 dx$$

$$= \frac{2\pi N\theta}{l} \left[\frac{x^4}{4}\right]_o^r$$

$$C = \frac{2\pi N\theta}{l} \frac{r^4}{4}$$

$$C = \frac{\pi N\theta r^4}{2l}$$

اگر θ=1 radian ریڈین ہو تو مروڑی جفتہ فی اکائی ہو گا۔

$$C = \frac{\pi N r^4}{2}$$

اس مروڑنی جفتہ فی اکائی تار کو ہی ٹارزینل استواری(Torsion Rigidity) کہلاتی ہے۔

کھوکھلا استوانی کا طول یکساں ہو اور اندرونی نصف قطر 'r' اور بیرونی نصف قطر r_2 ہو تب استوانی مروڑنی جفتہ

$$C = \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{2\pi N\theta}{l}\right) x^3 dx$$

$$C = \frac{2\pi N\theta}{l} \left[\frac{x^4}{4}\right]_{r}^{r_2}$$

$$C = \frac{\pi N\theta}{2l} [{r_2}^4 - {r_1}^4]$$

اگر $\theta=1$ radian ہو تو مروڑنی جفتہ فی اکائی

$$C = \frac{\pi N}{2} [{r_2}^4 - {r_1}^4]$$

12.11 مروڑی رقاص (Torsional Pendulum):

مروڑی رقاص کے ذریعہ کسی تار کے مادے کی استواری کا معیار

:(Regidity modules of the material of a wire by Torsional Pendulum):

اصول (Principle):

ایک انتصابی تار کے نچلے سرے پر قرص (disc) کو ایک استواری سہارے سے لٹکا دیا جائے اور قرص کی ایک سمت میں موڑ اور پھر دوسرے سرے کو افقی مستوی (Horizontal plane) کی معکوس سمت کو ہی مروڑی رقاص (Torsional Pendulum) کہا جاتا ہے۔

پہلی مروڑر قاص (Torsion Pendulum) کو 1793ء میں رابرٹ لیسلی (Robert Leslie) نے تیار کیا ہے۔

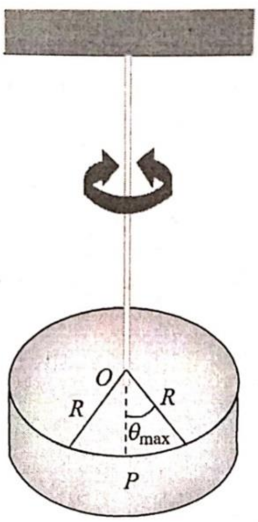
فرض کرو کہ ایک انتصابی تار کے نچلے سرے سے قرص (disc) کو اس طرح ملحق کیا گیا ہے کہ تار تشاکل قرص کے مرکز کمیت سے گزرتا ہے اور اس کی مستوئی کے علی القوانم بھی ہے۔ تار کے اوپری سرے کو ایک استوار سہارے کے ذریعہ جکڑ دیا گیا ہے۔

قرص (disc) کو اس کی اپنی مستوئی میں تار کے گرد ایک ہلکی سی گردش دے کر چھوڑ دیں تو یہ ایک چھوٹی سی قوس میں افقی مستوی اہتزاز (Oscillation) کرنا شروع کرے گا اسے اہتزاز (Oscillation) کو مروڑی اہتزاز (Torsion Oscillation) کہلاتے ہیں۔

قرص اور تار کی یہ ترسیب مروڑی رقاص کے طور پر مانی جاتی ہے اس کے یہ مروڑی اہتزاز، سادہ موسیقی نوعیت کے ہوتے ہیں اور ان کا وقت دوران T ہو گا۔

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}} \quad \text{---------} \quad (1)$$

تعلیقی محور کے گرد قرص کے جمود کا معیار اثر(Moment of Inertia) ہے اور 'C' اکائی مروڑ کے لئے درکار جفت ہے اس جفت کی قیمت ہوتی ہے۔



$$C = \frac{\pi n r^4}{2l} \quad ---------- \quad (2)$$

یہاں پر n: تار کے مادے کے استواری کا معیار

r: اس تار کی تراش عمودی کا نصف قطر

l: مروڑی کا طول

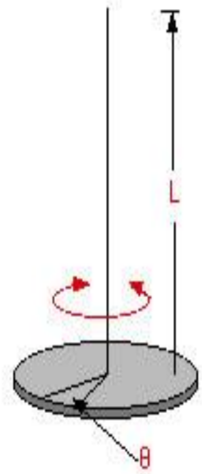
شکل:1.4

مساواتوں(1)اور(2) سے ہم بناسکتے ہیں کہ تار کے مادے کی استواری کا معیار ہو گا۔

$$n = \frac{8\pi I l}{r^4 T^2}$$

طریقہ عمل(Procedure):

حر دہ پیما کو استعمال کرتے ہوئے نمونہ تار کی تراشیں عمودی کا قطر(2r) معلوم کیجئے۔ تار کے طول کے ساتھ مختلف وضعتوں میں قطر کے کم سے کم دس مشاہدات لیجئے اور اوسط قطر محسوب کیجئے۔



شکل:1.5

معمولی ترازوں اور معیاری اوزان کو استعمال کر کے قرص کی کمیت معلوم کیجئے۔ دھاگے کو قرص کے گرد لپٹ کر اس کا محیط 2πR معلوم کیجئے۔ اور قرص کے نصف قطر(R) کو محسوب کیجئے۔ اب تعلیقی محور کے گرد قرص کے محور کے معیار اثر کی تحسیب کر سکتے ہیں۔ مدور قرص کے لئے I کی قیمت ہو گی۔

$$I = \frac{MR^2}{2}$$

کے مطابق مروڑی رقاص کو ترتیب دیجئے۔A اور B نقاطہ درمیان کے طول l کی پیمائش کیجئے۔ ایک چھوٹی پن کو موم کے ذریعہ قرص کے کنارے کے مقابل عموداً چھوڑ دیجئے۔ معمل کی جز پر ایک ایستادہ حوالے کی انتصابی پن کو مروڑی رقاص کے بالمقابل اس طرح رکھا جاتا ہے کہ رقاص کی سکونی حالت میں قرص سے جڑی ہوئی چھوٹی پن اس حوالے کی پن پر عین منطبق ہے۔ قرص کو اس کی اپنی مستوئی میں ایک چھوٹے زاویہ (Angle) میں گردش دیکر چھوڑ دیجئے تاکہ نظام میں مروڑی اہتزاز کا آغاز ہو جائے۔ 20 اہتزازوں (Oscillations) کے لئے درکار وقت 't' معلوم کیجئے۔ تجربے کو دھرائیے اور 't' کی دو آزمائشوں کا اوسط معلوم کیجئے۔ وقت دوران 'T' کو محسوب کیجئے۔

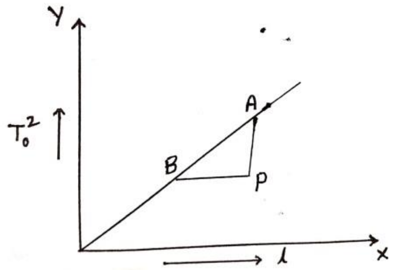
تار کے طول کو بدل کر l کی تین یا زائد قیمتوں کے لئے تجربہ کو دھرائیے۔

$\frac{l}{T^2}$ کی اوسط قیمت معلوم کر کے مساوات سے n کی قیمت معلوم کیجئے۔

l کو x– محور اور اس کے متناظر T^2 کو y– محور پر لیکر ایک ترسیم کھینچئے۔ آپ کو ایک خط مستقیم حاصل ہو گا۔ یہ مبدا سے گزرتا ہے۔ خط مستقیم کے ڈھلان کے مقلوب کو محسوب کیجئے۔

ڈھلان کے مقلوب کی مدد سے بھی تار کے مادے کے استواری کا معیار محسوب کر سکتے ہیں اس طرح کہ

$$n = \frac{8\pi I}{r^4}\ \frac{l}{T^2} \qquad Nm^{-2}$$



شکل: 1.6

احتیاطی تدابیر:

(1) تار کے تراش عمودی کے نصف قطر کی پیمائش بہت زیادہ صحت کے ساتھ کرنا چاہئے چونکہ ضابطہ یہ چوتھی قوت کے طور پر استعمال ہو رہا ہے۔

(2) مروڑی رقاص کا طول "l" حقیقت میں تار کا طول ہے۔

(3) اس امر کا یقین کر لیں کہ قرص کے اہتزاز (چھوٹے حصے کے ساتھ) اس کی اپنی مستوی میں ہوں۔ کسی اور سمت میں اس کی حرکت نہ ہونے پائے۔

رقاص (Torsional) کا اطلاق:

1. رقاص (Torsional) کو (Clock) میں استعمال کیا جاتا ہے۔
2. پالیمر (Polymer) کے خصوصیات کو معلوم کرنے کے لیے بھی رقاص (Torsional) ک استعمال کیا جاتا ہے۔
3. چند محققین نے یہ ثابت کرنے کی کوشش کئے ہیں کہ قوت رگڑھ (Frictional Forces) سخت رگڑھ اور محلول کے درمیان قوت رگڑھ (Frictional Forces) کو معلوم کیا جا سکتا ہے۔

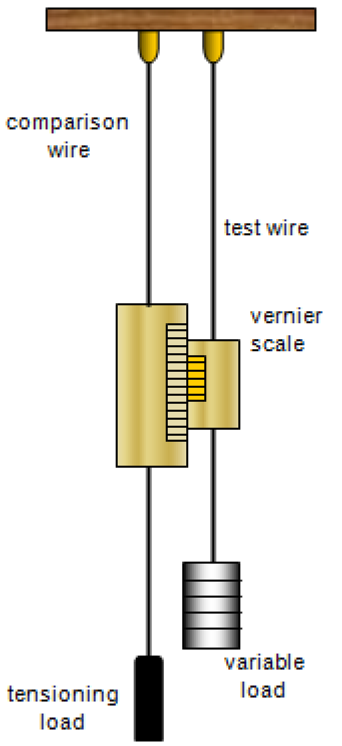
12.12 سرل کا طریقہ (Searle's Method):

سرل کا طریقہ سے کسی تار کے مادے کی جمود کا معیار اثر اور استواری کا معیار

(Determination of Rigidity modulus and moment of inertia by Searle's Method):

سرل کا طریقہ (Searle's Apparatus):

دو ایک ہی مادہ تار A اور B جن کے طول 'L' اور عرضی تراش کا رقبہ 'a' مساوی ہو گا۔ ایک استواری (Rigidity) سہارے سے لٹکا دیا گیا ہے۔ ان کے نچلے سرے پر دو مستعطیلی دھات کا فریم 'F' جیسا کہ شکل (1.1) میں لٹکایا جاتا ہے۔ ایک تار A کو تجرباتی تار جبکہ دوسرے B کو حوالہ تار کہا جاتا ہے۔ جس میں T تار کی مروڑی اہترازی حرکتے وقت ہے۔ ایک افق نما (spirit level) فریم کے ایک حصہ پر لگا رہتا ہے جس کا دوسرا سرا فریم میں لگئے ہوئے خردہ پیما پینچ نوں پر لٹکا رہتا ہے۔ جو زیر تجربہ تار پر انتصابی پڑی جس پر کہ mm ملی میٹر درجہ بندی کی گئی اور مروڑی تار اہترازی حرکت کر تا ہے۔



طریقہ عمل (working):

ایک مناسب سلاخ (bar) کو تجروباتی تار پر لٹکا یا جائے۔ تا کہ تار میں کسی قسم کا جھول نہ رہے۔ خردہ پیما کے پیچ کو اس طرح آگے پیچھے کی جانب گھمائیں تا کہ افق نما میں پایا جانے والا بلبلہ درمیان میں آ جائے۔ اس کے مشاہدوں کو قلم بند کیا جائے۔ دو میٹر (2m) کی درمیانی پر دوربین (Microscope) کی کراس تار کے ذریعہ سلاخ (Bar) نچلے سروں پر فوکس کیا جائے۔ اور سلاخ کو اس کی اپنی مستوئی میں ایک چھوٹے زاویہ میں گردش دیکر چھوڑ دیجئے تا کہ نظام میں مروڑی اہتراز کا آغاز ہو جائے۔ 20 اہترازوں کے لئے درکار وقت t_1 معلوم کرے۔ تجربے کو دھرایئے اور 't_2' کی دو آزمائشوں کا اوسط (Average) معلوم کرے۔ وقت دوران T کو محسوب کیجئے۔ اس تجربے کو 25، 30 اہترازوں کے لئے درکار وقت T معلوم کیجئے۔

اب حوالہ تار پر سلاخ (bar) کو لٹکایا جائے۔ سلاخ کو چھوٹے زاویہ میں گردش دیکر چھوڑ دیجئے۔ دوربین (Microscope) کی کراس تار (Crosswire) کے ذریعہ سلاخ (bar) کے 20, 25 اور 30 اہترازوں کے لئے درکار وقت T معلوم کیا جائے۔

زیر تجربہ تار کا نصف قطر(r)خردہ پیما کی مدد سے تار کے 6 تا 7 مقامات پر پیمائش کی جائے میٹری پٹری(meter scale)سے زیر تجربہ تار کا طول 'L' کی پیمائش کی جائے۔ معمولی ترازی اور معیاری اوزان کو استعمال کر کے سلاخ(Bar) کمیت معلوم کرے اور Vernier scale کے ذریعہ سلاخ کا طول معلوم کیجئے۔

اب تعلیقی محور کے جمود کا معیار اثر کی تحسیب کر سکتے ہیں۔I کی قیمت ہو گی

$$I = \frac{MR^2}{2}$$

جمود کا معیار اثر(Moment Inertia)،I، طول 'L'، قطر(r)اور وقت 'T' جو تر سیم سے حاصل ہو۔

ینگ کے مقیاس 'Y' (Young Modulus) :

$$Y = \frac{8\pi lI}{T_1^2 r^4}$$

استواری کا مقیاس 'η' (Rigidity Modulus) :

$$\eta = \frac{8\pi lI}{T_2^2 r^4}$$

Table – I

S.No.	Number of Oscillation	Time for n vibration			Time for n vibration			Time Period T
		Min	Sec	Total t_1 sec	Min	Sec	Total t_2 sec	
1	20							
2	25							
3	30							

مثال: ایک فولاد کے تار کا قطر 1mm اور طول 2m کو 2kgwt سے تانا گیا ہے تب معلوم کرو(i) تار کا اضافہ طول(ii)فساد(iii)زور دیا گیا ہے کہ ($g=9.8ms^{-2}$, $Y=2 \times 1011\ N\ m^{-2}$)

حل:

قطر=1mm؛radius، $r = \frac{1}{2}mm = \frac{1}{2} \times 10^{-3}m$؛L=2m

F=2kg wt=2x9.8 N; Y=2x10^{11} N m^{-2},

$$Y = \frac{F}{\pi r^2}\frac{L}{e}$$ اضافہ طول e=?

$$e = \frac{FL}{\pi r^2 Y} = \frac{2\times9.8\times2}{\pi\left(\frac{1}{2}\times10^{-3}\right)^2\times2\times10^{11}} = 2.495\times10^{-4}m = 0.2495mm.$$

$$\text{فساد} = \frac{e}{L} = \frac{2.495\times10^{-4}}{2} = 1.248\times10^{-4} \qquad \text{(i)}$$

$$\text{زور} = Y\times Strain = 2\times10^{11}\times\left(\frac{2.495\times10^{-4}}{2}\right) = 2.495\times10^{7}N\,m^{-2} \qquad \text{(ii)}$$

مثال: فولادی تار کے سرے سے کتنی کمیت لٹکائی جائے جب کہ اس کا طول 2m قطر 1mm اور اس میں پھیلاؤ 1mm ہو (Y=2x1011Nm^{-2})

قطر=1mm، نصف قطر $= \frac{1}{2}mm = \frac{1}{2}\times10^{-3}m$؛L=2m

F=2kg wt=2x9.8 N; Y=2x10^{11} N m^{-2},

$$Y = \frac{F}{\pi r^2}\frac{L}{e}$$ اضافہ طول e=?

$$\therefore F = \frac{YAe}{L} = Mg \therefore M\frac{YAe}{Lg} = \frac{Y(\pi r^2)e}{gL}$$

$$M = \frac{2\times10^{11}\times\pi\left(\frac{1}{2}\times10^{-3}\right)^2\times1\times10^{-3}}{9.8\times2} = \frac{\pi\times10^2}{9.8\times4} = \frac{100\pi}{39.2} = 8.015kg.$$

12.13 خلاصہ:

جسم پر بیرونی قوتوں کے عمل سے اس کی شکل اور سائیز میں تبدیلی ہوتی ہے۔ لچک، اجسام کی ایک ایسی خاصیت ہے جس کی وجہ سے اجسام ان قوتوں کی وجہ سے ان میں پیدا ہونے والے اثرات کی مدافعت کرتے ہیں۔ ان قوتوں کے ہٹ جانے پر اپنی اصلی حالت پر واپس آجاتے ہیں۔ رد عمل کی قوت فی اکائی رقبہ، زور کہلاتی ہے۔ شکل میں پیدا شدہ تبدیلی کو بگاڑ یا فساد کی رقوم میں معلوم کیا جاتا ہے۔ ہو کس کے کلیہ کے مطابق، لچک کے حدود کے اندر، زور اور بگاڑ ایک دوسرے کے ساتھ راست تناسب رکھتے ہیں۔ زور اور بگاڑ میں پائے جانے والی نسبت کو لچک

کا معیار کہتے ہیں۔ طولی زور سے ینگ کے معیار لچک، جزی زور سے استواری کا معیار لچک اور حجمی زور سے حجمی معیار لچک کا تعین ہو تا ہے۔ تناو والے تار اور مروڑی والے تار میں کیا گیا کام معلوم کیا جاتا ہے۔ مروڑی رقاص کے ذریعہ کسی تار کے مادے کی استواری کا معیار معلوم اور سرل کا طریقہ سے کسی تار کے مادے کی جمود کا معیار اثر اور استوار کا معیار معلوم کیا جاتا ہے۔

12.14 نمونہ امتحانی سوالات:

I ذیل کے سوالوں کے جواب تقریباً تیس سطروں میں دیجئے۔

1) کسی ٹھوس مادے کے لچک کے مختلف معیاروں میں ربط اخز کیجئے۔

2) لچک کے ہک کے کلیہ (Hook's Law) کو بیان کیجئے۔ کسی مادے کے ینگ کے معیار لچک کی تخمین کا (Searle's Method) سرل کا طریقہ بیان کرو؟

3) تار کے بتدریج بوجھ کے اضافہ کا ردعمل بیان کرو؟

4) تناؤ والے تار اور مروڑی والے تار میں کیا گیا کام کے مساوات اخذ کرو؟

5) حرکی طریقے سے (Torsion Pendulum) کسی تار کے مادے کی استواری کا معیار کی تخمین کو بیان کرو۔

6) استوانی پر مروڑی حفتہ کی مساوات اخذ کیجئے؟

II ذیل کے سوالوں کے جواب دس سطروں میں دیجئے۔

1) پواسان کی نسبت کی حدود کیا ہیں؟

III ذیل کے سوالوں کو حل کیجئے۔

ایک پیانو کے 50cm لمبے 5gm کمیت والے فولادی تار کا تناؤ 400N ہے۔

a) اس کے بنیادی ارتعاشوں کا تعدد کتنا ہو گا؟

b) ایک شخص 10,000Hz تعدد کی آوازوں کو سن سکتا ہے تو اسکے لئے کس اعظم ترین رتبہ کی مصناعف سرتی (Overtone) قابل سماعت ہو گی۔

[جواب (a) 200Hz (b) 49 ویں سرتی (Overtone)]

12.15 سفارش کردہ کتابیں Reference Book:

---

1. Landau LD, Lipshitz EM, Theory of Elasticity, 3rd Edition
2. Treloar, L.R.G (1975) the Physics of Rubber Elasticity Oxford, Clarendom Press.
3. Sadd. Martin H. (2005). Elasticity Theory, Applications and Numerics, Oxford. Elsevies
4. De with Gijsbertus (2006), Structure, Deformation and Integrity of Materials,Volume-1: Fundamentals and Elasticity.

5. Atanackovi, Teodorm, Guran, Ardeshir (2000) Hooke's Law "Theory of Elasticity for Scientists and Engineers Boston Mass.

اکائی 14: خصوصی نظریۂ اضافیت (اسپیشل تھیوری آف ریلیٹی ویٹی)

SPECIAL THEORY OF RELATIVITY

14.1 تمہید Introduction

اس اکائی میں State of rest (حالت سکون) اور State of motion (حالت حرکت) کی (Relativity) اضافیت پر گفتگو کی گئی ہے۔

Special Theory of Relativity (خصوصی نظریۂ اضافیت) کی تشریح سے آپ کو اندازہ ہو جائے گا کہ ساکن اور ہموار رفتار سے Rotating Bodies (متحرک اجسام) یا Systems (نظاموں) میں کیا رشتہ پایا جاتا ہے۔ اسی طرح General Theory of Relativity (عمومی نظریۂ اضافیت) آپ کو ایسے باڈیز یا سسٹمس کو سمجھنے میں مددگار ہوگا جو ایک دوسرے کے لحاظ سے acceleration (اسراع) کے ساتھ حرکت کرتے ہوں۔ باڈیز کے اسٹیٹ آف ریسٹ اور اسٹیٹ آف موشن کے درمیان پائے جانے والے رشتے کو بیان کرنے کی تھیوری کو تھیوری آف ریلیٹی ویٹی کہا جاتا ہے۔ اس تھیوری کے دو اہم اجزاء ہیں۔ اسپیشل اور جنرل تھیوری آف ریلیٹی ویٹی۔

اسپیشل تھیوری آف ریلیٹی ویٹی ایسے باڈیز یا سسٹمس کے رشتے کا مطالعہ ہے جو ایک دوسرے کے لحاظ سے حالت سکون میں ہوں یا ہموار رفتار سے حرکت کر رہے ہوں۔

جنرل تھیوری آف ریلیٹی ویٹی اسے باڈیز یا سسٹمس کے رشتے کا مطالعہ ہے جو ایک دوسرے کے لحاظ سے ایکسیلا ریشن کے ساتھ حرکت کر رہے ہوں۔ اسپیشل تھیوری آف ریلیٹی ویٹی، نوٹن کی Machanics (میکانیات) کی عام شکل ہے جو تیز رفتار حرکت کی صورت میں ناکام ہو جاتی ہے۔

جنرل تھیوری آف ریلیٹی ویٹی اس میں اس طرح کی تبدیلی لاتا ہے کہ Velocity of Light (رفتارنو) کے قریب تر رفتاروں سے حرکت پر بھی اس کا Application (اطلاق) ممکن ہو جاتا ہے۔ کسی جسم کی حرکت کا بیان اس وقت تک بے معنی ہے جب تک کہ اس کو آرڈینیٹ سسٹم کی وصاحتنہ کی جائے جس میں پیائش کی گئی ہو، فریم آف ریفرینس کہلاتا ہے۔

گیلی لین ٹرانسفارمیشنز میں مقام اور وقت کے محدد کو ایک جمودی حوالے کے فریم سے دوسرے جمودی حوالے کے فریم میں تبادلے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔

خصوصی نظریۂ اضافیت کے مفروضات کے مطابق ایک دوسرے کے لحاظ سے اضافی حرکت کرنے والے دو حوالے کے فریموں کے زماں و مکاں کے محددوں کے درمیان پائی جانے والی مساواتیں لارینٹز امتحالہ کہلاتی ہیں۔

14.2 حوالے کے فریم (فریم آف ریفرینس) Frame of Reference

ایک متحرک ٹرین میں اچھالا گیا پتھر ٹرین میں بیٹھے ہوئے شخص کو ایک Straight line (خط مستقیم) میں حرکت کرتا ہوا دکھائی دیتا ہے جب کہ زمین پر واقع ایک شخص کو پتھر کی حرکت کا راستہ Curved (ناقصی) دکھائی دیتا ہے۔ اسی واقعہ سے یہ بات ثابت ہوتی ہے کہ کسی باڈی کی حرکت کا بیان اس وقت تک بے معنی ہے جب تک کہ اس (کوآرڈینیٹ سسٹم) Coordinate system کی وضاحت نہ کی جائے جس میں پیائش کی گئی ہے وہ کوآرڈینیٹ جس کے لحاظ سے کسی باڈی کی حرکت کا اظہار کیا جاتا ہے، فریم آف ریفرینس کہلاتا ہے۔

14.2.1 جمودی حوالے کا فریم (انرشئیل فریم آف ریفرینس) Inertial Frame of Reference

حوالے کے ایسے فریم جن میں متحرک اجسام نیوٹن کے کلیات اور میکانیات کے دیگر کلیات کی پابندی کرتے ہیں جمودی حوالے کے فریم کہلاتے ہیں۔ ان فریموں میں ایسے اجسام جو بیرونی قوتوں کے زیر اثر نہ ہوں یا تو حالت سکون میں ہوں گے یا پھر ہموار رفتار سے متحرک ہوں گے۔

فرض کرو کہ 'm' کمیتی ایک جسم ایک جمودی حوالے کے فریم میں محدد (x, y, z) سے بیان کیا جاتا ہے۔ اگر اس جسم پر کوئی بیرونی قوت عمل

نہ کرتی ہوتو

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0 \ ; \quad m\frac{d^2y}{dt^2}=0; \ m\frac{d^2y}{dt^2}=0$$
$$\frac{d^2x}{dt^2}=0 \ ; \ \frac{d^2y}{dt^2}=0 \ ; \ \frac{d^2y}{dt^2}=0$$

لحاظہ $\frac{dx}{dt}=u_x \ ; \frac{dz}{dt}=u_y$ اور $\frac{dz}{dt}=u_z$ مستقل ہیں جہاں u_x ' u_y اور u_z جسم کی رفتار کے بالترتیب x, y اور z اجزاء ہیں۔اگر یہ اجزاء مستقل ہیں تو یقیناً ان کا حل 'u' مستقل ہوگا۔

یعنی جمودی حوالے کے فریم میں بیرونی قوت کی غیر موجودگی میں ایک جسم حالت سکون ہوگا $(u=0)$ یا ہموار رفتار سے خط مستقیم میں متحرک ($u=$ مستقل) ہوگا۔

14.2.2 غیر جمودی حوالے کا فریم

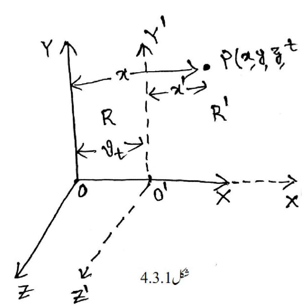
(نان انشیل فریم آف ریفرینس) Non-Inertial Frame of Reference

حوالے کا ایسا فریم جس میں ایک جسم بلا کسی بیرونی قوت کی عمل آوری کے اسراع کے ساتھ حرکت کرتا ہے' غیر جمودی حوالے کا فریم کہلاتا ہے۔ ایسے کسی حوالے کے فریم میں نیوٹن کے کلیات حرکت کی پابندی نہیں ہوتی۔

14.3 گیلیلین/گیلی لیئن ٹرانسفارمیشنز (Galil\ean Transformations)

گیلی لیئن ٹرانسفارمیشنز کو مقام اور وقت کے coordinators (محدد) کو ایک Inertial reference (جمودی حوالے) کے فریم سے دوسرے انرشیل کے فریم یں تبادلے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔

شکل 4.3.1 کے مطابق فرض کرو کہ R اور R^1 حوالے کے فریم ہیں جن میں فریم R^1 فریم R کے لحاظ سے ہموار رفتار 'V' سے حرکت کررہا ہے۔فرض کرو کہ ایک نقطۂ P فریم R میں کوآرڈی نیٹر ہیں (x,y,z,t) سے ظاہر ہوتا ہے اور فریم R^1 میں اس کا اظہار کوآرڈی نیٹر x^1, y^1, z^1, t^1 سے ہوتا ہے۔



شکل 4.3.1

تبادلہ کے عمل کو آسان بنانے کے لیے x اور x^1 محور رفتار v کے parallel (متوازی) ہیں۔ پیائش وقت کی ابتدا میں source

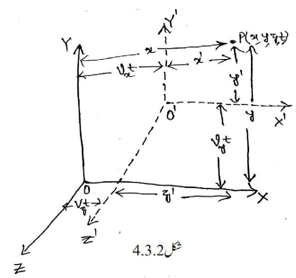
(مبداء) o اور o^1 ایک دوسرے پر coincide (منطبق) رہتے ہیں۔

تب $x^1 = x - vt$; $y^1 = y$; $z^1 = z$; اور $t^1 = 1$ (1)

اوپر کی مساواتوں کو گیلی لیئن ٹرانسفارمیشنز کہا جاتا ہے جن کی مدد سے ایک انرٹیشنل فریم کی measurements (پیمائشات) کو دوسرے انرٹیشنل فریم کی میژرمنٹس میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔

شکل 4.3.2 میں فریم R^1 فریم R کے لحاظ سے تمام محوروں کے متوازی خط مستقیم میں حرکت کرتا ہوا دکھلایا گیا ہے۔اسی صورت میں فریم R^1 کی اضافی رفتار بلحاظ فریم R ہوگی۔

$$\vec{V} = iV_a + jV_y + kV_z$$



شکل 4.3.2

اسی طرح ہمیں حاصل ہوگا

$$x^1 = x - v_x t \;;\; y^1 = y - v_y t$$
$$z^1 = z - v_B t \;;\; t^1 = t$$

مساوات (2) کو تفریق کرنے سے حاصل ہوگا

$$dx^1 = dx - V_x dt \;;\quad dy^1 = dy - V_y dt$$
$$dz^1 = dz - V_z dt \;;\quad dt^1 = dt$$

$$\frac{dx^1}{dt} = \frac{dx}{dt} - V_x ; \quad \frac{dy^1}{dt} = \frac{dy}{dt} - V_y \;;\; \frac{dz^1}{dt} = \frac{dz}{dt} - V_z$$

یعنی ان دونوں فریموں میں رفتار میں $U_x^1 = u_n - V_x \;;\; U^1{}_y = U_y - V_y \;;\; U^1{}_z = U_z - V_z$

اگر $\vec{a}$ ' $\vec{U}$ اور $\vec{K}$ تینوں محوروں کی سمت میں اکائی سمیٹتے ہوں تو

$$iu_x^i + ju_y^1 + ku_z^1 = i_x + ju_y + ku_z - iv_a - ju_y - kv_z$$

$$u^1 = \vec{u} - \vec{v} \qquad (4)$$

مساوات (4) رفتار کی گیلیلین استحالہ مساوات ہے۔

اوپر کی مساوات کے تفرق سے اسراع ہوگا جو

(چونکہ 'V' مستقل ہے) $\frac{du^1}{dt} = \frac{du}{dt} = 0$ یعنی $a^1 = a$

اس کا مطلب یہ ہوا کہ ایک دوسرے کے لحاظ سے مستقل رفتار 'V' سے متحرک جمودی حوالے کے فریموں میں ذرات کا اسراع یکساں ہوتا ہے۔

نیوٹن کے دوسرے کلیے کے مطابق $F = m\frac{d^2x}{dt^2}$

گیلیلین حوالے کے فریم میں $\frac{dx^1}{dt} = \frac{dx}{dt} - V$

$\therefore \frac{d^2x^1}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$ اس لیے

چونکہ $m^1 = m$ ہے

فریم R میں $F = m\frac{d^2x}{dt^2}$

فریم R^1 میں $F^1 = m^1\frac{d^2x^1}{dt^2}$

یعنی $\therefore F^1 = F$

اس کا مطلب یہ ہوا کہ گیلیلین استحالہ میں نیوٹن کے کلیات غیر متبدلہ ہوتے ہیں۔ اگر m_1 اور m_2 دو ذرات کی کمیتیں ہوں تو فریم R میں کلیہ بقائے معیار حرکت کے مطابق

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 \qquad (5)$$

فریم R^1 میں

$$\begin{aligned} u_1^1 &= u_1 - v \; ; \; u_2^1 = u_2 - v \\ v_1^1 &= v_1 - v \; ; \; v_2^1 = v_2 - v \end{aligned} \qquad (6)$$

مساوات (5) میں درج کرنے پر

$$m_1(u_1^1 + v) + m_2(u_2^1 + v) = m_1(v_1^1 + v) + m_2(v_2^1 + v)$$

یا

$$m_1u_1^1 + m_2u_2^1 = m_1v_1^1 + m_2v_2^1 \qquad (7)$$

اس کا مطلب یہ ہے کہ کلیہ بقائے معیار حرکت گیلیلین استحالہ میں غیر متبدل رہتا ہے۔

14.4 مطلق حوالے کے فریم (ایبسلیوٹ فریم آف ریفرینس) (Absolute Frame of Reference)

موجی حرکت کے لیے واسطہ لازمی ہے اور نور جیسے ہیجن نے موجی حرکت قرار دیا تھا۔ اس حقیقت کی توجیح کے لیے ہیجن نے ایتھر کا نظریہ دیا جو تمام خلاء میں پھیلی ہوئی ہے۔ ایتھر کے بارے میں اس نے فرض کیا کہ وہ شفاف، بے وزن، انتہائی لچکدار اور اقل ترین کثافت کا واسطہ ہے جو مطلق حالت سکون میں پایا جاتا ہے۔ اس نے یہاں تک فرض کرلیا تھا کہ ایتھر کا وہ حصہ جو متحرک اجسام کے اندر موجود ہوتا ہے حالت سکون میں رہتا ہے۔ اس نظریے کے فروغ کے ساتھ ہی ایک ایسے حوالے کے فریم کے وجود کو تسلیم کیا گیا جو مطلق سکون میں ہے۔ اسے ہم ایک مطلق حوالے کا فریم قرار دے سکتے ہیں جس کے لحاظ سے تمام متحرک اجسا کی حرکت کا مطالعہ کیا جاسکتا ہے۔

اس تصور کے ساتھ اگر رفتار نور کی پیائش ایک جمودی حوالے کے فریم میں کی جائے جو مطلق حوالے کے ساتھ اضافی رفتار 'V' سے حرکت کر رہا ہو تو نور کی رفتار متحرک جمودی فریم میں $C+V$ یا $C-V$ حاصل ہوگی لیکن مائیکلس اور مورلے نے ان ہی خطوط پر اپنے تجربات سے یہ ثابت کیا کہ رفتار نور میں ایسی کوئی تبدیلی نہیں دیکھی جاسکتی۔ اسی بناء پر یہ نتیجہ اخذ کیا گیا کہ کوئی مطلق حوالے کا فریم اسی کائنات میں نہیں پایا جاتا اور تمام حرکتیں اضافی ہی ہیں۔

14.5 خصوصی نظریۂ اضافیت کے مفروضات (پاسچیولیٹس آف اسپیشل تھیوری آف ریلیٹی ویٹی) (Postulates of Special Theory of Relativity)

آئنسٹائن نے اپنے خیالات کو خصوصی نظریۂ اضافیت (Special Therry of Relativity) کی شکل میں پیش کیا جس کی بنیاد و مفروضات پر ہے۔

1. کلیات طبعیات تمام جمودی فریموں میں یکساں ہیں۔

2. خلاء میں نور کی رفتار تمام جمودی فریموں میں مستقل ہوتی ہے اور یہ اس کائنات کی اعظم ترین قابل حصول رفتار ہے۔

پہلے مفروضے کے اصول مساوات (Principle of equivalence) کے طور پر تسلیم کیا گیا ہے جس کے مطابق تمام طبعیاتی عمل جو چند بنیادی مساواتوں کی شکل میں ظاہر کیے جاتے ہیں، تمام جمودی فریموں میں لاگو ہوں گے۔

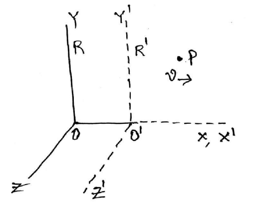
دوسرے مفروضے کی بنیاد پر رفتار نور کی تمام کائنات میں بلا لحاظ مبداء اور شاہد مستقل مانا گیا ہے جو اس کائنات میں قابل حصول اعظم ترین رفتار ہے۔

ان مفروضات کی روشنی میں مختلف جمودی حوالے کے فریموں کے مشاہدات کے تبدل کی مساواتیں اخذ کی گئی ہیں جنہیں لارینٹز استحالہ کہا جاتا ہے۔

14.6 لارینٹز استحالہ (لارینٹز ٹرانسفارمیشنز) Lorentz Transformations

خصوصی نظریۂ اضافیت کے مفروضات کے مطابق ایک دوسرے کے لحاظ سے اضافی حرکت کرنے والے دو حوالے کے فریموں کے زماں و

مکان کے محددوں کے درمیان پائی جانے والی مساواتیں لارینٹز استحالہ کہلاتی ہیں۔



شکل 4.6.1

مطابق شکل (4.6.1) فرض کرو کہ دو حوالے کے فریموں R اور R^1 کے مبدا O اور O^1 پر دو شاہد واقع ہے۔ فریم R ساکن ہے جن کے لحاظ سے فریم R^1 محور X کے متوازی ہموار رفتار 'V' سے رحلت کررہا ہے۔ دونوں شاہد اپنے ساتھ ایک میٹری سلاخ اور گھڑی رکھتے ہیں جو ایک دوسرے سے مماثلت (Synchronous) رکھتے ہیں۔ نقطۂ P پر وقوع پذیر ایک واقعہ (Event) کے محدد مبدا O کے لحاظ سے (x, y, z, t) اور O^1 کے لحاظ سے (x^1, y^1, z^1, t^1) ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ نور کی رفتار = فاصلہ / وقت یعنی

$$C = \frac{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}}{t}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \quad \rightarrow \qquad (1)$$

اگر شاہد فریم R^1 سے مشاہدہ کریں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x^{1^2} + y^{1^2} + z^{1^2} - c^2t^{1^2} = 0 \quad \rightarrow \quad (2)$$ (چونکہ C مستقل ہے)

اور آگے $z = z^1$ اور $y = y^1$ (3)

مساوات (1) اور (2) کو مساوات (3) میں درج کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$x^2 - c^2t^2 = x^{1^2} - c^2t^{1^2} \qquad (4)$$

مگر x اور t محدد کی قیمتیں x^1 اور t^1 پر منحصر ہوں گی اس انحصار کو سادہ تناسب مساواتوں کی شکل میں ظاہر کیا جائے تو لارینٹز استحالہ کے لیے

$$x^1 = k\left(x - vt\right) \quad \rightarrow \qquad (5)$$

جہاں k ایک مستقل ہے اور وہ x اور t پر منحصر ہیں۔

اگرہم مان لے کرفریم R متحرک ہے بلحاظ فریم R^1 جس کی رفتار $-v$ محور x کی سمت میں اس لیے

$$x = k\left(x^1 + vt^1\right) \quad \rightarrow \qquad (6)$$

x^1 کی قدر مساوات (5) سے لے کر مساوات (6) میں درج کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$x = k\left[(x - vt) + vt^1\right]$$

$$\frac{x}{k} = k(x - vt) + vt^1$$

$$\therefore \quad vt^1 = \frac{x}{k} - k(x - vt)$$

$$t^1 = \frac{x}{kv} - \frac{k}{v}(x - vt)$$

یا

$$= \frac{x}{kv} - \frac{kx}{v} + kt$$

$$\therefore \quad t^1 = k\left[t - \frac{x}{v}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\right] \quad \longrightarrow \qquad (7)$$

اسی طرح x^1 کی قدر مساوات 5 سے اور t^1 کی قدر مساوات 7 سے لے کر مساوات (4) میں درج کرنے سے

$$x^2 - c^2t^2 = k^2(x - vt)^2 - c^2k^2\left[t - \frac{x}{v}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^2\right]$$

یعنی $$x^2 - c^2t^2 = k^2(x - vt)^2 - c^2k^2\left[t - \frac{x}{v}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^2\right] = 0$$

$$x^2 - c^2t^2 = k^2\left(x^2 - 2x\,vt + v^2t^2\right) + c^2\,k^2$$

$$\left[t^2 + \frac{x^2}{v^2}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^2 - \frac{2xt}{v}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\right] = 0 \quad \rightarrow \qquad (8)$$

t^2 کے اجزاء کو صفر کے مساوی کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$-c^2 - k^2v^2 + c^2k^2 = 0 \quad \rightarrow \qquad (9)$$

$$k^2\left(c^2 - v^2\right) - c^2 = 0$$

$$\therefore \quad k^2\left(c^2 - v^2\right) - c^2$$

$$k^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{1 - v^2/c^2}$$

اس لیے $$k = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \rightarrow \quad (10)$$

k کی قدر مساوات (10) سے لے کر مساوات (5) میں درج کرنے پر ہمیں خلاء کے لیے لارینٹز استحالہ حاصل ہوتا ہے جیسے

$$x^1 = k(x - vt) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(x - vt) \rightarrow \quad (11)$$

اسی رح k کی قدر مساوات (10) سے لے کر مساوات (7) میں در کرنے پر ہمیں وقت کے لیے لارلینٹز استحالہ حاصل ہوتا ہے جیسے

$$\left(\therefore\ k = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right.$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\frac{1}{k^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

$$\frac{1}{k^2} = \frac{c^2 - v^2}{c^2}$$

$$t^1 = k\left[t - \frac{u}{v}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left[t - \frac{x}{v}\left\{1 - \frac{c^2 - v^2}{c^2}\right\}\right]$$

یا $$t^1 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left[t - \frac{x}{v}\left\{1 - \frac{c^2 - c^2 + v^2}{c^2}\right\}\right]$$

$$t^1 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left[t - \frac{xv^2}{v \backslash v c^2}\right] = \frac{t - \left(\frac{vx}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \rightarrow \quad (12)$$

مساوات 11 اور 12 لارینٹز استحالہ کی مساواتیں کہلاتی ہیں۔

جب V کی قیمتیں رفتارنور سے بہت کم ہوتو v/c^2 اور v^2/c^2 کی قیمتیں صفر کے قریب ہوجاتی ہیں۔ لارینٹز امتحالے گیلیلین امتحالہ میں

تبدیل ہوجائیں گے۔

مساواتیں (11) اور (12) کچھ اس طرح بدل جائیں گی۔

$$x^1 = x - vt \text{ اور } t^1 = 1$$

معکوس لارینٹز ٹرانسفارمیشنز (معکوس لارینٹز استحالہ): فرض کرو کہ فریم R متحرک ہے جس کی رفتار $-v$ بلحاظ فریم R^1 x محور کی سمت میں تو پھر لارینٹز استحالہ مساواتیں کچھ اس طرح سے رکھ سکتے ہیں۔

$$x = \frac{x^1 + vt^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad y = y^1 \ ; \ z = z^1 \quad \text{اور} \quad t = \frac{t^1 + \frac{vx^1}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (13)$$

مساوات (13) کو معکوس لارینٹز استحالہ کہا جاتا ہے۔

اِنورس لارینٹز ٹرانسفارمیشنز	لارینٹز ٹرانسفارمیشنز	گیلی لیئن ٹرانسفارمیشنز
$x = \frac{x^1 + vt^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ $y = y^1$ $z = z^1$ $t = \frac{t^1 + v\, x^1/c^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$	$x = \frac{x + vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ $y = y^1$ $z = z^1$ $t = \frac{t^1 + vx/c^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$	$x^1 = x - vt$ $y^1 = y$ $z^1 = z$ $t^1 = t$

14.7 اتساع مدت (ٹائم ڈیلیشن) Time Delation

فرض کرو کہ دو واقعات (Events) کی وقوع پذیری کے وقت کو فریموں R اور R^1 کے مبداء O اور O^1 پر واقع دو شاہد نوٹ کرتے ہیں جب کہ فریم R ساکن اور فریم R^1 محور X کے متوازی رفتار $'V'$ سے حرکت کر رہا ہے۔ ان دو واقعات کی درمیانی مدت

فریم R میں $\qquad \Delta t = t_2 - t_1$

فریم R^1 میں $\qquad \Delta t^1 = t_2^1 - t_1^1$

لارینٹز استحالہ کے مطابق

$$t_1^1 = \frac{t_1 - v/c^2\, x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \ ; \quad t_2^1 = \frac{t_2 - v/c^2\, x_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\therefore\ t_1^1 - t_1^1 = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

چونکہ فریم R کے لحاظ سے دونوں واقعات ایک ہی مقام پر وقوع پذیر ہیں اس لیے $x_2 = x_1$

$$\Delta t^1 = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_2)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \left(\Delta \because t^1 = t_2^1 - t_1^1 \quad \Delta t = t_2 - t_1\right)$$

$$\Delta t^1 = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$ اس لیے $\Delta t^1 > \Delta t$

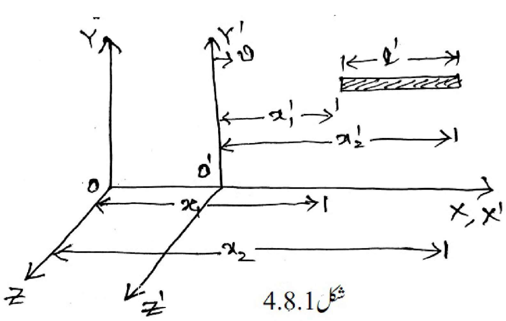
اس نتیجہ سے ظاہر ہے کہ فریم R میں دو واقعات کی درمیانی مدت فریم R^1 کے مقابل کم ہوگی۔ دوسرے الفاظ میں فریم R کی گھڑی فریم R^1 کی گھڑی سے نسبتاً سست ہوگی جو پہلے فریم کے لحاظ سے حالت حرکت میں ہے۔ اس حقیقت کو اتساع مدت (Time Dilation) کہا جاتا ہے۔

اگر دونوں نظام ایک دوسرے کے لحاظ سے حرکت ہوں تو ہر شاہد دوسرے متحرک شاہد کی گھڑی کو سست سمجھے گا۔ یعنی اتساع مدت Reciprocative ہوگا۔

14.8 طولی انقباض (لینتھ کانٹریکشن) Length Contraction

فریم R^1 میں محور x کے متوازی واقع ایک سلاخ کے کناروں کے محدد اسی فریم میں x_1^1 اور x_2^1 ہوں تو اس فریم میں سلاخ کا طول

$$l^1 = x_x^1 - x_1^1 \longrightarrow \quad (1)$$



شکل 4.8.1

فریم R میں موجود شاہد سلاخ کے کناروں کے محدد اسی وقت $'t'$ پر x_1 اور x_2 نوٹ کرنا ہو تو اس فریم میں سلاخ کا طول

$$l = x_2 - x_1 \longrightarrow \quad (2)$$

لارینٹز استحالہ کے مطابق

$$x_2^1=\frac{x_2-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \text{اور} \quad x_1^1=\frac{x_1-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$l^1=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{l}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \longrightarrow \quad (3)$$

شاہد کے لحاظ سے رفتار 'V' سے حرکت کرنے والی سلاخ کا طول سمت حرکت میں بقدر جُز $\sqrt{1-v^2/c^2}$ کم ہوگا۔ اس حقیقت کو لارینٹز۔ فٹز گیلڈ انقباض (Length Fitzerald contraction) کہا جاتا ہے۔ یہ انقباض بھی Reciprocal ہوگا۔ اگر یکساں طول کی دو سلاخیں دونوں فریموں میں علاحدہ واقع ہوں تو ہر شاہد دوسری سلاخ کو اپنی سلاخ سے چھوٹی پائے گا۔

14.9 رفتاروں کی جمع (ایڈیشن آف ویلاسیٹیز) Addition of Velocities

لارینٹز استحالہ ہمیں رفتاروں کی جمع کے لیے قدیم میکنیات سے مختلف ایک اضافیاتی ضابطہ (Relativistic Formula) تک رہنمائی کرتا ہے جسے مندرجہ ذیل طریقے سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ 'R' میں ایک جسم x – محور کے متوازی ہموار رفتار v سے حرکت کررہا ہے۔ مان لیجیے کہ وہ جسم حرکت کرتے ہوئے dx فاصلہ طے کرتا ہے dt وقت میں؛ اسی طرح فریم R^1 میں وہ جسم کرتے ہوئے dx^1 فاصلہ طے کرتا ہے۔ dt^1 وقت میں پھر ہم اس کی رفتاروں کو لکھتے ہیں۔

$$\frac{dx}{dt}=u \quad \text{and} \quad \frac{dx^1}{dt^1}=u^1$$

لارینٹز استحالہ مساواتوں سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x=k\left(x^1+vt^1\right) \quad \rightarrow \quad (2)$$

$$t=k\left(t^1+\frac{vx^1}{c^2}\right) \quad \rightarrow \quad (3)$$

مساوات (2) اور (3) کی رفرقی شکلیں

$$dx=k\left(dx^1+vdt^1\right) \quad \rightarrow \quad (4)$$

$$dt=k\left(dt^1+v\,dx^1/c^2\right) \quad \rightarrow \quad (5)$$

مساوات (4) کو مساوات (5) سے تقسیم کرنے پر

$$\frac{dx}{dt}=\frac{k\left(dx^1+vdt^1\right)}{k\left(dt^1+\frac{vdx^1}{c^2}\right)}=\frac{{d\,x^1}/{dt^1}+v}{1+{v}/{c^2}\;\frac{dx^1}{dt^1}}$$

$$\therefore\; u=\frac{u^1+v}{1+{v}/{c^2}\,u^1}\quad\rightarrow\qquad(6)$$

مساوات (6) کو رفتاروں کو جمع کا اضافیاتی قانون کہا جاتا ہے۔ اس مساوات میں u کی قیمت حقیقی ہوگی جب کہ u^1 اور v دونوں کی قیمتیں 'c' سے کم ہوں۔

اگر $u^1=c$ درج کریں تو

$$u=\frac{c+v}{1+\frac{vc}{c^2}}=\frac{v+c}{\frac{c+v}{c}}=\frac{v+c}{v+c}.c=c$$

اس کا مطلب یہ ہے کہ فریم R^1 سے پیمائش کی گئی جسم کی رفتار u^1 رفتارِ نور 'c' کے مساوی ہوگی۔

اگر $v=c$ درج کریں تو

$$u=\frac{u^1+c}{1+\frac{cu}{c^2}}=\frac{u^1+c}{\frac{c+u^1}{c}}=\frac{u^1+c}{u^1+c}.c.=c$$

اس سے ظاہر ہے کہ رفتاروں کی جمع 'c' سے زائد نہیں ہو سکتی۔ جس سے ثابت ہوتا ہے کہ رفتارِ نور حوالے کی فریموں سے مستقل ہے اور کائنات کی اعظم ترین قابل حصول رفتار ہے۔

14.10 کمیت۔توانائی مساوات (ماس۔انرجی ایکویشن) Mass-Energy Equation

Physics (طبعیات) کے لحاظ سے فورس (قوت) Rate of change of momentum (شرح تبدیلی معیارِ حرکت) ہوتی ہے یعنی

$$F=\frac{d}{dt}(mv)$$

چونکہ ریلیٹی ویٹی کے لحاظ سے mass (کمیت)، velocity (رفتار) دونوں variable (متغیر) ہیں۔ اس لیے

$$F=m\frac{dv}{dt}+v\frac{dm}{dt}$$

فرض کرو کہ فاصلہ dx تک عمل کر کے ایک قوت F جسم کی توانائی بالحرکت میں اضافہ dE کرتی ہے

تو $\quad dE=F.dx\quad\rightarrow$

$$dE = m\frac{dv}{dt}.dx + v\frac{dm}{dt}.dx$$

چونکہ $v = \frac{dx}{dt}$ اس لیے $dE = m.v.dv + v.v.dm$

$$dE = mv\,dv + v^2 dm \quad \rightarrow \quad (2)$$

کمیت کے تغیر کے اضافیاتی ضابطہ کے لحاظ سے جسم کی کمیت 'm' اس کی سکونی کمیت 'm_o' پر اس طرح انحصار کرتی ہے۔

$$m = \frac{m_o}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \quad \rightarrow \quad (3)$$

اوپر کی مساوات کو مربع کرنے پر $m^2 = \frac{m_o^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_o^2 c^2}{c^2 - v^2}$

$$m^2 = \left(c^2 - v^2\right) = m_o^2 c^2$$

$$m^2 c^2 - m^2 v^2 - m_o^2 c^2 = 0 \quad \rightarrow \quad (4)$$

مساوات (4) کے تفرقے سے

$$c^2.2m\,dm - v^2.2m\,dm - m^2.2\,vdv = 0 \quad \rightarrow \quad (5)$$

چونکہ 'c' اور m_o مستقل ہیں اس لیے مساوات (3) کو $2m$ سے تقسیم کرنے پر

$$c^2.dm - v^2.dm - m.v.dv = 0$$

یا

$$m.v.dv + v^2.dm = c^2 dm \quad \rightarrow \quad (6)$$

مساوات (2) اور (6) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\therefore\ dE = c^2 dm \quad \rightarrow \quad (7)$$

جب ایک ساکن جسم کی رفتار v تک اسراع دیا جائے تو اس کی کمیت m_o سے m تک ہو جاتی ہے اور جملہ توانائی بالحرکت اوپر کی مساوات کی تکملہ سے حاصل ہوتی ہے۔

$$\int dE = E = \int_{mo}^{m} c^2.dm = c^2\left(m - m_o\right)$$

$$\therefore\ E = \left(m - m_o\right)c^2 \quad \rightarrow$$

یعنی جسم کی توانائی بالحرکت اس کی کمیت پر اثر انداز ہوتی ہے۔ چونکہ متحرک جسم کی جملہ توانائی 'w' اس کی توانائی بالحرکت اور اس میں محفوظ اندرونی توانائی کا مجموعہ ہے۔

$$\therefore\ W = E + m_o\, c^2$$

$$= (m - m_o)c^2 + m_o c^2 = mc^2$$

$$\therefore\ W = mc^2 \quad \rightarrow \qquad (9)$$

اوپر کی مساوات آئنسٹائن کی مشہور کمیت۔توانائی مساوات کہلاتی ہے جو بعد میں اس مساوات کی تصدیق کئی تجربات سے ہوئی ہے۔

14.11 فرہنگ Glossary

Frame of Reference (فر+یم+آف+ریف+رینس) حوالے کے فریم : وہ کوآرڈی نیٹ سسٹم جس کے لحاظ سے کسی باڈی کی حرکت کا اظہار کیا جاتا ہے۔

Inertial Frame of Reference (انر+شیل+فر+یم+آف+ریف+رینس) جمودی حوالے کے فریم: حوالے کے ایسے فریم جن میں متحرک اجسام نیوٹن کے کلیات اور میکانیات کے دیگر کلیات کی پابندی کرتے ہیں۔

Non-Inertial Frame of Reference (نان+انر+شیل+فر+یم+آف+ریف+رینس) غیر جمودی حوالے کا فریم: حوالے کے ایسے فریم جن میں ایک جسم بلا کسی بیرونی قوت کی عمل آوری کے 'اسراع' کیساتھ حرکت کرتا ہے۔

Galilean Transformation (گیلی+لیئن+ٹرانس+فر+میشن) (گیلی لیئن استحالہ): ان کی مدد سے ایک انرشیل فریم کی پیائشات کو دوسرے انرشیل فریم کی پیاشیات میں تبدیل کیا جاتا ہے۔

Theory of Relativity (تھیوری+آف+ریلیٹی+ویٹی) نظریۂ اضافیت ء باڈیز کے اسٹیٹ آف ریسٹ اور اسٹیٹ آف موشن کے درمیان پائے جانے والے رشتے کو بیان کرنے کو نظریۂ اضافیت کہا جاتا ہے۔

Special Theory of Relativity (اسپیشل+تھیوری+آف+ریلیٹی+ویٹی) (خصوصی نظریۂ اضافیت): ایسے باڈیز یا سسٹمس کے رشتے کا مطالعہ ہے جو ایک دوسرے کے لحاظ سے حالت سکون میں ہوں یا ہموار رفتار سے حرکر کر رہے ہوں۔

General Theory of Relativity (جنول+تھیو+آف+ریلیٹی+ویٹی) عمومی نظریہ اضافیت : ایسے باڈیز یا سسٹمس کے رشتے کا مطالعہ ہے جو ایک دوسرے کے لحاظ سے اسراع کے ساتھ حرکت کرر ہے ہوں۔

Lorentz Transformations (لا+رینٹز+ٹرانس+فر+میشن) (لارنیٹ استحالہ): ایک دوسرے کے لحاظ سے اضافی حرکت کرنے والے دو حوالے کے فریموں کے زماں ومکاں کے محددوں کے درمیان پائی جانے والی مساواتیں۔

Time Dilation (ٹائم+ڈائی+لیشن) استاع مدت: اگر دو نظام ایک دوسرے کے لحاظ سے حرکت میں ہوں تو ہر شاہد دوسرے متحرک شاہد کی گھری کو سست سمجھے گا۔

Length Contraction (لینتھ+کنٹراکشن) طولی انقباض: اگر یکساں طول کی دو سلاخیں دونوں فریموں میں علاحدہ واقع ہوں تو ہر شاہد دوری سلاخ کو اپنے سلاخ سے چھوٹی پائے گا۔

14.12 حسابی سوالات (Numerical Problsm)

1. اگر ایک ذرہع کی جملہ توانائی اس کی سکونی توانائی کی 3 گنا ہو تو اسی ذرہ کی رفتار معلوم کرو۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $E = mc^2$ جہاں

$$E = 3m.c^2$$

اس لیے $3m_o c^2 = mc^2$

یا $(m - 3m_o)c^2 = 0$

چونکہ $c \neq 0$ اس لیے $m - 3m_o = 0$

لیکن کمیت اور رفتار میں رشتہ کو ظاہر کر سکتے ہیں

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\frac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 3m_o$$

$$\sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{1}{3} \text{ or } 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{9}$$

$$1 - \frac{1}{9} = \frac{v^2}{c^2}$$

$$\frac{8}{9} = \frac{v^2}{c^2}$$

$$\therefore\ v = \sqrt{\frac{8}{9}} \times c = \frac{\sqrt{8}}{3} \times c = \frac{2.828}{3} \times 3 \times 10^{10}$$

$$v = 2.828 \times 10^{10}\, cm/\sec$$

2. ایک الکٹران کی کمیت اور رفتار معلوم کریں جب کہ اس کی توانائی بالحرکت $1.5MeV$ ہے۔ الکٹران کی سکونی کمیت $9.11\times10^{-31}kg$:نور کی رفتار $= 3\times10^{8} m/\sec$

حل: ہم جانتے ہیں کہ

$$E = 1.5MeV = 1.5x10^{6}x10^{-19};\ 9.11x10^{-31}kg_{2}$$
$$Kinetic\ Energy = (m - m_{o})c^{2}$$

توانائی بالحرکت

$$\therefore\ (1.5\times10^{6})\times(1.6\times10^{-19}) = (m - 9.11\times10^{-31})(3\times10^{8})^{2}$$
$$m - 9.11\times10^{-31} = \frac{(1.5\times10^{6})(1.6\times10^{-19})}{(3\times10^{8})^{2}}$$

اس کے حل پر ہمیں کمیت حاصل ہوگی

$$m = 35.8\times10^{-31}kg$$

لیکن $$m = \frac{m_{o}}{\sqrt{1 - v^{2}/c^{2}}}\ \ or\ \ \sqrt{1 - v^{2}/c^{2}} = \frac{m_{o}}{m}$$

$$\therefore\ 1 - v^{2}/c^{2} = \left(\frac{m_{o}}{m}\right)^{2}$$
$$v^{2}/c^{2} = 1 - \left(\frac{m_{o}}{m}\right)^{2}$$
$$v^{2} = \left[1 - \left(\frac{m_{o}}{m}\right)^{2}\right]\times c^{2}$$
$$\therefore\ v = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_{o}}{m}\right)^{2}} = 3\times10^{8}\sqrt{1 - (9.11\times10^{-31}/35.8\times10^{-31})^{2}}$$
$$v \Rightarrow 2.9\times10^{8} m/\sec$$

(3) ثابت کریں کہ اگر ایک ذرہ کی رفتار کی وجہ سے اس کی کمیت میں تغیر ہو تو اس ذرہ کی توانائی بالحرکت $k = m_{o}c^{2}\left\{\left(1 - v^{2}/c^{2}\right) - 1\right\}$ ہوگی۔ جہاں 'c' نور کی رفتار ہے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $k = c^{2}(m - m_{o})$

جہاں $m = \dfrac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

$$\therefore\ k = c^2\left[\frac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_o\right] = m_o c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right]$$

$$k = m_o c^2\left\{\left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2} - 1\right\}$$

(4) ایک الکٹران جس کی سکونی کمیت $9.1\times10^{-31}\,kg$ ہے، اگر وہ $0.99C$ کی رفتار سے حرکت کررہا ہوتو اس کی جملہ توانائی معلوم کریں۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $m = \dfrac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ جہاں

$$m_o = 9.1\times10^{-31}\,kg$$
$$c = 3\times10^8\,m/\sec$$
$$v = 0.99c$$

$$= \frac{9.1\times10^{-31}}{\sqrt{1 - \frac{(0.99c)^2}{c^2}}} = \frac{9.1\times10^{-31}}{\sqrt{1 - \frac{0.98c^2}{c^2}}} = \frac{9.1\times10^{-31}}{\sqrt{1 - 0.98}}$$

$$m = \frac{9.1\times10^{-31}}{0.141} = 64.5\times10^{-31}\,kg$$

$$mc^2 = E$$

نمونہ حسابی سوالات (Model Numerical Problems)

(1) کسی رفتار سے حرکت کرنے والے نظام میں ایک گھڑی دو گھنٹے یوم سست ہوجائے گی جب کہ وہ ساکن نظام میں صحیح وقت دکھلاتی ہے۔

$\left(1.199\times10^8\,m/s\right)$

(2) ایک میٹر طول کی خلائی گاڑی ایک ساکن شاہد کے لحاظ سے $0.8c$ کی رفتار سے حرکت کررہی ہوتو ساکن شاہد کے لحاظ سے خلائی گاڑی کا طول معلوم کیجیے۔ (1.2 میٹر)

(3) کسی رفتار سے حرکت کرنے پر ایک ذرہ کی کمیت اس کی سکونی کمیت کی 3 گنا ہوگی (0.94C)

(4) جب ایک الکٹران یا پازیٹران سے متصادم ہوکر فناء ہوجاتا ہے تو خارج ہونے والی توانائی کی مقدار محسوب کیجیے۔ الکٹران کی کمیت $9.1\times10^{-31}\,kg$ ہے۔ $\left(1.01\,MeV\right)$

(5) پروٹان کی سکونی کمیت $1.67\times10^{-27}\,kg$ ہوتو کسی رفتار سے حرکت کرنے پر اس کی کمیت دوگنی ہوجائے گی۔ $\left(0.86\times10^8\,m/s\right)$

14.13 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions) ماڈل اگزامنیشن کوسچنس)

(a) طویل جوابی (Essay Type)

1. خصوصی نظریۂ اضافیت کی بنیادی مفروضات بیان کیجیے اور اس نظریۂ ک ی بناء پر لارینٹز استحالہ اخذ کریں۔

2. خصوصی نظریۂ اضافیت کی بنا پر اتساع مدت اور طولی انقباض کی وضاحت کیجیے۔

3. نظریۂ اضافیت کی بناء پر رفتاروں کی جمع کا اضافیاتی ضابطہ اخذ کیجیے۔

4. گیلی لیئن استحالہ پر تفصیلی بحث کیجیے۔

5. آئنسٹائن کی کمیت۔توانائی مساوات اخذ کیجیے۔اس مساوات کی تجرباتی تصدیق سے قدیم طبیعیات کے کن بنیادی اصول پر ضرب پڑتی ہے۔

(b) مختصر جوابی (Short Type)

1. خصوصی نظریۂ اضافیت کے بنیادی مفروضات بیان کیجیے۔

2. ثابت کرو کہ گیلی لیئن میں کلیہ بقائے معیار حرکت غیر متبادل ہوتا ہے۔

3. اتساع مدت سے کیا مراد ہے۔وضاحت کیجیے۔

4. لارینٹز استحالہ کی مساواتیں لکھیے اور رقوم کی وضاحت کیجیے۔

5. کن حالات میں لارینٹز استحالہ، گیلی لیئن استحالہ سے مشابہ ہوجاتا ہے۔بیان کیجیے۔

14.14 سفارش کردہ کتابیات

1. Introduction to special relativity by Ransick. R of Wiley Estern Ltd. New Delhi.
2. Modern Physics by Murugeshan R. of S. Chand & Co. New Delhi.
3. Engineering Physics of Gaur & Gupta of Dhanpat Rai Publications, New Delhi.
4. Theory of Relativity by Pauli. W of BI Publications, Bombay.
5. Special Relativity by Shadowitz. A of W.B. Shaunder & Co. London

☆☆☆