اکائی (1) برداریں (سمتیات) اور میزانی مقداریں Vectors and Scalars

ساخت

1.1 مقصد

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہو جائینگے کہ۔

(i) میزانی یا عددی اور برداری، مقادیر میں تمیز کر سکیں۔

(ii) برداروں کی جمع، تفریق اور میزانیہ ضرب کے بنیادی اعمال کے متعلق جان کاری حاصل کر سکیں۔

(iii) ھندسی اور طبعی مسائل کو برداری شکل میں تشکیل دے سکیں

1.2 تمہید

طبعیات میں ایسی مقدار جس کی صرف قدر (Magnitude) ہو لیکن کوئی سمت نہ ہو میزانیہ کہلاتی ہے۔ حجم، کمیت، کثافت، میزانی مقادیر کی چند مثالیں ہیں۔ میزانیہ کو ایک حقیقی عدد سے ظاہر کیا جاتا ہے (دراصل یہ ایک حقیقی عدد ہی ہے) جو اس کی قدر کو بتلاتا ہے

جیسے کرہ کا حجم، کسی جسم کی کمیت یا کثافت یا جسم کی حرارت وغیرہ ایک منفی حقیقی عدد جو کسی جہت سے منسوب ہے (A سے B کی سمت ایک مرتب زوج (A,B) کے سوا کچھ اور نہیں) بردار کہلاتا ہے۔

نقل مکان، رفتار، قوت بردار کی چند مثالیں ہیں ایک بردار کو ایسے جہت شدہ مستقیم کے قطعے سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ جس کی لمبائی اس کی قدر کی تعبیر کرتی ہے اور جس کی سمت وہی ہے جو سمت شدہ خط مستقیم کی قطعہ کی ہے۔ A کو ابتدائی نقطہ B کو اختتامی نقطہ کہا جاتا ہے۔

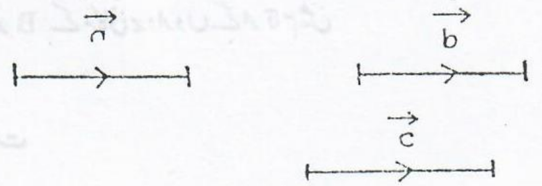
خطوط $\overrightarrow{AB}$ اور $\overrightarrow{BA}$ اس لئے مختلف ہیں کہ ان کی جہتیں ایک دوسرے کے خلاف ہیں گو ان کی لمبائی وہی ہے۔

شکل (1)

بردار کو عموماً واحد حرف جیسے c'b'a وغیرہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس طرح ہم لکھ سکتے ہیں $a = AB$ جہاں $|a|$ بردار a کی لمبائی ہوگی جسے بردار کی مقیاس (Modulus) کہا جاتا ہے۔

1.3 برداروں کے اقسام

برداروں کا مساوی ہونا :۔ دو بردار ایک دوسرے کے مساوی کہلاتے ہیں اگر اور صرف اگر ان کی قدریں برابر ہیں اور جہتیں (Direction) بھی ایک ہی یا متوازی ہوں (دیکھو شکل 2)



شکل (2)

اگر a اور b برابر ہوں تو لکھا جاتا ہے $a=b$ شکل (2) میں $a=b=c$ میزانیہ (تہی بردار) "a"

اپنی آپ جانچ

(1) کیا کسی جسم کا وزن ایک بردار ہے یا ایک میزانیہ (Scalar) ؟

صفر بردار (Zero-Vector)

ایسا بردار جس کی قدر صفر ہو صفر بردار یا تہی بردار کہلاتا ہے اور اسے 0 سے ظاہر کرتے ہیں

۔چنانچہ $\overrightarrow{BB}, \overrightarrow{AA}$ وغیرہ صفر بردار ہیں

اکائی بردار (Unit Vector)

ایسا بردار جسکی قدر "1" ہو اکائی بردار کہلاتی ہے چنانچہ غیر صفر بردار $\vec{a}$ کی سمت میں اکائی بردار علامت "$\hat{a}$" سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اسے "a کیاپ" پڑھا جاتا ہے اس لیے $\hat{a} = \frac{a}{|a|}$

منفی بردار (Negative Vector)

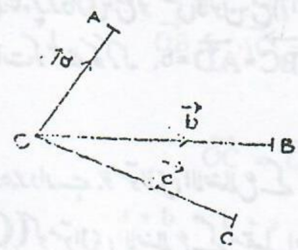
ایسا بردار جس کی قدر وہی ہے جو a کی ہے لیکن جس کی سمت a کی سمت کے مخالف ہے منفی بردار کہلاتا ہے۔ اسے a- سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

چنانچہ شکل (3) میں $\vec{AB} = a$ اور $\vec{BA} = -a$

شکل (3)

ہم ابتدائی بردار (Co - initial Vector)

ایسے بردار جن کا ابتدائی نقطہ ایک ہی ہوتا ہے ہم ابتدائی بردار کہلاتے ہیں۔ شکل (4) میں بردار a, b, a,b c ہم ابتدائی بردار ہیں



شکل (4)

(Notation)

فرض کرو کہ 0 کوئی اختیاری نقطہ ہے جسے مبداء (Origin) کے طور پر لیا گیا ہے۔ اگر A کوئی دوسرا نقطہ ہو جو 0 سے مختلف ہے تو 0A کو عام طور پر a سے ظاہر کیا جاتا ہے

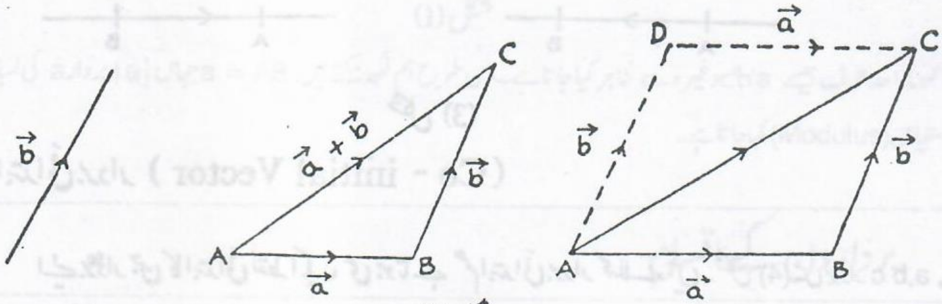
جہاں OA کی لمبائی $= |a|$

قوتوں کا متوازی الاضلاع قانون (Parallelogram law of forces)

اس قانون کے مطابق اگر کسی نقطہ پر عمل کرنے والی دو قوتوں کو ایک متوازی الاضلاع کے دو متصل (Adjacent) اضلاع سے تعبیر کیا جائے تو ان کا حاصل (Resultant) اس نقطہ سے گذرنے والے وتر سے تعبیر ہوگا۔ دیکھو شکل (5)
اس قانون سے برداروں کے جمع کی تعریف کے لیے راہ نکل آتی ہے۔

1.4 برداروں کی جمع

دو برداروں $\vec{AB}$ اور $\vec{AC}$ کی جمع کی تعریف بطور بردار $\vec{AC}$ (شکل 5) کی جاتی ہے۔ چنانچہ اگر a اور b کوئی دو بردار ہوں (جو لازماً ہم ابتدائی بردار نہیں) نیز بردار b کو خود اس کے متوازی اس طرح حرکت دی جائے کہ اس کا ابتدائی نقطہ b کے اختتامی (Terminal) نقطہ پر منطبق ہو جائے تو برداری جمع $a+b$ وہ بردار ہے جس کا ابتدائی نقطہ وہی ہے جو a کا ہے اور اختتامی نقطہ b کا اختتامی نقطہ ہے۔



شکل (5)

شکل (5) سے واضح ہے کہ اگر AB اور BC سے بالترتیب بردار a اور b تعبیر ہوں تو مثلث ABC کا تیسرا ضلع AC برداری جمع $a+b$ کو تعبیر کریگا۔ اس بناء پر برداری جمع کو مثلثی قانون جمع (Triangular law of addition) کہا جاتا ہے۔ متوازی الاضلاع ABCD کی تکمیل کرکے نیز اس بات کو ملحوظ رکھ کر کہ $\vec{BC}=\vec{AD}=b$، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

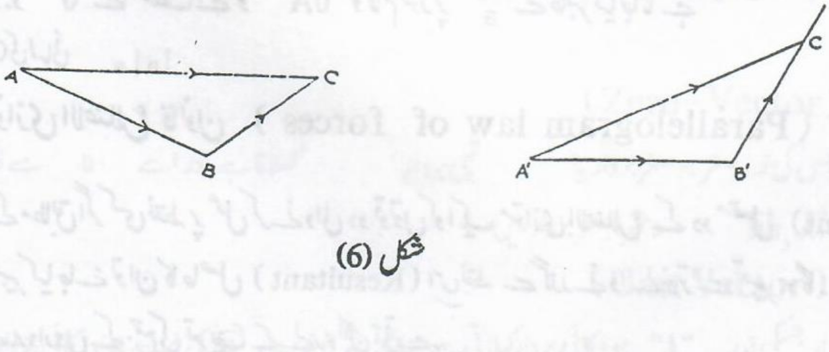
$$\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AB}+\vec{AD}$$

یعنی دو ہم ابتدائی برداروں کی جمع وہ بردار ہے جو متوازی الاضلاع کے اس سے تعبیر ہوگا جو مولفہ اجزائی برداروں (Component Vector) کو متوازی الاضلاع کے متصلہ اضلاع کے طور پر لینے سے حاصل ہوتا ہے۔

برداروں کی جمع کا یہ قاعدہ متوازی الاضلاع کا جمعی قانون کہلاتا ہے جو مثلثی قانون جمع کے مماثل (Identical) ہے۔

نوٹ : اگر [شکل (6)] $\vec{AB}=\vec{AB}, \vec{BC}=\vec{BC}$

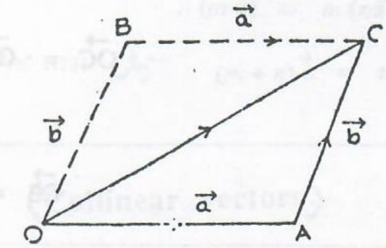
تو ابتدائی ہندسہ سے بآسانی دیکھا جاسکتا ہے کہ $\vec{AC}=\vec{AC}$ جیسا کہ شکل (6) سے ظاہر ہے۔



شکل (6)

(i) برداری جمع تقلیبی (Commutative) ہوتی ہے۔

یعنی کوئی دو برداروں a اور b کے لئے $a+b = b+a$



شکل (7)

ثبوت : فرض کرو کہ $OA = a, OB = b$

تب مثلثی جمع سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = a + b \qquad (1)$$

نیز متوازی الاضلاع OABC کی تکمیل کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔

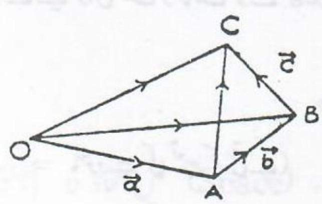
$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC} = b,\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} = a.$$

اب بلحاظ تعریف

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = b + a \qquad (2)$$

(1) اور (2) سے مطلوبہ نتیجہ $a + b = b + a$ حاصل ہوتا ہے۔

(ii) بردار جمع تلازمی (Associative) ہوتی ہے۔



شکل (8)

یعنی کوئی تین برداروں $a, b, c,$ کے لیے $(a+b)+c = a+(b+c)$

فرض کرو کہ $\overrightarrow{OA} = a;\ \overrightarrow{AB} = b,\ \overrightarrow{BC} = c.$

چار ضلعی OABC کی تکمیل کرو (اور وتر کھینچو)

تب ہمیں حاصل ہوتا ہے $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$

نیز $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (b + c)$

اسلیے

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = a + (b + c) \qquad (1)$$

لیکن

اسلیے)
$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = (a + b)$$

$$\overrightarrow{OC} = (a + b) + c \qquad (2)$$

(1) اور (2) سے حاصل ہوتا ہے ۔

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

چنانچہ برداروں $a+(b+c)$ اور $(a+b)+c$ کے مساوی ہونے کی وجہ سے ہم ایک کو بغیر کسی ابہام کے بطور $a+b+c$ لکھ سکتے ہیں۔

علاوہ ازایں یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ نتیجہ بالا درست ہے خواہ a, b, c ہم مستوی ہوں یا نہ ہوں

1.5 برداروں کی تفریق۔

اگر $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ دو بردار ہوں تو ان کا فرق $\vec{a}-\vec{b}$ بطور $\overrightarrow{a+(-b)}$. تعریف کیا جاتا ہے پس کسی بردار b کو بردار a میں سے تفریق کرنے کے لیے b کی سمت کو مخالف کرکے a میں جمع کرو خاص طور پر $a-a=a+(-a) = 0$ (جو حقیقت میں 0 کی تعریف ہے)

نوٹ کیا جائے کہ

$a + b = c \Rightarrow a = c - b$ (علامت $\Rightarrow$ ماخوذ ہے کی تعبیر کرتی ہے)

1.6 میزانیہ سے بردار کا ضرب

فرض کرو کہ $\vec{a}$ کوئی غیر صفری بردار اور m کوئی غیر صفری میزانیہ ہے $\vec{a}$ کا m سے حاصل ضرب جسے $\overrightarrow{ma}$ لکھا جاتا ہے اس بردار کی تعریف کرتا ہے جس کی قدر $\vec{a}$ کی قدر کی $|m|$ مرتبہ ہوتی ہے اور اس کی جہت وہی ہے جو $\vec{a}$ کی ہے اگر m مثبت ہے اور جہت $\vec{a}$ کی جہت کے خلاف ہے اگر m منفی ہے ۔

نیز ہم تعریف کرتے ہیں کہ $\vec{o}.\vec{a} = \vec{o}$ اور $m.\vec{o} = \vec{o}$

قاری اپنے طور پر درج ذیل کو جانچ سکتا ہے۔

$$n\,(m\,\vec{a}) = m\,(n\vec{a}) = mn\,\vec{a}$$

اور $(m+n)\,\vec{a} = m\vec{a} + n\,\vec{a},$ جہاں m'n میزانیے ہیں

1.7 ہم خط بردار یں (Collinear vectors)

غیر صفری بردار یں جن کی وہی (یا متوازی) جہت ہو ہم خط بردار یں کہلاتے ہیں۔ اگر $\vec{a}$ کوئی غیر صفری بردار ہو تو کوئی بردار $\vec{r}$ جو $\vec{a}$ کے ہم خط ہے بطور $r = x\,a$ لکھا جاتا ہے جہاں پر x ایک میزانیہ ہے۔ یہ بردار کی کسی عدد سے حاصل ضرب کی تعریف سے ظاہر ہے

قضیہ 1 (Theorem) اگر $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کوئی دو غیر ہم خط non-collinear بردار یں ہیں نیز l اور m کوئی دو میزانیے ہیں تو

$$l\,\vec{a} + m\,\vec{b} = 0 \Rightarrow l = 0,\ m = 0$$

ثبوت: فرض کرو کہ $l \neq 0$

تب $l\,a + m\,b = 0 \Rightarrow a = -\frac{m}{l}\,b$ (contradiction)

جس کا مطلب ہے $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ ہم خط ہیں جو ایک تضاد ہے

اسلیے $l = 0$ اسطرح $m = 0$

مکانی بردار Position vector

فرض کرو کہ o کوئی حوالہ کا نقطہ ہے۔ فضاء (Space) میں بلحاظ o (بطور حوالہ کے مبداء کے) کسی نقطہ p کا مکانی بردار $\vec{r} = \vec{op}$ سے تعریف کیا جاتا ہے

اپنی آپ جانچ 2 کیا $i = j = 0$ جہاں i اور j محاور x اور y کے اکائی بردار ہیں

1.8 ہم مستوی بردار Coplanar vectors

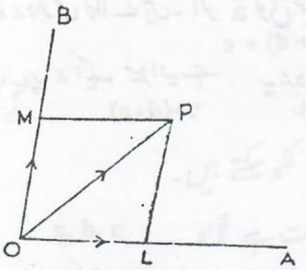
وہ بردار یں جو ایک ہی مستوی میں واقع ہوں ہم مستوی بردار یں کہلاتے ہیں۔ یہاں ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ بردار ہم ابتدائی ہیں۔

قضیہ 2 اگر $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ دو غیر صفری مکانی بردار ہوں مستوی OAB میں کسی نقطہ کا مکانی بردار $\vec{r}$ ہو تو $\vec{r}$ کو بشکل $\vec{r}=x\vec{a}+y\vec{b}$ لکھا جاسکتا ہے جہاں x, y, z یکتا میزانیے ہیں. بالعکس شکل بالا کا کوئی بردار کسی ایسے نقطہ کا مکانی بردار ہوگا جو مستوی OAB میں واقع ہو

ثبوت

فرض کرو کہ $\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{OB} = b \qquad \overrightarrow{OP} = r$

نقطہ P سے خطوط PL اور PM کو OB اور OA کے متوازی کھینچو جو OA اور OB سے بالترتیب نقاط L اور M پر ملتے ہیں



شکل 9

اب $r = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LP} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OM}$

چونکہ $\overline{OL}$ $\overline{OA} = a.$ کا خط ہے اس لئے $\overline{OL} = xa$ جہاں پر x کوئی مناسب میزانیہ ہے۔

اسی طرح سے $\overrightarrow{OM} = y\,b$

چنانچہ $r = x\,a + y\,b$

برعکس قضیہ بطور مشق چھوڑا جارہا ہے جو بہت واضح ہے

یکتائی کا ثبوت

فرض کرو کہ $r = x'a + y'b = x\,a + y\,b$ یعنی

$$(x - x')\vec{a} + (y - y')\vec{b} = 0 \implies x - x' = 0, y - y' = 0 \implies x = x', y = y'$$

اس لئے $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ غیر ہم خط ہیں یہاں پر ہم نے قضیہ (1) کو استعمال کیا ہے۔

اپنی آپ جانچ (3)

کیا $\mathbf{i+j, j+k, k+i}$ ہم مستوی بردار ہیں

قضیہ 3 : اگر $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ تین غیر ہم مستوی بردار ہوں اور l, m, n (کوئی میزا یے ہیں تو

$$l\,a + m\,b + n\,c = 0 \Rightarrow l = 0, m = 0, n = 0$$

ثبوت۔

اگر ممکن ہو تو فرض کرو $l \neq 0$ تب $a = -\frac{m}{l}\,b - \frac{n}{l}\,c$ جو یہ بتلاتا ہے a ہم مستوی ہے b اور c کا جو ایک تضاد ہے یعنی $l = 0$ $\ell = 0$

$$m = n = 0.$$

قضیہ 4

اگر a, b, c کوئی تین غیر مستوی بردار یں ہیں تو کسی بردار $\vec{r}$ کو بشکل

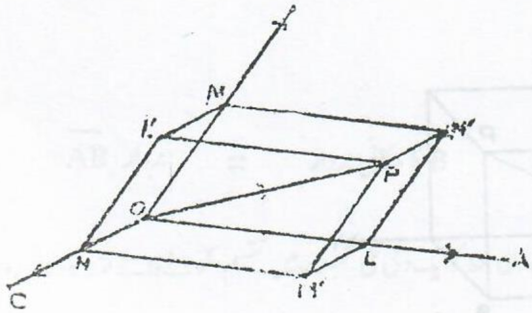
$$\mathbf{r} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں x, y, z یکتا میزا یے ہیں

ثبوت۔ فرض کرو کہ $\vec{OA} = \mathbf{a}, \vec{OB} = \mathbf{b}, \vec{OC} = \mathbf{c}$.

چونکہ خطوط OA,OB,OC غیر ہم مستوی ہیں تین مختلف مستویوں BOC, COA, AOB کی تعریف کرو۔

فرض کرو کہ P کوئی نقطہ ہے P. سے ان تینوں مستویوں کے متوازی مستویاں کھینچو جو خطوط OA, OB, OC سے بالترتیب نقاط L, M, N پر ملتی ہیں تاکہ ایک متوازی السطوح (Paral depiped) بموجب شکل 10 حاصل ہو جسکا وتر OP ہے



شکل 10

اب ہم لکھ سکتے ہیں :

$$r = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LP} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LN'} + \overrightarrow{N'P}$$
$$= \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$$

چونکہ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ بالترتیب $\overrightarrow{OL}, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$ کے ساتھ ہم خط ہیں اس لیے

$$\overrightarrow{OL} = x\,\mathbf{a},\ \overrightarrow{OM} = y\,\mathbf{b},\ \overrightarrow{ON} = z\,\mathbf{c}$$

پس $r = x\,\mathbf{a} + y\,\mathbf{b} + z\,\mathbf{c}$

یکتائی (Uniqueness) :

بالفرض اگر $r = x\,\mathbf{a} + y\,\mathbf{b} + z\,\mathbf{c} = x'\mathbf{a} + y'\mathbf{b} + z'\mathbf{c}.$

$$(x - x')\,\mathbf{a} + (y - y')\,\mathbf{b} + (z - z')\,\mathbf{c} = 0$$

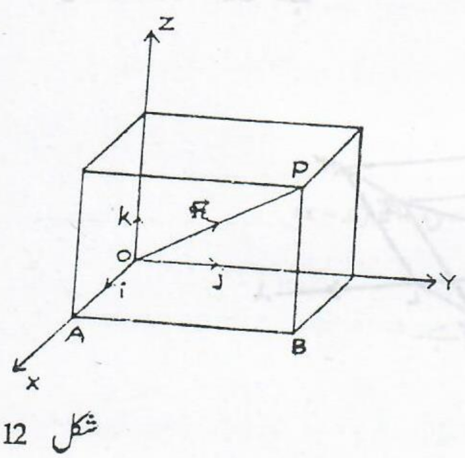
قضیہ 3 سے

$$x - x' = 0,\ y - y' = 0,\ z - z' = 0$$

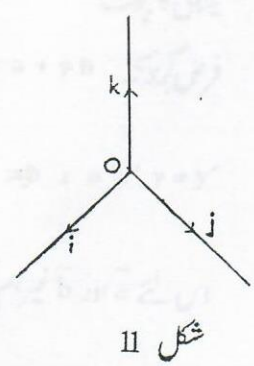
لہذا $x = x',\ y = y',\ z = z'$

1.9 بردار r اکائی برداروں میں i,j,k کے ارقام میں

اگر تین باہم عمودی حوالے کے محور ox,oy,oz کی سمتوں میں اکائی بردار یں i,j,k واقع ہوں تو قضیہ 4 سے ہم کسی بردار OP = r کو بطور r = xi + yj = zk لکھ سکتے ہیں۔ جہاں پر x,y,z نقطہ P کے مخصات کہلاتے ہیں۔ بالعموم i,j,k کو اس طرح لیا جاتا ہے کہ وہ ایک دایاں دستی (Right Handed) نظام بناتے ہیں یعنی k کے اختتامی نقطہ سے دیکھے جانے پر i سے j کی سمت میں 90 درجہ کی گردش ساعت کے مخالف رخ (Anti Clock-wise) نظر آتی ہے دیکھو شکل (11)



شکل 12



شکل 11

یہاں پر نقطہ $\overrightarrow{P}$ کا مکانی بردار $OP = \overrightarrow{r}$ جس کے مختصات مبدا "O" میں سے گذرنے والے علی القوائم حوالہ محوروں کے نظام میں (x,y,z) ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ

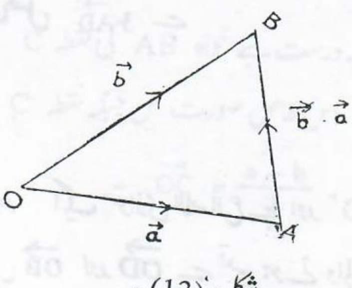
$OP^2 = OB^2 + PB^2 = OA^2 + AB^2 + PB^2$ (دیکھو شکل 12)

$= x^2 + y^2 = z^2$

اور اس لئے $|\, r \,| = |\, \overrightarrow{OP} \,| = x^2 + y^2 + z^2$

1.10 بردار نقاط A اور B کے مکانی برداروں کے ارقام میں

فرض کرو کہ "O" مبدا ہے نیز A اور B کے مکانی بردار $\vec{a}$ اور b ہیں تب ہمیں حاصل ہوتا ہے



شکل (13)

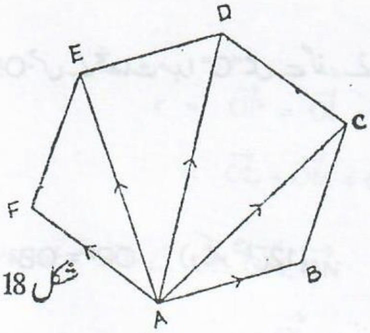
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

(مثلثی جمعی قانون سے)

یعنی $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = b - \vec{a}$

پس A کا مکانی بردار $\quad$ B کا مکانی بردار $=$ بردار $\overrightarrow{AB}$

مثال ۱ : دونقاط کو جوڑنے والی خط کو ایک دی گئی نسبت میں تقسیم کرنے والے نقطہ کا مکانی بردار معلوم کرو



شکل 18

حل۔

ان قوتوں کو $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$ $\overrightarrow{AF}$ سے تعبیر کیا جاسکتا ہے اگر $\overrightarrow{R}$ ان کا حاصل (برداری حاصل جمع) ہو تو

$$R = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$$

$$= \overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) + \overrightarrow{AD} + \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}\right) + \overrightarrow{AF}$$

$$= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE}\right) + \left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AF}\right) + 3\,\overrightarrow{AD}$$

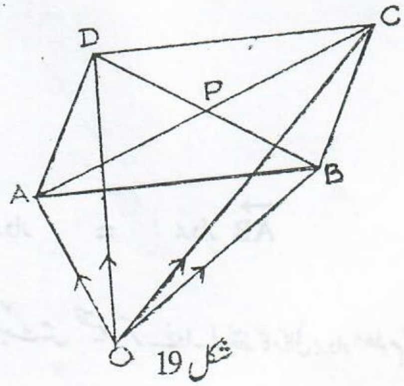
$$= 3\,\overrightarrow{AD}$$

(یہ باآسانی دیکھا جاسکتا ہے کہ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} = 0$ اسلیے دونوں قدر میں برابر اور سمت میں مخالف ہیں اسطرح $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AF} = 0$)

لہذا مطلوبہ حاصل $3\,\overrightarrow{AD}$ ہے

مثال 7

ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے اور "O" کوئی نقطہ ہے ثابت کرو کہ $\overrightarrow{OA}$ اور $\overrightarrow{OC}$ سے تعبیر ہونے والی قوتیں $\overrightarrow{OB}$ اور $\overrightarrow{OD}$ سے تعبیر ہونے والی قوتوں کے معادل ہیں



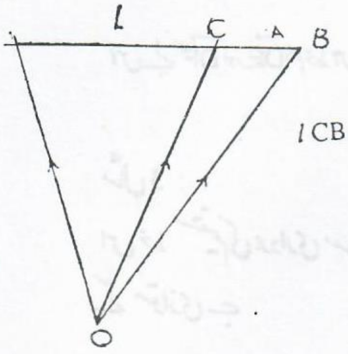
شکل 19

حل۔

فرض کرو کہ وتروں کا نقطہ تقاطع P ہے نیز O کو مبدا مان لیا جاتا ہے اب p کا بردار مکانی $\vec{p}$ ہو تو

حل : فرض کرو کہ حوالہ کا مبدا "O" ہے نیز A اور B کے مکانی بردار $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ ہیں یعنی $\vec{OA} = a, \vec{OB} = b$

مان لو کہ نقطہ C، AB کو نسبت l:m میں تقسیم کرتا ہے



اسطرح $\frac{AC}{CB} = \frac{l}{m}$ یا $l\,CB = m\,AC$

یعنی $l\,\vec{CB} = m\,\vec{AC}$

برداروں $\vec{BC}$ اور $\vec{AC}$ کو ان کے سروں کے نقاط کے مکانی برداروں کے ارقام میں ظاہر کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

ہے

$$\left(\vec{OB} - \vec{OC}\right) = m\left(\vec{OC} - \vec{OA}\right)$$

یعنی

$$(l + m)\,\vec{OC} = l\,\vec{OB} + m\,\vec{OA} = l\,b + m\,a$$

$$\therefore \vec{OC} = \frac{l\,b + m\,a}{l + m}.$$

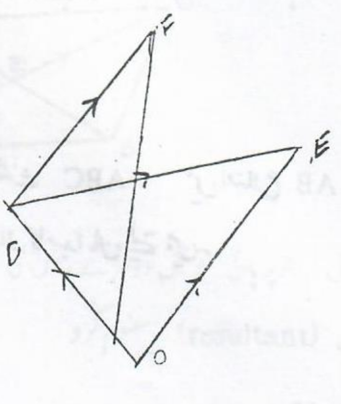
یہاں سفارش کی جاتی ہے کہ طالب علم اس بات کی جانچ کرلے کہ نتیجہ درست ہے خواہ AB کی نقطہ C پر نسبت l : m میں تقسیم خارجی (External division) تقسیم ہی ہو اس خاص صورت میں جبکہ نقطہ C خط AB کا نقطہ تنصیف (mid point) ہو تو ہمیں حاصل ہوتا ہے $\vec{OC} = \frac{a + b}{2}$

مثال 2 :

ثابت کرو کہ وہ نقاط جن کے مکانی بردار $-2a + 3b + 5c$, $a + 2b + 3c$ **$7a - c$** ہیں ہم خط ہیں۔

حل

اگر دیے ہوئے نقاط کو D, E, F سے ظاہر کیا اسے تو کسی نقطہ کو حوالہ کا مبداء مان کر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔



$$\vec{DE} = \vec{OE} - \vec{OD}$$

$$= (a + 2b + 3c) - (-2a + 3b + 5c)$$

$$= 3a - b - 2c$$

نیز

$$\vec{DF} = \vec{OF} - \vec{OD}$$

$$= (7a - c) - (-2a + 3b + 5c)$$

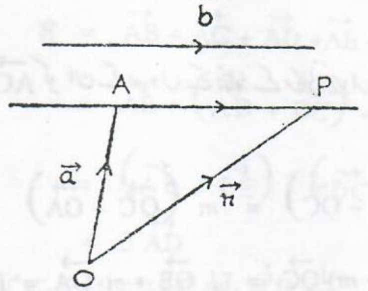
$$= 9a - 3b - 6c = 3(3a - b - 2c) = 3\,\overrightarrow{DE}$$

یعنی
$$\overrightarrow{DF} = 3\,\overrightarrow{DE}$$

اس لیے $\overrightarrow{DF}$ اور $\overrightarrow{DE}$ ہم خط ہیں یعنی نقاط D,E,F ایک ہی خط پر واقع ہیں۔

مثال 3 :

اس خط مستقیم کی برداری مساوات معلوم کرو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گذرتا ہے اور ایک دیئے گئے بردار کے متوازی ہے



شکل 15

حل۔

فرض کرو کہ O حوالہ مبدا ہے نیز A دیا ہوا نقطہ ہے اور $\vec{b}$ دیا ہوا بردار نقطہ A میں سے بردار $\vec{b}$ کے متوازی ایک خط کھینچو اور اس پر کوئی نقطہ P لو

چونکہ AP بردار $\vec{b}$ کے متوازی ہے اسلیے ہم لکھ سکتے ہیں $\overrightarrow{AP} = t\,b$ جہاں t کوئی میزانیہ ہے

اب
$$r = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = a + t\,b$$

چنانچہ $r = a + t\,b$ اس خط کی برداری مساوات ہے

مثال 4

ثابت کرو کہ کسی مثلث کے دو ضلعوں کے نقاط تنصیف کو جوڑنے والا خط تیسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے اور طول میں اس کا آدھا ہوتا ہے۔

حل۔

فرض کرو کہ مثلث ABC میں اضلاع AB اور AC کے نقاط تنصیف بالترتیب D اور E ہیں۔
ہم A کو حوالہ کا مبدا مان لیتے ہیں۔

اور بلحاظ اسکے نقاط B اور C کے مکانی بردار فرض کرو علی الترتیب $\vec{b}$ اور $\vec{C}$ ہیں

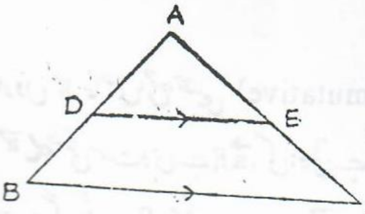
تب نقاط D اور E کے مکانی بردار علی الترتیب $\frac{b}{2}$ اور $\frac{c}{2}$ ہونگے

اب $\vec{BC} =$ (C کا مکانی بردار) $-$ (B کا مکانی بردار)

$= c - b$

اور $\vec{DE} =$ (E کا مکانی بردار) $-$ (D کا مکانی بردار)

ثابت کرو کہ $= \frac{1}{2}(c - b)$



شکل 16

اسلئے ثابت ہوا کہ DE، BC کے متوازی ہے اور اس کا طول BC کے طول کا آدھا ہے

مثال 5

ثابت کرو کہ کسی متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف (bisection) کرتے ہیں

حل

فرض کرو کہ ABCD متوازی الاضلاع ہے A کو مبدا مان لو جسکے لحاظ سے B اور D کے مکانی بردار علی الترتیب $\vec{b}$ اور $\vec{d}$ ہیں تب، C مکانی بردار ہوگا $\vec{AC}$ جہاں پر $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = b + d$ نیز BD کے نقطہ تنصیف E کا مکانی بردار $\frac{1}{2}(b + d)$ ہوگا

نیز AC کے نقطہ تنصیف کا بردار مکانی ہے $\frac{(\vec{b} + \vec{d})}{2}$ ہے

یعنی AC کا تنصیف وہی ہے جو BD کا

مثال 6

ایک منتظم مسدس (Regular Hexagen) کے راس A پر پانچ قوتیں دوسرے راس کی سمتوں میں ان راسوں سے A کے فاصلوں کے بتناسب عمل کرتی ہیں۔ ان کا حاصل (resultant) معلوم کرو

$$p = \frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2} \quad \text{یعنی} \quad a + c = b + d$$

خلاصہ

ایسی طبعی مقدار جو فضاء (space) میں قدر و جہت دنوں رکھتی ہو بردار کہلاتی ہے اسکی تعبیر ایک مستقیم خط سے کی جاتی ہے

$\vec{a} = \vec{b}$ کا مطلب ہے کہ $\vec{a}$ کی جہت وہی ہے جو $\vec{b}$ کی ہے اور $\vec{a}$ کی قدر وہی ہے جو $\vec{b}$ کی ہے یعنی $|a| = |b|$

نیز $\hat{a} = \frac{a}{|a|}$ سے $\vec{a}$ کے سمت میں اکائی بردار حاصل ہوتا ہے

بردار مثلثی قانون جمع کی تعمیل کرتے ہیں۔ برداروں کا حاصل جمع تقلیبی (Commutative) ہوتا ہے۔ بردار a کو کسی عددی مقدار α سے ضرب دینے سے بردار $\alpha\vec{a}$ جسکی سمت وہی ہے جو $\vec{a}$ کی ہوتی ہے لیکن قدر $\vec{a}$ کی قدر کی α گنا حاصل ہوتا ہے اگر α مثبت ہو اور سمت مخالف ہوگی اگر α منفی ہو۔ بردار $\vec{a}$ اور $\alpha\vec{a}$ ہم خط بردار کہلاتے ہیں۔ اگر کوئی بردار $\vec{a}$ شکل $x b + y c$ میں لکھا جاسکے جہاں x اور y میزانیے ہیں تو کہاجاتا ہے کہ بردار $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ہم مستوی ہیں۔ اگر حوالے کے محوروں x,y,z کی سمت میں اکائی بردار علی الترتیب i, j, k ہوں تو فضا میں کسی بردار $\vec{r}$ کو شکل $x i + y j + z k$ میں لکھاجاسکتا ہے جہاں x, y, z میزانیہ ہیں

بردار $\vec{AB}$ بردار $\vec{OB} - \vec{OA}$ کے برابر ہوتا ہے۔ اگر دو نقاط A اور B کو ملانے والا خط نقطہ c سے نسبت m:n تقسیم ہو جاتا ہو تو $\vec{c}$ کا بردار مکانی ہے $= \dfrac{m\,\vec{OB} + n\,\vec{OA}}{m+n}$

1.12 نمونہ امتحانی سوالات

I ذیل کے تفصیلی جوابات لکھو

1 (a) (i) کسی بردار نیز برداروں کی جمع اور کسی بردار کی ایک G عدد سے ضرب کی تعریف کرو

(b) ثابت کرو کہ بردار $\vec{a}; \vec{b}; \ 3\vec{a} - 2\vec{b}$ ہم خط (Collinear) ہیں

(a) (ii) ہم مستوی برداروں کی تعریف کرو، اگر $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ تین دئے ہوئے بردار ہوں تو بتلاؤ کہ کسی بردار کو بشکل $r = x a + y b + z c$ لکھاجاسکتا ہے

(b) مثلث ABC کا مرکز ہندسی یا مرکز ثقل G(Centroid) ہو تو ثابت کرو کہ

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 0.$$

II ذیل کے جواب مختصراً دیجئے

(i) ثابت کرو کہ بردار $a - 2b + 3c,\ -2a + 3b - c,\ 4a - 7b + 7c$ ہم خط ہیں

(ii) نقاط A, B, C, D کے بردار مکانی ہیں $2i + 4\hat{k},\ 5i + 3\sqrt{3}\, j + 4\hat{k},\ -2\sqrt{3}\,\hat{j} + \hat{k}$ اور $2\hat{C} + \hat{K}$ ثابت کرو کہ CD, AB کے متوازی ہے نیز CD کا $\frac{3}{2}$ گنا

یادداشتیں

اکائی (2) برداروں کا میزانی اور برداری حاصل ضرب

(Scalar and vector product of vectors)

ساخت

2.1 مقصد

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہوجائیں گے کہ۔

(i) دو برداروں کے میزانی اور برداری حاصل ضرب کی تعریف اور ان کی ھندسی تعبیرات سے واقف ہوجائیں۔

(ii) یہ ثابت کرسکیں کہ برداروں کا میزانی اور برداری حاصل ضرب برداروں کی جمع پر تقسیمی ہے (distributive)

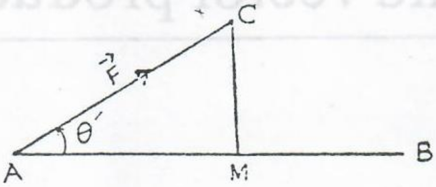
(iii) تین یا زیادہ برداروں کے میزانی اور برداری حاصل ضربوں کے لئے جملے (Expressions) حاصل کرسکیں۔

2.2 تمھید

اکائی 1) میں ہم نے برداروں کی جمع اور کسی میزانیہ سے ضرب کے تعلق سے بحث کی ہے۔ اس اکائی میں ہم دو یا زیادہ برداروں کے حاصل ضرب پر بحث کرینگے۔ چونکہ برداری الجبرا کی اساس طبعی اور ھندسی مسائل پر ہوتی ہے اس لئے برداروں کا حاصل ضرب اس طور پر تعریف کیا جائیگا کہ وہ طبعی مسائل میکانیات نیز میکانیات اور ھندسہ میں پیش آنے والے مسائل میں جو حاصل ضرب بنتا ہے اس سے ہم آہنگ ہو۔ اس اکائی میں بھی تین علی القوائم حوالہ محوروں کی سمت میں اکائی برداروں کو i,k,j سے ہی ظاہر کیا جائے گا۔ جو ایک دایاں دستی نظام (Right Handed System) بناتے ہیں۔ یعنی

2.3 میزانی یا نکتۂ حاصل ضرب

دو برداروں کا نکتہ میزانی حاصل ضرب ذیل کی طبعی صورت حال کے پیش نظر تعریف کیا جاسکتا ہے۔



شکل (1)

اگر ایک مستقل قوت F کسی ذرہ پر عمل کر کے اس کو مقام A سے مقام B میں حرکت دے تو

قوت F سے کیا گیا کام = (AB کی جہت میں F کا جزو ترکیبی) x (AB)

$$(AB) \times (AM) = AB \mid F \mid \text{Cos} = \theta \qquad \text{(i)' } \cos\theta) \qquad (۱)$$

پس کسی قوت F سے کیا گیا کام ، قوت اور نقل مکان (Displacement) کے برداروں کا میزانی یا نکتہ حاصل ضرب ہے۔

تعریف۔ دو برداروں a اور b کے میزانی یا نکتہ حاصل ضرب کی ab cos θ, سے تعریف کی جاتی ہے۔ جہاں a اور b برداروں a اور b کی قدریں ہیں یا θ ان برداروں کے درمیان زاویہ ہے نیز $0 \leq \theta \leq \pi$. اس کو a. b سے دونوں کے درمیان ایک نکتہ لکھ کر ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس کو دونوں برداروں کا داخلی حاصل ضرب (Inner Product) یا راست حاصل ضرب (Direct Product) بھی کہا جاتا ہے۔

اس طرح (ا) کی رو سے دو برداروں کا میزانی حاصل ضرب اس کام کو ظاہر کرتا ہے جو طبعی طور پر قوت F انجام دیتی ہے جب وہ کسی ذرہ پر عمل کر کے اس کو مقام A سے مقام B تک حرکت دے۔

2.3.1 نکتہ حاصل ضرب کی خصوصیات

$$a \,.\, b = a\, b \cos\theta = b\, a \cos\theta = b \,.\, a$$

جس سے ظاہر ہوتا ہے کہ نکتہ حاصل ضرب تقلیبی (Commutative) ہے۔

(ii) اگر $a \cdot b = 0 \Rightarrow a\, b \cos\theta = 0.$

تو $a = 0$ یا $b = 0$ یا $\cos\theta = 0.$

لیکن اگر a اور b دونوں غیر صفر بردار ہوں تو

$(a \neq 0, b \neq 0)$ بردار a اور b نا علی القوائم ہیں۔ $a \cdot b = 0 \Rightarrow$

(ii) اگر $a = b = 1,$ تو

$$a \cdot b = 1 \cdot 1 \cos\theta = \cos\theta$$

پس دو اکائی برداروں کے نکتہ حاصل ضرب سے ان کے درمیان زاویہ معلوم ہوتا ہے کیونکہ یہ حاصل ضرب $\cos\theta$ کے برابر ہے۔ جہاں θ ان کے درمیان زاویہ ہے۔

(iv) اگر بردار a اور b متوازی ہوں تو

$$a \cdot b = ab \cos 0 = ab$$

اس خاص صورت میں جب کہ $a = b$ ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$a \cdot a = a\,a = a^2$$

اس لئے ہم لکھتے ہیں۔ $a \cdot a = a^2$

(v) اگر m اور n دو میزانیے یا اعداد ہوں نیز a اور b دو بردار ہوں تو یہ بآسانی دیکھا جاسکتا ہے کہ۔

$$(m\, a) \cdot (n\, b) = m\, n\, (a \cdot b) = (n\, a) \cdot (m\, b)$$

$m \geq o$ اور $m > o$ کی صورت میں طالب علم نتیجہ کی درستگی جانچ لے بطور خاص ایک صورت ہے۔

$$(l\, a) \cdot b = l\, ab \cos\theta = a\, (l\, b) \cos\theta = a \cdot l\, b = l\, (a \cdot b)$$

(vi) $i \cdot i = 1 \cdot 1 \cos\theta = 1 \cdot 1 \cos 0 = 1.$

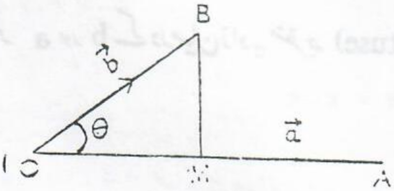
اسی طرح $j \cdot j = k \cdot k = 1.$

نیز $i \cdot j = 1 \cdot 1 \cos 90^\circ = 0$

اسی طرح $j \cdot k = k \cdot i = 0$

(2.3.2) میزانی حاصل ضرب کی ہندسی تعبیر

(Geometrical interpretation of scalar product)



شکل (2)

فرض کرو $\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{OB} = b, \angle AOB = \theta,$

$a = |a| = OA$ اور $b = |b| = OB.$

تب تعریف کی رو سے

$$a \cdot b = ab \cos\theta,$$
$$= a\,(OB \cos\theta) = a\,(\pm OM),$$

یہاں پر علامت (+) یا (-) لی جائیگی بلحاظ اسکے کہ $\cos\theta$ مثبت ہے یا منفی۔

$|a| = \cdot a.b$ ضرب a کی سمت میں b کا ظل

$|b| = a.b$ ضرب b کی سمت میں a کا ظل

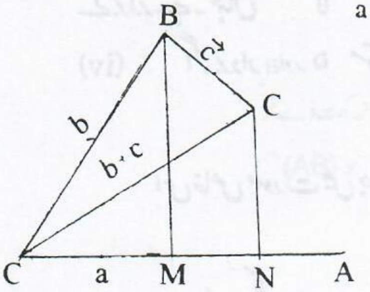
چنانچہ نکتہ حاصل ضرب کی ھندسی تعبیر حسب ذیل ہوگی۔

دو برداروں کا نکتہ حاصل ضرب ایک بردار کی قدر کو دوسرے بردار b کی سمت a میں تظلیل سے ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

قضیہ (ا) : تقسیمی قانون (Distributive Law)

نکتہ حاصل ضرب برداروں کی جمع کے لحاظ سے تقسیمی ہوتا ہے یعنی۔

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$



(3) شکل

ثبوت فرض کرو کہ $\overrightarrow{OA} = a,\ \overrightarrow{OB} = b,\ \overrightarrow{BC} = c.$

تب $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = b + c$

(دیکھو شکل 3)

AO پر BM اور CN عمودیں کھینچو

تب OM, ON, MN بردار a پر b | (b + c) اور c کے علی الترتیب ظل (Projection) ہونگے۔ اور ہمیں حاصل ہوگا:

$$a \cdot (b + c) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$$

$=OA \cdot$ (OA کا OC پر ظل)

$= OA\,(ON) = OA\,(OM + MN)$

$= (OA)(OM) + (OA)(MN)$

$=OA \cdot$ (OA کا OB پر ظل) +

OA (OA کا BC پر ظل)

$= a \cdot b + a \cdot c$

پس $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

اگر a اور b کے درمیان زاویہ منفرجہ (Obtuse) ہو تو طالب علم اس صورت میں علیٰحدہ شکل کھینچے۔

اپنی آپ جانچ۔

(۱) اگر a اور b ایک مثلث قائم الزاویہ کے زاویہ قائمہ سے متصل اضلاع ہوں تو $a \cdot b$ کی قیمت کیا ہوگی؟

تبصرے۔ (i) چونکہ نکتہ حاصل ضرب تقلیبی ہوتا ہے اس لئے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$a \cdot (b + c) = (b + c) \cdot a$$

(ii) چونکہ نکتہ حاصل ضرب تقسیمی ہے اس لئے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} a \cdot (b - c) &= a \cdot [b + (-c)] = a \cdot b + a \cdot (-c) \\ &= a \cdot b + [-(a \cdot c)] = a \cdot b - a \cdot c. \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= (a + b) \cdot (a + b) = (a + b) \cdot a + (a + b) \cdot b \\ &= a \cdot a + b \cdot a + a \cdot b + b \cdot b \\ &= a \cdot a + 2a \cdot b + b \cdot b \quad [\because a \cdot b = b \cdot a] \\ &= a^2 + 2a \cdot b + b^2 \end{aligned}$$

اسی طرح سے

$$(a - b)^2 = a^2 - 2a \cdot b + b^2$$

(iv)

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot (a - b) &= (a + b) \cdot a - (a + b) \cdot b \\ &= a \cdot a + b \cdot a - a \cdot b + b \cdot b \\ &= a^2 - b^2 \quad [\because a \cdot b = b \cdot a] \end{aligned}$$

نکتہ حاصل ضرب اجزائے ترکیبی (Components) کے ارقام میں

فرض کرو کہ۔

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k \text{ and } b = b_1 i + b_2 i + b_3 k$$

تب

$$a.b = (a_1 i + a_2 j + a_3 k).(b_1 i + b_2 i + b_3 k)$$
$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

[دیکھو قضیہ (۱) اور (2.1) کا نتیجہ (iv)]

چنانچہ اگر دو برداریں ان کے اجزائے تحلیلی کی شکل میں معلوم ہوں تو ان کا نکتہ حاصل ضرب متناظر اجزائے تحلیلی کے حاصل ضربوں کا مجموعہ ہوتا ہے۔

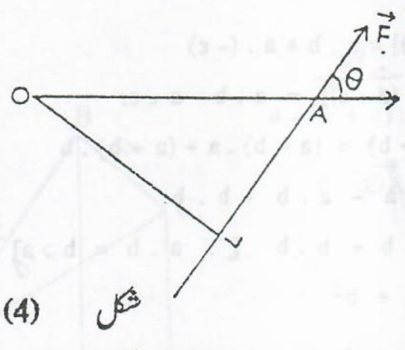
اس خاص صورت میں ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} a \cdot a = a^2 &= (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \cdot (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \\ &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \end{aligned}$$

$$a = |a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

2.4 دو برداروں کا برداری یا چلیپائی' حاصل ضرب

دو برداروں کے برداری حاصل ضرب کی تعریف کے لئے ذیل کی طبعی صورت حال محرک ہوتی ہے



شکل (4)

فرض کرو کہ "O" کوئی نقطہ ہے نیز یہ کہ
کوئی قوت F نقطہ A پر عمل کرتی ہے
F کے خط عمل (Line of action) پر
OL عمود گراؤ

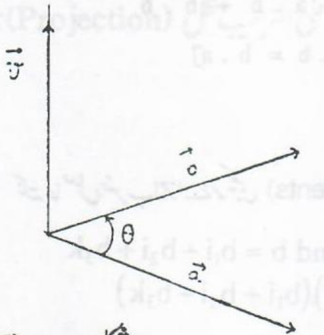
اگر OA اور F کے درمیان زاویہ θ ہو تو

"O" کے گرد F کا معیار اثر (Moment) = $|F|\ OL = OA\ |F|\ \sin\theta = |\vec{OA} \times F|$

غور کیا جائے کہ 'O' کے گرد F کا معیار اثر ایک بردار ہے۔ $|F \times OA$ سے ہوگی۔

تعریف دو برداروں a اور b کے برداری حاصل ضرب کی تعریف

اس بردار ϑ سے ہوتی ہے۔ جس کی خصوصیات حسب ذیل ہیں۔



شکل (5)

(i) $|v| = |a|\ |b|\ \sin\theta;$

جہاں a اور b کے درمیان زاویہ θ ہے اس طور پر کہ۔ $0 \le \theta \le \pi.$

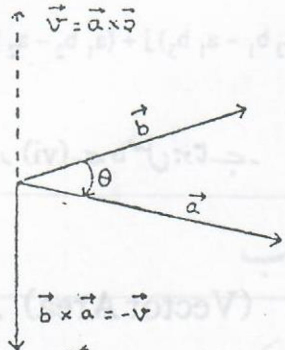
(ii) v دونوں برداروں a اور b پر عمود ہے۔ یعنی v برداروں ϑ اور b کی مستوی پر عمود ہے۔

(یعنی $v \cdot b = 0$ $v \cdot a = 0$)

(iii) v کی جہت ایسی ہوگی کہ v کے گرد کوئی گردش (جو V کی جہت میں ایک سیدھے ہاتھ کے پیچ کو آگے کی طرف ڈھکیلے جو زاویہ θ میں a اور b کی جہت میں لے آئے۔ برداری حاصل ضرب V کو بشکل $a \times b$؛ لکھا جاتا ہے اسی لئے اس کو دو برداروں کی چلیپائی ضرب بھی کہتے ہیں۔

بعض کار آمد نتائج۔ برداری حاصل ضرب سے چند ایک سادہ اور کار آمد نتائج فوری بر آمد ہوتے ہیں جو حسب ذیل ہیں۔

(i) $a \times b$ اور $b \times a$ دونوں کی ایک ہی قدر ہے جو



شکل (6)

$ab \sin\theta$ کے برابر ہے۔

دونوں برداروں a اور b پر عمود ہیں لیکن ان کی جہت ایک دوسرے کے خلاف ہے (دیکھو شکل (6))

پس $a \times b = -b \times a$

لہذا برداری حاصل ضرب تقلیبی نہیں

(ii) اگر $a \times b = 0,$ یعنی اگر $ab \sin\theta = 0,$ تو یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ $a = 0,$ یا $b = 0$

یا پھر $\sin\theta = 0$ یعنی $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$ اس صورت میں جبکہ a اور b دونوں غیر صفری بردار ہوں۔
چنانچہ دونوں بردار اس صورت میں باہم متوازی ہوں گے۔

(iii) $a \times a = 0$

(iv) $a \times m a = m(a \times a) = m\, 0 = 0$

(v) $i \times j = k, \quad j \times k = i, \quad k \times i = j$

$j \times i = -k, \quad k \times j = -i, \quad i \times k = -j$

نیز $i \times i = j \times j = k \times k = 0$

(vi) تقسیمی قانون $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

ثبوت۔ فرض کرو کہ $p = a \times (b + c) - a \times b - a \times c$

اب p کا نکتہ حاصل ضرب کسی بردار q سے ہو گا۔

$$q \cdot p = q \cdot \{a \times (b + c)\} - q \cdot (a \times b) - q \cdot (a \times c)$$

سکشن 2.5 میں ہم یہ بتلائینگے کہ $a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$

پس
$$q \cdot p = (q \times a) \cdot (b + c) - (q \times a) \cdot b - (q \times a) \cdot c$$
$$= (q \times a) \cdot b + (q \times a) \cdot c - (q \times a) \cdot b - (q \times a) \cdot c$$

(چونکہ نکتہ حاصل ضرب تقسیمی ہے)

$$= 0.$$

اسلئے یا تو $q = 0$ یا q عمود ہے p پر یا پھر $p = 0.$

اب چونکہ q اختیاری ہے اس لیے اسے ہم ایک ساتھ غیر صفری اور p پر غیر عمودی منتخب کر سکتے ہیں۔

یعنی $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

(vii) اگر $b = b_1 i + b_2 j + b_3 k,$ $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$

تو $a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\, i + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\, j + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, k$

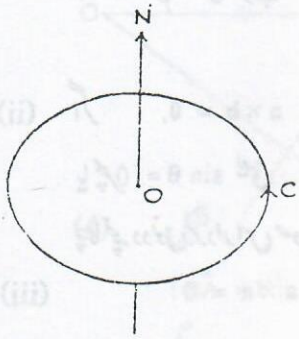
یاعلامت میں

$$(a \times b) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

نتیجہ بالا (v)اور (vi)سے حاصل ہوتا ہے۔

برداری رقبہ (Vector Area)

اگر کوئی مستوی رقبہ جو ایک سادہ جہت دار منحنی C سے محصورہ دیا جائے تو ہم اس رقبہ کے ساتھ ایک بردار A اس طرح منسلک کرسکتے ہیں کہ۔



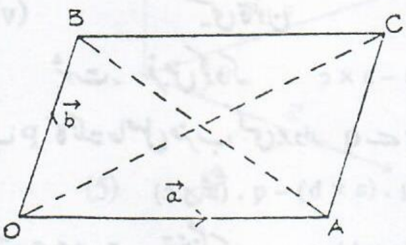
(i) بردار A کی قدر رقبہ ہے۔

(ii) بردار A رقبہ کی مستوی پر عمودار ہے۔

اور (iii) A کی جہت ایسی ہے کہ جس جہت میں منحنی کا محیط کھینچا جاتا ہے اور A کی جہت ایک سیدھے ہاتھ والے گردش پیچ کے متناظر ہوتے ہیں۔ دوسرے الفاظ میں اگر C کے سرے سے دیکھا جائے تو گردش مخالف سمت ساعت (Anti Clock Wise) ہوتی ہے۔

شکل (7)

(2.4.1) برداری حاصل ضرب کی ھندسی تعبیر



شکل (8)

فرض کرو کہ شکل (8) کے مطابق OACB ایک متوازی الاضلاع ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ مثلث OAB کا رقبہ $\frac{1}{2}$ (OA) (OB) sin θ. ہے۔

یعنی $\Delta\ OAB = \frac{1}{2}\, |a|\, |b|\, \sin\theta = \frac{1}{2}\, |a \times b|$

پس متوازی الاضلاع کا رقبہ مثلث OAB کے رقبے کا دوگنا ہے

یعنی متوازی الاضلاع OACB کا رقبہ $= |a \times b|$

چنانچہ دو برداروں کا برداری حاصل ضرب قدر میں اس متوازی الاضلاع کے رقبہ کے برابر ہوتا ہے جس کے متصل اضلاع دونوں بردار ہوتے ہیں۔

لہذا متوازی الاضلاع OACB کا برداری رقبہ ہے۔ $\vec{OA} \times \vec{OB}$

اپنی آپ جانچ۔

(2). aاور bدونوں پر عمودی بردار کیاہوتاہے؟

اپنی آپ جانچ۔

(3) کتنے طریقوں سے دو برداروں کو ضرب دیا جاسکتا ہے ؟

2.5 تین یا زیادہ برداروں کا حاصل ضرب

اگر تین بردار a, b, c، دیے جائیں تو ان کے مختلف قسم کے حاصل ضرب اس طرح بنائے جاسکتے ہیں :

(i) $(a \cdot b)\, c$, (ii) $(a \times b) \cdot c$ (iii) $(a \times b) \times c$.

ان میں پہلا حاصل ضرب نکتہ حاصل ضرب a، b اور بردار c کا حاصل ضرب ہے جو c کے متوازی ایک بردار کو تعبیر کرتا ہے۔ دوسرا بردار $a \times b$ اور بردار c کا نکتہ حاصل ضرب ہے جسے عموماً میزانی تہرا حاصل ضرب (Scalar Triple Product) کہا جاتا ہے۔ جس کا مخفف (S.T.P) ہے

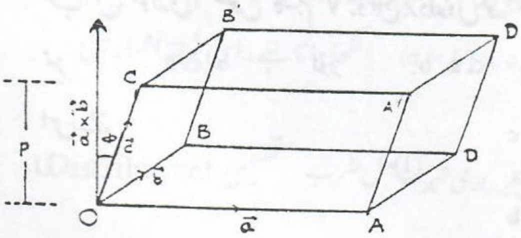
اور تیسرا برداروں $a \times b$ اور c کا برداری حاصل ضرب ہونے کی وجہ سے خود ایک بردار ہے۔

2.5.1 S.T.P میزانی تہرا حاصل ضرب (Scalar triple product)

اگر a, b, c تین بردار ہوں تو $a \times b$ کا c سے نکتہ حاصل ضرب یعنی $(a \times b) \cdot c$ برداروں a,b,c کا عددیہ تہرا حاصل ضرب (S.T.P) کہلاتا ہے۔ جسے علامت $[a\ b\ c]$. سے ظاہر کرتے ہیں۔ قوسوں کو اگر حذف بھی کردیا جائے تو کوئی اشتباہ نہ ہونا چاہیے اس لئے کہ $a \times (b \cdot c)$ کے کوئی معنی نہیں۔

(S.T.P) کی ہندسی تعبیر۔ میزانی تہرا حاصل ضرب۔ $[a,b,c]$

اس متوازی السطوح (Parallelopiped) کے حجم کو ظاہر کرتا ہے جس کے ایک ہی نقطہ پر مختتم متصل کنارے (Adjacent edges) بردار a, b, c ہوں



شکل (9)

فرض کرو کہ متوازی السطوح کے کنارے $\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{OB} = b$ اور $\overrightarrow{OC} = c$ ہیں نیز یہ کہ a, b, c ایک دائیں ہاتھ والا نظام بناتے ہیں۔ نیز فرض کرو اس کا حجم "V" ہے اور رخوں (Faces) O,A,D,B یا CA,D,B کا رقبہ جو برداروں a اور b کے متوازی ہیں α ہے۔

نیز یہ کہ ان رخوں کے درمیان فاصلہ "p" ہے۔

فرض کرو کہ برداروں c اور $a \times b$. کے درمیان زاویہ ہے۔

تب $|a \times b| = \alpha$ and $|c| \cos \phi = p$

حجم $V = \alpha p = |a \times b|\ |c| \cos \phi$

$= (a \times b) . c = [a\ b\ c]$

جو مطلوبہ نتیجہ ہے

یہ بات نوٹ کرو کہ اگر a, b, c بائیں ہاتھ کا ثلاثیہ (Triad) بناتے ہیں تو

$$[a\ b\ c] = -V$$

نیز یہ کہ

$$[i\ j\ k] = [i \times j] . k = k . k = 1$$

چنانچہ اب ہمارے پاس حسب ذیل نتائج ہیں۔

(i) تین برداروں کے جو ایک ہی نقطہ سے نکلتے ہوں ہم مستوی ہونے کی لازمی اور کافی شرط یہ ہے کہ ان کا تہرا میزانی حاصل ضرب صفر ہو۔ اس لئے کہ اگر تین بردار a, b, c ہم مستوی ہوں تو ان سے جو مجسم متوازی السطوح (Parallopiped) بنتا ہے اس کا حجم صفر ہوگا یعنی کوئی حجم بنتا ہی نہیں۔ چنانچہ $[a\ b\ c] = 0$.

(ii) کسی میزانی تہرے حاصل ضرب کے دو بردار برابر ہوں تو یہ صفر ہوگا۔ یعنی یہ کہ متوازی السطوح بنتا ہی نہیں اس لئے کہ اگر $a = b$ یا $b = c$ تو متوازی السطوح کا حجم صفر ہوتا ہے۔ یعنی $[a\ b\ c] = 0$.

(iii) کسی میزانی تہرے حاصل ضرب میں تا وقتیکہ اجزاء کی دوری ترتیب (Cyclic Order) نہیں بدلتی اس کے نکتہ اور چلیپا کے مقام میں تبدیلی سے کوئی فرق نہیں پڑتا۔ البتہ اگر اجزاء کی دوری ترتیب بدل دی جائے تو میزانی تہرے حاصل ضرب کی علامت بدل جاتی ہے۔

فرض کرو کہ a, b, c سیدھے ہاتھ والے نظام کے بردار ہیں اسطور پر کہ $a = \overline{OA}$ $b = \overline{OB}$ اور $c = OC$. تب اس متوازی السطوح کا حجم V جو ان برداروں کو متصل کناروں کے طور پر لینے سے بنتا ہے $V = (a \times b) . c$ ہوگا

نیز b, c, a اور c, a, b بھی دو سیدھے ہاتھ والے نظام بناتے ہیں۔

اس لئے

$$\begin{aligned} V &= (a \times b) . c \\ &= (b \times c) . a \qquad (1) \\ &= (c \times a) . b \end{aligned}$$

پھر چونکہ نکتہ حاصل ضرب تقلیبی ہوتا ہے اس لیے

$$\begin{aligned} V &= c . (a \times b) \\ &= a . (b \times c) \qquad (2) \\ &= b . (c \times a) \end{aligned}$$

اب (1) اور (2) سے حاصل ہوتا ہے کہ $[a\ b\ c] = [b\ c\ a] = [c\ a\ b]$

اس سے ثابت ہوتا ہے کہ میزانی تہرے حاصل ضرب کا انحصار نکتہ اور چلیپا کے مقام پر نہیں ہوتا علاوہ ازیں a, c, b ; b, a, c ; c, b, a ثلاثیوں کے بائیں ہاتھ کا نظام بناتے ہیں اس لئے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -V &= (a \times c) . b = (b \times a) . c = (c \times b) . a \qquad (3) \\ &= b . (a \times c) = c . (b \times a) = a . (c \times b) \end{aligned}$$

اب (2) اور (3) سے حاصل ہوتا ہے۔

$$a \cdot (b \times c) = V = -a \cdot (c \times b)$$
$$[\quad a \times b = -(b \times a)\ ]$$

اس لئے
$$[a\ b\ c] = -[a\ c\ b],$$

جس سے ثابت ہوتا ہے کہ دوری ترتیب میں تبدیلی سے نکتہ تہرے حاصل ضرب کی علامت بدل جاتی ہے۔

(iv) اگر $b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ اور $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ $c = c_1 i + c_2 j + c_3 k$

تو

$$[a\ b\ c] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

ثبوت۔

$$(a \times b) \cdot c = [(a_2 b_3 - a_3 b_2)\, i + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\, j + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, k] \cdot (c_1 i + c_2 j + c_3 k)$$
$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\, c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\, c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, c_3$$
$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

2.5.2 برداری تہرا حاصل ضرب (Vector Triple product)

اگر a, b, c کوئی تین بردار ہوں تو $a \times b$ کا c سے برداری حاصل ضرب برداروں $a\ b\ c$ کا برداری تہرا حاصل ضرب کہلاتا ہے۔ (اس ترتیب میں) اور اسے $(a \times b) \times c.$ لکھا جاتا ہے۔ اس طریقہ اظہار میں قوسیں یا کوئی اور الگ کرنے والی علامت ضروری ہوتی ہے۔

اس لئے کہ $(a \times b) \times c \neq a \times (b \times c).$ یعنی برداری تہرا حاصل ضرب تقسیمی (Distribitive) نہیں ہوتا۔

بردار $(a \times b) \times c$ دونوں برداروں $a \times b$ اور c کے علی القوائم ہے۔

نیز چونکہ $a \times b$ برداروں a اور b کی مستوی پر عمود ہوتا ہے۔ اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ $(a \times b) \times c$ برداروں a اور b کی مستوی میں واقع ہوتا ہے۔

اسلئے $(a \times b) \times c$ کو بشکل $la + mb$ لکھا جاسکتا ہے۔ [دیکھو اکائی (1) کا قضیہ (2)]

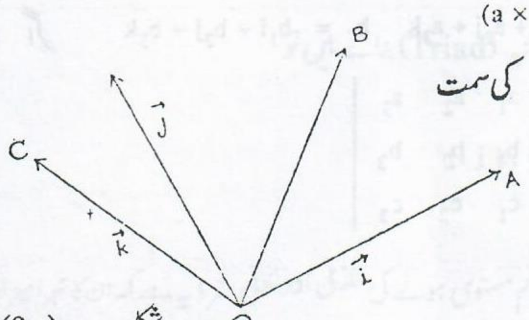
اپنی آپ جانچ۔

سوال (4) : ۔ تین دیے ہوئے برداروں سے کتنے قسم کے حاصل ضرب تشکیل دیے جاسکتے ہیں ؟

پھیلاؤ ضابطہ ۔ (Expansion Formula)

اگر a, b, c کوئی تین بردار ہوں تو

$$(a \times b) \times c = (c \cdot a)\ b - (c \cdot b)\ a.$$



(9a) شکل

ثبوت : فرض کرو کہ اکائی بردار i بردار a کی سمت میں لیا جاتا ہے۔ نیز j وہ اکائی بردار ہے جو مستوی OA'B میں a پر عمود ہے۔ (شکل 9a کے مطابق)

تب ہمیں حاصل ہوگا

$$a = a_1 i$$

$$b = b_1 i + b_2 j$$

مان لو کہ k کو i اور j پر عمود لیا گیا ہے اس طور پر کہ i, j, k ایک دایاں دستی نظام بناتے ہیں.

تب

$$c = c_1 i + c_2 j + c_3 k$$

اب

$$a \times b = a_1 b_2 (i \times j) = a_1 b_2 k$$

اس طرح

$$(a \times b) \times c = (a_1 b_2 k) \times (c_1 i + c_2 j + c_3 k)$$

$$= (a_1 b_2 c_1)(k \times i) + a_1 b_2 c_2 (k \times j)$$

$$= a_1 b_2 c_1 j - a_1 b_2 c_2 i$$

$$= a_1 c_1 (b_1 i + b_2 j) - (b_1 c_1 + b_2 c_2)\ a_1 i$$

($a_1 b_1 c_1 i$ کو جمع اور تفریق کرنے سے)

$$= (a \cdot c)\ b - (b \cdot c)\ a$$

مثالیں (1) اگر $a = 2i + \lambda j + k$ اور $b = i - 2j + 3k$ تو λ کی وہ قیمت معلوم کرو۔ جس کے لئے بردار a اور b علی القوائم ہوں۔

حل ۔ اگر a اور b علی القوائم ہوں تو ان کا نکتہ حاصل ضرب صفر ہوگا۔

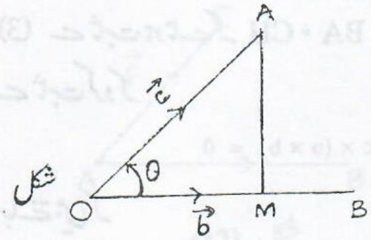
اسلئے

$$a \cdot b = (2i + \lambda j + k) \cdot (i - 2j + 3k) = 0$$

$$\Rightarrow 2 - 2\lambda + 3 = 0 \quad \Rightarrow 2\lambda = 5 \quad \therefore \lambda = 5/2$$

مثال (2) ۔ بردار $b = i + 2j + k$ پر بردار $a = 2i + 3j + 2k$ کا ظل (Projection) معلوم کرو۔

شکل (10) کے مطابق $\vec{a}$ اور b کا ظل (Projection)
OM ہے۔



شکل (10)

$$\therefore \quad OM = OA \cos\theta = OA\left(\frac{a \,.\, b}{a\, b}\right)$$

$$= \frac{a \,.\, b}{b}$$

$$\because \quad a \,.\, b = ab \cos\theta$$

$$\because \quad OA = a = |a|$$

لیکن

$$a \,.\, b = (2i + 3j + 2k) \,.\, (i + 2j + k) = 2 + 6 + 2 = 10$$

نیز

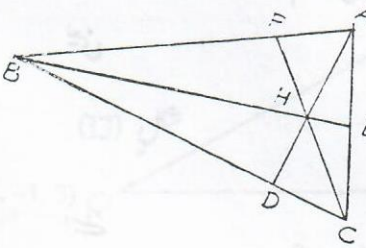
$$b = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$

اسلئے

$$OM = \frac{10}{\sqrt{6}} = \frac{5}{3}\sqrt{6}.$$

مثال (3) : ثابت کرو کہ کسی مثلث میں راسوں میں مقابل کے اضلاع پر ارتفاعات متراکز ہوتے ہیں۔

حل : فرض کرو کہ مثلث ABC میں راسوں A اور B سے مقابل کے اضلاع پر گرائے ہوئے عمودوں کا نقطہ تقاطع H ہے نیز یہ کہ کسی مبداء کے لحاظ سے نقاط A, B, C، H کے مکانی بردار بالترتیب a, b, c، h ہیں
چونکہ AH، BC پر عمود ہے۔



شکل (11)

اسلئے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(h - a) \,.\, (c - b) = 0$$

یعنی

$$h \,.\, c - h \,.\, b - a \,.\, c + a \,.\, b = 0 \qquad (1)$$

نیز چونکہ BH ، پر عمود ہے
اسلئے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(h - b) \cdot (a - c) = 0$$

$$\text{i. e.,} \quad h \,.\, a - h \,.\, c - b \,.\, a + b \,.\, c = 0 \qquad (2)$$

(1) اور (2) کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$h \cdot a - h \cdot b - c \cdot a + c \cdot b = 0$$

یعنی (3) $$(b - c) \cdot (a - b) = 0$$

مساوات (3) سے ثابت ہوتا ہے کہ CH ، BA پر عمود ہے۔

مثال (4) سے ثابت کرو کہ

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$$

حل ۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)\, b - (a \cdot b)\, c$$
$$b \times (c \times a) = (b \cdot a)\, c - (b \cdot c)\, a$$
$$c \times (a \times b) = (c \cdot b)\, a - (c \cdot a)\, b$$

ان کو جمع کرنے سے اور اس بات کو ملحوظ رکھنے سے کہ نکتہ حاصل ضرب تقلیبی ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$$

مثال (5) : α کی وہ قیمت معلوم کرو جس کے لئے بردار $2i - j + k$، $i + 2j - 3k$ اور $3i + \alpha j + 5k$ ہم مستوی ہوں

فرض کرو کہ

$$a = 2i - j + k$$
$$b = i + 2j - 3k$$
$$c = 3i + \alpha j + 5k$$

اگر a, b, c ہم مستوی ہوں تو $[a\ b\ c] = 0$

یعنی

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & \alpha & 5 \end{vmatrix} =$$

اسلئے

$$2\,(10 + 3\alpha) + 1\,(5 + 9) + 1\,(\alpha - 6) = 0$$

یا

$$7\alpha = -28 \implies \alpha = -4$$

مثال (6) : ثابت کرو کہ $[b \times c,\ c \times a,\ a \times b] = [a\ b\ c]^2$

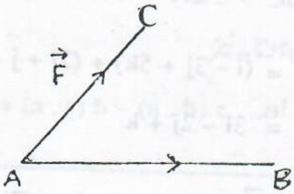
ہم جانتے ہیں کہ $[b \times c,\ c \times a,\ a \times b] = (b \times c) \times (c \times a) \cdot (a \times b)$

رکھو $b \times c = p$

تب بائیں طرف کا جملہ ہے

$$= \{p \times (c \times a)\} \cdot (a \times b)$$
$$= \{(p \cdot a)\, c - (p \cdot c)\, a\} \cdot (a \times b)$$
$$= \{(b \times c \cdot a)\, c - (b \times c \cdot a)\, a\} \cdot (a \times b)$$
$$= \{[a\ b\ c]\, c - 0\} \cdot (a \times b) = [a\ b\ c]\,[c\ a\ b]$$
$$= [a\ b\ c]^2$$

مثال (7) : ایک قوت $F = 6i + 8k$ کے زیر اثر کوئی ذرہ $A(1, -1, 2)$ سے نقطہ $B(-1, 1, 2)$ تک نقل مکان کرتا ہے۔ کیے گئے کام کی مقدار معلوم کرو



شکل (12)

حل :

چونکہ

$AB =$ B کا مکان برداری ۔ A کا مکان برداری

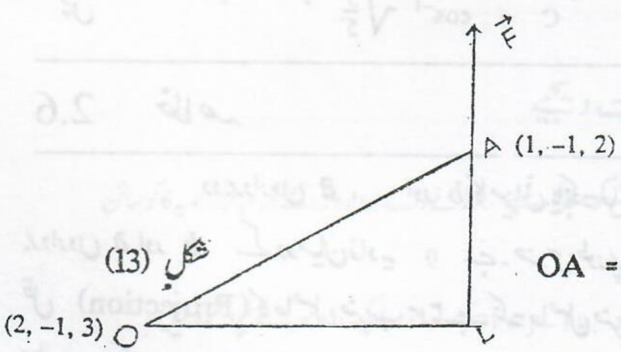
$$= (-i + j + 2k) - (i - j + 2k) = -2i + 2j$$

نیز کام کی مقدار $F . \overrightarrow{AB}$ ہوتی ہے۔

اسلئے
$$F . \overrightarrow{AB} = (6j + 8k) . (-2i + 2j)$$

(12) اکائیاں =

مثال (8) قوت $F = 3i + 2j - 4k$ نقطہ $(1, -1, 2)$ پر عمل کرتی ہے۔ نقطہ $(2, -1, 3)$ کے گرد قوت کا معیار اثر (Moment) معلوم کرو۔



شکل (13)

حل ۔ قوت F کا نقطہ "O" $(2, -1, 3)$ کے گرد معیار اثر ہے

$$|F \times \overrightarrow{OA}|$$

نیز $OA =$ (A کا مکان برداری ۔ O کا مکان برداری)

$$= (i - j + 2k) - (2i - j + 3k)$$
$$= -i - k$$

اسلئے قوت کا مطلوبہ معیار اثر ہے
$$= |(3i + 2j - 4k) \times (-i - k)|$$
$$= |-2i + 7j + 2k|$$
$$= \sqrt{4 + 49 + 4} = \sqrt{57}$$

مثال (9) : اگر $\overrightarrow{AB} = 3i - 2j + k, \overrightarrow{BC} = i - 3j + 5k, \overrightarrow{CA} = 2i + j - 4k$ ایک مثلث قائم الزاویہ بناتے ہیں تو مثلث کے باقی زاویے معلوم کرو۔

Fig. 14

چونکہ $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}$

اسلئے $\overrightarrow{AB} = (i - 3j + 5k) + (2i + j - 4k)$

$= 3i - 2j + k$

نیز $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = (3i - 2j + k) \cdot (2i + j - 4k)$

$= 6 - 2 - 4 = 0.$

اسلئے AB CA پر عمود ہے یعنی $\angle A = 90°$

اب AB, BC, CA ایک مثلث قائم الزاویہ تشکیل دیتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ

$$\cos B = \frac{\left|\overrightarrow{-AB} \quad \overrightarrow{BC}\right|}{(AB)(BC)} = \frac{3 + 6 + 5}{\sqrt{14}\,\sqrt{35}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$B = \cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{5}}$$

اسطرح

$$\cos C = \frac{\left|\left(-\overrightarrow{BC} \quad \overrightarrow{CA}\right)\right|}{(BC)(CA)} = \frac{|2 - 3 - 20|}{\sqrt{35}\,\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{21}{35}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

پس $C = \cos^{-1}\sqrt{\frac{3}{5}}$

2.6 خلاصہ

دو برداروں a اور b کا میزانی یا نکتہ حاصل ضرب $a.b = |a|\,|b| \cos\theta$, جہاں برداروں a اور b کے درمیان زاویہ θ ہے۔ ھندسی طور پر یہ ایک بردار $\vec{a}$ کی قدر اور دوسرے بردار کے $\vec{a}$ پر ظل (Projection) کا حاصل ضرب ہوتا ہے۔ نکتہ حاصل ضرب تقلیبی اور جمع کے لحاظ سے تقسیمی ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ۔ $a.(b + c) = a.b + a.c.$

دو برداروں a اور b کا برداری حاصل ضرب $|a|\,|b| \sin\theta\ \hat{n}$ کے برابر ہوتا ہے۔ جہاں دونوں برداروں کے درمیان زاویہ θ ہے اور $\hat{n}$ برداروں a اور b کی مستوی پر باہر کی طرف کے عمود کا اکائی بردار ہے۔ ہندسی طور پر قدر میں یہ اس متوازی الاضلاع کا رقبہ ہے جس کے اضلاع برداروں a اور b سے بنتے ہیں اور جہت میں وہ بردار ہے جس کی سمت a اور b سے بننے والی مستوی پر عمود کی سمت ہے۔ $a.(b \times c)$ سے نکتہ تہرا حاصل ضرب مراد ہے۔ جو ایک میزانیہ (Scalar) ہوتا ہے۔ اس سے اضلاع a, b, c سے تشکیل پانے والے متوازی

السطوح (Parallopiped) کا حجم تعبیر ہوتا ہے جسے $[a\ b\ c]$ سے ظاہر کرایا جاتا ہے۔ اگر $[a\ b\ c] = 0$ تو یہ اس بات کی دلیل ہے کہ برداد a, b, c ہم مستوی (Coplanar) ہیں۔
برداری تہر حاصل ضرب ایک برداد ہوتا ہے۔ عموماً یہ تقسیمی نہیں ہوتا۔ نیز

$(a \times b) \times c = (c \cdot a)\, b - (c \cdot b)\, a$ اور $a \times (b \times c) = (a \cdot c)\, b - (a \cdot b)\, c$.

2.7 نمونہ امتحانی سوالات

I ذیل کے تفصیلی جوابات دو۔

(i) (a) نکتہ حاصل ضرب کی تعریف کرو اور اس کی ہندسی تعبیر بیان کرو۔

(b) اگر $|a + b| = |a - b|$ تو ثابت کرو کہ a اور b ایک دوسرے پر عمود ہیں۔

(ii) (a) دو برداروں کے برداری حاصل ضرب کی تعریف کرو اور اس کی ہندسی تعبیر دو۔

(b) وہ برداد معلوم کرو جس کی قدر 3 ہے اور جو دونوں برداروں $3i + j - 4k$ اور $6i + 5j + 2k$ پر عمود ہے۔

(iii) نکتہ تہرے حاصل ضرب کی ہندسی تعبیر بیان کرو۔
ثابت کرو کہ برداد $2i - j - k,\ 3i - 4j + 5k,\ 2i + 4j - 6k$ ہم مستوی ہیں۔

II ذیل کے سوالات کے مختصر جوابات دیجیے

(i) دو نقاط $(3,1,2)$ اور $(2,-2,4)$ ہیں ان کو مبداء سے جوڑنے والے برداروں کے درمیان زاویہ کا کوسائن معلوم کرو۔

(ii) ثابت کرو کہ برداد $9i + j - 6k,\ 4i - 6j + 5k$ ایک دوسرے پر عمود ہیں۔

(iii) وہ اکائی برداد معلوم کرو جو $4i - j + 3k$ اور $-2i + j - 2k$ دونوں پر عمود ہے۔

(iv) اگر $a + b + c = 0$ تو ثابت کرو کہ $a \times b = b \times c = c \times a$.

(v) ایک ذرہ مستقل قوتوں (Constant Forces) $4i + j - 3k$ اور $3i + j - k$ کے زیر اثر نقطہ $(1,2,3)$ سے نقطہ $(5,4,1)$ پر نقل مکان کرتا ہے۔ قوتوں کا کام معلوم کرو۔

(vi) ایک قوت $F = 2i + j - k$ نقطہ A پر عمل کرتی ہے جس کا برادر مکانی $2i - j$ ہے۔ مبداء کے گرد اس قوت کا معیار اثر (Moment) معلوم کرو۔

2.8 اپنی معلومات کی جانچ کے جوابات

سوال (1) اگر a اور b کے درمیان زاویہ قائم ہو تو $a \cdot b = |a|\ |b| \cos 90° = 0.$ صفر ہوتا ہے۔

سوال (2) a اور b دونوں پر عمود دار ہو گا $a \times b.$

سوال (3) اگر دئے ہوئے بردار a اور b ہوں تو ان کو دو طرح سے ضرب دیا جاسکتا ہے ایک نکتہ حاصل ضرب

$a \cdot b$ دوسرا برداری حاصل ضرب $a \times b.$

سوال (4) تین برداروں a , b, c کے امکانی حاصل ضرب ہیں۔

(i) $a \cdot (b \times c)$, (ii) $a \times (b \times c)$ and (iii) $(a \times b) \times c$.

جہاں (i) نکتہ تہرا حاصل ضرب کہلاتا ہے

اور (ii) اور (iii) تہرے برداری حاصل ضرب کہلاتے ہیں

بالعموم برداری حاصل ضرب جمعی قانون کی پابندی نہیں کرتا۔

اکائی (3) برداری تفرق
Vector Differentiation

3.1 مقصد

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہونگے کہ۔

i) برداری قیمتوں والے تفاعلوں کو تفرق کر سکیں

ii) دیئے ہوئے دو سے زائد متغیروں کے برداری قیمتوں والے تفاعلوں کو جزوی طور پر تفرق کر سکیں۔

3.2 تمہید

اکائیوں (1) اور (2) میں ہم نے برداروں کی جمع تفریق اور ضرب سیکھی ہے۔ کئی ایک طبعی صورتوں میں اکثر ہمیں ان برداروں سے سابقہ پڑتا ہے جو وقت یا محل کے ساتھ بدلتے رہتے ہیں۔ مثلاً ایک متحرک ذرہ کی رفتار وقت کے بدل سکتی ہے یا برقی میدان کی طاقت E جس وقت اس کی پیمائش کی جائے اس کے محل وقوع پر منحصر ہوتی ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ حقیقی متغیر x کے حقیقی تفاعل کو $y: R \to R$ یا صرف $y(x)$ سے تعبیر کرتے ہیں۔ اس طرح اگر کوئی بردار $\vec{F}$ حقیقی متغیر "t" کے تابع ہو تو اس تعلق کو $\vec{F} = \vec{F}(t)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اس اکائی میں ہم $\vec{F}(t)$ کے بلحاظ "t" تفرق سے سروکار رکھینگے۔

3.3 حقیقی متغیر کے برداری تفاعل کا تفرق

حقیقی متغیّر کا برداری تفاعل

تعریف ۔ حقیقی اعداد کے کسی سٹ S کے ہر حقیقی عدد t کے مقابل F (t) کی ایک برداری قیمت وجود رکھتی ہو تو ہم کہتے ہیں کہ F حقیقی متغیر "t" کا ایک برداری تفاعل ہے ۔ S کو F کا دامنہ domain کہا جاتا ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ ۳ ابعادی فضاء میں کوئی بردار r بشکل $r = xi + yj + zk$, لکھا جاسکتا ہے۔
جہاں i, j, k ایک دوسرے پر عمودا کائی بردار ہیں۔ چنانچہ کسی برداری تفاعل $\vec{F}(t)$ کو بطور ذیل ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

$$\vec{F}(t) = F_x(t)\, i + F_y(t)\, j + F_z(t)\, k$$

جہاں پر F_{x_1}, F_x, F_2 متغیّر "t" کے حقیقی تفاعل ہیں جو F کے اجزائے ترکیبی (Components) کہلاتے ہیں۔

حقیقی متغیّر کے برداری تفاعل کا تفرق

فرض کرو کہ F متغیّر حقیقی "t" کا برداری تفاعل ہے جس کا دامنہ S ہے۔ اگر t_o اور $i_o + \delta t_0$ S میں دو نقاط ہوں تو ہم یوں لکھتے ہیں۔

$$\delta F(t_0) = F(t_0 + \delta t_0) - F(t_0)$$

اگر انتہا $\lim\limits_{\delta t_o \to 0} \frac{\delta F}{\delta t_o}$ وجود رکھتی ہو تو اسے $t = t_o$ پر $\frac{dF}{dt}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اور اسے t_o پر F کا مشتق (derivative) کہا جاتا ہے۔

بالعموم $\frac{dF}{dt} = \lim\limits_{\delta t_0 \to 0} \frac{F(t + \delta t) - F(t)}{\delta t}$ کو

نقطہ $t \in S$ پر مشتق یا تفرّقی سر کے لئے لکھا جاتا ہے۔ نیز ہم لکھتے ہیں۔

$$\delta F(t) = F(t + \delta t) - F(t)$$

شکل (1) سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\vec{PQ} = F(t + \delta t) - F(t).$$

چونکہ PQ اس منحنی کا وتر (Chord) ہے جو F کا

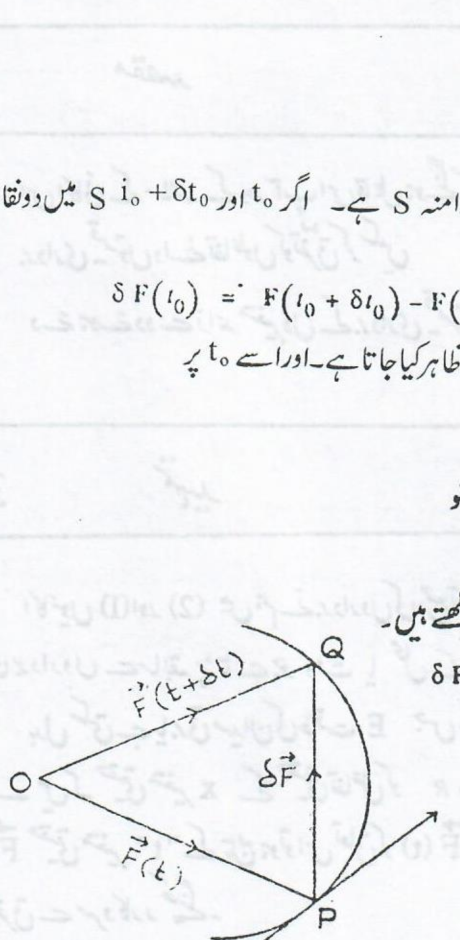


Fig. 1

آخری سرا (Terminal Point) مرتسم کرتا ہے۔ شکل (1)

اسلئے ظاہر ہے کہ جب $\delta t \to 0$, تو PQ منحنی پر نقطہ P کے مماس کیطرف مائل ہوگا۔

اسلئے $\frac{dF}{dt}$ کی جہت P کے طریق پر مماس کی جہت ہوگی۔

چونکہ $\frac{dF}{dt}$ بذات خود حقیقی متغیّر "t" کا ایک برداری تفاعل ہے۔ اسلئے تعریف (3) کو تکراری طور پر اعلیٰ درجوں کے مشتقات کی تعریف کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ بشرطیکہ متعلقہ انتہائیں وجود رکھتی ہوں مثلاً

$$\frac{d^2F}{dt^2} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\frac{dF}{dt}(t + \delta t) - \frac{dF}{dt}(t)}{\delta t}$$

"t" بالعموم حقیقی متغیّر کا قائم مقام ہوتا ہے جو ایک میزانی (Scalar) ہوتی ہے۔

مثال رفتار اور اسراع (Velocity and acceleration)

اگر حقیقی متغیّر t سے وقت مراد ہو تو $r(t) = F(t)$, $\overrightarrow{PQ} = \delta r$

چنانچہ وقت δt میں P کا نقل مکان ہوگا $\overrightarrow{PQ} = \delta r$

اسلئے $\frac{\delta r}{\delta t}$ وقت کے وقفہ δt. میں اوسط رفتار ہوگی۔

انتہا لینے سے جبکہ $\delta t \to 0$. ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta r}{\delta t} = \frac{dr}{dt}$$

رفتار $\therefore V = \frac{dr}{dt}$ t کا ایک برداری تفاعل ہے۔ اسطرح چونکہ شرح تبدیلی رفتار اسراع (acceleration) ہوتی ہے اسلئے۔

اسراع $$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{d^2r}{dt^2}$$

3.3.1 حاصل جمع اور حاصل ضرب کا تفرّق

اگر F, G, H متغیّر t کے برداری تفاعل ہوں اور ϕ متغیّر t کا کوئی تفرق پذیر (Differentiable) تفاعل تو ہم ذیل کے نتائج ثابت کرینگے جو کلاسیکی علم احصاء (Classical Calculus) کے قاعدوں کے عین مطابق ہیں۔

ا . $$\frac{d}{dt}(F \pm G) = \frac{dF}{dt} \pm \frac{dG}{dt}$$

فرض کرو کہ Let $f = F \pm G$

یعنی i.e., $f(t) = F(t) \pm G(t)$

اسلئے $$\therefore \frac{f(t + \delta t) - f(t)}{\delta t} = \frac{F(t + \delta t) - F(t)}{\delta t} \pm \frac{G(t + \delta t) - G(t)}{\delta t}$$

دونوں طرف انتہاء لینے سے جبکہ $\delta t \to 0$. ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{df}{dt} = \frac{dF}{dt} \pm \frac{dG}{dt}$$

یعنی

$$\text{i.e., } \frac{d}{dt}(F \pm G) = \frac{dF}{dt} \pm \frac{dG}{dt}$$

$$..2 \qquad \frac{d}{dt}(F \cdot G) = F \cdot \frac{dG}{dt} + G \cdot \frac{dF}{dt}$$

فرض کرو کہ $f = F \cdot G;\ f(t) = F(t) \cdot G(t)$

یادرہے کہ یہاں f، t کا میزانی تفاعل ہے۔ برداری نہیں

پس

$$\therefore \frac{f(t+\delta t) - f(t)}{\delta t} = \frac{F(t+\delta t) \cdot G(t+\delta t) - F(t) \cdot G(t)}{\delta t}$$

سیدھی طرف شمار کنندہ میں $F(t+\delta t).G(t)$ کو تفریق اور جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{f(t+\delta t) - f(t)}{\delta t} = \frac{F(t+\delta t) \cdot [G(t+\delta t) - G(t)] + G(t) \cdot [F(t+\delta t) - F(t)]}{\delta t}$$

اب انتہا لینے سے جبکہ $\delta t \to 0$ نیز $\lim_{\delta t \to 0} F(t+\delta t) = F(t)$ کی رعایت سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$3. \qquad \frac{d}{dt}(F \cdot G) = \frac{d}{dt}[f(t)] = F \cdot \frac{dG}{dt} + G \cdot \frac{dF}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(F \times G) = F \times \frac{dG}{dt} + \frac{dF}{dt} \times G$$

یہ بات یادرکھیں کہ تفرق کرتے وقت حاصل ضرب میں برداروں کی ترتیب اہم ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ $f = F \times G$

جہاں f خود بھی t کا ایک برداری تفاعل ہے۔

$$\therefore \frac{f(t+\delta t) - f(t)}{\delta t} = \frac{F(t+\delta t) \times G(t+\delta t) - F(t) \times G(t)}{\delta t}$$

سیدھی طرف شمارہ کنندہ میں پہلے کیطرح $F(t+\delta t) \times G(t)$ کو تفریق اور جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$f(t+\delta t) - f(t) = F(t+\delta t) \times \left[\frac{G(t+\delta t) - G(t)}{\delta t}\right] + \left[\frac{F(t+\delta t) - F(t)}{\delta t}\right] \times G(t)$$

دونوں طرف انتہائیں لینے سے جب $\delta t \to 0$, تو ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{d}{dt}[f(t)] = \frac{d}{dt}[F \times G] = F \times \frac{dG}{dt} + \frac{dF}{dt} \times G$$ 4

$$\frac{d}{dt}(\phi F) = \phi \frac{dF}{dt} + \frac{d\phi}{dt} F$$

جہاں ϕ t کا کوئی حقیقی تفاعل ہے۔
اس کا ثبوت بھی (2) کی مانند دیا جاسکتا ہے۔

$$\frac{d}{dt}[F\cdot(G \times H)] = \frac{d}{dt}[F \;\; G \;\; H]$$

$$= \left[\frac{dF}{dt} G \;\; H\right] + \left[F \;\; \frac{dG}{dt} H\right] + \left[F \;\; G \;\; \frac{dH}{dt}\right]$$ 5.

$$= \frac{dF}{dt}\cdot(G \times H) + F\cdot\left(\frac{dG}{dt} \times H\right) + F\cdot\left(G \times \frac{dH}{dt}\right)$$

[F G H] تین برداروں کا نکتہ تہرا حاصل ضرب ہے۔ اور ہم جانتے ہیں کہ برداروں F.G.H کی دوری ترتیب (Cyclic Order) کو برقرار رکھا جائے تو اس کی قیمت میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔

اب

$$FGH = F.(G \times H) = G.(H \times F) = H.(F \times G)$$

$$\therefore \frac{d}{dt}[F.G.H] = \frac{d}{dt}[F.(G \times H)]$$

$$= F.\frac{d}{dt}(G \times H) + \frac{dF}{dt}.(G \times H) \quad [\text{نتیجہ (2) سے}]$$

$$= F.\left[\frac{dG}{dt} \times H + G \times \frac{dH}{dt}\right] + \frac{dF}{dt}.(G \times H)$$

$$= \frac{dF}{dt}(G \times H) + F\left(\frac{dG}{dt} \times H\right) + F.\left(G \times \frac{dH}{dt}\right)$$

$$= \left[\frac{dF}{dt} GH\right] + \left[F\frac{dG}{dt}H\right] + \left[FG\frac{dH}{dt}\right] \quad [\text{نتیجہ (3) سے}]$$

$$\frac{d}{dt}\{F \times (G \times H)\} = \frac{dF}{dt} \times (G \times H) + F \times \frac{d}{dt}(G \times H)$$

6.

$$= \frac{dF}{dt} \times (G \times H) + F \times \left\{\frac{dG}{dt} \times H + G \times \frac{dH}{dt}\right\}$$

$$\frac{dF}{dt} \times (G \times H) + F \times \left(\frac{dG}{dt} \times H\right) + F \times \left(G \times \frac{dH}{dt}\right)$$

(نوٹ ۔ اجزاء ضربیوں کی ترتیب کو برقرار رکھا جانا چاہیئے)

(7) تفاعل در تفاعل (Function of a function)

فرض کرو کہ دامنہ S میں t ایک حقیقی تفرّق پذیر تفاعل ہے اور F کوئی حقیقی تفرّق پذیر برداری تفاعل ہے جو t کی سمت میں تعریف کیا گیا ہے۔ اگر ہم لکھیں $t(s) = \phi(s)$, تو F s کا تفرّق پذیر تفاعل ہے اور

$$\frac{dF}{ds} = \frac{dF}{dt}\,\frac{dt}{ds} = \frac{dF}{dt}\,\frac{d\phi}{ds}$$

فرض کرو کہ "t" میں ایک چھوٹا اضافہ (Small increment) δt ہے جو F اور S میں بالترتیب چھوٹے اضافوں δF اور δs پیدا کرتا ہے۔ جب $\delta t \to 0$, تو δF اور $\delta s \to 0$. دونوں بھی صفر کی طرف مائل ہوتے ہیں۔

اسلئے جب $\delta t \to 0$ تو انتہائیں لینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{dF}{ds} = \frac{dF}{dt}\,\frac{dt}{ds} = \frac{dF}{dt}\,\frac{d\phi}{ds}, \text{ since } t = \phi(s).$$

چونکہ $t = \phi(s)$

مستقل بردار (Constant Vector)

تعریف۔ F کو مستقل بردار کہا جاتا ہے اگر F_x, F_y, F_z مستقل تفاعل ہوں

$$F = F_x\, i + F_y\, j + F_z\, k$$

قضیہ (1) : F (t) کے ایک مستقل تفاعل ہونے کی لازمی اور کافی شرط ہے کہ $\frac{dF}{dt} = 0$

شرط لازمی ہے ۔ فرض کرو کہ F (t) مستقل ہے۔

تب

$$\frac{dF}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{F(t + \delta t) - F(t)}{\delta t} = 0$$

اسلئے کہ

$$F(t + \delta t) = F(t)$$

بالعکس اگر $\frac{dF}{dt} = 0,$ تو ثابت کرتا ہے کہ F مستقل ہے۔

اگر

$$F(t) = F_1(t)\, i + F_2(t)\, j + F_3(t)\, k,$$

تب

$$\frac{dF}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dF_1}{dt}\, i + \frac{dF_2}{dt}\, j + \frac{dF_3}{dt}\, k = 0$$

اب 1, jk کے سروں کو صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{dF_1}{dt} = 0,\quad \frac{dF_2}{dt} = 0,\quad \frac{dF_3}{dt} = 0$$

پس F_1, F_2, F_3 مستقل ہیں۔

چنانچہ $F(t)$ بھی ایک مستقل برداری تفاعل ہے۔

قضیہ (2): لازمی اور کافی شرط کہ $F(t)$ کی قدر (Magnitude) مستقل ہو یہ ہے کہ

$$F\cdot\frac{dF}{dt}=0$$

ثبوت ۔

$$\frac{d}{dt}\left(|F|^2\right) = \frac{d}{dt}(F\cdot F)=\frac{dF}{dt}\cdot F + F\cdot\frac{dF}{dt}$$

$$= 2F\cdot\frac{dF}{dt}$$

اسلئے

$$F\cdot\frac{dF}{dt}=0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(|F|^2\right)=0 \Leftrightarrow |F|^2 = \text{مستقل}$$

$$\Leftrightarrow |F| = \text{مستقل}$$

اپنی آپ جانچ ۔

سوال (1) : ایک مستقل قدر والے بردار کی مثال دو اور قضیہ (2) کی جانچ کرو۔

قضیہ (3) لازمی اور کافی شرط کہ $F(t)$ کی جہت مستقل ہو یہ ہے کہ $F\times\frac{dF}{dt}=0.$

ثبوت ۔ فرض کرو کہ $F=\phi f$

جہاں ϕ میزانی تفاعل ہے اور f وہ برداری تفاعل ہے جس کا مقیاس "1" ہے

اب F کے مستقل جہت والا ہونے کا مطلب ہے کہ f مستقل جہت والا ہے۔

یعنی f ایک مستقل قدر اور مستقل جہت والا تفاعل ہے۔

یعنی $df=0$

جس کا مطلب ہے $\frac{dF}{dt}=\frac{d\phi}{dt}f$

لہٰذا یعنی $F\times\frac{dF}{dt}=\phi f\times\frac{d\phi}{dt}f=\frac{d\phi}{dt}f\times f=0$

اپنی معلومات کی جانچ

سوال (2) : ایک مستقل جہت والے تفاعل کی مثال دو اور قضیہ (3) کی جانچ کرو۔

مشتق کے اجزائے ترکیبی (Components of a derivative)

اگر F کو اس کے کارتیزی اجزائے ترکیبی میں لکھا جائے تو حاصل ہوتا ہے۔ $F=F_x i+F_y j+F_z k,$

$$\frac{dF}{t}=\frac{dF_x}{dt}i+\frac{dF_y}{dt}j+\frac{dF_z}{dt}k \qquad (6)$$

اس لئے کہ اپنی کارتیزی شکل میں F تین برداروں کے جمع کے بطور لکھا گیا ہے۔یعنی $F_x i + F_y j + F_z K$ جس میں ہر ایک، متغیر، میزانیہ اور مستقل بردار کا حاصل ضرب ہے نتائج (1) اور (4) کے اطلاق سے (6) فوری ثابت ہو جاتا ہے۔

3.4 جزوی تفرق (Partial diffrentiation)

اوپر ہم نے برداری تفاعل F کے مشتق کی تعریف کی ہے جب کہ F صرف ایک ہی حقیقی متغیر کا تفاعل ہے لیکن جیسا کہ معمولی تفرقی احصاء میں ہوتا ہے، ایک بردار بھی دو یا زیادہ متغیروں کا تفاعل ہو سکتا ہے۔ایسی صورت میں ہم بردار کے ایک متغیر کے لحاظ سے جزوی مشتق کی تعریف کر سکتے ہیں۔اگر مستوی کے کسی تحت سٹ کے ہر نقطہ (t,s) کو ایک بردار F سے منسوب کیا جائے تو F دو متغیروں " t " اور " s " کا ایک تفاعل کہلاتا ہے۔جیسے بطور F = F (t,s) لکھا جاتا ہے اور ہم بلحاظ t اور s کے F's کے جزوی مشتقوں کی حسب ذیل تعریف کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{F(t+\delta t, s) - F(t,s)}{\delta t} \qquad (7)$$

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{F(t, s+\delta s) - F(t,s)}{\delta s}$$

معمولی تفرقی علم الاحصاء کیطرح اعلی درجوں کے جزوی مشتقات کی بھی تعریف کی جا سکتی ہے۔جیسے

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t\, \partial s} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)$$ وغیرہ

نیز مناسب روش والے تفاعل F کے لئے $\frac{\partial^2 F}{\partial t\, \partial s} = \frac{\partial^2 F}{\partial s\, \partial t}$

(یہاں تفصیلات میں جانا ضروری نہیں ہے)۔ سکشن 3.3 کے نتائج جو مجموعوں اور حاصل ضربوں کے مشتق کے لیے درست ہیں جزوی مشتقات کے لئے بھی درست ثابت کئے جا سکتے ہیں مثلاً

$$\frac{\partial}{\partial t}(F \times G) = \frac{\partial F}{\partial t} \times G + F \times \frac{\partial G}{\partial t}$$ وغیرہ

اسطرح کسی جزوی تفرقی عامل کا کسی بردار پر وہی اثر ہوتا ہے جو اسکے اجزاء ترکیبی پر ہوتا ہے مثلاً

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t\, \partial s} = \frac{\partial^2 F_x}{\partial t\, \partial s} i + \frac{\partial^2 F_y}{\partial t\, \partial s} j + \frac{\partial^2 F_z}{\partial t\, \partial s} k \qquad (8)$$

3.5 کامل تفرقہ (Total Differenetial)

(9) $dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial s} ds$ کو F کا کامل تفرقہ کہا جاتا ہے۔ جو میزانی کامل تفرقہ کے تصور کا برداری کامل تفرقہ کا مشابہ ہے۔

$z = z(x,y)$ کے لیے $dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy$ ہے

اپنی آپ جانچ

سوال (3) اگر $F = 2ti + 3t^2 j + 4t^2 k$ تو بردار $\frac{dF}{dt}$ کے اجزائے ترکیبی معلوم کرو

کرو۔ مثالیں

مثال ۔ (1) : اگر $F = e^{3t} i + t^2 j - \log(1+t) k,$ تو $t = 0$ پر

(a) $\frac{dF}{dt}$, (b) $\frac{d^2F}{dt^2}$, (c) $\left|\frac{d^2F}{dt^2}\right|$ نیز $(F \cdot F)$ $\frac{dF}{dt}$ محسوب کرو۔

حل ۔ (a) دیے ہوئے بردار کو بلحاظ "t" مشتق کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{dF}{dt} = 3e^{3t} i + 2t j - (1+t)^{-1} k$$

$t = o$ پر $\frac{dF}{dt} = 3i - k$

(b) $\frac{dF}{dt}$ کو بلحاظ t، دوبارہ تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{d^2F}{dt^2} = 9e^{3t} i + 2 j + (1+t)^{-2} k$$

اسلئے

$t = 0$ پر $\frac{d^2F}{dt^2}$ کا مقیاس لینے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\left|\frac{d^2F}{dt^2}\right| = (9^2 + 2^2 + 1^2)^{1/2} = \sqrt{86}$$

(d) $$F \cdot F = \left[e^{3t} i + t^2 j - \log(1+t) k\right] \cdot \left[e^{3t} i + t^2 j - \log(1+t) k\right]$$

$$= e^{6t} + t^4 + [\log(1+t)]^2$$

$$\frac{d}{dt}(F \cdot F) = 6e^{6t} + 4t^3 + \frac{2}{(1+t)} \log(1+t)$$

اسلیے $t = 0$ پر، $\frac{d}{dt}(F \cdot F) = 6 + 0 + 0 = 6$

مثال (2): ایک ذرہ منحنی $x = 3t^2, y = t^2 - 2t, z = t^3$. پر حرکت کرتا ہے۔ زمان t = 1 پر ذرہ کی رفتار اور اسراع محسوب کرو۔

حل ۔ فرض کرو کہ منحنی پر کسی نقطہ β (x,y,z) کا مقامی بردار r ہے۔

تب $r = xi + yj + zk = 3t^2\, i + (t^2 - 2t)\, j + t^3\, k$

رفتار $v = \frac{dr}{dt}$ اور اسراع $a = \frac{dv}{dt}$ ہوتا ہے۔

اسلئے $v = 6ti + (2t - 2)\, j + 3t^2\, k$

چنانچہ t=1 پر رفتار ہوگی $|\vartheta| = 6i + 3k$ ، $|\vartheta| = 6^2 + 3^2 = 3\ 5$

اور اسراع $6i + 2j + 6tk$ $= a = \frac{dv}{dt}$ ہے

اس لیے t پر $a = 6i + 2j + 6k$

$|a| = 6^2 + 2^2 + 6^2 = 2\ 19$.

نیز

$$|a| = \sqrt{6^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$$

$t = 1,$

مثال (3) ایک ذرہ منحنی $x = 3t^2, y = t^2 - 4t, z = 3t - 5$ پر حرکت کرتا ہے۔ جہاں "t" زمان ہے۔ زمان t=1 پر اس کی رفتار اور اسراع کے اجزائے ترکیبی (Components) جہت $i - 3j + 2k$. میں دریافت کرو۔

حل ۔ فرض کرو کہ منحنی پر کسی نقطہ P (x, y, z) کا بردار مکانی r ہے

تب $r = 2t^2\, i + (t^2 - 4t)\, j + (3t - 5)\, k$

اسلئے رفتار ہے: $\therefore \frac{dr}{dt} = \; = 4ti + (2t - 4)\, j + 2k$

نیز $\frac{dr}{dt} = 4i - 2j + 3k$ پر $t = 1$.

ہم جانتے ہیں کہ $a \cdot b = ab \cos\theta$

a کی جہت میں b کا ظل (*Projection*) ہوگا $\therefore \frac{a \cdot b}{a} = b\cos\theta$

a کی جہت میں b کا جزو ترکیبی ہے $\frac{a \cdot b}{|A|} = \hat{a} \cdot b = b\cos\theta$

اسلئے جہت $i - 3j + 2k$ میں رفتار کا جزو ترکیبی ہوگا.

$$\frac{i - 3j + 2k}{\sqrt{1 + 9 + 4}} \cdot (4i - 2j + 3k) = \frac{4 + 6 + 6}{\sqrt{14}} = \frac{16}{\sqrt{14}} = \frac{8\sqrt{14}}{7}$$

سراع $\frac{d^2r}{dt^2} = a$ ہوتا ہے یعنی $|a| = 4i + 2j$

جب $t = 1$

اسلئے دی ہوئی جہت میں اسراع کا جزو ترکیبی ہوگا۔

$$\frac{i - 3j + 2k}{\sqrt{14}} \cdot (4i + 2j) = \frac{4-6}{\sqrt{14}} = + \frac{\sqrt{14}}{7}$$

مثال (4) : اگر $F = 5t^2 i + t j - t^3 k$ and $G = \sin t\, i - \cos t\, j$

تو (a) $\frac{d}{dt}(F \cdot G)$ (b) $\frac{d}{dt}(F \times F)$ معلوم کرو۔

حل

$$F \cdot G = 5t^2 \sin t - t \cos t, \quad \frac{d}{dt}(F \cdot G) = \frac{d}{dt}(5t^2 \sin t - t \cos t)$$

$$= 10\, t \sin t + 5t^2 \cos t - (\cos t - t \sin t)$$

$$= (5t^2 - 1)\cos t + 11\, t \sin t.$$

$$F \times G = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5t^2 & t & -t^3 \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix} = t^3 \cos t\, i - t^3 \sin t\, j - (5t^2 \cos t + t \sin t)\, k$$

اسلئے

$$\therefore \frac{d}{dt}(F \times G) = (t^3 \sin t - 3t^3 \cos t)\, i - (t^3 \cos t + 3t^2 \sin t)\, j + (5t^2 \sin t - 11\, t \cos t - \sin t)\, k$$

مثال (5) : منحنی $x = t^2 + 1,\ y = 4t - 3,\ z = 2t^2 - 6t.$ کے کسی نقطہ پر اکائی مماسی بردار معلوم کرو۔

نیز $t = 2$ پر اکائی مماسی بردار کو محسوب کرو۔

$$\frac{dr}{dt} = 2t\, i + 4j + (4t - 6)\, k$$

حل : فرض کرو کہ منحنی کے کسی نقطے کا مقامی بردار r ہے۔ لہذا

$$r = (t^2 + 1)\, i + (4t - 3)j + (2t^2 - 6t)\, k$$

تب منحنی کے کسی نقطے پر مماسی بردار ہے۔

اب $t = 2$ پر اس کی قیمت ہوگی

$$\frac{4i + 4j + 2k}{\sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2}} = \frac{2}{3} i + \frac{2}{3} j + \frac{1}{3} k$$

مثال (6) : اگر F کی قدر مستقل ہو تو ثابت کرو کہ F اور dF باہم عمودی ہوں گے۔

بشرطیکہ $\left|\frac{dF}{dt}\right| \neq 0.$

حل۔ چونکہ F کی قدر مستقل ہے۔

اس لیے $F.F$ = مستقل

$$\frac{d}{dt}(F \cdot F) = F \cdot \frac{dF}{dt} + \frac{dF}{dt} \cdot F$$

چنانچہ $2F \cdot \frac{dF}{dt} = 0.$

یعنی $\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{F}}{dt}=0$ یا $\mathbf{F}$ عمود ہے $\frac{d\mathbf{F}}{dt}$ پر بشرطیکہ $\left|\frac{d\mathbf{F}}{dt}\right| \neq 0.$

(نوٹ۔ ثبوت کے لیے ہم قضیئہ (1) کا راست استعمال بھی کرسکتے ہیں)

مثال (7) : $\frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)$ کو محسوب کرو۔

حل ۔ سکشن (3.3) کے نتیجہ (5) کو استعمال کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right) = \frac{d}{dt}\left[\mathbf{r}\ \frac{d\mathbf{r}}{dt}\ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right]$$

$$= \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}\ \frac{d\mathbf{r}}{dt}\ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right] + \left[\mathbf{r}\ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right] + \left[\mathbf{r}\ \frac{d\mathbf{r}}{dt}\ \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}\right]$$

پہلے دو S.T.P صفر ہیں اس لئے کہ ان میں دو، دو بردار ایک دوسرے کے برابر ہیں۔ اسلئے ہمیں بالآخر حاصل ہوتا ہے۔

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right) = \left[\mathbf{r}\ \frac{d\mathbf{r}}{dt}\ \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}\right] = \mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}$$

3.6 خلاصہ

اگر S حقیقی اعداد کا کوئی سٹ (Set) ہو اور $\forall\, t \in S$ کے لئے یعنی ہر t کے لئے جو S سے متعلق ایک یکتا بردار تفاعل F (t) کی قیمت کے طور پر وجود رکھتا ہو تو F (t) کو حقیقی متغیر t کا برداری تفاعل کہا جاتا ہے۔ S کو F کا دامنہ کہاجاتا ہے۔

$$\mathbf{F}.\ \frac{d(\mathbf{F}(t))}{dt} = \lim_{\delta t\to 0}\frac{\mathbf{F}(t+\delta t)-\mathbf{F}(t)}{\delta t}$$ لکھا جاتا ہے۔

اگر کسی متحرک نقطے کا بردار مکانی r (t) ہو تو اس کی رفتار $\mathbf{V}=\frac{d\mathbf{r}}{dt};$ اور اسراع $\mathbf{a}=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\frac{d\mathbf{V}}{dt}.$

اگر F, G, H متغیر "t" کے تفرق پذیر تفاعل ہوں اور ϕ، t کا کوئی حقیقی تفاعل ہو تو

(1) $\frac{d}{dt}(\mathbf{F}\pm\mathbf{G}) = \frac{d\mathbf{F}}{dt}\pm\frac{d\mathbf{G}}{dt}$ (2) $\frac{d}{dt}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}) = \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{G}}{dt}+\frac{d\mathbf{F}}{dt}\cdot\mathbf{G}$

(3) $\frac{d}{dt}(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathbf{F}\times\frac{d\mathbf{G}}{dt}+\frac{d\mathbf{F}}{dt}\times\mathbf{G},$ (4) $\frac{d}{dt}(\phi\,\mathbf{F}(t)) = \phi\frac{d\mathbf{F}}{dt}+\frac{d\phi}{dt}\mathbf{F}$

(5) $$\frac{d}{dt}(\mathbf{F}\cdot(\mathbf{G}\times\mathbf{H})) = \frac{d\,[\mathbf{F}\ \mathbf{G}\ \mathbf{H}]}{dt} = \frac{d\mathbf{F}}{dt}\cdot(\mathbf{G}\times\mathbf{H})+\mathbf{F}\cdot\left(\frac{d\mathbf{G}}{dt}\times\mathbf{H}\right)+\mathbf{F}\cdot\left(\mathbf{G}\times\frac{d\mathbf{H}}{dt}\right)$$

(6) $$\frac{d}{dt}(\mathbf{F}\times(\mathbf{G}\times\mathbf{H})) = \frac{d\mathbf{F}}{dt}\times(\mathbf{G}\times\mathbf{H})+\mathbf{F}\times\frac{d\mathbf{G}}{dt}\times\mathbf{H}+\mathbf{F}\times\left(\mathbf{G}\times\frac{d\mathbf{H}}{dt}\right)$$

(دیکھو کہ اجزاء ضربیوں کی ترتیب ملحوظ رکھی جاتی ہے) اگر $\mathbf{F}$ بردار ثابت ہو تو $\frac{dF(t)}{dt} = 0$

اگر $F = F(t, s)$ تو $\frac{\partial F}{\partial t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{F(t + \delta t, s) - F(t, s)}{\delta t}$;

نیز $$\frac{\partial F}{\partial s} = \lim_{\delta s \to 0} \frac{F(t, s + \delta s) - F(t, s)}{\delta s}$$

اسطرح $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial s\, \partial t}, \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}$ کی بھی تعریف کی جاتی ہے

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t}\, dt + \frac{\partial F}{\partial s}\, ds.$$

$F(t)$ کی قدر مستقل ہونے کے لیے لازمی اور کافی شرط

$$F \cdot \frac{dF}{dt} = 0.$$

3.7 نمونہ امتحانی سوالات

I ذیل کے سوالوں کے تفصیلی جوابات دو۔

(i) (a) ایک برداری قیمت کے تفاعل کی تعریف کرو۔

(b) ایک ذرہ اسطور پر حرکت کررہا ہے کہ اس کا بردار مکانی $r = \cos \omega t\, i + \sin \omega t\, j$ ہے جہاں ω مستقل ہے ۔ ثابت کرو کہ (i) ذرہ کی رفتار V، r پر عمودی ہے (ii) سراغ a کی جہت مبداء کی طرف ہے اور قدر مبداء سے فاصلہ کے متناسب ہے۔ (iii) $r \times V$ ایک مستقل بردار ہے۔

(ii) (a) برداروں کی حاصل جمع اور حاصل ضرب کے تفرق جن قوانین کی پابندی کرتے ہیں انہیں بیان کرو۔

(b) اگر $a = \sin t\, i + \cos t\, j + t\, k$، $b = \cos t\, i - \sin t\, j - 3k$ $c = 2i + 3j - k$،

تو $t = 0$ پر $\frac{d}{dt}\{a \times (b \times c)\}$ کو محسوب کرو۔

(iii) (a) کسی برداری تفاعل کے جزوی تفرق اور کامل تفرق کی توضیح کرو۔

(b) تفاعل $F = (x^2 - y^2)\, i + 2xy\, j$ کا پہلا جزوی مشتق معلوم کرو۔

II ذیل کے سوالات کے مختصر جوابات دو۔

(i) ایک ذرہ منحنی $x = e^{-t}, y = 2\cos 3t, z = 2\sin 3t$ پر حرکت کررہا ہے۔ جہاں "t" زمان ہے ذرہ کی رفتار

اور اسراع کے بردار معلوم کرو نیز زمان $t = o$ پر رفتار اور اسراع کی قدریں دریافت کرو۔

(ii) نقطہ $t = \pm 1$ پر منحنی $r = t^2 i + 2tj - t^3 k$ کے مماسوں کے درمیان زاویہ کو دریافت کرو۔

(iii) اگر $r = a \sin \omega t + b \cos \omega t$. جہاں a, b, ω مستقل ہیں تو ثابت کرو کہ

اور $\frac{d^2F}{dt^2} = -\omega^2 r$ $\quad r \times \frac{dr}{dt} = -\omega\, a \times b$

(iv) منحنی $x = a \cos \omega t, y = a \sin \omega t, z = bt,$ کے کسی نقطہ پر اکائی مماسی بردار معلوم کرو جہاں a, b, ω مستقلات ہیں۔

(v) $F = xi + 2y\, j.$ کا پہلا جزوی مشتق دریافت کرو۔

(vi) ثابت کرو کہ $F(t) = be^{-\lambda t} + c\, e^{-\lambda t}$ مساوات $\frac{d^2F}{dt^2} - \lambda^2 F = 0$ کو پورا کرتا ہے۔ (b اور C مستقل بردار ہیں)

(vii) اگر $G = 2z\, i + yj - x^2 k$ $\quad F = x^2yz\, i - 2x z^3\, j + xz^2\, k$

تو نقطہ $\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}(F \times G)$ at $(1, 0, -2)$ معلوم کرو۔

3.8 اپنی معلومات کی جانچ کے جوابات

(1) نصف قطر a کے دائرہ پر $r = a \cos\theta\, i + a \sin\theta\, j$ پر غور کرو تو آپ کو مستقل قدر کا ایک بردار حاصل ہوتا ہے جس کی جہت θ کے بدلنے سے بدلتی رہتی ہے یعنی نقاط کے مکان کے بدلنے سے بدلتی ہے۔ چنانچہ

$$\frac{dr}{d\theta} = -a \sin\theta\, i + a \cos\theta\, j; \quad r \cdot \frac{dr}{d\theta} = -a^2 \cos\theta \sin\theta + a^2 \cos\theta \sin\theta =$$

(2) اگر کوئی بردار کسی خط کے متوازی ہو تو اس کی جہت مستقل ہے۔ اگر کسی خط پر دو ثابت نقاط کے مکان a اور b ہوں تو $(b - a)$ سے اس خط کی جہت حاصل ہوتی ہے۔ اسلئے $t\,(b - a)$, جہاں t عدد یہ ہے اس جہت میں کسی بھی بردار کو تعبیر کرتا ہے جس کی جہت مستقل ہے۔ اب $r \times \frac{dr}{dt} = t\,(b - a) \times (b - a) = 0.$

(3) $\frac{dF}{dt} = 2i + 6tj + 12t^2\, k.$

$\frac{dF}{dt}$ کے اجزاء ترکیبی (Components) $2, 6t, 12t^2$. ہیں۔