BSMM101CCT

علم احصا

(Calculus)

مع

لیب مینول

(Lab Manual)

فاصلاتی اور روایتی نصاب پر مبنی خود اکتسابی مواد

برائے

بیچلر آف سائنس (بی۔ایس سی)

(پہلا سمسٹر)

نظامت فاصلاتی تعلیم

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

حیدرآباد-32، تلنگانہ-بھارت

Course-Bachelor of Science

ISBN: 978-93-80322-81-0

Edition:**June, 2021**

ناشر :	رجسٹرار، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد
اشاعت :	جون، 2021
قیمت :	170/-
تعداد :	3000
کمپوزنگ :	ڈاکٹر کاشف خان، نظامت فاصلاتی تعلیم، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد
ترتیب وتزئین :	ڈاکٹر محمد اکمل خان، نظامت فاصلاتی تعلیم، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد
مطبع :	کرشک پرنٹ سولیوشنس، حیدرآباد

علم احصا

(Calculus)

For B.Sc. 1st Semester

On behalf of the Registrar, Published by:

Directorate of Distance Education

Maulana Azad National Urdu University

Gachibowli, Hyderabad-500032 (TS), Bharat

Director: dir.dde@manuu.edu.in *Publication :* ddepublication@manuu.edu.in

Phone number: 040-23008314 Website: manuu.edu.in

مجلس ادارت

(Editorial Board)

نظامت فاصلاتی تعلیم

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

حیدرآباد-32، تلنگانہ-بھارت

کورس کو آرڈی نیٹر

ڈاکٹر خواجہ معین الدین

اسسٹنٹ پروفیسر، شعبہ ریاضی

اسکول برائے سائنسی علوم، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد

مصنفین	اکائی نمبر
• ڈاکٹر افروز، اسوشی ایٹ پروفیسر، شعبہ ریاضی، مانو، حیدرآباد	اکائی 1،2
• ڈاکٹر سہاش آلھا، اسسٹنٹ پروفیسر، شعبہ ریاضی، مانو، حیدرآباد	اکائی 3،4
• ڈاکٹر کاشف خان، گیسٹ فیکلٹی (ریاضی)، ڈی ڈی ای، مانو، حیدرآباد	اکائی 5،12،13،15،16
• ڈاکٹر ماجد علی چودھری، اسسٹنٹ پروفیسر، شعبہ ریاضی، مانو، حیدرآباد	اکائی 6،14
• ڈاکٹر خواجہ معین الدین، اسسٹنٹ پروفیسر، شعبہ ریاضی، مانو، حیدرآباد	اکائی 7،8
• ڈاکٹر اختر علی	اکائی 9،10،11

لیب مینول

• ڈاکٹر کاشف خان، گیسٹ فیکلٹی (ریاضی)، ڈی ڈی ای، مانو، حیدرآباد	اکائی 17 تا اکائی 24

مترجمین (Translators)

• ڈاکٹر کاشف خان / ڈاکٹر محمد اکمل خان	اکائی 3،4

پروف ریڈرس:

اول	:	ڈاکٹر کاشف خان
دوم	:	ڈاکٹر محمد اکمل خان
فائنل	:	ڈاکٹر خواجہ معین الدین

سرورق	:	ڈاکٹر محمد اکمل خان

فہرست

بلاک IV

بلاک V

بلاک VI

پیغام

وطنِ عزیز کی پارلیمنٹ کے جس ایکٹ کے تحت مولانا آزاد نیشنل اُردو یونیورسٹی کا قیام عمل میں آیا ہے اُس کی بنیادی سفارش اُردو کے ذریعے اعلیٰ تعلیم کا فروغ ہے۔ یہ وہ بنیادی نکتہ ہے جو ایک طرف اِس مرکزی یونیورسٹی کو دیگر مرکزی جامعات سے منفرد بناتا ہے تو دوسری طرف ایک امتیازی وصف ہے، ایک شرف ہے جو ملک کے کسی دوسرے اِدارے کو حاصل نہیں ہے۔ اُردو کے ذریعے علوم کو فروغ دینے کا واحد مقصد و منشا اُردو داں طبقے تک عصری علوم کو پہنچانا ہے۔ ایک طویل عرصے سے اُردو کا دامن علمی مواد سے لگ بھگ خالی ہے۔ کسی بھی کتب خانے یا کتب فروش کی الماریوں کا سرسری جائزہ بھی تصدیق کر دیتا ہے کہ اُردو زبان سمٹ کر چند ''ادبی'' اصناف تک محدود رہ گئی ہے۔ یہی کیفیت رسائل و اخبارات کی اکثریت میں دیکھنے کو ملتی ہے۔ ہماری یہ تحریریں قاری کو کبھی عشق و محبت کی پُر پیچ راہوں کی سیر کراتی ہیں تو کبھی جذباتیت سے پُر سیاسی مسائل میں اُلجھاتی ہیں، کبھی مسلکی اور فکری پس منظر میں مذاہب کی توضیح کرتی ہیں تو کبھی شکوہ شکایت سے ذہن کو گراں بار کرتی ہیں۔ تاہم اُردو قاری اور اُردو سماج آج کے دور کے اہم ترین علمی موضوعات چاہے وہ خود اُس کی صحت و بقا سے متعلق ہوں یا معاشی اور تجارتی نظام سے، وہ جن مشینوں اور آلات کے درمیان زندگی گزار رہا ہے اُن کی بابت ہوں یا اُس کے گرد و پیش اور ماحول کے مسائل ہوں۔ وہ ان سے نابلد ہے۔ عوامی سطح پر اِن شعبہ جات سے متعلق اردو میں مواد کی عدم دستیابی نے علوم کے تئیں ایک عدم دلچسپی کی فضا پیدا کر دی ہے جس کا مظہر اُردو طبقے میں علمی لیاقت کی کمی ہے۔ یہی وہ مبارزات (Challenges) ہیں جن سے اُردو یونیورسٹی کو نبرد آزما ہونا ہے۔ نصابی مواد کی صورت حال بھی کچھ مختلف نہیں ہے۔ اِسکولی سطح کی اُردو کتب کی عدم دستیابی کے چرچے ہر تعلیمی سال کے شروع میں زیر بحث آتے ہیں۔ چوں کہ اُردو یونیورسٹی میں ذریعہ تعلیم ہی اُردو ہے اور اس میں علوم کے تقریباً سبھی اہم شعبہ جات کے کورسز موجود ہیں لہٰذا اِن تمام علوم کے لیے نصابی کتابوں کی تیاری اِس یونیورسٹی کی اہم ترین ذمے داری ہے۔ چوں کہ اسی مقصد کے تحت اردو یونیورسٹی کا آغاز فاصلاتی تعلیم سے 1998 میں ہوا تھا۔ احقر کو اِس بات کی بے حد خوشی ہے کہ اس کے ذمے داران بشمول اساتذہ کرام کی انتھک محنت اور قلم کاروں کے بھرپور تعاون کے نتیجے میں کتب کی اشاعت کا سلسلہ شروع ہو گیا ہے۔ مجھے یقین ہے کہ کم سے کم وقت میں خود اکتسابی مواد اور خود اکتسابی کتب کی اشاعت کے بعد اِس کے ذمے داران، عام اردو قارئین کے لیے بھی علمی مواد، آسان زبان میں تحریر کرا کے کتابوں کی شکل میں شائع کرنے کا سلسلہ شروع کریں گے تا کہ ہم اِس یونیورسٹی کے وجود اور اِس میں اپنی موجودگی کا حق ادا کر سکیں۔

پروفیسر ایس۔ ایم۔ رحمت اللہ

وائس چانسلر، انچارج

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد

پیغام

آپ تمام بخوبی واقف ہیں کہ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کا باقاعدہ آغاز 1998 میں نظامتِ فاصلاتی تعلیم اور ٹرانسلیشن ڈویژن سے ہوا تھا۔ 2004 میں باقاعدہ روایتی طرزِ تعلیم کا آغاز ہوا۔ متعدد روایتی تدریس کے شعبہ جات قائم کیے گئے۔ نو قائم کردہ شعبہ جات اور ٹرانسلیشن ڈویژن میں تقرریاں عمل میں آئیں۔ اس وقت کے اربابِ مجاز کے بھرپور تعاون سے مناسب تعداد میں خود مطالعاتی مواد تحریر و ترجمے کے ذریعے تیار کرائے گئے۔

گزشتہ کئی برسوں سے یو جی سی۔ ڈی ای بی UGC-DEB اس بات پر زور دیتا رہا ہے کہ فاصلاتی نظامِ تعلیم کے نصابات اور نظامات کو روایتی نظامِ تعلیم کے نصابات اور نظامات سے کماحقہم آہنگ کر کے نظامتِ فاصلاتی تعلیم کے طلبا کے معیار کو بلند کیا جائے۔ چوں کہ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی فاصلاتی اور روایتی طرزِ تعلیم کی جامعہ ہے، لہٰذا اس مقصد کے حصول کے لیے یو جی سی۔ ڈی ای بی کے رہنمایانہ اصولوں کے مطابق نظامتِ فاصلاتی تعلیم اور روایتی نظامِ تعلیم کے نصابات کو ہم آہنگ اور معیار بند کر کے خود اکتسابی مواد SLM از سرِ نو بالترتیب یو جی اور پی جی طلبا کے لیے چھے بلاک چوبیس اکائیوں اور چار بلاک سولہ اکائیوں پر مشتمل نئے طرز کی ساخت پر تیار کرائے جا رہے ہیں۔

فاصلاتی طریقۂ تعلیم پوری دنیا میں ایک انتہائی کارگر اور مفید طریقۂ تعلیم کی حیثیت سے تسلیم کیا جا چکا ہے اور اس طریقۂ تعلیم سے بڑی تعداد میں لوگ مستفیض ہو رہے ہیں۔ مولانا آزاد نیشنل اُردو یونیورسٹی نے بھی اپنے قیام کے ابتدائی دنوں ہی سے اردو آبادی کی تعلیمی صورت حال کو محسوس کرتے ہوئے اِس طرزِ تعلیم کو اختیار کیا۔ اِس طرح سے یونیورسٹی نے روایتی طریقۂ تعلیم سے پہلے فاصلاتی طریقۂ تعلیم کے ذریعے اردو آبادی تک تعلیم پہنچانے کا سلسلہ شروع کیا۔ پہلے پہل یہاں کے تدریسی پروگراموں کے لیے امبیڈکر یونیورسٹی اور اندرا گاندھی نیشنل اوپن یونیورسٹی کے نصابی مواد سے من و عن یا ترجمے کے ذریعے استفادہ کیا گیا۔ اِرادہ یہ تھا کہ بہت تیزی سے اپنا نصابی مواد تیار کرا لیا جائے گا اور دوسری یونیورسٹیوں کے مواد پر انحصار ختم ہو جائے گا، لیکن اِرادہ اور کوشش دونوں ایک دوسرے سے ہم آہنگ نہیں ہو پائے، جس کی وجہ سے اپنے خود اکتسابی مواد کی تیاری میں اچھی خاصی تاخیر ہوئی۔ بالآخر منظم اور جنگی پیمانے پر کام شروع ہوا، جس کے دوران میں قدم قدم پر مسائل پیش آئے۔ مگر کوششیں جاری ہیں، نتیجتاً بہت تیزی سے یونیورسٹی نے اپنے نصابی مواد کی اشاعت شروع کر دی ہے۔

نظامتِ فاصلاتی تعلیم یو جی، پی جی، بی ایڈ، ڈپلوما اور سرٹیفکیٹ کورسز پر مشتمل جملہ پندرہ کورسز چلا رہا ہے۔ بہت جلد تکنیکی ہنر پر مبنی کورسز بھی شروع کیے جائیں گے۔ متعلمین کی سہولت کے لیے 9 علاقائی مراکز بنگلورو، بھوپال، دربھنگہ، دہلی، کولکاتا، ممبئی، پٹنہ، رانچی اور سری نگر اور 5 ذیلی علاقائی مراکز حیدرآباد، لکھنؤ، جموں، نوح اور امراوتی کا ایک بہت بڑا نیٹ ورک تیار کیا ہے۔ ان مراکز کے تحت سرِدست 155 متعلم امدادی مراکز کام کر رہے ہیں، جو طلبا کو تعلیمی اور انتظامی مدد فراہم کرتے ہیں۔ ڈی ڈی اِی نے اپنی تعلیمی اور انتظامی سرگرمیوں میں آئی سی ٹی کا استعمال شروع کر دیا ہے، نیز اپنے تمام پروگراموں میں داخلے صرف آن لائن طریقے ہی سے دے رہا ہے۔

نظامتِ فاصلاتی تعلیم کی ویب سائٹ پر متعلمین کو خود اکتسابی مواد کی سافٹ کاپیاں بھی فراہم کی جا رہی ہیں، نیز جلد ہی آڈیو۔ ویڈیو ریکارڈنگ کا لِنک بھی ویب سائٹ پر فراہم کیا جائے گا۔ اس کے علاوہ متعلمین کے درمیان رابطے کے لیے ایس ایم ایس کی سہولت فراہم کی جا رہی ہے، جس کے ذریعے متعلمین کو پروگرام کے مختلف پہلوئوں جیسے کورس کے رجسٹریشن، مفوضات، کونسلنگ، امتحانات وغیرہ کے بارے میں مطلع کیا جاتا ہے۔

امید ہے کہ ملک کی تعلیمی اور معاشی حیثیت سے پچھڑی اردو آبادی کو مرکزی دھارے میں لانے میں نظامتِ فاصلاتی تعلیم کا بھی نمایاں رول ہو گا۔

پروفیسر ابوالکلام
ڈائرکٹر، نظامت فاصلاتی تعلیم

کورس کا تعارف

زیر نظر کتاب علم احصا کے موضوعات سے متعلق ہے اور یہ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کے بی۔ ایس سی۔ کورس کے سال اول کے پہلے سمسٹر کے نصاب پر مشتمل ہے۔ علم احصا ریاضی، سائنس یا انجینیئرنگ میں بنیادی حیثیت رکھتا ہے۔ یہ کتاب طلبا کو علم احصا کے بنیادی تصورات کو سمجھنے اور اپنی زندگی اور اطراف میں اس کا استعمال کرنے کا ایک بہترین موقع فراہم کرتی ہے۔ اس کتاب کی نمایاں خصوصیت یہ ہے کہ اس میں مواد کو سہل طریقے سے آسان زبان میں مثالوں کے ساتھ سمجھایا گیا ہے تا کہ طلبا اپنے مضمون کو از خود سمجھ سکیں۔ کتاب کو دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ جس میں پہلا حصہ نظریات (تھیوری) پر مبنی ہے اور دوسرا حصہ پریکٹکل (تجربوں) پر منحصر ہے۔

پہلا حصہ سولہ (16) اکائیوں پر مشتمل ہے۔ اکائی 1 تا 3 میں زائدی تفاعلات اور ان کے اطلاقات، اعلا رتبہ کے مشتق، لیبنیز کا نظریہ اور اس کے ذریعے n-واں مشتق معلوم کرنے کا طریقہ شامل ہے۔ اکائی 4 تا 6 میں کانکیوٹی، اسمپٹوٹس، منحنی کے ترسیم کا طریقہ، اور ایل ہاسپٹل رول کے بارے میں تفصیلی معلومات درج ہیں۔ اکائی 7 اور 8 میں کئی تحویلی ضابطے دیے گئے ہیں جن کی مدد سے بہت سے مسائل کا حل پیش کیا گیا ہے۔

اکائی 9 اور 10 میں سلائسنگ ڈسک واشر اور سلینڈریکل شلس کے ذریعے حجم معلوم کرنے کے طریقوں پر روشنی ڈالی گئی ہے۔ اکائی 11 اور 12 میں قوسی لمبائی اور گردشی سطح کا رقبہ معلوم کرنے کے طریقوں پر تفصیلی بحث کی گئی ہے۔ اکائی 13 اور 14 میں ویکٹر کے تہرے حاصل ضرب، ویکٹر تفاعل کی انتہا، تسلسل، تفرق اور تکمل کے بارے میں معلومات درج ہے۔ آخر میں اکائی 15 اور اکائی 16 میں اسراع کے مماس، عمود اور پلانیٹری گردش کا تفصیل سے تذکرہ کیا گیا ہے۔

طلبا کی مسئلہ حل صلاحیت کو بہتر بنانے کے لیے اکائی 17 سے اکائی 24 تک تجرباتی حصے (Practical Manual) کو شامل کیا گیا ہے جس میں علم احصا کے مسائل اور ان کے حل کو تلاش کرنے کے طریقے پیش کیے گئے ہیں۔

اس کتاب کی تدوین میں مصنفین، مترجمین، تدریسی و غیر تدریسی و انتظامی عملے کے تعاون کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ کتاب کو معیاری اور قابل عمل و فہم بنانے کی ہر ممکن کوشش کی گئی ہے، تاہم کوئی بھی کوشش اپنے آپ میں مکمل نہیں ہوتی۔ اس ضمن میں اساتذہ کرام، ماہرین، طلبا کی آرا و مشوروں کا خیر مقدم کیا جائے گا۔

ڈاکٹر خواجہ معین الدین

کورس کوآرڈی نیٹر

علم احصا

(Calculus)

اکائی 1۔ زائدی تفاعلات

(Hyperbolic Functions)

اکائی کے اجزا

1.0 تمہید (Introduction)

ریاضی میں کئی مرتبہ ایکسپونینشیل (Exponential) تفاعل، e^x اور e^{-x} کی جمع سے بنتے ہیں۔ زائدی تفاعل (Hyperbolic Function) بہت سی ریاضی شماروں کو آسان بنا دیتا ہے۔ زائدی تفاعل کا بہت سے اطلاقات میں اہم رول ہے۔ بجلی کی لائن سے لٹکے ہوئے کیبل کی تفرقی مساوات کو حل کرنے میں اس کا اہم کردار ہے۔

1.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- زائدی تفاعل کی بنیادی جانکاری حاصل کر سکیں۔
- زائدی تفاعل کی ضابطوں کو سمجھ سکیں۔
- معکوس زائدی تفاعل کو جان سکیں۔
- زائدی تفاعل اور معکوس زائدی تفاعل کے تفرق اور تکمل حاصل کر سکیں۔

1.2 جفت، طاق حصے (Even, Odd Parts)

اگر $f(x) = f(-x)$ تب f جفت تفاعل کہلاتا ہے۔ اور اگر $f(-x) = -f(x)$ تب f ایک طاق تفاعل ہوتا ہے۔ ہر ایک تفاعل f جو کہ کسی وقفہ پر متعرف ہے اور جس کا مرکز مبدا (Origin) ہے اس کو جفت اور طاق تفاعل کی جمع کے طور پر لکھ سکتے ہیں۔

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$
$$= \text{جفت پارٹ} + \text{طاق پارٹ}$$

اسی طرح ہم e^x کو بھی لکھ سکتے ہیں

$$e^x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$= \text{جفت پارٹ} + \text{طاق پارٹ}$$

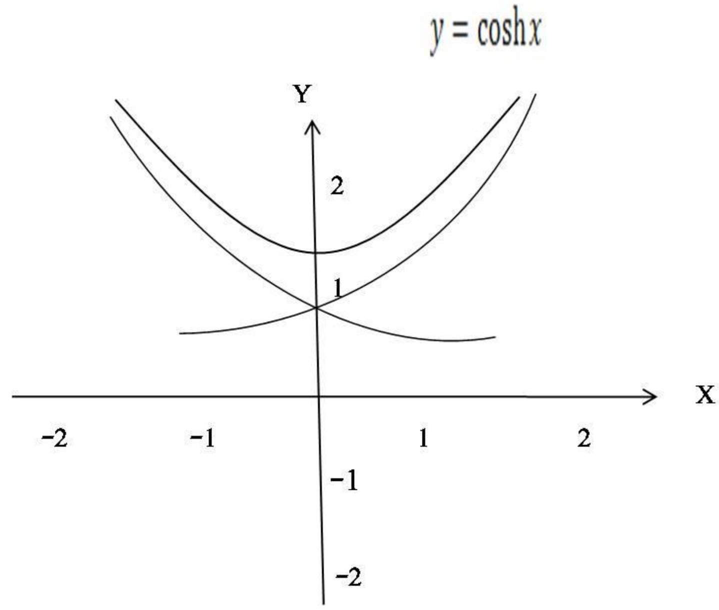
e^x کے جفت اور طاق پارٹ، زائدی کوسائن اور زائدی سائن کہلاتے ہیں۔

زائدی تفاعل کی تعریف:

$$\boxed{\begin{array}{c} \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \operatorname{cosech} x = \dfrac{1}{\sinh x} \\[2ex] \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x} \end{array}}$$

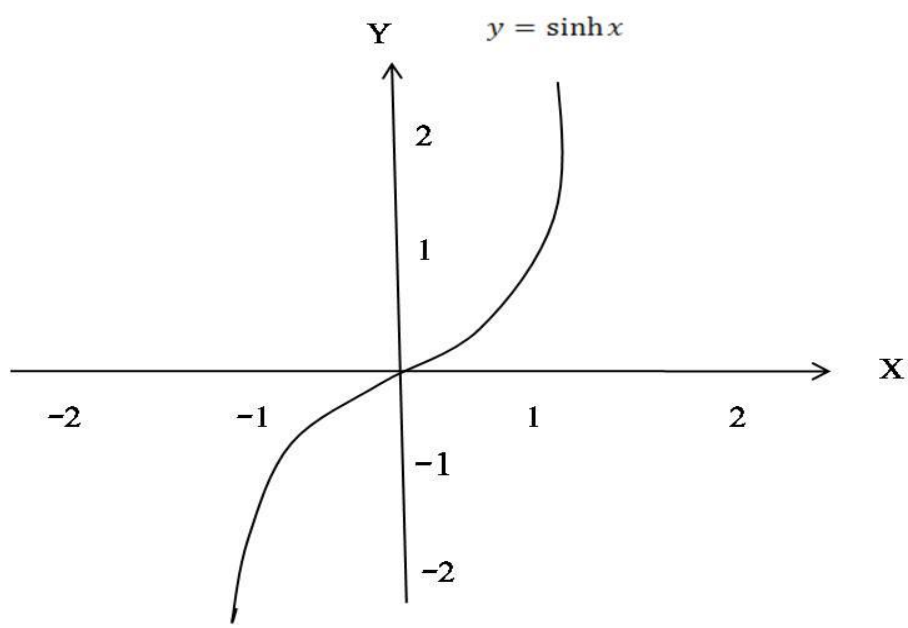
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

1.3 زائدی تفاعلات کے گراف، سعت اور علاقہ (Graph, Domain and Range of Hyperbolic Functions)



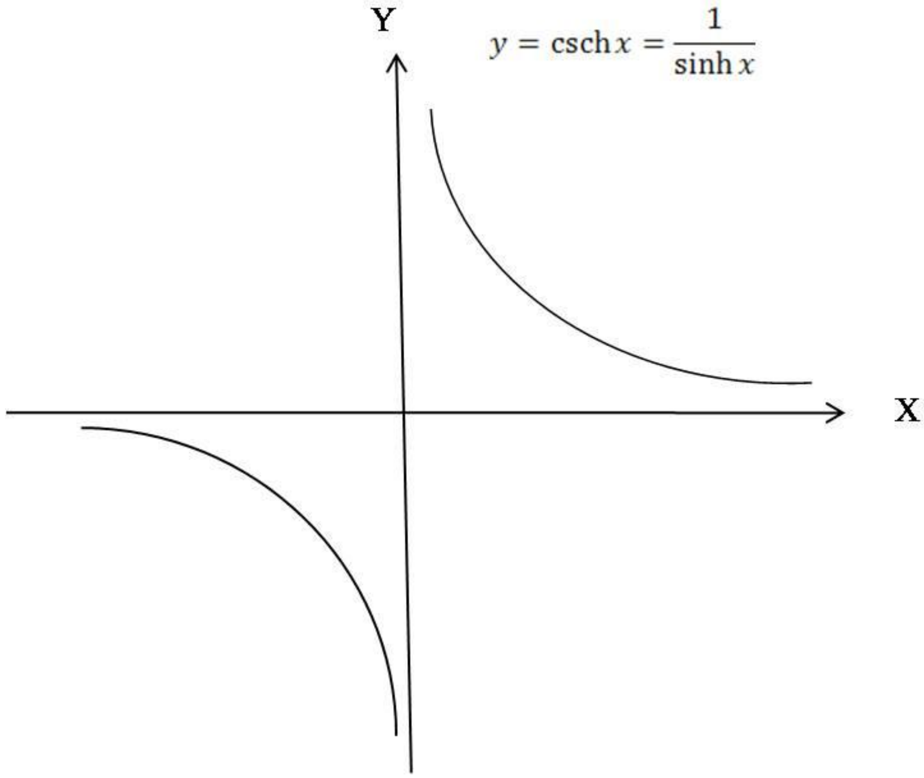
دامنہ $(-\infty، \infty)$

سعت $[1، \infty[$



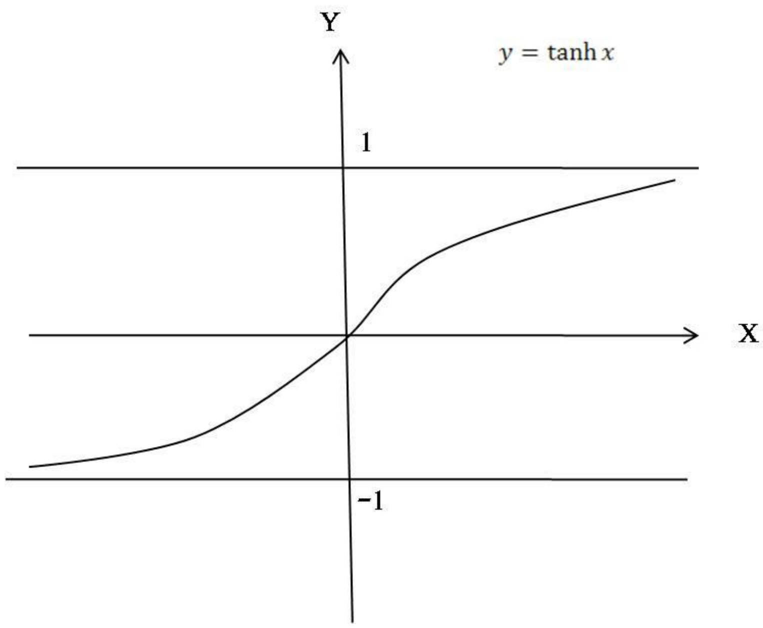
دامنہ $(-\infty، \infty)$

سعت $(-\infty، \infty)$

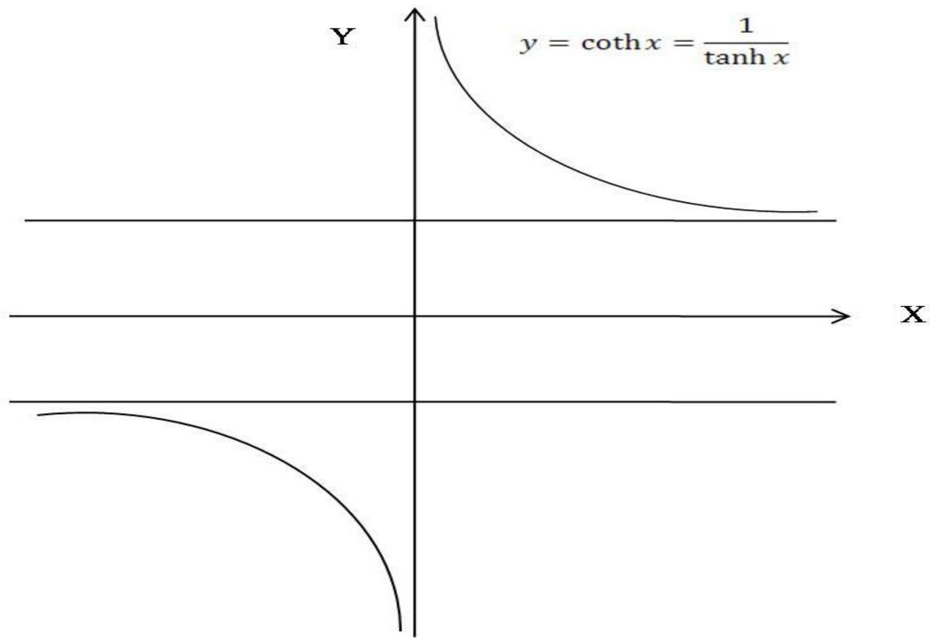


دامنہ $\left(-\infty، 0\right) \cup (0, \infty)$

سعت $\left(-\infty، 0\right) \cup (0, \infty)$

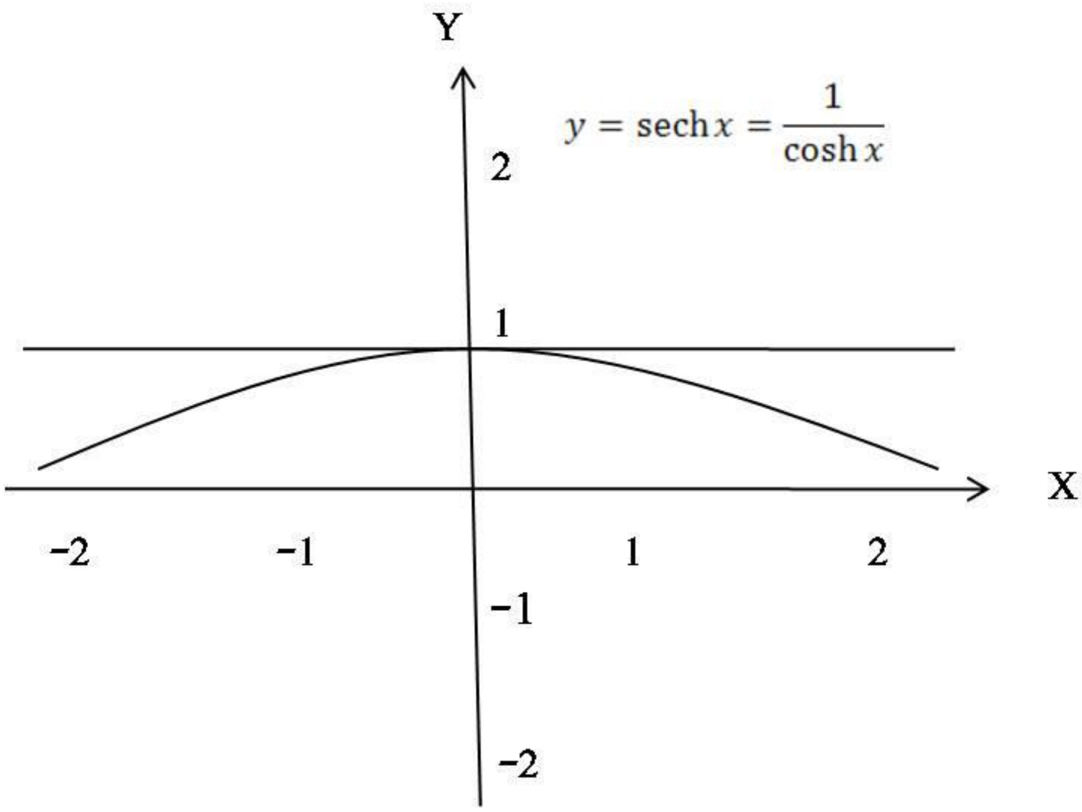


دامنہ $\left(-\infty، \infty\right)$ سعت $\left(-1، 1\right)$



دامنہ $\left(-\infty، 0\right) \cup (0, \infty)$

سعت $\left(-\infty، -1\right) \cup (1, \infty)$



دامنہ $\left(-\infty، \infty\right)$

سعت $(0, 1]$

1.4 زائدی ضابطے (Hyperbolic Identities)

$$sinh(-x) = -sinh\, x \qquad cosh(-x) = cosh\, x$$

$$cosh^2x - sinh^2x = 1 \qquad 1 - tanh^2x = sec^2x$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

مثال: ثابت کرو کہ

a) $cosh^2x - sinh^2x = 1$

b) $1 - tanh^2x = sec^2x$

حل: a) ہم جانتے ہیں کہ $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ اور $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

اس لیے

$$cosh^2x - sinh^2x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$
$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$$
$$= \frac{4}{4} = 1$$

b) ہم نے اوپر ثابت کیا ہے کہ

$$cosh^2x - sinh^2x = 1$$

اس مساوات کو دونوں طرف $cosh^2x$ سے تقسیم دینے پر

$$1 - \frac{sinh^2x}{cosh^2x} = \frac{1}{cosh^2x}$$

$$\Rightarrow \quad 1 - tanh^2x = sec^2x$$

1.5 زائدی تفاعل کا تفرق (Differentiation of Hyperbolic Function)

1. $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$
2. $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$
3. $\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$
4. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosech} x) = -\operatorname{cosech} x \coth x$
5. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$
6. $\frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{cosech}^2 x$

مثال: بتلاؤ کہ $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$

حل: بائیں ہاتھ کی طرف سے

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sinh x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\\ &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\\ &= \cosh x\end{aligned}$$

مثال: بتلاؤ کہ $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$

حل: بائیں ہاتھ کی طرف سے

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\cosh x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\\ &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\\ &= \sinh x\end{aligned}$$

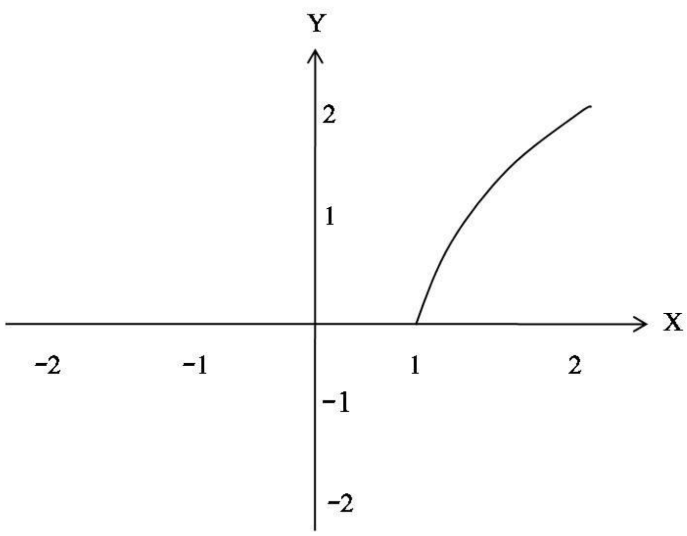
1.6 معکوس زائدی تفاعل (Inverse Hyperbolic Function)

معکوس زائدی تفاعل کے لیے تفاعل کو ایک تا ایک (One to One) اور بر (Onto) ہونا چاہیے۔

$$\begin{aligned}y &= \sinh^{-1} x \Leftrightarrow \sinh y = x\\ y &= \cosh^{-1} x \Leftrightarrow \cosh y = x\\ y &= \tanh^{-1} x \Leftrightarrow \tanh y = x\end{aligned}$$

باقی معکوس زائدی تفاعل بھی اسی طرح متعارف کیے جاتے ہیں۔

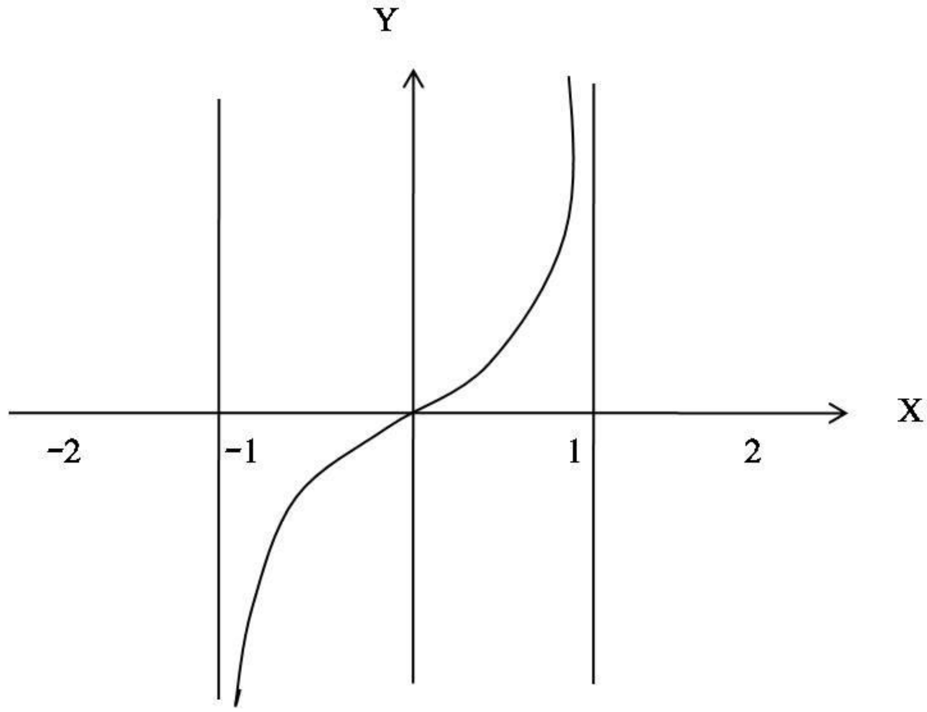
ذیل میں $\sinh^{-1} x$، $\cosh^{-1} x$ اور $\tanh^{-1} x$ کے گراف دیے گئے ہیں۔



$y = \cosh^{-1} x$

دامنہ $[1، \infty)$

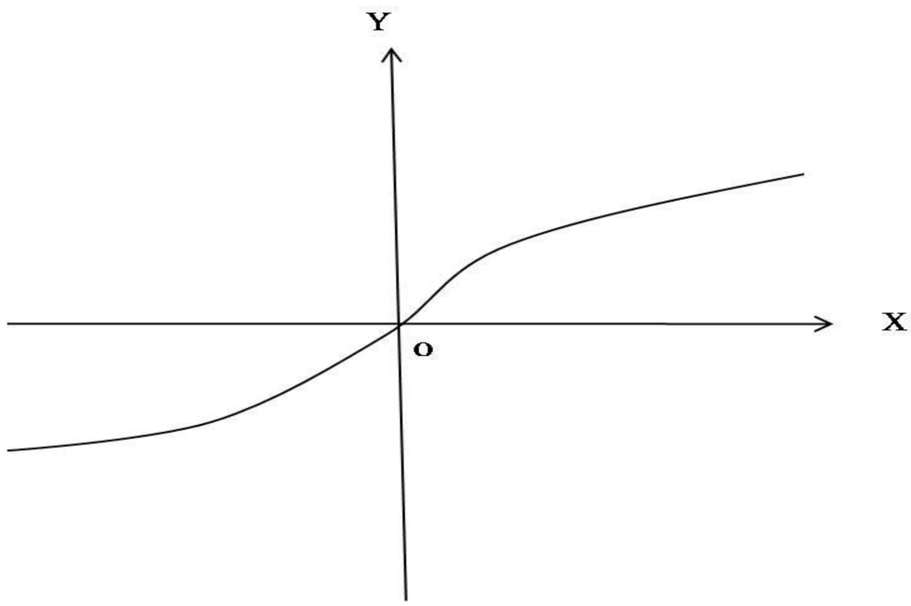
سعت $[0, \infty)$



$y = \tanh^{-1} x$

دامنہ $[1, \infty)$

سعت $[0, \infty)$



$y = \sinh^{-1} x$

دامنہ – R

سعت – R

کسی زائدی تفاعل کو قوت نماتفاعل(Exponential Function)کے ارکان میں بیان کیا جاتا ہے۔ اسی طرح معکوس زائدی تفاعل کو لوگرتھم(Logarithm)میں بیان کیا جاتا ہے۔

1. $\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), x \in \mathbb{R}$
2. $\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), x \geq 1$
3. $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), -1 < x < 1$

مثال:بتلاؤکہ $\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), x \in \mathbb{R}$

حل:مان لوکہ

$$y = \sinh^{-1} x$$

تب

$$x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad e^y - 2x - e^{-y} = 0$$
$$\Rightarrow \quad e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0$$

جو کہ ایک e^y میں کثیر رکنی ہے،اس لیے

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2}$$
$$= x \pm \sqrt{x^2+1}$$

چونکہ $e^y > 0$ لیکن $x - \sqrt{x^2+1} < 0$ یا $x < \sqrt{x^2+1}$

اس لیے

$$e^y = x + \sqrt{x^2+1}$$
$$\Rightarrow \quad y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

1.7 معکوس زائدی تفاعل کے تفرقات(Differentiation of Inverse Hyperbolic Function)

1. $\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
2. $\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
3. $\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}$
4. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosech}^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2+1}}$
5. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$
6. $\frac{d}{dx}(\coth^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}$

سارے معکوس زائدی تفاعل تفرق پزیر ہوتے ہیں کیوں کہ زائدی تفاعل تفرق پزیر ہوتے ہیں۔

مثال: ثابت کرو کہ

$$\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

حل: مان لیجیے کہ $y = \sinh^{-1} x$ تب

$$\sinh y = x$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$\cosh \mathrm{y} \frac{dy}{dx} = 1$$

$cosh^2 x - sinh^2 x = 1$ اور $\cosh \mathrm{y} \geq 0$، تب

$$\cosh \mathrm{y} = \sqrt{1 + \sinh^2 y}$$

اس لیے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh \mathrm{y}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

مثال: $\frac{d}{dx}[\tanh^{-1}(\sin x)]$ کو معلوم کرو۔

حل: چین قانون (Chain Rule) کا استعمال کر کے بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$\frac{d}{dx}[\tanh^{-1}(\sin x)] = \frac{d}{d(\sin x)}[\tanh^{-1}(\sin x)] \times \frac{d}{dx}(\sin x)$$
$$= \frac{1}{1-(\sin x)^2} \times \cos x$$
$$= \frac{\cos x}{cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

مثال: ضابطوں کی تصدیق کیجیے:

(i) $\tanh^2 x + sech^2 x = 1$

(ii) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

(iii) $\sinh 3x = 3\sinh x + 4sinh^3 x$

حل: (i) ہمیں تصدیق کرنی ہے

$$\tanh^2 x + sech^2 x = 1$$

بائیں ہاتھ کی طرف سے

$$\tanh^2 x + sech^2 x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2 + \left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right)^2$$
$$= \frac{(e^x - e^{-x})^2 + 4}{(e^x + e^{-x})^2}$$
$$= \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x} + 4}{(e^x + e^{-x})^2}$$
$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^2}$$
$$= \frac{(e^x + e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = 1$$

اس لیے $\tanh^2 x + sech^2 x = 1$ کی تصدیق ہوتی ہے۔

(ii) ہمیں تصدیق کرنی ہے

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

دائیں ہاتھ کی طرف سے

$$\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-(x+y)}}{4}\right) + \left(\frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{y-x} - e^{-(x+y)}}{4}\right)$$
$$= \left(\frac{2e^{(x+y)} - 2e^{-(x+y)}}{4}\right)$$
$$= \left(\frac{e^{(x+y)} - e^{-(x+y)}}{2}\right)$$
$$= \sinh(x + y)$$

اس لیے $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$ کی تصدیق ہوتی ہے۔

(iii) ہمیں تصدیق کرنی ہے

$$\sinh 3x = 3 \sinh x + 4sinh^3 x$$

دائیں ہاتھ کی طرف سے

$$3 \sinh x + 4sinh^3 x = \sinh x\,(3 + 4sinh^2 x)$$
$$= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left[3 + 4\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2\right]$$
$$= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)[3 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}]$$
$$= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)[e^{2x} + e^{-2x} + 1]$$
$$= \frac{1}{2}[e^{3x} + e^{-x} + e^x - e^x - e^{-3x} - e^{-x}]$$
$$= \frac{1}{2}[e^{3x} - e^{-3x}]$$
$$= \sinh 3x$$

اس لیے $\sinh 3x = 3\sinh x + 4sinh^3x$ کی تصدیق ہوتی ہے۔

مثال: دیے گئے زائدی تفاعل کا استعمال کرتے ہوئے، دوسرے زائدی تفاعل کی قدر معلوم کرو۔

$\sinh x = \frac{3}{2}$ (i)

$\tanh x = \frac{1}{2}$ (ii)

حل: (i) ہم جانتے ہیں کہ

$$cosh^2x = 1 + sinh^2x$$
$$= 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$
$$= 1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4}$$

اس لیے

$$\cosh x = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

اور

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$
$$= \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

اسی طرح

$$cosech\, x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$$
$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{13}}{2}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$
$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{1}{\tanh x} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

(ii) $\tanh x = \frac{1}{2}$ دیا ہے

ہم جانتے ہیں کہ

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

اور

$$\tanh^2 x + sech^2x = 1$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + sech^2x = 1$$

$$sech^2x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{sech} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

اسی طرح

$$\cosh x = \frac{1}{\operatorname{sech} x} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

ضابطہ سے

$$\begin{aligned} sinh^2x &= cosh^2x - 1 \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 \\ &= \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

اس لیے

$$\sinh x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

اس سے

$$cosech\ x = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

مثال: ذیل میں دیے ہوئے تفاعلات کے مشتقات معلوم کرو۔

(i) $y = \sinh(1 - x^2)$

(ii) $f(x) = \ln(\sinh x)$

(iii) $y = \ln\left(\tanh \frac{x}{2}\right)$

(iv) $h(x) = \frac{1}{4}\sinh(2x) - \frac{x}{2}$

(v) $f(t) = arc\ tan(\sinh t)$

(vi) $y = x^{\cosh x}$

(vii) $y = (\cosh x - \sinh x)^2$

(viii) $y = \sinh^{-1}(\tan x)$

(ix) $y = \coth^{-1}(\sinh 2x)$

(x) $y = 2x \sinh^{-1} 2x - \sqrt{1 + 4x^2}$

(xi) $y = a \operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2 - x^2}$

حل: (i) دیا ہے

$$y = \sinh(1 - x^2)$$

بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{d(1-x^2)}\{sinh(1-x^2)\} \times \frac{d}{dx}(1-x^2)$$
$$= -2x\cosh(1-x^2)$$

دیا ہے (ii)

$$f(x) = \ln(\sinh x)$$

بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$f'(x) = \frac{d}{d(\sinh x)}\ln(\sinh x) \times \frac{d}{dx}\sinh x$$
$$= \frac{1}{\sinh x} \times \cosh x$$
$$= \coth x$$

دیا ہے (iii)

$$y = \ln\left(\tanh\frac{x}{2}\right)$$

بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{d\left(\tanh\frac{x}{2}\right)}\left\{\ln\left(\tanh\frac{x}{2}\right)\right\} \times \frac{d}{d\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\tanh\frac{x}{2}\right) \times \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{\tanh\frac{x}{2}} \times sech^2\left(\frac{x}{2}\right) \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{\cosh\frac{x}{2}}{\sinh\frac{x}{2}} \times \frac{1}{cosh^2\left(\frac{x}{2}\right)} \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}}$$
$$= \frac{1}{\sinh x} = \operatorname{cosech} x$$

دیا ہے (iv)

$$h(x) = \frac{1}{4}\sinh(2x) - \frac{x}{2}$$

بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$h'(x) = \frac{1}{4}\frac{d}{d(2x)}\sinh(2x) \times \frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\cosh(2x) \times (2) - \left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{\cosh(2x) - 1}{2}$$
$$= \frac{2sinh^2 x}{2} = sinh^2 x$$

دیا ہے (v)

$$f(t) = arc\ tan(\sinh t)$$

بہ لحاظ t تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$f(t) = \frac{d}{d(\sinh t)}\{arc\ tan(\sinh t)\} \times \frac{d}{dt}(\sinh t)$$
$$= \frac{1}{1+(\sinh t)^2} \times \cosh t$$
$$= \frac{1}{\cosh^2 t} \times \cosh t$$
$$= \frac{1}{\cosh t} = \operatorname{sech} t$$

(vi) دیا ہے

$$y = x^{\cosh x}$$

دونوں طرف کا لوگر تھم (Logarithm) لینے پر ہمیں ملتا ہے

$$\ln y = \cosh x \ln x$$

بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \cosh x \times \frac{1}{x} + \sinh x \ln x$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}(\cosh x + x \sinh x \ln x)$$

(vii) دیا ہے

$$y = (\cosh x - \sinh x)^2$$

بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{d(\cosh x - \sinh x)}(\cosh x - \sinh x)^2 \times \frac{d}{dx}(\cosh x - \sinh x)$$
$$= 2(\cosh x - \sinh x)(\sinh x - \cosh x)$$
$$= -2(\cosh x - \sinh x)^2$$
$$= -2e^{-2x}$$

(viii) دیا ہے

$$y = \sinh^{-1}(\tan x)$$

بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$y' = \frac{d}{d(\tan x)}\sinh^{-1}(\tan x) \times \frac{d}{dx}(\tan x)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(\tan x)^2 + 1}} \times sec^2 x$$
$$= \frac{1}{\sqrt{sec^2 x}} \times sec^2 x$$
$$= \sec x$$

(ix) دیا ہے

$$y = \coth^{-1}(\sinh 2x)$$

بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{d}{d(\sin 2x)}\coth^{-1}(\sin 2x) \times \frac{d}{d(2x)}(\sin 2x) \times \frac{d}{dx}(2x) \\
&= \frac{1}{1-(\sin 2x)^2} \times (\cos 2x) \times 2 \\
&= \frac{1}{\cos^2 2x} \times 2\cos 2x \\
&= \frac{2}{\cos 2x} = 2\sec 2x
\end{aligned}$$

(x) دیا ہے

$$y = 2x\sinh^{-1} 2x - \sqrt{1+(2x)^2}$$

بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned}
y' &= 2x\frac{d}{d(2x)}(\sinh^{-1} 2x) \times \frac{d}{dx}(2x) + 2\sinh^{-1} 2x - \frac{d}{d\{1+(2x)^2\}}\left\{(1+(2x)^2)^{1/2}\right\} \\
&\qquad \times \frac{d}{dx}\{1+(2x)^2\} \\
&= 2x\frac{1}{\sqrt{1+(2x)^2}} \times 2 + 2\sinh^{-1} 2x - \frac{1}{2}\left\{(1+(2x)^2)^{-1/2}\right\} \times 8x \\
&= \frac{4x}{\sqrt{1+(2x)^2}} + 2\sinh^{-1} 2x - \frac{4x}{\sqrt{1+(2x)^2}} \\
&= 2\sinh^{-1} 2x
\end{aligned}$$

(xi) دیا ہے

$$y = a\,\mathrm{sech}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2 - x^2}$$

بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= a\frac{d}{d\left(\frac{x}{a}\right)}\left\{\mathrm{sech}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right\} \times \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{d}{d(a^2-x^2)}(a^2-x^2)^{1/2} \times \frac{d}{dx}(a^2-x^2) \\
&= a \times \frac{-1}{\frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \times \frac{1}{a} - \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}} \times (-2x) \\
&= \frac{-a^2}{x\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \\
&= \frac{x^2-a^2}{x\sqrt{a^2-x^2}} \\
&= -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}
\end{aligned}$$

مثال: ذیل میں دیے گئے ضابطوں کی قدر معلوم کرو:

(i) $\int \sinh(1-2x)\,dx$

(ii) $\int \cosh^2(x-1)\sinh(x-1)\,dx$

$\int \coth x\, dx$ (iii)

$\int x \operatorname{cosech}^2\left(\frac{x^2}{2}\right) dx$ (iv)

$\int \frac{\operatorname{cosech}\left(\frac{1}{x}\right)\coth\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx$ (v)

$\int_0^4 \frac{1}{25-x^2} dx$ (vi)

$\int \cosh^2 x\, dx$ (vii)

$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^3}} dx$ (viii)

$\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+8}} dx$ (ix)

$\int_0^2 \tanh 2x\, dx$ (x)

$\int_3^5 \frac{6}{\sqrt{x^2-4}} dx$ (xi)

حل:(i) ہمیں حاصل کرنا ہے

$$\int \sinh(1-2x)\, dx$$

مان لیجیے کہ $u = 1-2x \Rightarrow du = -2dx$ اس لیے

$$\int \sinh(1-2x)\, dx = -\frac{1}{2}\int \sinh \mathrm{u}\, \mathrm{du}$$
$$= -\frac{1}{2}\cosh u + C$$
$$= -\frac{1}{2}\cosh(1-2x) + C$$

(ii) ہمیں حاصل کرنا ہے

$$\int \cosh^2(x-1)\sinh(x-1)\, dx$$

مان لیجیے کہ $u = \cosh(x-1) \Rightarrow du = \sinh(x-1)\, dx$ اس لیے

$$\int \cosh^2(x-1)\sinh(x-1)\, dx = \int u^2\, du$$
$$= \frac{u^3}{3} + \mathrm{C}$$
$$= \frac{\cosh^3(x-1)}{3} + \mathrm{C}$$

(iii) ہمیں حاصل کرنا ہے

$$\int \coth x\, dx = \int \left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right) dx$$

اب مان لیجیے کہ $u = \sinh x \Rightarrow du = \cosh x\, dx$ اس لیے

$$\int \left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right) dx = \int \frac{du}{u}$$

$$= \ln u + C$$
$$= \ln(\sinh x) + C$$

(iv) ہمیں حاصل کرنا ہے

$$\int x \operatorname{cosech}^2\left(\frac{x^2}{2}\right) dx$$

مان لیجیے کہ $u = \frac{x^2}{2} \Rightarrow du = xdx$ اس لیے

$$\int x cosech^2\left(\frac{x^2}{2}\right) dx = \int cosech^2 u\, du$$
$$= -\, coth\, u + C$$
$$= -\, coth\left(\frac{x^2}{2}\right) + C$$

(v) ہمیں حاصل کرنا ہے

$$\int \frac{cosech\left(\frac{1}{x}\right) coth\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx$$

مان لیجیے کہ $u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = \frac{-1}{x^2} dx$ اس لیے

$$\int \frac{cosech\left(\frac{1}{x}\right) coth\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx = -\int cosech\, u\ \ coth\, u\, du$$
$$= -cosech\, u + C$$
$$= -cosech\ \left(\frac{1}{x}\right) + C$$

(vi) ہمیں حاصل کرنا ہے $\int_0^4 \frac{1}{25-x^2} dx$ اس لیے

$$\int_0^4 \frac{1}{25 - x^2} dx = \left[\sinh^{-1}\left(\frac{x}{5}\right)\right]_0^4$$
$$= \sinh^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$$

(vii) ہمیں حاصل کرنا ہے $\int \cosh^2 x\, dx$ اس لیے

$$\int \cosh^2 x\, dx = \int \frac{1 + \cosh 2x}{2} dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sinh 2x\right] + \mathrm{C}$$
$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sinh 2x + \mathrm{C}$$

(viii) ہمیں حاصل کرنا ہے

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 + (x^{3/2})^2}} dx$$

اب مان لیجیے کہ $u = x^{3/2} \Rightarrow \frac{2}{3}du = \sqrt{x}dx$ اس لیے

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^3}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \times \frac{2}{3}du$$
$$= \frac{2}{3}\sinh^{-1}(u) + C$$
$$= \frac{2}{3}\sinh^{-1}\left(x^{3/2}\right) + C$$
$$= \frac{2}{3}\ln\left(x^{3/2} + \sqrt{1+x^3}\right) + C$$

(ix) ہمیں حاصل کرنا ہے $\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+8}}dx$ اس لیے

$$\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+8}}dx = \int \frac{1}{(x+2)\sqrt{(x+2)^2+4}}dx$$
$$= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{(x+2)^2+4}}{|x+2|}\right) + \mathrm{C}$$

(x) ہمیں حاصل کرنا ہے $\int_0^2 \tanh 2x\, dx$ اس لیے

$$\int_0^2 \tanh 2x\, dx = \int_0^2 \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{1}{e^{2x}+e^{-2x}} \times 2(e^{2x}-e^{-2x})\, dx$$
$$= \frac{1}{2}[\ln(e^{2x}+e^{-2x})]_0^2$$
$$= \frac{1}{2}\ln(e^4+e^{-4}) - \frac{1}{2}\ln(2)$$
$$= \ln\sqrt{\frac{(e^4+e^{-4})}{2}}$$

(xi) ہمیں حاصل کرنا ہے $\int_3^5 \frac{6}{\sqrt{x^2-4}}dx$ اس لیے

$$\int_3^5 \frac{6}{\sqrt{x^2-4}}dx = \left[6\ln\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)\right]_3^5$$
$$= 6\ln\left(5+\sqrt{21}\right) - 6\ln\left(3+\sqrt{5}\right)$$
$$= 6\ln\left(\frac{5+\sqrt{21}}{3+\sqrt{5}}\right)$$

1.8 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے زائدی تفاعل کی بنیادی جانکاری حاصل کی اور پھر ان تفاعل کے تفرق اور تکمل حاصل کرنا سیکھا۔

1.9 کلیدی الفاظ(Key Words)

زائدی تفاعل، معکوس زائدی تفاعل، تفرق، مشتق، تکمل، جفت تفاعل، طاق تفاعل، سعت، دامنہ، قوت نما تفاعل

1.10 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

1.10.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. $\cosh x = \cdots\cdots$
2. $\sinh x = \cdots\cdots$
3. $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \cdots\cdots$
4. $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cdots\cdots$
5. $\int \cosh x\, dx = \cdots\cdots$
6. $\int \sinh x\, dx = \cdots\cdots$
7. $\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \cdots\cdots$
8. $\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \cdots\cdots$
9. $\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \cdots\cdots$

1.10.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

1. درج ذیل ضابطوں (Identities) کو ثابت کریں۔

a) $sinh(-x) = -sinh\, x$

b) $cosh(-x) = cosh\, x$

2. $cosh\, x + sinh\, x = e^x$
3. $cosh\, x + sinh\, x = e^x$
4. $coth^2x - 1 = cosech^2x$
5. $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$
6. $\cosh 2x = cosh^2x - sinh^2x$
7. $\tanh x = \frac{x^2-1}{x^2+1}$
8. $\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x} = e^{2x}$

درج ذیل کے تفرق حاصل کریں:

9. $f(x) = \tanh(1 + e^{2x})$
10. $f(x) = \cosh(\ln x)$
11. $y = x \coth(1 + x)$

$y = e^{\cosh 3x}$ .12

$f(t) = sech^2(e^t)$ .13

$y = \sinh(\cosh x)$ .14

$y = \tanh^{-1}\sqrt{x}$ .15

$y = x^2 \sinh^{-1}(2x)$ .16

$y = \operatorname{sech}^{-1}\sqrt{1-x^2}, x > 0$ .17

$y = \coth^{-1}\sqrt{x^2+1}$ .18

$y = \sinh(4x-8)$ .19

$y = \cosh(x^4)$ .20

$y = \sqrt{4x + cosh^2(5x)}$ .21

$y = \operatorname{sech} e^{2x}$ .22

$y = \sinh(\cos 3x)$ .23

$y = \sinh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ .24

$y = (\coth^{-1} x)^2$ .25

$y = \sinh^{-1}(\tanh x)$ .26

1.10.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

درج ذیل کے تکمل حاصل کریں:

$\int \sinh^6 x \cosh x\, dx$ .1

$\int \cosh(2x-3)\, dx$ .2

$\int \operatorname{cosech}^2(3x)\, dx$ .3

$\int_0^3 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\, dx$ .4

$\int \frac{dx}{\sqrt{1+9x^2}}$ .5

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ .6

$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+4x^2}}$ .7

$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2}$ .8

$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$ .9

1.11 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Calculus, H. Anton, I. Bivens, S. Davis, John Wiley & Sons, Inc. (10th Edition)
2. Integral Calculus, K. Ahmad, Real World Education Publishers Pvt Ltd, New Delhi

اکائی 2۔ اعلا رتبے کے مشتقات

(Higher Order Derivatives)

اکائی کے اجزا

2.0 تمہید

2.1 مقاصد

2.2 معیاری نتائج

2.3 عقلی تفاعل کے nویں مشتقات کے حساب

2.4 سائن (Sine) اور کو سائن (Cosine) کے پاورس کے مصنوعات کے nویں مشتقات کے حساب

2.5 اکتسابی نتائج

2.6 کلیدی الفاظ

2.7 نمونہ امتحانی سوالات

2.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

2.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

2.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

2.8 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں

2.0 تمہید(Introduction)

اگر f ایک دیا ہوا تفاعل ہے۔ تب اس کا تفرق f' بھی ایک دیا ہوا تفاعل ہو گا۔ جسے دوبارہ فرق کر سکتے ہیں۔ f' کا تفرق f کا دوسرا تفرق کہلاتا ہے۔ اور اس کو f'' سے مخصوص کیا جاتا ہے۔ f کے اعلا تفرق کو $f', f'', f''', \dots\dots, f^n$ سے مخصوص کیا جاتا ہے۔ اگر $y = f(x)$ ایک تفاعل ہے تب

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\dots, \frac{d^ny}{dx^n}, \dots$$
$$y_1, y_2, \dots\dots, y_n, \dots$$
$$f'(x), f''(x), f'''(x), \dots\dots, f^n(x), \dots$$
$$Df(x), D^2f(x), D^3f(x), \dots\dots, D^nf(x), \dots$$

کو اعلا تفرق سے مخصوص کیا جاتا ہے۔

مثال(1) تفاعل $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$ کے مختلف تفرق معلوم کرو۔

حل: دی گئی مساوات سے $y_1 = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$ اور اسی طرح

$$y_2 = 20x^3 - 60x^2 + 30x$$
$$y_3 = 60x^2 - 120x + 30$$
$$y_4 = 120x - 120$$
$$y_5 = 120$$

مثال(2) اگر $x = a(\theta + sin\,\theta)$ اور $y = a(1 - cos\,\theta)$ تو $\frac{d^2y}{dx^2}$ کی قدر معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات سے $\frac{dx}{d\theta} = a(1 + cos\,\theta)$ اور

$$\frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\sin\theta}{a(1 + cos\,\theta)}$$
$$= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$
$$= \tan\frac{\theta}{2}$$

مساوات(1) کو دوبارہ تفرق کرنے پر

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(tan\,\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}\frac{1}{a(1+cos\,\theta)}$$
$$= \frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}\frac{1}{2a\cos^2\frac{\theta}{2}}$$
$$= \frac{1}{4a}asec^4\frac{\theta}{2}$$

مثال(3) $\frac{d^2y}{dx^2}$کی قدر معلوم کرو،اگر $y = x^7 + tan\,x$ ہو۔

حل۔دیاہوا ہے

$$y = x^7 + tan\,x$$

تب

$$\frac{dy}{dx} = 7x^6 + sec^2\,x$$

اور

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(7x^6 + sec^2\,x)$$
$$= 42x^5 + 2\sec x\,sec\,x\tan x$$
$$= 42x^5 + 2\,sec^2\,x\tan x$$

مثال(4)اگر $y = A\,sin\,x + B\,cos\,x$ ہوتوثابت کیجیے کہ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ ہو گا۔

حل۔دی گئی مساوات $y = A\,sin\,x + B\,cos\,x$ ہے

$$y' = A\cos x - B\sin x$$
$$y'' = -(A\,sin\,x + B\,cos\,x) = -y$$

اس لیے

$$y'' + y = 0$$

2.1 مقاصد(Objectives)

- اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ مختلف تفاعلات کے اعلار تبے کے مشتقات حاصل کر سکیں۔

2.2 معیاری نتائج(Standard Results)

(1) $D^n(ax+b)^m$

فرض کرو کہ

$$y = (ax+b)^m$$
$$y_1 = ma(ax+b)^{m-1}$$

$$y_2 = m(m-1)a^2(ax+b)^{m-2}$$
$$y_3 = m(m-1)(m-2)a^3(ax+b)^{m-3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n = m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-n+1)a^n(ax+b)^{m-n}$$

اس لیے

$$D^n(ax+b)^m = m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-n+1)a^n(ax+b)^{m-n}$$

کورولری (1)۔ اگر $m = n$ تب $y_n = n!\,a^n$

کورولری(2)-اگر m ایک مثبت نمبر ہے اور n سے چھوٹا ہے، تب $y = 0$

کورولری(3)-اگر $m = -1$ تب

$$\begin{aligned} y_n &= (-1)(-2)\cdots\cdots(-n)a^n(ax+b)^{-n-1} \\ &= (-1)^n n!\,a^n(ax+b)^{-n-1} \\ &= \frac{(-1)^n n!\,a^n}{(ax+b)^{n+1}} \end{aligned}$$

کورولری(4)-

$$y = \log(ax+b) \Rightarrow\ y_1 = \frac{a}{ax+b}$$

اس لیے

$$\begin{aligned} y_n &= (-1)^{n-1}(n-1)!\,a^n(ax+b)^{-n} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\,a^n}{(ax+b)^n} \end{aligned}$$

(2)

$$D^n a^{mx}$$

فرض کرو کہ

$$\begin{aligned} \mathrm{y} &= a^{mx} \\ y_1 &= ma^{mx}\log a \\ y_2 &= m^2a^{mx}(\log a)^2 \end{aligned}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

اس طرح $$y_n = m^n a^{mx}(\log a)^n$$

اس لیے $$D^n a^{mx} = m^n a^{mx}(\log a)^n$$

کورولری– a کو e سے بدلنے پر

ہمیں ملتا ہے

$$D^n e^{mx} = m^n e^{mx}$$

(3) $D^n \sin(ax+b)$ اور $D^n\, cos(ax+b)$

فرض کرو کہ $y_1 = a\, cos(ax+b) = a \sin\left(ax+b+\frac{\pi}{2}\right)$

$$y_2 = a^2 \cos\left(ax+b+\frac{\pi}{2}\right) = a^2 \sin\left(ax+b+\frac{2\pi}{2}\right)$$

$$y_3 = a^3 \cos\left(ax+b+\frac{2\pi}{2}\right) = a^3 \sin\left(ax+b+\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_n = a^n \sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$$

اس لیے $D^n \sin(ax+b) = a^n \sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$

اس طرح $D^n\, cos(ax+b) = a^n \cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$

کورولری(1) - اگر $a=1$ اور $b=0$

تب $y = sin\, x$

کورولری(2) - اگر $a=1$ اور $b=0$، تب $y = cos\, x$، اس وجہ سے

$$y_n = \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

(4) $D^n e^{ax} \sin(bx+c)$ اور $D^n e^{ax} \cos(bx+c)$

فرض کرو کہ $y = e^{ax} \sin(bx+c)$

تب $y_1 = e^{ax}\{a \sin(bx+c) + b\cos(bx+c)\}$

فرض کرو کہ $a = r\, cos\, \varphi$، $b = r\, sin\, \varphi$

تب $\tan\varphi = \frac{b}{a}, r^2 = a^2+b^2$

اس طرح

$$y_1 = e^{ax}\{r\, cos\,\varphi \sin(bx+c) + r\, sin\,\varphi\cos(bx+c)\}$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = re^{ax}\sin(bx+c+\varphi)$$

اس طرح

$$y_2 = r^2 e^{ax}\sin(bx+c+2\varphi)$$
$$y_3 = r^3 e^{ax}\sin(bx+c+3\varphi)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n = r^n e^{ax}\sin(bx+c+n\varphi)$$

اس وجہ سے $$D^n e^{ax}\sin(bx+c) = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax}\sin\left(bx+c+n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

اسی طرح $$D^n e^{ax}\cos(bx+c) = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax}\cos\left(bx+c+n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

2.3 عقلی تفاعل کے nویں مشتقات کے حساب (Calculation of n[th] Derivatives of Rational Functions)

ایک عقلی تفاعل کے nویں مشتقات کو شمار کرنے لیے ہم جزوی مصنوعات میں توڑتے ہیں۔ بعض صورتوں میں ڈی ماٹور (De-Moivre) قضیہ مفید ہے۔

مثال(1): $f(x) = \frac{1}{x^2+5x+6}$ کے nویں مشتقات کو معلوم کرو۔

حل۔ فرض کرو کہ $y = \frac{1}{x^2+5x+6}$، تب

$$y = \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{(x+2)} - \frac{1}{(x+3)}$$

اس وجہ سے

$$y_n = \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+3)^{n+1}}$$
$$= (-1)^n n!\left[\frac{1}{(x+2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+3)^{n+1}}\right]$$

مثال(2): $f(x) = \frac{x^4}{(x-1)(x-2)}$ کے nویں مشتقات کو معلوم کرو۔

حل۔ فرض کرو کہ

$$y = \frac{x^4}{(x-1)(x-2)}$$
$$= x^2+3x+7-\frac{1}{x-1}+\frac{16}{x-2}$$

اس وجہ سے،

$$y_n = -\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} + \frac{16(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}$$
$$= (-1)^n n\left[-\frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{16}{(x-2)^{n+1}}, n > 2\right]$$

مثال(3): $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$ کے nویں مشتقات کو معلوم کرو۔

حل۔ فرض کرو کہ $y = \frac{1}{x^2+a^2}$، تب

$$y = \frac{1}{(x+ai)(x-ai)} = \frac{1}{2ai}\left[\frac{1}{(x-ai)} - \frac{1}{(x+ai)}\right]$$

اس وجہ سے $y_n = \frac{(-1)^n n}{2ai}\left[\frac{1}{(x-ai)^{n+1}} - \frac{1}{(x+ai)^{n+1}}\right]$

فرض کرو $x = r\cos\theta\,, a = r\sin\theta$، تب $r^2 = x^2 + a^2$ اور $\theta = tan^{-1}\frac{a}{x}$

اس طرح

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{(-1)^n n}{2air^{n+1}}[(\cos\theta - i\sin\theta)^{-n-1} - (\cos\theta + i\sin\theta)^{-n-1}] \\ &= \frac{(-1)^n n}{2air^{n+1}}[\cos(\mathrm{n}+1)\,\theta + i\sin(\mathrm{n}+1)\theta - \cos(\mathrm{n}+1)\,\theta + i\sin(\mathrm{n}+1)\theta] \\ &= \frac{(-1)^n n}{2air^{n+1}} 2i\, sin(n+1)\theta \\ &= \frac{(-1)^n n}{ar^{n+1}} sin(n+1)\theta = \frac{(-1)^n n}{a^{n+2}} sin(n+1)\theta\, sin^{n+1}\theta \end{aligned}$$

جہاں $\theta = tan^{-1}\frac{a}{x}$ ہے۔

2.4 سائن(Sine)اور کوسائن(Cosine)کے پاورس کے مصنوعات کے n مشتقات کے حساب

اس طرح کے مصنوعات کے nویں مشتقات کے لیے، ہم آزاد متغیر کے ایک سے زیادہ $sines$ اور $cosines$ کے رقم کے طور پر اظہار کرتے ہیں۔

مثال(1): $y = sin\,3x\,sin\,2x$ کے nویں مشتقات کو معلوم کرو۔

حل۔ فرض کرو کہ

$$y = sin\,3x\,sin\,2x$$

تب، $y = \frac{1}{2}[cos\,x - cos\,5x]$

اس وجہ سے

$$y_n = \frac{1}{2}\left[cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - 5^n\,cos\left(5x + \frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

مثال (2): $y = sin^4 x$ کے nویں مشتقات کو معلوم کرو۔

حل۔ فرض کرو کہ $y = sin^4 x$، تب

$$y = (sin^2 x)^2$$

$$= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{4}[1 - 2\cos 2x + cos^2 2x]$$
$$= \frac{1}{4}\left[1 - 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2}\right]$$
$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

اس وجہ سے

$$y_n = -\frac{1}{2}\cdot 2^n\, cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{8}\cdot 4^n\, cos\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right)$$
$$\Rightarrow \quad y_n = -2^{n-1}\, cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot 4^{n-1}\, cos\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

مثال(3) $y = sin^2 x cos^3 x$ کے nویں مشتقات کو معلوم کرو۔

حل۔ فرض کرو کہ $y = sin^2 x cos^3 x$ تب

$$y = sin^2 x cos^2 x \cos x$$
$$= \frac{1}{4} sin^2 2x \cos x$$
$$= \frac{1}{8}(1 - \cos 4x)\cos x$$
$$= \frac{1}{8}\cos x - \frac{1}{8}\cos 4x \cos x$$
$$= \frac{1}{8}\cos x - \frac{1}{16}(\cos 5x + \cos 3x)$$
$$= \frac{1}{16}(2\cos x - \cos 5x - \cos 3x)$$

اسی وجہ سے

$$y_n = \frac{1}{16}\left[2\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - 3^n\cos\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right) - 5^{\mathrm{n}}\cos\left(5x + \frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

مثال(4): اگر $y = \sin x + \cos nx$، ثابت کرو

$$y_k = n^k[1 + (-1)^k \sin 2nx]^{\frac{1}{2}}$$

حل۔ kواں مشتق

$$y_k = n^k\, sin\left(nx + \frac{k\pi}{2}\right) + n^k\, cos\left(nx + \frac{k\pi}{2}\right)$$
$$= n^k\left[sin\left(nx + \frac{k\pi}{2}\right) + cos\left(nx + \frac{k\pi}{2}\right)\right]$$

$$= n^k \left[\left\{sin\left(nx + \frac{k\pi}{2}\right) + cos\left(nx + \frac{k\pi}{2}\right)\right\}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$= n^k \left[sin^2\left(nx + \frac{k\pi}{2}\right) + cos^2\left(nx + \frac{k\pi}{2}\right) + 2\,sin\left(nx + \frac{k\pi}{2}\right)cos\left(nx + \frac{k\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$= n^k \left[1 + sin\,2\left(nx + \frac{k\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$= n^k[1 + sin(2nx + k\pi)]^{\frac{1}{2}}$$
$$= n^k[1 + sin\,2nx\,cos\,k\pi + cos\,2nx\,sin\,k\pi]^{\frac{1}{2}}$$
$$= n^k[1 + (-1)^k\,sin\,2nx]^{\frac{1}{2}}$$

لیبنیز کا قضیہ (Leibnitz's Theorem)

بیان (Statement): اگر u اور v متغیر x میں ایسے دو تفاعلات ہوں جن کے n مشتقات حاصل ہو سکتے ہوں، تب

$$(uv)_n = C_0^n u_n v + C_1^n u_{n-1}v_1 + C_2^n u_{n-2}v_2 + \cdots\cdots + C_r^n u_{n-r}v_r + \cdots\cdots + uv_n$$

جہاں پر n $C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ اشیا میں سے بیک وقت r اشیا کے اجتماعوں کی تعداد ہے۔ اس قضیہ کو ہم اگلی اکائی میں ثابت کریں گے۔

مثال (1): اگر $y = a\,cos(log\,x) + b\,sin(log\,x)$، ثابت کرو

$x^2y_2 + xy_1 + y = 0$ اور

$$x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$$

حل۔ دیا ہوا ہے

$$y = a\,cos(log\,x) + b\,sin(log\,x)$$
$$y_1 = -a\,sin(log\,x)\cdot\frac{1}{x} + b\,cos(log\,x)\cdot\frac{1}{x}$$
$$\Rightarrow \quad xy_1 = -a\,sin(log\,x) + b\,cos(log\,x)$$

دونوں جانب بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے۔

$$xy_2 + y_1 = -a\,cos(log\,x)\cdot\frac{1}{x} - b\,sin(log\,x)\cdot\frac{1}{x}$$
$$\Rightarrow \quad x^2y_2 + xy_1 = -[a\,cos(log\,x) + b\,sin(log\,x)]$$
$$\Rightarrow \quad x^2y_2 + xy_1 + y = 0$$

اس مساوات کو لیبنیز قضیہ سے n مرتبہ تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے۔

$$x^2y_{n+2} + C_1^n y_{n+1}\cdot 2x + C_2^n y_n\cdot 2 + xy_{n+1} + C_1^n y_n\cdot 1 + y_n = 0$$
$$\Rightarrow \quad x^2y_{n+2} + 2nxy_{n+1} + n(n-1)y_n + xy_{n+1} + ny_n + y_n = 0$$
$$\Rightarrow \quad x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$$

مثال (2): اگر $y = (sin^{-1}x)^2$، ثابت کرو

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 = 2$$

حل۔ ہمیں دیا گیا ہے
$$y = (sin^{-1} x)^2$$
$$y_1 = 2\, sin^{-1} x \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$$
$$\Rightarrow \quad (1-x^2){y_1}^2 = 4(sin^{-1} x)^2$$
$$\Rightarrow \quad (1-x^2){y_1}^2 = 4y$$

بالحاظ x تفرق کرنے پر

$$(1-x^2)2y_1y_2 - 2x{y_1}^2 = 4y_1$$
$$\Rightarrow \quad (1-x^2)y_2 - xy_1 = 2$$

اس مساوات کو لیبنیز قضیہ سے n مرتبہ تفرق کرنے پر، ہمیں ملتا ہے

$$(1-x^2)y_{n+2} + C_1^n y_{n+1}(-2x) + C_2^n y_n(-2) - (xy_{n+1} + C_1^n y_n \cdot 1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (1-x^2)y_{n+2} - n(n-1)y_n - xy_{n+1} - ny_n = 0$$
$$\Rightarrow \quad (1-x^2)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} - n^2y_n = 0$$

مثال(3): اگر $y = e^{m \sin^{-1} x}$، تب ثابت کرو کہ

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 - m^2y = 0 \quad \text{(i)}$$
$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (m^2+n^2)y_n = 0 \quad \text{(ii)}$$

حل۔ ہمیں دیا گیا ہے

$$y = e^{m \sin^{-1} x}$$
$$\Rightarrow \quad y_1 = e^{m \sin^{-1} x} \times \frac{m}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{my}{\sqrt{1-x^2}}$$

اس لیے

$$(1-x^2)^{1/2}y_1 = my$$
$$\Rightarrow \quad (1-x^2){y_1}^2 = m^2y^2$$
$$\Rightarrow \quad (1-x^2)y_2 - xy_1 - m^2y = 0$$

مساوات کے ہر ایک رکن کو لیبنیز قضیہ کی مدد سے n مرتبہ بالحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$(1-x^2)y_{n+2} + C_1^n y_{n+1}(-2x) + C_2^n y_n(-2) - [xy_{n+1} + C_1^n y_n \cdot 1] - m^2y_n = 0$$

یا
$$(1-x^2)y_{n+2} - 2nxy_{n+1} - n(n-1)y_n - xy_{n+1} - ny_n - m^2y_n = 0$$

اس وجہ سے

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (m^2+n^2)y_n = 0$$

مثال (4): $e^x(2x+3)^3$ کا nواں مشتق معلوم کرو۔

حل۔ یہاں $u = e^x$ اور $v = (2x+3)^3$ لینے پر اور $u_n = e^x$ اس کے ساتھ ہی

$$v_1 = 6(2x+3)^2$$
$$v_2 = 24(2x+3)$$
$$v_3 = 48, v_4, v_5, \cdots = 0$$

اب Leibnitz's تھیورم کی مدد سے ہمیں ملتا ہے

$$(u\cdot v)_n = C_0^n u_n \cdot v + C_1^n u_{n-1}\cdot v_1 + C_2^n u_{n-2}\cdot v_2 + C_3^n u_{n-3}\cdot v_3$$

$$(\mathrm{e}^x(2x+3)^3)_n = \mathrm{e}^x(2x+3)^3 + n\mathrm{e}^x\{6(2x+3)^2\} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\mathrm{e}^x\{24(2x+3)\}$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\mathrm{e}^x(48)$$
$$= \mathrm{e}^x[(2x+3)^3 + 6n(2x+3)^2 + 12n(n-1)(2x+3) + 8n(n-1)(n-2)]$$

مثال (5): اگر $y^{\frac{1}{m}} + y^{-\frac{1}{m}} = 2x$، تب ثابت کیجیے:

$$(x^2-1)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2-m^2)y_n = 0$$

حل- ہمیں دیا گیا ہے

$$y^{\frac{1}{m}} + y^{-\frac{1}{m}} = 2x$$

یا

$$y^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{y^{\frac{1}{m}}} = 2x$$

یا

$$y^{\frac{2}{m}} - 2xy^{\frac{1}{m}} + 1 = 2x$$

جو $y^{\frac{1}{m}}$ ایک دو درجی (Quadratic) مساوات ہے، اس لیے

$$y^{\frac{1}{m}} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2-4}}{2}$$
$$y^{\frac{1}{m}} = x \pm \sqrt{x^2-1}$$

یا

$$y = \left\{x \pm \sqrt{x^2-1}\right\}^m$$

log لینے پر

$$\log y = m\log\left\{x \pm \sqrt{x^2-1}\right\}$$

دونوں طرف تفرق کرنے پر

$$\frac{1}{\mathrm{y}}y_1 = m\frac{1}{x\pm\sqrt{x^2-1}}\left\{1 \pm \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right\}$$
$$= \pm\frac{m}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\Rightarrow \quad (x^2-1){y_1}^2 = m^2y^2$$

ایک مرتبہ اور تفرق کرنے پر

$$(x^2-1)2y_1y_2 + {y_1}^2(2x) = m^2(2yy_1)$$

$2y_1$ سے تقسیم کرنے پر

$$(x^2-1)y_2 + xy_1 - m^2y = 0$$

Leibnitz's تھیورم سے n بار تفرقکرنے پر

$$(x^2-1)y_{n+2}+ny_{n+1}(2x)+\frac{n(n-1)}{2}y_n(2)+xy_{n+1}+ny_n(1)-m^2y_n=0$$
$$(x^2-1)y_{n+2}+(2n+1)xy_{n+1}+(n^2-m^2)y_n=0$$

مثال (6): $y^{(n)}$معلوم کریں جب $y=x^2e^{3x}$ ہے۔

حل۔ فرض کرو کہ $v=x^2$ اور $u=e^{3x}$ ہے

$$y=uv$$

Leibnitz's کا استعمال کرنے پر

$$y^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v^{(1)}+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v^{(2)}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}u^{(n-3)}v^{(3)}+\cdots$$

یہاں پر $v=x^2$، $v^{(1)}=2x$، $v^{(2)}=2$ اور $v^{(3)}=0$ ہے۔

اس وجہ سے

$$y^{(n)}=(3^ne^{3x})x^2+n(3^{n-1}e^{3x})(2x)+\frac{n(n-1)}{2!}(3^{n-2}e^{3x})(2)+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(3^{n-3}e^{3x})(0)+\cdots$$
$$=3^{n-2}e^{3x}\{3^2x^2+3n(2x)+n(n-1)+0\}$$
$$\Rightarrow\quad y^{(n)}=3^{n-2}e^{3x}\{3^2x^2+3n(2x)+n(n-1)\}$$

مثال (7): ذیل میں دی گئی تفرقی مساوات کو n بار تفرق کریے۔

$$(1-x^2)y''+2xy'-3y=0$$

حل۔ Leibnitz's مساوات کا استعمال کرنے پر

$$\left\{(1+x^2)y^{(n+2)}+ny^{(n+1)}(2x)+\frac{n(n-1)}{2!}y^{(n)}(2)+0\right\}+\left\{2xy^{(n+1)}+ny^{(n)}(1)+0\right\}-3y^{(n)}=0$$
$$\Longrightarrow\quad (1+x^2)y^{(n+2)}+2nxy^{(n+1)}+n(n-1)y^{(n)}+2xy^{(n+1)}+2ny^{(n)}-3y^{(n)}=0$$
$$\Longrightarrow\quad (1+x^2)y^{(n+2)}+2(n+1)xy^{(n+1)}+(n^2-n+2n-3)y^{(n)}=0$$
$$\Longrightarrow\quad (1+x^2)y^{(n+2)}+2(n+1)xy^{(n+1)}+(n^2+n-3)y^{(n)}=0$$

مثال (8): $y=x^4\sin x$ کا 5th مشتق معلوم کریں۔

حل۔ اگر $y=x^4\sin x$ تب Leibnitz's مساوات سے $u=\sin x$ اور $v=x^4$ سے

$$y^{(n)} = \left\{\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)x^4\right\} + n\left\{\sin\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)4x^3\right\}$$
$$+\frac{n(n-1)}{2!}\left\{\sin\left(x+\frac{(n-2)\pi}{2}\right)12x^2\right\}$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left\{\sin\left(x+\frac{(n-3)\pi}{2}\right)24x\right\}$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\left\{\sin\left(x+\frac{(n-4)\pi}{2}\right)24\right\}$$
$$y^{(5)} = x^4\left\{\sin\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)\right\} + 20x^3\{\sin(x+2\pi)\} + \frac{5\times 4}{2!}\times 12x^2\left\{\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)\right\} + \frac{5\times 4\times 3}{3!}$$
$$\times 24x\{\sin(x+\pi)\} + \frac{5\times 4\times 3\times 2}{4!}\times 24\left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$
$$= x^4\left\{\sin\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)\right\} + 20x^3\{\sin(x+2\pi)\} + 120x^2\left\{\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)\right\} + 240x\{\sin(x+\pi)\}$$
$$+ 120\left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

چونکہ $\sin\left(x+\frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

$\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right) = -\cos x$ ، $\sin(x+2\pi) = \sin x$

اور $\sin(x+\pi) = -\sin x$

اس لیے

$$y^{(5)} = x^4\cos x + 20x^3\sin x - 120x^2\cos x - 240x\sin x + 120\cos x$$
$$= (x^4 - 120x^2 + 120)\cos x + (20x^3 - 240x)\sin x$$

مثال(9): اگر $y = tan^{-1} x$ ہو تو ثابت کرو کہ

$$(1+x^2)y_{n+1} + 2nxy_n + n(n-1)y_{n-1} = 0$$

حل۔ یہاں $y = tan^{-1} x$ ہے

$$\Rightarrow \qquad y_1 = \frac{1}{(1+x^2)}$$
$$\Rightarrow \qquad (1+x^2)y_1 = 1$$

Leibnitz's قضیہ کی مدد سے n بار تفرق کرنے پر

$$(1+x^2)y_{n+1} + ny_n(2x) + \frac{n(n-1)}{2}y_{n-1}(2) = 0$$
$$\Rightarrow \qquad (1+x^2)y_{n+1} + 2nxy_n + n(n-1)y_{n-1} = 0$$

مثال(10): اگر $f(x) = \tan x$ ہو تب ثابت کرو کہ

$$f^{(n)}(0) - C_2^n f^{(n-2)}(0) + C_4^n f^{(n-4)}(0) \cdots = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

حل۔ ہمارے پاس $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ہے

یا
$$f(x)\cos x = \sin x$$

دونوں طرف تفرق کرنے پر

$$C_0^n f^{(n)}(x)\cos x + C_1^n f^{(n-1)}(x)(-\sin x) + C_2^n f^{(n-2)}(x)(-\cos x) + C_3^n f^{(n-3)}(x)(\sin x) + C_4^n f^{(n-4)}(x)\cos x + \cdots = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$x = 0$ رکھنے پر ہمیں ملتا ہے

$$C_0^n f^{(n)}(0)\cos(0) + C_1^n f^{(n-1)}(0)(-\sin(0)) + C_2^n f^{(n-2)}(0)(-\cos(0)) + C_3^n f^{(n-3)}(0)(\sin(0)) + C_4^n f^{(n-4)}(0)\cos(0) + \cdots = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$f^{(n)}(0) + C_2^n f^{(n-2)}(0) + C_4^n f^{(n-4)}(0) + \cdots = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

2.5 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں آپ نے سیکھا کہ کس طرح مختلف تفاعلات کے اعلا رتبہ مشتق حاصل کیے جاتے ہیں۔

2.6 کلیدی الفاظ (Key Words)

اعلا رتبہ مشتق، لیبنیز قضیہ، تفرق

2.7 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

2.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. $D^n e^{ax}\sin(bx + c)$ کی قدر ہے

(a $(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax}\sin\left(bx + c + n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$

(b $(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax}\sin\left(bx + c + \tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$

(c $(a + b)^{\frac{n}{2}} e^{ax}\sin\left(bx + c + n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$

(d $(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}}\sin\left(bx + c + n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$

2. $D^n e^{ax}\cos(bx+c)$ کی قدر ہے

a) $(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\cos\left(bx+c+\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$

b) $(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\cos\left(bx+c+n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$

c) $(a+b)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\cos\left(bx+c+n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$

d) $(a+b)^{\frac{n}{2}}\cos\left(bx+c+n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$

3. $D^n\sin(ax+b)$ کی قدر ہے

a) $a^n\sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$

b) $a^n\sin\left(ax+b+\frac{\pi}{2}\right)$

c) $a^n\sin\left(ax+b+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)$

d) ان میں سے کوئی نہیں

4. $D^n\, cos(ax+b)$ کی قدر ہے

a) $a^n\cos(ax+b+n\pi)$

b) $a^{n-1}\cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$

c) $a^n\cos\left(ax+b+\frac{\pi}{2}\right)$

d) $a^n\cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$

2.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. $y=3x^4-2x^3-6x^2+6x+1$ کا چوتھا تفرق معلوم کرو۔

2. اگر $x^2+y^2=a^2$ ہو، $\frac{d^2y}{dx^2}$ کی قدر معلوم کرو۔

3. اگر $y=sin(sin\,x)$ ہو تو ثابت کرو کہ $y_2+y_1\,tan\,x+ycos^2x$

4. ثابت کرو کہ $y_4+4y=0$، اگر $y=e^{-x}\,cos\,x$ ہو۔

5. اگر $y=x+tan\,x$، ثابت کرو $y_2cos^2x-2y+2x=0$

6. ثابت کرو $x^3y_2=(y-yy_1)^2$، اگر $y=x\,log\frac{x}{a+bx}$

7. ثابت کرو $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2a^3xy}{(ax-y^2)^3}$، اگر $x^3+y^3=3axy$

8. اگر $y=A\,sin\,mx+B\,cos\,mx$، ثابت کرو $y_2+m^2=0$

9. ثابت کرو $2y_1y_3 = 3{y_2}^2$، اگر $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

10. معلوم کرو $\frac{d^2y}{dx^2}$، اگر $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$ اور $y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$ ہو۔

2.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. مندرجہ ذیل کے nویں مشتقات معلوم کرو۔

a) $y = \frac{x^2}{(x-1)^2(x+2)}$

b) $y = \frac{x^2}{(x+2)(2x+3)}$

c) $y = \frac{x}{1+3x+2x^2}$

d) $y = \frac{1}{1-5x+6x^2}$

e) $y = \frac{1}{2x^2+3x+1}$

f) $y = \frac{1}{a^2-x^2}$

2. مندرجہ ذیل کے nویں مشتقات کو معلوم کرو۔

a) $y = sin^2x cos^2x$

b) $y = cos^2x sin^3x$

c) $y = \cos x \cos 2x \cos 3x$

d) $y = sin^3x$

3. n^{th} مشتق معلوم کرو۔

a) x^2e^{3x}

b) $x^3\log x$

c) $e^x\log x$

d) $x^2\sin x$

e) x^ne^x

f) $\frac{x^n}{n+1}$

4. اگر $y = \sin^{-1}x$ تب ثابت کرو کہ $(1-x^2)y_2 - xy_1 = 0$ ہے اور پھر بہ لحاظ x اس مساوات کو n بار تفرق کرو۔

5. اگر $y = \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ ثابت کرو

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+3)xy_{n+1} - (n+1)^2y_n = 0$$

6. اگر $y = (x^2-1)^n$ تب ثابت کرو کہ

$$(x^2-1)y_{n+2}+2xy_{n+1}-n(n+1)y_n=0$$

.7 اگر $y=e^{m\sin^{-1}x}$ ثابت کرو

(a $(1-x^2)y_2-xy_1-m^2y=0$

(b $(1-x^2)y_{n+2}-(2n+1)xy_{n+1}-(n^2+m^2)y_n=0$

y_n کی قدر معلوم کرو جب $x=0$ ہے۔

2.8 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Calculus, H. Anton, I. Bivens, S. Davis, John Wiley & Sons, Inc. (10th Edition)
2. Integral Calculus, K. Ahmad, Real World Education Publishers Pvt Ltd, New Delhi

اکائی 3۔ لیبنیز قضیہ

(Leibnitz's Theorem)

اکائی کے اجزا

3.0 تمہید (Introduction)

پچھلی اکائی میں ہم نے تفاعلات کے اعلا رتبہ کے مشتق کے بارے میں پڑھا، اس اکائی میں ہم لیبنیز قضیہ کے بارے میں پڑھیں گے۔ اس قضیہ کا استعمال تفاعلات کے ضرب کے nویں مشتق کو حاصل کرنے کے لیے کیا جاتا ہے۔

3.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ اس قابل ہو جایں گے کہ تفاعلات کے ضرب کے nویں مشتق کو لیبنیز قضیہ کی مدد سے حاصل کر سکیں گے۔

3.2 لیبنیز قضیہ (Leibnitz's Theorem)

بیان: اگر u اور v دو ایسے تفاعلات ہیں جو n مرتبہ تفرق پزیر ہیں، تب

$$y_n = (u\cdot v)_n = \binom{n}{0} u_n \cdot v + \binom{n}{1} u_{n-1}\cdot v_1 + \binom{n}{2} u_{n-2}\cdot v_2 + \cdots$$
$$+ \binom{n}{r} u_{n-r}\cdot v_r + \cdots + \binom{n}{n} u\cdot v_n$$

جہاں n ایک مثبت صحیح اعداد (Integer) ہے، اور

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

ثبوت: اس قضیہ کو ثابت کرنے کے لیے ہم ریاضیاتی استقرا (Mathematical Induction) کا استعمال کریں گے۔

$$y_1 = (u\cdot v)_1 = u_1\cdot v + u\cdot v_1$$

اور

$$\begin{aligned} y_2 &= [(u\cdot v)_1]_1 = (u_1\cdot v + u\cdot v_1)_1 \\ &= u_2\cdot v + u_1\cdot v_1 + u_1\cdot v_1 + u\cdot v_2 \\ &= u_2\cdot v + 2u_1\cdot v_1 + u\cdot v_2 \end{aligned}$$

یا

$$y_2 = \tbinom{2}{0}u_2\cdot v + \tbinom{2}{1}u_1\cdot v_1 + \tbinom{2}{2}u\cdot v_2$$

بیان $n=1$ اور $n=2$ کے لیے صحیح ہے۔ اب مان لو کہ بیان $n=m$ کے لیے صحیح ہے۔ یعنی

$$y_m = (u\cdot v)_m = \binom{m}{0} u_m\cdot v + \binom{m}{1} u_{m-1}\cdot v_1 + \binom{m}{2} u_{m-2}\cdot v_2 + \cdots$$
$$+ \binom{m}{r} u_{m-r}\cdot v_r + \cdots + \binom{m}{m} u\cdot v_m$$

بہ لحاظ x تفرق کرنے پر

$$y_{m+1} = (u\cdot v)_{m+1} = \binom{m}{0}(u_{m+1}\cdot v + u_m\cdot v_1) + \binom{m}{1}(u_m\cdot v_1 + u_{m-1}\cdot v_2) + \cdots$$
$$+ \binom{m}{r-1} u_{m-r+1}\cdot v_r + \binom{m}{r}(u_{m-r}\cdot v_{r+1} + u_{m-r+1}\cdot v_r) + \cdots$$

$$+\binom{m}{m}(u_1\cdot v_m+u\cdot v_{m+1})$$
$$=\binom{m}{0}u_{m+1}\cdot v+\left(\binom{m}{0}+\binom{m}{1}\right)u_m\cdot v_1+\cdots+\left(\binom{m}{r-1}+\binom{m}{r}\right)u_{m-r+1}\cdot v_r+\cdots+\binom{m}{m}u\cdot v_{m+1}$$
$$\because \binom{m}{0}=\binom{m+1}{0}=1, \binom{m}{m}=\binom{m+1}{m+1}=1, \binom{m}{r-1}+\binom{m}{r}=\binom{m+1}{r}$$

اس لیے

$$y_{m+1}=(u\cdot v)_{m+1}=\binom{m+1}{0}u_{m+1}\cdot v+\binom{m+1}{1}u_m\cdot v_1+\binom{m+1}{2}u_{m-1}\cdot v_2$$
$$+\cdots+\binom{m+1}{r}u_{m-r+1}\cdot v_r+\cdots+\binom{m+1}{m+1}u\cdot v_{m+1}$$

اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ بیان اس ترح اعداد n کی سبھی مثبت قیمتوں کے لیے صحی ہے۔

3.2.1 لیبنیز قضیہ کے اطلاقات (Applications of Leibnitz Theorem)

اس حصہ میں ہم لیبنیز قضیہ کے استعمال کو بہت سی مثالوں کی مدد سے سیکھیں گے۔

مثال 1- لیبنیز کے قضیہ کے استعمال سے $y=x\sin x$ کا تیسرا مشتق حاصل کریں۔

حل- دیا ہے

$$y=x\sin x$$

فرض کرو کہ

$$u=x \text{ اور } v=\sin x$$

ہم جانتے ہیں کہ $n=3$ کے لیے لیبنیز کا قضیہ بیان کرتا ہے کہ

$$y_3=(u\cdot v)_3=\binom{3}{0}u_3\cdot v+\binom{3}{1}u_{3-1}\cdot v_1+\binom{3}{2}u_{3-2}\cdot v_2+\binom{3}{3}u\cdot v_3$$

اور

$$u=x \text{ اور } v=\sin x$$
$$u_1=1 \text{ اور } v_1=cos\,x$$
$$u_2=0 \text{ اور } v_2=-\sin x$$
$$u_3=0 \text{ اور } v_3=-\,cos\,x$$

اس طرح

$$\therefore y_3=(u\cdot v)_3=0+0+\binom{3}{2}1\cdot(-\sin x)+\binom{3}{3}x\cdot(-\,cos\,x)$$
$$\Rightarrow \quad y_3=(u\cdot v)_3=-3\sin x-x\,cos\,x$$

مثال 2- اگر $y=x^3e^{ax}$، تب y_n حاصل کریں۔

حل- دیا گیا ہے

$$y = x^3 e^{ax}$$

فرض کرو کہ

$$v = x^3 \text{ اور } u = e^{ax}$$

تب

$$v_1 = 3x^2 \text{ اور } u_1 = ae^{ax}$$
$$v_2 = 6x \text{ اور } u_2 = a^2 e^{ax}$$
$$v_3 = 6 \text{ اور } u_3 = a^3 e^{ax}$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$v_n = 0 \text{ اور } u_n = a^n e^{ax}$$

ہم جانتے ہیں کہ n کے لیے لیبنیز کا قضیہ بیان کرتا ہے کہ

$$y_n = (u \cdot v)_n = \binom{n}{0} u_n \cdot v + \binom{n}{1} u_{n-1} \cdot v_1 + \binom{n}{2} u_{n-2} \cdot v_2 + \cdots + \binom{n}{n} u \cdot v_n$$

اب اوپر حاصل کی گیئں قیمتیں درج کرنے پر حاصل ہے

$$\begin{aligned} y_n = (x^3 e^{ax})_n &= \binom{n}{0} (a^n e^{ax})(x^3) + \binom{n}{1} (a^{n-1} e^{ax})(3x^2) + \binom{n}{2} (a^{n-2} e^{ax})(6x) \\ &+ \binom{n}{3} (a^{n-3} e^{ax})(6) + \binom{n}{4} (a^{n-4} e^{ax})(0) + 0 \cdots \\ &= e^{ax} \left(a^n x^3 + 3na^{n-1} x^2 + 6 \times \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} x + 6 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3} \right) \\ &= e^{ax} (a^n x^3 + 3na^{n-1} x^2 + 3n(n-1) a^{n-2} x + n(n-1)(n-2) a^{n-3}) \end{aligned}$$

مثال3- اگر $y = x^2 e^x \cos x$، تب y_n حاصل کیجیے۔

حل- دیا گیا ہے

$$y = x^2 e^x \cos x$$

فرض کرو کہ

$$v = x^2 \text{ اور } u = e^x \cos x$$

تب

$$\begin{aligned} v_1 &= 2x \\ v_2 &= 2 \\ v_3 &= 0 \\ &\vdots \\ v_n &= 0 \end{aligned}$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$\frac{d^n}{dx^n} [e^{ax} \cos(bx + c)] = r^n e^{ax} \cos(bx + c + n\theta)$$

جہاں $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ اور $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right)$

$a = 1$، $b = 1$ اور $c = 0$ لینے پر ہمیں ملتا ہے

$$u_n = 2^{\mathrm{n}/2} e^x \cos\{x + n\tan^{-1}(1)\}$$

ہم جانتے ہیں کہ n کے لیے لیبنیز کا قضیہ بیان کرتا ہے کہ

$$y_n = (u \cdot v)_n = \binom{n}{0} u_n \cdot v + \binom{n}{1} u_{n-1} \cdot v_1 + \binom{n}{2} u_{n-2} \cdot v_2 + \cdots + \binom{n}{n} u \cdot v_n$$

اب اوپر حاصل کی گئی قیمتیں درج کرنے پر حاصل ہے

$$\begin{aligned}
y_n = (e^x \cos x \cdot x^2)_n &= \binom{n}{0}\left[2^{\frac{\mathrm{n}}{2}} e^x \cos\{x + n\tan^{-1}(1)\}\, x^2\right] \\
&\quad + \binom{n}{1}\left[2^{\frac{(\mathrm{n}-1)}{2}} e^x \cos\{x + (n-1)\tan^{-1}(1)\} \cdot 2x\right] \\
&\quad + \binom{n}{2}\left[2^{\frac{(\mathrm{n}-2)}{2}} e^x \cos\{x + (n-2)\tan^{-1}(1)\} \cdot 2\right] + 0 + \cdots \\
&= 2^{\frac{\mathrm{n}}{2}} x^2 e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) + n \cdot 2^{\frac{(\mathrm{n}-1)}{2}} \cdot 2x e^x \cos\left(x + \frac{(n-1)\pi}{4}\right) \\
&\quad + \frac{n(n-1)}{2} \times 2^{\frac{(\mathrm{n}-2)}{2}} \cdot 2e^x \cos\left(x + \frac{(n-2)\pi}{4}\right) \\
&= 2^{\frac{(\mathrm{n}-2)}{2}} e^x \left[2x^2 \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) + 2^{\frac{3}{2}} n x \cos\left(x + \frac{(n-1)\pi}{4}\right) + n(n-1)\cos\left(x + \frac{(n-2)\pi}{4}\right)\right]
\end{aligned}$$

مثال4- اگر $y = x^{n-1}\log x$، تب y_n حاصل کریں۔

حل-   دیا گیا ہے

$$y = x^{n-1}\log x$$

اگر ہم $u = x^{n-1}$ اور $v = \log x$ لیتے ہوں تب حاصل ہے

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{1}{x} \text{ اور } u_1 = (n-1)x^{n-2} \\
v_2 &= -\frac{1}{x^2} \text{ اور } u_2 = (n-1)(n-2)x^{n-3} \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
v_m &= (-1)^{m-1}\frac{(m-1)!}{x^m} \text{ اور } u_m = (n-1)(n-2)\cdots(n-m)x^{n-m-1} \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
v_n &= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} \text{ اور } u_n = 0
\end{aligned}$$

اب اوپر حاصل کی گئی قیمتیں لیبنیز قضیہ میں درج کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned}
y_n = (x^{n-1}\log x)_n &= \binom{n}{0}(0)\log x + \binom{n}{1}(n-1)!\left(\frac{1}{x}\right) + \binom{n}{2}\frac{(n-1)!}{1!}x\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\
&\quad + \binom{n}{3}\frac{(n-1)!}{2!}x^2\left(\frac{2}{x^3}\right) + \cdots + \binom{n}{n}(x^{n-1})(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} \\
&= \frac{(n-1)!}{x}\left[1 - \left\{1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}\right\}\right] \\
&= \frac{(n-1)!}{x}[1 - (1-1)^n]
\end{aligned}$$

$$= \frac{(n-1)!}{x}$$

مثال5۔ اگر $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$،تب ثابت کریں کہ

$$x^2y_2 + ny_1 + y = 0$$

اور
$$x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$$

حل۔ دیا گیا ہے کہ

$$y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x) \qquad ...(1)$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = -a\sin(\log x)\frac{1}{x} + b\cos(\log x)\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = \frac{1}{x}\{-a\sin(\log x) + b\cos(\log x)\}$$

$$\Rightarrow \quad xy_1 = -a\sin(\log x) + b\cos(\log x) \qquad ...(2)$$

دونوں طرف سے بہ لحاظ x تفرق کرنے پر

$$xy_2 + y_1 = -a\cos(\log x)\frac{1}{x} - b\sin(\log x)\frac{1}{x}$$

یا
$$xy_2 + y_1 = -\tfrac{1}{x}\{a\cos(\log x) + b\sin(\log x)\}$$

مساوات (1) کے استعمال سے

$$xy_2 + y_1 = -\frac{y}{x}$$

یا
$$x^2y_2 + xy_1 = -y$$

یا
$$x^2y_2 + xy_1 + y = 0 \qquad ...(3)$$

اب مساوات(3) کو لیبنیز قضیہ کی مدد سے n مرتبہ تفرق کرنے پر، ہمیں حاصل ہے

$$x^2y_{n+2} + \binom{n}{1}y_{n+1}2x + 2\binom{n}{2}y_n + xy_{n+1} + \binom{n}{1}y_n + y_n = 0$$
$$x^2y_{n+2} + 2nxy_{n+1} + n(n-1)y_n + xy_{n+1} + ny_n + y_n = 0$$
$$x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$$

مثال6۔ اگر $y = \cos(m\sin^{-1}x)$،تب ثابت کیجیے:

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} + (m^2-n^2)y_n = 0$$

اور $y_n(0)$ حاصل کریں۔

حل۔ دیا گیا ہے

$$y = \cos(m\sin^{-1}x) \qquad ...(1)$$

$$y_1 = -\sin(m\sin^{-1}x)\frac{m}{\sqrt{(1-x^2)}} \qquad ...(2)$$

$\sqrt{(1-x^2)}$ سے ضرب دینے پر

$$\sqrt{(1-x^2)}y_1 = -m\sin(m\sin^{-1}x)$$

دونوں طرف مربع کرنے پر

$$(1-x^2)y_1 = m^2\sin^2(m\sin^{-1}x)$$

$$= m^2\{1-cos^2(m\sin^{-1}x)\}$$

$$= m^2 - m^2 cos^2(m\sin^{-1}x)$$

$$\Rightarrow \qquad (1-x^2)y_1 = m^2 - m^2y^2$$

بہ لحاظ x تفرق کرنے پر

$$2(1-x^2)y_1y_2 - 2xy_1{}^2 = -2m^2yy_1$$

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0 \qquad ...(3)$$

لیبنیز قضیہ کی مدد سے n مرتبہ تفرق کرنے پر

$$(1-x^2)y_{n+2} + \binom{n}{1}y_{n+1}(-2x) + \binom{n}{2}y_n(-2) - xy_{n+1} + \binom{n}{1}y_n(-1) + m^2y_n = 0$$

$$\Rightarrow \qquad (1-x^2)y_{n+2} - 2nxy_{n+1} - 2\times\frac{n(n-1)}{2}y_n - xy_{n+1} - ny_n + m^2y_n = 0$$

$$\Rightarrow \qquad (1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - n^2y_n + ny_n - ny_n + m^2y_n = 0$$

$$\Rightarrow \qquad (1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} + (m^2-n^2)y_n = 0 \qquad ...(4)$$

مساوات (4) میں $x = 0$ رکھنے پر

$$y_{n+2}(0) + (m^2-n^2)y_n(0) = 0$$

$$y_{n+2}(0) = (n^2-m^2)y_n(0) \qquad ...(5)$$

مساوات (1) سے $\quad \mathrm{y}(0) = 1$

مساوات (2) سے $\quad \mathrm{y}_1(0) = 0$

مساوات (3) سے $\quad \mathrm{y}_2(0) = -m^2\mathrm{y}(0) = -m^2$

مساوات (5) میں $n = 1,2,3,4,\cdots$ رکھنے پر

$$\mathrm{y}_3(0) = (1^2-m^2)y_1(0) = 0$$
$$\mathrm{y}_4(0) = (2^2-m^2)y_2(0) = -m^2(2^2-m^2)$$
$$\mathrm{y}_5(0) = (3^2-m^2)y_3(0) = 0$$
$$\mathrm{y}_6(0) = (4^2-m^2)y_4(0) = -m^2(2^2-m^2)(4^2-m^2)$$

عام انداز میں ہم اسے اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$y_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{اگر } n \text{ طاق } (odd) \text{ ہے} \\ -m^2(2^2-m^2)(4^2-m^2)\cdots\{(\mathrm{n}-1)^2-m^2\}, & \text{اگر } n \text{ جفت } (even) \text{ ہے} \end{cases}$$

مثال 7- اگر $y = (\sin^{-1}x)^2$، تب ثابت کرو کہ

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - n^2y_n = 0$$

حل- دیا گیا ہے کہ

$$y = (\sin^{-1} x)^2 \qquad ...(1)$$

مساوات (1) بہ لحاظ x تفرق کرنے پر

$$y_1 = 2\sin^{-1} x \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

یا

$$y_1\sqrt{1-x^2} = 2\sin^{-1} x$$

دونوں طرف مربع کرنے پر

$$y_1{}^2(1-x^2) = 4(\sin^{-1} x)^2$$

مساوات (1) کا استعمال کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$y_1{}^2(1-x^2) - 4y = 0 \qquad ...(2)$$

مساوات(2) کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$2(1-x^2)y_1y_2 - 2xy_1{}^2 - 4y_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0 \qquad ...(3)$$

مساوات (3) کو لیبنیز قضیہ کی مدد سے n مرتبہ بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$(1-x^2)y_{n+2} + \binom{n}{1} y_{n+1}(-2x) + \binom{n}{2} y_n(-2) - \left\{xy_{n+1} + \binom{n}{1} y_n\right\} = 0$$

یا

$$(1-x^2)y_{n+2} - 2nxy_{n+1} - n(n-1)y_n - xy_{n+1} - ny_n = 0$$

یا

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - n^2y_n = 0$$

یہ ثابت ہوا۔

مثال8- اگر $y = \frac{\log x}{x}$، تب ثابت کرو کہ

$$y_n = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left(\log x - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n}\right)$$

حل- دیا گیا ہے

$$y = \frac{\log x}{x}$$

فرض کرو کہ

$$v = \log x \text{ اور } u = \frac{1}{x}$$

تب حاصل ہے

$$v_1 = \frac{1}{x} \quad \text{اور} \quad u_1 = -\frac{1}{x^2}$$

$$v_2 = -\frac{1}{x^2} \quad \text{اور} \quad u_2 = \frac{2}{x^3}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$v_n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \text{ اور } u_n = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

ہم جانتے ہیں کہ n کے لیے لیبنیز کا قضیہ بیان کرتا ہے کہ

$$y_n = (u \cdot v)_n = \binom{n}{0} u_n \cdot v + \binom{n}{1} u_{n-1} \cdot v_1 + \binom{n}{2} u_{n-2} \cdot v_2 + \cdots + \binom{n}{n} u \cdot v_n$$

اب اوپر حاصل کی گئی قیمتیں درج کرنے پر

$$\begin{aligned} y_n = \left(\frac{\log x}{x}\right)_n &= \binom{n}{0}\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \times (\log x) + \binom{n}{1}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \times \left(\frac{1}{x}\right) \\ &\quad + \binom{n}{2}\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-1}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \cdots + \binom{n}{n}\left(\frac{1}{x}\right) \times \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \times (\log x) + \frac{(-1)^{n-1} n(n-1)!}{x^{n+1}} + \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{(-1)^{n-1}(n-2)!}{x^{n+1}} + \cdots \\ &\quad + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^{n+1}} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left(\log x - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

مثال 9- اگر $y = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$، تب ثابت کرو کہ

$$(1+x^2)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + n^2 y_n = 0$$

$y_n(0)$ حاصل کریں۔

حل- دیا گیا ہے

$$y = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \qquad \ldots(1)$$

اور

$$y(0) = 0$$

مساوات (1) کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \end{aligned}$$

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}، \; y_1(0) = 1 \qquad \ldots(2)$$

یا

$$y_1\sqrt{1+x^2} = 1$$

دونوں طرف مربع کرنے پر

$${y_1}^2(1+x^2) = 1 \qquad \ldots(3)$$

مساوات (3) کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$2(1+x^2)y_1y_2 + 2x{y_1}^2 = 0$$

یا

$$(1+x^2)y_2 + xy_1 = 0 \qquad \ldots(4)$$

مساوات(4) کو لیبنیز قضیہ کی مدد سے n مرتبہ بالحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$(1+x^2)y_{n+2}+\binom{n}{1}y_{n+1}(2x)+\binom{n}{2}y_n(2)+xy_{n+1}+\binom{n}{1}y_n=0$$

یا
$$(1+x^2)y_{n+2}+2nxy_{n+1}+n(n-1)y_n+xy_{n+1}+ny_n=0$$

یا
$$(1+x^2)y_{n+2}+(2n+1)xy_{n+1}+n^2y_n=0 \qquad ...(5)$$

مساوات (5) میں $x=0$ رکھنے پر، ہمیں ملتا ہے

$$y_{n+2}(0)+n^2y_n(0)=0$$

یا
$$y_{n+2}(0)=-n^2y_n(0) \qquad ...(6)$$

مساوات(6) میں $n=1,2,3,\cdots$ رکھنے پر

$$\begin{aligned}
y_3(0)&=-y_1(0)=-1^2[\because y_1(0)=1]\\
y_4(0)&=-2^2y_2(0)=0 \quad [\because y_2(0)=0]\\
y_5(0)&=-3^2y_3(0)=(-3^2)(-1^2)=1^2\cdot 3^2\\
y_6(0)&=-4^2y_4(0)=0\\
y_7(0)&=-5^2y_5(0)=(-5^2)(-3^2)(-1^2)=(-1)1^2\cdot 3^2\cdot 5^2
\end{aligned}$$

عام انداز میں ہم اسے اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$y_n(0)=\begin{cases}0, & \text{اگر } n \text{ جفت } (even) \text{ ہے}\\ (-1)^{\frac{(n-1)}{2}}1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(n-2)^2, & \text{اگر } n \text{ طاق } (odd) \text{ ہے}\end{cases}$$

مثال10- اگر $y^{\frac{1}{m}}+y^{-\frac{1}{m}}=2x$، تب ثابت کریں

$$(x^2-1)y_2+xy_1-m^2y=0$$

نیز بتلاؤ کہ

$$(x^2-1)y_{n+2}+(2n+1)xy_{n+1}+(n^2-m^2)y_n=0$$

حل- دیا گیا ہے

$$y^{\frac{1}{m}}+y^{-\frac{1}{m}}=2x \qquad ...(1)$$

یا
$$y^{\frac{1}{m}}+\frac{1}{y^{\frac{1}{m}}}=2x$$

$$\Rightarrow \quad y^{\frac{2}{m}}-2xy^{\frac{1}{m}}+1=0 \qquad ...(2)$$

جو $y^{\frac{1}{m}}$ ایک دو درجی (Quadratic) مساوات ہے، اس لیے

$$y^{\frac{1}{m}}=\frac{2x\pm\sqrt{4x^2-4}}{2}$$

$$y^{\frac{1}{m}}=x\pm\sqrt{x^2-1}$$

یا
$$y=\left\{x\pm\sqrt{x^2-1}\right\}^m \qquad ...(3)$$

اگر
$$y=\left\{x+\sqrt{x^2-1}\right\}^m \qquad ...(4)$$

مساوات (4) کو بالحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہے

$$y_1 = m\left\{x+\sqrt{x^2-1}\right\}^{m-1}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x\right)$$

$$= m\left\{x+\sqrt{x^2-1}\right\}^{m-1}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = m\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^m}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$y_1 = m\frac{y}{\sqrt{x^2-1}} \qquad ...(5)$$

اب مساوات (3) سے، اگر

$$y = \left\{x-\sqrt{x^2-1}\right\}^m \qquad ...(6)$$

مساوات (6) کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہے

$$y_1 = m\left\{x-\sqrt{x^2-1}\right\}^{m-1}\left(1-\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x\right)$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = -m\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^m}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = -m\frac{y}{\sqrt{x^2-1}} \qquad ...(7)$$

مساوات (5) یا (7) کا دونوں طرف مربع کرنے پر

$$\Rightarrow \quad {y_1}^2 = m^2\frac{y^2}{x^2-1}$$

$$\Rightarrow \quad (x^2-1){y_1}^2 = m^2y^2 \qquad ...(8)$$

مساوات (8) کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہے

$$2(x^2-1)y_1y_2 + 2x{y_1}^2 = 2m^2yy_1$$

$$(x^2-1)y_2 + xy_1 - m^2y = 0 \qquad ...(9)$$

مساوات (9) کو لیبنیز قضیہ کی مدد سے n مرتبہ بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہے

$$(x^2-1)y_{n+2} + \binom{n}{1}y_{n+1}(2x) + \binom{n}{2}y_n(2) + xy_{n+1} + \binom{n}{1}y_n - m^2y_n = 0$$

یا

$$(x^2-1)y_{n+2} + 2nxy_{n+1} + n(n-1)y_n + xy_{n+1} + ny_n - m^2y_n = 0$$

$$(x^2-1)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2-m^2)y_n = 0$$

مثال 11- اگر $y = e^{m\sin^{-1}x}$، تب ثابت کرو کہ

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (m^2+n^2)y_n = 0$$

$y_n(0)$ بھی حاصل کیجیے۔

حل- ہمیں دیا گیا ہے

$$y = e^{m\sin^{-1}x} \qquad ...(1)$$

مساوات (1) کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر

$$y_1 = e^{m\sin^{-1}x} \times \frac{m}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

مساوات (1) کے استعمال سے

$$y_1 = \frac{my}{\sqrt{(1-x^2)}} \qquad \text{...(2)}$$

$$\sqrt{(1-x^2)}y_1 = my$$

دونوں طرف مربع کرنے پر

$$(1-x^2){y_1}^2 = m^2y^2 \qquad \text{...(3)}$$

مساوات (3) کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہے

$$2(1-x^2)y_1y_2 - 2x{y_1}^2 = 2m^2yy_1$$

یا

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 - m^2y = 0 \qquad \text{...(4)}$$

مساوات (9) کو لیبنیز قضیہ کی مدد سے n مرتبہ بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہے

$$(1-x^2)y_{n+2} + \binom{n}{1}y_{n+1}(-2x) + \binom{n}{2}y_n(-2) - xy_{n+1} - \binom{n}{1}y_n - m^2y_n = 0$$

یا

$$(1-x^2)y_{n+2} - 2nxy_{n+1} - n(n-1)y_n - xy_{n+1} - ny_n - m^2y_n = 0$$

یا

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (m^2+n^2)y_n = 0 \qquad \text{...(5)}$$

$x = 0$ مساواتوں (1)،(2)،(4) اور (5) میں درج کرنے پر

$$y(0) = e^{m\sin^{-1}0} = e^0 = 1 \qquad \text{...(6)}$$

$$y_1(0) = \frac{my(0)}{1} = m\cdot 1 = m \qquad \text{...(7)}$$

$$y_2(0) - m^2y(0) = 0 \Rightarrow y_2(0) = m^2y(0) = m^2 \qquad \text{...(8)}$$

$$y_{n+2}(0) - (m^2+n^2)y_n(0) = 0 \Rightarrow y_{n+2}(0) = (m^2+n^2)y_n(0) \qquad \text{...(9)}$$

مساوات (9) میں $n = 1, 2, 3, \cdots$ درج کرنے پر

$$\begin{aligned}
y_3(0) &= (m^2+1^2)y_1(0) = (m^2+1^2)m \\
y_4(0) &= (m^2+2^2)y_2(0) = (m^2+2^2)m^2 \\
y_5(0) &= (m^2+3^2)y_3(0) = (m^2+3^2)(m^2+1^2)m \\
y_6(0) &= (m^2+4^2)y_4(0) = (m^2+4^2)(m^2+2^2)m^2 \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

عام انداز میں ہم اسے اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$y_n(0) = \begin{cases} m(m^2+1^2)(m^2+3^2)\cdots[m^2+(n-2)^2], & \text{اگر } n \text{ طاق } (odd) \text{ ہے} \\ m^2(m^2+2^2)(m^2+4^2)\cdots[m^2+(n-2)^2], & \text{اگر } n \text{ جفت } (even) \text{ ہے} \end{cases}$$

3.3 اکتسابی نتائج(Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے لیبنیز قضیہ کو پڑھا اور اس کو ثابت کیا۔ ہم نے اس قضیہ کے استعمال سے تفاعلات کے ضرب کا nواں مشتق حاصل کیا۔

3.4 کلیدی الفاظ(Key Words)

nواں مشتق، تفاعلات کا ضرب، لیبنیز قضیہ

3.5 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

3.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. $D^n\{\sin(ax+b)\}$ کی قیمت ہے

(a) $a^n \sin(ax+b+n\pi)$ (b) $a^n \cos(ax+b+n\pi)$

(c) $a^n \sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$ (d) $a^n \cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$

2. لیبنیز قضیہ کا استعمال ...... کا nواں مشتق حاصل کرنے میں کیا جاتا ہے۔

(a) دو تفاعلات کے جمع (b) دو تفاعلات کے فرق(Difference)

(c) دو تفاعلات کے ضرب (d) ان میں سے کوئی نہیں

3. لیبنیز قضیہ کو بیان کیجیے۔

4. $(u\cdot v)_n$ کے پھیلاؤ(Expansion) میں $(r+1)^{\text{th}}$ ٹرم ہے

(a) $\binom{n}{r+1}u_{n-r}v_r$ (b) $\binom{n+1}{r}u_{n-r}v_r$

(c) $\binom{n}{r}u_{n-r}v_r$ (d) $\binom{n}{r-1}u_n v_{r-r}$

3.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

1. اگر $y=\tan^{-1}x$، تب ثابت کرو

$$(1-x^2)y_2-2xy_1=0$$

2. درج ذیل کا nواں مشتق حاصل کیجیے:

(i) $e^{2x}(ax+b)^3$

(ii) $x^3\cos x$

3. اگر $y=e^{ax}\sin bx$، ثابت کرو کہ

$$y_2-2ay_1(a^2+b^2)y=0$$

4. اگر $y = \sin(m \sin^{-1} x)$، تب ثابت کرو کہ

$$(1 - x^2)y_2 - xy_1 + m^2 y = 0$$

5. درج ذیل مساوات کو n مرتبہ بہ لحاظ x تفرق کریں

(i) $(1 - x^2)y_2 - xy_1 + a^2 y = 0$

(ii) $x^2 y_2 - xy_1 + (a^2 - m^2)y = 0$

3.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. اگر $y = e^{\tan^{-1} x}$، تب ثابت کرو کہ

$$(1 + x^2)y_{n+2} + \{(n + 1)x - 1\}y_{n+1} + n(n + 1)y_n = 0$$

2. اگر $y = \tan^{-1} x$، تب ثابت کرو کہ

$$(1 + x^2)y_{n+2} + 2(n + 1)xy_{n+1} + n(n + 1)y_n = 0$$

اور پھر $y_n(0)$ حاصل کریں۔

3. اگر $y = \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^m$، تب $y_n(0)$ حاصل کریں۔

3.6 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Calculus, H. Anton, I. Bivens, S. Davis, John Wiley & Sons, Inc. (10th Edition)
2. Integral Calculus, K. Ahmad, Real World Education Publishers Pvt Ltd, New Delhi

اکائی 4۔ کانکیوٹی، انفلیکشن نقاط اور ایسمپٹوٹس

(Concavity, Inflexion Points and Asymptotes)

اکائی کے اجزا

4.0 تمہید(Introduction)

پچھلے درجوں میں آپ منحنی کے عظیم قدریں(Maxima)اور قلیل قدریں(Minima) کے بارے میں پڑھا ہے۔ اس اکائی میں ہم کسی منحنی کی کانکیوٹی(Concavity)اورانفلیکشن نقاط(Points of Inflexion)حاصل کریں گے۔ آپ اپنی پچھلی کلاسز میں مماس(Tangents) اور عمود(Normal) کے بارے میں بھی پڑھ چکے ہیں۔ یہاں آپ کسی منحنی کے ایسمپٹوٹ کے بارے میں جانکاری حاصل کریں گے۔

4.1 مقاصد(Objectives)

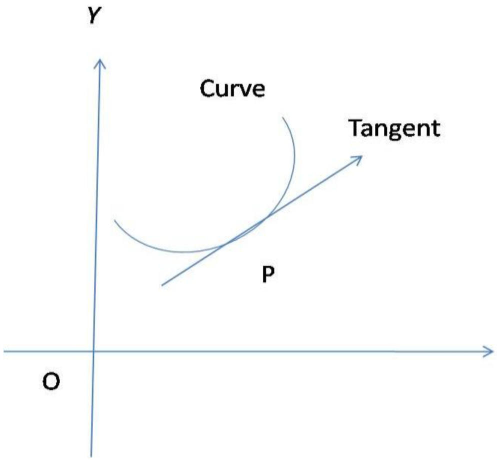
اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ

- کسی منحنی کی کانکیوٹی(Concavity)اورانفلیکشن نقاط(Points of Inflexion) حاصل کر سکیں۔
- کسی منحنی کے ایسمپٹوٹس حاصل کر سکیں۔

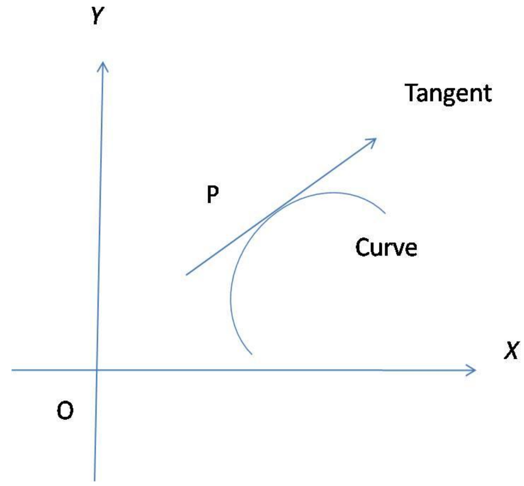
4.2 کانکیوٹی اورانفلیکشن نقاط(Concavity and Inflexion Points)

ہم درج ذیل منحنیوں کے مشاہدے کے ساتھ شروع کرتے ہیں۔

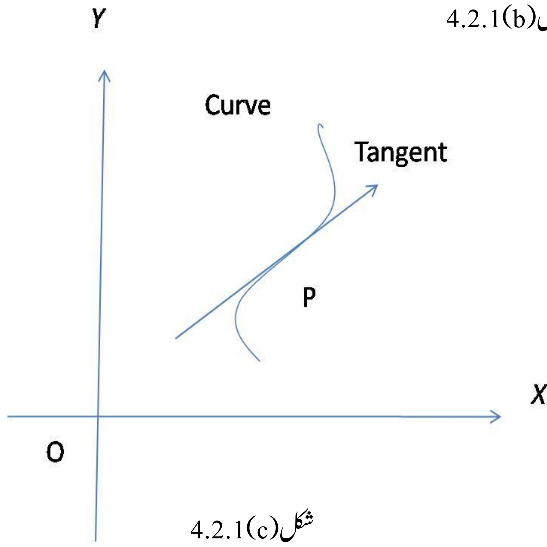
1. شکل(a)4.2.1 میں ہم دیکھتے ہیں کہ منحنی نقطہ P پر مماس کو پار نہیں کرتی ہے اور منحنی کا ایک حصہ نقطہ P پر مماس کے اوپر رہتا ہے۔ یہاں ہم کہتے ہیں کہ منحنی نقطہ P پر اوپر کی طرف کانکیو(Concave)ہے یا نیچے کی طرف کانویکس (Convex)ہے۔
2. دوسری شکل(b)4.2.1 میں ہم دیکھتے ہیں کہ منحنی کا ایک حصہ نقطہ P پر مماس کے نیچے رہتا ہے۔ یہاں ہم کہتے ہیں کہ منحنی نقطہ P پر نیچے کی طرف کانکیو(Concave)ہے یا اوپر کی طرف کانویکس (Convex)ہے۔
3. شکل(c)4.2.3 میں منحنی نقطہ P پر کانکیوٹی(Concavity) نیچے کی طرف سے اوپر کی طرف کانکیوٹی تک بدلتی ہے یا پھر اس کے برعکس۔ تب اس نقطہ P کوانفلیکشن نقطہ کہتے ہیں۔



شکل(a)4.2.1



شکل(b)4.2.1



شکل(c)4.2.1

کسی نقطہ پر کانکیوٹی اور انفلیکشن نقاط کے لیے معیارات(Criterion)

مان لیتے ہیں کہ منحنی $y = f(x)$ پر ایک نقطہ P ہے۔ اور مان لو کہ نقطہ P پر ایک مماس ہے جو y محور کے متوازی نہیں ہے۔

1. منحنی $y = f(x)$ وقفہ $[a, b]$ میں اوپر کی طرف کانکیو ہو گا اگر $f''(x) > 0 \ \forall x \in [a, b]$
2. منحنی $y = f(x)$ وقفہ $[a, b]$ میں نیچے کی طرف کانکیو ہو گا اگر $f''(x) < 0 \ \forall x \in [a, b]$
3. منحنی کا نقطہ P پر انفلیکشن ہو گا اگر $f''(x)$ کا نشان بدلتا ہے، جیسے ہی x اس نقطہ کو پار کرتا ہے۔

مثال 1- x کی اقدار کی حد تلاش کریں جس کے لیے منحنی $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 5x + 7$ اوپر کی طرف یا نیچے کی طرف کانکیو ہے۔ انفلیکشن نقاط بھی حاصل کریں۔

حل- دیا گیا ہے کہ

$$y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 5x + 7$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 4x^3 - 18x^2 + 24x + 5$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 36x + 24 = 12(x-1)(x-2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0\ \forall x \epsilon]-\infty, 1] \rightarrow \text{اوپر کی طرف کانکیو}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0\ \forall x \epsilon]1, 2[\rightarrow \text{نیچے کی طرف کانکیو}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0\ \forall x \epsilon]2, +\infty[\rightarrow \text{اوپر کی طرف کانکیو}$$

انفلیکشن نقاط کے لیے

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Rightarrow x = 1، x = 2$$

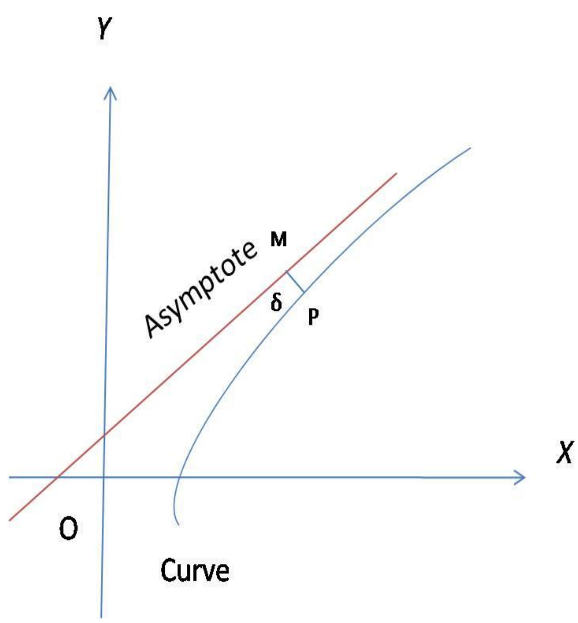
چوں کہ $x = 1$ ، $x = 2$ کے لیے $\frac{d^2y}{dx^2}$ کا نشان بدلتا ہے، اس لیے انفلیکشن نقاط $(1, 19)$ اور $(2, 33)$ ہیں۔

4.3 ایسمپٹوٹس (Asymptotes)

4.3.1 تعریف اور ایسمپٹوٹ کو حاصل کرنا (Definition and Determining Asymptotes)

تعریف: کوئی خط کسی منحنی کے لیے ایسمپٹوٹ کہلاتا ہے اگر، کوئی نقطہ P منحنی خطوط کے ساتھ ساتھ لامحدودیت (Infinity) کی طرف منتقل ہوتا ہے، نقطہ P کی خط منحنی سے عمودی دوری (مان لیجیے کہ δ) صفر کے قریب ہوتی جاتی ہے۔

شکل 4.4.1 سے ہم دیکھتے ہیں کہ جیسے منحنی پر نقطہ $P(x, y)$ لامحدودیت کے قریب ہوتا ہے نقطہ P کی خط منحنی سے عمودی دوری صفر کے قریب ہوتی جاتی ہے۔



شکل: 4.4.1

ایسمپٹوٹ حاصل کرنا: مان لو کہ ایک خط جو x محور کے متوازی نہیں ہے، وہ ہے

$$y = mx + c \qquad ...(1)$$

اب ہم m اور c کو اس طرح حاصل کریں گے کہ خط (1) ایک ایسمپٹوٹ ہو سکے۔ شکل 4.4.1 میں $PM = \delta$ خط (1) سے نقطہ $P(x, y)$ کا عمودی فاصلا ہے۔ اس لیے

$$\delta = \frac{y - mx - c}{\sqrt{1 + m^2}}, \mathrm{m} \neq 0$$

جیسے جیسے نقطہ P منحنی پر لا محدودیت کی طرف چلتا ہے مطلب یہ کہ جیسے $x \to \infty$، $\delta \to 0$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} (y - mx - c) = 0$$

یا

$$c = \lim_{x\to\infty} (y - mx)$$

اس کے ساتھ ہی

$$\frac{y}{x} - m = (y - mx) \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{y}{x} - m\right) = \lim_{x\to\infty} (y - mx) \cdot \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{c} \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{y}{x}\right) = m$$

اس لیے

$$m = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad c = \lim_{x\to\infty} (y - mx)$$

اس طرح ہم ان ایسمپٹوٹس کو جو y محور کے متوازی نہیں ہیں، کو درج ذیل طریقہ سے حاصل کرتے ہیں۔

مرحلہ 1- $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{y}{x}\right)$ کو حاصل کریں۔ مان لو کہ $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{y}{x}\right) = m$

مرحلہ 2- $\lim_{x\to\infty} (y - mx)$ کو حاصل کریں۔ مان لو کہ $\lim_{x\to\infty} (y - mx) = c$

تب $y = mx + c$ ایک ایسمپٹوٹ ہو گا۔

مثال 2- $x^3 - y^3 = 3xy$ کے ایسمپٹوٹس حاصل کریں۔

حل- دیے گئے منحنی کی مساوات ہے

$$x^3 - y^3 - 3xy = 0 \qquad ...(1)$$

مان لو کہ $y = mx + c$ ایک ایسمپٹوٹ کی مساوات ہے۔ مساوات (1) کو x^3 سے تقسیم دینے پر

$$1 - \frac{y^3}{x^3} - \frac{3y}{x^2} = 0$$

یا

$$1 - \left(\frac{y}{x}\right)^3 - \frac{3}{x}\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \qquad ...(2)$$

اب ایسمپٹوٹ حاصل کرنے کے لیے ہم لمٹ لیتے ہیں، اور

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right) = m$$
$$\lim_{x\to\infty}(y - mx) = c$$

اس لیے مساوات (2) سے

$$1 - \lim_{x\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right)^3 - 3\lim_{x\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$
$$\Rightarrow \quad 1 - m^3 = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = 1$$

$1 - m^3$ کے دوسرے روٹس ملتف اعداد (Complex Numbers) ہیں۔

ہم مساوات (1) کو اس طرح سے لکھ سکتے ہیں

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 3xy$$
$$(y - x) = \frac{-3xy}{x^2 + xy + y^2}$$

اب $m = 1$ کے لیے

$$c = \lim_{x\to\infty}(y - x) = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{-3xy}{x^2 + xy + y^2}\right]$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{-3}{\frac{x^2}{xy} + \frac{xy}{xy} + \frac{y^2}{xy}}\right]$$
$$= \frac{-3}{1 + 1 + 1}$$
$$= -1$$

اس لیے دی گئی منحنی کے لیے ایسمپٹوٹ $y = x - 1$ ہے۔

4.3.2 عام الجبرائی منحنی کے ایسمپٹوٹس (Asymptotes of General Algebraic Curve)

مان لیجیے کہ درجہ (Degree) n کی منحنی کی مساوات ہے

$$\{a_0 y^n + a_1 y^{n-1}x + a_2 y^{n-2}x^2 + \cdots + a_n x^n\} + \{b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2}x + b_3 y^{n-3}x^2 + \cdots + b_n x^{n-1}\}$$
$$+\{c_2 y^{n-2} + c_3 y^{n-3}x + c_4 y^{n-4}x^2 + \cdots + c_n x^{n-2}\} + \cdots = 0 \qquad ...(1)$$

یا

$$x^n\left\{a_0\left(\frac{y}{x}\right)^n + a_1\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1} + a_2\left(\frac{y}{x}\right)^{n-2} + \cdots + a_n\right\}$$
$$+ x^{n-1}\left\{b_1\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1} + b_2\left(\frac{y}{x}\right)^{n-2} + b_3\left(\frac{y}{x}\right)^{n-3} + \cdots + b_n\right\}$$
$$+ x^{n-2}\left\{c_2\left(\frac{y}{x}\right)^{n-2} + c_3\left(\frac{y}{x}\right)^{n-3} + c_4\left(\frac{y}{x}\right)^{n-4} + \cdots + c_n\right\} + \cdots = 0$$

ہم اس کو اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$x^n\varphi_n\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-1}\varphi_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-2}\varphi_{n-2}\left(\frac{y}{x}\right) + \cdots + \varphi_0\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \qquad ...(2)$$

جہاں φ_n،φ_{n-1}،φ_{n-2}،…، کثیر رکنیاں (Polynomials) $\left(\frac{y}{x}\right)$ میں ہیں، ان کے درجے $n, n-1, n-2, \cdots$ ہیں۔

مساوات (2) کو x^n سے تقسیم دینے پر ہمیں حاصل ہے

$$\varphi_n\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x}\varphi_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x^2}\varphi_{n-2}\left(\frac{y}{x}\right)+\cdots+\frac{1}{x^n}\varphi_0\left(\frac{y}{x}\right)=0 \qquad ...(3)$$

لمٹ لینے پر ہمیں ملتا ہے

$$\varphi_n(m)=0 \qquad ...(4)$$

جہاں $m=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right)$

مان لیجیے کہ مساوات (4) کا ایک روٹ (Root) m_1 اس طرح سے ہے کہ $\varphi_n(m_1)=0$

ہم لکھتے ہیں

$$y-m_1x=p_1 \ i.e. \frac{y}{x}=m_1+\frac{p_1}{x}$$

$\frac{y}{x}$ کی قیمت مساوات (2) میں رکھنے پر ہمیں ملتا ہے

$$x^n\varphi_n\left(m_1+\frac{p_1}{x}\right)+x^{n-1}\varphi_{n-1}\left(m_1+\frac{p_1}{x}\right)+x^{n-2}\varphi_{n-2}\left(m_1+\frac{p_1}{x}\right)+\cdots+x\varphi_1\left(m_1+\frac{p_1}{x}\right)+\varphi_0\left(m_1+\frac{p_1}{x}\right)=0$$

ٹیلر کے قضیہ (Taylor's Theorem) کا استعمال کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$x^n\left[\varphi_n(m_1)+\frac{p_1}{x}\varphi_n'(m_1)+\frac{{p_1}^2}{x^2}\varphi_n''(m_1)+\cdots\right]+x^{n-1}\left[\varphi_{n-1}(m_1)+\frac{p_1}{x}\varphi_{n-1}'(m_1)+\frac{{p_1}^2}{x^2}\varphi_{n-1}''(m_1)+\cdots\right]+x^{n-2}\left[\varphi_{n-2}(m_1)+\frac{p_1}{x}\varphi_{n-2}'(m_1)+\frac{{p_1}^2}{x^2}\varphi_{n-2}''(m_1)+\cdots\right]+\cdots=0$$

ان ارکان کو x کی اترتی قوتوں میں ترتیب سے لکھنے پر ہمیں ملتا ہے

$$x^n\varphi_n(m_1)+x^{n-1}[p_1\varphi_n'(m_1)+\varphi_{n-1}(m_1)]+x^{n-2}\left[\frac{{p_1}^2}{2}\varphi_n''(m_1)+p_1\varphi_{n-1}'(m_1)+\varphi_{n-2}(m_1)\right]+\cdots=0$$

$\varphi_n(m_1)=0$ رکھنے پر اور پھر x^{n-1} سے تقسیم دینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$[p_1\varphi_n'(m_1)+\varphi_{n-1}(m_1)]+\frac{1}{x}\left[\frac{{p_1}^2}{2}\varphi_n''(m_1)+p_1\varphi_{n-1}'(m_1)+\varphi_{n-2}(m_1)\right]+\cdots=0 \qquad ...(5)$$

مان لیجیے کہ $x\to\infty$، ہم لکھتے ہیں $\lim_{x\to\infty}p_1=c_1$ اس لیے

$$c_1\varphi_n'(m_1)+\varphi_{n-1}(m_1)=0 \qquad ...(6)$$

یا $$c_1 = -\frac{\varphi_{n-1}(m_1)}{\varphi_n'(m_1)},\ \varphi_n'(m_1) \neq 0$$

اس لیے

$$y = m_1 x - \frac{\varphi_{n-1}(m_1)}{\varphi_n'(m_1)}$$

ڈھال m_1 کے متناظر ایسمپٹوٹ ہے، جب کہ $\varphi_n'(m_1) \neq 0$

اسی طرح

$$y = m_2 x - \frac{\varphi_{n-1}(m_2)}{\varphi_n'(m_2)};\ y = m_3 x - \frac{\varphi_{n-1}(m_3)}{\varphi_n'(m_3)};\cdots \qquad ...(7)$$

ڈھال m_2، m_3، ... ،جو کہ $\varphi_n(m) = 0$ کے روٹس ہیں، کے متناظر ایسمپٹوٹس ہیں، جب کہ $\varphi_n'(m_2) \neq 0$، $\varphi_n'(m_3) \neq 0$، ...

استثنائی صورت(Exceptional Case): مان لیجیے کہ $\varphi_n'(m_1) = 0$

اگر $\varphi_n'(m_1) = 0$ لیکن $\varphi_{n-1}(m_1) \neq 0$، تب مساوات (6) سے c_1 کی کوئی قیمت حاصل نہیں ہوتی اور اس لیے ڈھال m_1 کے متناظر کوئی ایسمپٹوٹ نہیں ہو گا۔

اب مان لو کہ

$$\varphi_n'(m_1) = 0 = \varphi_{n-1}(m_1)$$

اس صورت (Case) میں مساوات (6) ایک ضابطہ (Identity) بن جائیگی اور ہمیں مساوات (5) کے بارے میں پھر سے سوچنا ہو گا، جو کہ اب درج ذیل ہے

$$\left[\frac{{p_1}^2}{2}\varphi_n''(m_1) + p_1\varphi_{n-1}'(m_1) + \varphi_{n-2}(m_1)\right] + [\cdots] + \cdots = 0$$

لمٹ لینے پر جب کہ $x \to \infty$، ہم دیکھتے ہیں کہ c_1 درج ذیل مساوات کا ایک روٹ ہے

$$\frac{{c_1}^2}{2}\varphi_n''(m_1) + c_1\varphi_{n-1}'(m_1) + \varphi_{n-2}(m_1) = 0 \qquad ...(8)$$

جس سے c_1 کی دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں، مان لیجیے کہ وہ c_1'، c_1'' جب کہ

$$\varphi_n''(m_1) \neq 0$$

اس طرح

$$y = m_1 x + c_1';\ y = m_1 x + c_1''$$

ڈھال m_1 کے متناظر دو ایسمپٹوٹس ہیں، جو کہ صاف طور پر متوازی دکھ رہے ہیں۔ یہ متوازی ایسمپٹوٹس کا کیس ہے۔

مثال 3- $x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + xy - y^2 - 1 = 0$ کے ایسمپٹوٹس حاصل کریں۔

حل- دی گئی منحنی کی مساوات ہے

$$x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + xy - y^2 - 1 = 0 \qquad ...(1)$$

مساوات (1) میں $y = mx + c$ رکھنے پر، ہمیں ملتا ہے

$$x^3 + 2x^2(mx+c) - x(mx+c)^2 - 2(mx+c)^3 + x(mx+c) - (mx+c)^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^3(1 + 2m - m^2 - 2m^3) + x^2(2c - 2mc - 6m^2c + m - m^2) + \cdots = 0$$

اس لیے m اور c اس طرح حاصل کیے جاتے ہیں

$$1 + 2m - m^2 - 2m^3 = 0 \qquad ...(2)$$

اور

$$2c - 2mc - 6m^2c + m - m^2 = 0 \qquad ...(3)$$

مساوات (2) سے

$$(1 - m^2) + 2m(1 - m^2) = 0$$

یا

$$(1 - m^2)(1 + 2m) = 0$$

یا

$$m = 1, -1, -\tfrac{1}{2}$$

مساوات (3) سے

$$2c(1 - m - 3m^2) = m^2 - m$$

یا

$$c = \frac{m^2 - m}{2(1 - m - 3m^2)}$$

$m = 1$ کے لیے

$$c = \frac{1^2 - 1}{2(1 - 1 - 3)} = 0$$

$m = -1$ کے لیے

$$c = \frac{(-1)^2 + 1}{2(1 + 1 - 3)} = -1$$

$m = -\frac{1}{2}$ کے لیے

$$c = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}{2\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right)} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}$$

m اور c کی یہ قیمتیں $y = mx + c$ میں رکھنے پر، ہمیں مندرجہ ذیل ایسمپٹوٹس ملتے ہیں

$$y = x$$

$$y = -x - 1$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

یا

$$2y + x = 1$$

4.3.3 ایسمپٹوٹس حاصل کرنے کا چھوٹا طریقہ (Shorter Method for Determining Asymptotes)

nویں درجے کی منحنی کی مساوات کی اعظم ترین (Highest) درجہ (Degree) ارکان (Terms) میں $x = 1$ اور $y = m$ رکھ کر $\varphi_n(m)$ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اسی طرح $(n-1)$ویں درجہ ارکان میں $x = 1$ اور $y = m$ رکھ کر $\varphi_{n-1}(m)$ کو بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اور اسی طرح ہم حاصل کرسکتے ہیں۔

اب $\varphi_n(m) = 0$ کو m کے لیے حل کر کے ہم ایسمپٹوٹس کے ڈھال کو جان سکتے ہیں۔ m کی قیمتوں کے متناظر c کی قیمت درج ذیل فارمولہ سے حاصل کی جاسکتی ہے

m کی الگ الگ قیمتوں کے لیے، $c = -\frac{\varphi_{n-1}(m)}{\varphi_n{}'(m)}$

اگر دو ایسمپٹوٹس متوازی ہیں تب $\varphi_n(m)$ کے دو مساوی روٹس ہونگے (مان لیجیے کہ $m_1 = m_2$)، تب c کی قیمت درج ذیل فارمولہ سے حاصل کی جاسکتی ہے

$$\frac{c^2}{2}\varphi_n{}''(m) + c\varphi'_{n-1}(m) + \varphi_{n-2}(m) = 0$$

مثال-4 $2x^3 - x^2y - 2xy^2 + y^3 - 4x^2 + 8xy - 4x + 1 = 0$ کے ایسمپٹوٹس حاصل کریں۔

حل- دی گئی منحنی کی مساوات ہے

$$2x^3 - x^2y - 2xy^2 + y^3 - 4x^2 + 8xy - 4x + 1 = 0 \qquad ...(1)$$

منحنی کی مساوات کی تیسرے درجے (Degree) اور دوسرے درجے کے ارکان (Terms) میں الگ الگ $x = 1$ اور $y = m$ رکھنے پر، ہمیں ملتا ہے

$$\varphi_3(m) = 2 - m - 2m^2 + m^3$$
$$\varphi_2(m) = -4 + 8m$$

اب ایسمپٹوٹس کے ڈھال درجہ ذیل سے حاصل کرتے ہیں

$$\varphi_3(m) = 0$$

$\Rightarrow$ $$2 - m - 2m^2 + m^3 = 0$$

یا $$m^2(m-2) - 1(m-2) = 0$$

یا $$(m-2)(m^2-1) = 0$$

یا $$(m-2)(m-1)(m+1) = 0$$

اس لیے $$m = -1, 1, 2$$

اب c کو اس طرح سے حاصل کیا جاسکتا ہے

$$c = -\frac{\varphi_2(m)}{\varphi'_3(m)} = -\left(\frac{-4+8m}{3m^2-4m-1}\right)$$

$m = -1$ کے لیے

$$c = -\left(\frac{-4+8(-1)}{3(-1)^2-4(-1)-1}\right) = 2$$

$m = 1$ کے لیے

$$c = -\left(\frac{-4+8(1)}{3(1)^2-4(1)-1}\right) = 2$$

$m = 2$ کے لیے

$$c = -\left(\frac{-4 + 8(2)}{3(2)^2 - 4(2) - 1}\right) = -4$$

m اور c کی یہ قیمتیں $y = mx + c$ میں درج کرنے پر، ہمیں مندرجہ ذیل ایسمپٹوٹس ملتے ہیں

$$y = -x + 2$$
$$y = x + 2$$
$$y = 2x - 4$$

مثال5- $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 - 3x - y + 1 = 0$ کے ایسمپٹوٹس حاصل کریں۔

حل- دی گئی منحنی کی مساوات ہے

$$x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 - 3x - y + 1 = 0 \qquad ...(1)$$

منحنی کی مساوات کی تیسرے درجہ(Degree)اور پہلے درجہ کے ارکان(Terms) میں الگ الگ $x = 1$ اور $y = m$ لے نے پر، ہمیں ملتا ہے

$$\varphi_3(m) = 1 + m - m^2 - m^3$$
$$\varphi_2(m) = 0$$
$$\varphi_1(m) = -3 - m$$

اب ایسمپٹوٹس کے ڈھال درجہ ذیل سے حاصل کرتے ہیں

$$\varphi_3(m) = 0$$

$\Rightarrow$ $$1 + m - m^2 - m^3 = 0$$

یا $$m^2(m + 1) - 1(m + 1) = 0$$

یا $$(m + 1)(m^2 - 1) = 0$$

یا $$(m - 1)(m + 1)^2 = 0$$

اس لیے $$m = 1, -1, -1$$

اب c کو $m = 1$ کے لیے اس طرح سے حاصل کیا جاسکتا ہے

$$c = -\frac{\varphi_2(m)}{\varphi'_3(m)} = 0$$

تکراری روٹس $m = -1$ کے لیے c کو اس طرح سے حاصل کیا جاسکتا ہے

$$\frac{c^2}{2}\varphi_3''(m) + c\varphi'_2(m) + \varphi_1(m) = 0$$
$$\frac{c^2}{2}(-2 - 6m) + c(0) + (-3 - m) = 0$$

$m = -1$ کے لیے

$$\frac{c^2}{2}(-2 + 6) + (-3 + 1) = 0$$

یا $$2c^2 - 2 = 0$$

یا $$c^2 - 1 = 0$$

یا $(c-1)(c+1)=0$

یا $c=\pm 1$

m اور c کی یہ قیمتیں $y=mx+c$ میں درج کرنے پر، ہمیں مندرجہ ذیل ایسمپٹوٹس ملتے ہیں

$$y=x$$
$$y=-x+1$$
$$y=-x-1$$

مثال 6- $x^3-x^2y-xy^2+y^3+2x^2-4y^2+2xy+x+y+1=0$ کے ایسمپٹوٹس حاصل کریں۔

حل- دی گئی منحنی کی مساوات ہے

$$x^3-x^2y-xy^2+y^3+2x^2-4y^2+2xy+x+y+1=0 \quad ...(1)$$

منحنی کی مساوات کی تیسرے درجہ (Degree) اور دوسرے درجہ کے ارکان (Terms) میں الگ الگ $x=1$ اور $y=m$ درج کرنے پر، ہمیں ملتا ہے

$$\begin{aligned}\varphi_3(m)&=1-m-m^2+m^3\\&=1(1-m)-m^2(1-m)\\&=(1-m)(1-m^2)\\&=(1-m)^2(1+m)\end{aligned}$$
$$\varphi_2(m)=2+2m-4m^2$$

اب ایسمپٹوٹس کے ڈھال درجہ ذیل سے حاصل کرتے ہیں

$$\varphi_3(m)=0$$
$$\Rightarrow \quad (1-m)^2(1+m)=0$$

اس لیے $m=1,1,-1$

اب c کو اس طرح سے حاصل کیا جاسکتا ہے

$$c=-\frac{\varphi_2(m)}{\varphi'_3(m)}=-\frac{2+2m-4m^2}{3m^2-2m-1}$$

$m=-1$ کے لیے c کو اس طرح سے حاصل کیا جاتا ہے

$$c=-\frac{2+2(-1)-4(-1)^2}{3(-1)^2-2(-1)-1}=1$$

m اور c کی یہ قیمت $y=mx+c$ میں درج کرنے پر، ہمیں مندرجہ ذیل ایسمپٹوٹ ملتا ہے

$$y=-x+1$$

تکراری روٹس $m=1$ کے لیے c کو اس طرح سے حاصل کیا جاسکتا ہے

$$\frac{c^2}{2}\varphi_3''(m)+c\varphi'_2(m)+\varphi_1(m)=0$$
$$\frac{c^2}{2}(-2+6m)+c(2-8m)+1(1+m)=0$$

$m=1$ درج کرنے پر

$$\frac{c^2}{2}(-2+6)+c(2-8)+(1+1)=0$$

یا $$2c^2-6c+2=0$$

یا $$c^2-3c+1=0$$

یا $$c=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

m اور c کی یہ قیمتیں $y=mx+c$ میں درج کرنے پر، ہمیں مندرجہ ذیل دو متوازی ایسمپٹوٹس ملتے ہیں

$$y=x+\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$
$$y=x+\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

مثال7- $y^3-6xy^2+11x^2y-6x^3+y+x=0$ کے ایسمپٹوٹس حاصل کریں۔

حل- دی گئی منحنی کی مساوات ہے

$$y^3-6xy^2+11x^2y-6x^3+y+x=0 \qquad ...(1)$$

منحنی کی مساوات کی تیسرے درجہ (Degree) اور پہلے درجہ کے ارکان (Terms) میں الگ الگ $x=1$ اور $y=m$ درج کرنے پر، ہمیں ملتا ہے۔

$$\varphi_3(m)=m^3-6m^2+11m-6$$
$$\varphi_2(m)=0$$
$$\varphi_1(m)=m+1$$

اب ایسمپٹوٹس کے ڈھال درجہ ذیل سے حاصل کرتے ہیں

$$\varphi_3(m)=0$$

$\Rightarrow$ $$m^3-6m^2+11m-6=0$$

یا $$(m-1)(m^2-5m+6)=0$$

یا $$(m-1)(m-2)(m-3)=0$$

اس لیے $$m=1,2,3$$

اب c کو اس طرح سے حاصل کیا جاسکتا ہے

$$c=-\frac{\varphi_2(m)}{\varphi'_3(m)}=0$$

اس لیے روٹس $m=1,2,3$ کے لیے $c=0$

m اور c کی یہ قیمتیں $y=mx+c$ میں درج کرنے پر، ہمیں مندرجہ ذیل ایسمپٹوٹس ملتے ہیں

$$y=x$$
$$y=2x$$
$$y=3x$$

مثال8- $(x-2y)^2(x-y)-4y(x-2y)-(8x+7y)=0$ کے ایسمپٹوٹس حاصل کریں۔

حل۔ دی گئی منحنی کی مساوات ہے

$$(x-2y)^2(x-y)-4y(x-2y)-(8x+7y)=0 \qquad ...(1)$$

منحنی کی مساوات کی تیسرے درجہ (Degree) اور پہلے درجہ کے ارکان (Terms) میں الگ الگ $x=1$ اور $y=m$ درج کرنے پر، ہمیں ملتا ہے۔

$$\varphi_3(m)=(1-2m)^2(1-m)$$
$$\varphi_2(m)=-4m(1-2m)$$
$$\varphi_1(m)=-(8+7m)$$

اب ایسمپٹوٹس کے ڈھال درجہ ذیل سے حاصل کرتے ہیں

$$\varphi_3(m)=0$$
$$\Rightarrow \quad (1-2m)^2(1-m)=0$$

اس لیے
$$m=\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1$$

اب c کو اس طرح سے حاصل کیا جاسکتا ہے

$$c=-\frac{\varphi_2(m)}{\varphi'_3(m)}=\frac{-4m(1-2m)}{(1-2m)(5-6m)}$$

اس لیے $m=1$ کے لیے

$$c=\frac{-4(1-2)}{(1-2)(5-6)}=4$$

m اور c کی یہ قیمت $y=mx+c$ میں درج کرنے پر، ہمیں مندرجہ ذیل ایسمپٹوٹ ملتا ہے۔

$$y=x+4$$

تکراری روٹس $m=\frac{1}{2}$ کے لیے c کو اس طرح سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$\frac{c^2}{2}\varphi_3''(m)+c\varphi'_2(m)+\varphi_1(m)=0$$

$$\frac{c^2}{2}(16-24m)+c(-4+16m)+(-8-7m)=0$$

$m=\frac{1}{2}$ رکھنے پر

$$\frac{c^2}{2}\left(16-24\times\frac{1}{2}\right)+c\left(-4+16\times\frac{1}{2}\right)+\left(-8-7\times\frac{1}{2}\right)=0$$

یا
$$\tfrac{c^2}{2}(16-12)+c(-4+8)-\left(8+\tfrac{7}{2}\right)=0$$

یا
$$2c^2+4c-23=0$$

یا
$$c=\tfrac{-8\pm\sqrt{64+368}}{8}=1\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{27}=-1\pm\tfrac{3\sqrt{3}}{2}$$

m اور c کی یہ قیمتیں $y=mx+c$ میں درج کرنے پر، ہمیں مندرجہ ذیل دو متوازی ایسمپٹوٹس ملتے ہیں۔

$$y=\frac{1}{2}x-1\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

یا
$$2y=x-2\pm3\sqrt{3}$$

4.3.4 محوروں کے متوازی ایسمپٹوٹس(Asymptotes Parallel to Axes)

x محور کے متوازی ایسمپٹوٹس جن کے لیے $m = 0$ ہو عام طریقہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے لیکن، y محور کے متوازی ایسمپٹوٹس جن کے لیے $m \to \infty$ ہو، اوپر بیان کیے گئے طریقے سے حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔

y محور کے متوازی ایسمپٹوٹس (یا انتصابی ایسمپٹوٹس): مان لو کہ دی گئیی منحنی کی مساوات درجہ ذیل شکل میں ہے

$$y^n\varphi(x) + y^{n-1}\varphi_1(x) + y^{n-2}\varphi_2(x) + \cdots = 0 \qquad ...(1)$$

جہاں $\varphi(x)$، $\varphi_1(x)$، $\varphi_2(x)$، ⋯ x میں کثیر رکنی ہیں۔

مساوات (1) کو y^n سے تقسیم کرنے پر حاصل ہے

$$\varphi(x) + \frac{1}{y}\varphi_1(x) + \frac{1}{y^2}\varphi_2(x) + \cdots = 0 \qquad ...(2)$$

$y \to \infty$ لینے پر ہمیں ملتا ہے

$$\varphi(x) = 0$$

یہاں، ہم دیکھتے ہیں کہ $\varphi(x)$ اعظم ترین قوت والی رکن y^n کا ضریب (Coefficient) ہے۔ اگر $\varphi(x)$ کے روٹس $x = a_1$، $x = a_2$، ⋯ ہوں، تب y محور کے متوازی ایسمپٹوٹس ہوں گے۔

$$x = a_1, x = a_2 \cdots$$

اس لیے قاعدہ کے مطابق، دی گئی منحنی کی مساوات میں اعظم ترین قوت والی رکن y^n کے ضریب میں حقیقی قطی جز ضربی (Real Linear Factor) کو صفر کے برابر رکھ کر y محور کے متوازی ایسمپٹوٹس کو حاصل کر سکتے ہیں۔

x محور کے متوازی ایسمپٹوٹس: جیسا کہ ہم نے y محور کے متوازی ایسمپٹوٹس کو حاصل کرنے کے لیے کیا، دی گئی منحنی کی مساوات میں اعظم ترین قوت والی رکن x^n کے ضریب میں حقیقی قطی جضو ضربی (Real Linear Factor) کو صفر کے برابر رکھ کر x محور کے متوازی ایسمپٹوٹس کو حاصل کر سکتے ہیں۔

مثال 9- مساوات $x^2y^2 - a^2(x^2 + y^2) - a^3(x + y) + a^4 = 0$ کے لیے کسی بھی محور کے متوازی ایسمپٹوٹس کی مساوات حاصل کریں۔

حل- دی گئی مساوات ہے

$$x^2y^2 - a^2(x^2 + y^2) - a^3(x + y) + a^4 = 0$$

(1) x محور کے متوازی ایسمپٹوٹس:

دی گئی مساوات کو ہم اس طرح سے لکھ سکتے ہیں

$$x^2y^2 - a^2x^2 - a^2y^2 - a^3(x + y) + a^4 = 0$$

یا

$$x^2(y^2 - a^2) - a^2y^2 - a^3(x + y) + a^4 = 0$$

اعظم ترین قوت والے رکن x^2 کے ضریب کو صفر کے برابر رکھنے پر ہمیں ملتا ہے

$$y^2 - a^2 = 0$$

$\Rightarrow \qquad y = \pm a$

جو کہ x محور کے متوازی ایسمپٹوٹس ہیں۔

(2) y محور کے متوازی ایسمپٹوٹس:

دی گئی مساوات کو ہم اس طرح سے لکھ سکتے ہیں

$$y^2(x^2 - a^2) - a^2x^2 - a^3(x + y) + a^4 = 0$$

اعظم ترین قوت والے رکن y^2 کے ضریب کو صفر کے برابر رکھنے پر ہمیں ملتا ہے

$$x^2 - a^2 = 0$$

$\Rightarrow \qquad x = \pm a$

جو کہ y محور کے متوازی ایسمپٹوٹس ہیں۔

مثال10- مساوات $\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1$ لیے کسی بھی محور کے متوازی ایسمپٹوٹس کی مساوات حاصل کریں۔

حل- دی گئی مساوات ہے

$$\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1 \qquad ...(1)$$

دی گئی مساوات کو ہم اس طرح سے لکھ سکتے ہیں

$$x^2y^2 - a^2y^2 + b^2x^2 = 0$$

$$x^2(y^2 + b^2) - a^2y^2 = 0 \qquad ...(2)$$

(1) x محور کے متوازی ایسمپٹوٹس:

اعظم ترین قوت والے رکن x^2 کے ضریب کو صفر کے برابر رکھنے پر ہمیں ملتا ہے

$$y^2 + b^2 = 0$$

$\Rightarrow \qquad y = \pm bi$

جو کہ خیالی(Imaginary)ایسمپٹوٹس ہیں۔

(2) y محور کے متوازی ایسمپٹوٹس:

دی گئی مساوات کو ہم اس طرح سے لکھ سکتے ہیں

$$y^2(x^2 - a^2) + b^2x^2 = 0$$

اعظم ترین قوت والی رکن y^2 کے ضریب کو صفر کے برابر رکھنے پر ہمیں ملتا ہے

$$x^2 - a^2 = 0$$

$\Rightarrow \qquad x = \pm a$

جو کہ y محور کے متوازی ایسمپٹوٹس ہیں۔

اس لیے دی گئی منحنی کے لیے صرف دو حقیقی ایسمپٹوٹس ہیں جو کہ y محور کے متوازی ہیں۔

مثال11- فولیم(Folium) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ کے ایسمپٹوٹس حاصل کریں۔

حل- دی گئی منحنی کی مساوات ہے

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \qquad ...(1)$$

(1) مختصوں کے محور کے متوازی ایسمپٹوٹس:

چونکہ x اور y کی اعظم ترین قوت کے ضریب مستقل(Constant) ہیں اس لیے دی گئی منحنی کے x اور y محور کے متوازی کوئی ایسمپٹوٹس نہیں ہیں۔

(2) اوبلک(Oblique) ایسمپٹوٹس:

منحنی کی مساوات کی تیسرے درجہ(Degree) اور پہلے درجہ کے ارکان(Terms) میں الگ الگ $x = 1$ اور $y = m$ رکھنے پر، ہمیں ملتا ہے

$$\varphi_3(m) = 1 + m^3$$
$$\varphi_2(m) = -3am$$

اب ایسمپٹوٹس کے ڈھال درج ذیل طریقے سے حاصل کرتے ہیں

$$\varphi_3(m) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad 1 + m^3 = 0$$

یا

$$(m+1)(m^2 - m + 1) = 0$$

یہاں ہم m کی حقیقی قیمت $m = -1$ لیتے ہیں۔

اب c کو اس طرح سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$c = -\frac{\varphi_2(m)}{\varphi'_3(m)} = -\frac{(-3am)}{3m^2}$$

اس لیے روٹس $m = -1$ کے لیے

$$c = \frac{-3a}{3} = -a$$

m اور c کی یہ قیمتیں $y = mx + c$ میں درج کرنے پر، ہمیں مندرجہ ذیل ایسمپٹوٹس ملتے ہیں

$$y = -x - a$$

یا

$$y + x + a = 0$$

4.4 اکتسابی نتائج(Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے پڑھا:

1۔ کانکیوٹی اور انفلیکشن نقاط حاصل کرنا
2۔ ایسمپٹوٹس کی بنیادی جانکاری
3۔ جبری منحنی کے لیے ایسمپٹوٹس حاصل کرنا
4۔ محوروں کے متوازی ایسمپٹوٹس حاصل کرنا

4.5 کلیدی الفاظ (Key Words)

انفلیکشن نقاط، کانکیوٹی، ایسمپٹوٹس، انتصابی ایسمپٹوٹس، اُفقی ایسمپٹوٹس

4.6 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

4.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. ایک بند منحنی کے لیے کتنے ایسمپٹوٹس ہوتے ہیں

(a) کوئی ایسمپٹوٹس نہیں (b) ایک ایسمپٹوٹس (c) لا محدود ایسمپٹوٹس (d) محدود ایسمپٹوٹس

2. n درجہ کی منحنی کے ایسمپٹوٹس کی تعداد ہے

(a) کم سے کم ایک (b) کم سے کم n (c) زیادہ سے زیادہ n (d) زیادہ سے زیادہ ایک

3. محدودی منحنی (Bounded Curve) کے لیے کوئی ایسمپٹوٹس نہیں ہوتا ہے۔ (صحی / غلط)

4.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

درجہ ذیل منحنیوں کے لیے مختصوں کے محور (Coordinate Axes) کے متوازی ایسمپٹوٹس حاصلکریں

1. $y^2x - a^2(x-a) = 0$
2. $x^2y - 3x^2 - 5xy + 6y + 2 = 0$

4.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

درجہ ذیل منحنیوں کے لیے ایسمپٹوٹس حاصلکریں

1. $x^2(x-y)^2 + a^2(x^2 - y^2) = a^2xy$
2. $x^2y + y^2x + xy + y^2 + 3x = 0$
3. $y^3 - x^2y + 2xy^2 - y + 1 = 0$
4. $xy(x+y) = a(x^2 - a^2)$

4.7 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Calculus, H. Anton, I. Bivens, S. Davis, John Wiley & Sons, Inc. (10th Edition)
2. B.Sc. Vol. I, Mathematics by V. Venkateshwara Rao, N. KKrishna Murthy, S. Chand & Company Pvt. Ltd.

اکائی 5۔ منحنی کی ٹریسنگ

(Curve Tracing)

اکائی کے اجزا

5.0 تمہید (Introduction)

اس اکائی میں ہم عمومی کروٹریسنگ کے مسائل کا حل دیں گے۔ یہ دیکھا گیا ہے کہ زیادہ تر مساوات جن کو ہم ٹریس کرنا چاہتے ہیں x، y اور r میں حل کی جاسکتی ہیں۔ کچھ مساوات جو x یا y میں بدلی نہیں جاسکتی ہیں انہیں پولر کی شکل میں بدل کر ٹریس کرتے ہیں۔

5.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- کارتیسی مساوات کو ٹریس کر سکیں۔
- پیرامیٹرک مساوات کو ٹڑیس کر سکیں۔
- پولر مساوات کو ٹریس کر سکیں۔

5.2 کارتیسی مساوات کو ٹریس کرنے کا طریقہ (Method of Tracing Cartesian Equations)

(الف) توازن: معلوم کریں کہ کیا منحنی (Curve) کسی بھی لائن کے ساتھ توازن (Symmetry) رکھتا ہے۔ درجہ ذیل جانکاری کے مطابق عمل درآمد کریں۔

(1) اگر مساوات میں موجود 'y' کی پاور سبھی ٹرمس میں جفت (Even) ہو تب اس کا منحنی x محور (axis) کے ساتھ توازن میں ہو گا۔

(2) اگر مساوات میں موجود 'x' کی پاور سبھی ٹرمس طاق (odd) ہو تو اس کا منحنی y محور کے ساتھ توازن میں ہو گا۔

(3) اگر x اور y کو انٹر چینج (Interchange) کرنے پر مساوات پر کوئی فرق نہیں پڑتا ہے تب اس مساوات کا منحنی $x = y$ کے ساتھ توازن میں ہو گا۔

(4) اگر $y- = x$ اور $x- = y$ دی ہوئی مساوات میں رکھنے پر مساوات پر کوئی فرق نہیں پڑتا ہے تب اس مساوات کا منحنی $x- = y$ کے ساتھ توازن میں ہو گا۔

(5) اگر $x- = x$ اور $y- = y$ رکھنے پر اس مساوات کی کور اپوزٹ کواڈرنٹ (Opposite Quadrant) میں توازن میں ہو گا، اگر مساوات میں کوئی بدلاؤ نہ ہو۔

(ب) مبدایا اور جن: اگر منحنی مبدا سے ہو کر گزرتا ہے تو اس پر مماس حاصل کریں۔ اگر مبدا ایک ملٹی پل نقطہ (Multiple Point) ہے تو اس کا نیچر معلوم کریں۔

(ج) مشترکہ نقاط (Common Points): اگر منحنی اور کورڈینیٹ محور کے درمیان مشترکہ نقطہ ہیں تو معلوم کریں۔ اگر اس طرح کے نقطہ

موجود ہوں تو ان پر مماس معلوم کریں۔

(د) ایسمپٹوٹ: ایسمپٹوٹ حاصل کریں اور وہ نقطہ جن میں سے ہو کر ایسمپٹوٹ منحنی سے ملتا ہوا لگتا ہے۔

(ہ) خط کا حصہ: کسی سطح (Plane) کے اس حصہ کو معلوم کریں جس پر منحنی کا کوئی حصہ نہیں پایا جاتا ہے۔

ایسا حصہ عموماً دی ہوئی مساوات کو ایک متغیر کو دوسرے متغیر کی ٹرمس میں حل رکھنے پر حاصل ہوتے ہیں اور ایک متغیر کی قیمت حاصل کریں جس وجہ سے دوسرا متغیر خیالی (Imaginary) بن جاتا ہے۔

(و) ٹیجنٹ: $\frac{dy}{dx}$ حاصل کریں اور وہ نقطہ جہاں مماس کورڈینیٹ (مربوط) محور کے متوازی (Parallel) ہوں۔

(ز) میکسمم و منیمم: آخر میں وہ وقفہ (Intervals) حاصل کریں۔ جہاں y بڑھتا ہوا (Increasing) اور گھٹتا ہوا ہو (Decreasing) اور خاص طور پر x کی وہ قیمت جس کے لیے y ادناترین یا اعلاترین (Minimum or Maximum) ہو، پر منحصر ہوتا ہے۔ یہ تحقیقات $\frac{dy}{dx}$ کے حصول پر اور اس وقفے پر جس میں اس کی قیمت مثبت یا منفی (Positive or Negative) ہوتی ہے ۔ اب وہ وقفہ بھی حاصل کریں۔ جس میں منحنی (Curve) کا نکیو (Concave) اوپر کی طرف یا نیچے کی طرف ہے اور خاص طور پر اس طرح منحنی کو ٹریس کیا جاتا ہے۔

5.3 $y = f(x)$ کی شکل کی مساوات (Equation of the Form $y = f(x)$)

یہ بات بتائی جاسکتی ہے کہ کثیر رکنی (Polynomial) تفاعل $y = f(x)$ کا کوئی ایسمپٹوٹ نہیں ہوتا ہے۔

مثال 1: $y = x^3 - 12x - 16$ کو ٹریس کریں۔

حل۔ مساوات کو دیکھ کر درج ذیل باتیں ظاہر ہوتی ہیں:

(ا) توازن: یہ منحنی (Curve) کسی بھی لائن کے ساتھ توازن نہیں رکھتا۔

(ب) مبدا: اس پر مبدا نہیں ہوتا۔

(ج) مشترکہ نقاط: یہ $(-2,0)$, $(4,0)$ اور $(0,-16)$ پر کورڈینیٹ محور کو کاٹتا ہے۔

(د) مشتق:

$$y = x^3 - 12x - 16$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x-2)(x+2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

(ہ) میکسما اور منیما: درجہ ذیل تحقیقات پر غور کریں:

$$\lim_{n\to-\infty} y = -\infty \text{ اور } \qquad lim_{x\to+1} y = +\infty$$

$\frac{dy}{dx} = 0$ رکھنے پر

$$3(x-2)(x+2) = 0$$

$$x = -2, 2$$

اب ہم کہہ سکتے ہیں کہ y' وقفہ $]-\infty, -2]$ میں اور $[2, \infty[$ میں اسٹرکٹلی بڑھتا ہوا (Strictly Increasing) ہے۔ یہ $[-2,2]$ میں اسٹرکٹلی گھٹتا ہوا (Strictly Decreasing) ہے۔

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=2} = 12 > 0 \text{ اور } \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=-2} = -12 < 0$$

اس لیے یہ $x = -2$ پر اعلاترین اور $x = 2$ پر ادناترین ہو گا

کانویکسٹی اور کانکیوٹی:

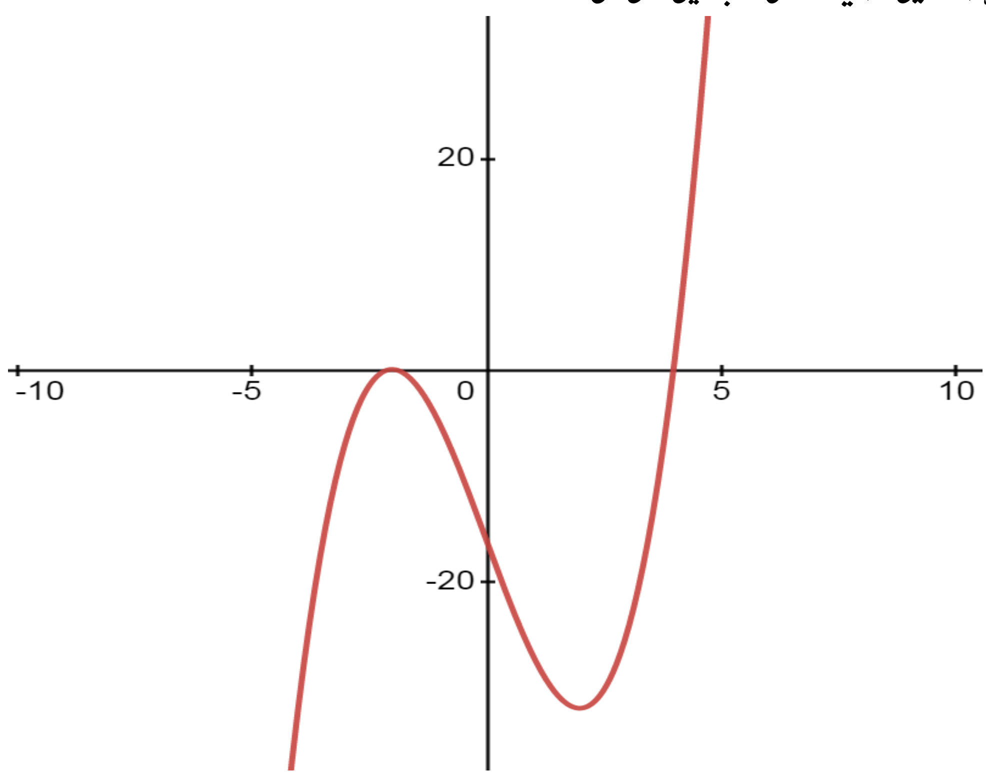
$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0} = 0$$

اور $$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x\in(-\infty,0)} < 0$$

اور $$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x\in(0,\infty)} > 0$$

اس لیے یہ وقفہ $]-\infty, 0]$ میں نیچے کی طرف کانکیو (Concave Downwards) ہے اور وقفہ $[0, \infty[$ میں اوپر کی طرف کانکیو (Upwards) ہے۔ کیوں کہ $\frac{d^2y}{dx^2}$ اپنا نشان بدلتا ہے جیسے ہی x صفر سے ہو کر گزرتا ہے۔ اس لیے $[0, -16]$ منحنی کا ایک انفلیکشن کا نقطہ ہے۔

اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ دیا ہوا منحنی درجہ ذیل شکل میں ہو گا۔



شکل: 5.3.1

مثال 2: $y = \frac{8a^3}{x^2+4a^2}$ کو ٹریس کریں۔

حل:

توازن: منحنی y محور کے ساتھ توازن میں ہے۔

مبدا: یہ مبدا سے ہو کر نہیں گزرتا ہے۔

مشترکہ نقاط: یہ y محور کو $(0, 2a)$ پر کاٹتا ہے۔ اس لیے $y = 2a$ نقطہ $(0, 2a)$ پر ایک مماس ہے۔

ایسمپٹوٹ: $y = 0$ اس منحنی کے لیے ایک ایسمپٹوٹ ہے۔

رجن: x کی سبھی قیمتوں کے لیے y مثبت (Positive) ہو گا۔ اس لیے یہ پہلے اور دوسرے کواڈرنٹ میں موجود ہو گا۔

میکسما اور منیما:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-16xa^3}{(x^2+4a^2)^2}$$

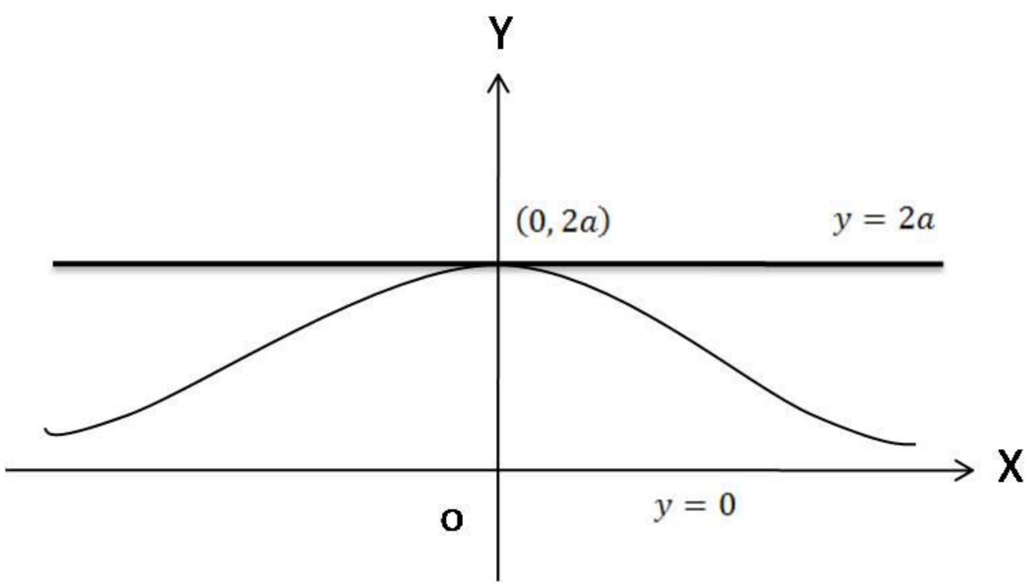
اس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ

$$\frac{dy}{dx} < 0, \forall x > 0$$

اور

$$\frac{dy}{dx} > 0, \forall x < 0$$

اس لیے وقفہ $[-\infty, 0]$ میں y اسٹرکٹلی بڑھتا ہوا ہے اور $[0, \infty]$ میں y گھٹتا ہوا ہے۔ اور وہ $x = 0$ پر y اعلاترین ہو گا اور اس کی قیمت $2a$ ہو گی۔ اس لیے دیے ہوئے منحنی کی شکل درجہ ذیل ہو گی۔



شکل: 5.3.2

5.4 $y^2 = f(x)$ شکل کی مساوات (Equation of the Form $y^2 = f(x)$)

مثال3: $y^2(a^2 + x^2) = x^2(a^2 - x^2)$ کو ٹریس کریں۔

حل۔ اس مساوات پر غور کرنے سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ

توازن: یہ منحنی دونوں محور کے ساتھ توازن میں ہو گا

مبدا: یہ مبدا سے ہو کر گزرتا ہے اور $y = \pm x$ اس کے دو مماس ہوں گے۔ اس لیے مبدا نوڈ (Node) ہو گا۔

مشترکہ نقاط: یہ x محور کو $(a, 0)$، $(0,0)$ اور $(-a, 0)$ پر اور y محور کو صرف $(0,0)$ پر ملتی ہے۔ $(a, 0)$ اور $(-a, 0)$ پر دو مماس $x = \pm a$ ہوں گے۔

ایسمپٹوٹ: اس منحنی کے لیے کوئی بھی ایسمپٹوٹ نہیں ہو گا۔

رجن: دی ہوئی مساوات $y = \pm\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}$ کو x کی انہیں قیمتوں کے لیے مان سکتے ہیں جس کے لیے

$a^2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ جس سے کہ یہ منحنی دو خطوط $x = \pm a$ کے درمیان رہتا ہے۔

انکریزنگ اور ڈکریزنگ: دی ہوئی مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہم کہہ سکتے ہیں

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^4-2a^2x^2-x^4}{(a^2+x^2)^{3/2}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} \to \infty$$ اگر $x \to -a$ اور $x \to a$

اور جب کہ $a^4 - 2a^2x^2 - x^4 = 0$ تب $\frac{dy}{dx} = 0$

اس سے $(x^4 + 2a^2x^2 - a^4) = 0$

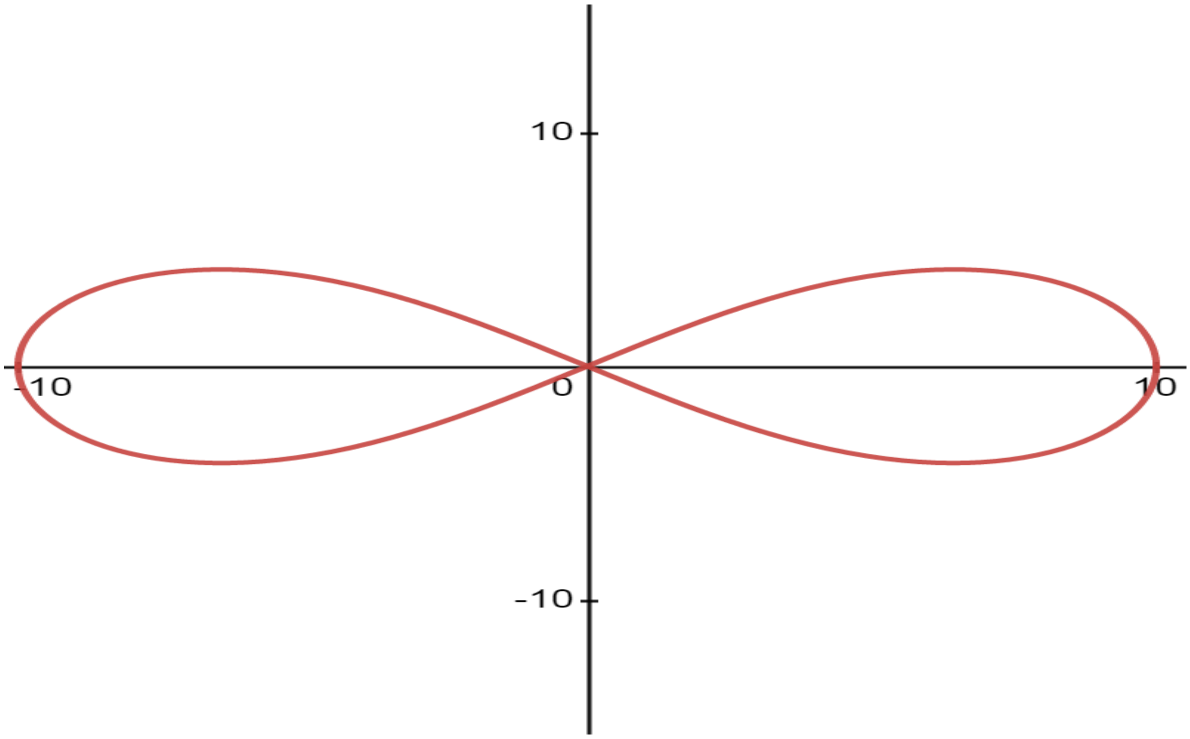
$$\Rightarrow \quad -\{(x^2) - (\sqrt{2} - 1)a^2\}(x^2 + (\sqrt{2} + 1)a^2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(x - \sqrt{(\sqrt{2} - 1)a}\right)\left(x + \sqrt{(\sqrt{2} - 1)a}\right)(x^2 + (\sqrt{2} + 1)a^2) = 0$$

اس طرح $x = \pm a\sqrt{\sqrt{2} - 1}$ کے لیے $\frac{dy}{dx} = 0$ اور ہم دیکھتے ہیں کہ

$$x\epsilon\left(-a, -a\sqrt{(\sqrt{2} - 1)}\right) \cup \left(a\sqrt{(\sqrt{2} - 1)}\,, a\right)$$

کے لیے، $\frac{dy}{dx} < 0$ اور $x\epsilon\left(-a\sqrt{(\sqrt{2}-1)}, a\sqrt{(\sqrt{2}-1)}\right)$ کے لیے $\frac{dy}{dx} > 0$، اس لیے دی گئی مساوات کا منحنی درجہ ذیل ہو گا۔



شکل:5.4.1

مثال 4: $y^2(2a-x)=x^3$ کو ٹریس کریں۔

حل۔ مساوات کو دیکھ کر درجہ ذیل باتیں ظاہر ہوتی ہیں۔

(1) مبدا: دی گئی مساوات میں کونسٹینٹ ٹرم نہیں ہے، اس لیے یہ مبدا سے ہو کر گزرے گا۔

(2) توازن: چونکہ دی گئی مساوات میں y کی پاور سبھی ٹرمس میں جفت ہے، اس لیے اس کا منحنی x محور کے ساتھ توازن میں ہو گا۔

(3) مماس: سب سے کم ڈگری کی ٹرمس کو صفر کے برابر رکھنے پر ہمیں مماس کی مساوات حاصل ہو گی۔

$$2ay^2=0$$

$$\Rightarrow \qquad y=0$$

(4) ایسمپٹوٹ: y کی سب سے زیادہ پاور والی ٹرمس کے کوئفیشنٹ کو صفر کے برابر رکھنے پر:

$$2a-x=0$$

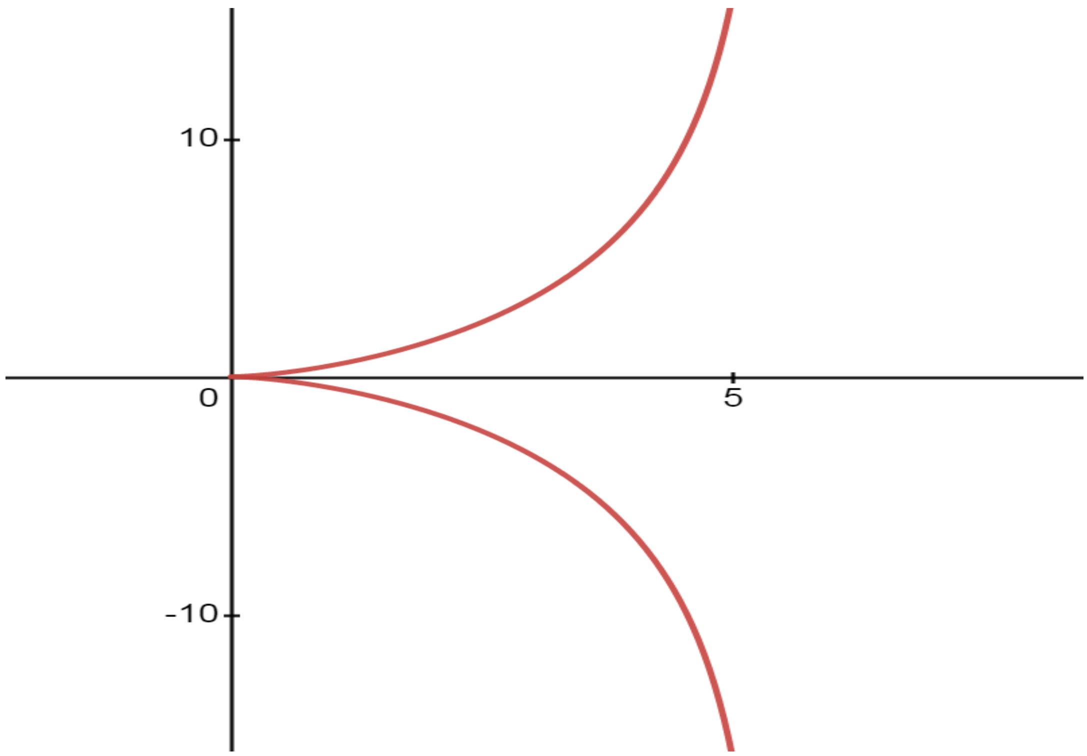
$$\Rightarrow \qquad x=2a$$

(5) رجن: دی گئی مساوات سے ظاہر ہوتا ہے کہ

$$y=\sqrt{\frac{x^3}{2a-x}}$$

اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ y کی قیمت خیالی (Immaginary) ہو جاتی ہے۔ اگر x کی قیمت $2a$ سے زیادہ ہو جائے یا پھر صفر سے کم ہو۔

اس لیے دی گئی مساوات کا منحنی $x > 2a$ اور $x < 0$ کے لیے متعرف نہیں ہے۔اس لیے دی گئی مساوات کا منحنی درجہ ذیل ہو گا۔



شکل:5.4.2

مثال5: $xy^2 = a^2(a-x)$ کو ٹریس کریں۔

حل: دی گئی مساوات سے درجہ ذیل باتیں ظاہر ہوتی ہیں:

(1) مبدا: دی گئی مساوات سے ظاہر ہے کہ اس کا منحنی اوجن سے ہو کر نہیں گزرتا ہے۔

(2) توازن: چونکہ دی گئی مساوات میں y کی پاور جفت ہے، اس لیے دی گئی مساوات کا منحنی x محور کے ساتھ توازن میں ہو گا۔

(3) مماس: سب سے کم درجہ کی ٹرمس کو صفر کے برابر رکھنے پر ہمیں مماس کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔اس لیے

$$x = a$$

(4) ایسمپٹوٹ: y کی سب سے زیادہ پاور والی ٹرم کے ضریب کو صفر کے برابر رکھنے پر

$$x = 0$$

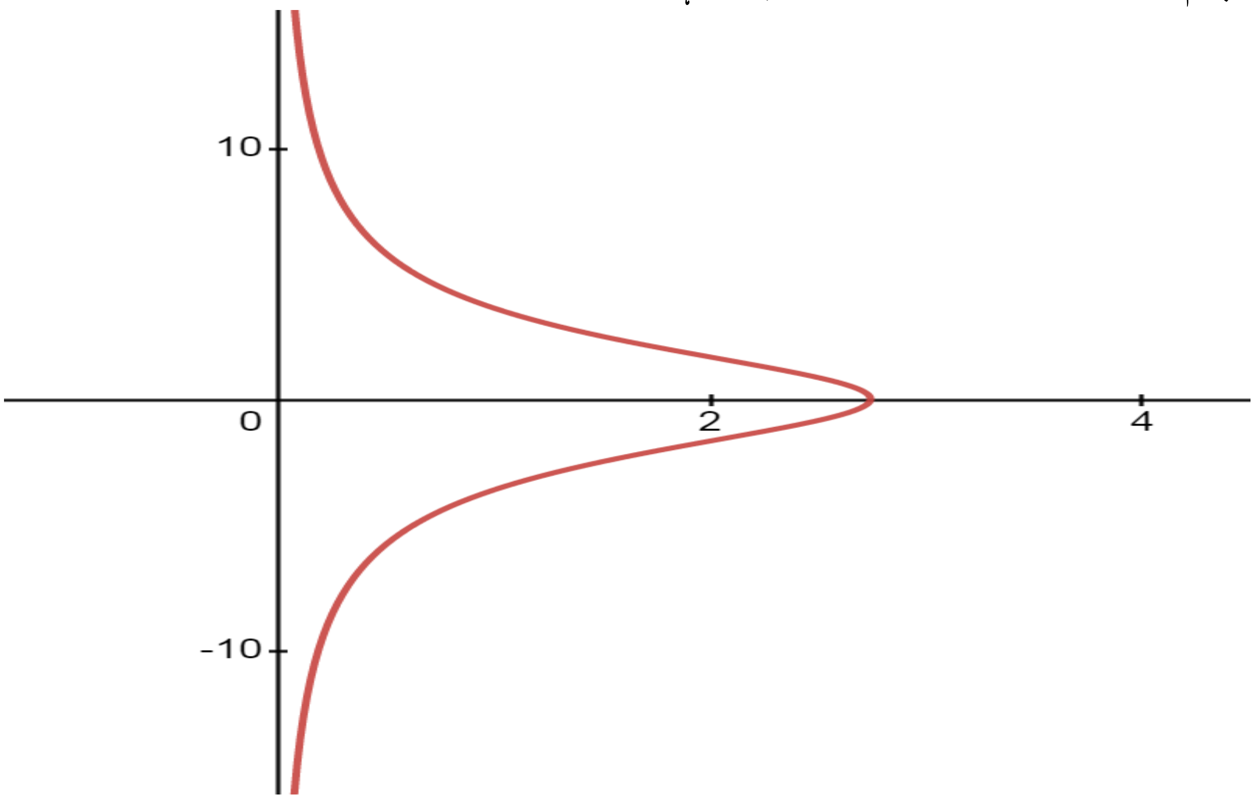
جو کہ y محور کی مساوات ہے۔اس لیے y محور منحنی کے لیے ایک ایسمپٹوٹ ہو گا۔

(5) رجن: دی گئی مساوات سے ظاہر ہوتا ہے کہ

$$y = a\sqrt{\frac{a-x}{x}}$$

yکی قیمت خیالی ہو جاتی ہے۔ اگر xکی قیمت aسے زیادہ ہو یا صفر سے کم۔ اس لیے دی گئی مساوات کا منحنی $x > a$اور$x < 0$ جن میں نہیں ہو گا۔

اب ہم دی گئی مساوات کا منحنی ٹریس کر سکتے ہیں جو درجہ ذیل ہے:



شکل:5.4.3

مثال6: $x^3 + y^3 = 3axy$ کو ٹریس کریں۔

حل: دی گئی مساوات کو دیکھ کر درجہ ذیل باتیں ظاہر ہوتی ہیں۔

(1)مبدا: دی گئی مساوات مبدا سے ہو کر گزرتی ہے۔

(2)توازن: دی گئی مساوات میں xاور y کو آپس میں بدلنے پر مساوات پر کوئی فرق نہیں پڑتا، اس لیے منحنی، $y = x$لائن کے ساتھ توازن میں ہو گا۔

(3)خاص نقطہ: دی گئی مساوات کا منحنی $y = x$ خط کو دو نقاط $(0, 0)$ اور $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$ پر کاٹتی ہے۔

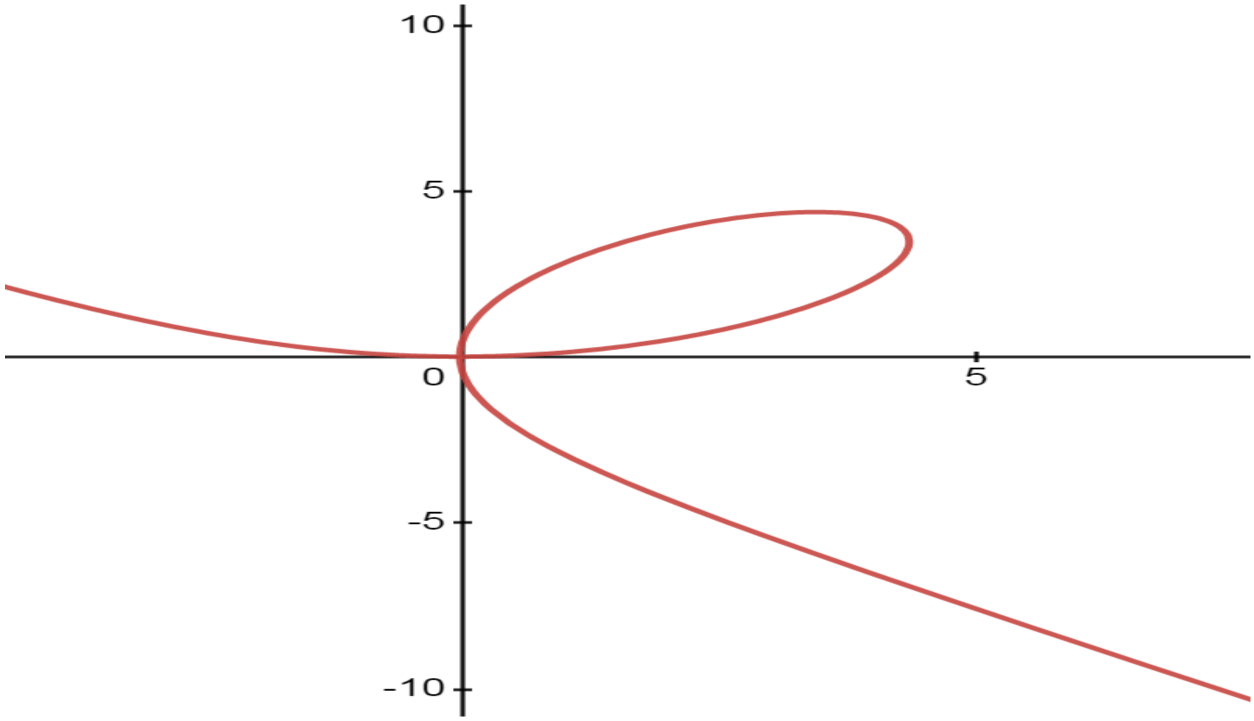
(4)ایسمپٹوٹ: دی گئی مساوات سے

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x + y)(x^2 - xy + y^2) - 3axy = 0$$

یہاں $(x + y)$ہی ایک خطی (Linear)فیکٹر ہے جس کی ڈگری سب سے زیادہ ہے۔ اس لیے منحنی کا ایک واحد ایسمپٹوٹ ہے جو کہ $y = -x$ خط کے متوازی ہے، اس لیے $x + y + a = 0$ ایک ایسمیٹوٹ ہے۔

(5)چونکہ $x < 0$ اور $y < 0$ پر مساوات ثابت نہیں ہوتی ہے اس لیے منحنی کا کوئی بھی حصہ تیسرے کوآرڈینیٹ میں نہیں آیے گا۔



شکل:5.4.4

مثال7:$x^2y^2 = a^2(y^2 - x^2)$ کو ٹریس کریں:

حل۔دی گئی مساوات کو دیکھنے پر درجہ ذیل باتیں ظاہر ہوتی ہیں۔

(1) مبدا:دی گئی مساوات مبدا سے ہو کر گزرتی ہے۔

(2) توازن:(الف)چونکہ مساوات میں موجود $'y'$ کی پاور سبھی ٹرمس میں جفت ہے اس لیے دی گئی مساوات کا منحنی $'x'$ محور کے متوازی ہو گا۔

(ب)چونکہ مساوات میں موجود $'y'$ کی پاور سبھی ٹرمس میں جفت ہے اس لیے دی گئی مساوات کا منحنی y محور کے متوازی ہو گا۔

(ج)چونکہ x کی جگہ $-x$ اور y کی جگہ $-y$ رکھنے پر مساوات میں کوئی بدلاؤ نہیں ہوتا ہے۔اس لیے دی گئی مساوات کا منحنی بر عکس کوارڈینیٹ میں متوازی ہو گا۔

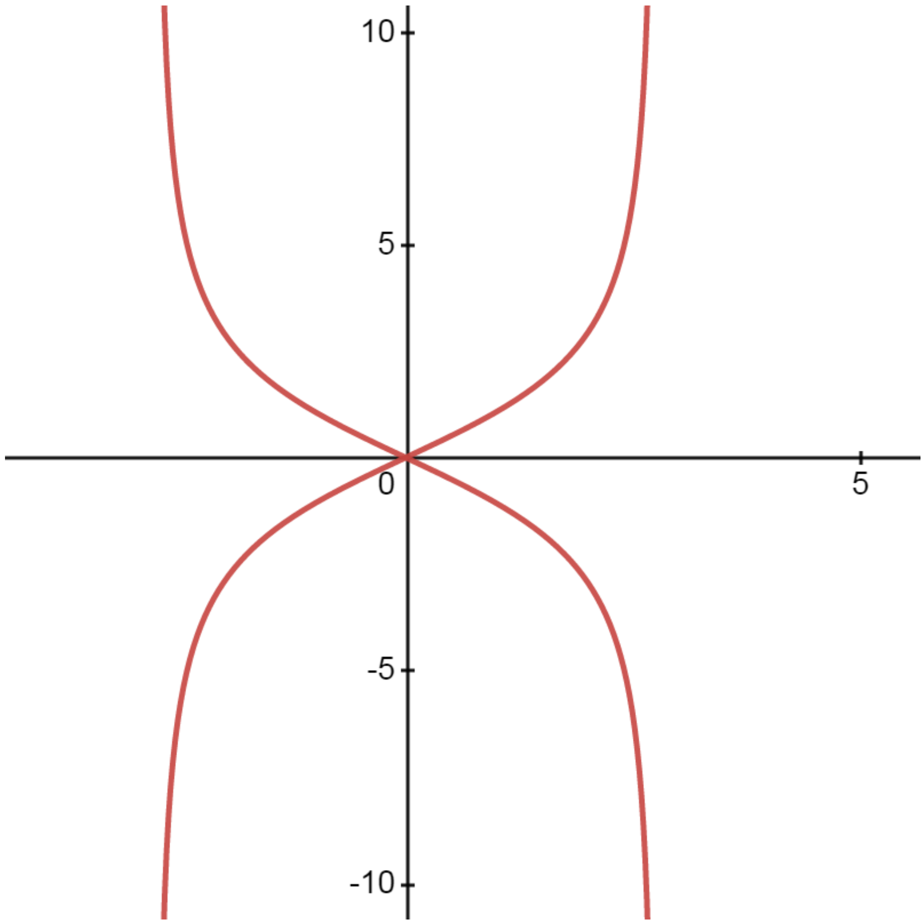
(3) مماس:سب سے کم ڈگری ٹرمس کو صفر کے برابر رکھنے پر ہمیں مماس کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔اس لیے

$$y^2 - x^2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad y^2 = x^2$$
$$\Rightarrow \quad y = \pm x$$

(4) ایسمپٹوٹ:y کی سب سے زیادہ پاور کی ٹرمس کے کوئفیشیٹ کو صفر کے برابر رکھنے پر

$$x^2 - a^2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x^2 = a^2$$
$$\Rightarrow \quad x = \pm a$$

اس لیے دی گئی مساوات کا منحنی درجہ ذیل شکل کا ہو گا۔



شکل:5.4.5

5.5 پیرامٹرک مساوات کو ٹریس کرنے کا طریقہ (Method of Tracing a Parametric Equations)

پیرامٹرک مساوات کو ٹریس کرنے کا طریقہ ذیل مثال کی مدد سے سمجھا جا سکتا ہے۔

مثال8: پیرامیٹرک مساوات $x = acos^3\theta$، $y = bsin^3\theta$ کو ٹریس کریں۔

حل: دی ہوئی مساوات کو غور کرنے پر ہم اس نتیجے پر پہنچتے ہیں۔

(الف) (x,y) ایک نقطہ $A(a,o)$ سے بائیں طرف چلتا ہے اور پھر $B(0,b)$ تک اوپر کی طرف چلتا ہے، جب کہ $\theta\epsilon\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

(ب) (x,y) پھر $(0,b)$ سے بائیں طرف چل کر نیچے کی طرف چلتے ہوئے $(0,-b)$ پر پہنچتا ہے جب کہ $\theta\epsilon\left[\frac{\pi}{2},0\right]$

(ج) (x,y) ایک نقطہ $A'(-a,o)$ سے دائیں طرف چلکر نیچے کی طرف $B'(0,-b)$ تک چلتا ہے، جب کہ $\theta\epsilon\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$

(x,y) پھر $(0,-b)$ سے دائیں طرف چلتے ہوئے اوپر کی طرف (a,o) تک پہنچتا ہے جب کہ $\theta\epsilon\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ ہم حاصل کرتے ہیں۔

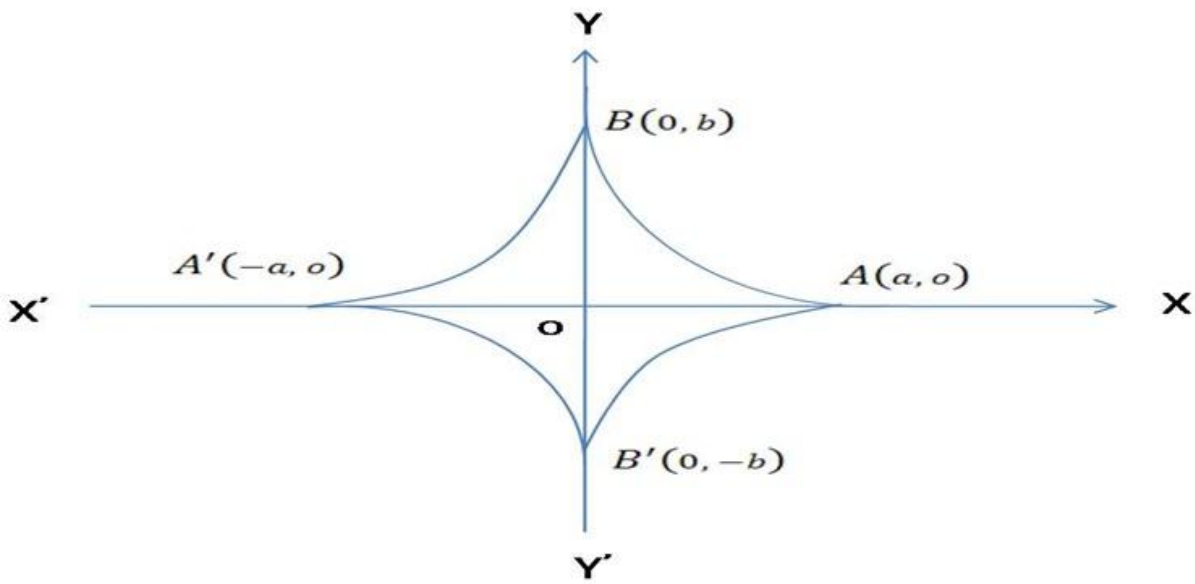
$$\frac{dx}{d\theta} = -3acos^2\theta\sin\theta \text{ اور } \frac{dy}{d\theta} = 3bsin^2\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = -\frac{3b sin^2\theta \, cos\,\theta}{3a cos^2\theta \, sin\,\theta} = \frac{b}{a} tan\,\theta\,, \qquad \frac{dx}{d\theta} \neq 0$$

اور پھر $\frac{dy}{dx} \to 0, \theta \to 0$ اور $\frac{dy}{dx} \to 0$، $\theta \to \pi$

اور $\frac{dy}{dx} \to \infty, \theta \to \frac{\pi}{2}$ اور $\frac{dy}{dx} \to \infty$، $\theta \to \frac{3\pi}{2}$

اس طرح $(\pm a, 0)$ پر مماس x محور ہو گی اور $(0, \pm b)$ پر مماس y محور ہو گا۔



شکل:5.5.1

مثال9: منحنی $x = a(t + sin\,t), y = a(1 + cos\,t)$ کو ٹریس کریں۔

حل: دی گئی پیرا میٹرک مساوات ہے۔

$$x = a(t + sin\,t), y = a(1 + cos\,t)$$

بہ لحاظ t تفرق کرنے پر

$$\frac{dx}{dt} = a(1 + cos\,t), \frac{dy}{dt} = -a\,sin\,t$$

اب

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$= \frac{-a\,sin\,t}{a(1 + cos\,t)}$$

$$= \frac{-2a\,sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{a\left(2\cos^2\frac{t}{2}\right)}$$

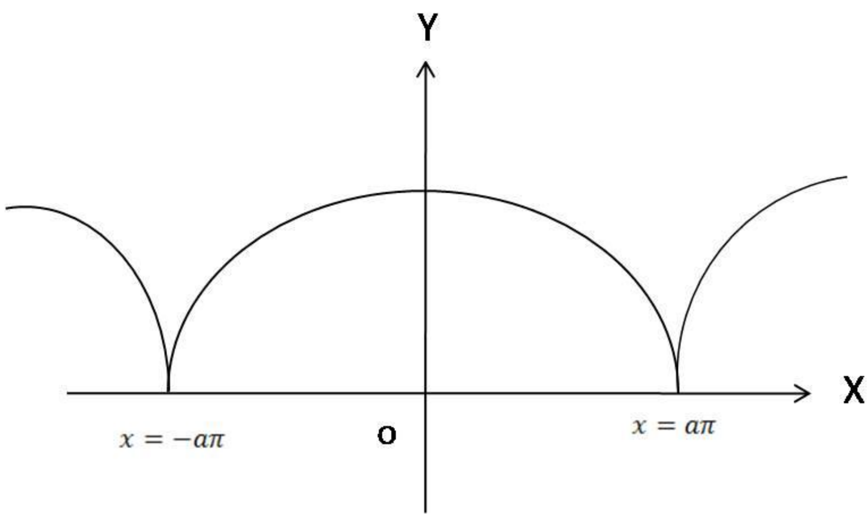
$$= -\tan\frac{t}{2}$$

اب مندرجہ ذیل ٹیبل پر غور کرتے ہیں۔

t	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
x	$x = -a\pi$	$-a\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$	0	$a\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$	$a\pi$
y	0	a	$2a$	a	0
$\frac{dy}{dx}$	∞	1	0	-1	$-\infty$

ہم دیکھتے ہیں کہ $t = -\pi$ اور $t = \pi$ پر مماس y محور کے متوازی ہیں۔ یہ نقاط ہی کسپ (Cusp) کہلاتے ہیں۔ اس کے ساتھ ہی $t = 0$ پر مماس x کے متوازی ہے۔

مندرجہ بالا گفتگو کے بعد دی گئی مساوات کو ٹریس کرنا آسان ہے جو کہ درجہ ذیل ہے۔



شکل:5.5.2

5.6 پولر مساوات کو ٹریس کرنا (Tracing Polar Equations)

درجہ ذیل پہلوؤں کو ذہن میں رکھ کر کسی پولر مساوات $r = f(\theta)$ کو ٹریس کیا جا سکتا ہے۔

(الف) توازن:

i. اگر $r = f(\theta)$ میں θ کی جگہ $-\theta$ رکھنے پر مساوات پر کوئی فرق نہیں پڑتا تو وہ منحنی (Curve) ابتدائی خط کے گرد توازن میں ہو گا۔

ii. اگر $r = f(\theta)$ میں θ کی جگہ $(\pi - \theta)$ رکھنے پر مساوات پر کوئی فرق نہیں پڑتا تو یہ منحنی (Curve) خط $\theta = \frac{\pi}{2}$ کے گرد توازن میں ہو گا۔

iii. منحنی پول کے گرد توازن میں ہوتا ہے۔

(ب)پول: کوئی منحنی(Curve)پول سے ہو کر گزرتا ہے۔ یہ تبھی ممکن ہے جب $r = 0$ کے لیے θ کی کوئی حقیقی قیمت(Real Value)حاصل ہو گی۔

(ج)ایسمپٹوٹ: منحنی کے لیے اسمپٹوٹ اگر ہوں تو حاصل کریں۔

(د)رجنس یا علاقہ (Regions):وہ رجن حاصل کریں جس میں منحنی موجود نہ ہو۔ اگر θ کی θ_1 اور θ_2 کے درمیان کچھ قیمتوں کے لیے r خیالی ہو، تب $\theta = \theta_1$ اور $\theta = \theta_2$ کے درمیان منحنی کا کوئی حصہ نہیں ہو گا۔

اگر r کی سب سے چھوٹی اور سب سے بڑی قیمتیں a اور b ہوں تو منحنی $r = b$ کے اندر اور $r = a$ کے باہر موجود ہو گا جہاں $a > 0, b > 0$

(ہ)$\tan\varphi = r\frac{d\theta}{dr}$ کی مدد سے φ کی قیمت حاصل کریں۔

اگر $\theta = \theta_1$ جب کہ $\phi = 0$ تب $\theta = \theta_1$ منحنی کے لیے مماس ہو گی اور اگر $\varphi = \frac{\pi}{2}$ تب $\theta = \theta_2$، مماس ریڈیس ویکٹر $\theta = \theta_2$ منحنی پر عمود(Perpendicular)ہو گا۔

خاص نقاط(Special Points)

اگر $\frac{dr}{d\theta} > 0$ تو θ کے بڑھنے پر r بڑھے گا اور اگر $\frac{dr}{d\theta} < 0$ تو θ کے بڑھنے پر r گھٹے گا۔

ان باتوں کو دھیان میں رکھ کر ہم دیے ہوئے منحنی کو ٹریس کر سکتے ہیں۔

مثال10: $r = a + b\cos\theta$ کو ٹریس کریں۔

حل: دی گئی مساوات ہے

$$r = a + b\cos\theta$$

مساوات کو دیکھنے کے بعد ہمیں تین صورتیں دکھائی دیتی ہیں۔

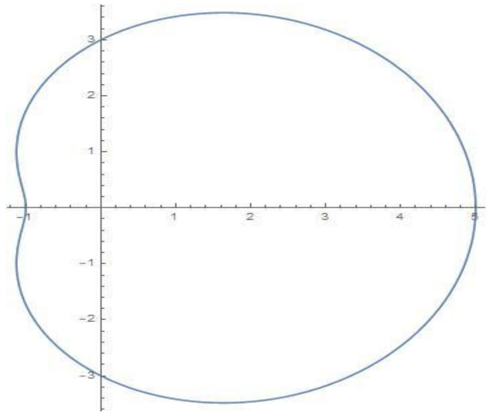
(الف)<u>جب $a > b$ ہو:</u>

i. چونکہ θ کی جگہ θ- رکھنے پر مساوات پر کوئی فرق نہیں پڑتا اس لیے منحنی ابتدائی خط کے گرد توازن میں ہو گا۔

ii. چونکہ $a > b$ اس لیے r ہمیشہ مثبت ہو گا۔

مندرجہ ذیل ٹیبل پر غور کریں:

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
r	$a+b$	$a+\frac{b}{2}$	a	$a-\frac{b}{2}$	$a-b$



شکل: 5.6.1

(ب) جب $a < b$ ہو:

i. دی گئی مساوات کا منحنی ابتدائی خط کے گرد توازن میں ہو گا۔

ii. جب $r = 0$ تب

$$a + b\, cos\, \theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad cos\, \theta = -\frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{a}{b}\right)$$

iii. جب $\theta = 0$، تب

$$r = a + b$$

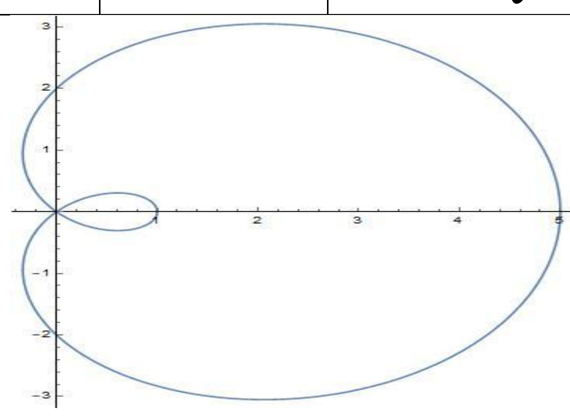
جو کہ r کی سب سے زیادہ قیمت ہے۔

iv. جب $\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{a}{b}\right)$، تب منحنی مبدا سے ہو کر گزرتا ہے۔

v. جب θ کی قیمت $\cos^{-1}\left(-\frac{a}{b}\right)$ اور π کے درمیان ہو، تب $r < 0$ اور جب $\theta = \pi$ تب $r = a - b$

اب مندرجہ ذیل ٹیبل پر غور کریں:

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	$\cos^{-1}\left(-\frac{a}{b}\right)$	$\cos^{-1}\left(-\frac{a}{b}\right) < \theta < \pi$	π
r	$a + b$	a	0	منفی	$a - b$



شکل: 5.6.2

(ج) جب $a = b$ ہو

جب $a = b$، تب

$$r = a(1 + cos\,\theta)$$

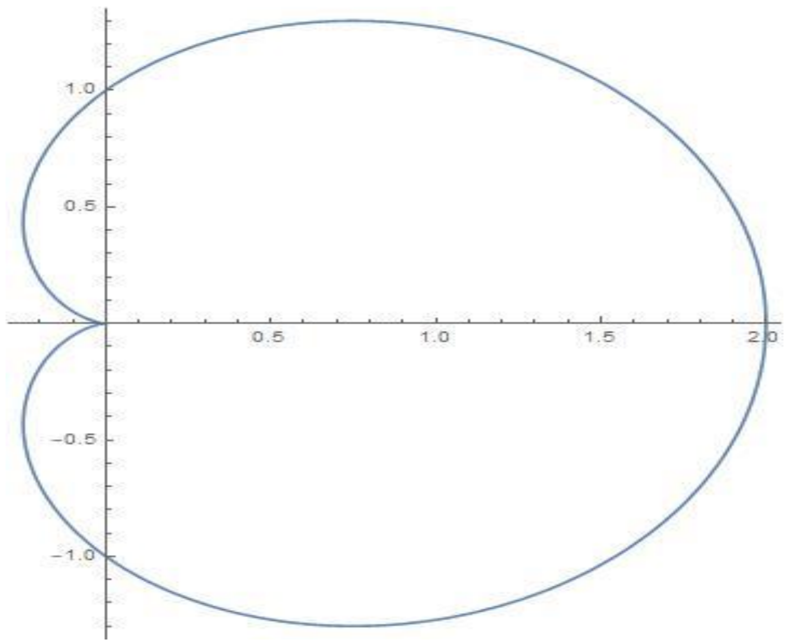
i. منحنی ابتدائی خط کے گرد توازن میں ہوگا۔

ii. جب $\theta = 0$، تب $r = 2a$ اور جب $\theta = \pi$ تب $r = 0$

اور جب $\theta = \frac{\pi}{2}$، تب $r = a$

مندرجہ ذیل ٹیبل پر غور کریں:

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
r	$2a$	$\frac{3a}{2}$	a	$\frac{a}{2}$	0	a



شکل: 5.6.3

5.7 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں آپ نے سیکھا:

1۔ کارتیسی مساوات کو ٹریس کرنا۔

2۔ پیرامیٹرک مساوات کو ٹریس کرنا۔

3۔ پولر مساوات کو ٹریس کرنا۔

5.8 کلیدی الفاظ(Key Words)

ٹریسنگ، توازن، ابتدائی خط، برعکس کواڈرینٹ کارتیسی مساوات، پولر مساوات، کوآرڈینیٹ محور، منحنی، مساوات، متوازی، مبدا، پیرامٹرک مساوات

5.9 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

5.9.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1۔ اگر کسی مساوات میں xاور y کو آپس میں بدل دینے پر مساوات میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی تب کروکس کے گرد توازن میں ہوگا؟

2۔ اگر کسی مساوات میں xکی جگہ$(-x)$اورyکی جگہ$(-y)$رکھنے پر مساوات میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی تب منحنی.....................توازن میں ہوگا۔

3۔ $y^2(2a-x)=x^3$کے لیے مماس ہے..........................

4۔ $x^2y^2=x^2-a^2$کے لیے مماس ہے............................

5۔ $r=a\,sin\,3\theta$کے منحنی میں کتنے لوپس ہوں گے ؟

6۔ $r=a(1+cos\,\theta)$ابتدائی خط کے گرد توازن میں نہین ہے۔(صحیح یاغلط؟)

7۔ $r=a\,cos\,2\theta$کے منحنی میں کتنے پولس ہوں گے ؟

8۔ اگر$r=f(\theta)$میںθکی جگہ$(\pi-\theta)$رکھنے پر مساوات پر کوئی فرق نہیں پڑتا، تب اس مساوات کا منحنی$\theta=\frac{\pi}{2}$خط کے گرد توازن میں ہوگا۔(صحیح یاغلط؟)

5.9.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

1۔ $y=-\frac{3}{2}x^4+4x^3+3x^2-12x$کوٹریس کریں۔

2۔ $y=(x+1)^2(x-3)$کوٹریس کریں۔

3۔ $y=x^4-2x+10$کوٹریس کریں۔

4۔ $y=(x+2)(x-3)(x-7)$کوٹریس کریں۔

5۔ $y=2x^5-3x^4+112$کوٹریس کریں۔

5.9.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1۔ $y^2(x-a) = x^2(x+a)$ کو ٹریس کریں۔

2۔ $x^2y^2 = x^2 - a^2$ کو ٹریس کریں۔

3۔ $y^2 = (x-1)(x^2-5x+6)$ کو ٹریس کریں۔

4۔ $y^2 = \frac{2x-1}{x^2-1}$ کو ٹریس کریں۔

5۔ $y^2 = \frac{x^2(x-a)}{3a}$ کو ٹریس کریں۔

6۔ $y^2 = \frac{x^5(2a-x)}{4a^4}$ کو ٹریس کریں۔

7۔ $y^2 = x^2(x-5)$ کو ٹریس کریں۔

8۔ $y^2 = \frac{x^2+1}{x^2}$ کو ٹریس کریں۔

9۔ $x = a\,sin\,2\theta(1+cos\,2\theta), y = a\,cos\,2\theta(1-cos\,2\theta)$ کو ٹریس کریں۔

10۔ $x = cos\,\theta\,, y = cot\,\theta$ کو ٹریس کریں۔

11۔ $x = a(3\,cos\,t - cos^3 t), y = a(3\,sin\,t - sin^3 t)$ کو ٹریس کریں۔

12۔ $x = a\left(sin\,t - \frac{1}{3}\sin 3t\right), y = a\left(\cos t - \frac{1}{3}\cos 3t\right)$ کو ٹریس کریں۔

13۔ $r = a\,cos\,2\theta\,, a > 0$ کو ٹریس کریں۔

14۔ $r = ae^{b\theta}, a > 0, b > 0$ کو ٹریس کریں۔

15۔ $r = a(1 - cos\,\theta)$ کو ٹریس کریں۔

16۔ $x^4 + y^4 = 4a^2xy$ کو پولر کی شکل میں بدل کر ٹریس کریں۔

17۔ $x^4 + y^4 = 4a^2xy^2$ کو پولر کی شکل میں بدل کر ٹریس کریں۔

18۔ $r^2 = a^2\,cos\,2\theta$ کو ٹریس کریں۔

19۔ $r = a(\theta - \sin\theta)$ کو ٹریس کریں۔

20۔ $r = a(1 - \cos\theta)$ کو ٹریس کریں۔

5.10 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

---

1. Text Book of Calculus, Khalil Ahmad, Real World Education Publishers, New Delhi, 2014

اکائی 6۔ غیر متعینہ صورت اور L-ہاسپٹل قانون

(Indeterminate Form and L'Hospital'sRule)

اکائی کے اجزا

6.0 تمہید(Introduction)

اس سیکشن میں ہم لمٹ کے نکالنے کے لیے ایسا آسان طریقہ استعمال کریں گے جس میں ہم مشتق(Derivative) کو استعمال کرتے ہیں۔اب تک ہم نے جولمٹ نکالیہیں وہ یا تو ترسیمی (Graphically) یا پھر عددی(Numerically) طریقہ پر مبنی تھی لیکن اب جو طریقہ ہم دیکھیں گے وہ مشتق (Derivative) کا استعمال کرتا ہے اور یہ طریقہ اتنا طاقتور اور صحیح جواب دینے کی صلاحیت رکھتا ہے کہ اکثر کمپیوٹر پروگرام اسی طریقہ کو استعمال کرتے ہیں۔

6.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کو پڑھنے کے بعد طالب علم اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ مختلف غیر متعینہ صورت کے درمیان کا فرق معلوم کر سکیں گے اورL' Hospital's Rule کی مدد سے ان کی غیر متعینہ صورت معلوم کر سکیں گے۔

6.2 غیر متعینہ صورت(Indeterminate Forms)

ہم جانتے ہیں کہ اگر$\lim_{x\to a} f(x)$ اور$\lim_{x\to a} g(x)$ دونوں وجود رکھتے ہیں اور $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ ہوتب

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

لیکن کئی بار ایسا ہوتا ہے کہ $lim_{x\to a} f(x)=0$ اور $lim_{x\to a} g(x)=0$ تب بھی ہم $lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ کی قدر نکال سکتے ہیں۔اس طرح کی لمٹ کو ہم $\frac{0}{0}$ قسم کی غیر متعینہ صورت کہتے ہیں۔اب کچھ مثالیں دیکھیں:

a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$

اوپر دی گئی دونوں مثالیں $\frac{0}{0}$ قسم کی غیر متعینہ صورت ہیں۔ہم جانتے ہیں کہ مثال (a) میں اگر ہم شمارکنندہ(Numerator) کے فیکٹر (Factor) نکال کر اور ایک جیسے ارکان(Term) کو کینسل(Cancel) کر دیں تو ہم لمٹ حاصل کر سکتے ہیں ۔ جب کہ مثال (b) کو جیومترائی(Geometrically) حل کر سکتے ہیں لیکن ہمارے پاس بہت سی ایسی غیر متعینہ صورتیں ہوتی ہیں جن کو نہ تو ہم الجبرائی (Algebraically) اور نہ ہی جیومترائی طریقہ سے حل کر سکتے ہیں، اس لیے ہم کو ایک ایسے طریقہ کی ضرورت ہے جو عام ہو اور صحیح جواب دینے کی صلاحیت رکھتا ہو۔اس طریقہ کو ہم L' Hospital's Rule کہتے ہیں۔ہم کو یاد رکھنا چاہیے کہ

1^{∞}، 0°، $\infty-\infty$، $0.\infty$ اور ∞°

بھی غیر متعینہ صورتیں ہیں۔

6.3 L-ہاسپٹل قانون(L'Hospital's Rule)

6.3.1 $\frac{0}{0}$صورت کے لیےL-ہاسپٹل قانون(L' Hospital's Rule for $\frac{0}{0}$ form)

قضیہ: مان لیجے کہ f اور g اس طرح کے تفاعلات ہیں کہ

i. $lim_{x\to a} f(x) = 0$ اور $lim_{x\to a} g(x) = 0$

ii. $f'(x), g'(x)$ وجود رکھتے ہیں اور $g'(x) \neq 0, g(x) \neq 0$ جہاں پر $x \in (a-\in, a+\in)$
ممکنہ طور پر a کو چھوڑ کر

iii. $\lim_{x\to a} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$ وجود رکھتا ہے۔

تب $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$

ثبوت: مان لیتے ہیں

$f(a) = 0$ اور $g(a) = 0$ ... (1)

تو ہم اس اوپر کی مساوات کو استعمال کر کے دیکھتے ہیں کہ

$lim_{x\to a} g(x) = g(a)$ اور $lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

اس سے ہم کو یہ معلوم ہوتا ہے کہ f اور g، نقطہ a پر مسلسل ہیں۔

اب ایک وقفہ $[a, x]$ کو دیکھتے ہیں جہاں پر $x > a$

i. f اور g دونوں $[a, x]$ میں مسلسل ہیں۔

ii. f اور g دونوں (a, x) میں تفرق پزیر ہیں۔

iii. $\forall p \in (a, x), \quad g'(p) \neq 0$

اس طرح سے کوشی کے اوست قیمت قضیہ (Cauchy's Mean Value Theorem) کی تمام شرائط پوری ہوتی ہیں تو ایک نقطہ $c \in (a, x)$ کچھ اس طرح سے وجود رکھتا ہے کہ

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x)}{f(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, c \in (a, x)$$

کیوں کہ، $x \to a$ تب $c \to a$ اس لیے

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

L' Hospital's Rule استعمال کرنے کا طریقہ:

Step-I: معلوم کیجیے کہ $\frac{f(x)}{g(x)}$ کی لمٹ ایک $\frac{0}{0}$ قسم کی غیر متعینہ صورت ہے۔

Step-II: f اور g کا الگ الگ تفرق کیجیے۔

Step-III: $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ کی لمٹ معلوم کیجیے، اگر یہ لمٹ متناہی، ∞+ یا ∞- ہو تب یہ $\frac{f(x)}{g(x)}$ کی لمٹ کے برابر ہو گی۔

نوٹ:

i. L' Hospital's Rule میں ہم $f(x)$ اور $g(x)$ کو الگ الگ تفرق کریں گے۔ ہم کو یہ یاد رکھنا چاہیے کہ ان کو تفرق کرنا $\frac{f(x)}{g(x)}$ کو تفرق کرنے سے الگ ہے۔

ii. یہ بھی ہو سکتا ہے کہ $lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ بھی $\frac{0}{0}$ صورت میں ہو۔ اس صورت میں ہم L' Hospital's Rule کو دوبارہ استعمال کریں گے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to g}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

جہاں پر g اور f دونوں L' Hospital's Rule کی ساری شرائط پوری کرتے ہیں۔

iii. اس قانون کو ہم کچھ اس طرح سے بھی تعمیم (Generalize) کر سکتے ہیں:

اگر $f(x)$ اور $g(x)$ ایسے تفاعلات ہیں کہ $\lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)}$ ایک $\frac{0}{0}$ قسم کی غیر متعینہ صورت ہے اور $f^n(x)$ اور $g^n(x)$ L' Hospital's Rule کی تمام شرائط پوری کرتے ہیں تب،

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \cdots = \lim_{x\to a}\frac{f^n(x)}{g^n(x)}$$

مثالیں:

(1) ہم نے اوپر ایک مثال دی تھی $lim_{x\to 0}\frac{sin\,x}{x}$ ہم جانتے ہیں کہ $lim_{x\to 0}\,sin\,x = 0$ اور $lim_{x\to 0}\,x = 0$ اس لیے یہ ایک $\frac{0}{0}$ کی غیر متعینہ صورت ہے۔ اب ہم اس کو L' Hospital's Rule سے حل کرتے ہیں۔ اب $sin\,x$ اور x کو تفرق کیجیے اور $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ کی لمٹ معلوم کیجیے۔ اگر یہ متناہی (Finite)، ∞+ یا $\infty-$ کے برابر آتی ہے تو یہ $\frac{f(x)}{g(x)}$ کی لمٹ کے برابر ہو گی۔

اس لیے

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{cos\,x}{1} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{sin\,x}{x} = 1$$

(2) $\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x^3-27}$ کو معلوم کیجیے۔

حل: مان لیجیے $f(x) = x^4 - 81$ اور $g(x) = x^3 - 27$

تب $\lim_{x\to 3} x^4 - 81 = 0$ اور $\lim_{x\to 3} x^3 - 27 = 0$ اس لیے

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^4-81}{x^3-27}$ ایک $\frac{0}{0}$ قسم کی غیر متعینہ صورت ہے۔ اس لیے ہم L' Hospital's Rule کا استعمال کرتے ہیں۔

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x^3-27} = \lim_{x\to 3}\frac{4x^3}{3x^2}$$
$$= \lim_{x\to 3}\frac{4}{3}x$$
$$= \frac{4}{3}\times 3 = 4$$

(3) $lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$ کو حاصل کریں اور دکھائیں کہ L' Hospital's Rule اور فیکٹرنگ (Factoring) ایک ہی جواب دیتے ہیں۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $\lim_{x\to 3} x^2-9 = 0$ اور $lim_{x\to 3}\ x-3 = 0$ ہے اس لیے یہ لمٹ $\frac{0}{0}$ قسم کی ایک غیر متعینہ صورت ہے۔

ہم L' Hospital's Rule لگاتے ہیں

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{\frac{d}{dx}[x^2-9]}{\frac{d}{dx}[x-3]}$$
$$= \lim_{x\to 3}\frac{2x}{1}$$
$$= 6$$

اب ہم دوبارہ اسی لمٹ کو فیکٹر کر کے حاصل کرتے ہیں۔

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}$$
$$= \lim_{x\to 3}(x+3)$$
$$= 6$$

تو اس طرح سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ ہم کو دونوں طریقوں سے ایک ہی قیمت حاصل ہو رہی ہے۔

اب ہم ایک مثال لیتے ہیں جس میں L' Hospital's Rule کو ایک سے زیادہ بار استعمال کرتے ہیں۔

(4) $lim_{x\to 0}\frac{7-7\cos x}{17x^2}$ کو حاصل کریں۔

حل: ہم دیکھتے ہیں کہ $lim_{x\to 0}\ 7-7\cos x = 0$ اور $lim_{x\to 0}\ 17x^2 = 0$، اس لیے یہ ایک $\frac{0}{0}$ قسم کی غیر متعینہ صورت ہے۔ اب ہم L' Hospital's Rule کو استعمال کرتے ہیں

$$\lim_{x\to 0}\frac{7-7\cos x}{17x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{7\sin x}{34x}$$
$$= \frac{7}{34}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

لیکن ہم کو جو نئی لمٹ حاصل ہوئی ہے وہ بھی ایک $\frac{0}{0}$ قسم کی غیر متعینہ صورت ہے کیوں کہ $lim_{x\to 0}\sin x = 0$ اور $lim_{x\to 0}\ x = 0$

اس لیے ہم دوبارہ سے L' Hospital's Rule کا استعمال کریں گے۔

$$\frac{7}{34}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{7}{34}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}\right)$$
$$= \frac{7}{34}\left(\lim_{x\to 0}\cos x\right)$$

$$= \frac{7}{34} \times 1 = \frac{7}{34}$$

(5) $lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x^3}$ کو معلوم کیجیے۔

حل: ہم دیکھتے ہیں کہ $e^x - 1$ اور x^3 دونوں کی لمٹ کی قدر 0 ہے۔ اس لیے یہ ایک $\frac{0}{0}$ قسم کی غیر متعینہ صورت ہے۔ اب ہم L'Hospital Rule کا استعمال کریں گے۔

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}[e^x - 1]}{\frac{d}{dx}[x^3]}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{3x^2}$$
$$= +\infty$$

نوٹ: L' Hospital's Rule کو استعمال کرنے سے پہلے ہمیشہ یہ بات یاد رکھنی چاہیے کہ لمٹ ایک غیر متعینہ صورت ہے ورنہ جو لمٹ حاصل کی جائے گی وہ غلط ہوگی اس کو ایک مثال سے سمجھتے ہیں۔

(6) $lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sec x}$ کو حاصل کریں۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ یہ ایک غیر متعینہ صورت نہیں ہے اور ہم اس کی لمٹ کچھ اس طرح سے نکال سکتے ہیں:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sec x} = \frac{\lim_{x\to 0}(1 - \cos x)}{\lim_{x\to 0}(\sec x)}$$
$$= \frac{0}{1} = 0$$

اور اگر ہم L' Hospital's Rule لگا کر دیکھتے ہیں تو ہم پائیں گے کہ

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sec x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sec x \tan x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\sec x}$$
$$= \frac{1}{1} = 1$$

تو اس سے ہم کو ایک مختلف لمٹ حاصل ہوتی ہے جو غلط ہے۔ اس لیے L' Hospital's Rule لگانے سے پہلے یہ ضرور دیکھ لیں کہ لمٹ ایک غیر متعینہ صورت ہے۔

6.3.2 $\frac{\infty}{\infty}$ صورت کے لیے L-ہاسپٹل قانون (L' Hospital's Rule for $\frac{\infty}{\infty}$ form)

ہم $\frac{f(x)}{g(x)}$ کی لمٹ کو $\frac{\infty}{\infty}$ قسم کی غیر متعینہ صورت کہتے ہیں اگر شمار کنندہ (Numerator) کی لمٹ ∞ آئے اور ذیلی (denominator) کی لمٹ بھی ∞ ہو۔ اس طرح کی غیر متعینہ صورت کو حل کرنے کے لیے بھی L' Hospital's Rule کو استعمال کر سکتے ہیں۔

قضیہ: f اور g دو اس طرح کے تفاعلات ہیں جو مندرجہ ذیل کو مطمئن (satisfy) کرتے ہیں:

i. $lim_{x\to a} f(x) = \infty$ اور $lim_{x\to a} g(x) = \infty$

ii. $f'(x), g'(x)$ واجود رکھتے ہیں اور $g'(x) \neq 0, g(x) \neq 0$ جہاں پر $x \in (a-\in, a+\in), \in > 0$
ممکنہ طور پر a کو چھوڑ کر۔

iii. $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ وجود رکھتا ہے

تب $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

ثبوت: مان لیتے ہیں x اور b دو ایسے نقطے ہیں جو

$$a < x < b < a + \epsilon$$

کو مطمئن کرتے ہیں، تب ہم آسانی سے دکھا سکتے ہیں کہ f اور g کسی وقفہ $[x, b]$ میں کوشی کے اوسط قیمت قضیہ کی تمام شرائط کو پورا کرتے ہیں اس لیے ہمارے پاس ایک نقطہ $c \in (x, b)$ ایسا ہو گا کہ

$$\frac{f(b) - f(x)}{g(b) - g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x)\left[\frac{f(b)}{f(x)} - 1\right]}{g(x)\left[\frac{f(b)}{g(x)} - 1\right]} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \ldots(2)$$

کیوں کہ ہم جانتے ہیں کہ

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \lim_{x\to a} \frac{f(b)}{f(x)} = 0$$

اسی طرح سے ہم دکھا سکتے ہیں کہ $\lim_{x\to a} \frac{g(b)}{g(x)} = 0$

ان سب باتوں کو ہم مساوات (2) میں استعمال کرتے ہیں

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

کیوں کہ $x \to a \Rightarrow c \longrightarrow a$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

نوٹ: جس طرح سے ہم نے $\frac{0}{0}$ صورت کے L' Hospital's Rule کو اعلا مشتق کے لیے بڑھایا تھا اسی طرح $\frac{0}{0}$ صورت کو بھی کر سکتے ہیں۔

مثال(6): $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^2 \sin x^2}$ حاصل کیجیے۔

حل: ہم کو دیا گیا ہے

$$\frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2} = \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \cdot x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin x^2}$$

لیکن ہم جانتے ہیں کہ

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin x^2} = 1$$

اس لیے

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x^2}{x^4}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sin x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x^2}{x^4}\cdot 1$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x^2}{x^4}$$

لیکن ہم دیکھتے ہیں کہ $\lim_{x\to0}(1-\cos x^2)=0$ اور $\lim_{x\to0}(x^4)=0$ اس لیے یہ لمٹ صورت $\frac{0}{0}$ میں ہے تو ہم L' Hospital's Rule استعمال کرتے ہیں

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x^2}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x^2}{4x^3}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{x^2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times1$$
$$=\frac{1}{2}$$

مثال(7): $\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\csc x}$ کی قدر نکالیے۔

حل: ہم دیکھتے ہیں کہ متناہی کی لمٹ $-\infty$ ہے اور ذیلی (denominator) کی لمٹ $+\infty$ ہے اس طرح سے ہمارے پاس $\frac{\infty}{\infty}$ قسم کی غیر متعینہ صورت ہے۔ ہم L' Hospital's Rule کا استعمال کرتے ہیں

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\ln x}{\csc x}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-\csc x\cot x}\right)$$

لیکن ہم دیکھتے ہیں کہ ہمیں دوبارہ سے $\frac{\infty}{\infty}$ قسم کی غیر متعینہ صورت ملتی ہے۔ اب اگر ہم دوبارہ سے L' Hospital's Rule کا استعمال کرتے ہیں تو $\frac{1}{x}$ کی متناہی پاور (Power) ملتی ہے اور ذیلی (denominator) میں $\csc x\cot x$ کی رکن ملتی ہے۔ اس طرح سے ہم جتنی بار بھی L' Hospital's Rule کا استعمال کرتے ہیں ہمیں $\frac{\infty}{\infty}$ قسم کی غیر متعینہ صورت ہی ملتی ہے۔ اس لیے کسی اور طریقہ کا استعمال کریں گے۔ ہم اپنی پچھلی مساوات کا استعمال کریں گے۔

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc x\cot x}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{-\sin x}{x}\tan x\right)$$
$$=-\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\lim_{x\to0^+}(\tan x)$$
$$=-(1)(0)$$
$$=0$$

$$\Rightarrow\qquad \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\csc x}=0$$

مثال(8): $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan 3x}{\tan x}$ کو حاصل کیجیے۔

حل: ہم دیکھتے ہیں کہ یہ ایک $\frac{\infty}{\infty}$ قسم کی صورت ہے اس لیے ہم $\frac{\infty}{\infty}$ کا L' Hospital's Rule کا استعمال کریں گے۔

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan 3x}{\tan x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3\sec^2 3x}{\sec^2 x}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3\cos^2 x}{\cos^2 3x}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-6\cos x \sin x}{6\cos 3x \sin 3x}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin 2x}{\sin 6x}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos 2x}{6\cos 6x}$$
$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{\cos 6x}$$
$$= \frac{1}{3}$$

مثال(9): $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$ معلوم کیجیے۔

حل: ہم دیکھتے ہیں کہ $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$ ایک $\infty-\infty$ صورت (Form) ہے۔ اس صورت کو ہم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ کی صورت میں تبدیل کر سکتے ہیں۔ اس لیے

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x - x}{x\sin x}\right)$$
$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x - x}{x^2}\right)\left(\frac{x}{\sin x}\right)$$

چوں کہ $\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\right) = 1$ اس لیے

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x - x}{x^2}\right)\left(\frac{x}{\sin x}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x - x}{x^2}\right) \qquad \left(\text{صورت } \frac{0}{0}\right)$$
$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x - 1}{2x}\right) \qquad \left(\text{صورت } \frac{0}{0}\right)$$
$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{-\sin x}{2}\right) = 0$$

6.3.3 $0\cdot\infty$ صورت کے لیے L - ہاسپٹل قانون (L' Hospital's Rule for $0\cdot\infty$ Form)

اگر ہم دو تفاعلات f اور g کو اس طرح رکھیں کہ پہلے کی لمٹ 0 اور دوسرے کی ∞ ہو تو $f\cdot g$ کی لمٹ $0\cdot\infty$ ہوگی۔ مثال کے طور پر $\lim_{x\to0^+} x\ln x$ کو لیتے ہیں۔ اس میں پہلے فیکٹر (Factor) کی لمٹ 0 ہے اور دوسرے کی $\infty-$ ہے۔ اس لیے $\lim_{x\to0^+} x\ln x$ ایک $0\cdot\infty$ قسم کی غیر متعینہ صورت ہے۔ ہم کئی بار $0\cdot\infty$ قسم کی غیر متعینہ صورت کو ratio کی صورت میں لکھ کر اور پھر اس پر L' Hospital's Rule لگا کر نکالتے ہیں۔

مثال(10): $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(1-\tan x)\sec 2x$ کو حاصل کیجیے۔

حل: ہم دیکھتے ہیں کہ یہ ایک $0 \cdot \infty$ قسم کی غیر متعینہ صورت ہے۔ اس لیے ہم اس صورت (Form) کو ہم $\frac{0}{0}$ کی غیر متعینہ صورت میں تبدیل کرتے ہیں۔

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(1-\tan x)\sec 2x = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\tan x)}{1/\sec 2x}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\tan x)}{\cos 2x}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\sec^2 x}{-2\sin 2x}$$
$$= \frac{-2}{-2} = 1$$

مثال(11): $\lim_{x\to 1}\sec\left(\frac{\pi}{2}x\right)\log\left(\frac{1}{x}\right)$ حاصل کیجیے۔

حل: ہم دیکھتے ہیں کہ یہ ایک $0 \cdot \infty$ صورت (Form) کی لمٹ ہے اس لیے ہم اس کو ریشو (Ratio) میں تبدیل کرتے ہیں۔

$$\lim_{x\to 1}\sec\left(\frac{\pi}{2}x\right)\log\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{\log\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{x\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \frac{2}{\pi}$$

مثال(12): $\lim_{x\to 1}(1-x)\,tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ کو حاصل کیجیے۔

حل: یہ لمٹ $0 \cdot \infty$ صورت (Form) کی ہے اس لیے ہم اس کو $\frac{0}{0}$ کی غیر متعینہ صورت میں تبدیل کرتے ہیں۔

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\,tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{cot\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}cosec^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$
$$= \frac{2}{\pi}$$

نوٹ: کیا $0 \cdot \infty$ قسم کی غیر متعینہ صورت کی کوئی قدر 0 ہو گی؟ $0 \cdot \infty$ کو دیکھ کر کوئی سوچ سکتا ہے کہ اس کی قدر 0 ہو گی۔ کیوں کہ ہم کسی بھی چیز کو اگر 0 سے ضرب دیں تو ہم کو 0 ملتا ہے۔ لیکن یہاں پر ایسا نہیں ہے کیوں کہ $0 \cdot \infty$ کن ہی دو نمبرات کا ضرب نہیں ہے بلکہ لمٹ ہے۔ مندرجہ مثالیں اس کو واضح کرتی ہیں۔

$$\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}(1) = 1 \quad \text{(i)}$$
$$\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty \quad \text{(ii)}$$

اوپر کی دونوں مثالیں $0 \cdot \infty$ قسم کی غیر متعینہ صورت کی ہیں اور دونوں مثالوں کی لمٹ کی قدر 0 نہیں ہے۔

$\infty - \infty$ قسم کی غیر متعینہ صورت:

کوئی بھی لمٹ کا سوال جس سے ہم کو مندرجہ میں سے کوئی ایک ملتا ہو

$$(-\infty)-(+\infty)،(+\infty)-(-\infty)،(+\infty)-(+\infty)،(-\infty)-(-\infty)$$

$\infty-\infty$ قسم کی غیر متعینہ صورت کہلاتا ہے۔ اس طرح کی لمٹ کو ہم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ کی لمٹ میں تبدیل کر کے حل کر سکتے ہیں۔ ایک بات کا اور خیال کرنا چاہیے کہ

$$(-\infty)-(+\infty)،(+\infty)-(-\infty)،(+\infty)-(+\infty)،(-\infty)-(-\infty)$$

غیر متعینہ نہیں ہیں کیوں کہ یہ دونوں ایک ساتھ مل کر کوئی ایک لمٹ دیتی ہیں۔

مثال(13): $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$ معلوم کیجیے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ یہ ایک $\infty-\infty$ قسم کی غیر متعینہ صورت ہے۔ ہم اس کو $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ میں تبدیل کر سکتے ہیں۔ اس لیے

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x - x}{x\sin x}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x - x}{x^2}\right)\left(\frac{x}{\sin x}\right)\end{aligned}$$

چونکہ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)=1$ اس لیے

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x - x}{x^2}\right)\left(\frac{x}{\sin x}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x - x}{x^2}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x - 1}{2x}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin x}{2}\right)=0\end{aligned}$$

مثال(14): $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)$ معلوم کیجیے۔

حل: یہ ایک $\infty-\infty$ قسم کی غیر متعینہ صورت ہے۔ ہم اس کو $\frac{0}{0}$ صورت میں تبدیل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-(e^x-1)}{x(e^x-1)}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-e^x}{e^x-1+xe^x}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-e^x}{e^x+xe^x+e^x}\right)\\ &= \frac{-1}{2}\end{aligned}$$

مثال(15): $\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{\log(x-3)}-\frac{1}{x-4}\right)$ معلوم کیجیے۔

حل: یہ ایک $\infty-\infty$ قسم کی غیر متعینہ صورت ہے۔

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{\log(x-3)}-\frac{1}{x-4}\right) &= \lim_{x\to 4}\left(\frac{(x-4)-\log(x-3)}{(x-4)\log(x-3)}\right)\\ &= \lim_{x\to 4}\left(\frac{1-\frac{1}{x-3}}{\log(x-3)+\frac{x-4}{x-3}}\right)\end{aligned}$$

$$= \lim_{x \to 4} \left(\frac{\frac{1}{(x-3)^2}}{\frac{1}{x-3} + \frac{1}{(x-3)^2}} \right)$$
$$= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

6.3.4 $0^0, \infty^0, 1^\infty$ قسم کے لیے L-ہاسپٹل قانون (L' Hospital's Rule for $0^0, \infty^0, 1^\infty$ forms)

ہم کو $\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$ کو معلوم کرنے کے لیے ایک تابع متغیر (Dependent Variable) کی ضرورت پڑتی ہے اور ہم لکھتے ہیں

$$y = [f(x)]^{g(x)}$$

ایک بات اور ذہن میں رکھنی چاہیے کہ

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0,1 \; or \; \infty \text{ اور } \lim_{x \to a} g(x) = 0, \infty \; or \; 0$$

اس لیے

$$y = [f(x)]^{g(x)}$$
$$\Rightarrow \quad \log y = g(x) \log f(x)$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to a} (\log y) = \lim_{x \to a} [g(x) \log f(x)]$$

یہاں پر دائیں ہاتھ کی طرف کی جو جز ہے اس کو ہم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ کی صورت میں تبدیل کر سکتے ہیں اور جس کی قدر آسانی سے معلوم کی جا سکتی ہے۔

مان لیجیے کہ $\lim_{x \to a} [g(x) \log f(x)] = k$

تب

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to a} (\log y) = k$$
$$\Rightarrow \quad \log \left(\lim_{x \to a} y \right) = k$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to a} y = e^k$$

اس لیے

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} = e^k$$

مثال(18): ذیل کو معلوم کیجیے $\lim_{x \to 0} (1 + \sin x)^{1/x}$

حل: جیسا کہ ہم نے اوپر بتایا کہ سب سے پہلے ہم ایک تابع متغیر y مان لیتے ہیں۔ اس لیے

$$y = (1 + \sin x)^{1/x}$$
$$\Rightarrow \quad \ln y = \ln(1 + \sin x)^{1/x}$$
$$= 1/x \ln(1 + \sin x)$$
$$= \frac{\ln(1 + \sin x)}{x}$$

اس لیے

$$\lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{x}$$

جو کہ ایک $\frac{0}{0}$ قسم کی غیر متعینہ صورت ہے۔اس لیے L' Hospital's Rule استعمال کرنے پر

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{1+\sin x}}{1} = 1$$

کیوں کہ ہم یہ دکھا چکے ہیں کہ جب $x \to 0$ تب $\ln y = 1$

ایکسپونینشیل (exponential) تفاعل کے تسلسل سے ہم کو یہ معلوم ہوتا ہے کہ $e^{\ln y} \to \mathrm{e}^1$ جب $x \to 0$ جس سے ہم کو یہ معلوم ہوتا ہے کہ جب $x \to e$ تو $y \to e$ اس لیے

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x} = e$$

مثال(19): $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$ کی قدر معلوم کیجیے۔

حل: مان لیتے ہیں کہ

$$y = (\sin x)^{\tan x} \qquad (1^\infty \text{ صورت})$$

$$\Rightarrow \quad \log y = \tan x \log(\sin x)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\{\tan x \log(\sin x)\} \qquad (\infty\cdot 0 \text{ صورت})$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\log(\sin x)}{\cot x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x\,(-\mathrm{cosec}^2 x)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\log y = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y = e^0 = 1$$

اس لیے

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x} = 1$$

مثال(20): ذیل کی قدر معلوم کیجیے $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan^2 x}$

حل: ہم کو جو لمٹ دی گئی ہے وہ 1^∞ قسم کی ہے۔مان لیجیے

$$y = (\sin x)^{\tan^2 x}$$

$$\Rightarrow \quad \log y = \tan^2 x \log(\sin x)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\log y = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\{\tan^2 x \log(\sin x)\}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\log(\sin x)}{\cot^2 x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cot x}{-2\cot x\,\mathrm{cosec}^2 x} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \log y = \log \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan^2 x} = -\frac{1}{2}$$

اس لیے

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan^2 x} = e^{-\frac{1}{2}}$$

مثال(21): $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right)^{1/x}$ معلوم کیجیے

حل: یہ لمٹ 0^0 قسم کی غیر متعینہ صورت ہے۔ اب مان لیتے ہیں کہ

$$y = \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right)^{1/x}$$

$$\Rightarrow \qquad \log y = 1/x \log\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to\infty} \log y = \lim_{x\to\infty} \frac{\log\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{{}^{-1}/_{(1+x^2)}}{\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x}{(1+x^2)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{2x} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \log \lim_{x\to\infty} y = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to\infty} y = e^0 = 1$$

اس لیے

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right)^{1/x} = 1$$

مثال(22): ذیل کی قدر معلوم کیجیے $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cot x}$

حل: ہم کو جو لمٹ دی گئی ہے وہ 1^∞ قسم کی ہے۔ مان لیجیے کہ

$$y = (1+\sin x)^{\cot x}$$

$$\Rightarrow \qquad \log y = \cot x \log(1+\sin x)$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to 0} \log y = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)}{\tan x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\sec^2 x\,(1+\sin x)} = 1$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to 0} y = e^1$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cot x} = e$$

مثال(23): $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$ معلوم کیجیے۔

حل: مان لیتے ہیں کہ

$$y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$$

$$\Rightarrow \quad \log y = \tan x \log\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \log y = \lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\frac{1}{x}\right)}{\cot x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{-\operatorname{cosec}^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin^2 x}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 x = 1 \times 0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} y = e^0 = 1$$

مثال(24): $\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{1/x^3}$ معلوم کیجیے۔

حل: مان لیتے ہیں کہ

$$y = (\cos x)^{1/x^3}$$

$$\Rightarrow \quad \log y = 1/x^3 \log(\cos x)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} \log y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\cos x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\tan x}{x} \cdot \frac{1}{3x}$$

$$= \infty$$

$$\Rightarrow \quad \log \lim_{x\to 0^+} y = \infty \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} y = 0$$

اس لیے

$$\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{1/x^3} = 0$$

6.4 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی کو مکمل کرنے کے بعد طالب علم نے غیر متعینہ صورت کی تعریف اور اس کی مختلف مثالیں سیکھیں اور وہ اس قابل ہو جانا چاہیے کہ غیر متعینہ صورت کی لمٹ حاصل کرنے کے لیے L' Hospital's Rule کا استعمال کر سکیں ۔ اس کے علاوہ وہ دی گئی غیر متعینہ صورت کی شکل کو دوسری شکل میں تبدیل کر سکیں۔

6.5 کلیدی الفاظ (Key Words)

غیر متعینہ صورت، مشتق، L-ہاسپٹل قانون، تفاعل

6.6 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

6.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

.1 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x - x}{x^2\tan x}\right) = \cdots$

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{5}$

.2 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x^2}{x^4}\right)$ ایک ⋯ قسم کی غیر متعینہ صورت ہے۔

a) $\frac{0}{0}$

b) $\frac{\infty}{\infty}$

c) $0\cdot\infty$

d) ∞^0

.3 $b\neq 1$, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{b^x-1}\right)$ کی قدر ہے ⋯

a) $\frac{\log a}{\log b}$

b) $\frac{\log b}{\log a}$

c) $\log a$

d) $\log b$

.4 a کی کس قیمت کے لیے $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x + a\sin x}{x^3}\right)$ کی قدر متناہی (Finite) ہو گی:

a) 1   b) 0   c) 2   d) -1

.5 اگر $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\alpha x}-e^x-x}{x^2}\right)=\frac{3}{2}$ تب α کی قدر ہو گی ⋯

a) 0   b) 1   c) 2   d) 3

.6 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)$ ایک ⋯ قسم کی غیر متعینہ صورت ہے۔

a) $\infty-\infty$

b) $0\cdot\infty$

c) $\frac{\infty}{\infty}$

d) $\frac{0}{0}$

.7 $\lim_{x\to 1}\left(\sec\frac{\pi}{2}x\log\frac{1}{x}\right)$ کی قدر ہے ⋯

a) π

b) $\frac{\pi}{2}$

2π (c

$\frac{2}{\pi}$ (d

6.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. a، b اور c کی قیمتیں معلوم کیجیے اگر

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a+b\cos x+c\sin x}{x^2}\right)=\frac{1}{2}$$

2. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{1/x}-e+\frac{1}{2}ex}{x^2}\right)$ کی قدر معلوم کیجیے۔

3. b کی کس قیمت کے لیے $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x+a\sin x}{x^3}\right)$ کی قدر متناہی (Finite) ہوگی؟

4. a، b اور c کی کن قیمتوں کے لیے

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{ae^x-b\cos x+ce^{-x}}{x\sin x}\right)=2$$

5. کیا ہم $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^4-4x^3+3}{3x^2-x-2}\right)$ پر L-ہاسپٹل قانون استعمال کر سکتے ہیں؟

6.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. $\lim_{x\to 0}x\left(a^{1/x}-1\right), a>0$ کی قدر معلوم کیجیے۔

2. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$ معلوم کیجیے۔

3. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}(\sec x)^{\cot x}$ معلوم کیجیے۔

6.7 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Calculus, H. Anton, I. Bivens, S. Davis, John Wiley & Sons, Inc. (10th Edition)
2. Calculus, M. J. Strauss, G. L. Bradley, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall (3rd Edition)

اکائی 7۔ تکمل- تحویلی ضابطے-I

(Integration-Reduction Formulae-I)

اکائی کے اجزا

7.0 تمہید(Introduction)

پچھلی اکائی کے نصاب میں ہم تفرق(Differentiation) کے بارے میں جان چکے ہیں۔ اگر ایک تفاعل f وقفہ I پر تفرق پذیر ہے اور f کے مشتق کو اگر f' سے ظاہر کرتے ہیں تب اس سوال کا پیدا ہونا فطری ہے کہ اگر وقفہ I پر f' دیا گیا ہو تو کیا ہم f معلوم کر سکتے ہیں۔ جواب کے لیے ہم اس اکائی میں تکمل کے تصور کو پیش کر سکیں گے جو تفاعل کے تفرق کے عمل کا معکوس ہے۔ نیز تکمل کی معیاری صورتوں پر بھی بحث کریں گے۔

7.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے کے بعد آپ سب اس قابل ہو جائیں گے کہ دیے گیے تفاعل کا متکمل معلوم کر سکیں گے۔ نیز چند تحویلی ضابطوں سے بھی واقف ہو جائیں گے۔

7.2 تکمل(Integration)

تعریف: وقفہ I پر اگر $f'(x)$ دیا گیا ہو تب اس کی مدد سے $f(x)$ کو معلوم کرنے کے طریقے کو تکمل کہتے ہیں۔ بہ لحاظ x کسی تفاعل $f(x)$ کا تکمل(Integration) ایک ایسا تفاعل ہے جس کا بہ لحاظ 'x' تفرقی سر(Differential Coefficient) $f(x)$ ہوتا ہے۔ اس کو $\int f(x)dx$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ یہاں علامت $\int$ لفظ Sum(مجموعہ) کے ابتدائی حرف 'S' کی دراز کردہ شکل ہے۔

اگر $\frac{d}{dx}\left(f(x)\right) = f(x)$ ہو تب

$\int f'(x)dx = f(x) + c$ ہوتا ہے۔

یہاں پر 'c' کو اختیاری مستقل(Arbitrary Constant) کہتے ہیں۔

ذیل میں تکمل کے ضابطے دیے گئے ہیں جن کا ذہن نشین کرنا ضروری ہے۔ ہر ایک ضابطہ $\int f(x)dx = F(x)$ کی شکل میں دیا جارہا ہے اور $\int F(x)dx = f(x)$ ضابطے سے اس کی تصدیق کی جاسکتی ہے۔

ہر صورت میں اختیاری مستقل 'c' مقادیر کا اضافہ کیا جانا چاہیے۔

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}(n \neq -1)$
2. $\int \frac{1}{x} dx = \log(|x|)$
3. $\int e^x dx = e^x$

.4 $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} (a > 0)$

.5 $\int \sin x \, dx = -\cos x$

.6 $\int \cos x \, dx = \sin x$

.7 $\int \sec^2 x \, dx = \tan x$

.8 $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x$

.9 $\int \tan x \, dx = \log(\sec x)$

.10 $\int \cot x \, dx = \log(\sin x)$

.11 $\int \sec x \, dx = \log(\sec x + \tan x)$

.12 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right), (a > |x| \geq 0)$

.13 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$, یا $\log\left(\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right), (x, a > 0)$

.14 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$, یا $\log\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)$

.15 $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

.16 $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log(|f(x)|)$

.17 $\int [f(x)]^{\mathrm{n}} f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$

.18 $\int \log x \, dx = x(\log x - 1)$

.19 $\int \sinh x \, dx = \cosh x$

.20 $\int \cosh x \, dx = \sinh x$

.21 $\int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$

.22 $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$

.23 $\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$

.24 $\int sin(ax+b) dx = -\frac{\cos(ax+b)}{a}$

.25 $\int cos(ax+b) dx = \frac{\sin(ax+b)}{a}$

مثال 1۔ $\int 5x^4 dx$ کو اخذ کرو۔

حل:

$$\int 5x^4 dx = 5\int x^4 dx$$
$$= 5\frac{x^{4+1}}{4+1} + \mathrm{C}$$
$$= 5\frac{x^5}{5} + \mathrm{C}$$
$$= x^5 + \mathrm{C}$$

مثال 2۔ $\int (\mathrm{e}^x + x^3 + \cos x) dx$ کی قدر معلوم کرو۔

حل:

$$\int (e^x + x^3 + \cos x)dx$$
$$= \int e^x dx + \int x^3 dx + \int \cos x\, dx$$
$$= e^x + \frac{x^4}{4} + \sin x + C$$

7.3 تکمل کے طریقے (Methods of Integration)

1۔ متکمل کو ایسے تفاعلات کے مجموعہ میں تبدیل کریں جس کے تکملے معلوم ہوں۔(Decomposition of Integrand)

2۔ تکمل بہ اندراج (Integration by Substitution)

3۔ تکمل بالحصص (Integration by Parts)

7.3.1 متکمل کی تحویل (Decomposition of Integrand)

کبھی کبھی معروف ضابطوں سے تکملات کو معلوم کیا جا سکتا ہے۔تب ہم متکمل کو ایسے تفاعلات کے مجموعہ میں تبدیل کریں گے جن کے تکملے معلوم ہوں اور یہاں ہم رکن بہ رکن تکمل کریں گے۔مثال کے طور پر اگر $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$ ہو تب

$$\int f(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \int f_3(x)dx$$

ہو گا۔

مثال 1۔ $x^5 + \tan x + \cos x$ کا تکمل محسوب کرو۔

حل: دیا گیا تفاعل

$$f(x) = x^5 + \tan x + \cos x$$

تب

$$\int f(x)dx = \int (x^5 + \tan x + \cos x)dx$$
$$= \int x^5 dx + \int \tan x\, dx + \int \cos x\, dx$$
$$= \frac{x^6}{6} + \log \sin x + \sin x + C$$

مثال 2۔ $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ کو معلوم کرو۔

حل: دیا گیا تفاعل $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$ ہے۔

تب

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$$
$$= \int \frac{[\sin^2 x+\cos^2 x]}{\sin^2 x\cos^2 x} dx \qquad (\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ چونکہ})$$
$$= \int \frac{1}{\sin^2 x} dx + \int \frac{1}{\cos^2 x} dx$$
$$= \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx + \int \sec^2 x \, dx$$
$$= - cot\, x + tan\, x + C$$

اس لیے $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x} dx$ کی قدر $tan\, x - cot\, x + C$ ہو گی۔

مثال3۔ $\sqrt{1 + sin\, 2x}$ کا تکمل محسوب کیجیے۔

حل: دیا گیا تفاعل $f(x) = \sqrt{1 + sin\, 2x}$ ہے اور

$$1 + sin\, 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x$$
$$= (sin\, x + cos\, x)^2$$

تب

$$\int \sqrt{1 + sin\, 2x}\, dx = \int \sqrt{(sin\, x + cos\, x)^2} dx$$
$$= \int (sin\, x + cos\, x) dx$$
$$= - cos\, x + sin\, x + C$$
$$\therefore \int \sqrt{1 + sin\, 2x}\, dx = - cos\, x + sin\, x + C$$

7.3.2 تکمل بہ اندراج (Integration by Substitution)

اس طریقے کے تکمل $\int f(x)dx$ کے لیے متغیر x کو کسی اور متغیر مثلاً t میں تبدیل کرتے ہیں۔ ایک مناسب رشتے $x = g(t)$ کے استعمال سے اس صورت میں۔

$$\int f(x)dx = \int f\big(g(t)\big)g'(t)dt$$

ہو گا اور ہم اسے آسانی سے معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال1۔ تکمل معلوم کرو جہاں $f(x) = sin(3x + 5)$ ہے

حل: فرض کرو کہ $3x + 5 = t$

تب $$3dx + 0 = dt$$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{dt}{3}$$

تب $$\int sin(3x+5)\,dx = \int sin(t)\frac{dt}{3}$$
$$= \frac{1}{3}\int sin\,t\,dt$$
$$= \frac{-1}{3}\cos t + C$$
$$= \frac{-1}{3}\cos(3x+5) + C$$

تب $\int sin(3x+5)\,dx = \frac{-1}{3}\cos(3x+5) + C$ ہو گا۔

مثال 2۔ $\int sec^2 3x \tan 3x\, dx$ کی قدر معلوم کرو۔

حل: دیا گیا تفاعل $f(x) = sec^2 3x \tan 3x$ ہے۔

فرض کرو کہ $\tan 3x = \mathrm{t}$

$$\Rightarrow \quad sec^2 3x \cdot 3dx = dt$$

$$\Rightarrow \quad sec^2 3x\, dx = \frac{dt}{3}$$

تب $\int sec^2 3x \tan 3x\, dx = \int t\frac{dt}{3}$ ہو گا۔ اور $\int tdt = \frac{\mathrm{t}^2}{2}$

$$\int sec^2 3x \tan 3x\, dx = \frac{\mathrm{t}^2}{2\cdot 3} + \mathrm{C}$$
$$= \frac{(\tan 3x)^2}{6} + \mathrm{C}$$
$$\therefore \int sec^2 3x \tan 3x\, dx = \frac{(\tan 3x)^2}{6} + \mathrm{C}$$

اس اندراج کے طریقے سے ہم ذیل کے ضابطے حاصل کر سکتے ہیں۔

i. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

ii. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

iii. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

iv. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

v. $\int \sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

vi. $\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

7.3.3 تکمل بالحصص (Integration by Parts)

اگر تکمل دو تفاعلات کا حاصل ضرب ہو تب ذیل کے قانون سے اسے معلوم کر سکتے ہیں۔

$$\int (u \cdot v)dx = u \int v dx - \int \left[\frac{d(u)}{dx} \int v dx\right] dx$$

مثال 1۔ $\int x\, sin\, x\, dx$ کو محسوب کرو۔

حل:

$$\int x\, sin\, x\, dx = x \int sin\, x\, dx - \int \left[\frac{d(x)}{dx} \int \sin x\, dx\right] dx$$
$$= x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x)\, dx$$
$$= -x \cos x + \sin x + C$$
$$\therefore \int x\, sin\, x\, dx = \sin x - x \cos x + C$$

مثال 2۔ $\int x\, log\, x\, dx$ کا تکمل معلوم کرو۔

حل: فرض کرو کہ $x\, log\, x = log\, x \cdot x = u \cdot v$ ہے۔

جہاں $v = x, \mathrm{u} = \log x$، ہو گا۔

تب

$$\int x\, log\, x\, dx = \int log\, x \cdot x\, dx$$
$$= log\, x \int x\, dx - \int \left[\frac{d(log\, x)}{dx} \int x\, dx\right] dx$$
$$= log\, x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2}\right) dx$$
$$= \frac{x^2\, log\, x}{2} - \int \left(\frac{x}{2}\right) dx$$
$$= \frac{x^2\, log\, x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$
$$\therefore \int x\, log\, x\, dx = \frac{x^2\, log\, x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

7.4 متواتر تحویل (Successive Reduction)

کئی تفاعلات ایسے ہوتے ہیں جن کے متکملات کو ایک یا دیگر معلوم شدہ معیاری تکملات کی وضع میں ظاہر نہیں کیا جا سکتا۔ بہر حال چند صورتوں میں ان متکملات کو دوسری عبارتوں کے متکمل سے الجبرائی طور پر جوڑا جا سکتا ہے جو یا تو راست تکمل پذیر ہوں یا اصل تفاعلات کے مقابلے میں بہ آسانی تکمل پذیر ہوں۔ اس طرح جوڑے جانے والے الجبرائی رشتے تحویل ضابطے کہلاتے ہیں۔

اس طریقے کی وضاحت کے لیے ذیل میں چند مثالیں دی گئی ہیں۔

مثال 1۔ $\int x^n e^{ax}\, dx$ کے لیے تحویلی ضابطہ معلوم کرو جہاں n مثبت صحیح عدد ہے۔ نیز $\int x^3 e^{5x}\, dx$ معلوم کرو۔

حل: فرض کرو کہ $I_n = \int x^n e^{ax}\, dx$

$$= x^n \int e^{ax}\, dx - \int \left[\frac{d(x^n)}{dx} \int e^{ax}\, dx\right] dx$$

$$= x^n \cdot \frac{e^{ax}}{a} - \int \left[n x^{n-1} \cdot \frac{e^{ax}}{a}\right] dx$$

$$= \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int [x^{n-1} e^{ax}]$$

$$\Rightarrow \qquad I_n = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} I_{n-1}$$

اسی طرح

$$I_{n-1} = \frac{x^{n-1} e^{ax}}{a} - \frac{n-1}{a} I_{n-2}$$

$$I_{n-2} = \frac{x^{n-2} e^{ax}}{a} - \frac{n-2}{a} I_{n-3}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$I_{n-n} = I_0 = \int e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

نیز

$$I_3 = \int x^3 e^{5x}\, dx$$

$$= \frac{x^3 e^{5x}}{5} - \frac{3}{5} I_2$$

$$= \frac{x^3 e^{5x}}{5} - \frac{3}{5}\left[\frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5} I_1\right]$$

$$= \frac{x^3 e^{5x}}{5} - \frac{3x^2 e^{5x}}{25} + \frac{6}{25} I_1$$

$$= \frac{x^3 e^{5x}}{5} - \frac{3x^2 e^{5x}}{25} + \frac{6}{25} \int x e^{5x}\, dx$$

$$= \frac{x^3 e^{5x}}{5} - \frac{3x^2 e^{5x}}{25} + \frac{6}{25}\left[\frac{x e^{5x}}{5} - \int 1 \cdot \frac{e^{5x}}{5} dx\right]$$

$$= \frac{x^3 e^{5x}}{5} - \frac{3x^2 e^{5x}}{25} + \frac{6x e^{5x}}{125} - \frac{6 e^{5x}}{625} + \mathrm{C}$$

$$\therefore \int x^3 e^{5x}\, dx = \frac{x^3 e^{5x}}{5} - \frac{3x^2 e^{5x}}{25} + \frac{6x e^{5x}}{125} - \frac{6 e^{5x}}{625} + \mathrm{C}$$

مثال 2۔ $\int x^n e^x\, dx$ معلوم کرو اور اس کے استعمال سے $\int x^3 e^x\, dx$ اخذ کرو۔

حل: فرض کرو کہ $I_n = \int x^n e^x\, dx$ تکمل بالحصص کے طریقے سے ہم ان کو اس طرح ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$I_n = \int x^n e^x \, dx$$
$$= x^n \int e^x \, dx - \int \left[\frac{d(x^n)}{dx} \int e^x \, dx\right] dx$$
$$= x^n e^x - \int [nx^{n-1} e^x] \, dx$$
$$= x^n e^x - n \int [x^{n-1} e^x] \, dx$$
$$I_n = x^n e^x - nI_{n-1}$$
$$\therefore I_n = x^n e^x - nI_{n-1}$$

اب $n = 3$ کے لیے

$$I_3 = x^3 e^x - 3I_{3-1}$$
$$= x^3 e^x - 3I_2$$
$$= x^3 e^x - 3[x^2 e^x - 2I_1]$$
$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x e^x \, dx$$
$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \left[x e^x - \int (1 \cdot e^x) \, dx\right]$$
$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + C$$

$$\Rightarrow \quad \int x^3 e^x \, dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + C$$

7.5 تحویلی ضابطے (Reduction Formulae)

7.5.1 $\int sin^n x dx$ کا تحویلی ضابطہ معلوم کرو۔

فرض کرو کہ

$$I_n = \int sin^n x dx$$
$$\Rightarrow \quad I_n = \int sin^{n-1} x \sin x \, dx$$
$$= sin^{n-1} x \int \sin x \, dx - \int \left[\frac{d(sin^{n-1} x)}{dx} \int \sin x \, dx\right] dx$$
$$= sin^{n-1} x(-\cos x) - \int [(n-1) sin^{n-2} x \cdot \cos x \, (-\cos x)] \, dx$$
$$= -sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int [sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x] \, dx$$
$$= -sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int [sin^{n-2} x \cdot (1 - \sin^2 x)] \, dx$$

$$= -sin^{n-1}x\cos x + (n-1)\int sin^{n-2}x\,dx - (n-1)\int sin^n x\,dx$$
$$= -sin^{n-1}x\cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$
$$\Rightarrow \quad (1+n-1)I_n = -sin^{n-1}x\cos x + (n-1)I_{n-2}$$
$$\Rightarrow \quad I_n = \frac{-sin^{n-1}x\cos x}{n} + \frac{(n-1)}{n}I_{n-2}$$

جو کہ $I_n = \int sin^n xdx$ کا مطلوب تحویلی ضابطہ ہے۔

مثال 1۔ $\int sin^n xdx$ کا تحویلی ضابطہ استعمال کر کے $\int sin^5 xdx$ معلوم کرو۔

حل: ہمیں معلوم ہے کہ

$$I_n = \int sin^n xdx$$
$$\Rightarrow \quad I_n = \frac{-sin^{n-1}x\cos x}{n} + \frac{(n-1)}{n}I_{n-2}$$
$$\Rightarrow \quad I_5 = \frac{-sin^4x\cos x}{5} + \frac{4}{5}I_3$$
$$= \frac{-sin^4x\cos x}{5} + \frac{4}{5}\left[\frac{-sin^{3-1}x\cos x}{3} + \frac{2}{3}I_{3-2}\right]$$
$$= \frac{-sin^4x\cos x}{5} + \frac{4}{5}\left[\frac{-sin^2x\cos x}{3} + \frac{2}{3}I_1\right]$$
$$= \frac{-sin^4x\cos x}{5} - \frac{4sin^2x\cos x}{15} + \frac{8}{15}\int sinxdx$$
$$= \frac{-sin^4x\cos x}{5} - \frac{4sin^2x\cos x}{15} + \frac{8}{15}(-\cos x)$$
$$\Rightarrow \quad \int sin^5xdx = \frac{-sin^4x\cos x}{5} - \frac{4sin^2x\cos x}{15} - \frac{8}{15}\cos x$$

مثال 2۔ $\int sin^4xdx$ کی قدر معلوم کرو۔

حل: $\int sin^n xdx$ کے تحویلی ضابطے $n = 4$ کے لیے استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$I_4 = \int sin^4xdx$$
$$= \frac{-sin^3x\cos x}{4} + \frac{4-1}{4}I_{4-2}$$
$$= -\frac{sin^3x\cos x}{4} + \frac{3}{4}I_2$$
$$= -\frac{sin^3x\cos x}{4} + \frac{3}{4}\left[\frac{-sin^{2-1}x\cos x}{2} + \frac{2-1}{2}I_0\right]$$
$$= -\frac{sin^3x\cos x}{4} + \frac{3}{4}\left[\frac{-sinx\cos x}{2} + \frac{1}{2}I_0\right]$$

جہاں $I_0 = \int sin^0 x dx = \int dx = x$ ہے۔

$$I_4 = -\frac{sin^3 x \cos x}{4} + \frac{3}{4}\left[\frac{-sinx \cos x}{2} + \frac{1}{2}x\right] + C$$

اس طرح $\int sin^4 x dx$ کی قدر $-\frac{sin^3 x \cos x}{4} + \frac{3}{4}\left[\frac{-sinx \cos x}{2} + \frac{1}{2}x\right] + C$ ہے۔

7.5.2 $\int cos^n x dx$ کا تحویلی ضابطہ جب کہ $n \geq 2$ ایک صحیح عدد ہے

فرض کرو کہ

$$\begin{aligned}
I_n &= \int cos^n x dx \\
&= \int cos^{n-1} x cosx dx \\
&= cos^{n-1} x \int cosx dx - \int \left[\frac{d(cos^{n-1} x)}{dx} \int cosx\, dx\right] dx \\
&= cos^{n-1} x \sin x - \int [(n-1) cos^{n-2} x(-\sin x) \sin x]\, dx \\
&= cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int [cos^{n-2} x \sin^2 x]\, dx \\
&= cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int [cos^{n-2} x(1 - \cos^2 x)]\, dx \\
&= cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int cos^{n-2} x\, dx - (n-1) \int cos^n x\, dx \\
&= cos^{n-1} x \sin x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad (1 + n - 1) I_n = cos^{n-1} x \sin x + (n-1) I_{n-2}$$

$$\Rightarrow \quad n I_n = cos^{n-1} x \sin x + (n-1) I_{n-2}$$

$$\Rightarrow \quad I_n = \frac{cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}$$

جو کہ $\int cos^n x\, dx$ کا تحویلی ضابطہ ہے۔

مثال 1: $\int cos^n x\, dx$ کا تحویلی ضابطہ استعمال کر کے $\int cos^4 x\, dx$ معلوم کرو۔

حل: ہمیں معلوم ہے کہ

$$I_n = \int cos^n x\, dx = \frac{cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}$$

$n = 4$ لینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$I_4 = \int cos^4 x\, dx = \frac{cos^{4-1} x \sin x}{4} + \frac{(4-1)}{4} I_{4-2}$$

$$= \frac{cos^3 x \sin x}{4} + \frac{3}{4} I_2$$
$$= \frac{cos^3 x \sin x}{4} + \frac{3}{4}\left[\frac{cos^{2-1} x \sin x}{2} + \frac{2-1}{2} I_0\right]$$
$$= \frac{cos^3 x \sin x}{4} + \frac{3}{4}\left[\frac{cosx \sin x}{2} + \frac{1}{2} I_0\right]$$

یہاں $I_0 = \int cos^0 x\, dx = \int dx = x$ ہے۔

اس لیے $\int cos^4 x\, dx$ کی قدر $\frac{cos^3 x \sin x}{4} + \frac{3cosx \sin x}{8} + \frac{3x}{8}$ ہوگی۔

7.5.3 $\int tan^n x\, dx$ کا تحویلی ضابطہ:

مثال 1: $\int tan^n x\, dx$ کا تحویلی ضابطہ اخذ کر کے $\int tan^6 x\, dx$ معلوم کرو۔

حل: فرض کرو کہ $I_n = \int tan^n x\, dx$ تب

$$I_n = \int tan^{n-2} x tan^2 x\, dx$$
$$= \int tan^{n-2} x(-1 + sec^2 x)\, dx$$
$$= -\int tan^{n-2} x\, dx + \int tan^{n-2} x\, sec^2 x\, dx$$

مان لو کہ $\tan x = \mathrm{t}$، تب $sec^2 x dx = dt$

$$= -I_{n-2} + \int t^{n-2}\, dx$$
$$= -I_{n-2} + \frac{t^{n-1}}{n-1} + C$$
$$\Rightarrow \qquad I_n = \frac{tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2} + C$$

جو کہ $\int tan^n x\, dx$ کا مطلوبہ تحویلی ضابطہ ہے نیز $\int tan^6 x\, dx$ کی قدر معلوم کرنے کے لیے فرض کرو کہ

$$I_6 = \int tan^6 x\, dx$$
$$= \frac{tan^5 x}{5} - I_4 = \frac{tan^5 x}{5} - \int tan^4 x\, dx$$
$$= \frac{tan^5 x}{5} - \left(\frac{tan^3 x}{3} - I_2\right)$$
$$= \frac{tan^5 x}{5} - \frac{tan^3 x}{3} + \int tan^2 x\, dx$$

$$= \frac{tan^5 x}{5} - \frac{tan^3 x}{3} + \frac{\tan x}{1} - I_0$$
$$= \frac{tan^5 x}{5} - \frac{tan^3 x}{3} + \frac{\tan x}{1} - \int tan^0 x\, dx$$
$$= \frac{tan^5 x}{5} - \frac{tan^3 x}{3} + \frac{\tan x}{1} - x$$
$$\Rightarrow \qquad \int tan^6 x\, dx = \frac{tan^5 x}{5} - \frac{tan^3 x}{3} + \frac{\tan x}{1} - x + c$$

7.6 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ مختلف تکملات حاصل کر کے کئی تفاعلات کے تحویلی ضابطے حاصل کریں گے۔

7.7 کلیدی الفاظ (Key Words)

تفاعل، مشتق، تکمل، تحویلی ضابطہ

7.8 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

7.8.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. $log\, x$ کا تکمل ذیل میں کس کے مساوی ہے۔

a) $x(log\, x - 1)$

b) $log\, x\,(x - 1)$

c) $x\, log\, x + 1$

d) ان میں سے کوئی نہیں

2. $\int x^2\, sin\, x\, dx$ ــــــــــــــــــ کے مساوی ہوگا۔

a) $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$

b) $x^2 \cos x + 2 \cos x$

c) $-x^2 \cos x + 2x \sin x$

d) ان میں سے کوئی نہیں

3. $\int sec^2(3x + 5)dx =$ ــــــــــــــــــ

(a $\frac{\sec(3x+5)}{5}$

(b $\frac{\tan(3x+5)}{3}$

(c $\frac{\sec(3x+5)}{3}$

(d $\frac{\tan(3x+5)}{5}$

4. $\int \frac{\log x}{x} dx$ کس کے مساوی ہے؟

(a $\log x$

(b $(\log x)^2$

(c $\frac{(\log x)^2}{2}$

(d $\frac{\log x}{x^2}$

5. $I_n = \int x^n e^x \, dx$ کا تحویلی ضابطہ ذیل میں سے کون سا ہے؟

(a $x^n e^x - \mathrm{n}I_{n-1}$

(b $x^{n-1} e^x - \mathrm{n}I_{n-2}$

(c $x^n e^x - I_{n-2}$

(d $x^n e^x - \mathrm{n}I_{n-2}$

7.8.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. تکمل کے عمل کی تشریح کرو اور تکملے کے مختلف طریقوں کو بیان کرو۔

2. اندراج کا طریقہ استعمال کرکے ذیل کے تفاعلات کے تکمل معلوم کرو۔

(a $2xe^{x^2}$

(b $\mathrm{e}^{\tan x} sec^2 x$

(c $\frac{e^{\log x}}{x}$

(d $x^2 e^{3x}$

3. $x^3 e^{2x}$ معلوم کرو۔

4. ذیل کے تکمل معلوم کرو۔

(a $\frac{1}{1+\sin x}$

(b $\frac{e^x}{1+e^x}$

(c $\frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{1}{e^x+e^{-x}}$ (d

5. بتلاؤ کہ $\int f'(ax+b)\,dx = \frac{f(ax+b)}{a}$ ہوگا۔

7.8.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. اگر $I_n = \int cos^n x\,dx$ بتلاؤ کہ $I_n = \frac{1}{n} cos^{n-1}x \cdot \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ ہوگا۔
2. $tan^n x$ کا تکمل محسوب کرو اس سے $\int tan^4 x\,dx$ معلوم کرو۔

7.9 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

---

1. Calculus: Robert T. Smith, R. B. Muiton, McGraw Hill Education India Pvt Ltd. New Delhi.
2. B.Sc. Vol. I, Mathematics by V. Venkateshwara Rao, N. KKrishna Murthy, S. Chand & Company Pvt Ltd.

اکائی 8۔ تکمل-تحویلی ضابطے-II

(Integration-Reduction Formulae-II)

اکائی کے اجزا

8.0 تمہید(Introduction)

اکائی 7 میں ہم غیر معینتکملے اور $tan^n x$ اور $sin^n x$،$cos^n x$، کے تحویلی ضابطوں کے بارے میں جانکاری حاصل کیے تھے۔ اس اکائی میں ہم $sec^n x$،$cot^n x$ ، $cosec^n x$ ، $sin^m x cos^n x$،$sinh^n x$ اور $cosh^n x$ کے تحویلی ضابطوں کو اخذ کر کے ان کے استعمال سے کئی سوالات حل کریں گے۔

8.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ سب $\int sin^m x cos^n x\, dx$ ،$\int cosec^n x\, dx$،$\int cot^n x\, dx$ $\int sec^n x\, dx$ اور $\int (log\, x)^n\, dx$ کے تحویلی ضابطوں کو اخذ کر سکیں گے اور ان کے استعمال سے چند سوالوں کے حل معلوم کریں گے۔ نیز $\int sinh^n x\, dx$ اور $\int cosh^n x\, dx$ کے تحویلی ضابطے اخذ کرکے ان کے سوالات حل کریں گے۔

8.2 $\int sec^n x\, dx$ $\int cot^n x\, dx$ ، $\int cosec^n x\, dx$ اور $\int (log\, x)^n\, dx$ کے تحویلی ضابطے

$\int sec^n x\, dx$ کا تحویلی ضابطہ جہاں $n \geq 2$ ایک صحیح عدد ہے:

فرض کرو کہ $I_n = \int sec^n x\, dx$ ہے۔

تب

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int sec^n x\, dx \\
&= \int sec^{n-2} x sec^2 x\, dx \\
&= sec^{n-2} x \int sec^2 x\, dx - \int \left[\frac{d}{dx}(sec^{n-2} x) \int sec^2 x\, dx\right] dx \\
&= sec^{n-2} x(\tan x) - \int [(n-2) sec^{n-3} x \sec x \tan x \cdot \tan x]\, dx \\
&= sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int [sec^{n-2} x \tan^2 x]\, dx \\
&= sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int [sec^{n-2} x(\sec^2 x - 1)]\, dx \\
&= sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int sec^n x\, dx + (n-2) \int sec^{n-2} x\, dx \\
&= sec^{n-2} x \tan x - (n-2) I_n + (n-2) I_{n-2}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \qquad (1+n-2) I_n = sec^{n-2} x \tan x + (n-2) I_{n-2}$$

$$\Rightarrow \qquad (n-1) I_n = sec^{n-2} x \tan x + (n-2) I_{n-2}$$

$$\Rightarrow \qquad I_n = \frac{sec^{n-2}x \tan x}{(n-1)} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right) I_{n-2}$$

جو کہ مطلوبہ تحویلی ضابطہ ہے۔

مثال9۔ $\int sec^7 x\, dx$ معلوم کرو۔

حل۔ $I_n = \int sec^n x\, dx$ میں $n = 7$ لینے پر

$$\begin{aligned}
I_7 &= \int sec^7 x\, dx \\
&= \frac{sec^{7-2}x \tan x}{(7-1)} + \left(\frac{7-2}{7-1}\right) I_{7-2} \\
&= \frac{sec^5 x \tan x}{6} + \left(\frac{5}{6}\right) I_5 \\
&= \frac{sec^5 x \tan x}{6} + \frac{5}{6}\left(\frac{sec^{5-2}x \tan x}{(5-1)} + \left(\frac{5-2}{5-1}\right) I_{5-2}\right) \\
&= \frac{sec^5 x \tan x}{6} + \frac{5}{6}\left(\frac{sec^3 x \tan x}{4} + \left(\frac{3}{4}\right) I_3\right) \\
&= \frac{sec^5 x \tan x}{6} + \frac{5sec^3 x \tan x}{24} + \frac{15}{24} I_3 \\
&= \frac{sec^5 x \tan x}{6} + \frac{5sec^3 x \tan x}{24} + \frac{5}{8}\left(\frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{1}{2} I_1\right)
\end{aligned}$$

جہاں $I_1 = \int sec^1 x\, dx = \log(\sec x + \tan x)$ ہے

اس طرح

$$\int sec^7 x\, dx = \frac{sec^5 x \tan x}{6} + \frac{5sec^3 x \tan x}{24} + \frac{5\sec x \tan x}{16} + \frac{5}{16}\log(\sec x + \tan x) + C$$

ہے۔

$\int cot^n x\, dx$ کا تحویلی ضابطہ:

فرض کرو کہ $\qquad I_n = \int cot^n x\, dx \ (n > 2)$

تب

$$\begin{aligned}
I_n &= \int cot^{n-2}x(cot^2 x)\, dx \\
&= \int cot^{n-2}x(cosec^2 x - 1)\, dx \\
&= \int cot^{n-2}x\, cosec^2 x\, dx - \int cot^{n-2}x\, dx
\end{aligned}$$

مان لو کہ $cot\, x = t$

اس لیے $-\,cosec^2 x dx = dt$

اب

$$I_n = \int t^{n-2}\,(-dt) - I_{n-2}$$
$$= -\frac{t^{n-2+1}}{n-2+1} - I_{n-2}$$
$$= -\frac{cot^{n-1}x}{n-1} - I_{n-2}$$

اس لیے $I_n = \int cot^n x\, dx = -\frac{cot^{n-1}x}{n-1} - I_{n-2}$ ہو گا۔

مثال 1: $\int cot^5 x\, dx$ کی قدر معلوم کرو۔

حل: ہمیں معلوم ہے کہ

$$I_n = \int cot^n x\, dx = -\frac{cot^{n-1}x}{n-1} - I_{n-2}$$
$$I_5 = \int cot^5 x\, dx$$
$$= -\frac{cot^{5-1}x}{5-1} - I_{5-2}$$
$$\Rightarrow \quad I_5 = -\frac{cot^4 x}{4} - I_3 \qquad ...(1)$$

اور

$$I_3 = \int cot^3 x\, dx$$
$$= -\frac{cot^{3-1}x}{3-1} - I_{3-2}$$
$$= -\frac{cot^2 x}{2} - I_1$$
$$= -\frac{cot^2 x}{2} - \int cot^1 x\, dx$$
$$I_3 = -\frac{cot^2 x}{2} - \log(\sin x) \qquad ...(2)$$

مساوات (1) اور (2) سے

$\int cot^5 x\, dx = -\frac{cot^4 x}{4} + \frac{cot^2 x}{2} + \log(\sin x) + C$ حاصل ہوتا ہے۔

مثال 2: $\int cot^6 x\, dx$ کی قدر معلوم کرو۔

حل: ہمیں معلوم ہے کہ

$$I_n = \int cot^n x\, dx = -\frac{cot^{n-1}x}{n-1} - I_{n-2}$$
$$I_6 = \int cot^6 x\, dx = -\frac{cot^{6-1}x}{6-1} - I_{6-2}$$

$$I_6 = -\frac{cot^5 x}{5} - I_4 \qquad ...(1)$$

اور

$$I_4 = -\frac{cot^{4-1}x}{4-1} - I_{4-2}$$
$$= -\frac{cot^3 x}{3} - I_2$$
$$= -\frac{cot^3 x}{3} - \int cot^2 x\, dx$$
$$= -\frac{cot^3 x}{3} - \int (cosec^2 x - 1)\, dx$$
$$= -\frac{cot^3 x}{3} - \int cosec^2 x\, dx + \int 1\, dx$$
$$= -\frac{cot^3 x}{3} - (-cot\, x) + x$$
$$I_4 = -\frac{cot^3 x}{3} + cot\, x + x \qquad ...(2)$$

مساوات (1) اور (2) سے

$$\int cot^6 x\, dx = -\frac{cot^5 x}{5} + \frac{cot^3 x}{3} - cot\, x - x + c$$

$\int cosec^n x\, dx$ کا تحویلی ضابطہ:

فرض کرو کہ $I_n = \int cosec^n x\, dx\ (n > 2)$

تب

$$I_n = \int cosec^{n-2} x (cosec^2 x)\, dx$$
$$= cosec^{n-2} x \int cosec^2 x\, dx - \int \left[\frac{d}{dx}(cosec^{n-2} x) \int cosec^2 x\, dx\right] dx$$
$$= cosec^{n-2} x(-cot\, x) - \int (n-2) cosec^{n-3} x(-\operatorname{cosec} x \cot x)(-cot\, x) dx$$
$$= -cosec^{n-2} x\, cot\, x - (n-2) \int cosec^{n-2} x\, cot^2\, x\, dx$$
$$= -cosec^{n-2} x\, cot\, x - (n-2) \int cosec^{n-2} x (cosec^2 x - 1) dx$$
$$= -cosec^{n-2} x\, cot\, x - (n-2) \int cosec^n x dx + (n-2) \int cosec^{n-2} x dx$$
$$= -cosec^{n-2} x\, cot\, x - (n-2) I_n + (n-2) I_{n-2}$$
$$\Rightarrow \quad (1 + n - 2) I_n = -cosec^{n-2} x\, cot\, x + (n-2) I_{n-2}$$
$$\Rightarrow \quad (n-1) I_n = -cosec^{n-2} x\, cot\, x + (n-2) I_{n-2}$$
$$\Rightarrow \quad I_n = \frac{-cosec^{n-2} x\, cot\, x}{(n-1)} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right) I_{n-2}$$

اس لیے $I_n = \int cosec^n x\, dx = \frac{-cosec^{n-2} x\, cot\, x}{(n-1)} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right) I_{n-2}$ ہو گا۔

مثال 1: $\int cosec^n x\, dx$ کے تحویلی ضابطے کے استعمال سے $\int cosec^3 x\, dx$ معلوم کرو۔

حل: ہمیں معلوم ہے کہ

$$I_n = \int cosec^n x\, dx = \frac{-cosec^{n-2} x \cot x}{(n-1)} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right) I_{n-2}$$
$$\therefore I_3 = \int cosec^3 x\, dx = \frac{-cosec^{3-2} x \cot x}{(3-1)} + \left(\frac{3-2}{3-1}\right) I_{3-2}$$
$$= \frac{-cosec^{3-2} x \cot x}{(3-1)} + \left(\frac{3-2}{3-1}\right) I_{3-2}$$
$$= \frac{-cosec^{1} x \cot x}{2} + \left(\frac{1}{2}\right) I_1$$
$$= \frac{-cosec\, x \cot x}{2} + \left(\frac{1}{2}\right) \int cosec\, x\, dx$$
$$= \frac{-cosec\, x \cot x}{2} + \frac{1}{2}\log\left(\tan\frac{x}{2}\right) + C$$
$$\therefore \int cosec^3 x\, dx = \frac{-cosec\, x \cot x}{2} + \frac{1}{2}\log\left(\tan\frac{x}{2}\right) + c$$

$\int (\boldsymbol{log\, x})^n\, \boldsymbol{dx}$ کا تحویلی ضابطہ:

فرض کرو کہ

$$I_n = \int (log\, x)^n dx$$
$$\Rightarrow \quad I_n = \int (log\, x)^n \cdot 1 dx$$
$$= (log\, x)^n \cdot \int 1dx - \int \left[\frac{d}{dx}(log\, x)^n \int 1dx\right] dx$$
$$= (log\, x)^n \cdot x - \int \left[n(log\, x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} \cdot x\right] dx$$
$$= x(log\, x)^n - n\int (log\, x)^{n-1} dx$$
$$\Rightarrow \quad I_n = x(log\, x)^n - nI_{n-1}$$

اس لیے $I_n = \int (log\, x)^n dx = x(log\, x)^n - nI_{n-1}$ مطلوب تحویلی ضابطہ ہے۔

مثال 1: $\int (log\, x)^n dx$ کے تحویلی ضابطے کو استعمال کر کے $\int (log\, x)^5 dx$ کی قدر معلوم کرو۔

حل: ہمیں معلوم ہے کہ $I_n = \int (log\, x)^n dx = x(log\, x)^n - nI_{n-1}$

$$I_5 = \int (log\, x)^5 dx$$
$$I_5 = x(log\, x)^5 - 5I_4 \qquad \text{......(1)}$$
$$I_4 = x(log\, x)^4 - 4I_3 \qquad \text{......(2)}$$
$$I_3 = x(log\, x)^3 - 3I_2 \qquad \text{......(3)}$$
$$I_2 = x(log\, x)^2 - 2I_1 \qquad \text{......(4)}$$

$$I_1 = \int \log x \, dx$$
$$= \int \log x \cdot 1 dx$$
$$= \log x \int 1\, dx - \int \left[\frac{d}{dx}(\log x) \cdot \int 1\, dx\right] dx$$
$$= x \log x - \int \left(\frac{1}{x} \cdot x\right) dx$$

$\Rightarrow$ $$I_1 = x \log x - x = x(\log x - 1) \quad \text{......(5)}$$

مساواتوں (1)،(2)،(3)،(4) اور (5) سے

$$\Rightarrow \quad I_5 = \int (log\, x)^5 dx$$
$$= x(log\, x)^5 - 5\left[x(log\, x)^4 - 4\{x(log\, x)^3 - 3\left(x(log\, x)^2 - 2x(\log x - 1)\right)\}\right]$$
$$= x(log\, x)^5 - 5x(log\, x)^4 + 20x(log\, x)^3 - 60x(log\, x)^2 + 120x(\log x - 1) + c$$

اس طرح

$$\int (log\, x)^5 dx = x(log\, x)^5 - 5x(log\, x)^4 + 20x(log\, x)^3 - 60x(log\, x)^2 + 120x(\log x - 1) + C$$

مثال2: $\int (log\, x)^3 dx$ معلوم کرو۔

حل: ہمیں معلوم ہے کہ

$$I_n = \int (log\, x)^n dx = x(log\, x)^n - nI_{n-1}$$
$$\therefore I_3 = x(log\, x)^3 - 3I_2$$
$$= x(log\, x)^3 - 3\int (log\, x)^3 dx$$
$$= x(log\, x)^3 - 3\{x(log\, x)^2 - 2I_1\}$$
$$= x(log\, x)^3 - 3\left\{x(log\, x)^2 - 2\int \log x\, dx\right\}$$
$$= x(log\, x)^3 - 3\{x(log\, x)^2 - 2x(\log x - 1)\} + c$$
$$= x(log\, x)^3 - 3x(log\, x)^2 + 6x(\log x - 1) + c$$
$$\therefore \int (log\, x)^3 dx = x(log\, x)^3 - 3x(log\, x)^2 + 6x(\log x - 1) + c$$

8.3 $\int sin^m x cos^n x\, dx$ کا تحویلی ضابطہ

فرض کرو کہ $I_{m,n} = \int sin^m x cos^n x\, dx$ جہاں m, n دو مثبت اعداد ہیں اور $n > 2$ ہے۔

$$\Rightarrow \quad I_{m,n} = \int sin^m x cos^{n-1} x \cdot \cos x\, dx$$
$$= \int (sin^m x \cos x) cos^{n-1} x\, dx$$
$$= cos^{n-1} x \int (sin^m x \cos x)\, dx - \int \left[\frac{d}{dx}(cos^{n-1} x) \int (sin^m x \cos x)\, dx\right] dx \quad \text{......(1)}$$

اب ہم پہلے $\int (sin^m x \cos x)\, dx$ کی قدر معلوم کرتے ہیں۔ مان لو کہ $\sin x = t \Leftarrow \cos x\, dx = dt$

$$\int (sin^m x \cos x)\, dx = \int t^m dt$$
$$= \frac{t^{m+1}}{m+1}$$
$$= \frac{sin^{m+1}x}{m+1}$$
$$\therefore \int (sin^m x \cos x)\, dx = \frac{sin^{m+1}x}{m+1}$$

اب مساوات(1) سے

$$I_{m,n} = cos^{n-1}x \cdot \frac{sin^{m+1}x}{m+1} - \int (n-1)cos^{n-2}x(-\sin x)\frac{sin^{m+1}x}{m+1}dx$$
$$= \frac{cos^{n-1}x \cdot sin^{m+1}x}{m+1} + \left(\frac{n-1}{m+1}\right)\int sin^m x cos^{n-2}x(sin^2 x)\, dx$$
$$= \frac{cos^{n-1}x \cdot sin^{m+1}x}{m+1} + \left(\frac{n-1}{m+1}\right)\int sin^m x cos^{n-2}x(1-cos^2 x)\, dx$$
$$= \frac{cos^{n-1}x \cdot sin^{m+1}x}{m+1} + \left(\frac{n-1}{m+1}\right)\int sin^m x cos^{n-2}x\, dx - \left(\frac{n-1}{m+1}\right)\int sin^m x cos^n x\, dx$$
$$\therefore I_{m,n} = \frac{cos^{n-1}x \cdot sin^{m+1}x}{m+1} + \left(\frac{n-1}{m+1}\right)I_{m,n-2} - \left(\frac{n-1}{m+1}\right)I_{m,n}$$
$$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{n-1}{m+1}\right)I_{m,n} = \frac{cos^{n-1}x \cdot sin^{m+1}x}{m+1} + \left(\frac{n-1}{m+1}\right)I_{m,n-2}$$
$$\Rightarrow \quad \left(\frac{m+n}{m+1}\right)I_{m,n} = \frac{cos^{n-1}x \cdot sin^{m+1}x}{m+1} + \left(\frac{n-1}{m+1}\right)I_{m,n-2}$$
$$\therefore I_{m,n} = \frac{cos^{n-1}x \cdot sin^{m+1}x}{m+n} + \left(\frac{n-1}{m+n}\right)I_{m,n-2} + c$$

جو کہ $I_{m,n} = \int sin^m x cos^n x\, dx$ کا تحویلی ضابطہ ہے۔

مثال1: $I_{m,n} = \int sin^m x cos^n x\, dx$ کے تحویلی ضابطے کے استعمال سے $\int sin^2 x cos^3 x\, dx$ معلوم کرو۔

حل: ہمیں معلوم ہے کہ

$$I_{m,n} = \int sin^m x cos^n x\, dx$$
$$= \frac{cos^{n-1}x \cdot sin^{m+1}x}{m+n} + \left(\frac{n-1}{m+n}\right)I_{m,n-2} + c$$

دیے گئے مسئلہ میں $m = 2$ اور $n = 3$، لینے پر

$$I_{2,3} = \int sin^2 x\, cos^3 x\, dx$$
$$= \frac{cos^{3-1}x sin^{2+1}x}{2+3} + \left(\frac{3-1}{2+3}\right)I_{2,3-2} + c$$

$$= \frac{cos^2x sin^3x}{5} + \frac{2}{5} I_{2,1} + c$$
$$= \frac{cos^2x sin^3x}{5} + \frac{2}{5}\int sin^2x\, cos\, x\, dx + c$$

مان لو کہ $\sin x = t \Leftarrow \cos x\, dx = dt$

$$= \frac{cos^2x sin^3x}{5} + \frac{2}{5}\int t^2\, dt + c$$
$$= \frac{cos^2x sin^3x}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{t^3}{3} + c$$
$$= \frac{cos^2x sin^3x}{5} + \frac{2}{15} sin^3x + c$$

اس لیے

$\int sin^2x\, cos^3x\, dx = \frac{cos^2x sin^3x}{5} + \frac{2}{15} sin^3x + c$ ہوگا۔

مثال2: $\int sin^5x cos^4x\, dx$ معلوم کرو۔

حل: $I_{m,n} = \int sin^m x cos^n x\, dx$ کے تحویلی ضابطے سے ہمیں معلوم ہے کہ

$$I_{m,n} = \frac{cos^{n-1}x \cdot sin^{m+1}x}{m+n} + \left(\frac{n-1}{m+n}\right) I_{m,n-2} + c$$

دیے گئے مسئلہ میں $m = 5$ اور $n = 4$، لینے پر

$$I_{5,4} = \int sin^5x\, cos^4x\, dx$$
$$= \frac{cos^{4-1}x sin^{5+1}x}{5+4} + \left(\frac{4-1}{5+4}\right) I_{5,4-2}$$
$$= \frac{cos^3x sin^6x}{9} + \frac{3}{9} I_{5,2}$$
$$I_{5,4} = \frac{cos^3x sin^6x}{9} + \frac{1}{3} I_{5,2} \qquad \text{......(1)}$$
$$I_{5,2} = \int sin^5x\, cos^2x\, dx$$
$$= \frac{cos^{2-1}x sin^{5+1}x}{5+2} + \left(\frac{2-1}{5+2}\right) I_{5,2-2}$$
$$= \frac{\cos x\, sin^6x}{7} + \frac{1}{7} I_{5,0}$$
$$= \frac{\cos x\, sin^6x}{7} + \frac{1}{7}\int sin^5x\, cos^0x\, dx$$
$$= \frac{\cos x\, sin^6x}{7} + \frac{1}{7}\int sin^5x\, dx$$
$$I_{5,2} = \frac{\cos x sin^6x}{7} + \frac{1}{7} I_5 \qquad \text{......(2)}$$

اب

$$I_5 = \int sin^5x\, dx$$
$$= -\frac{\sin^{5-1} x \cos x}{5} + \frac{5-1}{5} I_{5-2}$$

$$= -\frac{\sin^4 x \cos x}{5} + \frac{4}{5} I_3$$
$$= -\frac{\sin^4 x \cos x}{5} + \frac{4}{5}\int sin^3 x\, dx$$
$$= -\frac{\sin^4 x \cos x}{5} + \frac{4}{5}\left[-\frac{\sin^{3-1} x \cos x}{3} + \frac{3-1}{3} I_{3-2}\right]$$
$$= -\frac{\sin^4 x \cos x}{5} - \frac{4\sin^2 x \cos x}{15} + \frac{8}{15} I_1$$
$$= -\frac{\sin^4 x \cos x}{5} - \frac{4\sin^2 x \cos x}{15} + \frac{8}{15}\int \sin x\, dx$$
$$I_5 = -\frac{\sin^4 x \cos x}{5} - \frac{4\sin^2 x \cos x}{15} - \frac{8}{15}\cos x \qquad \text{......(3)}$$

مساوات (1)،(2) اور (3) سے حاصل ہے

اس لیے

$$\int sin^5 x\, cos^4 x\, dx$$
$$= \frac{cos^3 x sin^6 x}{9} + \frac{1}{3}\left[\frac{\cos x\, sin^6 x}{7} + \frac{1}{7}\left(-\frac{\sin^4 x \cos x}{5} - \frac{4\sin^2 x \cos x}{15} - \frac{8}{15}\cos x\right)\right] + c$$
$$\therefore \int sin^5 x\, cos^4 x\, dx$$
$$= \frac{cos^3 x sin^6 x}{9} + \frac{\cos x\, sin^6 x}{21} - \frac{\sin^4 x \cos x}{105} - \frac{4\sin^2 x \cos x}{315} - \frac{8}{315}\cos x + c$$

8.4 $\int sinh^n x\, dx$ اور $\int cosh^n x\, dx$ کے تحویلی ضابطے

$\int sinh^n x\, dx$ کا تحویلی ضابطہ:

فرض کرو کہ

$$I_n = \int sinh^n x\, dx$$
$$= \int sinh^{n-1} x\, sinh\, x\, dx$$
$$= sinh^{n-1} x (cosh\, x) - \int (n-1) sinh^{n-2} x\, (cosh\, x)\, cosh\, x\, dx$$
$$= sinh^{n-1} x cosh\, x - (n-1)\int sinh^{n-2} x\;\; cosh^2\, x\, dx$$
$$= sinh^{n-1} x cosh\, x - (n-1)\int sinh^{n-2} x\;\; (1 + sinh^2\, x)\, dx$$
$$= sinh^{n-1} x cosh\, x - (n-1)\int sinh^{n-2} x\;\; dx - (n-1)\int sinh^n x\;\; dx$$
$$\Rightarrow \qquad I_n = sinh^{n-1} x cosh\, x - (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$
$$\Rightarrow \qquad (1 + n - 1) I_n = sinh^{n-1} x cosh\, x - (n-1) I_{n-2}$$

$$\Rightarrow \qquad I_n = \frac{1}{n} sinh^{n-1}x cosh\, x - \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}$$

جو کہ $\int sinh^n x\, dx$ کا تحویلی ضابطہ ہے۔

$\int cosh^n x\, dx$ کا تحویلی ضابطہ:

فرض کرو کہ

$$I_n = \int cosh^n x\, dx$$
$$= \int cosh^{n-1}x\, cosh\, x\, dx$$
$$= cosh^{n-1}x(sinh\, x) - \int (n-1)cosh^{n-2}x\, (sinh\, x)\, sinh\, x\, dx$$
$$= cosh^{n-1}x sinh\, x - (n-1) \int cosh^{n-2}x\ \ sinh^2\, x\, dx$$
$$= cosh^{n-1}x sinh\, x - (n-1) \int cosh^{n-2}x\ \ (cosh^2\, x - 1)\, dx$$
$$= cosh^{n-1}x sinh\, x - (n-1) \int (cosh^n\, x - cosh^{n-2}x\ )\, dx$$
$$= cosh^{n-1}x sinh\, x - (n-1) \int cosh^n x\ \ dx + (n-1) \int cosh^{n-2}x\ \ dx$$
$$\Rightarrow \qquad I_n = cosh^{n-1}x sinh\, x - (n-1)I_n + (n-1)I_{n-2}$$
$$\Rightarrow \qquad (1+n-1)I_n = cosh^{n-1}x sinh\, x + (n-1)I_{n-2}$$
$$\Rightarrow \qquad nI_n = cosh^{n-1}x sinh\, x + (n-1)I_{n-2}$$
$$\Rightarrow \qquad I_n = \frac{1}{n} cosh^{n-1}x sinh\, x + \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}$$

جو کہ $\int cosh^n x\, dx$ کا تحویلی ضابطہ ہے۔

مثال 1: $\int sinh^3 x\, dx$ اور $\int cosh^5 x\, dx$ کو معلوم کرو۔

حل: (1) فرض کرو کہ

$$I_3 = \int sinh^3 x\, dx$$

تحویلی ضابطہ $I_n = \int sinh^n x\, dx = \frac{1}{n} sinh^{n-1} x cosh\, x - \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}$ استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہے۔

$$I_3 = \int sinh^3 x\, dx = \frac{1}{3} sinh^{3-1} x cosh\, x - \frac{(3-1)}{3} I_{3-2}$$
$$= \frac{1}{3} sinh^2 x cosh\, x - \frac{2}{3} I_1$$
$$= \frac{1}{3} sinh^2 x cosh\, x - \frac{2}{3} \int \sinh x\, dx$$
$$= \frac{1}{3} sinh^2 x cosh\, x - \frac{2}{3} \cosh x + c$$
$$\therefore \int sinh^3 x\, dx = \frac{1}{3} sinh^2 x cosh\, x - \frac{2}{3} \cosh x + c$$

(2) ہمیں معلوم ہے کہ

$$I_n = \int cosh^n x\, dx = \frac{1}{n} cosh^{n-1} x sinh\, x + \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}$$
$$\therefore I_5 = \int cosh^5 x\, dx = \frac{1}{5} cosh^{5-1} x sinh\, x + \frac{(5-1)}{5} I_{5-2}$$
$$= \frac{1}{5} cosh^4 x sinh\, x + \frac{4}{5} I_3$$

اور

$$I_3 = \int cosh^3 x\, dx = \frac{1}{3} cosh^{3-1} x sinh\, x + \frac{(3-1)}{3} I_{3-2}$$
$$= \frac{1}{3} cosh^2 x sinh\, x + \frac{2}{3} I_1$$
$$= \frac{1}{3} cosh^2 x sinh\, x + \frac{2}{3} \int \cosh x\, dx$$
$$= \frac{1}{3} cosh^2 x sinh\, x + \frac{2}{3} sinh\, x$$
$$\therefore I_5 = \int cosh^5 x\, dx$$
$$= \frac{1}{5} cosh^4 x sinh\, x + \frac{4}{5} \left\{ \frac{1}{3} cosh^2 x sinh\, x + \frac{2}{3} sinh\, x \right\} + c$$

اس لیے $\int cosh^5 x\, dx$ کی قدر $\frac{1}{5} cosh^4 x sinh\, x + \frac{4}{15} cosh^2 x sinh\, x + \frac{8}{15} sinh\, x + c$ ہے۔

مثال2: $\int sinh^n x\, dx$ اور $\int cosh^n x\, dx$ کے تحویلی ضابطے استعمال کر کے $\int sinh^4 x\, dx$ اور $\int cosh^4 x\, dx$ کی قدریں معلوم کرو۔

حل:(1) فرض کرو کہ

$$I_4 = \int cosh^4 x\, dx$$

$\int cosh^n x\, dx$ کے تحویلی ضابطے سے ہمیں معلوم ہے کہ

$$I_n = \int cosh^n x\, dx = \frac{1}{n} cosh^{n-1} x sinh\, x + \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}$$
$$\therefore I_4 = \int cosh^4 x\, dx = \frac{1}{4} cosh^{4-1} x sinh\, x + \frac{(4-1)}{4} I_{4-2}$$
$$= \frac{1}{4} cosh^3 x sinh\, x + \frac{3}{4} I_2$$
$$= \frac{1}{4} cosh^3 x sinh\, x + \frac{3}{4} \left\{ \frac{1}{2} cosh^{2-1} x sinh\, x + \frac{(2-1)}{2} I_{2-2} \right\}$$
$$= \frac{1}{4} cosh^3 x sinh\, x + \frac{3}{4} \left\{ \frac{1}{2} \cosh x\, sinh\, x + \frac{1}{2} I_0 \right\}$$
$$= \frac{1}{4} cosh^3 x sinh\, x + \frac{3}{8} \cosh x\, sinh\, x + \frac{3}{8} x + c$$

اس لیے $\int cosh^4 x\, dx$ کی قدر $\frac{1}{4} cosh^3 x sinh\, x + \frac{3}{8} (\cosh x\, sinh\, x + x) + c$ ہے۔

(2)فرض کرو کہ

$$I_4 = \int sinh^4 x\, dx$$

تحویلی ضابطہ $I_n = \int sinh^n x\, dx = \frac{1}{n} sinh^{n-1} x cosh\, x - \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}$ استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہے۔

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int sinh^4 x\, dx \\
&= \frac{1}{4} sinh^{4-1} x cosh\, x - \frac{(4-1)}{4} I_{4-2} \\
&= \frac{1}{4} sinh^3 x cosh\, x - \frac{3}{4} I_2 \\
&= \frac{1}{4} sinh^3 x cosh\, x - \frac{3}{4}\left\{\frac{1}{2} sinh^{2-1} x cosh\, x - \frac{(2-1)}{2} I_{2-2}\right\} \\
&= \frac{1}{4} sinh^3 x cosh\, x - \frac{3}{4}\left\{\frac{1}{2} \sinh x\, cosh\, x - \frac{1}{2} I_0\right\} \\
&= \frac{1}{4} sinh^3 x cosh\, x - \frac{3}{8} \sinh x\, cosh\, x + \frac{3}{8} x + c
\end{aligned}$$

$$\therefore \int sinh^4 x\, dx = \frac{1}{4} sinh^3 x cosh\, x - \frac{3}{8}(\sinh x\, cosh\, x - x) + c$$

8.5 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ مختلف تکملات حاصل کر کے کئی تفاعلات کے تحویلی ضابطے حاصل کریں گے۔

8.6 کلیدی الفاظ (Key Words)

تفاعل، مشتق، تکمل، تحویلی ضابطہ

8.7 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

8.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. $\int cot^3 x\, dx$ کس کے مساوی ہے

a) $\frac{cot^2 x}{2} - \log(\sin x)$

b) $-\frac{cot^2 x}{2} - \log(\sin x)$

c) $-\frac{cot^2 x}{2} + \log(\sin x)$

d) ان میں سے کوئی نہیں

2. $\int sin^n x \cos x \, dx$

(a $\frac{sin^{n+1}x}{n+1}$

(b $\frac{sin^n x}{n}$

(c $\frac{sin^{n-1}x}{n}$

(d $\frac{sin^n x}{n-1}$

8.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. $\int cot^4 x \, dx$ معلوم کرو۔
2. $\int (\log x)^2 \, dx$ کی قدر معلوم کرو۔
3. $\int sinh^2 x \, dx$ اور $\int cosh^3 x \, dx$ معلوم کرو۔

8.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. اگر $I_n = \int cot^n x \, dx$ ہو تب ثابت کرو کہ $I_n = \frac{-\cot^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}$ ہو گا۔ نیز اس کی مدد سے $\int cot^7 x \, dx$ معلوم کرو۔
2. $\int sin^m x \, cos^n x \, dx$ کا تحویلی ضابطہ اخذ کرو اور اس کے استعمال سے $\int sin^2 x \, cos^3 x \, dx$ کی قدر معلوم کرو۔
3. $sec^n\theta$ کا تکمل کرو اور اس کے ذریعے سے $\int sec^3\theta \, d\theta$ معلوم کرو۔

8.8 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

---

1. Calculus: Robert T. Smith, R. B. Muiton, McGraw Hill Education India Pvt Ltd. New Delhi.
2. B.Sc. Vol. I, Mathematics by V. Venkateshwara Rao, N. Krishna Murthy, S. Chand & Company Pvt Ltd.

اکائی 9۔ سلائسنگ، ڈسک اور واشر کے ذریعے حجم

(Volumes by Slicing, Disks and Washers)

اکائی کے اجزا

9.0 تمہید(Introduction)

خمیدہ حدود(Curved Boundaries) رکھنے والے علاقوں(Regions)کے رقبے سے ہم ان خمیدہ قاعدے رکھنے والے استوانوں (Cylinders)کے حجم کی تحسیب کر سکتے ہیں۔اس کے لیے ان استوانوں کے خانذوں کے رقبوں کو ان کی اونچائی سے ضرب دیتے ہیں۔اس طرح اس قسم استوانوں کے مجسمے دیگر ٹھوس اجسام کے حجم حاصل کر سکتے ہیں۔

جب کسی محور کے اطراف کسی سلائس کو گھمایا جاتا ہے،تب ایک ٹھوس مجسم حاصل ہو تا ہے۔یعنی سلائسنگ کے طریقہ کا نہایت ہی عاما طلاق گھماؤ سے ٹھوس حاصل کرنا ہے۔

اگر کسی علاقہ کو ٹھوس بنانے کے لیے گھمایا جائے اور گردشی محور پر ON یا کراس CROSS بارڈر نہیں بنتی ہو تب،اس ٹھوس میں چھید یا سوراخ ہو تا ہے۔اس صورت میں گردشی محور سے عمود عرضی تراشے(Cross-Sections) بجائے ڈسکس کے،واشرس ہوتے ہیں۔

9.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ سلائسنگ،ڈسکس اور واشر کے طریقوں سے اجسام کے حجم معلوم کر سکیں گے۔

9.2 سلائسنگ،ڈسک اور واشر کے ذریعے حجم(Volumes by Slicing, Disks and Washers)

اب ہم سلائسنگ،ڈسکس اور واشر کے طریقوں کا مطالعہ کر کے ان کی مدد سے اجسام کے حجم حاصل کرنا سیکھیں گے۔اور پھر کچھ مثالوں کی مدد سے ان پر عبور حاصل کریں گے-

9.2.1 سلائسنگ کے ذریعے حجم(Volumes by Slicing)

فرض کرو کہ ہم شکل(9.2.1.1) میں دکھائے گئے ایک قسم کے ٹھوس کا حجم معلوم کرنا چاہتے ہیں۔بند وقفہ $[a, b]$ میں ہر نقطہ یا مقام x پر اس ٹھوس کے عرضی تراش(Cross Section) کا علاقہ R(x) اور اس کا رقبہ $A(x)$ ہے۔اس سے رقبہ A،x کا حقیقی(Real Valued) تفاعل (Function) بن جاتا ہے۔مزید بر آں اگر یہ x کا مسلسل(Continuous) تفاعل ہو تو ہم تکمل(Integration) کے ذریعے ٹھوس کے حجم کو ذیل کے مطابق واضح اور معلوم کر کے حساب لگا سکتے ہیں۔

ہم بند وقفہ $[a, b]$ کے پارٹیشنس x محور کے ساتھ ساتھ حسب معمول طریقہ سے کرتے ہیں۔یعنی ہم طوس کی چکتیوں کی طرح ٹھوس کے سلائس اس طرح بناتے ہیں کہ ان کی سطحیں پاٹیشن نقاط سے عمودار ہیں۔

مقام یا نقاط x_{k-1} اور x_k سطحوں کے درمیان kویں سلائس کا حجم تقریباً وہی ہو تا ہے جو کہ علاقہ $R(x)$ پر بنی دو سطحوں کے درمیان استوانہ

کا ہوتا ہے۔ اس حصہ کی توسیع شدہ شکل کو شکل (9.2.1.2) میں دکھایا گیا ہے۔ اس استوانہ کا حجم یوں معلوم کیا جاتا ہے:

$$\begin{aligned} x_k &= \text{اساس کا رقبہ} \times \text{اونچائی} \\ &= A(x_k) \times \left(\text{نقاط } x_{k-1} \text{ اور } x_k \text{ پر سطحوں کے درمیان فاصلہ}\right) \\ &= A(x_k) \times (\Delta x) \end{aligned}$$

لہٰذا ٹھوس کے حجم کا اندازہ استوانوں کے حجموں کے مجموعہ سے کیا جاتا ہے

$$\sum_{k=1}^{n} A(x_k) \times (\Delta x)$$

یہ وقفہ $[a, b]$ پر تفاعل $A(x)$ کے لیے ریمان سم (Riemann Sum) ہے۔

ہم مجموعوں (Sums) کے ان اندازوں سے اس بات کی توقع کرتے ہیں کہ وقفہ $[a, b]$ پر مکمل نمونہ کا حصہ (Portion) مائل بہ صفر ہوتا کہ ٹھوس کے حجم کو لمٹنگ (Limiting) تکملسے واضح کر سکیں۔

تعریف: a سے b تک A کا تکملیعنی $x = a$ سے $x = b$ تک عرضی تراش $A(x)$ معینتکمل (Definite Integrals) ٹھوس کا حجم ہے۔

$$V = \int_a^b A(x)dx \qquad (1)$$

مساوات (1) کے اطلاق کے لیے ہم درج ذیل مرحلوں کا استعمال کرتے ہیں

مرحلہ 1: ٹھوس اور عرضی تراش کے نمونہ کا خاکہ بنائیں

مرحلہ 2: $A(x)$ کا ضابطہ معلوم کریں

مرحلہ 3: تکمل کے حدود معلوم کریں

مرحلہ 4: حجم معلوم کرنے کے لیے $A(x)$ کو تکمل کریں

مثال 1- ایک 3m بلند پرامڈ کے مربع نما اساس کا ضلع 3m ہے۔ پرامڈ کا راس (Vertex) سے xm لمبائی والے ارتفاع (Altitude) پر ایک xm ضلع والا مربع نما عرضی تراش عموداً واقع ہے۔ اس پرامڈ کا حجم معلوم کیجیے۔

حل- مرحلہ 1: سوال کے مطابق x محور کے ہمراہ xm لمبائی والے ارتفاع (Altitude) کا پرامڈ کھینچا۔ مربع نما عرضی تراشے دکھایا۔ پرامڈ کا راس O ہے۔

مرحلہ 2: ارتفاع کی لمبائی x پر x میٹر ضلع کا مربع نما عرضی تراش کا نمونہ ہے۔ اس لیے اس کا رقبہ

$$A(x) = x^2$$

مرحلہ 3: مربعوں کے ضلعوں کی لمبائیاں $x = 0$ سے $\mathrm{x} = 3$ تک ہیں۔

مرحلہ 4: اب پرامڈ کا حجم ہو گا

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b A(x)dx \\ &= \int_0^3 x^2 dx \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9m^3$$

مثال2- 3m نصف قطر کے ایک استوانہ سے ایک خمیدہ تکونیا(Curved Wedge) کو دو سطحوں سے تراش کر حاصل کیا گیا۔ ایک سطح استوانہ کے تکونیا سے عمو ہے-دوسری سطح استوانہ کے مرکز سے پہلی سطح سے °45کا ذاویہ بناتے ہوئے گزر رہی ہے۔ تکونیا کا حجمعلوم کیجیے۔

حل- مرحلہ 1: سوال کے مطابق وتیح کھینچا گیا۔اس میں نمونہ عرضی تراش x محور سے عمود اًد کھایا۔ عرضی طراشے مستطیل ہیں

مرحلہ 2: مبدا O سے x محور کے ہمراہ x فاصلہ پر واقع عرضی تراش مستطیل نما ہے۔ دوسری سطح پہلی سطح سے کا ذاویہ بنا رہی ہے۔ استوانہ کا نصف قطر 3 میٹر ہے۔اس لیے

$$\text{مستطیلی عرضی تراش کی اونچائی} = xm$$
$$\text{مستطیلی عرضی تراش کی چوڑائی} = 2\sqrt{9 - x^2}m$$

اس لیے

$$\begin{aligned} A(x) &= \text{چوڑائی} \times \text{اونچائی} \\ &= (x) \times 2\sqrt{9 - x^2} \\ &= 2x\sqrt{9 - x^2} \end{aligned}$$

مرحلہ 3: مستطیلی عرضی تراش کی سلائسنگ $x = 0$ سے $x = 3$ تک ہے۔

مرحلہ 4: تکونیا کا حجم ہو گا

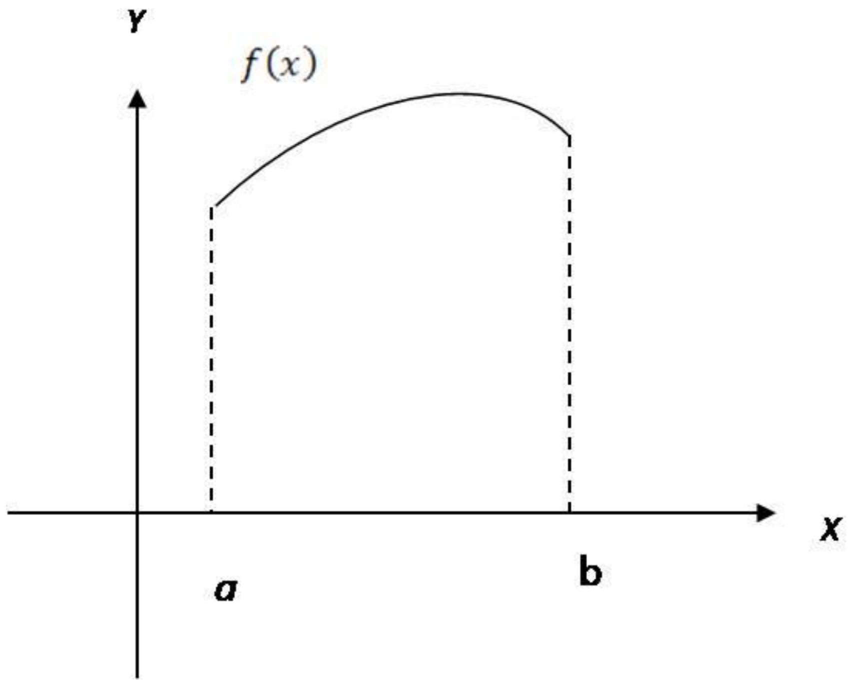
$$\begin{aligned} V &= \int_a^b A(x)dx \\ &= \int_0^3 2x\sqrt{9 - x^2}dx \\ &= \left[-\frac{2(9 - x^2)^{3/2}}{3}\right]_0^3 \\ &= 0 + \frac{2}{3}(9)^{3/2} \\ &= 18m^3 \end{aligned}$$

9.2.2 ڈسک کے ذریعے حجم(Volumes by Disks)

گھماؤ کے ٹھوس وہ ٹھوس ہیں جن کی شکل وصورت یا ڈیل ڈول(Shapes) کو محوروں کے گرد سطحی علاقوں کو گھما کر تقلیق کی جاتی ہے۔ مثلاً دھاگے کی چرخیاں(Spools)، بلیلارڈ(Billiard) کی گیندیں گھماؤ کے ٹھوس ہیں۔

بعض اوقات گھماؤ سے بننے والے ٹھوسوں کے حجم جیومیٹری کے ضابطوں سے معلوم کر سکتے ہیں۔ لیکن جب ہم کسی بلمپ(Blimp) کا حجم معلوم کرنا چاہتے ہیں یا پھر کسی حصہ کا جسے خراد لیتھ پر موڑنا چاہتے ہیں یا پھر وزن کا اندازہ لگانا چاہتے ہیں تب ہم بجائے جیومیٹری کے ضابطوں کے اپنے جوابوں کے حصول کے لیے احصہ(Calculus) کا استعمال کرتے ہیں۔

اگر ہم کسی علاقے کو مسلسل تفاعل کے گراف $y = R(x), a \le x \le b$ اور x محور کے درمیان کے علاقے کے طور پر آراستہ کر سکیں اور گردشی محور کو x محور، تب ہم ٹھوس کا حجم ذیل کے طریقے سے معلوم کر سکتے ہیں۔ گردشی محور سے ٹھوس کا نمونہ ٹپیکل(Typical) عرضی تراش ڈسک ہے۔ جس کا نصف قطر $R(x)$ اور رقبہ $A(x) = \pi(radius)^2 = \pi[R(x)]^2$ ہے۔ چونکہ ٹھوس کا حجم $x = a$ سے $x = b$ تک A کا تکمل ہے۔ اس لیے $x = a$ سے $x = b$ تک $[R(x)]^2$ کا تکمل ٹھوس کا حجم ہو گا۔



شکل 9.2.2.1

اس لیے ٹھوس کا حجم

$$V = \int_a^b \pi[R(x)]^2 dx \qquad (2)$$

اس مساوات کا استعمال کر کے ہم درج ذیل مراحل کی مدد سے حجم معلوم کر سکتے ہیں:

مرحلہ 1: علاقہ کھینچیں اور نصف قطر تفاعل $R(x)$ کی شناخت کریں

مرحلہ 2: $R(x)$ کا مربع لیں اور π سے ضرب دیں

مرحلہ 3: حجم معلوم کرنے کے لیے تکمل کریں

y محور کے اطراف x محور اور خطہ منحنی $x = R(y), c \le y \le d$ کے درمیان علاقہ کو گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کرنے کے لیے ہم مساوات (2) میں x کی بجائے y رکھتے ہیں۔ اس لیے

$$V = \int_c^d \pi[R(y)]^2 dy \qquad ......(3)$$

یاد رکھیے نیچے حل شدہ مثال (2) میں x محور، گردشی محور نہیں ہے بلکہ یہ حجم معلوم کرنے کے لیے اصول ہے۔ مناسب لمٹس کے درمیان $\pi[R(x)]^2$ کو تکمل کیجیے۔

مثال3- ایک ٹھوس کو بنانے کے لیے خط منحنی $y = \sqrt{x}, 0 \le x \le 4$ اور x محور کے درمیان علاقہ کو x محور کے گرد گھمایا گیا۔ اس ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

حل- سوال کے مطابق ہم نے علاقہ، نصف قطر اور گھمانے سے بنے ٹھوس کی شکلیں کھینچیں۔

اب ٹھوس کا حجم ہو گا:

شکل

$$V = \int_a^b \pi[R(x)]^2 dx$$

$$= \int_0^4 \pi\left[\sqrt{x}\right]^2 dx$$

$$= \pi \int_0^4 x dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4$$

$= 8\pi$ مکعب اکائی

مثال4- ایک ٹھوس کو بنانے کے لیے خط $y = 0, x = 2$ اور منحنی $y = x^3$ کے درمیانی علاقہ کو x محور کے گرد گھمایا گیا۔ اس طرح بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

حل- سوال کے مطابق ہم نے علاقہ، نصف قطر اور گھمانے سے بنے ٹھوس کی شکلیں کھینچیں۔

اب ٹھوس کا حجم ہو گا:

$$V = \int_a^b \pi[R(x)]^2 dx$$

$$= \int_0^2 \pi[x^3]^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 x^3 dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^7}{7}\right]_0^2$$

$= \frac{128\pi}{7}$ مکعب اکائی

مثال5- خط $y = 1$ کے گرد منحنی $y = \sqrt{x} - 1,$ اور خطوط $x = 1, x = 4$ سے گھرے علاقہ کو گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

حل- سوال کے مطابق ہم نے علاقہ، نصف قطر اور گھمانے سے بنے ٹھوس کی شکلیں کھینچیں۔

اب ٹھوس کا حجم ہو گا

$$V = \int_{a}^{b} \pi[R(x)]^2 dx$$
$$= \int_{1}^{4} \pi\left[\sqrt{x} - 1\right]^2 dx$$
$$= \pi \int_{1}^{4} \left[x - 2\sqrt{x} + 1\right] dx$$
$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2} + x\right]_1^4$$
$$= \frac{7\pi}{6} \text{ مکعب اکائی}$$

مثال6- y محور کے گرد y محور اور خط منحنی $x = \frac{2}{y}$ اور خطوط $1 \leq y \leq 4$ سے گھرے علاقہ کو گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

حل- سوال کے مطابق ہم نے علاقہ، نصف قطر اور گھمانے سے بنے ٹھوس کی شکلیں کھینچیں۔

اب ٹھوس کا حجم ہو گا

$$V = \int_{c}^{d} \pi[R(y)]^2 dy$$
$$= \int_{1}^{4} \pi\left[\frac{2}{y}\right]^2 dy$$
$$= 4\pi \int_{1}^{4} \left[\frac{1}{y^2}\right] dy$$
$$= 4\pi \left[-\frac{1}{y}\right]_1^4$$
$$= 3\pi \text{ مکعب اکائی}$$

مثال7- خط $x = 3$ کے گرد پیرابولا $x = 2 - y^2$ اور خط $x = 3$ سے گھرے علاقہ کو گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

حل- سوال کے مطابق ہم نے علاقہ، نصف قطر اور گھمانے سے بنے ٹھوس کی شکلیں کھینچیں۔

اب ٹھوس کا حجم ہو گا

$$V = \int_{c}^{d} \pi[R(y)]^2 dy$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi[2 - y^2]^2 dy$$

$$= 4\pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [4 - 4y^2 + y^4] dy$$

$$= 4\pi \left[4y - 4\frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$$

$= \frac{64\pi\sqrt{2}}{15}$ مکعب اکائی

مثال 8- صنوبری $r = a(1 - cos\,\theta)$ کو ابتدائی خط کے گرد گھمانے پر حاصل ٹھوس کا حجم حاصل کیجیے۔

حل- شکل سے دی گئی منحنی کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس مجسم کا حجم درج ذیل ہوتا ہے

$$V = \int_0^{2a} \pi[R(x)]^2 dx$$

دیا ہے $\quad r = a(1 - cos\,\theta)$

ہم جانتے ہیں $\quad x = r\,cos\,\theta$

$$= a(1 - cos\,\theta)\,cos\,\theta$$

$$\Rightarrow \quad dx = a(-sin\,\theta + 2\,sin\,\theta\,cos\,\theta)d\theta$$

اور $\quad y = r\,sin\,\theta$

$$= a(1 - cos\,\theta)\,sin\,\theta$$

اب ہم تکمل کی لمٹ کو بدلتے ہیں

جب $x = 0$، تب $\theta = 0$ اور جب $x = 2a$، تب $\theta = \pi$

اس لیے

$$V = \int_0^{\pi} \pi[a(1 - cos\,\theta)\,sin\,\theta]^2 a(-sin\,\theta + 2\,sin\,\theta\,cos\,\theta)d\theta$$

$$= \pi a^3 \int_0^{\pi} (1 - cos\,\theta)^2\,sin^3\,\theta\,(-1 + 2\,cos\,\theta)d\theta$$

$$= \pi a^3 \int_0^{\pi} \left(2sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2 2\,sin^3\frac{\theta}{2}cos^3\frac{\theta}{2}\left(cos^2\frac{\theta}{2} - 3sin^2\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \pi a^3 \int_0^{\pi} 32\,sin^7\frac{\theta}{2}cos^3\frac{\theta}{2}\left(cos^2\frac{\theta}{2} - 3sin^2\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \pi a^3 \int_0^{\pi} \left(32\,sin^7\frac{\theta}{2}cos^5\frac{\theta}{2} - 96\,sin^9\frac{\theta}{2}cos^3\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= 32\pi a^3 \int_0^{\pi} sin^7 \frac{\theta}{2} cos^5 \frac{\theta}{2} d\theta - 96\pi a^3 \int_0^{\pi} sin^9 \frac{\theta}{2} cos^3 \frac{\theta}{2} d\theta$$

مان لیجیے کہ $\frac{\theta}{2} = \omega$، تب $d\theta = 2d\omega$

اب، $\theta = 0$، تب $\omega = 0$ اور جب $\theta = \pi$، تب $\omega = \frac{\pi}{2}$

اس لیے

$$V = 32\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\, sin^7 \omega\, cos^5 \omega\, d\omega - 96\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\, sin^9 \omega\, cos^3 \omega\, d\omega$$

بیٹا تفاعل (Beta Function) کی مدد سے ہم جانتے ہیں کہ

$$B(m,n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\, sin^{2m-1} \theta\, cos^{2n-1} \theta\, d\theta$$

اس لیے

$$V = 32\pi a^3 [B(4,3) - 3B(5,2)]$$

اس کے علاوہ ہم جانتے ہیں کہ

$$B(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

اس لیے

$$V = 32\pi a^3 \left[\frac{3! \times 2!}{6!} - 3 \times \frac{4! \times 1!}{6!}\right]$$
$$= 32\pi a^3 \left[\frac{2 \times 1}{6 \times 5 \times 4} - 3 \times \frac{1}{6 \times 5}\right]$$
$$= 32\pi a^3 \left[\frac{1}{60} - \frac{1}{10}\right]$$
$$= -\frac{8}{3}\pi a^3$$

اس لیے صنوبری $r = a(1 - \cos\theta)$ کو ابتدائی خط کے گرد گھمانے پر حاصل ٹھوس کا حجم $\frac{8}{3}\pi a^3$ ہو گا۔

9.2.3 واشر کے ذریعے حجم (Volume by Washer)

اگر کسی علاقہ کو ٹھوس بنانے کے لیے گھمایا جائے اور گردشی محور پر ON یا کراس CROSS بارڈر نہیں بنتی ہو تب، اس ٹھوس میں چھید یا سوراخ ہوتا ہے۔ اس صورت میں گردشی محور سے عمود عرضی تراشے (Cross-Sections) بجائے ڈسکس کے، واشرس ہوتے ہیں۔ واشر ضابطہ درج ذیل ہوتا ہے:

$$V = \int_a^b \pi[\{R(x)\}^2 - \{r(x)\}^2]dx$$

جہاں

بیرونی نصف قطر= $R(x)$

اور اندرونی نصف قطر= $r(x)$

یہ بات ذہن نشیں راکھیں کہ اگر $r(x)$ تمام تر وقفہ $[a, b]$ کے لیے صفر ہو تب اوپر دی گئ مساوات سے حجم معلوم کرنے کا ڈسک ضابطہ حاصل ہو تا ہے، پس واضح ہوا کہ ڈسک ضابطہ واشر ضابطہ کا ایک مخصوص کیس ہے۔

اوپر دی گئ مساوات کے اطلاق کے لیے ہم درج ذیل مرحلوں کا استعمال کرتے ہیں

مرحلہ 1: علاقہ کھینچیں اور اس کے اکروس (Across) ایک قطعہ خط (Line Segment) گردشی محور سے عموداً کھینچیں۔ جب اس علاقہ کو گھمایا جاتا ہے تو یہ قطعہ خط گھمانے سے بنے ٹھوس کا نمونہ واشر عرضی تراش بنائے گا۔

مرحلہ 2: تکمل کے حدود معلوم کریں

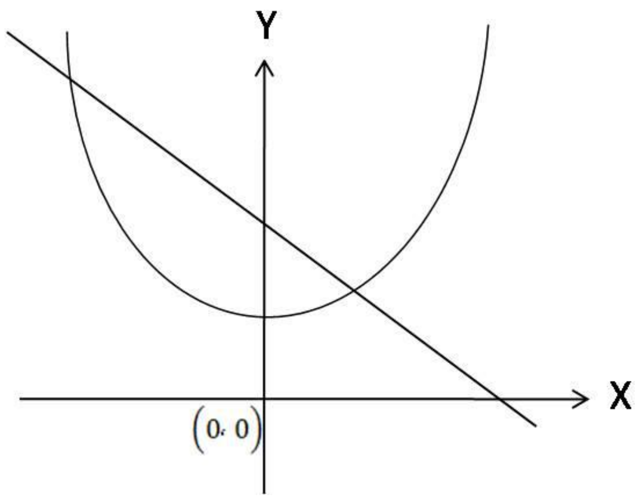
مرحلہ 3: قطعہ خط سے سویپٹ (Swept) کیے گئے بیرونی اور اندرونی نصف قطر معلوم کریں

مرحلہ 4: حجم معلوم کرنے کے لیے تکمل کریں

مثال 9- ایک ٹھوس کو بنانے کے لیے خط $y = -x + 3$ اور منحنی $y = x^2 + 1$ کے درمیانی علاقہ کو x محور کے گرد گھمایا گیا۔ اس طرح بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

حل- سوال کے مطابق ہم نے علاقہ، بیرونی نصف قطر اور اندرونی نصف قطر اور گھمانے سے بنے ٹھوس کی شکلیں کھینچیں۔

اب ٹھوس کا حجم ہو گا



$$V = \int_a^b \pi[\{R(x)\}^2 - \{r(x)\}^2]dx$$

جہاں

بیرونی نصف قطر= $R(x) = -x + 3$

$$r(x) = x^2 + 1 = \text{اندرونی نصف قطر}$$

اس لیے

$$V = \int_{-2}^{1} \pi[\{-x+3\}^2 - \{x^2+1\}^2]dx$$
$$= \int_{-2}^{1} \pi[8 - 6x - x^2 - x^4]dx$$
$$= \pi\left[8x - 6\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{1}$$
$$= \frac{117\pi}{5} \text{ مکعب اکائی}$$

مثال 10- پہلے ربع میں $y = x^2$ اور خط $y = 2x$ سے گھرے علاقہ کو y محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے

حل- سوال کے مطابق ہم نے علاقہ، بیرونی نصف قطر اور اندرونی نصف قطر اور گھمانے سے بنے ٹھوس کی شکلیں کھینچیں۔

اب ٹھوس کا حجم ہو گا

$$V = \int_{c}^{d} \pi[\{R(y)\}^2 - \{r(y)\}^2]dy$$

جہاں

$$\text{بیرونی نصف قطر} = R(x) = \sqrt{y} \text{ اور}$$
$$\text{اندرونی نصف قطر} = r(x) = \frac{y}{2}$$

اس لیے

$$V = \int_{0}^{4} \pi\left[\{\sqrt{y}\}^2 - \left\{\frac{y}{2}\right\}^2\right]dy$$
$$= \int_{0}^{4} \pi\left[y - \frac{y^2}{4}\right]dy$$
$$= \pi\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}\right]_{0}^{4}$$
$$= \frac{8\pi}{3} \text{ مکعب اکائی}$$

مثال 11- پہلے ربع میں $y = x^2$، y محور اور خط $y = 1$ سے گھرے علاقہ کو $x = \frac{3}{2}$ کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے

حل- سوال کے مطابق ہم نے علاقہ، بیرونی نصف قطر اور اندرونی نصف قطر اور $x = \frac{3}{2}$ کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کی شکلیں کھینچیں۔

اب ٹھوس کا حجم ہو گا

$$V = \int_{c}^{d} \pi[\{R(y)\}^2 - \{r(y)\}^2]dy$$

جہاں

$R(x) = \frac{3}{2}$ = یرونی نصف قطر اور

$r(x) = \frac{3}{2} - \sqrt{y}$ = اندرونی نصف قطر

اس لیے

$$V = \int_{0}^{1} \pi\left[\left\{\frac{3}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{3}{2} - \sqrt{y}\right\}^2\right]dy$$

$$= \int_{0}^{1} \pi[-y + 3\sqrt{y}]dy$$

$$= \pi\left[-\frac{y^2}{2} + 2y^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$= \frac{3\pi}{2}$ مکعب اکائی

مثال12- ایک ٹھوس کو بنانے کے لیے خط $y = x$ اور منحنی $y = \frac{1}{x}, 1 \le x \le 4$ کے درمیانی علاقہ کو x محور کے گرد گھمایا گیا۔ اس طرح بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

حل- سوال کے مطابق ہم نے علاقہ، بیرونی نصف قطر اور اندرونی نصف قطر اور گھمانے سے بنے ٹھوس کی شکلیں کھینچیں۔

اب ٹھوس کا حجم ہو گا

$$V = \int_{a}^{b} \pi[\{R(x)\}^2 - \{r(x)\}^2]dx$$

جہاں

$R(x) = x$ = بیرونی نصف قطر اور

$r(x) = \frac{1}{x}$ = اندرونی نصف قطر

اس لیے

$$V = \int_{1}^{4} \pi\left[\{x\}^2 - \left\{\frac{1}{x}\right\}^2\right]dx$$

$$= \int_{1}^{4} \pi[8 - 6x - x^2 - x^4]dx$$

$$= \pi\left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}\right]_1^4$$

$= \frac{81\pi}{4}$ مکعب اکائی

9.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں آپ اس قابل ہو گئے ہوں گے کہ سلائسنگ، ڈسکس اور واشر کے طریقوں سے اجسام کے حجم معلوم کر سکیں۔

9.4 کلیدی الفاظ (Key Words)

حجم، مکعب اکائی، استوانہ، بیرونی نصف قطر، اندرونی نصف قطر، سلائسنگ، ڈسکس، واشر، عرضی تراش، اساس، مربع نما پرامڈ

9.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

9.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. $x = a, x = b$ اور خط منحنی $y = f(x)$ سے گھرے رقبہ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس مجسم کا رقبہ ہے

(a) $\int_a^b \pi y^2 dx$ (b) $\frac{1}{2}\int_a^b \pi y^2 dx$ (c) $\frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx$ (d) $\int_a^b y^2 dx$

2. خط منحنی $y = f(x)$ اور $x = a, x = b$ سے گھرے رقبہ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس مجسم کا رقبہ ہے

(a) $\int_a^b \pi y ds$ (b) $\int_a^b 2\pi y ds$ (c) $\int_a^b 2\pi y^2 ds$ (d) $\int_a^b 2\pi y dx$

3. اگر بیرونی نصف قطر $= R(x)$ اور اندرونی نصف قطر $= r(x)$ ہو، تب حجم حاصل کرنے کا واشر ضابطہ ہے:

(a) $V = \int_a^b \pi[R(x) - r(x)]^2 dx$

(b) $V = \int_a^b \pi[\{R(x)\}^2 - \{r(x)\}^2] dx$

(c) $V = \int_a^b \pi[r(x) - R(x)]^2 dx$

(d) $V = \int_a^b \pi[\{r(x)\}^2 - \{R(x)\}^2] dx$

4. راس پر مماس کے گرد $y^2 = 4ax$ کے وطر خاص کو قطع کیے گئے حصہ کو گھمانے سے بنی ریل (Reel) کا حجم معلوم کریں۔

(a) $\frac{1}{5}\pi a^3$ (b) $\frac{2}{5}\pi a^3$ (c) $\frac{4}{5}\pi a^3$ (d) $\frac{2}{3}\pi a^3$

9.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. مثال کے ساتھ کسی ٹھوس کے حجم حاصل کرنے کے سلائسنگ کے طریقے کو واضح کیجیے۔
2. خطوط $x = 2, y = 0$ اور خط منحنی $y = x^2$ سے گھرے علاقہ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔
3. خط $y = 0$ اور خط منحنی $y = \sqrt{9 - x^2}$ سے گھرے علاقہ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔
4. خط $y = 0$ اور خط منحنی $y = x - x^2$ سے گھرے علاقہ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

5. خطوط $x = 0, y = 0$ اور خط منحنی $y = \sqrt{\cos x}\,, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ سے گھرے علاقہ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

6. خطوط $x = 0, y = -1,\ y = 1$ اور خط منحنی $x = \sqrt{5}y^2$ سے گھرے علاقہ کو y محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

7. خطوط $x = 0,\ y = 2$ اور خط منحنی $x = y^{\frac{3}{2}}$ سے گھرے علاقہ کو y محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

8. خطوط $x = 0, y = 0,\ y = 3$ اور خط منحنی $x = \frac{2}{(y+1)}$ سے گھرے علاقہ کو y محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

9. خطوط $x = 0,\ y = 1$ اور خط منحنی $x = \frac{\sqrt{2y}}{(y^2+1)}$ سے گھرے علاقہ کو y محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

10. خطوط $x = 0$ اور خط منحنی $x = 2\sin 2y\,, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$ سے گھرے علاقہ کو y محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

9.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. صنوبری $r = a(1 + \cos\theta)$ کو ابتدائی خط کے گرد گھمانے پر حاصل ٹھوس کا حجم حاصل کیجیے۔

2. علاقہ مثلث سے ملفوف (Enclosed) ہے جسکے راس $(1, 0)$، $(2, 1)$ اور $(1، 1)$ ہیں۔ اس علاقہ کو y محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

3. علاقہ مثلث سے ملفوف (Enclosed) ہے جسکے راس $(0, 1)$، $(1, 0)$ اور $(1، 1)$ ہیں۔ اس علاقہ کو y محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

9.6 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Calculus, M. J. Strauss, G. L. Bradley, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall (3rd Edition)
2. Calculus: Robert T. Smith, R. B. Muiton, McGraw Hill Education India Pvt Ltd. New Delhi.

اکائی 10۔ استوانی خول کے ذریعے حجم

(Volumes by Cylindrical Shells)

اکائی کے اجزا

10.0 تمہید (Introduction)

جب ہم گھماؤ سے ٹھوس کا حجم معلوم کرنا چاہتے ہیں تب بعض اوقات استوانی خول ضابطہ، واشر ضابطہ سے اس اعتبار سے بہتر ثابت ہوتا ہے کہ ہمیں ان کے ضابطہ میں مربع کرنے کی ضرورت پیش نہیں ہوتی ہے۔

10.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ اس قابل ہو جائینگے کہ استوانی خول کو سمجھ سکیں گے اور شیل ضابطہ کا استعمال کر کے کسی ٹھوس کا حجم حاصل کر سکیں گے، اس کے ساتھ ہی شیل اور واشر کے طریقوں میں تفریق کر دونوں میں سے بہتر طریقے کا استعمال کر کے کسی بھی مسئلہ کو حل کر سکیں گے۔

10.2 استوانی خول کے ذریعے حجم (Volume by Cylindrical Shells)

10.2.1 شیل ضابطہ (Shell Formula)

فرض کرو کہ ہم نے شکل میں دیے گئے رنگے علاقہ کو y محور کے گرد گھمانے سے ایک ٹھوس بنتا ہے۔ ٹھوس کے حجم کے اندازہ کے لیے ہم علاقہ کو $[a, b]$ وقفہ کے پارٹیشن P پر منحصر مستطیلیوں (Rectangles) کے مشابہ (Approximate) کر سکتے ہیں۔ علاقہ اسی وقفہ پر واقع ہے۔ نمونہ مشابہ مستطیل Δx_k اکائی چوڑا اور $f(C_k)$ اکائی اونچا ہے۔ جس میں C_k مستطیل کے اساس کا وسطی نقطہ ہے۔ جیومیٹری کے ضابطہ سے مستطیل کے سویپٹ آوٹ (Swept Out) سے حاصل شیل کے حجم کو ہم یوں لکھ سکتے ہیں:

$\Delta V_k = 2\pi \times$ شیل کا اوسط نصف قطر $\times$ شیل کی اونچائی $\times$ موٹائی

یا

$$\Delta V_k = 2\pi \times C_k \times f(C_k) \times \Delta x_k$$

پارٹیشن P پر منحصر n مستطیلیوں سے سوپٹ (Swept) کیے گئے شیلس کے حجموں کے مجموعہ سے ٹھوس کا قریب تر حجم یہ ہے

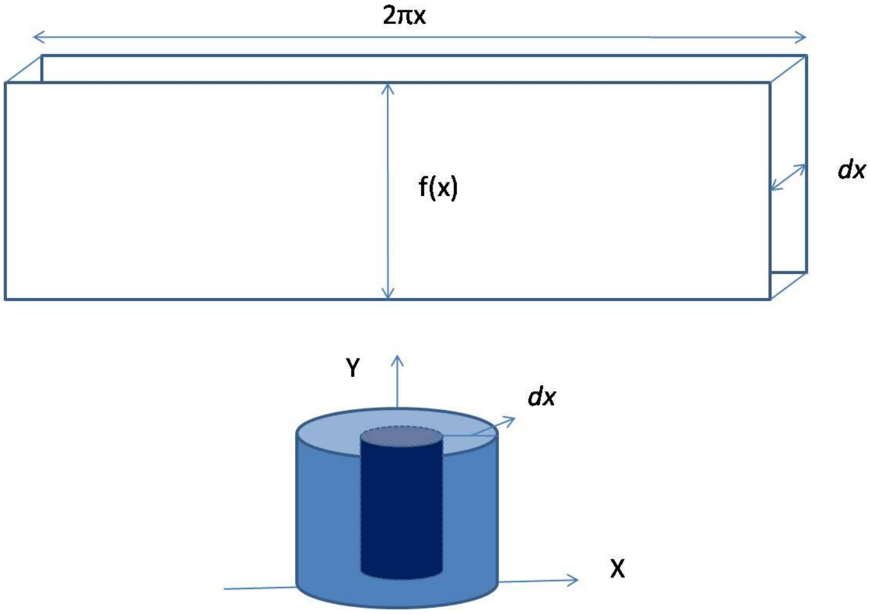
$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi C_k f(C_k) \Delta x_k$$

جہاں تک $\|P\| \to 0$ کا تعلق ہے اس مجموعہ لے لمٹ (Limit) سے حاصل ٹھوس کا حجم یہ ہے:

$$V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} 2\pi C_k f(C_k) \Delta x_k = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

اس لیے y محور کے گرد x محور اور مسلسل تفاعل b $y = f(x) \geq 0, 0 \leq a \leq x \leq$ کے درمیانی علاقہ کو گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم یہ ہوگا

$$V = \int_a^b 2\pi \left(\frac{Shell}{Radius}\right)\left(\frac{Shell}{Height}\right) dx = \int_a^b 2\pi x f(x) dx \qquad .....(1)$$



شکل 10.2.1

10.2.2 شیل ضابطے کے مراحل (Working Steps for Shell Formula)

گردشی محور کی افقی یا عمودی حالت کے قطع نظر شیل طریقے کے اطلاق کے درج ذیل مراحل ہیں:

مرحلہ 1: علاقہ کھینچیں اور اس کے گرد گردشی محور کے متوازی ایک قطعہ خط (Line Segment) بنائے۔ قطعہ کی اونچائی یا لمبائی (شیل کی اونچائی)، گردشی محور سے فاصلہ (شیل کا نصف قطر) اور چوڑائی (شیل کی موٹائی) دکھائے۔

مرحلہ 2: تکمل کی حدود معلوم کیجیے۔

مرحلہ 3: حجم معلوم کرنے کے لیے مناسب متغیر (Variable) x یا y کے حوالے سے حاصل ضرب $2\pi\left(\frac{Shell}{Radius}\right)\left(\frac{Shell}{Height}\right)$ کو تکمل کیجیے۔

مثال 1- خط منحنی $y = \sqrt{x}$، x محور اور خط $x = 4$ سے گھرے علاقہ کو y محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کریں۔

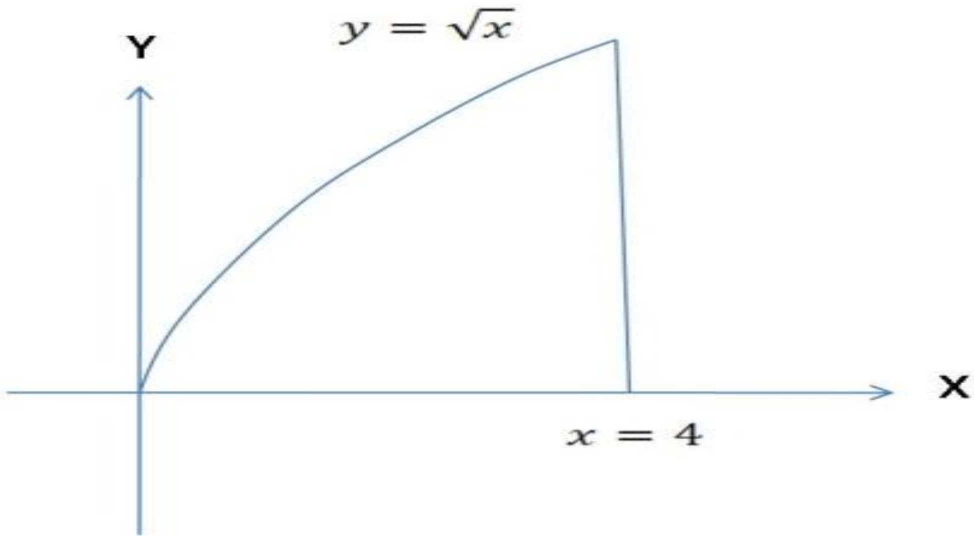
حل۔

مرحلہ 1: علاقہ کھینچیں اور اس کے گرد گردشی محور کے متوازی ایک قطعہ خط (Line Segment) بنایے۔ قطعہ کی اونچائی (شیل کی اونچائی) $\sqrt{x}$، گردشی محور سے فاصلہ (شیل کا نصف قطر) x اور چوڑائی (شیل کی موٹائی) dx ہے۔

مرحلہ 2: تکمل کی حدود $a = 0$ سے $b = 4$ تک ہے۔

مرحلہ 3: حجم معلوم کرنے کے لیے متغیر (Variable) x کے حوالہ سے حاصل ضرب $2\pi\binom{Shell}{Radius}\binom{Shell}{Height}$ کو تکمل کیجیے۔

اب خط منحنی $y = \sqrt{x}$، x محور اور خط $x = 4$ سے گھرے علاقہ کو y محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم ہو گا:



شکل: 10.2.1.1

$$V = \int_a^b 2\pi\binom{Shell}{Radius}\binom{Shell}{Height}dx$$

$$= \int_0^4 2\pi x(\sqrt{x})dx$$

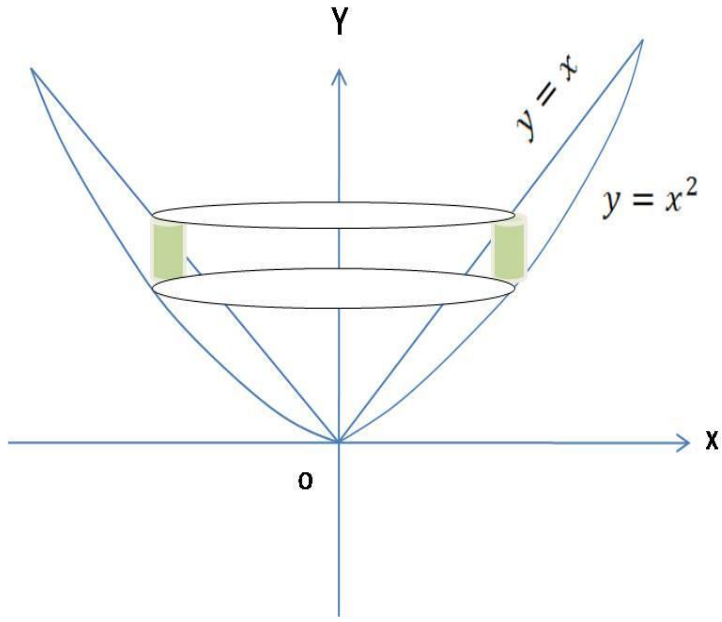
$$= 2\pi\int_0^4 x^{\frac{3}{2}}dx$$

$$= 2\pi\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4$$

$$= \frac{128\pi}{5}$$

مثال 2- $y = x^2$ اور $y = x$ سے گھرے علاقہ کو خط $x = 0$ کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم حاصل کیجیے۔

حل۔



شکل:10.2.1.2

مرحلہ 1: علاقہ کھینچیں اور اس کے گرد گردشی محور کے متوازی ایک قطعہ خط (Line Segment) بنائیے۔ شکل سے قطعہ کی اونچائی (شیل کی اونچائی) $(x - x^2)$ ہے، گردشی محور سے فاصلہ (شیل کا نصف قطر) x اور چوڑائی (شیل کی موٹائی) dx ہے۔

مرحلہ 2: تکمل کی حدود $a = 0$ سے $b = 1$ تک ہے۔

مرحلہ 3: حجم معلوم کرنے کے لیے متغیر (Variable) x کے حوالہ سے حاصل ضرب $2\pi \begin{pmatrix} Shell \\ Radius \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Shell \\ Height \end{pmatrix}$ کو تکمل کیجیے۔

$y = x^2$ اور $y = x$ سے گھرے علاقہ کو خط $x = 0$ کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم ہوگا

$$V = \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix} Shell \\ Radius \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Shell \\ Height \end{pmatrix} dx$$

$$= \int_0^1 2\pi x(x - x^2)dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{6}$$

مثال 3- $y = \sqrt{x}$ اور $y = 1/x$ سے گھرے علاقہ کو $1 \le x \le 4$ پر خط $x = 0$ کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم حاصل کیجیے۔

حل- مرحلہ 1: علاقہ کھینچیں اور اس کے گرد گردشی محور کے متوازی ایک قطعہ خط (Line Segment) بنائیے۔ شکل سے قطعہ کی اونچائی (شیل کی اونچائی) $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)$ ہے، گردشی محور سے فاصلہ (شیل کا نصف قطر) x اور چوڑائی (شیل کی موٹائی) dx ہے۔

مرحلہ 2: تکمل کی حدود $a = 1$ سے $b = 4$ تک ہے۔

مرحلہ 3: حجم معلوم کرنے کے لیے متغیر (Variable) x کے حوالہ سے حاصل ضرب $2\pi\begin{pmatrix}Shell\\Radius\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Shell\\Height\end{pmatrix}$ کو تکمل کیجیے۔

$y = \sqrt{x}$ اور $y = 1/x$ سے گھرے علاقہ کو $1 \le x \le 4$ پر خط $x = 0$ کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم ہوگا

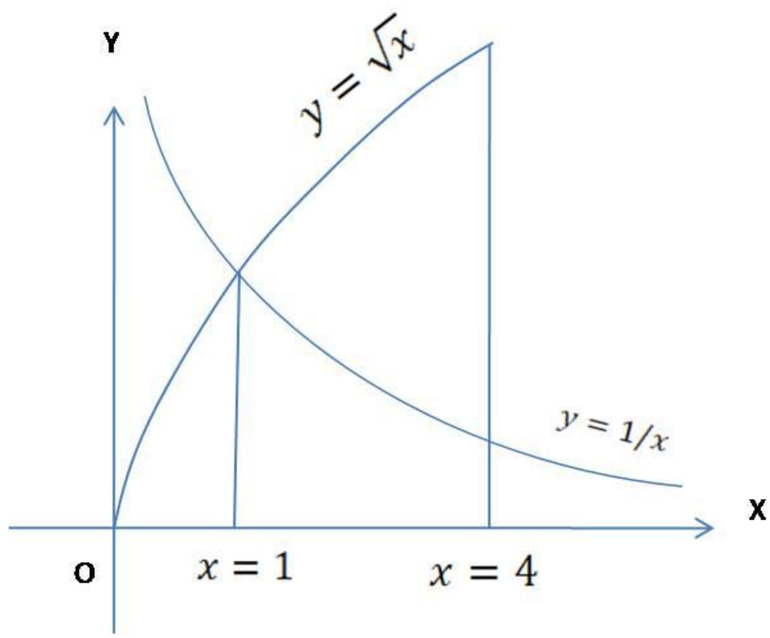
$$V = \int_a^b 2\pi\begin{pmatrix}Shell\\Radius\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Shell\\Height\end{pmatrix}dx$$

$$= \int_1^4 2\pi x\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)dx$$

$$= 2\pi\int_1^4\left(x^{\frac{3}{2}} - 1\right)dx$$

$$= 2\pi\left[\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} - x\right]_1^4$$

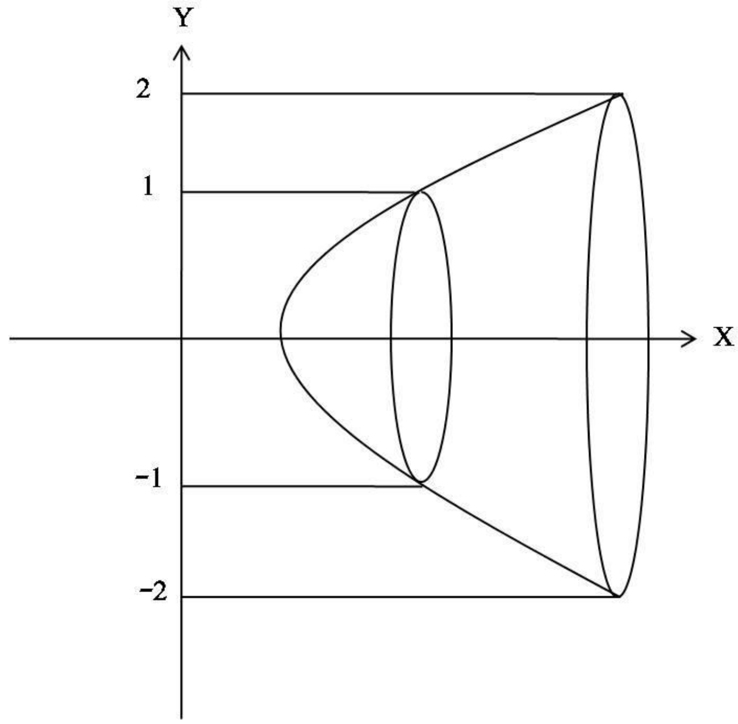
$$= \frac{94\pi}{5}$$



شکل:10.2.1.3

مثال-4 $x = 1 + y^2$ اور $x = 0$ سے گھرے علاقہ کو $1 \le y \le 2$ پر خط $y = 0$ کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم حاصل کیجیے۔

حل۔



شکل:10.2.3.6

مرحلہ 1: علاقہ کھینچیں اور اس کے گرد گردشی محور کے متوازی ایک قطعہ خط(Line Segment) بنائے۔ شکل سے قطعہ کی اونچائی (شیل کی اونچائی) $(1 + y^2)$ ہے، گردشی محور سے فاصلہ (شیل کا نصف قطر)y اور چوڑائی (شیل کی موٹائی)dy ہے۔

مرحلہ 2: تکمل کی حدود $a = 1$ سے $b = 2$ تک ہے۔

مرحلہ 3: حجم معلوم کرنے کے لیے متغیر(Variable)y کے حوالہ سے حاصل ضرب $2\pi\binom{Shell}{Radius}\binom{Shell}{Height}$ کو تکمل کیجیے۔

$x = 1 + y^2$ اور $x = 0$ سے گھرے علاقہ کو $1 \le y \le 2$ پر خط $y = 0$ کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم ہو گا

$$V = \int_a^b 2\pi\binom{Shell}{Radius}\binom{Shell}{Height}dy$$

$$= \int_1^2 2\pi y(1 + y^2)dy$$

$$= 2\pi\int_1^2 (y + y^3)dy$$

$$= 2\pi\left[\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4}\right]_1^4$$

$$= \frac{21\pi}{2}$$

مثال 5- $y = \sqrt{2}$ اور $x = 4, y = 0$ سے گھرے علاقہ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم حاصل کیجیے۔

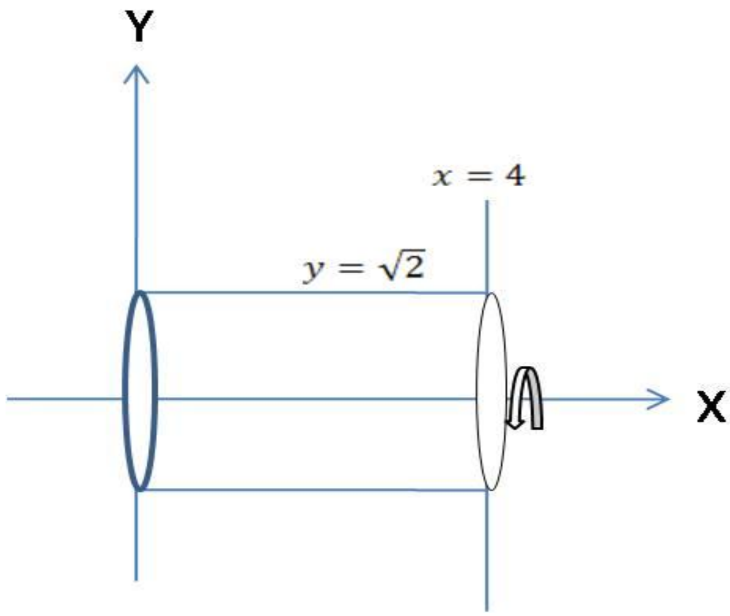
حل- مرحلہ 1: علاقہ کھینچیں اور اس کے گرد گردشی محور کے متوازی ایک قطعہ خط (Line Segment) بنائے۔ شکل سے قطعہ کی اونچائی (شیل کی اونچائی) $(4-y^2)$ ہے، گردشی محور سے فاصلہ (شیل کا نصف قطر) y اور چوڑائی (شیل کی موٹائی) dy ہے۔

مرحلہ 2: تکمل کی حدود $a=0$ سے $b=2$ تک ہے۔

مرحلہ 3: حجم معلوم کرنے کے لیے متغیر (Variable) y کے حوالہ سے حاصل ضرب $2\pi\begin{pmatrix}Shell\\Radius\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Shell\\Height\end{pmatrix}$ کو تکمل کیجیے۔

$y=\sqrt{2}$ اور $x=4, y=0$ سے گھرے علاقہ کو x محور گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم ہو گا

$$
\begin{aligned}
V &= \int_a^b 2\pi\begin{pmatrix}Shell\\Radius\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Shell\\Height\end{pmatrix}dx\\
&= \int_0^2 2\pi y(4-y^2)dy\\
&= 2\pi\int_0^2 (4y-y^3)dy\\
&= 2\pi\left[2y^2-\frac{y^4}{4}\right]_0^2\\
&= 8\pi
\end{aligned}
$$



شکل:10.2.1.4

مثال 6- پہلے ربع میں $y=x^2$ اور $x=0, y=1$ سے گھرے علاقہ کو $x=2$ کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم حاصل کیجیے۔

حل- مرحلہ 1: ایک قطعہ خط کو علاقہ کے اکراس (Across) گردشی محور $x=2$ کے متوازی بنائے۔ شکل سے قطعہ کی اونچائی (شیل کی اونچائی) $(1-x^2)$ ہے، گردشی محور سے فاصلہ (شیل کا نصف قطر) $2-x$ اور چوڑائی (شیل کی موٹائی) dx ہے۔

مرحلہ 2: تکمل کی حدود $a = 0$ سے $b = 1$ تک ہے۔

مرحلہ 3: حجم معلوم کرنے کے لیے متغیر (Variable) x کے حوالہ سے حاصل ضرب $2\pi \binom{Shell}{Radius} \binom{Shell}{Height}$ کو تکمل کیجیے۔

پہلے ربع میں $y = x^2$ اور $y = 1$، $x = 0$ سے گھرے علاقہ کو $x = 2$ کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم ہوگا

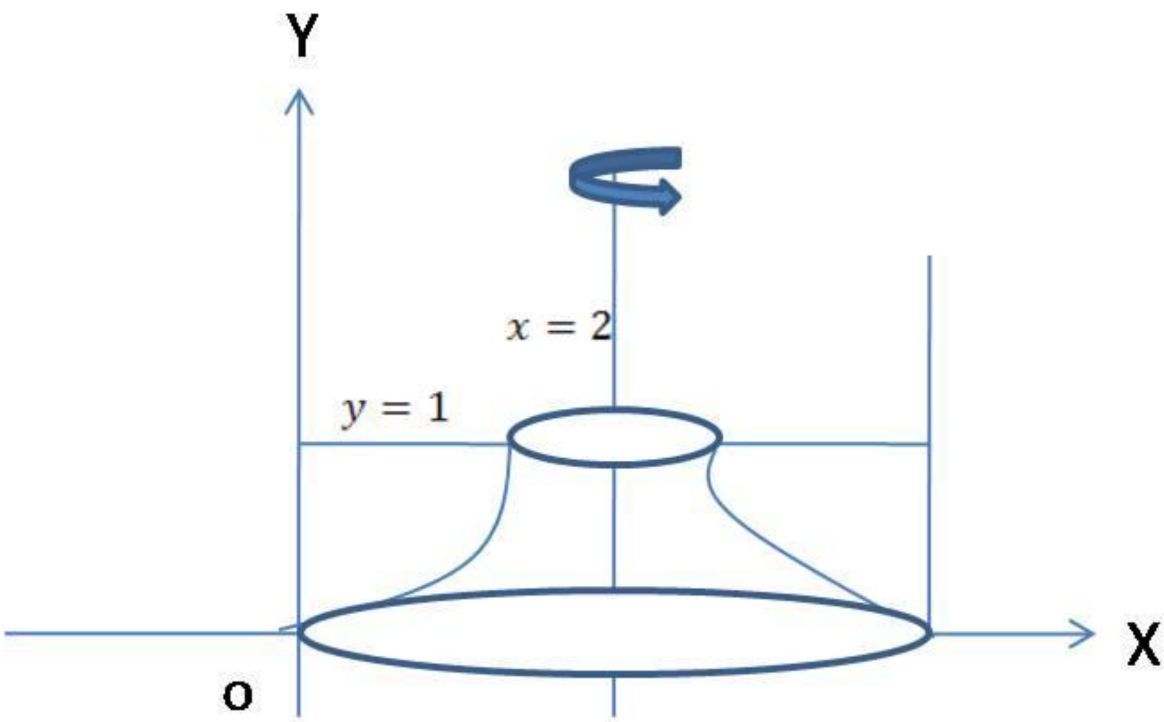
$$V = \int_a^b 2\pi \binom{Shell}{Radius} \binom{Shell}{Height} dx$$

$$= \int_0^1 2\pi(2-x)(1-x^2)dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 (2 - x - 2x^2 + x^3)dy$$

$$= 2\pi \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= \frac{13\pi}{6}$$



شکل:10.2.1.5

یاد رکھیے محدودی محوروں کے اطراف $y = x$ اور $y = x^2$ سے گھرے علاقہ کو گھما کر بنائے گئے ٹھوس کے لیے واشر اور شیل طریقہ کا خلاصہ ٹیبل میں دیا گیا ہے۔ اس مخصوص علاقہ کے لیے دونوں طریقے، دونوں محوروں کے گرد گردش کے لیے مناسب ہیں۔ لیکن ایسا ہمیشہ

نہیں ہوتا۔ مثال کے طور پر جب کسی علاقہ کو y محور کے گرد گھمایا جائے اور واشر طریقہ کا استعمال کیا جائے تب ہمیں y کے حوالہ سے تکمل کرنا ہوتا ہے۔ اس کے باوجود متکمل کو y کی اصطلاح میں بیان کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں شیل طریقہ ہمیں x کے حوالہ سے تکمل کرنے کی اجازت دیتا ہے۔ گھماؤ کے ٹھوس کے حجموں کی تحسیب کے لیے واشر اور شیل طریقے ہمیشہ میل کھاتے ہیں۔

10.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے پڑھا کہ کسی علاقے کو محور کے گرد گھمانے سے ایک ٹھوس بنتا ہے۔ ٹھوس کے حجم کے اندازے کے لیے ہم علاقہ کو وقفہ کے پارٹیشن پر منحصر مستطیلیوں کے مشابہ کر سکتے ہیں۔ علاقہ اسی وقفہ پر واقع ہے۔ نمونہ مشابہ مستطیل اکائی چوڑا اور اکائی اونچا ہے۔ جس میں مستطیل کے اساس کا وسطی نقطہ ہے۔ جیومیٹری کے ضابطے سے مستطیل کے سویپٹ آؤٹ سے حاصل شیل کے حجم کو ہم یوں لکھ سکتے ہیں:

$$V = \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix} Shell \\ Radius \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Shell \\ Height \end{pmatrix} dx = \int_a^b 2\pi x f(x) dx \qquad ...(1)$$

گردشی محور کی افقی یا عمودی حالت کے قطع نظر شیل طریقہ کے اطلاق کے درج ذیل مرحلے ہیں:

مرحلہ 1: علاقہ کھینچیں اور اس کے گرد گردشی محور کے متوازی ایک قطعہ خط (Line Segment) بنائے۔ قطعہ کی اونچائی یا لمبائی (شیل کی اونچائی)، گردشی محور سے فاصلہ (شیل کا نصف قطر) اور چوڑائی (شیل کی موٹائی) دکھائے۔

مرحلہ 2: تکمل کی حدود معلوم کیجیے۔

مرحلہ 3: حجم معلوم کرنے کے لیے مناسب متغیر (Variable) x یا y کے حوالہ سے حاصل ضرب $2\pi \begin{pmatrix} Shell \\ Radius \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Shell \\ Height \end{pmatrix}$ کو تکمل کیجیے۔

10.4 کلیدی الفاظ (Key Words)

استوانی خول، شیل ضابطہ، ربع، مربع، ابعاد، مستطیل، مشابہ، وسطی نقطہ، سویپٹ آؤٹ، قطعہ خط،

10.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

10.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. x محور کے گرد گھماؤ سے بنے ٹھوس کے حجم کے لیے شیل ضابطہ ہے:

(a $\int_a^b 2\pi y f(y) dy$

(b $\int_a^b 2\pi x f(x) dx$

$\int_a^b \pi[R(y)]^2dy$ (c

$\int_a^b \pi[R(x)]^2dx$ (d

2. y محور کے گرد تفاعل $y = f(x)$ اور $x\epsilon[a,b]$ کے درمیانی علاقہ کو گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم ہے:

$\int_a^b 2\pi yf(y)dy$ (a

$\int_a^b 2\pi xf(x)dx$ (b

$\int_a^b \pi[R(x)]^2dx$ (c

$\int_a^b \pi[R(y)]^2dy$ (d

3. $y = x$ اور $y = x^2$ کو y محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ شیل کا نصف قطر ہوگا:

1 (a

$x-1$ (b

x (c

y (d

4. x محور کے گرد تفاعل $x = f(y)$ اور $y\epsilon[a,b]$ کے درمیانی علاقہ کو گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم .... ہے

5. y محور کے گرد تفاعل $y = f(x)$ اور $x\epsilon[a,b]$ کے درمیانی علاقہ کو گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم .... ہے

6. x محور کے گرد تفاعل $x = f(y)$ اور $y\epsilon[a,b]$ کے درمیانی علاقہ کو گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم $\int_a^b 2\pi yf(y)dy$ ہے (T/F)

7. y محور کے گرد تفاعل $y = f(x)$ اور $x\epsilon[a,b]$ کے درمیانی علاقہ کو گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم $\int_a^b 2\pi xf(x)dx$ ہے (T/F)

10.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. استوانی شیل کے طریقہ کی وضاحت کیجیے-
2. y محور کے گرد اور x محور اور تفاعل $y = f(x)$ کے درمیانی علاقہ کو $x\epsilon[a,b]$ پر گھمانے سے بنے ٹھوس کے حجم کے لیے شیل کا ضابطہ اخذ کیجیے۔
3. x محور کے گرد اور y محور اور تفاعل $x = f(y)$ کے درمیانی علاقہ کو $y\epsilon[a,b]$ پر گھمانے سے بنے ٹھوس کے حجم کے لیے شیل کا ضابطہ اخذ کیجیے۔
4. شیل اور واشر کے طریقوں میں تفریق کیجیے۔
5. $y = x, y = -\frac{x}{2}$ اور $x = 2$ سے گھرے علاقہ کو y محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ اس طرح بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

10.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. پہلے ربع میں خط منحنی $x = y - y^3$ اور y محور سے گھرے علاقہ کو (a) x محور کے گرد۔

(b) خط $y = 1$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔اس طرح بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔ڈسک یا واشر طریقوں میں سے جو مناسب ہو استعمال کیجیے۔

2. پہلے ربع میں خط منحنی $x = y - y^3$, $x = 1$ اور $y = 1$ سے گھرے علاقہ کو (a) x محور (b) y محور (c) خط $x = 1$
(d) خط $y = 1$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔اس طرح بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

3. پہلے ربع میں اوپر سے خط منحنی $y = \frac{1}{x^{1/4}}$ بائیں سے خط $x = \frac{1}{16}$ اور نیچے سے خط $y = 1$ سے گھرے علاقہ کو x محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔اس طرح بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

10.6 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Calculus, M. J. Strauss, G. L. Bradley, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall (3rd Edition)
2. Calculus: Robert T. Smith, R. B. Muiton, McGraw Hill Education India Pvt Ltd. New Delhi.

اکائی 11۔ قوسی لمبائی

(Arc Length)

اکائی کے اجزا

11.0 تمہید(Introduction)

تکملی احصائی تبدیلی کی شرح سے متعلق معلومات پر مبنی مثلوں سے بحث کرتا ہے۔ کسی سطح پر واقع کسی منحنی کی لمبائی کی پیائش کرنا اس کے ذریعے آسان ہوتا ہے۔ کسی منحنی کے کسی حصہ کے دو نقاط کی درمیانی دوری کو قوسی لمبائی کہتے ہیں۔

11.1 مقاصد(Objectives)

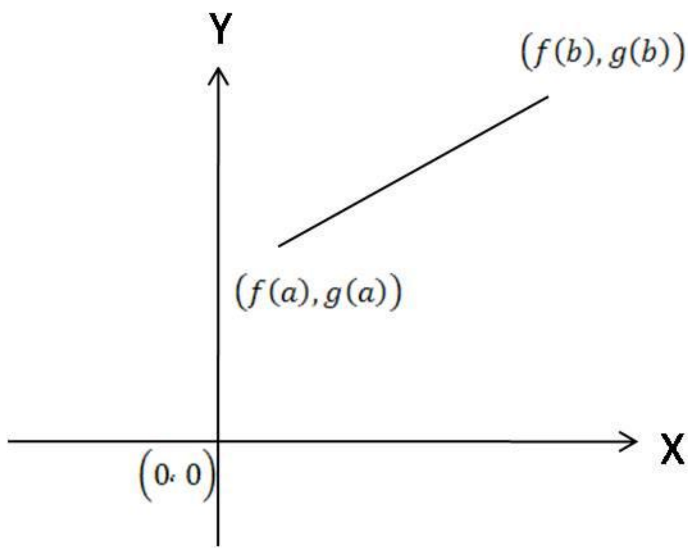
اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ منحنیوں کے قوسوں کی لمبائی کو حاصل کر سکیں۔

11.2 قوسی لمبائی کا بنیادی تعارف(Basic Information of Arc Length)

اب ہم قوسی لمبائی کے ضابطے کو سمجھنے سے پہلے اس کی بنیادی معلومات حاصل کریں گے۔

11.2.1 پیرامٹرک مساوات(Parametric Equations)

جب کسی سطح میں حرکت کرنے والے ذرہ (Particle) کا راستہ ایک دائرہ ہو تو ہم اس کی وضاحت کارتیسی ضابطے سے نہیں کر سکتے کہ یہ y کو راست x کی اصطلاح میں اور x کو راست y کی اصطلاح میں ظاہر کرتا ہے۔ اس کے بجائے ہم ذرے کی ہر کو آرڈینیٹس کو وقت t کے تفاعل سے ظاہر کرتے ہیں۔ اور راستے کو مساوات کی جوڑی $x = f(t), y = g(t)$ سے بیان کرتے ہیں۔ حرکت کے مطالعہ کے لیے اس طرح کی مساوات کارتیسی ضابطے کے لائق ہوتی ہیں، کیوں کہ وہ ہمیں کسی بھی وقت t کے لیے ذرے کے مقام کا پتہ دیتی ہیں۔



شکل:11.2.1.1

پیرامٹرک مساوات: اگر x اور y مسلسل تفاعل $x = f(t), y = g(t)$ کے طور t قدروں کے وقفہ پر دیے گئے ہوں تب ان مساواتوں

سے معین کیا گیا نقاط کا سٹ $(x, y) = (f(t), g(t))$ محددوی سطح (Coordinate Plane) میں ایک خط منحنی ہے۔ یہ مساوات اس خط منحنی کے لیے پیرامٹرک مساوات کہلاتی ہیں۔ متغیر t خط منحنی کا پیرامیٹر (تبدیلیہ) ہے۔ اس کا ڈومین (Domain) I پیرامیٹر وقفہ کہلاتا ہے۔ اگر I بند وقفہ $a \leq t \leq b$ ہو تو نقطہ $(f(a), g(a))$ خط منحنی کا ابتدائی نقطہ (Initial Point) ہے۔ نقطہ $(f(b), g(b))$ خط منحنی کا آخری نقطہ (Terminating Point) ہے۔

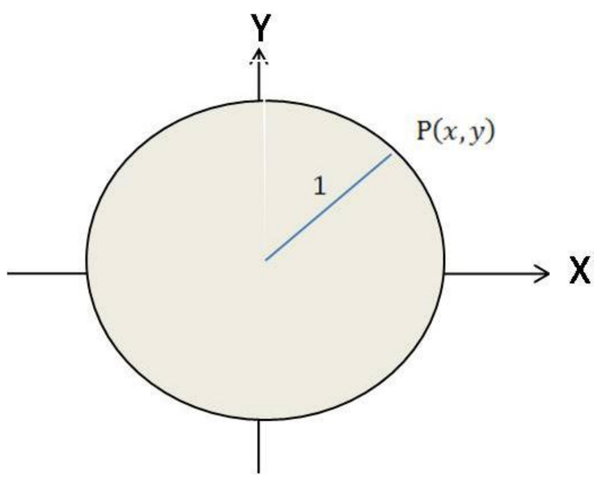
خط منحنی کو پیرامٹرک کرنا (Parameterization of the Curve): کسی سطح میں جب ہم پیرامٹرک مساوات اور ایک پیرامٹرک وقفہ کو ایک خط منحنی کے لیے مختص کرتے ہیں تو ہم کہتے ہیں کہ وہ خط منحنی پیرامٹرک ہو چکا ہے۔ یہ مساوات اور وقفہ (Interval) اس خط منحنی کے پیرامٹرائزیشن کے برابر ہے۔

نوٹ: بہت سے اطلاقات میں t وقت کو ظاہر کرتا ہے۔ لیکن بعض اوقات یہ بجائے اس کہ ایک ذاویہ (Angle) کو یا پھر (جیسا کہ نیچے دی گئی مثالوں سے واضح ہے) ایک ذرے کے راستے کے ہمراہ طے کردہ فاصلہ کو بھی ظاہر کر سکتا ہے۔

مثال 1- دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ جیسا t میں اضافہ ہوتا ہے، مساوات $x = cos\, t\, , y = sin\, t$ اور پیرامیٹرک وقفہ $0 \leq t \leq 2\pi$، ذرے کے مقام $P(x, y)$ کی وضاحت کرتے ہیں جو دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ کے گرد مخالف ساعتوار (Counterclockwise) حرکت کرتا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ t کی ہر قدر کے لیے نقطہ دائرے پر رہتا ہے کیونکہ

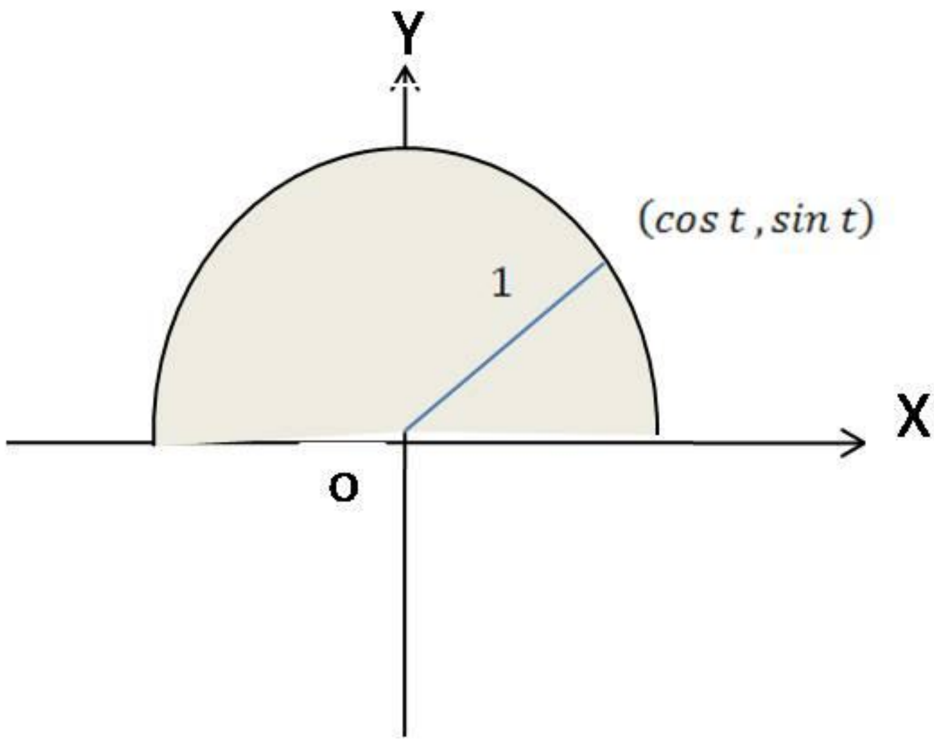
$$x^2 + y^2 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

ہے۔ لیکن نقطہ $P(x, y)$ نے حقیقت میں کتنا دائرہ طے کیا؟ نقطہ دائرے پر کتنا چلا یا گزرا اسے معلوم کرنے کے لیے ہم t میں 0 سے 2π تک اضافہ کے لیے حرکت کو ٹریک (Track) کرتے ہیں۔ پیرامیٹر t زاویعہ کی ریڈین (Radian) کی پیمائش میں ہے جو نصف قطر OP مثبت x محور کے ساتھ بناتا ہے۔ ذرہ اپنی حرکت $(1, 0)$ سے شروع کرتے ہوئے اوپر سرکتا ہے اور t کے $\frac{\pi}{2}$ کے قریب ہونے پر بائیں جانب جاتا ہے۔ اور پھر دائرے کے گرد اپنی حرکت جاری رکھتے ہوئے دوبارہ $(1, 0)$ پر جب $t = 2\pi$ ہوتا ہے رک جاتا ہے۔ اس طرح ذرے نے ٹھیک ایک مرتبہ دائرہ طے کیا۔



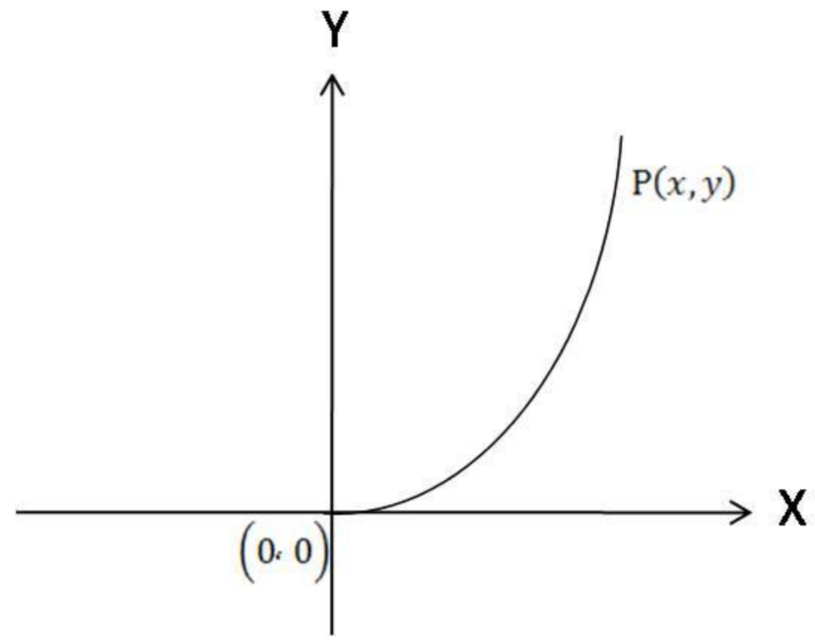
مثال-2 (نصف دائرہ) t میں جیسا 0 سے π تک اضافہ ہوتا ہے مساوات، $x = \cos t$, $y = \sin t$ اور پیرامٹرک وقفہ $0 \le t \le$ 2π ذرے کے مقام $P(x, y)$ کی وضاحت کرتے ہیں جو دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ کے گرد وساعتوار (Clockwise) حرکت کرتا ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ t کی تمام قدروں کے لیے نقطہ P دائرے پر رہتا ہے کیونکہ اس کے کو آرڈینیٹس (محدد) دائرے کی مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔ لیکن ذرے نے دائرے کے کتنے حصے کو طے کیا؟ اسے معلوم کرنے کے لیے 0 سے π تک t میں اضافہ کے لیے ہم حرکت کو ٹریس کرتے ہیں۔ جیسا کہ اوپر دی گئی مثال میں ہے، ذرہ (1,0) سے اپنی حرکت شروع کرتا ہے۔ لیکن اب جیسا کہ t اضافہ ہوتا ہے، y منفی بنتا ہے؛ اور $t = \frac{\pi}{2}$ پر گھٹ کر -1 ہو جاتا ہے۔ اور پھر t جیسے ہی π کے قریب ہوتا ہے، بڑھ کر دوبارہ 0 ہو جاتا ہے۔ اور دائرے کا صرف نچلا حصہ ڈھک (Covered) کر کے $t = \pi$ پر حرکت رک جاتی ہے۔



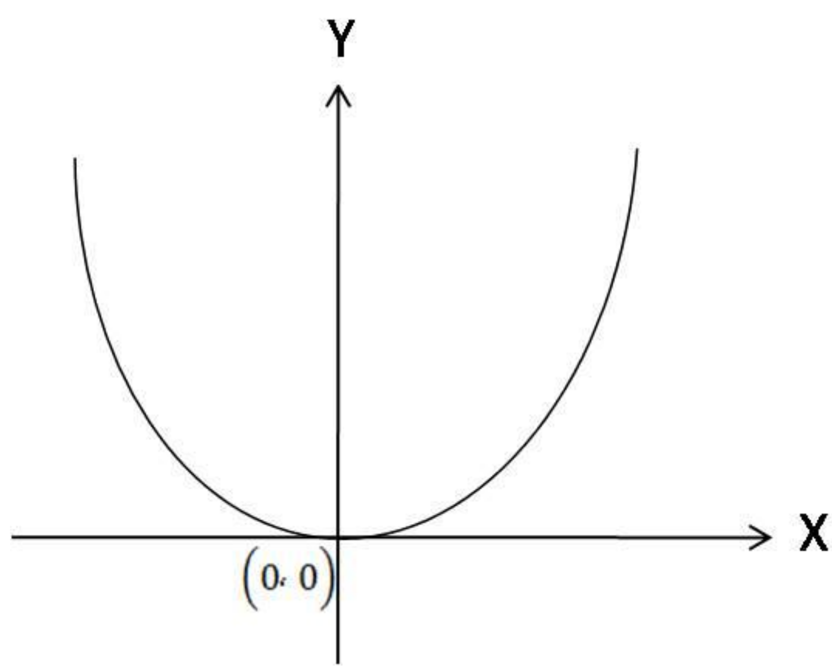
مثال-3 (نصف پیرابولا): xy سطح میں متحرک ذرے کا مقام $P(x, y)$ مساوات اور پیرامیٹر وقفہ $x = \sqrt{t}, y = t, t \ge 0$ سے دیا گیا ہے۔ ذرے کے ذریعے ٹریس کیے گئے راستے کی شناخت کیجیے اور حرکت کی وضاحت کیجیے۔

حل- ہم مساوات $x = \sqrt{t}$ اور $y = t$ سے t کا اخراج کر کے ذرے کے راستے کی شناخت کی کوشش کریں گے۔ حسن اتفاق سے ہمیں x اور y کے بیچ قابل شناخت الجبرائی تعلق دکھائی دیتا ہے۔ اس لیے $y = t = \left(\sqrt{t}\right)^2 = x^2$ اس کا مطلب ہے کہ ذرے کی پوزیشن محدد مساوات $y = x^2$ کو اس طرح مطمئن کرتے ہیں کہ ذرہ پیرابولا x کے ہمراہ حرکت کرتا ہے۔ نتیجہ اخذ کرنے کے لیے یہ کہنا غلط ہوگا کہ ذرے کا راستہ ایک مکمل پیرابولا $y = x^2$ ہے، بلکہ یہ ایک بالکلیہ طور پر نصف پیرابولا ہے۔ ذرے کا x محدد منفی بالکل نہیں ہے۔ ذرہ $t = 0$ پر $(0, 0)$ سے حرکت شروع کرتا ہے۔ اور t کی قدر میں اضافہ کے ساتھ پہلے ربع میں بلند ہوتا ہے۔



مثال-4 (ایک مکمل پیرابولا): xy سطح میں متحرک ذرے کا مقام $P(x,y)$ مساواتوں اور پیرامٹرک وقفہ $x = t, y = t^2$ اور $-\infty < t < \infty$ سے دیا گیا ہے۔ ذرے کے ذریعے ٹریس کیے گئے راستے کی شناخت کیجیے اور حرکت کی وضاحت کیجیے۔

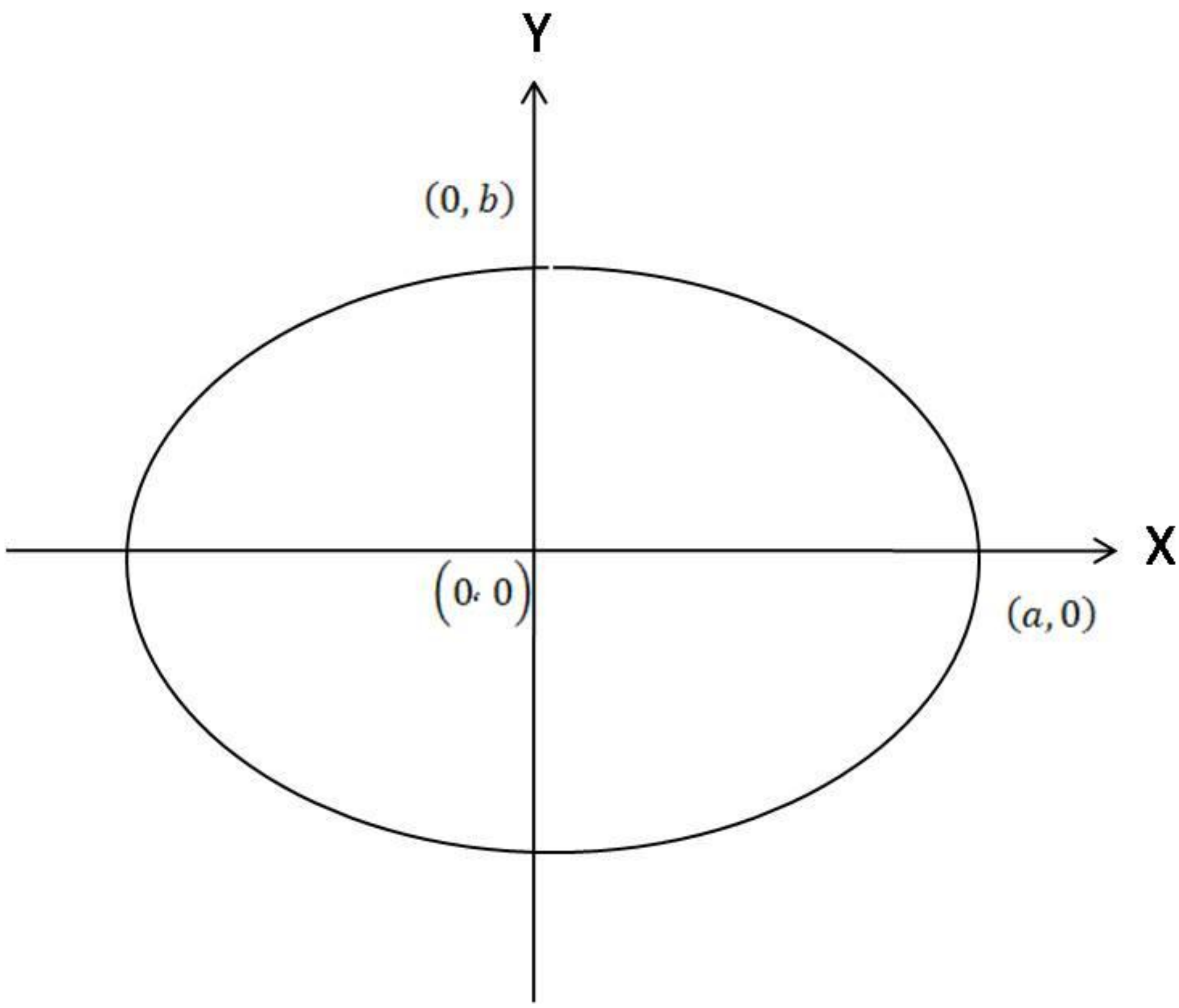
حل- ہم مساواتوں $x = t$، اور $y = t^2$ کے درمیان سے t کا اخراج کر کے ذرے کے راستے کی شناخت $y = t^2 = (t)^2 = x$ کو حاصل کر کے کرتے ہیں۔ ذرے کی پوزیشن محدد مساوات $y = x^2$ کو اس طرح مطمئن کرتے ہیں کہ وہ اس خط منحنی کے ہمراہ حرکت کرتا ہے۔ مثال(3) کے برخلاف ذرہ مکمل پیرابولا طے کرتا ہے۔ جس طرح $-\infty$ سے ∞ تک جیسے t میں اضافہ ہوتا ہے ویسے ذرہ بائیں جانب سے نیچے آنا شروع کرتا ہے۔ پھر مبدا (Origin) سے گزرتے ہوئے دائیں جانب اوپر حرکت کرنے لگتا ہے۔



جس طرح مثال(4) سے صراحت(Illustrate) ہوتی ہے کہ کوئی بھی خط منحنی $y = f(x)$ پیرامٹرائزیشن $x = t$ اور $y = f(t)$ رکھتی ہے۔ یہ اتنا آسان ہے کہ اس کا استعمال ہم عام طور پر نہیں کرتے لیکن کبھی کبھی اس طرح کا نقطہ نظر سود مند بھی ہوتا ہے۔

مثال-5 بیضوی(Ellipse) کا پیرامٹرائزیشن: ایک ذرے کی حرکت کی وضاحت کیجیے جسکی t وقت پر پوزیشن $P(x, y)$ اس طرح دی گئی ہے: $x = a\cos t$، $y = b\sin t$، $0 \le t \le 2\pi$

حل- ہر ذرے کے محددوں کے لیے کارتیسی مساوات، مساواتوں $\sin t = \frac{x}{a}$، $\cos t = \frac{y}{b}$ کے درمیان سے t کا اخراج کر کے معلوم کرتے ہیں۔ اسے اصول $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ سے مذکورہ نتیجہ اس طرح حاصل ہوتا ہے۔ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ یا $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ ذرہ محدد (x, y) مساوات $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ کو مطمئن کرتے ہیں اس لیے ذرہ بیضوی کے ہمراہ حرکت کرتا ہے۔ $t = 0$ پر ذرے کے محدد $x = a\cos(0) = a$، $y = b\sin(0) = 0$ ہیں اس لیے حرکت $(a,\ 0)$ شروع ہوتی ہے۔ اور ذرہ t وقت میں ہر اضافہ کے ساتھ بلند ہو کر بائیں جانب سرکتے ہوئے مخالف ساعتوار حرکت کرتا ہے۔ اس طرح وہ بیضوی کو ایک مرتبہ طے کرتے ہوئے وقت $t = 2\pi$ پر واپس ابتدائی پوزیشن $(a, 0)$ حاصل کر لیتا ہے۔



مثال-6 (دائرے کا پیرامٹرائزیشن): مثال (5) میں $b = a$ لے کر حاصل مساواتیں اور پیرامٹرک وقفہ ، $0 \le t \le 2\pi$،
$x = a\cos t$، $y = a\sin t$ دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ کی وضاحت کرتے ہیں۔

مثال-7 (ہائپربولا کے سیدھے ہاتھ کی برانچ کا پیرامٹرائزیشن): ایک ذرے کی حرکت کی وضاحت کیجیے جس کی وقت t پر پوزیشن
$P(x, y)$ یہ ہے: $x = \sec t$، $y = \tan t$، $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

حل- ہم P کے محددوں کے لیے ایک کارتیسی مساوات مساواتوں $x = \sec t$ ، $y = \tan t$ سے t کا اخراج کرکے معلوم کرتے ہیں۔ اصول $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$ سے مذکورہ نتیجہ اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$x^2 - y^2 = 1$$

چونکہ ذرے کے محدد (x, y) مساوات $x^2 - y^2 = 1$ کو مطمئن کرتے ہیں، اس لیے ہائپربولا کے کسی حصہ پر حرکت واقع ہوتی ہے۔ چونکہ وقت t کا وقفہ $-\frac{\pi}{2}$ سے $\frac{\pi}{2}$ تک ہے، مساوات $x = \sec t$ مثبت رہتی ہے۔ اور $y = \tan t$ مساوات حدود $-\infty$ سے ∞ کے درمیان رہتی ہے۔ اس لیے نقطہ P ہائپربولا کی سیدھے ہاتھ کی برانچ ٹراورس (Traverse) کرتا ہے۔ $t \to 0$ کے لیے وہ برانچ کے نچلے نصف کے ہمراہ آتا ہے، $t = 0$ پر پوزیشن $(1, 0)$ پر پہنچتا ہے اور t جب $\frac{\pi}{2}$ کی طرف بڑھتا ہے وہ حرکت کرتے ہوئے پہلے ربع میں آجاتا ہے۔

مثال-8 متدیر (Cycloid) ایک پہیہ جس کا نصف قطر a ہے ایک افقی خط مستقیم کے ہمراہ گھومتا ہے۔ پہیہ کے محیط پر نقطہ P سے ٹریس کیے گئے راستے کے لیے پیرامٹرک مساواتیں معلوم کیجیے۔ یہ راستہ متدیر کہلاتا ہے۔

حل- ہم خط کو بطور x محور لیں گے۔ پہیہ پر نقطہ P کا نشان لگائیں۔ نقطہ P کو مبدا پر رکھ کر پہیہ کو دائیں جانب گھمانا شروع کریں۔ پہیہ جس زاویہ t سے پھرتا ہے اسے ہم بطور پیرامیٹر (تبدیلیہ) استعمال کریں گے۔ یہاں t کی پیائش ریڈین میں ہے۔ شکل میں پہیہ کی اس حالت کو دکھاتا ہے جس میں اس کا قاعدہ مبدا سے at اکائی دور ہے۔ پہیہ کا مرکز C مقام (at, a) پر ہے۔ اور P کے محدد یہ ہیں:
$x = at + a\cos\theta\ , y = a + a\sin\theta$، θ کو t کی اصطلاح میں ظاہر کرنے کے لیے ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ
$t + \theta = \frac{3\pi}{2}$ یا پھر $\theta = \frac{3\pi}{2} - t$ اس سے $\cos\theta = \left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\sin t, \sin\theta = \left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\cos t$، حاصل ہوتا ہے۔ لہٰذا ہمیں درکار مساواتیں یہ ہیں:

$$x = at + a(-\sin t), y = a + a(-\cos t)$$
$$x = at - a\sin t\,, \quad y = a - a\cos t$$

اجزا ضربی کرنے پر

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$$

شکل اس سائکلائڈ کی پہلی کمان (Arch) اور اس کے بعد کے کچھ حصہ کو دکھاتی ہے۔

تدویر (Hypocycloids): جب کسی متعین دائرہ کے اندر سے مس ہوتے ہوئے دوسرا دائرہ گردش کرتا ہے تو اس دوسرے دائرہ کے محیط پر کوئی نقطہ P تدویر بناتا ہے۔ فرض کرو کہ $x^2 + y^2 = a^2$ متعین دائرہ ہے اور پھرنے والے دائرہ کا نصف قطر b ہے۔ مزید فرض کرو کہ ٹریسنگ نقطہ P کا ابتدائی مقام $A(a, 0)$ ہے۔

11.2.2 کسی منحنی کو پیرامٹرک کرنا (Parameterization of a Curve)

اس حصہ میں ہم پیرامٹرائزڈ (Parameterized) خطوط منحنی سے مربوط لمبائیاں اور گھماؤ کے سطحی رقبہ معلوم کریں گے۔

11.2.3 قوسی لمبائی (Arc Length)

کسی سطح میں کسی منحنی راستے کی لمبائی کو معلوم کرنے کے لیے ہم اسے چھوٹے چھوٹے مستقیم قطعہ خط (Straight-Line Segment) میں تقسیم کرتے ہیں۔ اس طرح کی پیائش میں صحت کی ایک حد ہوتی ہے۔ لیکن کیلکولس میں ہم مستقیم قطعہ خط کو چھوٹے سے چھوٹا کر کے ان سیگمینٹس کے سیٹ کا پالیگونل (Polygonal) راستہ لیتے ہیں جو قوس یا خط منحنی میں اور اچھی طرح سے فٹ ہوتا ہے۔ اس طرح ایک ہموار خط منحنی حاصل ہوتی ہے۔ جب ہم اس طرح عمل کرتے ہیں تو پالیگونل راستوں کی لمبائیاں ایک حد کو پہنچ تی ہیں جس کا تکمل ہم معلوم کر سکتے ہیں۔

ہموار منحنی (Smooth Curve): ایک تفاعل جو مسلسل ہے پہلے تفرق میں ہے وہ ہموار کہلاتا ہے اور اس کی ترسیم (Graph) ہموار خط منحنی کہلاتی ہے۔

تعریف: قوسی لمبائی مشتق (Arc Length Differential)

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

اور قوس کی لمبائی (Arc Length) کا مشتق ضابطہ

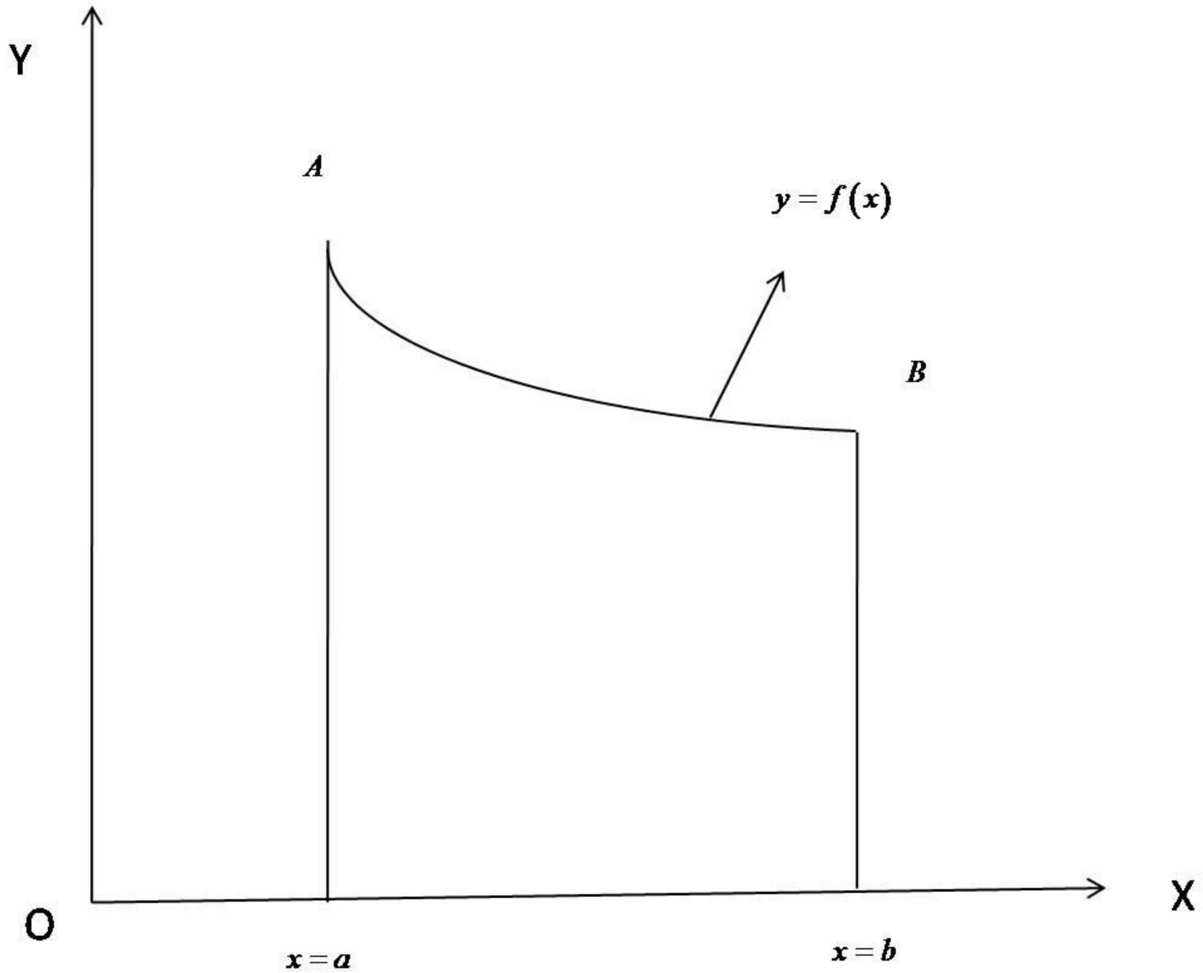
$$L = \int ds$$

تعریف: t میں a سے b تک اضافہ پر اگر ہموار خط منحنی $x = f(t)$، $y = g(t), a \leq t \leq b$ ایک مرطبہ طے کی جاتی ہے، تو خط منحنی کی لمبائی یہ ہے

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

بنیادی ضابطہ: خط منحنی کی لمبائی (length of Curve)

فرض کرو کہ ہم $x = a$ سے $x = b$ تک خط منحنی $y = f(x)$ کی لمبائی معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ اگر f وقفہ $[a, b]$ پر ہموار ہو تو اس خط منحنی کی لمبائی کی تعریف ذیل کے مطابق کی جاسکتی ہے۔



شکل:11.3.6

تعریف: اگر f وقفہ $[a, b]$ پر ہموار ہو تو خط منحنی $y = f(x)$ کی a سے b تک لمبائی یہ ہے

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx \qquad ....(1)$$

ہموار خط منحنی $x = g(y)$، $c \le y \le d$ کی لمبائی کے لیے ضابطے

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_c^d \sqrt{1 + \left(g'(y)\right)^2} dy \qquad ....(2)$$

مختصر تفرقی ضابطہ: مساواتوں

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

اور

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

کو اگر ڈیریویٹوس (مشتقوں) کے بجائے ڈفرینشیلس (تفرقوں) کی شکل میں لکھا جائے تو ہمیں پہلے تکمل سے حاصل ہوتا ہے:

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}dx}$$
$$= \sqrt{dx^2+\frac{dy^2}{dx^2}dx^2} = \sqrt{dx^2+dy^2}$$

دوسرے تکمل سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}dy}$$
$$= \sqrt{dy^2+\frac{dx^2}{dy^2}dy^2}$$
$$= \sqrt{dy^2+dx^2} = \sqrt{dx^2+dy^2}$$

اس طرح مساواتوں (1) اور (2) کے تکملوں سے تخفیف شدہ ایک ہی تفرقی ضابطہ حاصل ہوتا ہے:

$$L = \int_a^b \sqrt{dx^2+dy^2}\,dt \qquad ...(3)$$

بیشک یہاں dx اور dy کو مشترک متغیر کی صورت میں ظاہر کرنا چاہیے اور مساوات (3) کا تکمل معلوم کرنے سے پہلے تکمل کی مناسب لمٹس معلوم کرنا چاہیے۔

مساوات (4) کو اور مختصر ترین صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ فرض کرو کہ dx اور dy کسی چھوٹے سے مثلث کے دو بازو ہیں جس کا وطر (Hypotenuse) $ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$ ہے، تب مشتق ds کو قوس کی لمبائی کے مشتق کے طور پر دیکھا جا سکتا ہے۔ جس کا مناسب لمٹس کے درمیان تکمل سے خط منحنی کی لمبائی حاصل ہوتی ہے۔ مساوات (3) کے تکمل میں $\sqrt{dx^2+dy^2}$ کے بدلے ds کا تکمل ہو جاتا ہے۔

مثال-1 خط منحنی $y = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} - 1, 0 \le x \le 1$ کی لمبائی معلوم کیجیے۔

حل- یہاں $a = 0$ اور $b = 1$ ہے، اب

$$y = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} - 1$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\times\frac{3}{2}\times x^{\frac{1}{2}}$$
$$= 2\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(2\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 8x$$

اس لیے دی گئی منحنی کی لمبائی ہوگی

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+8x}\,dx$$
$$= \left[\frac{3}{2} \times \frac{1}{8}(1+8x)^{3/2}\right]_0^1$$
$$= \frac{13}{8}$$

نوٹ:(اگر $\frac{dy}{dx}$ میں تسلسل نہ ہو)خط منحنی کے کسی نقطہ پر جہاں $\frac{dy}{dx}$ کا وجود ناکام ہو جائے تو وہاں $\frac{dx}{dy}$ ممکن ہو سکتا ہے اور ہم ذیل کی طرح خط منحنی کی لمبائی x کو y میں ظاہر کر کے مساوات (1) کی مانند معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال-2 خط منحنی $2 \leq x \leq 0$, $y = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ کی لمبائی معلوم کیجیے۔

حل- یہاں $a = 0$ اور $b = 2$ ہے، اب

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} \times x^{-\frac{1}{3}} \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

یہاں $x = 0$ پر مشتق (Derivative) کی توضیح نہیں کی جا سکتی ہے، اس لیے مساوات (1) کا استعمال کر کے خط منحنی کی لمبائی معلوم نہیں کی جا سکتی۔ لہٰذا ہم x کو y میں ظاہر کر کے دی گئی خط منحنی کو لکھیں گے

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$
$$\Rightarrow \quad x = 2y^{3/2}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ جس خط منحنی کی لمبائی ہمیں چاہیے وہ بھی $y = 0$ سے $y = 1$ تک مساوات $x = 2y^{3/2}$ کا گراف ہے۔

اب مشتق

$$\frac{dx}{dy} = 2 \times \frac{3}{2}y^{1/2} = 3y^{1/2}$$

وقفہ $[0, 1]$ پر مسلسل ہے۔ اس لیے خط منحنی لمبائی معلوم کرنے کے لیے اب ہم مساوات (2) کا استعمال کر سکتے ہیں۔ اب

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \left(3y^{1/2}\right)^2 = 9y$$

اس لیے دی گئی منحنی کی لمبائی ہو گی

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$
$$= \int_0^1 \sqrt{1+9y}\,dy$$

فرض کرو کہ $m = 1 + 9y$، لہاذا $dm/9 = dy$

اس لیے

$$L = \int_0^1 \frac{1}{9}\sqrt{m}dm$$
$$= \left[\frac{1}{9} \times \frac{2}{3}(1 + 9y)^{3/2}\right]_0^1$$
$$= \frac{2}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right) \approx 2.27$$

11.2.4 پیرامٹرک منحنی کی قوسی لمبائی (Arc Length of Parametric Equation)

تکمل $L = \int ds$ کو دوبارہ لکھ کر ہم ہموار خط منحنی $x = f(t)$، $y = g(t), a \le t \le b$ کی لمبائی کے لیے درج ذیل طریقہ سے تکمل معلوم کرتے ہیں

$$L = \int_{t=a}^{t=b} ds$$
$$= \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2}$$
$$= \int_a^b \sqrt{\frac{(dx)^2}{(dt)^2} + \frac{(dy)^2}{(dt)^2}(dt)^2}$$
$$\Rightarrow \qquad L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

متکمل (Integrand) کے تسلسل کے علاوہ جو ضرورت ہے وہ یہ ہے کہ t جیسا a سے b تک حرکت کرتا ہے نقطہ $P(x, y) = P\big(f(t), g(t)\big)$ خط منحنی کے کسی حصہ کو ایک مرتبہ سے زیادہ ٹریس نہیں کرتا۔

حصہ 11.2.3 میں لمبائی کے ضابطے اوپر کی مساوات (1) کے خاص کیسس ہیں۔

جس خط منحنی کی لمبائی ہم معلوم کرنا چاہتے ہیں، اگر اس کے دو مختلف پیرامٹرائزیشن (Parameterizations) ہوں اور ان میں سے کسی ایک کا استعمال کریں تو کیا معاملہ رہے گا؟ ایڈوانسڈ کیلکولس میں اس کا جواب نہیں ہے۔ جہاں تک ہم جس بھی پیرامٹرائزیشن کو منتخب کرتے ہیں وہ مساوات (1) کی شرائط پوری کرتی ہے۔

مثال-1 ایسٹرائڈ $(Asteroid)\, x = cos^3 t, y = sin^3 t, 0 \le t \le 2\pi$ کی لمبائی معلوم کیجیے۔

حل- محدودی محوروں کے نظام کی نسبت سے خط منحنی کے تشاکل (Symmetry) کی وجہ سے اس کی لمبائی پہلے ربع میں موجود اس کے حصہ کی لمبائی کا چار گنا ہوتی ہے۔ اس لیے دی گئی مساوات $x = cos^3 t, y = sin^3 t$ کے لیے

$$\frac{dx}{dt} = 3\cos^2 t \times (-\sin t)$$

اور

$$\frac{dy}{dt} = 3\sin^2 t \times (\cos t)$$

اب

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(3\cos^2 t \times \sin t)^2 + (3\sin^2 t \times \cos t)^2}$$
$$= \sqrt{9\cos^2 t \times \sin^2 t(\sin^2 t + \cos^2 t)}$$
$$= \sqrt{9\cos^2 t \times \sin^2 t}$$
$$= 3|\cos t \sin t|$$

کیونکہ وقفہ $[0\ 2\pi]$ میں $3\cos t \sin t \geq 0$، اس لیے

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 3\cos t \sin t$$

لہازا پہلے ربع میں ایسٹرائڈ کی لمبائی

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \sin t\, dt$$
$$= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\, dt$$
$$= \left[-\frac{3}{4}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{3}{2}$$

چونکہ ایسٹرائڈ کی کل لمبائی پہلے ربع کی لمبائی کا چار گنا ہوتی ہے اس لیے

$$\text{ایسٹرائڈ کی لمبائی} = 4 \times \frac{3}{2} = 6$$

11.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر ہمنے منحنیوں کے قوسوں کی لمبائی کو حاصل کرنا سیکھا۔

11.4 کلیدی الفاظ(Key Words)

قوسی لمبائی،(نجمیہ،ستارہ انما)ایسٹرائڈ،ہموار خط منحنی، پیرامٹرک مساوات، پیرامٹرک وقفہ، ذرہ، محدد، متسدیر، مکافی، تدویر، استداری خط(بالوشاہی کی طرح)، بیضوی

11.5 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

11.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. دونقاط $x = a$ اور $x = b$ نیز $b > a$ کے درمیان واقع خط منحنی $y = f(x)$ کی قوسی لمبائی

a) $\int_a^b y dx$ b) $\pi \int_a^b y^2 dx$

c) $\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ d) $\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$

2. دونقاط $x = 0$ اور $x = \frac{\pi}{6}$ نیز $b > a$ کے درمیان واقع خط منحنی $y = \log\sec x$ کی قوسی لمبائی

a) $\log 3$ b) $2\log 3$

c) $\frac{1}{2}\log 3$ d) ان میں سے کوئی نہیں

3. ایسٹرائڈ(Asteroid)، $x = acos^3 t, y = asin^3 t,$ کی جملہ لمبائی ہے

a) $2a$ b) $4a$

c) $6a$ d) $8a$

4. ہموار خط منحنی $x = f(t)$، $y = g(t), a \le t \le b$ کی قوسی لمبائی ہے۔

a) $\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$ b) $\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$

c) $\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dx$ d) $\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\, dy$

5. ہموار خط منحنی $x = g(y)$، $c \le y \le d$ کی لمبائی کے لیے ضابطہ ہے

a) $\int_a^b y dx$ b) $\pi \int_a^b y^2 dx$

c) $\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ d) $\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$

11.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

1. سطح میں پیرامٹرائزڈ منحنی سے کیا مراد ہے؟
2. پیرامٹرک مساواتوں کی وضاحت کیجیے۔

3. ایسٹرائڈ $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ کی مکمل لمبائی معلوم کیجیے۔

4. پیرامٹرائزڈ خطوط منحنی $x = t^2, y = \frac{t^3}{3} - t$ کی لمبائی معلوم کریں جب کہ حلقہ $t = -\sqrt{3}$ سے شروع ہو کر $t = \sqrt{3}$ پر ختم ہوتا ہے۔

5. خطوط منحنی $x = \cos t, y = t + \sin t$ کی لمبائی معلوم کریں جب کہ $0 \le t \le \pi$

11.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. خطوطمنحنی $x = t^3, y = \frac{3t^2}{2}$ کی لمبائی معلوم کریں جب کہ $0 \le t \le \sqrt{3}$

2. خطوط منحنی $x = \frac{t^2}{2}, y = \frac{(2t+1)^{3/2}}{3}$ کی لمبائی معلوم کریں جب کہ $0 \le t \le 4$

3. خطوط منحنی $x = 8\cos t + 8t\sin t, y = 8\sin t - 8t\cos t$ کی لمبائی معلوم کریں جب کہ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

4. خطوط منحنی $x = \ln(\sec t + \tan t) - \sin t, y = \cos t$ کی لمبائی معلوم کریں جب کہ $0 \le t \le \frac{\pi}{3}$

11.6 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Calculus, H. Anton, I. Bivens, S. Davis, John Wiley & Sons, Inc. (10th Edition)
2. Calculus, M. D. Raisinghania, S. Chand Publiations, New Delhi

اکائی 12۔ گردشی سطح کا رقبہ

(Area of Surface of Revolution)

اکائی کے اجزا

12.0 تمہید(Introduction)

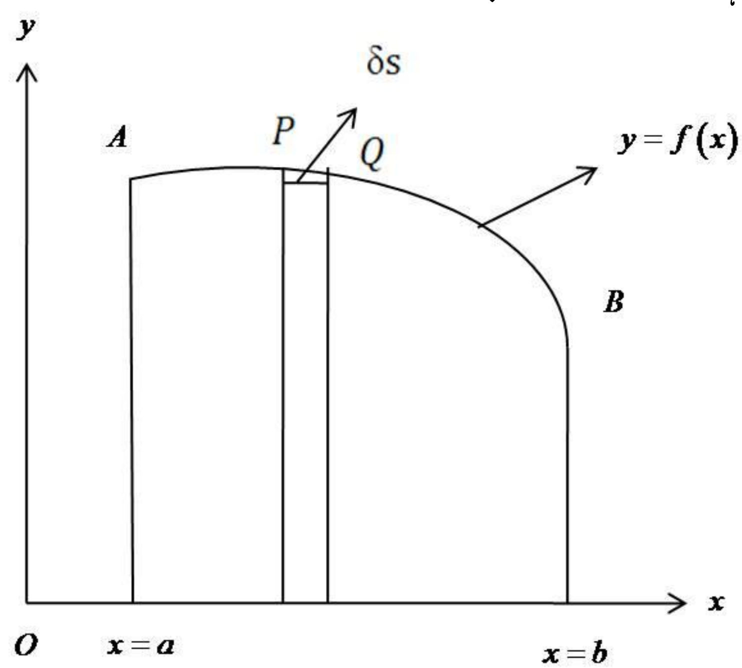
اگر کسی مستوی سطح(Plane Surface) کو اس میں موجود کسی محور کے گرد گھمایا جاتا ہے، تو اس گردش کی وجہ سے ایک ٹھوس وجود میں آتا ہے اور اس مستوی کے کنارے کے گھومنے سے ٹھوس(Solid) کی سطح (Surface)وجود پاتی ہے۔ مثال کے طور پر کسی مستطیل(Rectangle) کو اس کی کسی ضلع (Side) کے گرد گھمانے سے قائم دائری استوانہ(Right Circular Cylinder) وجود پاتا ہے، ایک قائم ذاوی مثلث(Right Angled Triangle) کو 90^0ذاویہ سے منسلک کسی ضلع کے گرد گھمانے سے قائم دائری مخروط(Right Circular Cone) بنتا ہے اور ایک نصف دائرہ (Semi Circle) کو اس کے قطر(Diameter) کے گرد گھمانے سے ایک کرہ وجود پاتا ہے۔

12.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ کسی مستوی سطح(Plane Surface) کو اس میں موجود کسی محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا سطحی رقبہ حاصل کر سکیں۔

12.2 گردشی سطح کا رقبہ(Area of Surface of Revolution)

مان لو کہ $y = f(x)$ کسی منحنی AB کی مساوات ہے اور اس پر کوئی نقطہ $P(x, y)$ ہے اور اس کے بہت نزدیک ایک دوسرا نقطہ $Q(x + \delta x, y + \delta y)$ ہے–مان لو δs قوس PQ کی لمبائی اور δS اس سطح



شکل12.2.1

کا رقبہ ہے جو قوس PQ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنتا ہے، تب

$$2\pi y\delta s < \delta S < 2\pi(y+\delta y)\delta s$$

δs سے تقسیم دینے پر

$$2\pi y < \frac{\delta S}{\delta s} < 2\pi(y+\delta y)$$

جب $\delta s \to 0$، تب $\delta y \to 0$، اس لیے

$$\frac{dS}{ds} = 2\pi y$$

اس لیے

$$\begin{aligned}\int_a^b 2\pi y ds &= \int_a^b \frac{dS}{ds} ds \\ &= [S]_a^b \\ &= S(x=b) - S(x=a) \\ &= S(x=b) - 0 \\ &= S(x=b)\end{aligned}$$

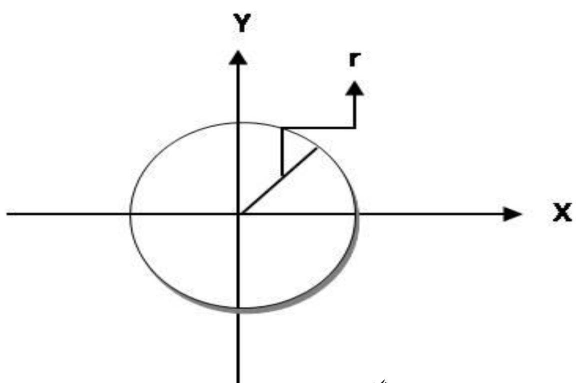
جو کہ اس سطح کا رقبہ ہے جو قوس AB کو x محور کے گرد گھمانے سے بنتا ہے۔ اب ہم کچھ مثالوں کے ضریعہ گردشی سطح کے رقبہ کو حاصل کرنا سیکھیں گے۔

مثال 1۔ اس نصف کرہ کا سطحی رقبہ حاصل کریں جسکا نصف قطر r ہے۔

حل۔ اس دائرہ (Circle) کی مساوات جسکا نصف قطر r ہے اور جس کا مرکز (Centre) مبدا (Origin) پر ہو درجہ ذیل ہوتا ہے

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ہم جانتے ہیں کہ ایک نصف دائرہ (Semi Circle) کو x محور کے گرد گھمانے سے ایک کرہ وجود پاتا ہے، اور اس نصف کرہ کا سطحی رقبہ، کرہ کے سطحی رقبہ کا آدھا ہوتا ہے۔



شکل 12.2.2

اب ہم سب سے پہلے کرہ کا سطحی رقبہ حاصل کریں گے

$$A = \int_{-r}^{r} 2\pi y ds$$

$$= \int_{-r}^{r} 2\pi y \frac{ds}{dx} dx$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} \mathrm{y} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{x^2 + \mathrm{y}^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} r dx$$

$$= 2\pi r [x]_{-r}^{r}$$

$$= 4\pi r^2$$

اس لیے

$$\text{نصف کرہ کا سطحی رقبہ} = \frac{1}{2}\left(\text{کرہ کا سطحی رقبہ}\right)$$

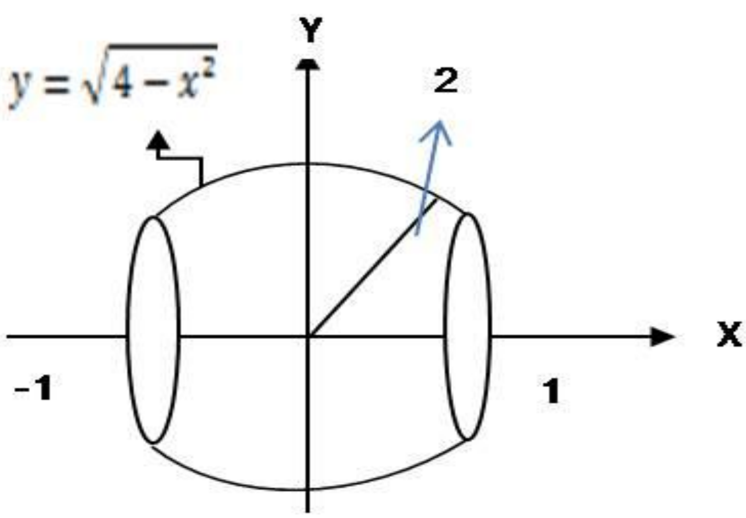
اس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ نصف کرہ کا سطحی رقبہ $2\pi r^2$ ہوگا۔

مثال2۔ قوس $y = \sqrt{4 - x^2}$، $-1 \le x \le 1$ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا سطحی رقبہ حاصل کریں۔

حل۔ اس دائرہ (Circle) کی مساوات جس کا نصف قطر 2 ہے اور جس کا مرکز (Centre) مبدا (Origin) پر ہو درجہ ذیل ہوتا ہے

$$x^2 + \mathrm{y}^2 = 4$$

اس دائرہ کی قوس $y = \sqrt{4 - x^2}$ کو x محور کے گرد $-1 \le x \le 1$ پر گھمانے سے درجہ ذیل شکل میں دیا گیا مجسم وجود پاتا ہے، اس لیے



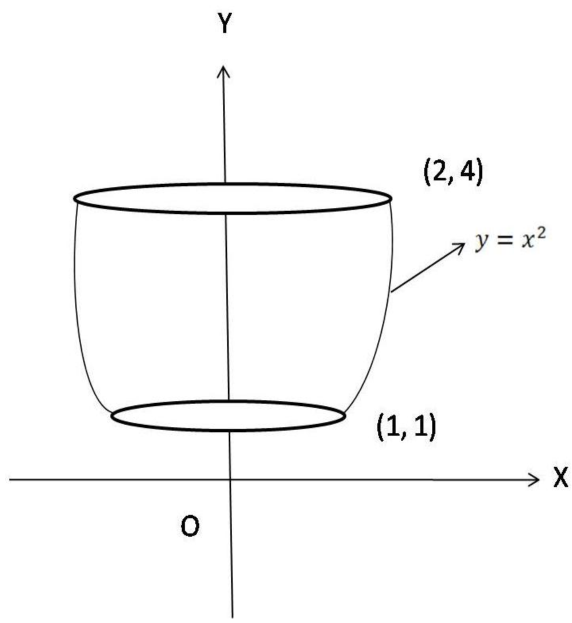
شکل 12.2.3

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{1} 2\pi y ds \\
&= \int_{-1}^{1} 2\pi y \frac{ds}{dx} dx \\
&= 2\pi \int_{-1}^{1} y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \\
&= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4-x^2} \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2}\, dx \\
&= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4-x^2} \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} dx \\
&= 4\pi \int_{-1}^{1} dx \\
&= 4\pi[x]_{-1}^{1} \\
&= 8\pi
\end{aligned}
$$

اس لیے دائرہ کی قوس $y = \sqrt{4-x^2}$ کو x محور کے گرد $-1 \le x \le 1$ پر گھمانے سے حاصل مجسم کا سطحی رقبہ 8π ہو گا۔

مثال3۔ قوس $y = x^2$، $1 \le x \le 2$ کو y محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا سطحی رقبہ حاصل کریں۔

حل۔ دیے گیے قوس کی مساوات $y = x^2$ ہے۔ اس کو y محور کے گرد $1 \le x \le 2$ پر گھمانے سے درجہ ذیل شکل میں دیا گیا مجسم وجود پاتا ہے، اس لیے



شکل 12.2.4

$$A = \int_1^2 2\pi x ds$$

$$= 2\pi \int_1^2 x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_1^2 x\sqrt{1 + (2x)^2}dx$$

مان لو کہ $m = 1 + 4x^2$, اور جب $x = 1$، تب $m = 5$ اور جب $x = 2$، تب $m = 17$، اور $dm = 8xdx$

$$A = 2\pi \int_5^{17} \frac{1}{8}\sqrt{m}dm$$

$$= \frac{1}{4}\pi \left[\frac{m^{3/2}}{3/2}\right]_5^{17}$$

$$= \frac{1}{6}\pi \left(17^{3/2} - 5^{3/2}\right)$$

اس لیے قوس $y = x^2$ کو y محور کے گرد $1 \le x \le 2$ پر گھمانے سے حاصل مجسم کا سطحی رقبہ $\frac{1}{6}\pi \left(17^{3/2} - 5^{3/2}\right)$ ہو گا۔

مثال 4۔ منحنی $y = cosh\, x$ کو x محور کے گرد $0 \le x \le 1$ پر گھمانے سے بنے ٹھوس کا سطحی رقبہ حاصل کریں۔

حل۔ دی گئی منحنی کی مساوات ہے

$$y = \cosh x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sinh x$$

تب،

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + (\sinh x)^2} = \sqrt{\cosh^2 x} = \cosh x$$

اس لیے

$$A = \int_0^1 2\pi y ds$$

$$= \int_0^1 2\pi y \frac{ds}{dx} dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 \cosh x \cdot \cosh x\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 \cosh^2 x\, dx$$
$$= \pi \int_0^1 (1 + \cosh 2x) dx$$
$$= \pi \left[x + \frac{1}{2} sinh\, 2x\right]_0^1$$
$$= \pi \left(1 + \frac{1}{2} sinh\, 2\right)$$
$$= \pi \left(1 + \frac{e^2 - e^{-2}}{4}\right)$$

مثال5۔ سائکلائڈ(Cycloid) $x = a(\theta + \sin\theta), y = a(1 + \cos\theta)$ کو اس کے اساس(Base) کے گرد گھمانے سے حاصل ٹھوس مجسم کا سطحی رقبہ حاصل کریں۔

حل۔ ہم جانتے ہیں کہ سائکلائڈ(Cycloid) کی مساوات $x = a(\theta + \sin\theta), y = a(1 + \cos\theta)$ ہے۔اب

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1 + \cos\theta)$$

اور

$$\frac{dy}{d\theta} = -a \sin\theta$$

$$\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{d}\theta} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}$$
$$= \sqrt{a^2(1 + \cos\theta)^2 + a^2(\sin\theta)^2}$$
$$= a\sqrt{2(1 + \cos\theta)}$$
$$= 2a \cos\frac{\theta}{2}$$

اس لیے سائکلائڈ کو اس کے اساس کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا سطحی رقبہ درجہ ذیل ہو گا

$$A = \int_a^b 2\pi y \mathrm{ds}$$
$$= 2\pi \int_a^b y \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\, \mathrm{d}\theta$$
$$= 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} a(1 + \cos\theta) \left(2a \cos\frac{\theta}{2}\right) \mathrm{d}\theta$$
$$= 8\pi a^2 \int_0^{\pi} \left(2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}\right) \mathrm{d}\theta$$
$$= 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \cos^3\frac{\theta}{2}\, \mathrm{d}\theta$$

مان لو کہ $m = \frac{\theta}{2}$، اور جب $\theta = 0$، تب $m = 0$ اور جب $\theta = \pi$، تب $m = \frac{\pi}{2}$، اور

$$d\theta = 2dm$$

ہم جانتے ہیں

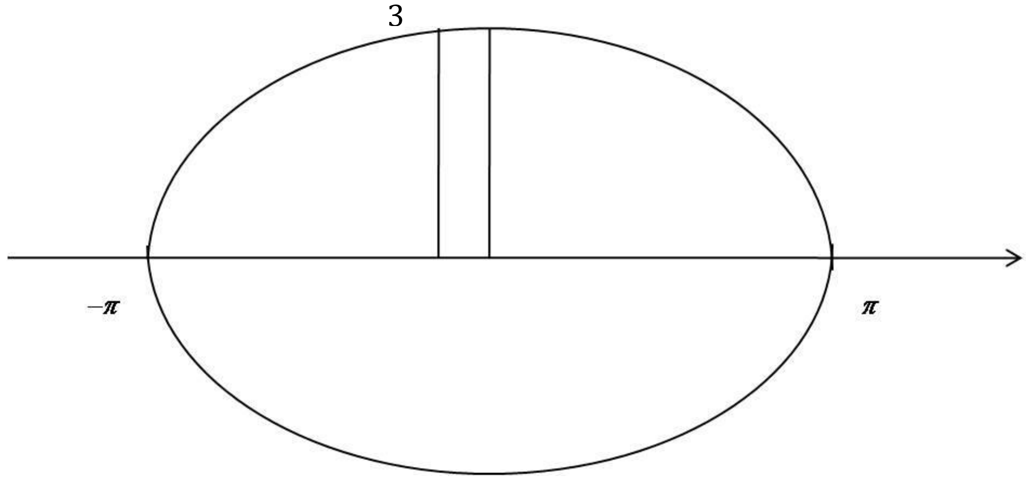
$$\int cos^n\theta\, d\theta = \frac{1}{n} cos^{n-1}\theta\, sin\,\theta + \frac{n-1}{n}\int cos^{n-2}\theta\, d\theta$$

اس لیے

$$\int \cos^3 m\, dm = \frac{1}{3} cos^{3-1} m\, sin\, m + \frac{3-1}{3}\int cos^{3-2} m\, dm$$
$$= \frac{1}{3} cos^2 m\, sin\, m + \frac{2}{3}\int cos\, m\, dm$$
$$= \frac{1}{3} cos^2 m\, sin\, m + \frac{2}{3}\sin m$$

اب

$$A = 32\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^3 m\, dm$$
$$= 32\pi a^2 \left[\frac{1}{3} cos^2 m\, sin\, m + \frac{2}{3}\sin m\right]_0^{\pi/2}$$
$$= 32\pi a^2 \left[\frac{1}{3}(0-0) + \frac{2}{3}(1-0)\right]$$
$$= \frac{64\pi a^2}{3}$$



شکل 12.2.5

مثال 6۔ کارڈائڈ (Cardioide) $r = a(1 - cos\,\theta)$ کو ابتدائی خط کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس مجسم کا سطحی رقبہ حاصل کریں۔

حل۔ دیے گئے کارڈائڈ (Cardioide) کی مساوات ہے $r = a(1 - cos\,\theta)$، تب

$$\frac{dr}{d\theta} = a\sin\theta$$

اور

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$
$$= \sqrt{a^2(1 - cos\,\theta)^2 + a^2 sin^2\theta}$$
$$= a\sqrt{cos^2\theta + 1 - 2\cos\theta + sin^2\theta}$$
$$= a\sqrt{2(1 - \cos\theta)}$$
$$= a\sqrt{2\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}$$
$$= 2a\sin\frac{\theta}{2}$$

اس لیے کارڈائڈ(Cardioide) $r = a(1 - cos\,\theta)$ کو ابتدائی خط کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس مجسم کا سطحی رقبہ ہوگا

$$A = \int_0^{\pi} 2\pi y \frac{ds}{d\theta} d\theta$$

ہم جانتے ہیں کہ $y = r\sin\theta$ اس لیے

$$A = \int_0^{\pi} 2\pi r\sin\theta\left(2a\sin\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$
$$= 4a\pi\int_0^{\pi} a(1 - cos\,\theta)\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(\sin\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$
$$= 8a^2\pi\int_0^{\pi}\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$
$$= 16a^2\pi\int_0^{\pi}\left(\sin^4\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$
$$= 16a^2\pi\left[\frac{2}{5}\sin^5\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{32}{5}a^2\pi(1 - 0) = \frac{32}{5}a^2\pi$$

12.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے سیکھا کہ کسی مستوی سطح (Plane Surface) کو x محور اور y محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا سطحی رقبہ بالترتیب $A = \int_a^b 2\pi y ds$ اور $A = \int_a^b 2\pi x ds$ ہوتا ہے۔

12.4 کلیدی الفاظ (Key Words)

سطحی رقبہ، مبدہ، محور، کارڈائڈ، سائکلائڈ، مخروط، اساس، نصف عمودی ذاویہ، الپسائڈ

12.5 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

12.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

5. $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$ کا رقبہ ہوتا ہے

(a) ab (b) $2\pi ab$ (c) πab (d) 0

6. $x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta$ کا رقبہ ہوتا ہے

(a) a^2 (b) πa (c) πa^2 (d) 0

7. منحنی $y = f(x)$ اور $x = a, x = b$ سے گھرے رقبہ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس مجسم کا رقبہ ہے

(a) $\int_a^b 2\pi y ds$ (b) $\int_a^b \pi y ds$ (c) $\int_a^b \pi y^2 ds$ (d) $\int_a^b 2\pi y^2 ds$

8. اس مخروط(Cone) کا رقبہ، جس کا نصف عمودی زاویہ α اور جس کا اساس، r نصف قطر کا ایک دائرہ ہے، ہوگا

(a) πr^2 (b) $\pi r^2 \cos\alpha$ (c) $\pi r^2 \operatorname{cosec}\alpha$ (d) 0

9. منحنی $y = x^3$ کو $x = 1, x = 4$ کے درمیانی علاقہ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس مجسم کا رقبہ ہے

(a) 128 (b) $\frac{255}{4}$ (c) $\frac{127}{4}$ (d) $\frac{128}{4}$

10. سائکلائڈ (Cycloid) $x = a(\theta + \sin\theta), y = a(1 + \cos\theta)$ کو اس کے اساس(Base) کے گرد گھمانے سے حاصل ٹھوس مجسم کا سطحی رقبہہے

(a) $64\pi a^2$ (b) $\frac{64}{2}\pi a^2$ (c) $\frac{64}{3}\pi a^2$ (d) 0

11. منحنی $ay^2 = x^2(a - x)$ کے ایک حلقہ کا رقبہ ہے

(a) $\frac{8a^2}{15}$ (b) $\frac{4a^2}{15}$ (c) $\frac{2a^2}{15}$ (d) $\frac{a^2}{15}$

12. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$ کا رقبہ ہوتا ہے

(a) ab (b) $2\pi ab$ (c) πab (d) 0

13. نصف قطر a کے کرہ کا سطحی رقبہ ……… ……… ہے۔

14. سائکلائڈ $x = a(\theta + \sin\theta), y = a(1 - \cos\theta)$ کو اس کے راس کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس مجسم کا سطحی رقبہ ……… ……… ہے۔

12.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

1. قوس $y = x^3$، $0 \le x \le 2$ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا سطحی رقبہ حاصل کریں۔

2. قوس $y = \sqrt{x}, 2 \le x \le 6$ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا سطحی رقبہ حاصل کریں۔

3. قوس $y = \cos 2x\,,0 \le x \le \frac{\pi}{6}$ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا سطحی رقبہ حاصل کریں۔

4. قوس $y = \cosh x\,,0 \le x \le 1$ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا سطحی رقبہ حاصل کریں۔

5. دکھایئے کہ دائرہ $x = \sqrt{a^2 - y^2}, 0 \le y \le a$ کو y محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا سطحی رقبہ، a نصف قطر کے کرہ کے سطحی رقبہ کا آدھا ہوتا ہے۔

6. قوس $y = \sqrt[3]{x}, 1 \le x \le 2$ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا سطحی رقبہ حاصل کریں۔

7. کیٹے نری (Catanary) $y = c\cosh\frac{x}{c}$ کی ایک قوس کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا سطحی رقبہ حاصل کریں۔

12.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. منحنی $3ay^2 = x(a-x)^2$ کے لوپ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا سطحی رقبہ حاصل کریں، جبکہ $a > 0$ اس لوپ کو اگر y محور کے گرد گھمایا جائے تو اس طرح بنے ٹھوس مجسم کا سطحی رقبہ کیا ہوگا؟

2. کارڈائڈ (Cardioide) $r = a(1 + cos\,\theta)$ کو ابتدائی خط کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس مجسم کا سطحی رقبہ حاصل کریں۔

3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے الپسائڈ کا سطحی رقبہ حاصل کریں۔

4. منحنی $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ کو گھمانے سے بنے ٹھوس مجسم کا سطحی رقبہ حاصل کریں۔

5. ایک دائری قوس کو اس کے وطر (Chord) کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ ثابت کریں کہ اس طرح بنے ٹھوس مجسم کا سطحی رقبہ $4\pi a^2(sin\,\alpha - \alpha\,cos\,\alpha)$ جہاں a نصف قطر ہے اور 2α دئرہ کے مرکز پر قوس کے ضریعہ بنا زاویہ ہے۔

6. x محور کے اوپر منحنی $ay^2 = x^3$ کے $x = 0$ سے $x = 4a$ تک کے حصہ کو y محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس مجسم کا سطحی رقبہ حاصل کریں۔

7. پیرابولا (Parabola) اور اس کے لیٹس ریکٹم (Latus Rectum) کے درمیانی رقبہ کو ڈائریکٹرکس (Directrix) کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس مجسم کا سطحی رقبہ حاصل کیجیے۔

12.6 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Integral Calculus, K. Ahmad, Real World Education Publishers Pvt Ltd, New Delhi

2. Calculus, M. D. Raisinghania, S. Chand Publiations, New Delh

اکائی 13۔ تہرا حاصل ضرب

(Triple Product)

اکائی کے اجزا

13.0 تمہید (Introduction)

دو برداروں کا میزانی حاصل ضرب ایک میزانی قدر ہوتی ہے جب کہ برداری حاصل ضرب کا نتیجہ ایک بردار ہوتا ہے۔ ان کا استعمال تہرے حاصل ضرب کو حاصل کرنے کے لیے ہوتا ہے۔ یہ دو طرح کے ہوتے ہیں، ایک میزانی تہرا حاصل ضرب اور دوسرا برداری تہرا حاصل ضرب۔ میزانی تہرے حاصل ضرب کی مدد سے ہم کسی متوازی السطوح (Parallelepiped) کا حجم معلوم کر سکتے ہیں۔

13.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ:

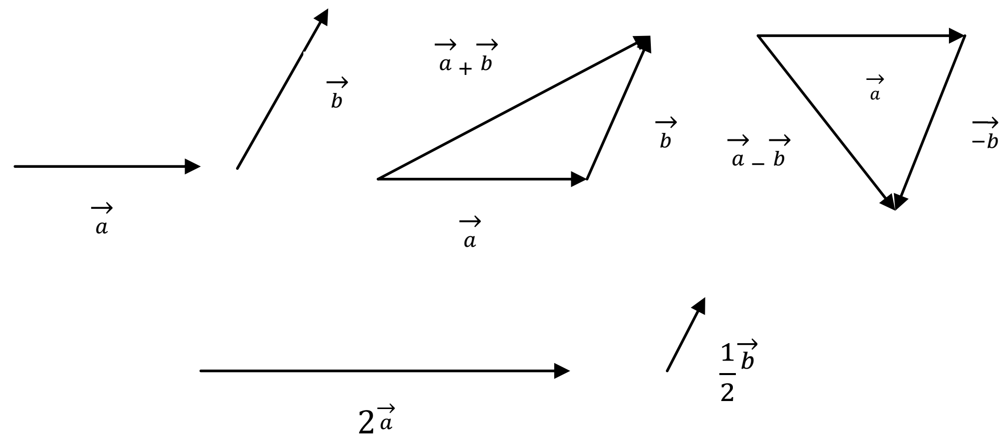
- میزانی حاصل ضرب کی تعریف اور اس کو محسوب کر سکیں۔
- برداری حاصل ضرب کی تعریف اور اس کو حاصل کر پائیں۔
- میزانی تہرے حاصل ضرب کو سمجھ پائیں اس کی ہندسی تعبیر کا استعمال متوازی السطوح کے حجم حاصل کرنے میں لگا پائیں۔
- برداری تہرے حاصل ضرب کو محسوب کر سکیں۔

13.2 تہرا حاصل ضرب (Triple Product)

تہرے حاصل ضرب کو سمجھنے سے پہلے ہمیں برداروں کی بنیادی معلومات ہونا ضروری ہے جو کہ درج ذیل ہے۔

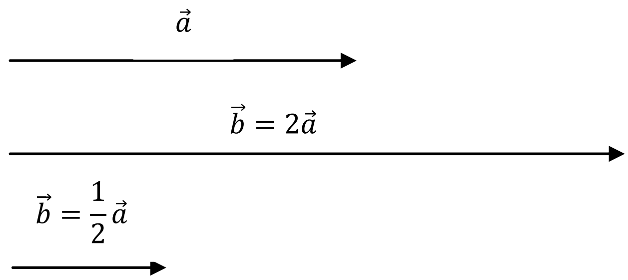
13.2.1 برداروں کی بنیادی معلومات (Basics of Vectors)

پچھلے درجوں میں ہم نے دیکھا کہ کس طرح دو برداروں کی جمع کو حاصل کیا جاتا ہے اور کس طرح ان کو گھٹایا جاتا ہے۔ اسی طرح ایک بردار میں کسی میزان سے کسطرح ضرب دیجاتی ہے۔ مان لو کہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ دو بردار ہیں اور k کوئی غیر صفری میزان ہے، تب درج ذیل شکلوں سے ان کا جمع گھٹانا اور کسی میزان سے ضرب کو سمجھا جا سکتا ہے۔



شکل(13.2.1.1)

دو بردار $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ متوازی (Parallel) ہوتے ہیں اگر ایک بردار دوسرے بردار کا عددیہ ضرب (Scalar Multiple) ہو۔



شکل(13.2.1.2)

مان لو $\vec{a} = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath}$ اور $\vec{b} = b_1\hat{\imath} + b_2\hat{\jmath}$ دو بردار $\mathbb{R}^2$ نظام میں ہیں، اور مان لو کہ k ایک میزان ہے، تب

$$k\vec{a} = ka_1\hat{\imath} + ka_2\hat{\jmath}$$

اور

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\hat{\imath} + (a_2 + b_2)\hat{\jmath}$$

یہاں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ جزو (Components) کی شکل میں ہیں اور a_1, a_2 کو بردار $\vec{a}$ کے $\hat{\imath}$ اور $\hat{\jmath}$ کا جزو کہا جاتا ہے اور اسی طرح b_1، b_2 کو بردار $\vec{b}$ کے $\hat{\imath}$ اور $\hat{\jmath}$ کے جزو ہیں۔ اسی طرح $(a_1 + b_1)$، $(a_2 + b_2)$ کو بردار $\vec{a} + \vec{b}$ کے $\hat{\imath}$ اور $\hat{\jmath}$ کا جزو کہتے ہیں۔

اگر $\vec{a} = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}$ اور $\vec{b} = b_1\hat{\imath} + b_2\hat{\jmath} + b_3\hat{k}$ دو بردار $\mathbb{R}^3$ میں ہوں اور مان لو کہ k کوئی میزان ہے، تب

$$k\vec{a} = ka_1\hat{\imath} + ka_2\hat{\jmath} + ka_3\hat{k}$$

اور

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1)\hat{\imath}+(a_2+b_2)\hat{\jmath}+(a_3+b_3)\hat{k}$$

قضیہ: مان لو کہ $\vec{a}$،$\vec{b}$اور $\vec{c}$ کوئی تین بردار ہیں اور k, l دو میزان ہیں۔ تب

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ [بردار جمع تقلیبی]

2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ [بردار جمع تلازمی]

3) $\vec{a}+\vec{o}=\vec{a}=\vec{o}+\vec{a}$، جہاں $\vec{o}$ صفر بردار ہے۔ $\vec{o}$ کو جمع تماثلی (Additive Identity) کہتے ہیں۔

4) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{o}$، جہاں $-\vec{a}$ کو $\vec{a}$ کا جمع معکوس (Additive Inverse) کہتے ہیں۔

5) $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$

6) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

7) $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$

8) $1\vec{a}=\vec{a}$

مان لو بردار $\vec{a}=a_1\hat{\imath}+a_2\hat{\jmath}$ جو $\mathbb{R}^2$ میں ہے۔ اس بردار کے ابتدائی اور اختتامی نقاط کی درمیانی دوری کو اس بردار کی لمبائی یا قدر (Magnitude) کہتے ہیں اور وہ درجہ ذیل ہوگی

$$\|\vec{a}\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$$

اور اگر یہ بردار نظام $\mathbb{R}^3$ میں ہو، تب

$$\|\vec{a}\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

مان لو کہ $\vec{a}$ کوئی بردار ہے اور k ایک میزان ہے، تب

$$\|k\vec{a}\|=|k|\|\vec{a}\|$$

بطور مثال

$$\|3\vec{a}\|=3\|\vec{a}\|$$
$$\|-2\vec{a}\|=|-2|\|\vec{a}\|=2\|\vec{a}\|$$

قضیہ: اگر $\mathbb{R}^2$ میں بردار $\overrightarrow{AB}$, جس کا ابتدائی نقطہ $A(x_1,y_1)$ اور اختتامی نقطہ $B(x_2,y_2)$ ہو، تب

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\hat{\imath}+(y_2-y_1)\hat{\jmath}$$

اسی طرح $\mathbb{R}^3$ میں اگر کوئی بردار $\overrightarrow{AB}$ ہو جس کا ابتدائی نقطہ $A(x_1,y_1,z_1)$ اور اختتامی نقطہ $B(x_2,y_2,z_2)$ ہو، تب

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\hat{\imath}+(y_2-y_1)\hat{\jmath}+(z_2-z_1)\hat{k}$$

مثال کے طور پر $\mathbb{R}^2$ میں ابتدائی نقطہ $A(1,3)$ اور اختتامی نقطہ $B(4,-2)$ سے بنا بردار درجہ ذیل ہوگا

$$\overrightarrow{AB} = (4-1)\hat{\imath} + (-2-3)\hat{\jmath} = 3\hat{\imath} - 5\hat{\jmath}$$

اور اس کی قدر ہو گی

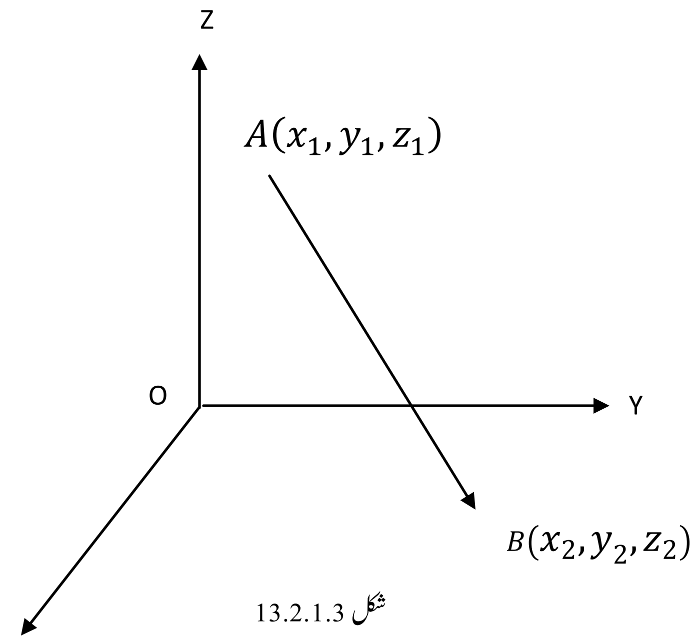
$$\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$$

اسی طرح $\mathbb{R}^3$ میں اگر کوئی بردار $\overrightarrow{AB}$ ہو جس کا ابتدائی نقطہ $A(0,-2,5)$ اور اختتامی نقطہ $B(3,4,-1)$ ہو، تب

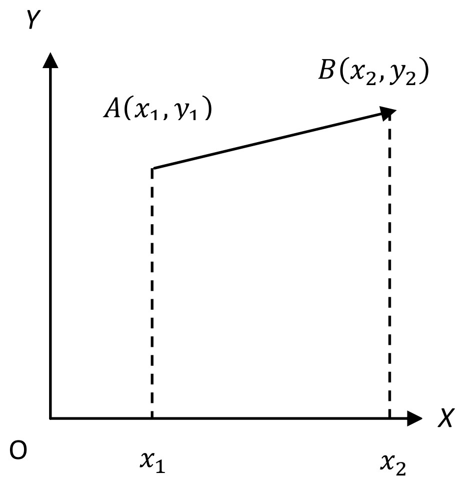
$$\overrightarrow{AB} = (3-0)\hat{\imath} + (4+2)\hat{\jmath} + (-1-5)\hat{k} = 3\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 6\hat{k}$$

اور اس کی قدر ہو گی

$$\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\| = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-6)^2} = \sqrt{81} = 9$$



شکل 13.2.1.3



شکل 13.2.1.4

وہ بردار جس کی قدر یا لمبائی 1 ہو اکائی بردار کہلاتا ہے۔ مان لو کہ $\vec{a}$ کوئی غیر صفری بردار ہے، تب اس کا اکائی بردار $\hat{a}$ درجہ ذیل ہو گا

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

یہاں $\hat{a}$ کی جہت (Direction) وہی ہے جو $\vec{a}$ کی ہے۔ کسی بردار کو اس کی قدر سے تقسیم دینا کبھی کبھی اس بردار کا معمول میں لانا (Normalization) کہلاتا ہے۔ کچھ مقصوص اکائی بردار درجہ ذیل ہیں

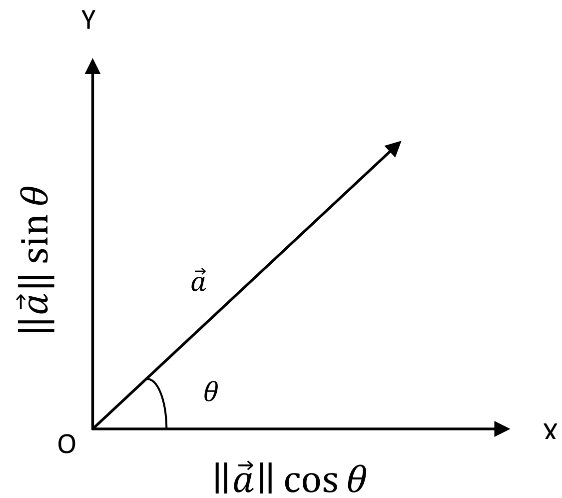
$$\hat{\imath} = (1,0,0)$$
$$\hat{\jmath} = (0,1,0)$$
$$\hat{k} = (0,0,1)$$

یہ اساس (Bases) بردار کہلاتے ہیں۔ $\mathbb{R}^2$ نظام میں اساس بردار $\hat{\imath} = (1,0)$ اور $\hat{\jmath} = (0,1)$ ہوتے ہیں۔

مان لو کہ $\vec{a}$ کوئی غیر صفری بردار ہے جس کا ابتدائی نقطہ مبدا (Origin) پر ہے اور اگر x محور کی مثبت جہت سے اس کا جھکاؤ θ ہو تب $\vec{a}$ کا x جزو اور y جزو درجہ ذیل ہوں گے

$$x_{\text{جز}} = \|\vec{a}\| \cos\theta$$

$$y_{\text{جز}} = \|\vec{a}\| \sin\theta$$



شکل 13.2.1.5

اس لیے

$$\vec{a} = \|\vec{a}\| \cos\theta\, \hat{\imath} + \|\vec{a}\| \sin\theta\, \hat{\jmath}$$

اگر $\|\vec{a}\| = 1$ تب $\sin\theta$ اور $\cos\theta$ کی شکل میں اکائی بردار $\vec{a}$ درجہ ذیل ہو گا

$$\vec{a} = \cos\theta\, \hat{\imath} + \sin\theta\, \hat{\jmath}$$

تعریف: دو برداروں کی میزانی حاصل ضرب (Scalar or Dot Product) کو ان کے متعلقہ اجزا کو ضرب دے کر اور نتیجے کو جمع کر کے تشکیل دی جاتی ہے۔ اس بات کو یاد رکھیں کہ میزانی حاصل ضرب کا نتیجہ ایک میزان ہوتا ہے نہ کہ بردار۔ اگر $\vec{a} = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath}$ اور $\vec{b} = b_1\hat{\imath} + b_2\hat{\jmath}$ دو بردار نظام $\mathbb{R}^2$ میں ہیں، تب ان کا میزانی حاصل ضرب درجہ ذیل ہو گا

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

اگر $\vec{a} = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}$ اور $\vec{b} = b_1\hat{\imath} + b_2\hat{\jmath} + b_3\hat{k}$ دو بردار $\mathbb{R}^3$ میں ہوں, تب

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

مثال کے طور پر اگر $\vec{a} = 3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$ اور $\vec{b} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$ ہو، تب

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3)(-1) + (5)(2) = 7$$

اب اگر $\vec{a} = \hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}$ اور $\vec{b} = \hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ دو بردار $\mathbb{R}^3$ میں ہوں,تب

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (1)(1) + (-3)(5) + (4)(2) = -6$$

قضیہ: مان لو کہ $\vec{a}$, $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ کوئی تین بردار ہیں اور k کوئی میزان ہے، تب

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

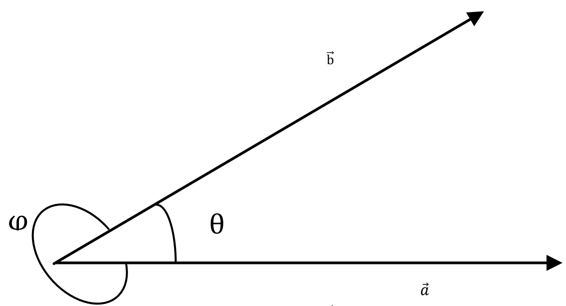
2) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

3) $\vec{a}\cdot(k\vec{b}) = k(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (k\vec{a})\cdot\vec{b}$

4) $\vec{a}\cdot\vec{a} = \|\vec{a}\|^2$

5) $\vec{o}\cdot\vec{a} = 0$

دو غیر صفری بردار جن کا ابتدائی نقطہ ایک ہی ہے،ان کا درمیانی ذاویہ سب سے چھوٹا والا ہوتا ہے۔ درجہ ذیل شکل میں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کا درمیانی ذاویہ θ ہوگا نہ کہ φ۔

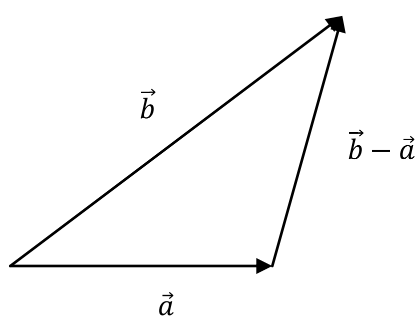


شکل 13.2.1.6

قضیہ: اگر $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ دو غیر صفری بردار ہیں اور ان کا درمیانی ذاویہ θ ہے، تب

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$$

ثبوت: مان لو کہ $\vec{a}$, $\vec{b}$ اور $\vec{b}-\vec{a}$ کسی مثلث (Triangle) کو تشکیل دینے والے تین بردار ہیں (شکل 13.3.1.7)



شکل 13.2.1.7

کوسائن (cosine) قانون کے مطابق

$$\|\vec{b}-\vec{a}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta \qquad \text{....(1)}$$

ہم جانتے ہیں

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = \|\vec{a}\|^2$$

اس لیے

$$\begin{aligned}\|\vec{\mathrm{b}}-\vec{a}\|^2 &= (\vec{\mathrm{b}}-\vec{a})\cdot(\vec{\mathrm{b}}-\vec{a})\\ &= (\vec{\mathrm{b}}-\vec{a})\cdot\vec{b}-(\vec{\mathrm{b}}-\vec{a})\cdot\vec{a}\\ &= \vec{\mathrm{b}}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{\mathrm{b}}-\vec{\mathrm{b}}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{a}\\ &= \|\vec{\mathrm{b}}\|^2-2\vec{a}\cdot\vec{\mathrm{b}}+\|\vec{a}\|^2\end{aligned}$$

مساوات(1) سے

$$\|\vec{\mathrm{b}}\|^2-2\vec{a}\cdot\vec{\mathrm{b}}+\|\vec{a}\|^2 = \|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2-2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$$

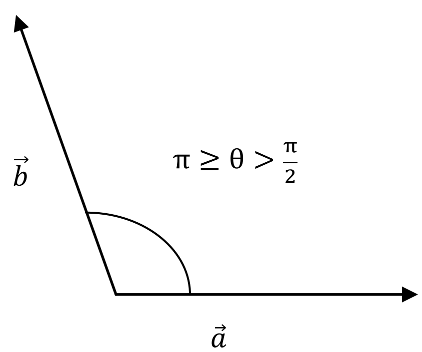
$$\vec{a}\cdot\vec{\mathrm{b}} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$$

$$\Rightarrow \qquad \cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{\mathrm{b}}}{\|\vec{a}\|\|\vec{\mathrm{b}}\|}$$

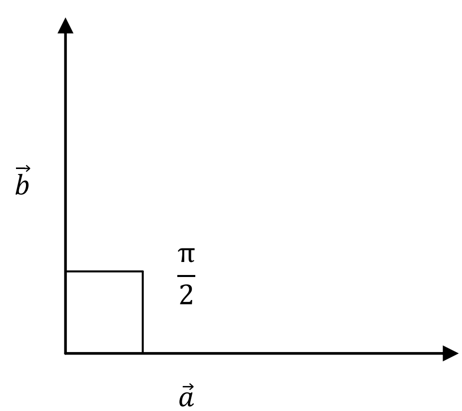
نوٹ: اوپر ہم نے دیکھا کہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے میزانی حاصل ضرب کو دونوں برداروں کی لمبائی اور ان کے درمیانی ذاویہ کی مدد سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اب ہم آسانی کے ساتھ یہ بھی بتاسکتے ہیں کہ میزانی حاصل ضرب $\vec{a}\cdot\vec{\mathrm{b}}$ کا نشان $\cos\theta$ پر منحصر ہے۔ اس سے اب ہم یہ بتا سکتے ہیں کہ دو برداروں کا درمیانی ذاویہ کیا ہو گا۔

عمودی بردار (Orthogonal Vectors): دو بردار $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ عمودی ہوں گے اگر ان کا درمیانی ذاویہ 90^0 ہو۔ دوسرے الفاظ میں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ عمودی ہوں گے اگر

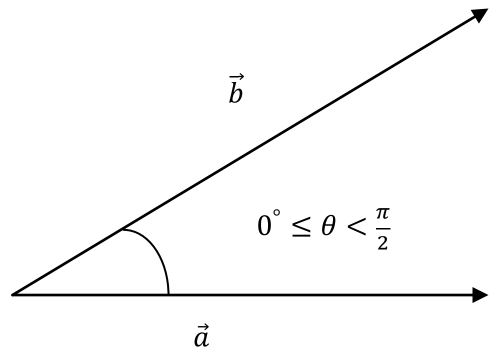
$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{\mathrm{b}} &= \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\frac{\pi}{2}\\ &= \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\times 0\\ &= 0\end{aligned}$$



شکل 13.2.1.8



شکل 13.2.1.9



شکل 13.2.1.10

$\mathbb{R}^2$ میں کسی غیر صفری بردار $\vec{a}$ کا سمتی ذاویہ (Direction Angles) پوری طرح سے بردار $\vec{a}$ اور اکائی برداروں $\hat{\imath}$ اور $\hat{\jmath}$ کے بلطرتیب درمیانی ذاویوں α اور β کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔ α اور β کو $\vec{a}$ کے سمتی ذاویے کہتے ہیں اور ان ذاویوں کے کوسائنس کو $\vec{a}$ کا سمتی کوسائن کہتے ہیں۔ اگر $\vec{a} = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}$ کوئی $\mathbb{R}^3$ میں بردار ہے، تب سمتی ذاویے β، α اور γ ہوں گے۔ اس لیے

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\hat{\imath}}{\|\vec{a}\|\|\hat{\imath}\|} = \frac{a_1}{\|\vec{a}\|}$$

اسی طرح

$$\cos\beta = \frac{\vec{a}\cdot\hat{\jmath}}{\|\vec{a}\|\|\hat{\jmath}\|} = \frac{a_2}{\|\vec{a}\|}$$

اور

$$\cos\gamma = \frac{\vec{a}\cdot\hat{k}}{\|\vec{a}\|\|\hat{k}\|} = \frac{a_3}{\|\vec{a}\|}$$

مثال 1– مان لو کہ $\vec{a} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ اور $\vec{b} = -3\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ دو بردار ہیں۔ درمیانی ذاویہ معلوم کریں۔

حل۔ دیا ہے $\vec{a} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ اور $\vec{b} = -3\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} + 2\hat{k}$

ہم جانتے ہیں

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}\\ &= \frac{1(-3) + (-2)(6) + (2)(2)}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (2)^2}\sqrt{(-3)^2 + (6)^2 + (2)^2}}\\ &= \frac{-3 - 12 + 4}{\sqrt{9}\sqrt{49}}\\ &= \frac{-11}{21}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \theta = cos^{-1}\left(\frac{-11}{21}\right)$$

مثال2۔ مان لو کہ $\vec{a} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ اور $\vec{b} = -3\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 6\hat{k}$ دو بردار ہیں۔ درمیانی ذاویہ معلوم کریں۔

حل۔ دیا ہے $\vec{a} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ اور $\vec{b} = -3\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 6\hat{k}$

ہم جانتے ہیں

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{\mathrm{b}}}{\|\vec{a}\|\|\vec{\mathrm{b}}\|}\\ &= \frac{1(-3)+(-2)(6)+(2)(-6)}{\sqrt{(1)^2+(-2)^2+(2)^2}\sqrt{(-3)^2+(6)^2+(-6)^2}}\\ &= \frac{-3-12-12}{\sqrt{9}\sqrt{81}}\\ &= \frac{-27}{27}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \theta = cos^{-1}(-1) = \pi$$

مثال3۔ اگر $\|\vec{a}\| = 1$, $\|\vec{b}\| = 2$, اور برداروں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کا درمیانی ذاویہ 30° ہے، تب $\vec{a}\cdot\vec{\mathrm{b}}$ حاصل کریں۔

حل۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{\mathrm{b}} &= \|\vec{a}\|\|\vec{\mathrm{b}}\|\cos\theta\\ &= 1\times 2\cos 30^{\circ}\\ &= 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

مثال4۔ بردار $\vec{a} = \hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$ کے لیے سمتی کوسائن حاصل کریں۔

حل۔ دیا گیا بردار ہے $\vec{a} = \hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$

تب

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(1)^2+(-1)^2+(1)^2} = \sqrt{3}$$

اس لیے دیے گیے بردار کے سمتی کوسائن ہوں گے

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{1}{\|\vec{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \cos\beta &= \frac{-1}{\|\vec{a}\|} = \frac{-1}{\sqrt{3}}\\ \cos\gamma &= \frac{1}{\|\vec{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

برداری حاصل ضرب (Vector Product): مان لو کہ $\vec{a} = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}$ اور $\vec{b} = b_1\hat{\imath} + b_2\hat{\jmath} + b_3\hat{k}$ کوئی دو بردار $\mathbb{R}^3$ میں ہیں، تب $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کا برداری حاصل ضرب درجہ ذیل ہوتا ہے

$$\vec{a} \times \vec{\mathrm{b}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathrm{\imath}} & \hat{\mathrm{\jmath}} & \hat{\mathrm{k}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \mathrm{b}_1 & \mathrm{b}_2 & \mathrm{b}_3 \end{vmatrix}$$

نوٹ: 1۔ برداری حاصل ضرب کا نتیجہ ایک بردار ہوتا ہے، جب کہ میزانی حاصل ضرب کا نتیجہ ایک میزان ہوتا ہے۔

2۔ برداری حاصل ضرب کی صرف $\mathbb{R}^3$ میں ہی تعریف کی جاسکتی ہے۔

قضیہ: مان لو کہ $\vec{a}$, $\vec{\mathrm{b}}$ اور $\vec{c}$ کوئی تین بردار $\mathbb{R}^3$ میں ہیں اور k کوئی میزان ہے، تب

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

2) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$

3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$

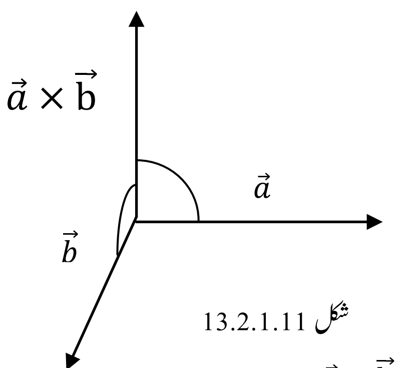
4) $\vec{a} \times (k\vec{b}) = k(\vec{a} \times \vec{b}) = (k\vec{a}) \times \vec{b}$

5) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{o}$

6) $\vec{o} \times \vec{a} = 0 = \vec{a} \times \vec{o}$

7) $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$

قضیہ: اگر $\vec{a} = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}$ اور $\vec{b} = b_1\hat{\imath} + b_2\hat{\jmath} + b_3\hat{k}$ دو غیر صفری بردار ہیں، جن کا برداری حاصل ضرب بھی غیر صفری ہو، تب بردار $\vec{a} \times \vec{b}$، برداروں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ پر عمود ہو گا۔



شکل 13.2.1.11

ثبوت: برداری حاصل ضرب کی تعریف سے ہم جانتے ہیں

$$\vec{a} \times \vec{\mathrm{b}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathrm{\imath}} & \hat{\mathrm{\jmath}} & \hat{\mathrm{k}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \mathrm{b}_1 & \mathrm{b}_2 & \mathrm{b}_3 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} \times \vec{\mathrm{b}} = (a_2\mathrm{b}_3 - a_3\mathrm{b}_2)\hat{\mathrm{\imath}} - (a_1\mathrm{b}_3 - a_3\mathrm{b}_1)\hat{\mathrm{\jmath}} + (a_1\mathrm{b}_2 - a_2\mathrm{b}_1)\hat{\mathrm{k}}$$

دو بردار عمودی ہوں گے اگر ان کا میزانی حاصل ضرب کا نتیجہ صفر ہو جایے۔ اس سے یہ پتہ چلتا ہے کہ بردار $\vec{a} \times \vec{\mathrm{b}}$ بردار $\vec{a}$ پر عمود ہو گا اگر

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$$

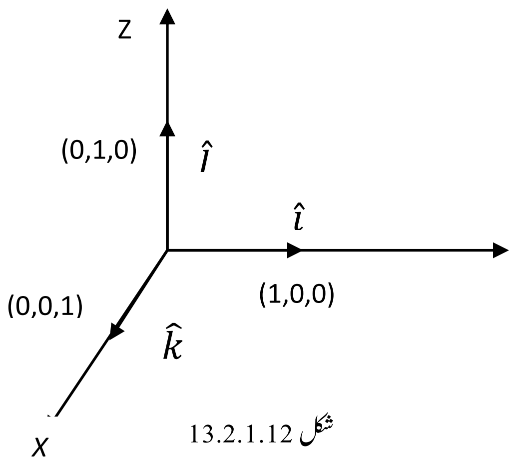
اب

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} &= (a_2\mathrm{b}_3 - a_3\mathrm{b}_2)a_1 - (a_1\mathrm{b}_3 - a_3\mathrm{b}_1)a_2 + (a_1\mathrm{b}_2 - a_2\mathrm{b}_1)a_3 \\ &= a_1a_2\mathrm{b}_3 - a_1a_3\mathrm{b}_2 - a_1a_2\mathrm{b}_3 - a_2a_3\mathrm{b}_1 + a_1a_3\mathrm{b}_2 - a_2a_3\mathrm{b}_1 = 0\end{aligned}$$

اس لیے بردار $\vec{a} \times \vec{\mathrm{b}}$ بردار $\vec{a}$ پر عمود ہو گا۔ اسی طرح ہم دکھا سکتے ہیں کہ

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$$

جس کی بنیاد پر ہم کہہ سکتے ہیں کہ بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ بردار $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ دونوں پر عمود ہوگا۔



شکل 13.2.1.12

مثال4۔ دکھایے کہ

a) $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$

b) $\hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}$

c) $\hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$

a) ثبوت: ہم $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ کو درجہ ذیل شکل میں لکھ سکتے ہیں

$$\hat{\imath} = \hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$
$$\hat{\jmath} = 0\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 0\hat{k}$$
$$\hat{k} = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + \hat{k}$$

اس لیے

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (0-0)\hat{\imath} - (0-0)\hat{\jmath} + (1-0)\hat{k}$$
$$= \hat{k}$$

اسی طرح ہم دکھا سکتے ہیں

$\hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$ اور $\hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}$

مثال5۔ دکھایے کہ

a) $\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = -\hat{k}$ b) $\hat{k} \times \hat{\jmath} = -\hat{\imath}$ c) $\hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath}$

a) ثبوت: ہم $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ کو درجہ ذیل شکل میں لکھ سکتے ہیں

$$\hat{\imath} = \hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$
$$\hat{\jmath} = 0\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 0\hat{k}$$
$$\hat{k} = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + \hat{k}$$

اس لیے

$$\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (0-0)\hat{\imath} - (0-0)\hat{\jmath} + (0-1)\hat{k}$$
$$= -\hat{k}$$

اسی طرح ہم دکھا سکتے ہیں

$$\hat{k} \times \hat{\jmath} = -\hat{\imath}$$

اور

$$\hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath}$$

مثال6۔ دکھایے کہ $\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{o}$

ثبوت: ہم $\hat{\imath}$،$\hat{\jmath}$،$\hat{k}$ کو درجہ ذیل شکل میں لکھ سکتے ہیں

$$\hat{\imath} = \hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$
$$\hat{\jmath} = 0\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 0\hat{k}$$
$$\hat{k} = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + \hat{k}$$

اس لیے

$$\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (0-0)\hat{\imath} - (0-0)\hat{\jmath} + (0-0)\hat{k}$$
$$= 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$
$$= \vec{o}$$

اسی طرح ہم دکھا سکتے ہیں

$$\hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \vec{o}$$

اور

$$\hat{k} \times \hat{k} = \vec{o}$$

اس لیے ثابت ہوا کہ $\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{o}$

مثال7۔ اس بردار کو حاصل کریں جو $\vec{a} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k}$ اور $\vec{b} = -7\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$ پر عمود ہو۔

ثبوت: دیا ہے $\vec{a} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k}$ اور $\vec{b} = -7\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$

ہم جانتے ہیں کہ دو برداروں کا برداری حاصل ضرب دونوں برداروں پر عمود ہوتا ہے۔ اس لیے

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ -7 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= (1-6)\hat{\imath} - (-2+21)\hat{\jmath} + (4-7)\hat{k}$$
$$= -5\hat{\imath} - 19\hat{\jmath} - 3\hat{k}$$

جو کہ دیے گئے برداروں پر عمود ہو گا۔

قضیہ:

1. اگر $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ دو غیر صفر بردار $\mathbb{R}^3$ میں ہوں اور ان کا درمیانی ذاویہ θ ہو، تب

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \sin\theta$$

2. کسی متوازی الاضلاع (Parallelogram) جس کے متصل اطراف (Adjacent Sides) $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ ہوں ، کا رقبہ درجہ ذیل ہو گا

$$\mathcal{A} = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

3. دو بردار $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ باہم متوازی ہوں گے اگر اور صرف اگر $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$

4. کسی مثلث (Triangle) کا رقبہ Δ، اس کے دو اطراف سے بنے متوازی الاضلاع کے رقبہ کا آدھا (Half) ہو تا ہے۔ اس لیے

$$\Delta = \frac{1}{2}\|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

مثال 8۔ اس مثلث کا رقبہ حاصل کریں جو نقاط $P(1, 5, -2)$، $Q(0, 0, 0)$ اور $R(3, 5, 1)$ سے مل کر بنا ہے۔

حل۔ ہم جانتے ہیں کہ کسی مثلث (Triangle) کا رقبہ Δ، اس کے دو اطراف سے بنے متوازی الاضلاع کے رقبہ کا آدھا (Half) ہو تا ہے۔ اس کے لیے سب سے پہلے مثلث کی دو اطراف $\overrightarrow{PQ}$ اور $\overrightarrow{PR}$ حاصل کرتے ہیں۔ اس لیے

$$\overrightarrow{PQ} = (0-1)\hat{\imath} + (0-5)\hat{\jmath} + (0+2)\hat{k} = -\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 2\hat{k}$$

اور

$$\overrightarrow{PR} = (3-1)\hat{\imath} + (5-5)\hat{\jmath} + (1+2)\hat{k} = 2\hat{\imath} + 3\hat{k}$$

اب

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} &= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & -5 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -15\hat{\imath} + 7\hat{\jmath} + 10\hat{k}\end{aligned}$$

اس لیے مثلث کا رقبہ ہو گا

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\| \\ &= \frac{1}{2}\|-15\hat{\imath} + 7\hat{\jmath} + 10\hat{k}\| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(-15)^2 + (7)^2 + (10)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{374}\end{aligned}$$

اس لیے دیے گئے مثلث کا رقبہ $\frac{1}{2}\sqrt{374}$ مربع اکائی ہے۔

13.2.2 میزانی تہرا حاصل ضرب (Scalar Triple Product)

اگر تین بردار $\vec{a} = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}$ ، $\vec{b} = b_1\hat{\imath} + b_2\hat{\jmath} + b_3\hat{k}$ اور $\vec{c} = c_1\hat{\imath} + c_2\hat{\jmath} + c_3\hat{k}$ نظام $\mathbb{R}^3$ میں ہوں، تو ان کا میزانی حاصل ضرب درجہ ذیل ہو گا

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

13.2.2.1 ہندسی تعبیر (Geometrical Interpretation)

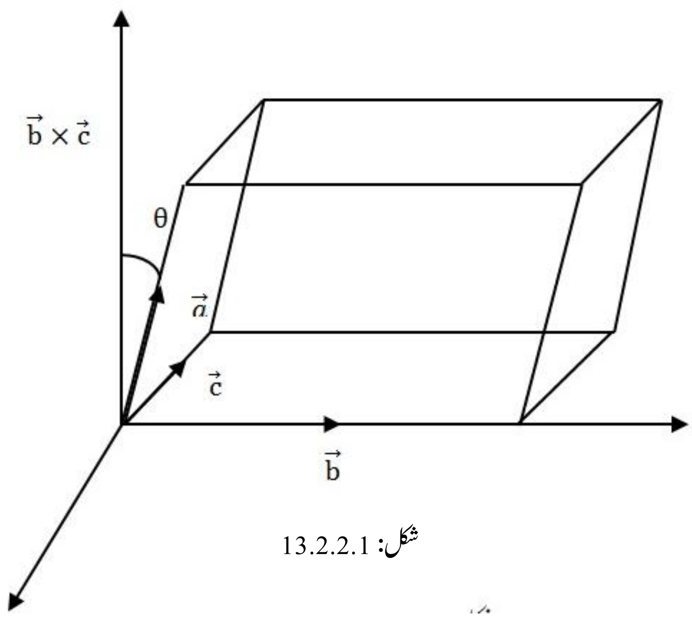
مان لو کہ $\vec{a}$، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ تین غیر صفری بردار نظام $\mathbb{R}^3$ میں ہیں جن کا ابتدائی نقطہ ایک ہی ہے، جیسا کہ ذیل شکل میں دکھایے گئے متوازی السطوح (Parallelopiped) سے ظاہر ہے جس کی متصل کنارے (Adjacent Sides) $\vec{a}$، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ سے ظاہر ہوتے ہیں۔ تب متوازی السطوح کا حجم V درجہ ذیل ہو گا

$$V = [\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

اگر $\vec{b} \times \vec{c}$ اور $\vec{a}$ کا درمیانی زاویہ $\frac{\pi}{2}$ ہو تب

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$$

اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ $\vec{a}$، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ ایک ہی مستوی (Plane) پر ہیں۔



شکل: 13.2.2.1

مثال 9- کسی متوازی السطوح کے اطرافی کنارے برداروں $\vec{a} = 2\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} + 2\hat{k}$، $\vec{b} = 4\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ اور

$\vec{c} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 4\hat{k}$ سے ظاہر کیے گئے ہیں۔ متوازی السطوح کا حجم معلوم کریں۔

حل۔ دیا ہے $\vec{a} = 2\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ ، $\vec{b} = 4\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ اور $\vec{c} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 4\hat{k}$ دیے گئے کسی متوازی السطوح کے اطرافی کنارے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ متوازی اسطوح کا حجم V درجہ ذیل ضابطے سے حاصل کیا جاتا ہے۔

$$V = [\vec{a}\vec{\mathrm{b}}\vec{\mathrm{c}}] = \vec{a} \cdot (\vec{\mathrm{b}} \times \vec{\mathrm{c}})$$

اس لیے

$$\begin{aligned} V &= \begin{vmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} \\ &= (-16 + 4)2 + (0 + 4)6 + (0 - 8)2 \\ &= -24 + 24 - 16 \\ &= -16 \end{aligned}$$

اس لیے متوازی اسطوح کا حجم 16 ہو گا۔

مثال 10۔ دکھایے کہ تین بردار $\vec{a} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$، $\vec{b} = 3\hat{\imath} - 2\hat{k}$ اور $\vec{c} = 5\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$ ایک ہی مستوی پر ہیں۔

حل۔ دیا ہے $\vec{a} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$، $\vec{b} = 3\hat{\imath} - 2\hat{k}$ اور $\vec{c} = 5\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ تینوں بردار ایک ہی مستوی پر ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ تین بردار ایک ہی مستوی پر ہوں گے اگر ان کا میزانی تہرا حاصل ضرب صفر ہو۔ اس لیے

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{\mathrm{b}} \times \vec{\mathrm{c}}) &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 5 & -4 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (0 - 8)1 + (0 + 10)2 + (-12 - 0)1 \\ &= -8 + 20 - 12 \\ &= 0 \end{aligned}$$

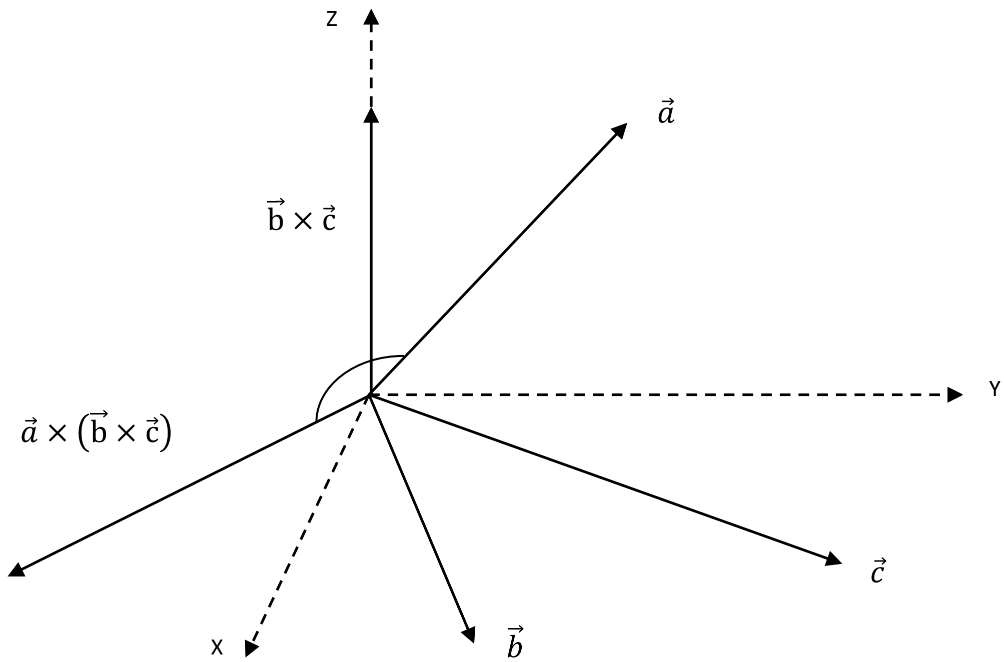
اس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ تینوں بردار ایک ہی مستوی پر ہیں۔

13.2.3 برداری تہرا حاصل ضرب (Vector Triple Product)

اب ہم تہرے حاصل ضرب کی ایک اور قسم کے بارے میں جان کاری حاصل کریں گے جو برداری تہرا حاصل ضرب نام سے جانا جاتا ہے۔

تعریف: مان لو کہ $\vec{a}$، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ کوئی تین بردار $\mathbb{R}^3$ نظام میں ہیں۔ تب بردار $\vec{a}$ کا برادر $\vec{\mathrm{b}} \times \vec{\mathrm{c}}$ کے ساتھ برداری تہرا حاصل ضرب درجہ ذیل ہوتا ہے

$$\vec{a} \times (\vec{\mathrm{b}} \times \vec{\mathrm{c}}) = (\vec{a} \cdot \vec{\mathrm{c}})\vec{\mathrm{b}} - (\vec{a} \cdot \vec{\mathrm{b}})\vec{\mathrm{c}}$$



شکل 13.2.3.1

مثال 11۔ اگر بردار $\vec{a} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$، $\vec{b} = 3\hat{\imath} - 2\hat{k}$ اور $\vec{c} = 5\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$ ہوں تو $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ حاصل کریں۔

حل۔ دیا ہے $\vec{a} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 4\hat{k}$، $\vec{b} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$ اور $\vec{c} = \hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ تین بردار ہیں۔ اب

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{c} &= (1)(1) + (2)(3) + (4)(0) \\ &= 7\end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (1)(2) + (2)(2) + (4)(0) \\ &= 6\end{aligned}$$

اس لیے ان کا برداری تہرا حاصل ضرب ہو گا

$$\begin{aligned}\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \\ &= (7)(2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}) - (6)(\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}) \\ &= 8\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}\end{aligned}$$

13.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی کو پڑھنے کے بعد ہم نے سیکھا کہ:

1. میزانی حاصل ضرب کی مدد سے دو برداروں کا درمیانی زاویہ درجہ ذیل طریقہ سے حاصل کیا جاسکتا ہے

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$$

2. دو بردار عمودی ہوں گے اگر ان کا میزانی حاصل ضرب صفر ہو۔

3. کسی بردار $\vec{a} = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}$ کے سمتی کوسائن ذیل ہیں $\cos\alpha = \frac{a_1}{\|\vec{a}\|}$، $\cos\beta = \frac{a_2}{\|\vec{a}\|}$، اور $\cos\gamma = \frac{a_3}{\|\vec{a}\|}$

4. اگر $\vec{a} = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}$ اور $\vec{b} = b_1\hat{\imath} + b_2\hat{\jmath} + b_3\hat{k}$ کوئی دو بردار $\mathbb{R}^3$ میں ہیں، تب $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کا برداری حاصل ضرب $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathrm{i}} & \hat{\mathrm{j}} & \hat{\mathrm{k}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \mathrm{b}_1 & \mathrm{b}_2 & \mathrm{b}_3 \end{vmatrix}$ ہوتا ہے۔

5. برداری حاصل ضرب کی تعریف صرف $\mathbb{R}^3$ نظام میں ہی کی جاسکتی ہے۔

6. دو غیر صفری برداروں کا برداری حاصل ضرب ان پر عمود ہوتا ہے۔

7. دو بردار باہم متوازی ہوں گے اگر اور صرف اگر ان کا برداری حاصل ضرب صفر کے بردار ہو۔

8. کسی مثلث کا رقبہ اس کی دو اطراف کی مدد سے بنے مطوازی الاضلاع کے رقبہ کا آدھا ہوتا ہے۔

9. تین بردار ایک ہی مستوی پر ہوتے ہیں اگر ان کا میزانی تہرا حاصل ضرب صفر ہو جایے۔

10. بردار $\vec{a}$ کا برادر $\vec{b}\times\vec{c}$ کے ساتھ برداری تہرا حاصل ضرب درجہ ذیل ہوتا ہے

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

13.4 کلیدی الفاظ (Key Words)

میزانی حاصل ضرب، برداری حاسل ضرب، متوازی الاسطوح، متوازی الاضلاع، میزانی تہرا حاصل ضرب، برداری تہرا حاصل ضرب، متوازی، مساوی، عمودی

13.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

13.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = -\vec{b}\cdot\vec{a}$ (T/F)
2. $\vec{a}\cdot\vec{a} = \|\vec{a}\|^2$ (T/F)
3. دو برداروں کا میزانی حاصل ضرب کا نتیجہ ایک میزان ہوتا ہے۔ (T/F)
4. اگر $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ دو غیر صفری بردار ہیں اور $\vec{a}\times\vec{b} = 0$، تب $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کا درمیانی زاویہ ہے

A. 0 B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. π

5. اگر $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ دو غیر صفری بردار ہیں اور $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$، تب $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کا درمیانی زاویہ ہے

A. 0 B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. π

6. بردار $\vec{a} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k}$ کے سمتی کوسائن $\cdots\cdots\cdots\cdots$ ہیں۔
7. $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \cdots\cdots\cdots$
8. $\hat{k}\times\hat{\jmath} = \cdots\cdots\cdots$
9. $\hat{\imath}\times\hat{\jmath} = \cdots\cdots\cdots$
10. $\hat{\imath}\times\hat{\imath} = \cdots\cdots\cdots$

13.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. اگر $\|\vec{a}\| = 2$ اور $\|\vec{b}\| = 3$ اور ان کا درمیانی زاویہ $\frac{3\pi}{4}$ ہو تب، $\vec{a}\cdot\vec{b}$ اور $\vec{b}\cdot\vec{a}$ حاصل کریں۔
2. درجہ ذیل کے لیے سمجھایے کہ وہ کیوں کوئی معنی نہیں رکھتے ہیں؟

(i) $k\cdot(\vec{a}+\vec{b})$ (ii) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$ (iii) $(\vec{a}\cdot\vec{b})+\vec{c}$

3. دکھایے کہ بردار $\vec{a} = -a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath}$ اور $\vec{b} = a_1\hat{\imath} - a_2\hat{\jmath}$ بردار $\vec{c} = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath}$ پر عمود ہیں۔
4. دکھایے کہ $\vec{a} = \hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 7\hat{k}$ اور $\vec{b} = 8\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ عمودی بردار ہیں۔
5. مان لو کہ $\vec{a} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$، $\vec{b} = 4\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$ اور $\vec{c} = 6\hat{\imath}$، تب حاصل کریں۔

(i) $(\|\vec{a}\|\vec{b})\cdot\vec{c}$ (ii) $\|(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{c}\|$

6. اگر $\vec{a} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ اور $\vec{b} = 3\hat{\imath} + \hat{k}$، تب حاصل کریں

(i) $\vec{a} \times \vec{b}$ (ii) $\vec{b} \times \vec{a}$

7. اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ تین بردار $\mathbb{R}^3$ نظام میں ہیں، تب دکھایے کہ

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$$

8. اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ دو بردار $\mathbb{R}^3$ نظام میں ہیں، تب دکھایے کہ

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

9. وہ بردار حاصل کریں جو بردار $\vec{a} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k}$ اور $\vec{b} = -7\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$ دونوں پر عمود ہو۔

13.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. دکھایے کہ $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

2. دکھایے کہ $(\vec{b} \times \vec{c}) \times (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = [\vec{a}\vec{b}\vec{c}]^2$

3. دکھایے کہ $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

13.6 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Calculus, H. Anton, I. Bivens, S. Davis, John Wiley & Sons, Inc. (10th Edition)
2. Calculus, M. J. Strauss, G. L. Bradley, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall (3rd Edition)

اکائی 14۔ ویکٹر تفاعل کی لمٹ، تسلسل، تفرق اور تکمل

(Limit, Continuity, Differentiation and Integration of Vector Functions)

اکائی کے اجزا

14.0 تمہید(Introduction)

ہم دیکھتے ہیں کہ کیلکولس اور ویکٹرس کو ملا کر اگر کام کیا جائے تو ہمارے پاس ریاضی میں ایک نئی شاخ بنتی ہے جس کو ہم ویکٹر کیلکولس کہتے ہیں۔ ویکٹر کیلکولس اصل میں ویکٹر قدری تفاعل کے اوپر تشکیل دی گئی ہے۔ ویکٹر تفاعل وہ تفاعل ہوتا ہے جس کی قدر کوئی ویکٹر ہوتی ہے۔

ان تفاعلات کی مدد سے ہم اسپیس-2 (2-Space)اور اسپیس-3 (3-Space) میں پیرامٹرک تفاعل کو آسانی سے پڑھ سکتے ہیں اور کسی ذرے کا کسی منحنی راستے(Curved Path) کے ساتھ گردش بھی دیکھ سکتے ہیں۔ ہم اس اکائی میں ویکٹر قدری تفاعل کے لمٹ کب وجود رکھتی ہے اور کسی تفاعل کے تسلسل کی تعریف کریں گے۔

14.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کو مکمل کرنے کے بعد کوئی طالب علم اس قابل ہوگا کہ وہ کسی ویکٹر قدری تفاعل کی لمٹ معلوم کر سکے اور تسلسل اور تسلسل نہ ہونے کے درمیان کے فرق کو بھی معلوم کر سکے۔ اس اکائی میں طالب علم آگے چل کر یہ سیکھیگا کہ کسی نقطہ پر تفرق پزیر ہونے کو کس طرح معلوم کرتے ہیں۔ آخر میں ہم تفرق اور تکمل پڑھیں گے۔ آیئے سب سے پہلے ہم کسی ویکٹر قدری تفاعل کو یاد کرتے ہیں۔

14.2 ویکٹر قدری تفاعل(Vector Valued Functions)

کسی حقیقی متغیر کا ویکٹر تفاعل (جس کو ہم ویکٹر قدری تفاعل بھی کہتے ہیں) جس کا دامنہ (Domain) ہم D سے لکھتے ہیں۔ ہر ایک نمبر $t \in D$ کے لیے ایک غیر معمولی ویکٹر دیتا ہے۔ تو اگر F کسی حقیقی متغیر کا ویکٹر تفاعل ہے جسکا دامنہ D ہو تو ہر ایک $t \in D$ کے لیے ہمارے پاس ایک غیر معمولی ویکٹر $\vec{F}(t)$ ہو گا۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ اگر t کوئی حقیقی نمبر ہو اور g_1, g_2, g_3 حقیقی قدری تفاعل ہو اس متغیر کے تب $\mathbb{R}^2$ اور $\mathbb{R}^3$ میں $\vec{F}(t)$ کو کچھ اس طرح سے لکھ سکتے ہیں

$$(1) \cdots\cdots\cdots\cdots \begin{cases} \vec{F}(t) = g_1(t)\hat{\imath} + g_2(t)\hat{\jmath} \\ \vec{F}(t) = g_1(t)\hat{\imath} + g_2(t)\hat{\jmath} + g_3(t)\hat{k} \end{cases}$$

ان اوپر لکھی گئی عبارتوں میں g_1, g_2, g_3 کو ہم F کے اجزا کہتے ہیں۔ ہم اوپر دیے گئے ویکٹر تفاعل کو $\vec{F}(t) = \langle g_1(t), g_2(t) \rangle$ اور $\vec{F}(t) = \langle g_1(t), g_2(t), g_3(t) \rangle$ سے بھی لکھ سکتے ہیں۔

مثال:

1. $\vec{F}(t) = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \cos t\,\hat{k}$
2. $\vec{F}(t) = \hat{\imath} + \frac{1}{t}\hat{\jmath} + 10\hat{k}$
3. $\vec{F}(t) = (t^2 - 1)\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath}$

یہ سب ویکٹر تفاعل ہیں۔

ہم جس طرح سے اسکیلر (Scalar) تفاعل کے اوپر آپریشن (Operations) لگاتے ہیں اسی طرح سے ویکٹر تفاعل پر بھی لگا سکتے ہیں ۔مان لیجیے کہ $\vec{F}_1$ اور $\vec{F}_2$ کسی حقیقی متغیر t کے ویکٹر تفاعل ہیں اور $g(t)$ کوئی اسکیلر تفاعل ہے، تب $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$، $\vec{F}_1 - \vec{F}_2$، $\vec{F}_1 \times \vec{F}_2$ اور $g\vec{F}_1$ سب ویکٹر تفاعل ہیں جب کہ $\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2$ ایک اسکیلر تفاعل ہے۔ اوپر بیان کردہ آپریشنس کو ہم کچھ اس طرح سے لکھ سکتے ہیں:

(i) $(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)(t) = \vec{F}_1(t) + \vec{F}_2(t)$

(ii) $(\vec{F}_1 - \vec{F}_2)(t) = \vec{F}_1(t) - \vec{F}_2(t)$

(iii) $(\vec{F}_1 \times \vec{F}_2)(t) = \vec{F}_1(t) \times \vec{F}_2(t)$

(iv) $(g\vec{F}_1)(t) = g(t)\vec{F}_1(t)$

(v) $(\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2)(t) = \vec{F}_1(t) \cdot \vec{F}_2(t)$

14.3 ویکٹر تفاعل کی لمٹ اور تسلسل (Limit and Continuity of Vector Functions)

اس حصہ میں ہم ویکٹر تفاعل کی لمٹ کے بارے میں پڑھیں گے اور یہ بھی معلوم کریں گے کہ ویکٹر تفاعل کو مسلسل ہونے کے لیے کن شرائط کو پورا کرنا پڑتا ہے۔

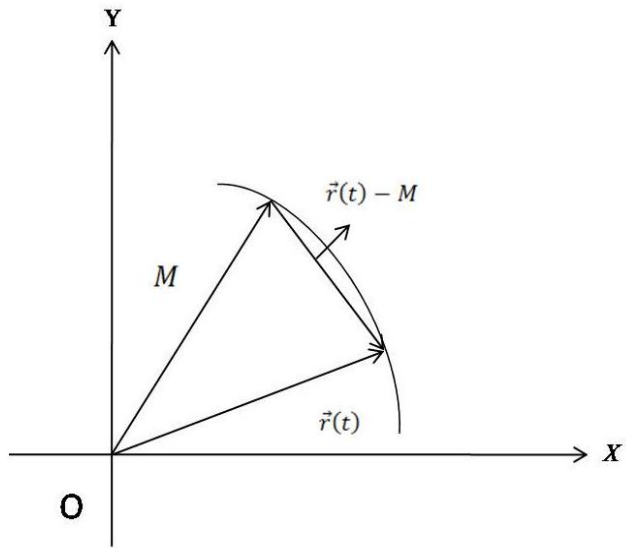
تعریف: مان لیجیے کہ $\vec{r}(t)$ کوئی ویکٹر قدری تفاعل ہے جو ان تمام t کے لئے متعرف ہیں جو کسی کھلے وقفہ میں موجود ہوں اس کے علاوہ یہ بھی مان لیجیے کہ کھلے وقفہ میں کوئی نمبر b بھی موجود ہے اور ویکٹر قدری تفاعل کو اس نمبر پر متعرف ہونے کی کوئی ضرورت نہیں ہے، تب ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\lim_{t\to b} \vec{r}(t) = M$$

اور ایسا صرف اور صرف تب ہو سکتا ہے جبکہ

$$\lim_{t\to b} \|\vec{r}(t) - M\| = 0$$

اگر ہم $\vec{r}(t)$ اور M کو کچھ اس طرح سے پوزیشنڈ (Positioned) کریں کہ ان دونوں ویکٹرس کے ابتدائی نقاط ایک ہوں تب $\vec{r}(t)$ اور M کی درمیانی دوری $\|\vec{r}(t) - M\|$ ہو گی۔



ہم دیکھتے ہیں کہ ویکٹر قدری تفاعل $\vec{r}(t)$ کسی لمٹنگ ویکٹر M کو اپروچ (Approach) کریگا جب t نمبر b کو اپروچ کرے گا اور ایسا صرف اور صرف جب ہو سکتا ہے جب کہ $\vec{r}(t)$ کے جو اجزا تفاعلات ہیں وہ M کے جو متناظر (Corresponding) اجزا ہیں، ان کو اپروچ کرے۔ اس سے ہم مندرجہ لکھ سکتے ہیں۔

قضیہ: مان لیجیے کہ

$$\vec{r}(t) = \langle f_1(t), f_2(t)\rangle = f_1(t)\hat{\imath} + f_2(t)\hat{\jmath}$$

تب

$$\lim_{t\to b} \vec{r}(t) = \langle \lim_{t\to b} f_1(t), \lim_{t\to b} f_2(t)\rangle = \left\{\lim_{t\to b} f_1(t)\right\}\hat{\imath} + \left\{\lim_{t\to b} f_2(t)\right\}\hat{\jmath}$$

اور اس کے ہونے کے لئے شرط ہے کہ اجزا تفاعلات کی جو لمٹس ہیں وہ وجود رکھتی ہوں۔ اس کے برعکس اجزا تفاعلات کی لمٹ وجود رکھتی ہیں اگر $\vec{r}(t)$ بھی لمٹنگ ویکٹر کو اپروچ کرے جب $t \to b$

اوپر بیان کردہ تعریف کو ہم تین اجزا کے تفاعلات کے لیے کچھ اسی طرح سے بان کرسکتے ہیں۔ جب $t \to b$ تب مان لیجیے کہ ویکٹر تفاعل $\vec{r}(t)$ کے اجزا تفاعلات f_1, f_2, f_3 کی معین لمٹ ہو گی جہاں پر b کوئی نمبر ہے یا پھر $\pm\infty$ ہے، تب ویکٹر تفاعل

$$\vec{r}(t) = \langle f_1(t), f_2(t), f_3(t)\rangle$$

کی لمٹ جب کہ $t \to b$ ہے ہم کچھ اس طراح سے بیان کرتے ہیں

$$\lim_{t\to b} \vec{r}(t) = \left\{\lim_{t\to b} f_1(t)\right\}\hat{\imath} + \left\{\lim_{t\to b} f_2(t)\right\}\hat{\jmath} + \left\{\lim_{t\to b} f_3(t)\right\}\hat{k}$$

نوٹ:مان لیجیے کہ $\vec{r}(t)$ ایک ویکٹر قدری تفاعل ہے تب ہم نے اوپر بیان کردہ تعریف میں $\|\vec{r}(t) - M\|$ کا استعمال کیا ہے کیوں کہ $\|\vec{r}(t) - M\|$ دوری کو بیان کرتے ہیں اس لیے یہ ایک نمبر ہے اس کے علاوہ $\vec{r}(t)$ کے ایک ویکٹر قدری تفاعل ہونے کے باوجود

$$\lim_{t\to b}\|\vec{r}(t) - M\|$$

کسی حقیقی قدری تفاعل کی ایک عام لمٹ ہے۔

مثال-1 مان لیے کہ $\vec{F}(t_0) = {t_0}^4\hat{\imath} + 5e^{t_0}\hat{\jmath} - 7\ \cos(\pi t_0)\ \hat{k}$،تب

$$\lim_{t_0\to 0}\vec{F}(t_0) = \left(\lim_{t_0\to 0}{t_0}^4\right)\hat{\imath} + \left(\lim_{t_0\to 0}5e^{t_0}\right)\hat{\jmath} - \left(\lim_{t_0\to 0}7\ \cos(\pi t_0)\right)\hat{k}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{t_0\to 0}\vec{F}(t_0) = 5\ \hat{\jmath} - 7\hat{k}$$

اس مثال کو ہم کچھ اس طرح سے بھی بیان کرسکتے ہیں

$$\begin{aligned}\lim_{t_0\to 0}\vec{F}(t_0) &= \lim_{t_0\to 0}\langle {t_0}^4، 5e^{t_0}، -7\ \cos(\pi t_0)\rangle\\ &= \langle \lim_{t_0\to 0}{t_0}^4، \lim_{t_0\to 0}5e^{t_0}، \lim_{t_0\to 0}(-7\ \cos(\pi t_0))\rangle\\ &= \langle 0,5,-7\ \rangle\end{aligned}$$

مثال-2 $\lim_{t_0\to 3}\vec{F}(t_0)$ کی قدر معلوم کریں جب کہ $\vec{F}(t_0) = ({t_0}^5 - 6)\hat{\imath} + e^{2t_0}\hat{\jmath} + \ \sin(\pi t_0)\ \hat{k}$

حل-

$$\begin{aligned}\lim_{t_0\to 3}\vec{F}(t_0) &= \left[\lim_{t_0\to 3}({t_0}^5 - 5)\right]\hat{\imath} + \left[\lim_{t_0\to 3}(e^{2t_0})\right]\hat{\jmath} + \left[\lim_{t_0\to 3}(\sin(\pi t_0))\right]\hat{k}\\ &= (243 - 5)\hat{\imath} + (e^6)\hat{\jmath} + \ (\sin(3\pi))\hat{k}\\ &= 238\hat{\imath} + e^6\hat{\jmath}\end{aligned}$$

مثال3- $\lim_{t\to 0}\vec{F}(t)$ کی قدر معلوم کریں جب کہ $\vec{F}(t) = 2t^3\hat{\imath} + 5e^{2t}\hat{\jmath} + (1 - 3\cos(3\pi t))\hat{k}$

حل-

$$\vec{F}(t) = 2t^3\hat{\imath} + 5e^{2t}\hat{\jmath} + (1 - 3\cos(3\pi t))\hat{k}$$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\vec{F}(t) &= \left[\lim_{t\to 0}(2t^3)\right]\hat{\imath} + \left[\lim_{t\to 0}(5e^{2t})\right]\hat{\jmath} + \left[\lim_{t\to 0}(1 - 3\cos(3\pi t))\right]\hat{k}\\ &= (0)\hat{\imath} + (5e^0)\hat{\jmath} + \ (1 - 3\cdot 0)\hat{k}\\ &= 5\hat{\jmath} + \ \hat{k}\end{aligned}$$

نوٹ:ویکٹر قدری تفاعل یا ویکٹر تفاعل بھی اسی طرح کی بہت ساری خصوصیات کو مطمئن کرتا ہے۔ جیسے کوئی حقیقی قدری تفاعل۔ مثال کے طور پر مان لیجیے کہ $\vec{r}_1(t)$ اور $\vec{r}_2(t)$ کسی حقیقی متغیر t کے تفاعل اور $f(t)$ کوئی اسکیلر تفاعل ہے۔ جب $t \to a$ تب $\vec{r}_1(t)$، $\vec{r}_2(t)$ اور $f(t)$ ان سب تفاعلات کی لمٹ معین(Finite Limit)ہوگی اور مندرجہ ذیل بھی ہولڈ(Hold)کریں گے:

$$\lim_{t\to a}[\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)] = \lim_{t\to a}\vec{r}_1(t) + \lim_{t\to a}\vec{r}_2(t)$$

$$\lim_{t\to a}[\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)] = \lim_{t\to a}\vec{r}_1(t) - \lim_{t\to a}\vec{r}_2(t)$$

$$\lim_{t\to a}[f(t)\vec{r}_1(t)] = \left(\lim_{t\to a}f(t)\right)\left(\lim_{t\to a}\vec{r}_1(t)\right)$$

$$\lim_{t\to a}[\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t)] = \left(\lim_{t\to a}\vec{r}_1(t)\right)\cdot\left(\lim_{t\to a}\vec{r}_2(t)\right)$$

$$\lim_{t\to a}[\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(t)] = \left(\lim_{t\to a}\vec{r}_1(t)\right)\times\left(\lim_{t\to a}\vec{r}_2(t)\right)$$

اوپر بیان کردہ تمام ضابطے $t \to \infty$ یا $t \to -\infty$ کے لیے بھی صحیح ہیں جب کہ تمام ایکسپریشنس(Expressions) میں معین لمٹ ہو۔

مثال 1- مان لیجیے کہ $\vec{r}_1(t) = 2t\hat{\imath} + 3t^2\hat{k}$ اور $\vec{r}_2(t) = e^t\hat{\imath} + (1-t)\hat{\jmath} - (5+e^t)\hat{k}$ تب دکھایے کہ

i. $\lim_{t\to1}[\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)] = \left(\lim\limits_{t\to1}\vec{r}_1(t)\right) \times \left(\lim\limits_{t\to1}\vec{r}_2(t)\right)$

ii. $\lim_{t\to1}[\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)] = \left(\lim\limits_{t\to1}\vec{r}_1(t)\right) \cdot \left(\lim\limits_{t\to1}\vec{r}_2(t)\right)$

iii. $\lim_{t\to1}[\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)] = \left(\lim\limits_{t\to1}\vec{r}_1(t)\right) + \left(\lim\limits_{t\to1}\vec{r}_2(t)\right)$

حل-

i. ہمیں دیا گیا ہے

$$\vec{r}_1(t) = 2t\hat{\imath} + 3t^2\hat{k}$$

اور

$$\vec{r}_2(t) = e^t\hat{\imath} + (1-t)\hat{\jmath} - (5+e^t)\hat{k}$$

$$\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2t & 0 & 3t^2 \\ e^t & (1-t) & -(5+e^t) \end{vmatrix}$$
$$= \left(0 - 3t^2(1-t)\right)\hat{\imath} - (-2t(5+e^t) - 3t^2e^t)\hat{\jmath} + (2t - 2t^2)\hat{k}$$
$$= (3t^3 - 3t^2)\hat{\imath} + (10t + 2te^t + 3t^2e^t)\hat{\jmath} + (2t - 2t^2)\hat{k}$$

اس لیے اس کی لمٹ ہم کچھ اس طرح سے حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\lim_{t\to1}[\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)] = \lim_{t\to1}(3t^3 - 3t^2)\hat{\imath} + \lim_{t\to1}(10t + 2te^t + 3t^2e^t)\hat{\jmath} + \lim_{t\to1}(2t - 2t^2)\hat{k}$$
$$= (-3+3)\hat{\imath} + (10 + 2e + 3e)\hat{\jmath} + (2-2)\hat{k}$$
$$= (10+5e)\hat{\jmath} \qquad \cdots(1)$$

اب ہم لمٹس کا کراس پروڈکٹ(Cross Product) نکالتے ہیں۔

$$\lim_{t\to1}\vec{r}_1(t) = \lim_{t\to1}\left(2t\hat{\imath} + 3t^2\hat{k}\right)$$
$$= \lim_{t\to1}(2t)\hat{\imath} + \lim_{t\to1}(3t^2)\hat{k}$$
$$= 2\hat{\imath} + 3\hat{k}$$

اور

$$\lim_{t\to1}\vec{r}_2(t) = \lim_{t\to1}\left[e^t\hat{\imath} + (1-t)\hat{\jmath} - (5+e^t)\hat{k}\right]$$
$$= \lim_{t\to1}(e^t)\hat{\imath} + \lim_{t\to1}(1-t)\hat{\jmath} - \lim_{t\to1}(5+e^t)\hat{k}$$
$$= e\hat{\imath} + (0)\hat{\jmath} - (5+e)\hat{k}$$
$$= e\hat{\imath} - (5+e)\hat{k}$$

$$\Rightarrow \left(\lim_{t\to1}\vec{r}_1(t)\right) \times \left(\lim_{t\to1}\vec{r}_2(t)\right) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 3 \\ e & 0 & -(5+e) \end{vmatrix}$$
$$= (0-0)\hat{\imath} - (-2(5+e) - 3e)\hat{\jmath} + (0-0)\hat{k}$$
$$= -(-10 - 2e - 3e)\hat{\jmath}$$
$$= (10+5e)\hat{\jmath} \qquad \cdots(2)$$

اس لیے (1) اور (2) سے ہمیں ملتا ہے کہ

$$\lim_{t\to 1}[\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(t)] = \left(\lim_{t\to 1}\vec{r}_1(t)\right)\times\left(\lim_{t\to 1}\vec{r}_2(t)\right)$$

ii. ہم نے اوپر دیکھا کہ

$$\lim_{t\to 1}\vec{r}_1(t) = 2\hat{\imath} + 3\hat{k}$$

اور

$$\lim_{t\to 1}\vec{r}_2(t) = e\hat{\imath} - (5+e)\hat{k}$$

اس لیے

$$\begin{aligned}\left(\lim_{t\to 1}\vec{r}_1(t)\right)\cdot\left(\lim_{t\to 1}\vec{r}_2(t)\right) &= \left(2\hat{\imath} + 3\hat{k}\right)\cdot\left(e\hat{\imath} - (5+e)\hat{k}\right)\\ &= 2e - 3(5+e)\\ &= -15 - e \qquad \cdots (3)\end{aligned}$$

اسی طرح سے

$$\begin{aligned}\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t) &= \left(2t\hat{\imath} + 3t^2\hat{k}\right)\cdot\left(e^t\hat{\imath} + (1-t)\hat{\jmath} - (5+e^t)\hat{k}\right)\\ &= 2te^t - 3t^2(5+e^t)\\ &= 2te^t - 15t^2 - 3t^2e^t\\ \Rightarrow \quad \lim_{t\to 1}[\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t)] &= \lim_{t\to 1}(2te^t - 15t^2 - 3t^2e^t)\\ &= 2e - 15 - 3e\\ &= -15 - e \qquad \cdots (4)\end{aligned}$$

(3) اور (4) سے ہمیں ملتا ہے

$$\lim_{t\to 1}[\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t)] = \left(\lim_{t\to 1}r_1(t)\right)\cdot\left(\lim_{t\to 1}\vec{r}_2(t)\right)$$

iii. ہمارے پاس دیا گیا ہے کہ

$$\vec{r}_1(t) = 2t\hat{\imath} + 3t^2\hat{k}$$

اور

$$\vec{r}_2(t) = e^t\hat{\imath} + (1-t)\hat{\jmath} - (5+e^t)\hat{k}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad \vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t) &= (2t+e^t)\hat{\imath} + (1-t)\hat{\jmath} + \left(3t^2 - (5+e^t)\right)\hat{k}\\ \Rightarrow \quad \lim_{t\to 1}[\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)] &= \left[\lim_{t\to 1}(2t+e^t)\right]\hat{\imath} + \left[\lim_{t\to 1}(1-t)\right]\hat{\jmath}\\ &\quad + \left[\lim_{t\to 1}\left(3t^2 - (5+e^t)\right)\right]\hat{k}\\ &= (2+e)\hat{\imath} + (1-1)\hat{\jmath} + \left(3 - (5+e)\right)\hat{k}\\ &= (2+e)\hat{\imath} - (2+e)\hat{k}\end{aligned}$$

اسی طرح سے

$$\begin{aligned}\left(\lim_{t\to 1}\vec{r}_1(t)\right) + \left(\lim_{t\to 1}\vec{r}_2(t)\right) &= \left(2\hat{\imath} + 3\hat{k}\right) + \{e\hat{\imath} - (5+e)\hat{k}\}\\ &= (2+e)\hat{\imath} + \{3 - (5+e)\}\hat{k}\\ &= (2+e)\hat{\imath} - (2+e)\hat{k}\end{aligned}$$

14.3.1 ویکٹر تفاعل کا تسلسل (Continuity of Vector Function)

کوئی بھی ویکٹر تفاعل $\vec{r}(t)$ کسی نقطہ t_0 پر مسلسل کہلاتا ہے اگر t_0 ویکٹر تفاعل r کے دامنہ میں ہو اور مندرجہ ذیل شرط بھی پوری ہوتی ہو۔

$$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$$

اس کا مطلب یہ ہوا کہ تفاعل r نقطہ t_0 پر مطعرف ہو $\vec{r}(t)$ کی لمٹ جب کہ $t \to t_0$ وجود رکھتی ہو اور $\vec{r}(t_0)$ اور $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)$ دونوں ایک دوسرے کے برابر ہو۔

ہم کہتے ہیں کہ کوئی تفاعل $\vec{r}(t)$ کسی وقفہ پر مسلسل ہے اگر یہ تفاعل اس وقفہ کے ہر ایک نقطہ پر مسلسل ہو جب کہ ہم یہ بات مان کر چل رہے ہیں کہ وقفہ کے آخری (End) نقطہ پر اوپر بیان کردہ دوطرفہ لمٹ کو ہم اس کے مطابق کی ایک طرفہ لمٹ سے تبدیل کر دیتے ہیں۔

یہاں سے ایک بات اور واضح ہوتی ہے کہ کوئی بھی ویکٹر تفاعل $\vec{r}(t)$ کسی نقطہ t_0 پر مسلسلہو گا اگر $\vec{r}(t)$ کے تمام اجزا تفاعل بھی اس نقطہ پر مسلسل ہو۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ

$$\vec{r}(t) = f(t)\hat{\imath} + g(t)\hat{\jmath} + h(t)\hat{k}$$

کسی نقطہ t_0 پر مسلسلہو گا جب کہ t_0 اجزا تفاعل $f(t)$، $g(t)$، $h(t)$ کے دامنہ میں ہو اور

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = f(t_0),$$
$$\lim_{t\to t_0} g(t) = g(t_0),$$
$$\lim_{t\to t_0} h(t) = h(t_0)$$

مثال: بتایے کہ t کی کس قیمت کے لیے

$$\vec{r}(t) = \cos t\,\hat{\imath} + (1-t^2)\hat{\jmath} + \log t\,\hat{k}$$

ایک مسلسل تفاعل ہے۔

حل- ہم جانتے ہیں کہ ویکٹر تفاعل $\vec{r}(t)$ مسلسل ہوتا ہے اگر اس کے اجزا تفاعلات مسلسل ہوتے ہیں اس کا مطلب یہ ہوا کہ

$$h(t) = \log t \text{ ،} g(t) = (1-t^2)\text{ ،} f(t) = \cos t$$

اگر مسلسل ہوں گے تو $\vec{r}(t)$ بھی مسلسل ہو گا۔

ہم نے دیکھا کہ t کی تمام قیمتوں کے لیے تفاعل f مسلسل ہوتا ہے اس کے علاوہ $g(t) = (1-t^2)$ مسلسل ہو گا جب $1-t^2 \neq 0$، جس کا مطلب یہ ہوا کہ $t^2 \neq \pm 1$؛ آخر میں ہم دیکھتے ہیں کہ تمام $t > 0$ کے لیے $h(t) = \log t$ بھی مسلسل ہوتا ہے، اس لیے تفاعل r مسلسل ہو گا ان تمام t کی قیمتوں کے لیے جہاں پر t ایک مثبت (Positive) نمبر ہو اور $t^2 \neq \pm 1$

14.4 ویکٹر قدری تفاعل کا مشتق(Derivative of Vector Valued Function)

جس طرح سے ہم کسی حقیقی قدری تفاعل کے مشتق کو لمٹ کی مدد سے نکالتے ہیں ٹھیک اسی طرح سے ہم حقیقی ویکٹر قدری تفاعل کے مشتق کو لمٹ کی مدد سے لکھتے ہیں۔

تعریف: اگر $\vec{r}(t)$ کوئی ویکٹر قدری تفاعل ہے، تب ہم r کا مشتق بلحاظ t کسی ویکٹر قدری تفاعل $\vec{r}'(t)$ سے نکالتے ہیں جس کو ہم کچھ اس طرح سے لکھتے ہیں

$$\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

جہاں پر بھی یہ لمٹ جو اوپر بیان کی گئی ہے وہ وجود رکھتی ہو۔

نوٹ:

1) ہمیں یاد رکھنا چاہیے کہ کسی تفاعل $\vec{r}(t)$ کو ہم t پر تفرق پزیر(Differentiable) کہتے ہیں اگر اوپر بیان کردہ لمٹ وجود رکھے۔

2) کسی تفاعل $\vec{r}(t)$ کے مشتق کو مختلف قسم سے لکھ سکتے ہیں $r', \vec{r}'(t), \frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d}{dt}[\vec{r}(t)]$

3) کس نقطہ $t = t_0$ پر کوئی ویکٹر تفاعل r کو تفرق پزیر کہتے ہیں اگر t_0 پر $\vec{r}'(t)$ متعرف ہے۔

4) ہم نے دیکھا کہ $\vec{r}'(t)$ بھی ایک ویکٹر تفاعل ہے اس کا مطلب یہ ہے کہ t کی تمام قیمتوں کے لیے $\vec{r}'(t)$ کا میزانیہ(Magnitude) بھی ہو گا اور جہت(Direction) بھی سوائے $\vec{r}'(t) = 0$ کے لیے جہاں پر $\vec{r}'(t)$ کا میزانیہ صفر ہو گا اور اس کا کوئی بھی ایک جہت نہیں ہو گی۔

5) کیوں کہ ہم کسی بھی ویکٹر قدری تفاعل کی لمٹ component wise نکالتے ہیں اور مشتق کو ہم لمٹس کی مدد سے پڑھتے ہیں اس لیے یہ اچھا رہے گا اگر ہم مشتق کو اجزا تفاعل کی شکل میں پڑھیں۔ اس کو ہم مندرجہ قضیہ کی مدد سے دیکھتے ہیں۔

قضیہ: اگر $\vec{r}(t)$ کوئی ویکٹر قدری تفاعل ہو تب r کسی t پر تفرق پزیر صرف اور صرف تب ہو گا جب r کا ہر ایک اجزا تفاعل بھی t پر تفرق پزیر ہو اس کے علاوہ $\vec{r}'(t)$ کے جو اجزا تفاعل ہوں گے وہ $\vec{r}(t)$ کے متناظر اجزا تفاعل Derives ہوں گے۔

اس کا مطلب یہ ہوا کہ اگر $\vec{r}(t) = f(t)\hat{\imath} + g(t)\hat{\jmath} + h(t)\hat{k}$ ایک ویکٹر قدری تفاعل ہے تب $\vec{r}(t)$ تفرق پزیر ہو گا اگر f، g، h تفرق پزیر ہوں اور

$$\vec{r}'(t) = f'(t)\hat{\imath} + g'(t)\hat{\jmath} + h'(t)\hat{k}$$

ثبوت: ہم مشتق کی تعریف کا استعمال کر کے اس قضیہ کو ثابت کریں گے۔ مان لیجیے کہ

$$\vec{r}(t) = f(t)\hat{\imath} + g(t)\hat{\jmath} + h(t)\hat{k}$$

تب

$$\begin{aligned}\vec{r}'(t) &= \lim_{M\to 0}\frac{r(t+M)-r(t)}{M}\\ &= \lim_{M\to 0}\frac{\left[f(t+M)\hat{\imath}+g(t+M)\hat{\jmath}+h(t+M)\hat{k}\right]-\left[f(t)\hat{\imath}+g(t)\hat{\jmath}+h(t)\hat{k}\right]}{M}\\ &= \left[\lim_{M\to 0}\frac{f(t+M)-f(t)}{M}\right]\hat{\imath}+\left[\lim_{M\to 0}\frac{g(t+M)-g(t)}{M}\right]\hat{\jmath}+\left[\lim_{M\to 0}\frac{h(t+M)-h(t)}{M}\right]\hat{k}\\ &= f'(t)\hat{\imath}+g'(t)\hat{\jmath}+h'(t)\hat{k}\end{aligned}$$

مثال1- مانا کہ $\vec{r}(t) = 2t^3\hat{\imath} + 3e^t\hat{\jmath} - 4\cos(\pi t)\,\hat{k}$ ہے تب

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\vec{r}(t)] = \vec{r}'(t) &= \frac{d}{dt}(2t^3)\hat{\imath} + \frac{d}{dt}(3e^t)\hat{\jmath} - \frac{d}{dt}\{4\cos(\pi t)\}\hat{k}\\ &= 6t^2\hat{\imath} + 3e^t\hat{\jmath} + 4\pi\sin(\pi t)\,\hat{k}\end{aligned}$$

مثال2- اگر $\vec{r}(t) = 3t\hat{\imath} - 15\sin(\pi t)\,\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ ہو تب $\vec{r}'(1)$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل- دیا گیا ہے

$$\vec{r}(t) = 3t\hat{\imath} - 15\sin(\pi t)\,\hat{\jmath} + 3\hat{k}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{r}'(t) = 3\hat{\imath} - 15\pi\, cos(\pi t)\,\hat{\jmath}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{r}'(1) = 3\hat{\imath} - 15\pi\hat{\jmath}$$

مثال3- اگر $\vec{r}(t) = 2|t|\hat{\imath} + \sin(t)\,\hat{\jmath} + (3-t)\hat{k}$ ہے تو بتائیے کہ t کی کن قیمتوں کے لیے $\vec{r}(t)$ تفرق پزیر ہے؟

حل- ہم جانتے ہیں کہ $\vec{r}(t)$ ان تمام t کی قیمتوں کے لیے تفرق پزیر ہے جنکے لیے $\vec{r}(t)$ کے اجزا تفاعل تفرق پزیر ہوں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ $|t|$ تمام t کی قیمتوں کے لیے تفرق پزیر ہے سوائے $t = 0$ کے اس طرح سے $\sin(t)$ اور $3 - t$ تمام t کی قیمتوں کے لیے تفرق پزیر ہے۔اس لیے $\vec{r}(t)$ تمام t کی قیمتوں کے لیے تفرق پزیر ہیں سوائے $t = 0$ کے۔

مثال4- $\vec{r}(t) = 5t^2\hat{\imath} + 3e^t\hat{\jmath} + (t^3 + 2t)\hat{k}$ کے لیے $\vec{r}'(1)$ کی قیمت بتائیے۔

حل- دیا ہے

$$\vec{r}(t) = 5t^2\hat{\imath} + 3e^t\hat{\jmath} + (t^2 + 2t)\hat{k}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{r}'(t) = 10t\hat{\imath} + 3e^t\hat{\jmath} + (3t^2 + 2)\hat{k}$$

ہم t کی الگ الگ قدر کے لیے بھی $\vec{r}'$ کو معلوم کر سکتے ہیں۔ جیسے

$$\vec{r}'(0) = 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$$

$$\vec{r}'(1) = 10\hat{\imath} + 3e\hat{\jmath} + 5\hat{k}$$

قضیہ:(مشتق کے اصول) اگر $\vec{r}_1(t)$ اور $\vec{r}_2(t)$ ویکٹر تفاعل ہوں اور f کوئی اسکیلر (میزانی) تفاعل ہو اور $\vec{r}_1(t)$، $\vec{r}_2(t)$ اور f تینوں تفاعل t پر تفرق پزیر ہوں اور α اور β کوئی کونسٹینٹ ہوں تب مندرجہ ذیل اصول بنتے ہیں:

i. $\frac{d}{dt}[\alpha] = 0$

ii. $\frac{d}{dt}[\alpha\vec{r}_1(t)] = \alpha\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)]$

iii. $\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)] = \frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)] + \frac{d}{dt}[\vec{r}_2(t)]$

iv. $\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)] = \frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)] - \frac{d}{dt}[\vec{r}_2(t)]$

$$\frac{d}{dt}[\alpha\vec{r}_1(t) + \beta\vec{r}_2(t)] = \alpha\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)] + \beta\frac{d}{dt}[\vec{r}_2(t)] \qquad \text{.v}$$

$$\frac{d}{dt}[f(t)\vec{r}_1(t)] = f(t)\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)] + \frac{d}{dt}[f(t)]\vec{r}_1(t) \qquad \text{.vi}$$

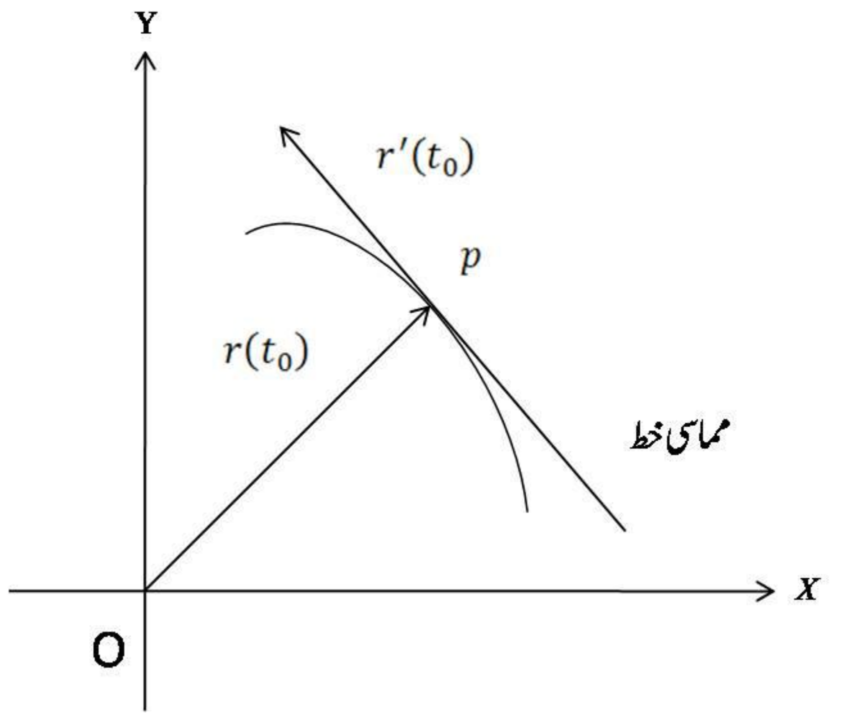
$$\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)] = \frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)] \times \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \times \frac{d}{dt}[\vec{r}_2(t)] \qquad \text{.vii}$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}_1 f(t)] = \frac{d}{dt}[f(t)]\frac{d\vec{r}_1}{dt}\big(f(t)\big) \qquad \text{.viii}$$

14.4.1 مماسی ویکٹر (Tangent Vector)

مان لیجیے کہ $\vec{r}(t)$ کوئی ویکٹر قدری تفاعل ہے اور p اس تفاعل $\vec{r}(t)$ کے گراف پر کوئی نقطہ ہے اور یہ بھی مان لیتے ہیں کہ $\vec{r}(t_0)$ مبدا سے اس نقطہ p پر کوئی ریڈیس ویکٹر (Radius Vector) ہے اگر $\frac{d}{dt}[\vec{r}(t_0)]$ کچھ اس طرح سے وجود رکھے کہ $\frac{d}{dt}[\vec{r}(t_0)] \neq 0$ تب ہم $\vec{r}'(t_0)$ کو $\vec{r}(t)$ کے گراف پر مماس ویکٹر کہتے ہیں اور ایسا کوئی خط جو نقطہ p سے گزرتی ہو اور $\vec{r}'(t_0)$ کے متوازی (Parallel) ہو مماسی خط کہلاتا ہے۔ اس بیان کردہ بات کو ہم کچھ اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں۔

اگر $\vec{r}(t)$ کسی نقطہ t_0 پر تفرق پزیر ہو اور $\vec{r}'(t_0) \neq 0$ تب $\vec{r}'(t_0)$ اس تفاعل $\vec{r}(t)$ کے گراف کے لئے کسی نقطہ $t = t_0$ پر مماس ویکٹر ہو گا۔



اگر $\vec{r}(t_0) = r_0$ اور $\vec{r}'(t_0) = v_0$ ہو تب $\vec{r}(t)$ کے گراف کے لیے r_0 پر ہم مماسی خط کچھ اس طرح سے لکھتے ہیں۔

$$\vec{r} = r_0 + tv_0$$

مثال1 - اگر $\vec{r}(t) = e^{3t}\hat{\imath} + (t^3 - 2t)\hat{\jmath} + (\log t)\hat{k}$ ایک ویکٹر قدری تفاعل ہو تب نقطہ p_0 پر (i) مماس ویکٹر اور (ii) مماسی خط کی مساوات نکالیے جب کہ $t = 0.2$

حل - مان لیتے ہیں کہ $\vec{r}(t) = e^{3t}\hat{\imath} + (t^3 - 2t)\hat{\jmath} + (\log t)\hat{k}$

$$\Rightarrow \qquad \vec{r}\,'(t) = \frac{d}{dt}[\vec{r}(t)] = \frac{d}{dt}\left[e^{3t}\hat{\imath} + (t^3 - 2t)\hat{\jmath} + (\log t)\hat{k}\right]$$
$$= 3e^{3t}\hat{\imath} + (3t^2 - 2)\hat{\jmath} + \left(\frac{1}{t}\right)\hat{k}$$

(i) اس لیے نقطہ p_0 پر جہاں $t = 0.2$ ہو مماس ویکٹر ہو گا

$$\vec{r}\,'(0.2) = 3e^{0.6}\hat{\imath} + (-1.88)\hat{\jmath} + 5\hat{k}$$

(ii) $\vec{r}(t)$ کے گراف کے لیے نقطہ p_0 پر جو مماسی خط ہو گا وہ اصل میں وہ خط ہو گا جو نقطہ p_0 سے گزر یگی اور $\vec{r}(0.2)$ کے متوازی ہو گی۔ اس لیے

$$\vec{r}(0.2) = e^{3(0.2)}\hat{\imath} + \left((0.2)^3 - 2(0.2)\right)\hat{\jmath} + (\log(0.2))\hat{k}$$
$$= e^{0.6}\hat{\imath} + (-3.92)\hat{\jmath} + (\log(0.2))\hat{k}$$

اور مماس نقطہ $(e^{0.6}, -3.92, \log(0.2))$ ہو گا اس لیے مماسی خط کی پیرامٹرک مساوات ہو گی

$$x = e^{0.6} + 3e^{0.6}t, y = -3.92 - 1.88t, z = \log(0.2) + 5t$$

مثال2 - اگر $x = \cos t\,, y = \sin t\,, z = t$ ہو تو مماسی خط کی پیرامٹرک مساوات نکالیے جہاں پر $t = t_0$ اور اس کی مدد سے $t = \pi$ پر بھی نکالیے۔

حل - ہمیں دیا گیا ہے

$$x = \cos t\,, y = \sin t\,, z = t$$

جس کو ہم کچھ اس طرح سے ویکٹر کی شکل میں لکھتے ہیں

$$\vec{r}(t) = \cos t\,\hat{\imath} + \sin t\,\hat{\jmath} + t\hat{k}$$
$$\Rightarrow \qquad \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 = \cos t_0\,\hat{\imath} + \sin t_0\,\hat{\jmath} + t_0\hat{k}$$
$$\Rightarrow \qquad \vec{r}\,'(t_0) = -\sin t_0\,\hat{\imath} + \cos t_0\,\hat{\jmath} + \hat{k}$$
$$\Rightarrow \qquad \vec{v}_0 = -\sin t_0\,\hat{\imath} + \cos t_0\,\hat{\jmath} + \hat{k}$$

اس سے ہمیں یہ معلوم ہوتا ہے کہ $t = t_0$ پر مماسی خط کی ویکٹر مساوات کو ہم کچھ اس طرح سے لکھ سکتے ہیں

$$\vec{r} = \cos t_0\,\hat{\imath} + \sin t_0\,\hat{\jmath} + t_0\hat{k} + t\left(-\sin t_0\,\hat{\imath} + \cos t_0\,\hat{\jmath} + \hat{k}\right)$$
$$= (\cos t_0 - t\sin t_0)\hat{\imath} + (\sin t_0 + t\cos t_0)\hat{\jmath} + (t_0 + t)\hat{k}$$

اس لیے $t = t_0$ پر مماسی خط کی پیرامٹرک مساوات کو ہم اس طرح سے لکھ سکتے ہیں

$$x = \cos t_0 - t\sin t_0,$$
$$y = \sin t_0 + t\cos t_0,$$
$$z = t_0 + t$$

اور $t_0 = \pi$ پر مماسی خط کو ہم کچھ اس طرح سے لکھ سکتے ہیں

$$x = -1, y = -t\,, z = \pi + t$$

مثال3- اگر $\vec{r}_1(t) = \tan^{-1} t\,\hat{\imath} + (\cos t)\hat{\jmath} + t^3\hat{k}$ اور $\vec{r}_2(t) = (t^3 - 1)\hat{\imath} + 3t\,\hat{\jmath} + (\sin t)\hat{k}$ ہو تب $t = 0$ پر مماسی خط اور مماس ویکٹر کو معلوم کیجیے۔

حل- دیا گیا ہے

$$\vec{r}_1(t) = \tan^{-1} t\,\hat{\imath} + (\cos t)\hat{\jmath} + t^3\hat{k}$$

اور

$$\vec{r}_2(t) = (t^3 - 1)\hat{\imath} + 3t\,\hat{\jmath} + (\sin t)\hat{k}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{r}_1{}'(t) = \frac{1}{1+t^2}\hat{\imath} + (\sin t)\hat{\jmath} + 3t^2\hat{k}$$

اور

$$\vec{r}_2{}'(t) = 3t^2\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath} + (\cos t)\hat{k}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{r}_1{}'(0) = 1\cdot\hat{\imath} + 0\cdot\,\hat{\jmath} + 0\cdot\hat{k}$$

اور

$$\vec{r}_2{}'(0) = 0\cdot\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath} + 1\cdot\hat{k}$$

اس طرح سے

$$\vec{r}_1(0) = \tan^{-1} 0\cdot\hat{\imath} + 1\,\hat{\jmath} + 0\cdot\hat{k}$$

اور

$$\vec{r}_2(0) = 1\cdot\hat{\imath} + 0\cdot\,\hat{\jmath} + 0\cdot\hat{k}$$

اب اس سوال میں صرف مماسی خط اور مماس ویکٹر لکھنا باقی رہ گیا جو ہم آپ کے لیے مشق کے طور پر چھوڑتے ہیں۔

14.4.2 ہموار منحنی(Smooth Curve)

اگر $\vec{r}(t)$ کوئی ویکٹر تفاعل ہے تب کسی وقفہ I پر تفاعل $\vec{r}(t)$ ہموار ہو گا ان تمام t کی قیمتوں کے لیے جہاں r' مسلسل ہو اور $\vec{r}'(t) \neq 0$ اس طرح سے گراف کسی وقفہ پر ٹکڑوں کے اعتبار سے ہموار(Piecewise Smooth) کہلاتا ہے اگر ہم اس وقفہ کو معین نمبر(Finite Number) اوف تحت وقفہ(Sub Interval) لکھ سکیں جہاں پر تمام تحت وقفہ میں $\vec{r}(t)$ ہموار ہو۔

مثال- بتائے کہ کیا $\vec{r}(t) = (t^4 + 1)\hat{\imath} + \sin t\,\hat{\jmath} + e^{-t}\hat{k}$ تمام t کے لیے ہموار ہے۔

حل- ہمیں دیا گیا ہے

$$\vec{r}(t) = (t^4 + 1)\hat{\imath} + \sin t\,\hat{\jmath} + e^{-t}\hat{k}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{r}'(t) = 4t^3\hat{\imath} + \cos t\,\hat{\jmath} - e^{-t}\hat{k}$$

جس سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ $\vec{r}'(t)$ تمام t کے لیے مسلسل ہے اور

$$\vec{r}'(0) = 0\cdot\hat{\imath} + 1\cdot\,\hat{\jmath} - 1\cdot\hat{k} \neq 0$$

اس لیے گراف تمام t کے لیے ہموار نہیں ہے لیکن یہ اس وقفہ پر جس میں $t = 0$ نہ ہو، ہموار ہو گا۔

نوٹ: کوئی گراف کسی وقفہ پر ہموار نہیں ہو گا اگر اس وقفہ میں کوئی ایسا نقطہ ہو جس پر جہت (Direction) بدل جائے۔ ایک بات اور یاد رکھنی چاہیے کہ اگر کوئی تفاعل ہموار نہیں ہے تو یہ ضروری نہیں کہ وہ اس وقفہ پر ٹکڑوں کے اعتبار سے بھی ہموار (Piecewise Smooth) نہیں ہو گا۔

14.4.3 اعلا رتبہ مشتق (Higher Order Derivatives)

اگر $\vec{r}(t) = f(t)\hat{\imath} + g(t)\hat{\jmath} + h(t)\hat{k}$ ایک ویکٹر تفاعل ہے تب ہم $\vec{r}(t)$ کا اعلا رتبہ مشتق (Higher Order Derivatives) اس تفاعل $\vec{r}(t)$ کے اجزا تفاعل کے متواتر مشتق (Successive Derivative) نکال سکتے ہیں۔ اس کا مطلب $\vec{r}(t)$ کا اگر ہمیں اعلا مشتق نکالنا ہے تو $f(t)$، $g(t)$، $h(t)$ کو تفرق کرتے ہیں تو اگر $\vec{r}(t) = f(t)\hat{\imath} + g(t)\hat{\jmath} + h(t)\hat{k}$ کا دوسرا مشتق نکالنا ہے تو

$$\vec{r}''(t) = \left(\vec{r}'(t)\right)' = f''(t)\hat{\imath} + g''(t)\hat{\jmath} + h''(t)\hat{k}$$

اور اسی طرح تیسرے مشتق کو لکھتے ہیں

$$\vec{r}'''(t) = f'''(t)\hat{\imath} + g'''(t)\hat{\jmath} + h'''(t)\hat{k}$$

اس طرح سے دیگر مشتقات کو لکھ سکتے ہیں۔ ہم اعلا مشتقات کو کچھ اس طرح سے بھی لکھ سکتے ہیں

$$\frac{d^2}{dt^2}[\vec{r}(t)], \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \vec{r}''(t), \vec{r}''$$

$\frac{d^3}{dt^3}[\vec{r}(t)], \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}, \vec{r}'''(t), \vec{r}'''$ وغیرہ۔

مثال 1- اگر $\vec{r}(t) = e^{3t}\hat{\imath} + (t^3 - t^2)\hat{\jmath} + \cos 3t\,\hat{k}$ ہو تو $\vec{r}'(t)$، $\vec{r}''(t)$ اور $\vec{r}'''(t)$ نکالیے۔ اس کے علاوہ $t = 0$، $t = 1$ اور $t = 2$ پر بھی ان سب کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

حل- دیا گیا ہے کہ

$$\vec{r}(t) = e^{3t}\hat{\imath} + (t^3 - t^2)\hat{\jmath} + \cos 3t\,\hat{k}$$
$$\Rightarrow \quad \vec{r}'(t) = 3e^{3t}\hat{\imath} + (3t^2 - 2t)\hat{\jmath} - 3\sin 3t\,\hat{k}$$
$$\Rightarrow \quad \vec{r}''(t) = 9e^{3t}\hat{\imath} + (6t - 2)\hat{\jmath} - 9\cos 3t\,\hat{k}$$
$$\Rightarrow \quad \vec{r}'''(t) = 27e^{3t}\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} + 27\sin 3t\,\hat{k}$$

$t = 0$ پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\vec{r}'(0) = 3e^{0}\hat{\imath} + 0\cdot\hat{\jmath} - 0\cdot\hat{k} = 3\hat{\imath}$$
$$\Rightarrow \quad \vec{r}''(0) = 9e^{0}\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - 9\hat{k} = 9\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - 9\hat{k}$$
$$\Rightarrow \quad \vec{r}'''(0) = 27e^{0}\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} = 27\hat{\imath} + 6\hat{\jmath}$$

$t = 1$ پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\vec{r}'(1) = 3e^{3}\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\sin 3\,\hat{k}$$
$$\Rightarrow \quad \vec{r}''(1) = 9e^{3}\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 9\cos 3\,\hat{k}$$
$$\Rightarrow \quad \vec{r}'''(1) = 27e^{3}\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} + 27\sin 3\,\hat{k}$$

$t = 2$ پر بھی ہم اسی طرح سے نکال سکتے ہیں۔

مثال2- اگر $\vec{r}_1(t) = 2\hat{\imath} + t\,\hat{\jmath} + t^3\hat{k}$ اور $\vec{r}_2(t) = t^2\hat{\imath} + e^t\hat{\jmath} + 5\hat{k}$ ہو تب مندرجہ کی قدر معلوم کیجیے:

(i) $(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)'(t)$

(ii) $(\vec{r}_1{}' \times \vec{r}_2)(t)$

(iii) $(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2{}')(t)$

اس کے علاوہ یہ بھی دیکھیے کہ $(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)'(t) = (\vec{r}_1{}' \times \vec{r}_2)(t) + (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2{}')(t)$ یا نہیں؟

حل- ہمیں دیا گیا ہے

$$\vec{r}_1(t) = 2\hat{\imath} + t\,\hat{\jmath} + t^3\hat{k}$$

اور

$$\vec{r}_2(t) = t^2\hat{\imath} + e^t\hat{\jmath} + 5\hat{k}$$

$$(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)(t) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & t & t^3 \\ t^2 & e^t & 5 \end{vmatrix}$$
$$= (5t - t^3e^t)\hat{\imath} - (10 - t^5)\hat{\jmath} + (2e^t - t^3)\hat{k}$$

$$\Rightarrow \quad (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)'(t) = (5 - 3t^2e^t - t^3e^t)\hat{\imath} + 5t^4\hat{\jmath} + (2e^t - 3t^2)\hat{k} \quad \text{.........(1)}$$

اب ہم $\vec{r}_1{}'$ اور $\vec{r}_2{}'$ نکالتے ہیں

$$\vec{r}_1{}'(t) = \hat{\jmath} + 3t^2\hat{k}$$

اور

$$\vec{r}_2{}'(t) = 2t\hat{\imath} + e^t\hat{\jmath}$$

اس لیے

$$(\vec{r}_1{}' \times \vec{r}_2)(t) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 3t^2 \\ t^2 & e^t & 5 \end{vmatrix}$$
$$= (5 - 3t^2e^t)\hat{\imath} - (0 - 3t^4)\hat{\jmath} + (-t^2)\hat{k}$$
$$= (5 - 3t^2e^t)\hat{\imath} + 3t^4\hat{\jmath} - t^2\hat{k}$$

اور

$$(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2{}')(t) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & t & t^3 \\ 2t & e^t & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (-t^3e^t)\hat{\imath} - (-2t^4)\hat{\jmath} + (2e^t - 2t^2)\hat{k}$$
$$= -t^3e^t\hat{\imath} + 2t^4\hat{\jmath} + 2(e^t - t^2)\hat{k}$$

اب ہم دیکھتے ہیں کہ

$$(\vec{r}_1{}' \times \vec{r}_2)(t) + (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2{}')(t) = \left((5 - 3t^2e^t)\hat{\imath} + 3t^4\hat{\jmath} - t^2\hat{k}\right) + \left((-t^3e^t)\hat{\imath} - (-2t^4)\hat{\jmath} + (2e^t - 2t^2)\hat{k}\right)$$
$$= (5 - 3t^2e^t - t^3e^t)\hat{\imath} + 5t^4\hat{\jmath} + (2e^t - 3t^2)\hat{k} \quad \text{.........................(2)}$$

مساوات (1) اور (2) سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

$$(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)'(t) = (\vec{r}_1{}' \times \vec{r}_2)(t) + (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2{}')(t)$$

مثال3- مان لیتے ہیں کہ $\vec{r}_1(t) = 3\hat{\imath} + 2e^t\hat{\jmath} + t^3\hat{k}$ اور $\vec{r}_2(t) = 5t^2\hat{\imath} + 2e^{-t}\hat{\jmath} - 3t\hat{k}$ ہو تب مندرجہ کی قدر معلوم کیجیے:

(i) $\left(3\vec{r}_1(t) + t^2\vec{r}_2(t)\right)'$

(ii) $\left(\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)\right)'$

(iii) $\left(\vec{r}_1(t) - 2t\vec{r}_2(t)\right)'$

حل- ہمیں دیا گیا ہے کہ

$$\vec{r}_1(t) = 3\hat{\imath} + 2e^t\hat{\jmath} + t^3\hat{k}$$

اور

$$\vec{r}_2(t) = 5t^2\hat{\imath} + 2e^{-t}\hat{\jmath} - 3t\hat{k}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_1{}'(t) = 0 \cdot \hat{\imath} + 2e^t\hat{\jmath} + 3t^2\hat{k}$$

اور

$$\vec{r}_2{}'(t) = 10t\hat{\imath} - 2e^{-t}\hat{\jmath} - 3\hat{k}$$

(i) اب

$$\Rightarrow \quad 3\vec{r}_1(t) = 9\hat{\imath} + 6e^t\hat{\jmath} + 3t^3\hat{k}$$

اور

$$t^2\vec{r}_2(t) = 5t^4\hat{\imath} + 2t^2e^{-t}\hat{\jmath} - 3t^3\hat{k}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 3\vec{r}_1(t) + t^2\vec{r}_2(t) &= \left(9\hat{\imath} + 6e^t\hat{\jmath} + 3t^3\hat{k}\right) + \left(5t^4\hat{\imath} + 2t^2e^{-t}\hat{\jmath} - 3t^3\hat{k}\right) \\
&= (9 + 5t^4)\hat{\imath} + (6e^t + 2t^2e^{-t})\hat{\jmath} + (3t^3 - 3t^3)\hat{k} \\
&= (9 + 5t^4)\hat{\imath} + (6e^t + 2t^2e^{-t})\hat{\jmath} \\
\left(3\vec{r}_1(t) + t^2\vec{r}_2(t)\right)' &= 20t^3\hat{\imath} + (6e^t + 4te^{-t} - 2t^2e^{-t})\hat{\jmath}
\end{aligned}$$

(ii) ہم جانتے ہیں کہ

$$\begin{aligned}
\left(\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)\right)' &= \vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2{}'(t) + \vec{r}_1{}'(t) \cdot \vec{r}_2(t) \\
&= \left(3\hat{\imath} + 2e^t\hat{\jmath} + t^3\hat{k}\right) \cdot \left(10t\hat{\imath} - 2e^{-t}\hat{\jmath} - 3\hat{k}\right) + \left(0 \cdot \hat{\imath} + 2e^t\hat{\jmath} + 3t^2\hat{k}\right) \cdot \left(5t^2\hat{\imath} + 2e^{-t}\hat{\jmath} - 3t\hat{k}\right) \\
&= (30t - 4 - 3t^3) + (0 + 4 - 9t^3) \\
&= 30t - 12t^3
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\vec{r}_1(t) - 2t\vec{r}_2(t) &= \left(3\hat{\imath} + 2e^t\hat{\jmath} + t^3\hat{k}\right) - 2t\left(5t^2\hat{\imath} + 2e^{-t}\hat{\jmath} - 3t\hat{k}\right) \\
&= \left(3\hat{\imath} + 2e^t\hat{\jmath} + t^3\hat{k}\right) - \left(10t^3\hat{\imath} + 4te^{-t}\hat{\jmath} - 6t^2\hat{k}\right) \\
&= (3 - 10t^3)\hat{\imath} + (2e^t - 4te^{-t})\hat{\jmath} + (t^3 + 6t^2)\hat{k} \\
\left(\vec{r}_1(t) - 2t\vec{r}_2(t)\right)' &= -30t^2\hat{\imath} + (2e^t + 4te^{-t} - 4e^{-t})\hat{\jmath} + (3t^2 + 12t)\hat{k}
\end{aligned}$$

14.4.4 ویکٹر تفاعل کی عمودیات (Orthogonality of Vector Function)

قضیہ: اگر $\vec{r}(t)$ کوئی ویکٹر قدری تفاعل ہے جو تفرق پزیر بھی ہے اور اس کی لمبائی $\|\vec{r}(t)\|$ تمام t کے لیے اختیاری مستقل ہو تب $\vec{r}(t)$ اور اس کا مشتق $\vec{r}'(t)$ ایک دوسرے کے عمودی ہوں گے اس کا مطلب یہ ہوا کہ

$$\vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t) = 0$$

تب $\vec{r}(t)$ اور $\vec{r}'(t)$ ایک دوسرے کے عمودی ہوں گے۔

ثبوت: ہمیں دیا گیا ہے کہ $\vec{r}(t)$ کوئی ویکٹر قدری تفاعل ہے اور اس کی لمبائی تمام t کے لیے اختیاری مستقل ہے

$$\|\vec{r}(t)\| = r$$

جہاں r کوئی اختیاری مستقل ہے۔

اگر ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ r اور r' عمودی ہیں تو ہمیں دکھانا ہے کہ تمام t کے لیے

$$\vec{r}(t)\cdot\vec{r}'(t) = 0$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$\begin{aligned}
& r = \|\vec{r}(t)\| \\
\Rightarrow\quad & r^2 = \|\vec{r}(t)\|^2 \\
& \quad = \vec{r}(t)\cdot\vec{r}(t), \forall\, t \\
\Rightarrow\quad & (r^2)' = \left(\vec{r}(t)\cdot\vec{r}(t)\right)', \forall\, t \\
\Rightarrow\quad & 0 = \vec{r}'(t)\cdot\vec{r}(t) + \vec{r}(t)\cdot\vec{r}'(t), \forall\, t \\
\Rightarrow\quad & 0 = 2\vec{r}(t)\cdot\vec{r}'(t), \forall\, t \\
\Rightarrow\quad & 0 = \vec{r}(t)\cdot\vec{r}'(t), \forall\, t
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$ $\vec{r}(t)$ اور $\vec{r}'(t)$ عمودی ہیں۔

14.4.5 ویکٹر گردش (Vector Motion)

ہم جانتے ہیں کہ کسی چیز کا مقام (Position) کا مشتق ہمیں رفتار (Velocity) دیگا اگر ہم بہ لحاظ وقت تفرق کریں گے اور رفتار سے ہمیں اسراع (Acceleration) ملتا ہے۔ اب ہم یہ سب ویکٹر تفاعل کے لیے استعمال کرتے ہیں۔

مان لیتے ہیں کسی چیز کا مقام کسی وقت t پر ہم ویکٹر تفاعل $\vec{F}(t)$ سے لکھتے ہیں تب ہم مندرجہ کچھ اس طرح سے لکھتے ہیں۔

$$v = \frac{d\vec{F}}{dt}$$

$$s = \left\|\frac{d\vec{F}}{dt}\right\|$$

$$\text{گردش کی جہت} = \frac{\frac{d\vec{F}}{dt}}{\left\|\frac{d\vec{F}}{dt}\right\|}$$

$$(\text{اسراع})\vec{a} = \frac{d^2\vec{F}}{dt^2}$$

مان لیتے ہیں کہ ہم مقام ویکٹر کو کچھ اس طرح سے لکھتے ہیں

$$\vec{r}(t) = f(t)\hat{\imath} + g(t)\hat{\jmath} + h(t)\hat{k}$$

تب

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = f'(t)\hat{\imath} + g'(t)\hat{\jmath} + h'(t)\hat{k}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = f''(t)\hat{\imath} + g''(t)\hat{\jmath} + h''(t)\hat{k}$$

مثال- کسی ذرے کا وقت t پر مقام مندرجہ ویکٹر سے ظاہر کرتے ہیں

$$\vec{r}(t) = 3\sin t\,\hat{\imath} + (t^2-1)\hat{\jmath} + 3t^3\hat{k}$$

اس پر $t=0$، $t=1$ اور $t=2$ کے لیے رفتار(Velocity) چال (Speed) اور اسراع نکالیے اور جہت کے بارے میں بھی بحث کیجیے۔

حل- ہمیں دیا گیا ہے

$$\vec{r}(t) = 3\sin t\,\hat{\imath} + (t^2-1)\hat{\jmath} + 3t^3\hat{k}$$
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 3\cos t\,\hat{\imath} + 2t\,\hat{\jmath} + 9t^2\hat{k}$$
$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -3\sin t\,\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 18t\hat{k}$$

اگر ہم وقت t کی الگ-الگ قدر پر دیکھیں تو ہمیں ملتا ہے۔

$t=0$ پر

$$\vec{v}(0) = \frac{dr}{dt} = 3\hat{\imath} + 0\cdot\hat{\jmath} + 0\cdot\hat{k} = 3\hat{\imath}$$
$$\vec{a}(0) = \frac{d^2r}{dt^2} = 0\cdot\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 0\cdot\hat{k} = 2\hat{\jmath}$$

$t=1$ پر

$$\vec{v}(1) = \frac{dr}{dt} = (3\cos 1)\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} + 9\hat{k}$$
$$\vec{a}(1) = \frac{d^2r}{dt^2} = (-3\sin 1)\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 18\hat{k}$$

$t=2$ پر

$$\vec{v}(2) = \frac{dr}{dt} = (3\cos 2)\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath} + 36\hat{k}$$
$$\vec{a}(2) = \frac{d^2r}{dt^2} = (-3\sin 2)\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 36\hat{k}$$

ہم جانتے ہیں کہ $\|\vec{v}\|$ سے ہمیں چال اور $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ سے ہمیں جہت ملتی ہے، اس لیے

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(3\cos t)^2 + (2t)^2 + (9t^2)^2}$$
$$= \sqrt{9\cos^2(t) + 4t^2 + 81t^4}$$
$$\|v(0)\| = \sqrt{9+0+0} = 0$$
$$\|\vec{v}(1)\| = \sqrt{9(\cos 1)^2 + 4 + 81} = \sqrt{9(\cos 1)^2 + 85}$$
$$\|\vec{v}(2)\| = \sqrt{9(\cos 2)^2 + 16 + 1296} = \sqrt{9(\cos 2)^2 + 1312}$$

ہم جانتے ہیں کہ دیے گیے ویکٹر کی جہت ہم $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ سے نکالتے ہیں اس لیے ہم $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ کو نکال کر $t=0$، $t=1$ اور $t=2$ پر اس کی قیمتوں کو نکال لیں گے۔

14.5 ویکٹر تکملے (Vector Integrals)

14.5.1 ویکٹر قدری تفاعل کے معین تکملے (Definite Integrals of Vector Function)

مان لیجیے کہ $[a, b]$ کوئی وقفہ ہے اور $\vec{r}(t)$ ایک ویکٹر تفاعل ہے جو $[a, b]$ پر مطعرف ہے، تب ہم $\vec{r}(t)$ کا معین تکمل اس وقفہ $[a, b]$ کے اوپر ریمان ثم (Riemann Sum) کی لمٹ کی شکل میں بیان کرتے ہیں اور اس کو کچھ اس طرح سے لکھتے ہیں

$$\int_a^b \vec{r}(t)dt = \lim_{max\, h_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \vec{r}(t_k^*)h_k$$

اوپر بیان کردہ مساوات سے ہمیں یہ معلوم ہوتا ہے کہ $\vec{r}(t)$ کا معین تکمل کسی وقفہ $[a, b]$ پر ایک ویکٹر کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے جس کے اجزا $\vec{r}(t)$ کے اجزا تفاعل کے معین تکمل ہوں گے۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ اگر

$$\vec{r}(t) = f(t)\hat{\imath} + g(t)\hat{\jmath} + h(t)\hat{k}$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b \vec{r}(t)dt &= \lim_{max\, h_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \vec{r}(t_k^*)h_k \\
&= \lim_{max\, h_k \to 0} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} f(t_k^*)h_k\right)\hat{\imath} + \left(\sum_{k=1}^{n} g(t_k^*)h_k\right)\hat{\jmath} + \left(\sum_{k=1}^{n} h(t_k^*)h_k\right)\hat{k}\right] \\
&= \left(\lim_{max\, h_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k^*)h_k\right)\hat{\imath} + \left(\lim_{max\, h_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} g(t_k^*)h_k\right)\hat{\jmath} + \left(\lim_{max\, h_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} h(t_k^*)h_k\right)\hat{k}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_a^b \vec{r}(t)dt = \left(\int_a^b f(t)dt\right)\hat{\imath} + \left(\int_a^b g(t)dt\right)\hat{\jmath} + \left(\int_a^b h(t)dt\right)\hat{k}$$

مثال-1 اگر $\vec{r}(t) = 2t^3\hat{\imath} + 3e^{3t}\hat{\jmath} - (4\cos \pi t)\hat{k}$ ہے تو $\int_0^1 \vec{r}(t)dt$ کی قدر معلوم کیجیے۔

حل- دیا گیا ہے

$$\vec{r}(t) = 2t^3\hat{\imath} + 3e^{3t}\hat{\jmath} - (4\cos \pi t)\hat{k}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_0^1 \vec{r}(t)dt &= \left(\int_0^1 2t^3 dt\right)\hat{\imath} + \left(\int_0^1 3e^{3t}dt\right)\hat{\jmath} - \left(\int_0^1 4\cos \pi t\, dt\right)\hat{k} \\
&= \left[2 \times \frac{t^4}{4}\right]_0^1 \hat{\imath} + \left[3 \times \frac{e^{3t}}{3}\right]_0^1 \hat{\jmath} - \left[4 \times \frac{\sin \pi t}{\pi}\right]_0^1 \hat{k} \\
&= 2 \times \left(\frac{1}{4} - 0\right)\hat{\imath} + (e^3 - 1)\hat{\jmath} - \frac{4}{\pi} \times (\sin \pi - \sin 0)\hat{k} \\
&= \frac{1}{2}\hat{\imath} + (e^3 - 1)\hat{\jmath}
\end{aligned}$$

مثال-2 $\int_0^{\pi}[t^2\hat{\imath} + 7\,\hat{\jmath} - (5\cos t)\hat{k}]dt$ کی قدر معلوم کیجیے۔

حل-

$$\int_0^{\pi}\left[t^2\hat{\imath}+7\,\hat{\jmath}-(5\cos t)\hat{k}\right]dt=\left(\int_0^{\pi}t^2dt\right)\hat{\imath}+7\left(\int_0^{\pi}dt\right)\hat{\jmath}-\left(5\int_0^{\pi}(\cos t)dt\right)\hat{k}$$
$$=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi}\hat{\imath}+7[t]_0^{\pi}\hat{\jmath}-5[\sin t]_0^{\pi}\hat{k}$$
$$=\left(\frac{\pi^3}{3}-0\right)\hat{\imath}+7(\pi-0)\hat{\jmath}-5(\sin\pi-\sin 0)\hat{k}$$
$$=\frac{\pi^3}{3}\hat{\imath}+7\pi\,\hat{\jmath}$$

مثال3- مان لو کہ کسی ذرے کی رفتار جو اسپیس(Space) میں گردش کر رہا ہے مندرجہ ذیل سے ظاہر کی گئی ہے

$$\vec{v}(t)=2e^{3t}\hat{\imath}+t^3\hat{\jmath}+(\sin 2t)\hat{k}$$

تب ہم اس ذرہ کا مقام t کے تفاعل کی شکل میں نکالنا چاہتے ہیں اگر $t=0$ پر اس کا مقام ہم $\vec{r}(0)=3\hat{\imath}+2\,\hat{\jmath}-2\hat{k}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

حل- اصل میں یہ مثال ایک آئی وی پی(Initial Value Problem) کی ہے جس میں ہم کو مندرجہ ذیل دیا گیا ہے

$$\vec{v}(t)=2e^{3t}\hat{\imath}+t^3\hat{\jmath}+(\sin 2t)\hat{k}\qquad\cdots(1)$$

اور

$$\vec{r}(0)=3\hat{\imath}+2\,\hat{\jmath}-2\hat{k}\qquad\cdots(2)$$

ہم(1) کو بہ لحاظ t تکمل کرتے ہیں

$$\int d\vec{r}=2\left(\int e^{3t}dt\right)\hat{\imath}+\left(\int t^3\,dt\right)\hat{\jmath}+\int(\sin 2t)\,dt\hat{k}$$
$$\vec{r}(t)=2\left(\frac{e^{3t}}{3}+C_1\right)\hat{\imath}+\left(\frac{t^4}{4}+C_2\right)\hat{\jmath}-\left(\frac{\cos 2t}{2}+C_3\right)\hat{k}$$
$$=\left(\frac{2e^{3t}}{3}\hat{\imath}+\frac{t^4}{4}\hat{\jmath}-\frac{\cos 2t}{2}\hat{k}\right)+C_1\hat{\imath}+C_2\hat{\jmath}-C_3\hat{k}\qquad\cdots(3)$$

(2)اور(3) سے ہم مندرجہ ذیل حاصل کرتے ہیں

$$3\hat{\imath}+2\,\hat{\jmath}-2\hat{k}=\left(\frac{2e^0}{3}\hat{\imath}+\frac{(0)^4}{4}\hat{\jmath}-\frac{\cos 0}{2}\hat{k}\right)+C_1\hat{\imath}+C_2\hat{\jmath}-C_3\hat{k}$$
$$\Rightarrow\qquad 3\hat{\imath}+2\,\hat{\jmath}-2\hat{k}=\left(\frac{2}{3}\hat{\imath}-\frac{1}{2}\hat{k}\right)+C_1\hat{\imath}+C_2\hat{\jmath}-C_3\hat{k}$$

موازنہ (Compare) کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\begin{cases}3=\dfrac{2}{3}+C_1\Rightarrow C_1=-\dfrac{7}{3}\\ 2=C_2\\ -2=-\dfrac{1}{2}-C_3\Rightarrow C_3=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

اس لیے

$$C_1\hat{\imath} + C_2\hat{\jmath} - C_3\hat{k} = -\frac{7}{3}\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} - \frac{3}{2}\hat{k}$$

ہم اس کو(3)میں رکھتے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{2e^{3t}}{3}\hat{\imath} + \frac{t^4}{4}\hat{\jmath} - \frac{\cos 2t}{2}\hat{k}\right) - \frac{7}{3}\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} - \frac{3}{2}\hat{k}$$
$$= \frac{1}{3}(2e^{3t} - 7)\hat{\imath} + \frac{1}{4}(t^4 + 8)\hat{\jmath} - \frac{1}{2}(\cos 2t + 3)\hat{k}$$

14.5.2 تکمل کے اصول (Rules of Integration)

اگر $\vec{r}(t)$، $\vec{r}_1(t)$ اور $\vec{r}_2(t)$ ویکٹر تفاعل ہیں جو وقفہ $[a,b]$ پر مسلسل ہوں اور α اور β کوئی میزان ہوں، تب ہم دیکھتے ہیں کہ

1. $\int_a^b \alpha\vec{r}(t)dt = \alpha\int_a^b \vec{r}(t)dt$
2. $\int_a^b[\alpha\vec{r}_1(t) + \beta\,\vec{r}_2(t)]dt = \alpha\int_a^b \vec{r}_1(t)dt + \beta\int_a^b \vec{r}_2(t)dt$
3. $\int_a^b[\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)]dt = \int_a^b \vec{r}_1(t)dt + \int_a^b \vec{r}_2(t)dt$
4. $\int_a^b[\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)]dt = \int_a^b \vec{r}_1(t)dt - \int_a^b \vec{r}_2(t)dt$
5. $\frac{d}{dt}\int \vec{r}(t)dt = \vec{r}(t)$
6. $\int \vec{r}\,'(t)dt = \vec{r}(t) + C$
7. $\int \vec{r}(t)dt = \left[\vec{R}(t)\right]_a^b = \vec{R}(b) - \vec{R}(a)$

مثال1- $\vec{r}(t) = 3t^2\hat{\imath} + 4t^3\hat{\jmath}$ کا تکمل کیجیے۔

حل-

$$\int \vec{r}(t)dt = \int(3t^2\hat{\imath} + 4t^3\hat{\jmath})dt$$
$$= \int(3t^2dt)\,\hat{\imath} + \int(4t^3dt)\,\hat{\jmath}$$
$$= \left(3\times\frac{t^3}{3} + C_1\right)\hat{\imath} + \left(4\times\frac{t^4}{4} + C_2\right)\hat{\jmath}$$
$$= (t^3\hat{\imath} + t^4\hat{\jmath}) + (C_1\hat{\imath} + C_2\hat{\jmath})$$
$$= (t^3\hat{\imath} + t^4\hat{\jmath}) + C$$

مثال2- $\int_0^2(3t^3\hat{\imath} + 5t^3\hat{\jmath})\,dt$ کی قدر معلوم کیجیے۔

حل-

$$\int_0^2(3t^3\hat{\imath} + 5t^3\hat{\jmath})\,dt = \int_0^2(3t^3dt)\,\hat{\imath} + \int_0^2(5t^3dt)\,\hat{\jmath}$$
$$= 3\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^2\hat{\imath} + 5\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^2\hat{\jmath}$$
$$= \frac{3}{4}((2)^4 - 0)\hat{\imath} + \frac{5}{4}((2)^4 - 0)\hat{\jmath}$$
$$= \frac{3}{4}\times 16\hat{\imath} + \frac{5}{4}\times 16\hat{\jmath}$$
$$= 12\hat{\imath} + 20\hat{\jmath}$$

مثال3- اگر $\vec{r}\,'(t) = \langle 5، 3t\rangle$ اور $\vec{r}(1) = \langle 1، 1\rangle$ دیا گیا ہو تب $\vec{r}(t)$ کو معلوم کیجیے۔

حل- ہم جانتے ہیں کہ

$$\vec{r}(t) = \int \vec{r}'(t)dt$$
$$= \int \langle 5، 3t\rangle\, dt$$
$$= \langle 5t، \frac{3t^2}{2}\rangle + C$$

جہاں پر C ایک مستقل ہے۔ ہمیں دیا گیا ہے کہ $\vec{r}(1) = \langle 1، 1\rangle$ اس لیے

$$\vec{r}(t) = \langle 5t، \frac{3t^2}{2}\rangle + C$$
$$\Rightarrow \quad \vec{r}(1) = \langle 5، \frac{3}{2}\rangle + C$$
$$\Rightarrow \quad \langle 5، \frac{3}{2}\rangle + C = \langle 1، 1\rangle$$
$$\Rightarrow \quad C = \langle -4، \frac{-1}{2}\rangle$$

اس لیے

$$\vec{r}(t) = \langle 5t، \frac{3t^2}{2}\rangle + \langle -4، \frac{-1}{2}\rangle$$
$$\Rightarrow \quad \vec{r}(t) = \langle 5t-4، \frac{3t^2}{2} - \frac{1}{2}\rangle$$

14.6 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی کو مکمل کرنے کے بعد طالب علم نے ویکٹر قدری تفاعل کی تعریف اور اس کی مختلف مثال سیکھیں اور وہ اس قابل ہو جانا چاہیے کہ وہ کسی دیے گیے ویکٹر قدری تفاعل کی لمٹ اور تسلسل معلوم کر سکے۔ وہ اس تفاعل کا تفرق اور تکمل حاصل کر سکے۔ اس کے علاوہ طالب علم کو مماسی ویٹر اور نارمل ویکٹر کے بیچ کا فرق، اور کوئی ویٹر تفاعل کب عمودی ہوتا ہے، یہ سب بھی معلوم ہو جانا چاہیے۔ مزید ہموار منحنی کی تعریف، اس کی مثال اور مختلف پروپرٹیز بھی معلوم ہو جانی چاہیے۔

14.7 کلیدی الفاظ (Key Words)

ویکٹر قدری تفاعل، لمٹ، مسلسل، ویکٹر تفاعل کا تسلسل، ویکٹر تفاعل کا مشتق، ویکٹر تکمل، مماسی ویکٹر، ہموار منحنی

14.8 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

14.8.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

.1 $\lim_{t\to\infty} \langle \frac{t^3+1}{5t^2+2}, \frac{1}{t^2}\rangle = \cdots$

$\langle 1,0\rangle$ .D $\langle 1,1\rangle$ .C $\langle \frac{1}{3},0\rangle$ .B $\langle 0,0\rangle$ .A

.2 $\lim_{t\to\infty}\langle \frac{2t^5-1}{3t^4-2},\frac{3}{t^2}\rangle = \cdots$

$\langle 0,1\rangle$ .D $\langle 1,1\rangle$ .C $\langle 0,0\rangle$ .B $\langle \frac{1}{2},0\rangle$ .A

.3 $\lim_{t\to 1}\langle 2t^2\hat{\imath} - 3t\,\hat{\jmath} + t^3\hat{k}\rangle = \cdots$

$2\hat{\imath}+3\,\hat{\jmath}-\hat{k}$ .D $2\hat{\imath}-3\,\hat{\jmath}$ .C $-3\,\hat{\jmath}+\hat{k}$ .B $2\hat{\imath}-3\,\hat{\jmath}+\hat{k}$ .A

.4 $\lim_{t\to 0}\langle \frac{3}{2}\hat{\imath} - \frac{5}{7}t^2\hat{\jmath} + \hat{k}\rangle = \cdots$

$\hat{k}$ .D $\frac{3}{2}\hat{\imath}-\frac{5}{7}\hat{\jmath}+\hat{k}$ .C $\frac{3}{2}\hat{\imath}+\hat{k}$ .B $-\frac{5}{7}\hat{\jmath}$ .A

مندرجہ ذیل ویکٹر قدری تفاعل کے بارے میں بتایے کہ وہ $t = 0$ پر مسلسل ہیں۔

.5 (i) $\vec{r}(t) = 5\sin t\,\hat{\imath} - 5t\,\hat{\jmath}$

غیر مسلسل .b مسلسل .a

(ii) $\vec{r}(t) = 5\cos t\,\hat{\imath} - 5t\,\hat{\jmath}$

غیر مسلسل .b مسلسل .a

(iii) $\vec{r}(t) = t^2\hat{\imath} + \frac{1}{t}\hat{\jmath} + t\hat{k}$

غیر مسلسل .b مسلسل .a

(iv) $\vec{r}(t) = \sin t\,\hat{\imath} + t\,\hat{\jmath}$

غیر مسلسل .b مسلسل .a

.6 مندرجہ ذیل ویکٹر تفاعل کا مشتق معلوم کیجیے

(i) $\vec{r}(t) = t^2\hat{\imath} + t^3\hat{\jmath} + (1+t^2)\hat{k}$

(ii) $\vec{r}(t) = (\ln t)(\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath})$

(iii) $\vec{r}(t) = (3\hat{\imath} - \sin t\,\hat{\jmath})$

(iv) $\vec{r}(t) = (2\hat{\imath} + t^2\hat{\jmath}) + (3t^2\hat{\imath} + 7\,\hat{\jmath})$

(v) $\vec{r}(t) = (2\tan^{-1} t)\hat{\imath} - \sqrt{t}\hat{\jmath}$

.7 مندرجہ ذیل ویکٹر تفاعل کے لیے $\vec{r}'(t)$ اور $\vec{r}''(t)$ معلوم کیجیے

(i) $\vec{r}(t) = 3t^2\hat{\imath} + t^{-1}\hat{\jmath} + e^{3t}\hat{k}$

(ii) $\vec{r}(t) = \sin t\,\hat{\imath} + 3\cos t\,\hat{\jmath}$

(iii) $\vec{r}(t) = \tan^{-1} t\,\hat{\imath} + \cos t\,\hat{\jmath} - 3\sqrt{t}\hat{k}$

(iv) $\vec{r}(t) = \sin t\,(3\hat{\imath} + \tan t\,\hat{\jmath})$

(v) $\vec{r}(t) = \langle \sin t, -2t, 3\cos^2 t\rangle$

.8 مندرجہ ذیل میں $\vec{r}'(t_0)$ معلوم کیجیے اور پھر $\vec{r}(t)$ کا گراف بنایے اور مماس ویکٹر $\vec{r}'(t_0)$ کو بنایے۔

(i) $\vec{r}(t) = \langle t^3, t^4\rangle, t_0 = 2$

(ii) $\vec{r}(t) = 2\sin t\,\hat{\imath} + 2\sin t\,\hat{k}, t_0 = \frac{\pi}{2}$

(iii) $\vec{r}(t) = \sin t\,\hat{\imath} + \cos t\,\hat{\jmath} + 3\hat{k}, t_0 = 0$

(iv) $\vec{r}(t) = 3\sin t\,\hat{\imath} + 2\cos t\,\hat{\jmath} + 3\hat{k}, t_0 = \frac{\pi}{4}$

.9 مندرجہ ذیل میں ان خطوط کی پیرامٹرک مساوات بنایے جو $\vec{r}(t)$ کے گراف پر کسی دیے ہوئے نقطہ t_0 پر مماس ہیں۔

(i) $\vec{r}(t) = e^{3t}\hat{\imath} - 3\sin t\,\hat{\jmath}, t_0 = 0$

(ii) $\vec{r}(t) = \ln t\,\hat{\imath} + t^2\hat{\jmath} - e^{t}\hat{k}, t_0 = 2$

(iii) $\vec{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t\rangle, t_0 = \frac{\pi}{2}$

(iv) $\vec{r}(t) = \langle t^3, t^2, t\rangle, t_0 = 1$

14.8.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

.1 مندرجہ ذیل تفاعل کے لیے غیر معین تکمل نکالیے۔

(i) $\vec{r}(t) = 2t\hat{\imath} + e^{5t}\hat{\jmath} + 3t\hat{k}$

(ii) $\vec{r}(t) = 3\sin t\,\hat{\imath} + 5\cos t\,\hat{\jmath}$

(iii) $\vec{r}(t) = \ln t\,\hat{\imath} - 3\,\hat{\jmath}$

(iv) $\vec{r}(t) = e^{-t}\langle 3t, t, \sin t\rangle$

.2 مقام ویکٹر $\vec{r}(t)$ بتایے جب کہ رفتار $\vec{v}(t)$ اور ابتدائی مقام $\vec{r}(0)$ دیے گیے ہیں:

(i) $\vec{v}(t) = t^3\hat{\imath} - e^t\hat{\jmath} + 3\hat{k}, \vec{r}(0) = \hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} + 3\hat{k}$

(ii) $\vec{v}(t) = -\sin t\,\hat{\jmath} + 2cos^2 t\hat{k}, \vec{r}(0) = 2\,\hat{\jmath}$

(iii) $\vec{v}(t) = \sqrt{t}\hat{\imath} + \sin t\,\hat{\jmath} + 5t\hat{k}, \vec{r}(0) = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$

(iv) $\vec{v}(t) = t^2\hat{\imath} + t^3\hat{\jmath} + t^4\hat{k}, \vec{r}(0) = 2\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath} + 5\hat{k}$

14.8.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

.1 اگر $\vec{r}_1(t) = 3\hat{\imath} - t\hat{\jmath} + 5t^2\hat{k}$ اور $\vec{r}_2(t) = 3\hat{\imath} + 5t\,\hat{\jmath} - 3t^2\hat{k}$ دیے گیے ہیں، تب مندرجہ معلوم کیجیے۔

(i) $\frac{d}{dt}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$

(ii) $\frac{d}{dt}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

(iii) $\frac{d}{dt}(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)$

(iv) $\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_1 \cdot t^2\vec{r}_2)$

(v) $\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_1 + t\vec{r}_2)$

(vi) $\frac{d}{dt}(t\vec{r}_1 + t^2\vec{r}_2)$

.2 معین تکملے حاصل کیجیے

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \langle sin\,2t \text{،}\; cos\,2t\rangle\, dt$

$\int_0^1 (t^3\hat{\imath} + t^2\hat{\jmath})dt$ (ii)

$\int_0^2 \left(t^2\hat{\imath} + t^{-2}\hat{\jmath} + \hat{k}\right)dt$ (iii)

14.9 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں(Suggested Books for Further Readings)

1. Calculus, H. Anton, I. Bivens, S. Davis, John Wiley & Sons, Inc. (10th Edition)
2. Calculus, M. J. Strauss, G. L. Bradley, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall (3rd Edition)

اکائی 15۔ اسراع کے مماسی اور عمودی اجزا

(Tangential and Normal Components of Acceleration)

اکائی کے اجزا

15.0 تمہید(Introduction)

ہم جانتے ہیں کہ جب کسی موٹر کار کی رفتار اچانک بڑھادی جاتی ہے، تب رفتار میں بدلاؤ کی وجہ سے اس کار میں بیٹھے مصافر سیٹ پر پیچھے کی طرف لڑھک جاتے ہیں اور جب کار کسی گھماؤ دار سڑک پر چلتی ہے، تب مصافر اس گھماؤ دار منحنی کے باہر کی طرف لڑھک جاتے ہیں۔ سڑک کی بناوٹ میں جتنا زیادہ گھماؤ ہو گا اس کا مصافروں پر اتنا ہی زیادہ اثر پڑیگا۔ ان اثرات کی وضاحت گردش کی رافتار اور اسراع کے اجزا کو برداری اجزا میں بدل کر، جو کہ اکائی مماس اور اکائی عمودی کے متوازی ہوتے ہیں، سے سمجھا جاسکتا ہے۔

15.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ

- کسی گردشی ذرے کی رفتار اور اسراع حاصل کر سکیں۔
- کسی گردشی ذرے کی اسراع کے مماسی اور عمودی اجزا حاصل کر سکیں۔

15.2 برداری تفاعل(Vector Function)

پچھلی اکائی میں ہم برداروں کی بنیادی معلومات حاصل کر چکے ہیں۔ اب ہم ایسے تفاعلات کے بارے میں گفتگو کریں گے جن کی قدر ایک بردار ہے۔

تعریف: کسی حقیقی متغیر کا برداری تفاعل وہ قانون ہے جو کسی بردار $\vec{F}$ کو کسی حقیقی متغیر t سے منسلک کرتا ہے، جہاں $t \in S \subset \mathbb{R}$، اور S برداری تفاعل $\vec{F}$ کا دامنہ ہے۔ اس کو ہم اس طرح بھی کہہ سکتے ہیں

$$\vec{F}(t): S \to \mathbb{R}^3$$

مثال کے طور پر

$$\vec{F}(t) = t\hat{\imath} + t^2\hat{\jmath} + t^3\hat{k}$$

$\mathbb{R}^3$ میں ایک برداری تفاعل ہے جو کہ سبھی متغیر t کے لیے متعرف ہے۔ کسی برداری تفاعل کو اجزا کی شکل میں بھی لکھا جاسکتا ہے جو کہ درجہ ذیل ہے

$$\vec{F}(t) = F_1(t)\hat{\imath} + F_2(t)\hat{\jmath} + F_3(t)\hat{k}$$

جہاں $F_1(t)$، $F_2(t)$ اور $F_3(t)$ کو برداری تفاعل $\vec{F}(t)$ کے اجزاء تفاعل کہتے ہیں۔

اب ہم برداری تفاعل کی لمٹ(Limit) کے بارے میں بحث کریں گے۔

تعریف: مان لو کہ $\vec{F}(t)$ کوئی برداری تفاعل ہے اور a کوئی حقیقی نمبر ہے اور مان لو کہ $\vec{l}$ کوئی بردار ہے، تب ہم کہتے ہیں کہ $\vec{F}(t)$ کی لمٹ $\vec{l}$ کے برابر ہوتی ہے جب کہ $t \to a$ اور اس کو درج ذیل طریقہ سے لکھا جاتا ہے

$\lim_{t\to a}\vec{F}(t) = \vec{l}$، اگر $\lim_{t\to a}\|\vec{F}(t) - \vec{l}\| = 0$

مان لو کہ اگر $\vec{F}(t) = F_1(t)\hat{\imath} + F_2(t)\hat{\jmath} + F_3(t)\hat{k}$، تب

$$\lim_{t\to a}\vec{F}(t) = \lim_{t\to a}\left(F_1(t)\hat{\imath} + F_2(t)\hat{\jmath} + F_3(t)\hat{k}\right)$$
$$= \lim_{t\to a}F_1(t)\hat{\imath} + \lim_{t\to a}F_2(t)\hat{\jmath} + \lim_{t\to a}F_3(t)\hat{k}$$

بشرطہ کہ دائیں ہاتھ کی تینوں لمٹس وجود رکھتی ہوں۔ اسی طرح ہم کسی برداری تفاعل کے تسلسل اور تفرق کی تعریف کرسکتے ہیں۔

تعریف: مان لو کہ $\vec{F}(t) = F_1(t)\hat{\imath} + F_2(t)\hat{\jmath} + F_3(t)\hat{k}$ کوئی برداری تفاعل ہے اور مان لو کہ a اس کے دامنہ میں کوئی حقیقی نمبر ہے۔ تب $\vec{F}(t)$ نمبر a پر مسلسل ہوگا اگر

$$\lim_{t\to a}\vec{F}(t) = \vec{F}(a)$$

دوسرے الفاظ میں $\vec{F}(t)$ نمبر a پر مسلسل ہوگا اگر صرف اور صرف $F_1(t)$، $F_2(t)$ اور $F_3(t)$ نمبر a پر مسلسل ہوں۔ برداری تفاعل $\vec{F}(t)$ کا a پر مشتق ایک لمٹ ہے جو درج ذیل ہے

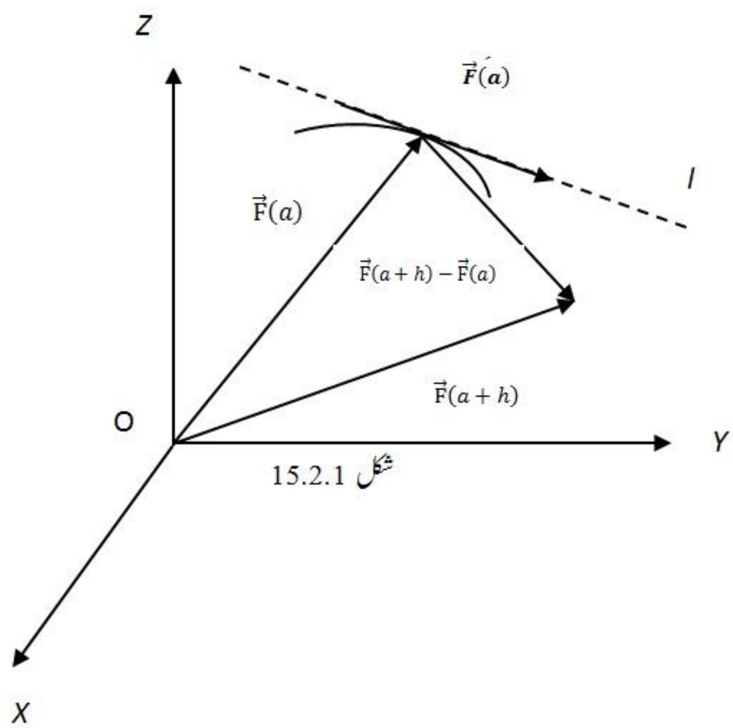
$$\frac{d\vec{F}(a)}{dt} = \vec{F}'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{\vec{F}(a+h) - \vec{F}(a)}{h}$$

اگر چہ یہ لمٹ وجود رکھتی ہو۔ اس کو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں

$$\vec{F}'(a) = F_1'(a)\hat{\imath} + F_2'(a)\hat{\jmath} + F_3'(a)\hat{k}$$

اگر چہ اجزا تفرق پزیر ہوں۔

کسی برداری تفاعل کا مشتق اس کے منحنی پر مماس بردار ہوتا ہے اور یہ منحنی کی مماس خط l پر وجود رکھتا ہے۔



شکل 15.2.1

قضیہ: مان لو کہ $\vec{F}(t)$ اور $\vec{G}(t)$ دو تفرق پزیر برداری تفاعل ہیں اور $U(t)$ ایک تفرق پزیر میزانی تفاعل ہے۔ مان لو کہ l ایک میزانیہ ہے اور $\vec{C}$ ایک مستقل بردار ہے، تب

1. $\frac{d\vec{C}}{dt} = \vec{o}$
2. $\frac{d(\vec{F}\pm\vec{G})}{dt} = \frac{d\vec{F}}{dt} \pm \frac{d\vec{G}}{dt}$
3. $\frac{d(\vec{F}\cdot\vec{G})}{dt} = \frac{d\vec{F}}{dt}\cdot\vec{G} + \vec{F}\cdot\frac{d\vec{G}}{dt}$
4. $\frac{d(\vec{F}\times\vec{G})}{dt} = \frac{d\vec{F}}{dt}\times\vec{G} + \vec{F}\times\frac{d\vec{G}}{dt}$
5. $\frac{d(l\vec{F})}{dt} = l\frac{d\vec{F}}{dt}$
6. $\frac{d(U\vec{G})}{dt} = \frac{dU}{dt}\vec{G} + U\frac{d\vec{G}}{dt}$

ثبوت:

1. یہاں ہم یہ مان لیں کہ $\vec{C} = C_1\hat{\imath} + C_2\hat{\jmath} + C_3\hat{k}$، جہاں C_1، C_2 اور C_3 مستقل ہیں۔ تب

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{C}}{dt} &= \frac{d\left(C_1\hat{\imath} + C_2\hat{\jmath} + C_3\hat{k}\right)}{dt}\\ &= \frac{d\overrightarrow{C_1}}{dt}\hat{\imath} + \frac{d\overrightarrow{C_2}}{dt}\hat{\jmath} + \frac{d\overrightarrow{C_3}}{dt}\hat{k}\\ &= (0)\hat{\imath} + (0)\hat{\jmath} + (0)\hat{k}\\ &= \vec{o}\end{aligned}$$

2. مان لو کہ $\vec{F}(t) = F_1(t)\hat{\imath} + F_2(t)\hat{\jmath} + F_3(t)\hat{k}$ اور $\vec{G}(t) = G_1(t)\hat{\imath} + G_2(t)\hat{\jmath} + G_3(t)\hat{k}$ تب

$$(\vec{F} \pm \vec{G})(t) = \left(F_1(t) \pm G_1(t)\right)\hat{\imath} + \left(F_2(t) \pm G_2(t)\right)\hat{\jmath} + \left(F_3(t) \pm G_3(t)\right)\hat{k}$$

اس لیے

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\vec{F} \pm \vec{G})(t) &= \frac{d}{dt}\left(F_1(t) \pm G_1(t)\right)\hat{\imath} + \frac{d}{dt}\left(F_2(t) \pm G_2(t)\right)\hat{\jmath} + \frac{d}{dt}\left(F_3(t) \pm G_3(t)\right)\hat{k}\\ &= \left(\frac{d}{dt}F_1(t) \pm \frac{d}{dt}G_1(t)\right)\hat{\imath} + \left(\frac{d}{dt}F_2(t) \pm \frac{d}{dt}G_2(t)\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{d}{dt}F_3(t) \pm \frac{d}{dt}G_3(t)\right)\hat{k}\\ &= \frac{d}{dt}\left[F_1(t)\hat{\imath} + F_2(t)\hat{\jmath} + F_3(t)\hat{k}\right] \pm \frac{d}{dt}\left[G_1(t)\hat{\imath} + G_2(t)\hat{\jmath} + G_3(t)\hat{k}\right]\\ &= \frac{d\vec{F}(t)}{dt} \pm \frac{d\vec{G}(t)}{dt}\end{aligned}$$

3. مان لو کہ $\vec{F}(t) = F_1(t)\hat{\imath} + F_2(t)\hat{\jmath} + F_3(t)\hat{k}$ اور $\vec{G}(t) = G_1(t)\hat{\imath} + G_2(t)\hat{\jmath} + G_3(t)\hat{k}$ تب

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\vec{F} \cdot \vec{G})(t) &= \frac{d}{dt}[F_1(t)G_1(t) + F_2(t)G_2(t) + F_3(t)G_3(t)]\\ &= \frac{d}{dt}\left(F_1(t)G_1(t)\right) + \frac{d}{dt}\left(F_2(t)G_2(t)\right) + \frac{d}{dt}\left(F_3(t)G_3(t)\right)\\ &= \left[\frac{dF_1(t)}{dt}\left(G_1(t)\right) + \frac{dG_1(t)}{dt}F_1(t)\right] + \left[\frac{dF_2(t)}{dt}\left(G_2(t)\right) + \frac{dG_2(t)}{dt}F_2(t)\right]\end{aligned}$$

$$+\left[\frac{\mathrm{d}F_3(t)}{\mathrm{dt}}\big(G_3(t)\big)+\frac{\mathrm{d}G_3(t)}{\mathrm{dt}}F_3(t)\right]$$
$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\big(F_1(t)\hat{\imath}+F_2(t)\hat{\jmath}+F_3(t)\hat{k}\big)\cdot\big(G_1(t)\hat{\imath}+G_2(t)\hat{\jmath}+G_3(t)\hat{k}\big)$$
$$+\big(F_1(t)\hat{\imath}+F_2(t)\hat{\jmath}+F_3(t)\hat{k}\big)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\big(G_1(t)\hat{\imath}+G_2(t)\hat{\jmath}+G_3(t)\hat{k}\big)$$
$$=\frac{d\vec{\mathrm{F}}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}\cdot\vec{\mathrm{G}}(\mathrm{t})+\vec{\mathrm{F}}(\mathrm{t})\cdot\frac{d\vec{\mathrm{G}}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}$$

4. مان لو کہ $\vec{F}(t)=F_1(t)\hat{\imath}+F_2(t)\hat{\jmath}+F_3(t)\hat{k}$ اور $\vec{G}(t)=G_1(t)\hat{\imath}+G_2(t)\hat{\jmath}+G_3(t)\hat{k}$ تب

$$\frac{d\big(\vec{\mathrm{F}}\times\vec{\mathrm{G}}\big)(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ F_1(t) & F_2(t) & F_3(t)\\ G_1(t) & G_2(t) & G_3(t)\end{vmatrix}$$
$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}[\{F_2(t)G_3(t)-F_3(t)G_2(t)\}\hat{\imath}+\{F_1(t)G_3(t)-F_3(t)G_1(t)\}\hat{\jmath}$$
$$+\{F_1(t)G_2(t)-F_2(t)G_1(t)\}\hat{k}]$$
$$=\left[\left\{\frac{\mathrm{d}F_2(t)}{\mathrm{dt}}G_3(t)+\frac{\mathrm{d}G_3(t)}{\mathrm{dt}}F_2(t)\right\}-\left\{\frac{\mathrm{d}F_3(t)}{\mathrm{dt}}G_2(t)+\frac{\mathrm{d}G_2(t)}{\mathrm{dt}}F_3(t)\right\}\right]\hat{\mathrm{\imath}}$$
$$-\left[\left\{\frac{\mathrm{d}F_1(t)}{\mathrm{dt}}G_3(t)+\frac{\mathrm{d}G_3(t)}{\mathrm{dt}}F_1(t)\right\}-\left\{\frac{\mathrm{d}F_3(t)}{\mathrm{dt}}G_1(t)+\frac{\mathrm{d}G_1(t)}{\mathrm{dt}}F_3(t)\right\}\right]\hat{\mathrm{\jmath}}$$
$$+\left[\left\{\frac{\mathrm{d}F_1(t)}{\mathrm{dt}}G_2(t)+\frac{\mathrm{d}G_2(t)}{\mathrm{dt}}F_1(t)\right\}-\left\{\frac{\mathrm{d}F_2(t)}{\mathrm{dt}}G_1(t)+\frac{\mathrm{d}G_1(t)}{\mathrm{dt}}F_2(t)\right\}\right]\hat{\mathrm{k}}$$
$$=\left[\left(\frac{\mathrm{d}G_3(t)}{\mathrm{dt}}F_2(t)-\frac{\mathrm{d}G_2(t)}{\mathrm{dt}}F_3(t)\right)\hat{\mathrm{\imath}}-\left(\frac{\mathrm{d}G_3(t)}{\mathrm{dt}}F_1(t)-\frac{\mathrm{d}G_1(t)}{\mathrm{dt}}F_3(t)\right)\hat{\mathrm{\jmath}}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\mathrm{d}G_2(t)}{\mathrm{dt}}F_1(t)-\frac{\mathrm{d}G_1(t)}{\mathrm{dt}}F_2(t)\right)\hat{\mathrm{k}}\right]+\left[\left(\frac{\mathrm{d}F_2(t)}{\mathrm{dt}}G_3(t)-\frac{\mathrm{d}F_3(t)}{\mathrm{dt}}G_2(t)\right)\hat{\mathrm{\imath}}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\mathrm{d}F_1(t)}{\mathrm{dt}}G_3(t)-\frac{\mathrm{d}F_3(t)}{\mathrm{dt}}G_1(t)\right)\hat{\mathrm{\jmath}}+\left(\frac{\mathrm{d}F_1(t)}{\mathrm{dt}}G_2(t)-\frac{\mathrm{d}F_2(t)}{\mathrm{dt}}G_1(t)\right)\hat{\mathrm{k}}\right]$$

$$=\vec{\mathrm{F}}\times\frac{d\vec{\mathrm{G}}}{\mathrm{dt}}+\frac{d\vec{\mathrm{F}}}{\mathrm{dt}}\times\vec{\mathrm{G}}$$

5. مان لو کہ $\vec{F}(t)=F_1(t)\hat{\imath}+F_2(t)\hat{\jmath}+F_3(t)\hat{k}$ اور l کوئی میزانیہ ہے، تب

$$\frac{d\big(l\vec{\mathrm{F}}\big)}{\mathrm{dt}}=\frac{d}{\mathrm{dt}}\big(lF_1(t)\hat{\imath}+lF_2(t)\hat{\jmath}+lF_3(t)\hat{k}\big)$$
$$=\left(\frac{d}{\mathrm{dt}}lF_1(t)\hat{\imath}+\frac{d}{\mathrm{dt}}lF_2(t)\hat{\jmath}+\frac{d}{\mathrm{dt}}lF_3(t)\hat{k}\right)$$
$$=l\left(\frac{d}{\mathrm{dt}}F_1(t)\hat{\imath}+\frac{d}{\mathrm{dt}}F_2(t)\hat{\jmath}+\frac{d}{\mathrm{dt}}F_3(t)\hat{k}\right)$$
$$=l\frac{d}{\mathrm{dt}}\big(F_1(t)\hat{\imath}+F_2(t)\hat{\jmath}+F_3(t)\hat{k}\big)$$
$$=l\frac{d\big(\vec{\mathrm{F}}\big)}{\mathrm{dt}}$$

6. مان لو کہ $\vec{G}(t) = G_1(t)\hat{\imath} + G_2(t)\hat{\jmath} + G_3(t)\hat{k}$ اور U(t) ایک تفرق پزیر میزانی تفاعل ہے،

تب

$$\frac{d\left(\mathrm{U(t)}\vec{\mathrm{G}}\mathrm{(t)}\right)}{dt} = \frac{d}{dt}\{U(t)G_1(t)\hat{\imath} + U(t)G_2(t)\hat{\jmath} + U(t)G_3(t)\hat{k}\}$$
$$= \left\{\frac{dU(t)}{dt}G_1(t) + U(t)\frac{dG_1(t)}{dt}\right\}\hat{\imath} + \left\{\frac{dU(t)}{dt}G_2(t) + U(t)\frac{dG_2(t)}{dt}\right\}\hat{\jmath}$$
$$+ \left\{\frac{dU(t)}{dt}G_3(t) + U(t)\frac{dG_3(t)}{dt}\right\}\hat{k}$$
$$= \left\{\frac{dU(t)}{dt}G_1(t)\right\}\hat{\imath} + \left\{\frac{dU(t)}{dt}G_2(t)\right\}\hat{\jmath} + \left\{\frac{dU(t)}{dt}G_3(t)\right\}\hat{k}$$
$$+ \left\{U(t)\frac{dG_1(t)}{dt}\right\}\hat{\imath} + \left\{U(t)\frac{dG_2(t)}{dt}\right\}\hat{\jmath} + \left\{U(t)\frac{dG_3(t)}{dt}\right\}\hat{k}$$
$$= \frac{dU(t)}{dt}\{G_1(t)\hat{\imath} + G_2(t)\hat{\jmath} + G_3(t)\hat{k}\} + U(t)\frac{d\{G_1(t)\hat{\imath} + G_2(t)\hat{\jmath} + G_3(t)\hat{k}\}}{dt}$$
$$= \frac{dU(t)}{dt}\vec{G}(t) + U(t)\frac{d\vec{G}(t)}{dt}$$

مثال 1۔ اگر $\vec{F}(t) = 5t^2\hat{\imath} + t\hat{\jmath} - t^3\hat{k}$ اور $\vec{G}(t) = \sin t\,\hat{\imath} - \cos t\,\hat{\jmath}$، تب حاصل کیجیے

a) $\frac{d(\vec{\mathrm{F}}\times\vec{\mathrm{G}})}{\mathrm{dt}}$ b) $\frac{d(\vec{\mathrm{F}}\cdot\vec{\mathrm{G}})}{\mathrm{dt}}$

حل- دیا ہے $\vec{F}(t) = 5t^2\hat{\imath} + t\hat{\jmath} - t^3\hat{k}$ اور $\vec{G}(t) = \sin t\,\hat{\imath} - \cos t\,\hat{\jmath}$، تب

a) سب سے پہلے ہم $\vec{\mathrm{F}}\times\vec{\mathrm{G}}$ حاصل کرتے ہیں

$$\vec{\mathrm{F}}\times\vec{\mathrm{G}} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 5t^2 & t & -t^3 \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (-t^3\cos t)\hat{\imath} - (t^3\sin t)\hat{\jmath} - (5t^2\cos t + t\sin t)\hat{k}$$

اس لیے

$$\frac{d(\vec{\mathrm{F}}\times\vec{\mathrm{G}})}{\mathrm{dt}} = \frac{d}{dt}\{(-t^3\cos t)\hat{\imath} - (t^3\sin t)\hat{\jmath} - (5t^2\cos t + t\sin t)\hat{k}\}$$
$$= (t^3\sin t - 3t^2\cos t)\hat{\imath} - (t^3\cos t + 3t^2\sin t)\hat{\jmath}$$
$$-(-5t^2\sin t + 10t\cos t + t\cos t + \sin t)\hat{k}$$
$$= (t^3\sin t - 3t^2\cos t)\hat{\imath} - (t^3\cos t + 3t^2\sin t)\hat{\jmath}$$
$$+(5t^2\sin t - 11t\cos t - \sin t)\hat{k}$$

b) سب سے پہلے ہم $\vec{\mathrm{F}}\cdot\vec{\mathrm{G}}$ حاصل کرتے ہیں

$$\vec{\mathrm{F}}\cdot\vec{\mathrm{G}} = 5t^2\sin t - t\cos t$$

اب

$$\frac{d(\vec{\mathrm{F}}\cdot\vec{\mathrm{G}})}{\mathrm{dt}} = \frac{d}{dt}(5t^2\sin t - t\cos t)$$

$$= 5\frac{d}{dt}(t^2 \sin t) - \frac{d}{dt}(t \cos t)$$
$$= (5t^2 \cos t + 10t \sin t) - (-t \sin t + \cos t)$$
$$= 5t^2 \cos t + 11t \sin t - \cos t$$
$$= (5t^2 - 1) \cos t + 11t \sin t$$

مثال2- ایک ذرہ وقت t پر منحنی $z = t, y = 2\sin t, x = 2\cos t$ کے گرد گردش کر رہا ہے۔ اس ذرے کی $t = \frac{\pi}{4}$ پر رفتار اور اسراع حاصل کیجیے۔

حل- دیا ہے ذرے کا مقام بردار (Position Vector)

$$\vec{r}(t) = 2\cos t\,\hat{\imath} + 2\sin t\,\hat{\jmath} + t\hat{k}$$

تب بہ لحاظ t تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (-2\,sin\,t)\hat{\imath} + (2\,cos\,t)\hat{\jmath} + \hat{k}$$

ذرے کی $t = \frac{\pi}{4}$ پر رفتار ہو گی

$$\vec{V}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{d\vec{r}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{dt} = \left(-2\,sin\frac{\pi}{4}\right)\hat{\imath} + \left(2\,cos\frac{\pi}{4}\right)\hat{\jmath} + \hat{k}$$
$$= -\sqrt{2}\hat{\imath} + \sqrt{2}\hat{\jmath} + \hat{k}$$

اور ذرے کی اسراع

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = (-2\,cos\,t)\hat{\imath} + (-2\,sin\,t)\hat{\jmath} + (0)\hat{k}$$
$$= (-2\,cos\,t)\hat{\imath} + (-2\,sin\,t)\hat{\jmath}$$

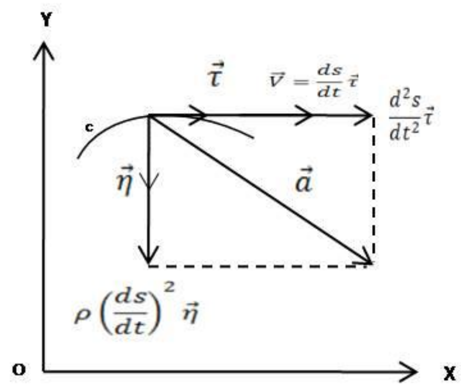
اور ذرے کی وقت $t = \frac{\pi}{4}$ پر اسراع ہو گی

$$\vec{a}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{d\vec{V}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{dt} = \left(-2\,cos\frac{\pi}{4}\right)\hat{\imath} + \left(-2\,sin\frac{\pi}{4}\right)\hat{\jmath}$$
$$= -\sqrt{2}\hat{\imath} - \sqrt{2}\hat{\jmath}$$

15.2.1 اسراع کے مماسی اور عمودی اجزا (Tangential and Normal components of Acceleration)

قضیہ: اگر کوئی ذرہ نظام 2 D یا 3 D میں کسی منحنی C کے ساتھ گردش کرتا ہے، تب منحنی کے ہر ایک نقطہ پر رفتار اور اسراع کے برداروں کو درج ذیل طریقہ سے لکھا جا سکتا ہے

$$\vec{V} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}$$
$$\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau} + \rho\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\vec{\eta}$$



شکل 15.3.1

جہاں s منحنی کے قوس کی لمبائی ہے، اور

$\vec{\tau}$ = اکائی مماسی بردار

$\vec{\eta}$ = اکائی عمودی بردار اور

ρ منحنی کے کسی نقطہ پر انحنا ہے۔

ثبوت: ہم جانتے ہیں کہ

$$\vec{V} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} \qquad ......(1)$$

اس مساوات کو دونوں اطراف سے بہ لحاظ t تفرق کرنے پر

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\vec{\tau}\right)$$
$$= \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau} + \frac{ds}{dt}\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$
$$= \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau} + \frac{ds}{dt}\frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt}$$
$$= \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{d\vec{\tau}}{ds}$$
$$\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau} + \rho\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\vec{\eta} \qquad ......(2)$$

اس مساوات کے ضریب (Coefficients) کو درج ذیل شکل میں بدلہ جا سکتا ہے

$$C_{\vec{\tau}} = \frac{d^2s}{dt^2}, C_{\vec{\eta}} = \rho\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

تب

$$\vec{a} = \vec{\tau}C_{\vec{\tau}} + \vec{\eta}C_{\vec{\eta}} \qquad ......(3)$$

مساوات (3) میں میزانیہ $C_{\vec{\eta}}$ اور $C_{\vec{\tau}}$ کو بلترتیب اسراع کے عمودی اجزا اور مماسی اجزا کہتے ہیں۔ برداروں $C_{\vec{\eta}}\vec{\eta}$ اور $C_{\vec{\tau}}\vec{\tau}$ کو بلترتیب اسراع کے عمودی اجزا اور مماسی اجزا کہتے ہیں۔

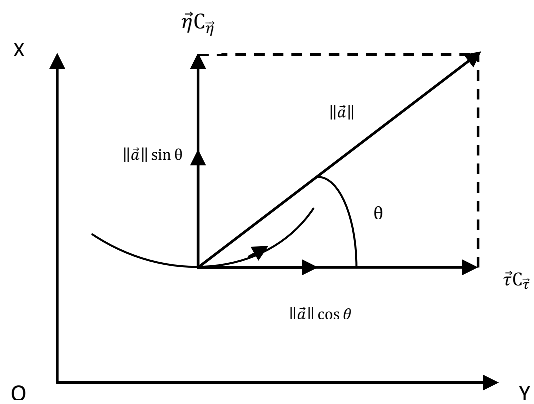
اسراع کے میزانیہ اجزا سے اس اثر کی وضاحت کی جا سکتی ہے کہ جب ڈرائیور موٹر کار کی رفتار اچانک بڑھا دیتا ہے یا جب یہ کسی گھماؤدار سڑک پر چلتی ہے۔ رفتار کا اچانک بڑھ جانا اسراع کے مماسی میزانی اجزا $\frac{d^2s}{dt^2}$ کی قدر کو زیادہ کر دیتا ہے اور نیوٹن (Newton) کے دوسرے قانون کے مطابق اس کی وجہ سے گردش کی جہت میں موٹر کار پر ایک بڑی مماسی طاقت لگتی ہے۔

اسی طرح گھماؤدار سڑک پر چلتی ہوئی کار پر اسراع کے عمودی اجزا کے دو عوامل (Factors) رفتار $\frac{ds}{dt}$ کا مربع اور انحنا ρ ہیں۔ اس طرح تیز رفتار کے ساتھ تیز موڑ کار پر بڑی عمودی طاقت سے مطابقت رکھتا ہے۔

قضیہ: اگر کوئی ذرہ نظام D 2 یا D 3 میں کسی ہموار منحنی C کے گرد گردش کرتا ہے، تب منحنی کے ہر ایک نقطہ پر رفتار اور اسراع کے درج ذیل رشتوں سے $C_{\vec{\eta}}$، $C_{\vec{\tau}}$ اور ρ کو محسوب کیا جاتا ہے

$$C_{\vec{\eta}} = \frac{\|\vec{V}\times\vec{a}\|}{\|\vec{V}\|}\text{،}\quad C_{\vec{\tau}} = \frac{\vec{V}\cdot\vec{a}}{\|\vec{V}\|}\quad \text{اور}\quad \rho = \frac{\|\vec{V}\times\vec{a}\|}{\|\vec{V}\|^3}$$

ثبوت: جیسا کہ درج ذیل شکل میں دیکھا جا سکتا ہے کہ دو برداروں $C_{\vec{\tau}}\vec{\tau}$ اور $\vec{a}$ کا درمیانی زاویہ θ ہے۔ اس لیے



شکل 15.3.2

$$C_{\vec{\tau}} = \|\vec{a}\|\cos\theta = \frac{\|\vec{V}\|\|\vec{a}\|\cos\theta}{\|\vec{V}\|} = \frac{\vec{V}\cdot\vec{a}}{\|\vec{V}\|}$$

$$C_{\vec{\eta}} = \|\vec{a}\|\sin\theta = \frac{\|\vec{V}\|\|\vec{a}\|\sin\theta}{\|\vec{V}\|} = \frac{\|\vec{V}\times\vec{a}\|}{\|\vec{V}\|}$$

$$\rho = \frac{C_{\vec{\eta}}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} = \frac{C_{\vec{\eta}}}{\|\vec{V}\|^2}$$

$$\because C_{\vec{\eta}} = \frac{\|\vec{V}\times\vec{a}\|}{\|\vec{V}\|}$$

اس لیے

$$\rho = \frac{\|\vec{V}\times\vec{a}\|}{\|\vec{V}\|^3}$$

مثال3- اس ذرہ کی $t=\frac{\pi}{3}$ پر رفتار اور اسراع حاصل کیجیے، جو 2D نظام میں گردش کرتا ہے، اور جس کا وقت t پر مقام بردار $\vec{r}(t)=3\cos t\,\hat{\imath}+3\sin t\,\hat{\jmath}$ ہے۔ پھر $\|\vec{V}\|$ بھی حاصل کیجیے۔

حل-   دیا ہے ذرہ کا مقام بردار

$$\vec{r}(t)=3\cos t\,\hat{\imath}+3\sin t\,\hat{\jmath}$$

تب بہ لحاظ t تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\vec{V}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=(-3\,sin\,t)\hat{\imath}+(3\,cos\,t)\hat{\jmath}$$

ذرہ کی $t=\frac{\pi}{3}$ پر رفتار ہوگی

$$\vec{V}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{d\vec{r}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{dt}=\left(-3\,sin\frac{\pi}{3}\right)\hat{\imath}+\left(3\,cos\frac{\pi}{3}\right)\hat{\jmath}$$
$$=-3\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\imath}+\frac{3}{2}\hat{\jmath}$$

اور ذرہ کا اسراع

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{V}(t)}{dt}=(-3\,cos\,t)\hat{\imath}+(-3\,sin\,t)\hat{\jmath}$$

تب ذرہ کا وقت $t=\frac{\pi}{3}$ پر اسراع ہوگا

$$\vec{a}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{d\vec{V}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{dt}=\left(-3\,cos\frac{\pi}{3}\right)\hat{\imath}+\left(-3\,sin\frac{\pi}{3}\right)\hat{\jmath}$$
$$=-\frac{3}{2}\hat{\imath}-3\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\jmath}$$

اور

$$\|\vec{V}\|=\sqrt{\left(-3\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{27+9}{4}}$$
$$=3\ \text{اکائی}$$

مثال4- اس ذرہ کی وقت $t=0$ پر رفتار اور اسراع حاصل کیجیے، جو منحنی $\vec{r}(t)=e^t\hat{\imath}+e^{-t}\hat{\jmath}$ کے گرد گردش کرتا ہے۔ پھر $\|\vec{V}\|$ اور $\|\vec{a}\|$ بھی حاصل کیجیے۔

حل-   دیا ہے درجہ ذیل منحنی کے گرد گردش کر رہا ہے

$$\vec{r}(t)=e^t\hat{\imath}+e^{-t}\hat{\jmath}$$

اس مساوات کو بہ لحاظ t تفرق کرنے پر

$$\vec{V}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=e^t\hat{\imath}-e^{-t}\hat{\jmath}$$

ذرہ کی $t = 0$ پر رفتار ہو گی

$$\vec{V}(0) = \frac{d\vec{r}(0)}{dt} = e^0\hat{\imath} - e^0\hat{\jmath}$$
$$= \hat{\imath} - \hat{\jmath}$$

اور ذرہ کا اسراع

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = e^t\hat{\imath} + e^{-t}\hat{\jmath}$$

تب ذرہ کا وقت $t = 0$ پر اسراع ہو گا

$$\vec{a}(0) = \frac{d\vec{V}(0)}{dt} = e^0\hat{\imath} + e^0\hat{\jmath}$$
$$= \hat{\imath} + \hat{\jmath}$$

اور

$$\|\vec{\mathrm{V}}\| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2}$$
$$= \sqrt{2} \text{ اکائی}$$

اور

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2}$$
$$= \sqrt{2} \text{ اکائی}$$

مثال 5- مان لو کہ کوئی ذرہ 3D میں اس طرح گردش کرتا ہے کہ وقت t پر اس کا مقام بردار $\vec{r}(t) = t\hat{\imath} + \frac{t^2}{2}\hat{\jmath} + \frac{t^3}{3}\hat{k}$ ہے، تب حاصل کیجیے:

a) اسراع کے مماسی میزانیہ اور عمودی میزانیہ اجزا (Tangential Scalar and Normal Scalar Components of Acceleration)

b) اسراع کے مماسی بردار اور عمودی بردار اجزا (Tangential Vector and Normal Vector Components of Acceleration)

c) ذرے کی وقت t پر منحنی کے کسی نقطہ پر انحنا

حل- دیا ہے ذرہ کا مقام بردار

$$\vec{r}(t) = t\hat{\imath} + \frac{t^2}{2}\hat{\jmath} + \frac{t^3}{3}\hat{k}$$

بہ لحاظ t تفرق کرنے پر

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \hat{\imath} + t\hat{\jmath} + t^2\hat{k}$$

دوبارہ بہ لحاظ t تفرق کرنے پر

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \hat{\jmath} + 2t\hat{k}$$

اب

$$\|\vec{\mathrm{V}}\| = \sqrt{(1)^2 + (t)^2 + (t^2)^2}$$

$$= \sqrt{t^4 + t^2 + 1}$$

$\vec{V}$ اور $\vec{a}$ کے میزانیہ اور برداری حاصل ضرب

$$\vec{V} \cdot \vec{a} = t + 2t^3$$

اور

$$\vec{V} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & 2t \end{vmatrix}$$

$$= (2t^2 - t^2)\hat{\imath} - (2t - 0)\hat{\jmath} + (1 - 0)\hat{k}$$

$$= t^2\hat{\imath} - 2t\hat{\jmath} + \hat{k}$$

اس کے ساتھ ہی

$$\|\vec{V} \times \vec{a}\| = \sqrt{(t^2)^2 + (-2t)^2 + (1)^2}$$

$$= \sqrt{t^4 + 4t^2 + 1}$$

a) ہم جانتے ہیں کہ اسراع کے مماسی میزانیہ اجزا اور عمودی میزنیہ اجزا درجہ ذیل ہوتے ہیں

$$C_{\vec{\tau}} = \frac{\vec{V} \cdot \vec{a}}{\|\vec{V}\|}$$

$$C_{\vec{\eta}} = \frac{\|\vec{V} \times \vec{a}\|}{\|\vec{V}\|}$$

اس لیے،

$$C_{\vec{\tau}} = \frac{t + 2t^3}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$$

اور

$$C_{\vec{\eta}} = \frac{\sqrt{t^4 + 4t^2 + 1}}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$$

b) ہم جانتے ہیں کہ مماس کی سمت وہی ہوتی ہے جو رفتار کی ہوتی ہے۔ اس لیے رفتار کی سمت میں مماسی بردار ہے

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|} = \frac{\hat{\imath} + t\hat{\jmath} + t^2\hat{k}}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$$

اسراع کے مماسی بردار اور عمودی بردار اجزا درج ذیل ہوں گے

$$C_{\vec{\tau}}\vec{\tau} = \left(\frac{t + 2t^3}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}\right)\left(\frac{\hat{\imath} + t\hat{\jmath} + t^2\hat{k}}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}\right)$$

$$= \left(\frac{t + 2t^3}{t^4 + t^2 + 1}\right)\left(\hat{\imath} + t\hat{\jmath} + t^2\hat{k}\right)$$

اور

$$C_{\vec{\eta}}\vec{\eta} = \vec{a} - C_{\vec{\tau}}\vec{\tau}$$

$$= (\hat{j} + 2t\hat{k}) - \left(\frac{t + 2t^3}{t^4 + t^2 + 1}\right)(\hat{\imath} + t\hat{j} + t^2\hat{k})$$
$$= -\left(\frac{t + 2t^3}{t^4 + t^2 + 1}\right)\hat{\imath} + \left(1 - \frac{t^2 + t^4}{t^4 + t^2 + 1}\right)\hat{j} + \left(2t - \frac{t^3 + 2t^5}{t^4 + t^2 + 1}\right)\hat{k}$$
$$= -\left(\frac{t + 2t^3}{t^4 + t^2 + 1}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{1}{t^4 + t^2 + 1}\right)\hat{j} + \left(\frac{2t + t^3}{t^4 + t^2 + 1}\right)\hat{k}$$
$$= \frac{1}{t^4 + t^2 + 1}\left[(t + 2t^3)\hat{\imath} + \hat{j} + (2t + t^3)\hat{k}\right]$$

(c ہم جانتے ہیں کہ ذرے کی وقت t پر منحنی کے کسی نقطہ پر انحنا

$$\rho = \frac{\|\vec{V} \times \vec{a}\|}{\|\vec{V}\|^3}$$
$$= \frac{\sqrt{t^4 + 4t^2 + 1}}{(t^4 + t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

15.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے سیکھا:

1. اگر کوئی ذرہ نظام 2D یا 3D میں کسی منحنی C کے ساتھ گردش کرتا ہے، تب منحنی کے ہر ایک نقطہ پر رفتار اور اسراع کے برداروں کو $\vec{V} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}$ اور $\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau} + \rho\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\vec{\eta}$ کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔ جہاں s منحنی کے قوس کی لمبائی ہے، اور $\vec{\tau}$ کو اکائی مماسی بردار، $\vec{\eta}$ کو اکائی عمودی بردار اور ρ منحنی کے کسی نقطہ پر انحنا ہے۔
2. اگر کوئی ذرہ نظام 2D یا 3D میں کسی ہموار منحنی C کے گرد گردش کرتا ہے، تب منحنی کے ہر ایک نقطہ پر رفتار اور اسراع کے درج ذیل رشتوں سے $C_{\vec{\tau}}$، $C_{\vec{\eta}}$ اور ρ کو محسوب کیا جاتا ہے

$$\rho = \frac{\|\vec{V}\times\vec{a}\|}{\|\vec{V}\|^3} \qquad \text{اور} \qquad C_{\vec{\tau}} = \frac{\vec{V}\cdot\vec{a}}{\|\vec{V}\|}, C_{\vec{\eta}} = \frac{\|\vec{V}\times\vec{a}\|}{\|\vec{V}\|}$$

تب اسراع ہوگا $\vec{a} = \vec{\tau}C_{\vec{\tau}} + \vec{\eta}C_{\vec{\eta}}$، جس میں میزانیے $C_{\vec{\tau}}$ اور $C_{\vec{\eta}}$ کو بلترتیب اسراع کے عمودی اجزا اور مماسی اجزا کہتے ہیں۔ برداروں $\vec{\tau}C_{\vec{\tau}}$ اور $\vec{\eta}C_{\vec{\eta}}$ کو بلترتیب اسراع کے عمودی اجزا اور مماسی اجزا کہتے ہیں۔

15.4 کلیدی الفاظ (Key Words)

مماسی اجزا، عمودی اجزا، اسراع، رفتار، انحنا

15.5 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

15.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. اگر $\vec{r}(t)$ کسی ذرہ کا وقت t پر مقام بردار ہے، تب ذرہ کی اس وقت رفتار۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔ ہوتی ہے۔
2. اگر $\vec{r}(t)$ کسی ذرہ کا وقت t پر مقام بردار ہے، تب ذرہ کی اس وقت اسراع۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔ ہوتا ہے۔
3. اگر کوئی ذرہ نظام 2D یا 3D میں کسی ہموار منحنی C کے گرد گردش کرتا ہے، تب منحنی کے ہر ایک نقطہ پر اسراع کے مماسی میزانیہ اجزا۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔ ہے۔
4. اگر $\vec{F}$ اور $\vec{G}$ دو برداری تفاعل ہیں، تب۔۔۔۔۔۔ $\frac{d}{dt}\left[\vec{F}\cdot\vec{G}\right] =$
5. اگر $\vec{F}$ اور $\vec{G}$ دو برداری تفاعل ہیں، تب۔۔۔۔۔۔ $\frac{d}{dt}\left[\vec{F}\times\vec{G}\right] =$
6. برداری تفاعل کی تعریف کیجیے۔
7. کسی برداری تفاعل کی تسلسل(Continuity) سے آپ کیا سمجھتے ہیں؟
8. کسی برداری تفاعل کے تفرق پزیر ہونے سے آپ کیا سمجھتے ہیں؟

15.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

1. مان لو کہ کسی ذرہ کا مقام بردار $\vec{r}(t) = \mathrm{e}^{t}\sin t\,\hat{\imath} + \mathrm{e}^{t}\cos t\,\hat{\jmath} + t\hat{k}$ ہے، جو کسی خط پر گردش کر رہا ہے۔ ذرہ کی وقت $t = \frac{\pi}{2}$ پر رفتا کیا ہوگی؟
2. کسی ذرہ کا مقام بردار $\vec{r}(t) = \mathrm{e}^{-t}\hat{\imath} + \mathrm{e}^{t}\hat{\jmath}$ ہے۔ $t = 0$ پر ذرہ کا اسراع حاصل کیجیے۔

15.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات(Long Answer Type Questions)

1. مان لو کہ کوئی ذرہ 3D میں اس طرح گردش کرتا ہے کہ وقت t پر اس کا مقام بردار $\vec{r}(t) = \mathrm{e}^{t}\hat{\imath} + \mathrm{e}^{-2t}\hat{\jmath} + t\hat{k}$ ہے، تب $t = 0$ پر حاصل کیجیے:
   a) اسراع کے مماسی میزانیہ اور عمودی میزانیہ اجزا
   b) اسراع کے مماسی بردار اور عمودی بردار اجزا
   c) ذرہ کا وقت t پر منحنی کے کسی نقطہ پر انحنا
2. مان لو کہ کوئی ذرہ 2D میں اس طرح گردش کرتا ہے کہ وقت t پر اس کا مقام بردار $\vec{r}(t) = \cos t^2\,\hat{\imath} + \sin t^2\,\hat{\jmath}$

ہے،تب $t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ پر حاصل کیجیے:

a) اسراع کے مماسی میزانیہ اور عمودی میزانیہ اجزا

b) اسراع کے مماسی بردار اور عمودی بردار اجزا

c) ذرہ کا وقت t پر منحنی کے کسی نقطہ پر انحنا

3. مان لو کہ کوئی ذرہ 2D میں اس طرح گردش کرتا ہے کہ وقت t پر اس کا مقام بردار $\vec{r}(t) = e^t \cos t\,\hat{\imath} + e^t \sin t\,\hat{\jmath}$

ہے،تب $t = \frac{\pi}{4}$ پر حاصل کیجیے:

a) اسراع کے مماسی میزانیہ اور عمودی میزانیہ اجزا

b) اسراع کے مماسی بردار اور عمودی بردار اجزا

c) ذرہ کا وقت t پر منحنی کے کسی نقطہ پر انحنا

15.6 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Calculus, H. Anton, I. Bivens, S. Davis, John Wiley & Sons, Inc. (10th Edition)
2. Calculus, M. J. Strauss, G. L. Bradley, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall (3rd Edition)

اکائی 16۔ موڈلنگ، بیلسٹکس اور پلانیٹری گردش

(Modeling, Ballistics and Planetary Motion)

اکائی کے اجزا

16.0 تمہید(Introduction)

سولہویں صدی سے پہلے ایسٹرونومیکی تاریخ میں ایک زبردست کھوج ہوئی جب جوہنس کیپلر نے بتایا کہ سبھی سیارے(Planets) ایک خاص راستے پر ہی گردش کر رہے ہیں جو کہ ایک الپس (Ellipse) ہے اور سورج انکے ایک فوکس پر ہے۔ اس کے بعد اساک نیوٹن (Isaac Newton) نے ریاضی میں بتایا کہ اس طرح کی سیاروں کے گردش ان پر لگنے والے گریوی ٹیشنل کھنچاو (Gravitational Attraction) کی وجہ سے ہے۔اس حصہ میں ہم ویکیوم میں کسی پروجیکٹائل کی گردش کا ماڈل بنانے پر گفتگو کریں گے۔ہم مان لیں گے کہ پروجیکٹائل کی گردش جو کہ کسی منحنی راستے(Curved Path) پر اڑایا جاتا ہے زمینی گریوٹیشنل قوت(Earth's Gravitational Field) کے اندر کام کرتی ہے۔پلانیٹری گردش کے لیے کیپلر کے قوانیناور اس کے بعد کیپلر کے دوسرے قانون کو ثابت کریں گے۔

16.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ:

1۔ ویکیوم میں کسی پروجیکٹائلکیگردشکاماڈلبنا سکیں۔

2۔ اونچائی، پرواز کا وقت اور آئیڈیل پروجیکٹائل گردش کے لیے رینج نکالسکیں گے۔

3۔ کیپلر کے دوسرے قانون کو ثابت کرسکیں۔

16.2 کسی پروجیکٹائل کی گردش(Projectile Motion)

پروجیکٹائل کی گردش کے لیے مساوات کو تشکیل دینے کے لیے ہم مان لیتے ہیں کہ پروجیکٹائل کسی عمودی(Vertical) کورڈینیٹ سطح میں حرکت پذیر ذرہ(Moving Particle) کی طرح ہے اور پروجیکٹائل پر اس کی اڑان کے دوران لگنے والی واحد طاقت(Force) گریوٹی کی مستقل طاقت ہے، جو ہمیشہ نیچے کی طرف لگتی ہے۔

مان لیجیے کہ پروجیکٹائل کو ابتدا سے وقت $t = 0$ پر لانچ کیا جاتا ہے جب کہ اس کی پہلے کواڈرانٹ(Quadrant) میں ابتدائی رفتار$\overrightarrow{V_0}$ ہے۔مان لیجیے کہ$\overrightarrow{V_0}$ہوری زونٹل سےθاینگل بناتا ہے۔تب

$$\overrightarrow{V_0} = \left(\left|\overrightarrow{V_0}\right| \cos\theta\ \hat{\imath}\right)\hat{\imath} + \left(\left|\overrightarrow{V_0}\right| \sin\theta\right)\hat{\jmath}$$

اگر$\left|\overrightarrow{V_0}\right| = v_0$،تب

$$\overrightarrow{V_0} = (v_0 cos\theta)\hat{\imath} + (v_0\, sin\,\theta)\hat{\jmath} \qquad ...(1)$$

پروجیکٹائل کی ابتدائی پوزیشن پے

$$\overrightarrow{r_0} = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} = 0 \qquad ...(2)$$

نیوٹن کا گردش کا دوسرا قانون کہتا ہے کہ کسی پروجیکٹائل پر لگنے والی طاقت(Force) پروجیکٹائل کی کمیت(Mass)یعنی 'm' اور اس کے اسراع (Acceleration)کے ضرب کے برابر ہوتا ہے۔مان لیجیے کہ پروجیکٹائل کا مقام بردار(Position Vector) $\vec{r}$ اور وقت t ہے۔اگر تاقت(Force)صرف گریوی ٹیشنل $-mg\hat{\jmath}$ ہو تب،

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -mg\hat{\jmath}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -g\hat{\jmath}$$

درجہ ذیل ابتدائی قدری مثلہ(Initial Value Problem)کو حل کر کے ہم $\vec{r}$ کو t کے تفاعل کی طرح حاصل کریں گے۔

جب $t = 0$ ہے،

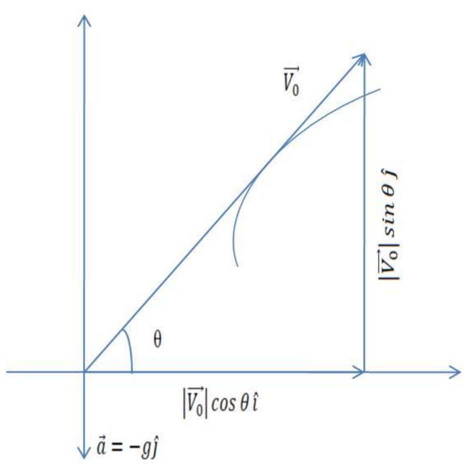
$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\mathrm{g}\hat{\jmath}, \vec{r} = r_0, \frac{d\vec{r}}{dt} = \overrightarrow{V_0}$$

اس مساوات کو تکمل کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -\mathrm{g}t\hat{\jmath} + \overrightarrow{V_0}$$

دوبارہ تکمل کرنے پر

$$\vec{r}(\mathrm{t}) = -\mathrm{g}\frac{\mathrm{t}^2}{2}\hat{\jmath} + \overrightarrow{V_0}t + \overrightarrow{r_0}$$



شکل16.2.1

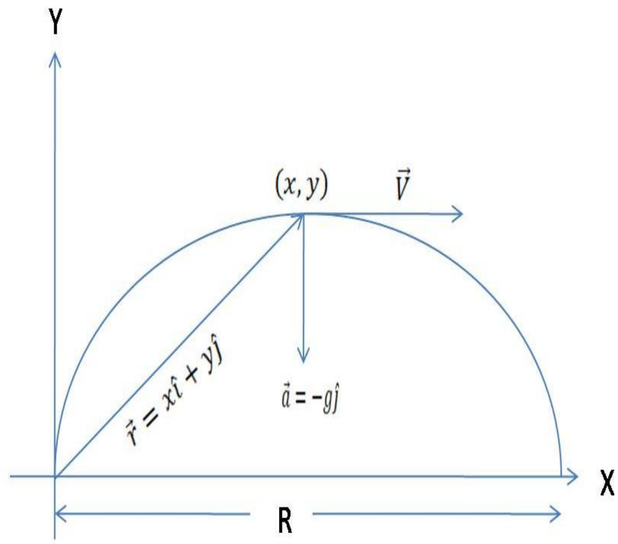
مساوات (1)اور(2)سے

$$\vec{r}(\mathrm{t}) = -\frac{1}{2}\mathrm{g}t^2\hat{j} + (v_0 cos\theta)t\hat{i} + (v_0\, sin\,\theta)t\hat{j}$$

آئیڈیل پروجیکٹائل گردش کے لیے ویکٹر مساوات درجہ ذیل ہے۔

$$\vec{r}(\mathrm{t}) = (v_0 cos\theta)t\hat{i} + \left\{(v_0\, sin\,\theta)t - \tfrac{1}{2}\mathrm{g}t^2\right\}\hat{j} \qquad ...(3)$$

جہاں θ ایلی ویشن (Elevation) کا پروجیکٹائل جھکاؤ ہے اور v_0 پروجیکٹائل کی ابتدائی چال ہے۔



شکل 16.2.2

$\vec{r}(\mathrm{t})$ کے اجزا (Components) سے حاصل ہوتی ہے

$$\left.\begin{aligned} y(t) &= (v_0\, sin\,\theta)t - \tfrac{1}{2}\mathrm{g}t^2 \\ \text{اور} \qquad x(t) &= (v_0 cos\theta)t \end{aligned}\right\} \qquad ...(4)$$

جہاں $x(t)$ ڈسٹینس ڈاؤن رینج اور $y(t)$ پروجیکٹائل کی وقت $t \geq 0$ پر اونچائی ہے۔

ویکیوم میں کسی پروجیکٹائل کی گردش:

مان لیجیے کہ کوئی پروجیکٹائل ویکیوم میں کسی کورڈینیٹ سطح میں گردش کر رہا ہے، جب کہ محور x سطح کے ساتھ ہے۔مان لیجیے کہ پروجیکٹائل کو اونچائی s_0 سے ابتدائی چال v_0 اور ایلی ویشن کے جھکاؤ θ سے خارج (Fired) کیا جاتا ہے۔وقت $t \geq 0$ پر یہ $(x(t), y(t))$ پر ہوگا جہاں

$$x(t) = (v_0 cos\theta)t$$

$$y(t) = (v_0\, sin\,\theta)t - \frac{1}{2}\mathrm{g}t^2 + s_0$$

مثال 1: ایک پروجیکٹائل زمین سے $30°$ کے جھکاؤ اور ابتدائی چال 400 میٹر فی سیکنڈ سے خارج کیا جاتا ہے۔ 8 سیکنڈ کے بعد پروجیکٹائل کہاں ہو گا؟

حل: دیا ہے $t = 8sec, g = 9.8\, {}^{m}/_{s^2}, \theta = 30^{\circ}, V_0 = 400\, {}^{m}/_{s}$

ہم جانتے ہیں کہ

$$\vec{r}(t) = (v_0 \cos\theta)t\hat{\imath} + \left\{(v_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2\right\}\hat{\jmath}$$
$$\vec{r}(8) = (400\cos 30)(8)\hat{\imath} + \left\{(400\sin 30)(8) - \frac{1}{2}(9.8)(8)^2\right\}\hat{\jmath}$$
$$= 400 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 8\hat{\imath} + \left\{400 \times \frac{1}{2} \times 8 - \frac{1}{2} \times (9.8)(64)\right\}\hat{\jmath}$$
$$= 400 \times \sqrt{3} \times 4\hat{\imath} + \{400 \times 1 \times 4 - (4.9)(64)\hat{\jmath}\}$$
$$= 1600\sqrt{3}\hat{\imath} + (1600 - 313.6)\hat{\jmath}$$
$$= 1600\sqrt{3}\hat{\imath} + 1286.4\hat{\jmath}$$

اس لیے 8 سیکنڈ کے بعد پروجیکٹائل ہوا میں تقریباً 1286 میٹر کی اونچائی اور $1600\sqrt{3}$ کی ڈاؤن رینج پر ہو گا۔

16.3 اونچائی، پرواز کا وقت اور رینج (Height, Time Period and Range)

مساوات (3) کے ذریعے اوریجن سے خارج کیے گیے کسی پروجیکٹائل کی گردش کے بارے میں پوچھے جانے والے زیادہ تر سوالات کا جواب حاصل ہو جاتا ہے۔ کوئی پروجیکٹائل اپنی بلند ترین سطح پر پہنچتا ہے جب کہ اس کی عمودی (Vertical) رفتار کا جزو (Component) صفر ہو۔

$$\frac{dy}{dx} = v_0\, sin\,\theta - gt = 0$$
$$\Rightarrow \quad t = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

اس وقت t پر

$$y_{max} = (v_0\, sin\,\theta)\left(\frac{v_0\, sin\,\theta}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0\, sin\,\theta}{g}\right)^2$$
$$= \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2g}$$

کوئی پروجیکٹائل زمین پر تب آتا ہے جب کہ

$$(v_0\, sin\,\theta)T - \frac{1}{2}gT^2 = 0$$
$$T\left(v_0\, sin\,\theta - \frac{1}{2}gT\right) = 0$$
$$\Rightarrow \qquad T = 0, T = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

ہم جانتے ہیں کہ $T = 0$ ابتدائی وقت ہے اور $T = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$, ووقت ہے جب کہ پروجیکٹائل زمین کو چھوتا ہے۔

پروجیکٹائل کی رینج حاصل کرنے کے لیے ہم ہوری زونٹل(Horizontal)جزو کو محسوب کرتے ہیں۔

جب کہ

$T = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$ ہے

$$x = (v_0\, cos\,\theta)t$$
$$R = (v_0\, cos\,\theta)\left(\frac{2v_0 \sin\theta}{g}\right)$$
$$R = \frac{{v_0}^2}{g}(2\sin\theta\cos\theta) = \frac{{v_0}^2}{g}\sin 2\theta$$

رینج سب سے بڑی ہوگی اگر $\sin 2\theta = 1$

$$\Rightarrow \qquad 2\theta = 90°$$
$$\Rightarrow \qquad \theta = 45°$$

اب ہم جان گیے ہیں کہ

1. سب سے زیادہ اونچائی $y_{max} = \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2g}$
2. پرواز کا وقت $T = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$ اور
3. رینج $R = \frac{{v_0}^2}{g}\sin 2\theta$

مثال2: سطح پر کسی مبدا سے ایک پروجیکٹائل کو ابتدائی رفتار $500\, {}^{m}/_{s}$ سے 60° کے جھکاؤ پر خارج کیا جاتا ہے۔ حاصل کریں y_{max}، T اور R

حل: ہم جانتے ہیں

$$y_{max} = \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2g}$$
$$= \frac{(500 \times \sin 60^{\circ})^2}{2 \times 9.8}$$
$$= \frac{\left(500 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{19.6}$$

$$= \frac{750000}{78.4}$$
$$= 9566\ m\ (Approx)$$

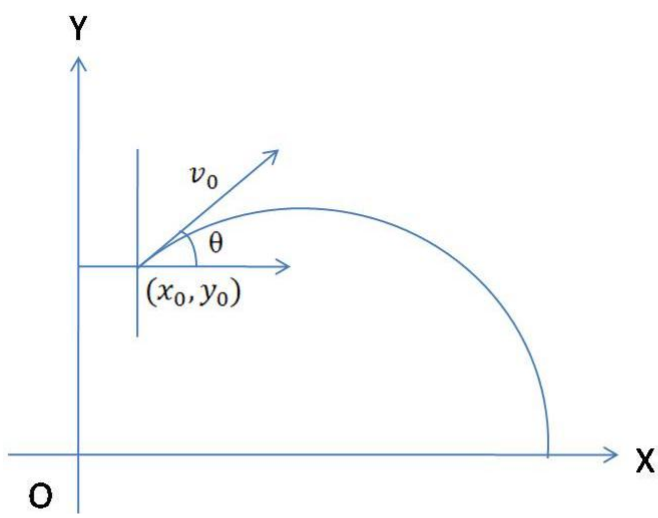
اور

$$T = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$
$$= \frac{2 \times 500 \times sin\, 60^{\circ}}{9.8}$$
$$= \frac{1000 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{9.8}$$
$$= \frac{500 \times \sqrt{3}}{9.8}$$
$$= 88.4\ second\ (Approx)$$

اسی طرح

$$R = \frac{{v_0}^2}{g} \sin 2\theta$$
$$= \frac{(500)^2 \times sin\, 120^{\circ}}{9.8}$$
$$= \frac{50000 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{9.8}$$
$$= 22{,}098\ m\ (Approx)$$

16.4 آئیڈیل ٹریجکٹری(Ideal Trajectory)



شکل16.4.1

کسی پروجیکٹائل کی گردش کے لیے پیرامیٹر کمساوات سے پروجیکٹائل کی گردش کے بارے میں ضروری جانکاری حاصل ہوتی ہے۔اگر $0 \neq \theta$ تب ہم مساوات(4)میں $t = \frac{x}{v_0 sin\theta}$ رکھ کر t کو ہٹاسکتے ہیں۔جس کی مدد سے درج ذیل مساوات حاصل ہوجاتی ہے

$$y = -\left(\frac{g}{2{v_0}^2 cos\theta}\right) x^2 + (tan\theta)x$$

جو کہ ایک پیرابولا کو ظاہر کرتی ہے۔

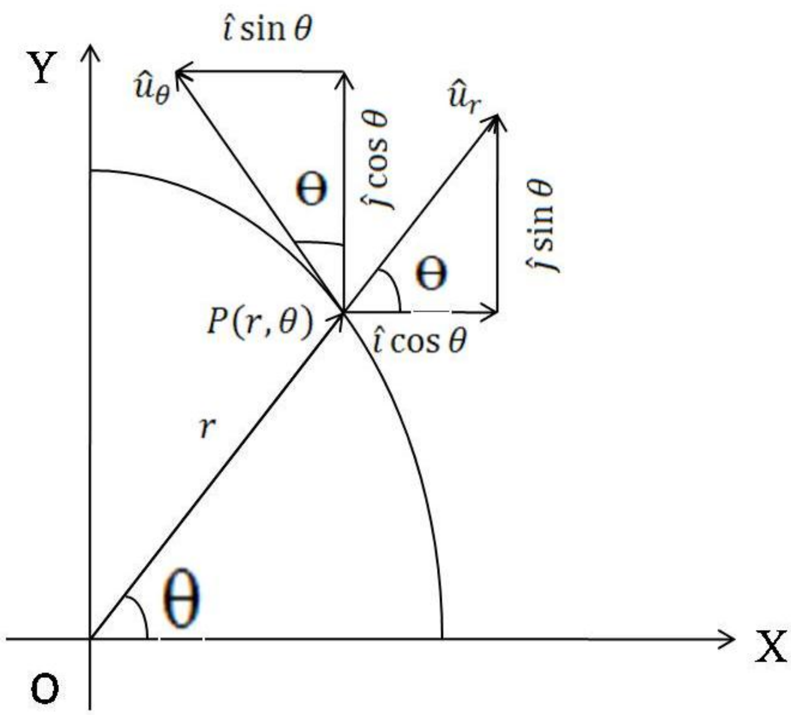
16.5 پلانیٹری گردش کے لیے کیپلر کے قوانین(Kepler's Laws of Planetary Motion)

سولہویں صدی میں جرمن کے ماہر فلکیات جوہنس کیپلر نے پلانیٹری گردش کو واضح کرنے کے لیے تین قوانین دیے جو درج ذیل ہیں:

1۔ سبھی سیارے(Planets)سورج کے گرد ایک اپلٹکل(Elliptical)مدار(Orbit)میں گھومتے رہتے ہیں جب کہ سورج ان کے ایک فوکس پر ہوتا ہے۔

2۔ سیارے کو سورج سے جوڑنے والا ریڈیس ویکٹر برابر رقبہ برابر وقت T کے وقفہ میں پورا کرتا ہے۔

3۔ کسی سیارے کو اپنے مدار کے گرد ایک پورا چکر لگانے میں لگنے والے وقت کا مربع(Square)اس کے مدار کی سیمی میجر (Semi Major) محور کی لمبائی کے کعب(Cube)کے متناسب(Proportional)ہوتا ہے۔



شکل16.5.1ایک منحنی کے ساتھ کسی ذرہ کی گردش

مان لیجیے کہ $\hat{u}_r$ اور $\hat{u}_\theta$ ریڈیل ایکسس اور اس کے عمودی کے ساتھ اکائی بردار ہیں۔ تب

$$\hat{u}_r = (\cos\theta)\hat{\imath} + (\sin\theta)\hat{\jmath}$$
$$\hat{u}_\theta = (-\sin\theta)\hat{\imath} + (\cos\theta)\hat{\jmath}$$

دونوں مساواتوں کو بہ لحاظ θ کے تفرق کرنے پر

$$\frac{d\hat{u}_r}{d\theta} = (-\sin\theta)\hat{\imath} + (\cos\theta)\hat{\jmath} = \hat{u}_\theta$$
$$\frac{d\hat{u}_\theta}{d\theta} = (-\cos\theta)\hat{\imath} - (\sin\theta)\hat{\jmath} = -\hat{u}_r$$

اب مان لو کہ سورج کسی پولر کو آرڈی نیٹ نظام میں پول پر ہے اور مان لو کہ کوئی جسم (Body) سورج S کے گرد گردش کر رہا ہے۔ ریڈیل ویکٹر $\overrightarrow{\mathrm{SB}} = \vec{r}$ کو اس طرح سے لکھا جا سکتا ہے

$$\vec{r} = r\hat{u}_r = (r\cos\theta)\hat{\imath} + (r\sin\theta)\hat{\jmath}$$

جہاں $\|\vec{r}\| = r$ اور رفتار (ویلوسٹی) $\vec{v}$ کے لیے ہے۔

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\hat{u}_r}{dt}$$
$$= \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\hat{u}_r}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$
$$= \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\hat{u}_\theta\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}(\mathrm{t})}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

اور

$$= \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{u}_r + \left[r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}\right]\hat{u}_\theta$$

مثال 3: کسی گردش کرتے ہوئے جسم کا مقام ویکٹر $0 \le t$ کے لیے $\vec{r}(\mathrm{t}) = 2t\hat{\imath} - t^2\hat{\jmath}$ ہے۔ اس کو $\hat{u}_r$ اور $\hat{u}_\theta$ کی ٹرمس (Terms) میں ظاہر کرو۔

حل: دیا ہے

$$\vec{r}(\mathrm{t}) = 2t\hat{\imath} - t^2\hat{\jmath}$$
$$\Rightarrow \qquad r = \|\vec{r}(\mathrm{t})\|$$
$$= \sqrt{(2t)^2 + (-t^2)^2}$$
$$= \sqrt{4t^2 + t^4}$$
$$\Rightarrow \qquad r = t\sqrt{4 + t^2}$$

اور

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-t^2}{2t}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{-t}{2}\right)$$

یہاں $y = -t^2, x = 2t$ ہم جانتے ہیں کہ

$$\vec{r}(\mathrm{t}) = r\hat{u}_r = t\sqrt{4+t^2}\hat{u}_r$$

$$\vec{v}(\mathrm{t}) = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta$$

$$= \left[1\cdot\sqrt{4+t^2} + \frac{t}{2\sqrt{4+t^2}}\cdot 2t\right]\hat{u}_r + \left[t\sqrt{4+t^2}\left(\frac{-2}{4+t^2}\right)\right]\hat{u}_\theta$$

$$= \left(\frac{4+2t^2}{\sqrt{4+t^2}}\right)\hat{u}_r - \left(\frac{2t\sqrt{4+t^2}}{4+t^2}\right)\hat{u}_\theta$$

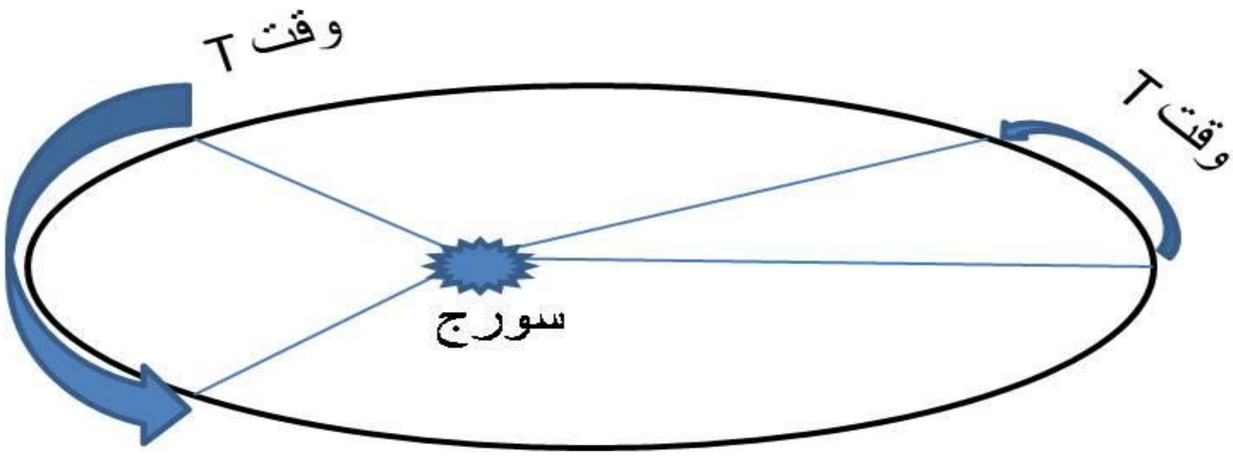
$$= \left(\frac{4+2t^2}{\sqrt{4+t^2}}\right)\hat{u}_r - \left(\frac{2t}{\sqrt{4+t^2}}\right)\hat{u}_\theta$$

$$\vec{v}(\mathrm{t}) = \frac{(4+2t^2)\hat{u}_r - 2t\hat{u}_\theta}{\sqrt{4+t^2}}$$

16.5.1 کیپلر کا دوسرا قانون (Kepler's Second Law)

بیان: سیارے کو سورج سے جوڑنے والا ریڈیس ویکٹر (Radius Vector) برابر رقبہ برابر وقت کے وقفے میں پار کرتا ہے۔

ثبوت: ہم یہ مان کر اس کو ثابت کریں گے کہ سیارے پر سورج کا صرف ایک ہی فورس کام کرتا ہے جو کہ سورج کا گریویٹیشنل کھچاؤ (Attraction) ہے۔



شکل 16.5.1.1

گریویٹیشن کے یونیورسل قانون کے مطابق

$$\vec{\mathrm{F}} = -\frac{\mathrm{GmM}}{\mathrm{r}^2}\hat{u}_r \qquad ...(1)$$

جہاں G گریویٹیشنل مستقل ہے، m اور M سیارے اور سورج کے اوزان ہیں۔ نیوٹن کے دوسرے قانون (گردش کا قانون) کے مطابق

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad ...(2)$$

جہاں $\vec{a}$ سیارے کا اس کے مدار میں اسراع (Acceleration) ہے۔ مساوات (1) اور (2) سے

$$m\vec{a} = -\frac{GmM}{r^2}\hat{u}_r$$
$$\vec{a} = -\frac{GM}{r^2}\hat{u}_r$$

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ کسی سیارے کے اسراع میں صرف ریڈیل اجزا ہوتا ہے۔ اس لیے یہ کنڈیشن درجہ ذیل تفرقی مساوات کی طرح ہے۔

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt} = 0 \qquad ...(3)$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} \qquad ...(4)$$

مساوات (3) اور (4) سے

$$r\frac{d\omega}{dt} + 2\omega\frac{dr}{dt} = 0$$
$$\omega^{-1}\frac{d\omega}{dt} = 2r^{-1}\frac{dr}{dt}$$

تکمل کرنے پر

$$\int \frac{1}{\omega}d\omega = -2\int\frac{1}{r}dr$$
$$\log|\omega| = -2\log|r| + \log|c|$$
$$\Rightarrow \quad \log|\omega| = \log cr^{-2}$$
$$\Rightarrow \quad \omega = cr^{-2}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{d\theta}{dt} = cr^{-2}$$
$$c = r^2\frac{d\theta}{dt} \qquad ...(5)$$

مان لیجیے کہ $[t_1, t_2]$ اور $[t_3, t_4]$ دو برابر لمبائی کے وقفے ہیں۔

$$\therefore t_2 - t_1 = t_4 - t_3$$

وقفہ $[t_1, t_2]$ میں پار کیا گیا رقبہ

$$S_1 = \int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{2}r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} r^2\frac{d\theta}{dt}dt$$

مساوات (5) سے

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} cdt$$
$$= \frac{1}{2}c[t]_{t_1}^{t_2}$$
$$= \frac{1}{2}c(t_2 - t_1)$$

اسی طرح وقفہ $[t_3, t_4]$ میں پار کیا گیا رقبہ

$$S_2 = \frac{1}{2}\int_{t_3}^{t_4} cdt$$
$$= \frac{1}{2}c[t]_{t_3}^{t_4}$$
$$= \frac{1}{2}c(t_4 - t_3)$$

لیکن $t_2 - t_1 = t_4 - t_3$ اس لیے

$$S_1 = S_2$$

اس طرح کیپلر کا دوسرا قانون ثابت ہو جاتا ہے۔

مثال 4: اگر مرکزی اسراع $\frac{\mu}{r^2}$ ہو، تب مدار (Orbit) حاصل کریں۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ

$$\frac{h^2}{p^2}\frac{dp}{dr} = \frac{\mu}{r^2}$$

دونوں طرف انٹیگریٹ کرنے پر

$$\frac{h^2}{p^2} = \frac{2\mu}{r} + c$$

اس کو $\frac{b^2}{p^2} = \frac{2a}{r} \mp l$ سے ملانے پر جو کہ ایک الپس (Ellipse) یا ہائپر بولا ان کے فوکس کے مطابق اس سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{h^2}{b^2} = \frac{\mu}{a} = \frac{c}{\mp l}$$

$$\Rightarrow \quad h = \sqrt{\frac{\mu b^2}{a}} = \sqrt{\mu l}$$

جہاں l سیمی لیٹس ریکٹم (Semi Latus Rectum) ہے

$$\Rightarrow \quad c = \mp\frac{\mu}{a}$$

اس لیے مدار ایک الپس ہوگا، پیرابولا ہوگا یا ہائپر بولا ہوگا۔ یہ اس بات سے ظاہر ہوگا کہ c کی قیمت منفی(Negative) یا صفر، مثبت (Positive)ہوگی۔

اس کے علاوہ

$$v^2 = \frac{h^2}{p^2} = \frac{2\mu}{r} + c = \mu\left(\frac{2}{r} \mp \frac{1}{a}\right)$$

اس طرح الپٹک مدار کے لیے $v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$

ہائپر بولک مدار کے لیے $v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right)$

اور پیرابولک مدار کے لیے $v^2 = \frac{2\mu}{r}$

16.6 اکتسابی نتائج(Learning Outcomes)

اس اکائی میں آپ نے پروجیکٹائل کی بنیادی جانکاری حاصل کی اور یہ بھی جانا کہ کوئی پروجیکٹائل ایک پیرابولک راستے پر گردش کرتا ہے۔ اس کی مدد سے کچھ مثالوں کو حل کرنا سیکھا۔ اس کے بعد ہم نے کیپلر کے قوانین کے متعلق بنیادی جانکاری حاصل کی اور فلکیات میں اس کی زرورت پر روشنی ڈالی۔

16.7 کلیدی الفاظ(Key Words)

فلکیات، پروجیکٹائل، کیپلر کے قوانین، مدار، الپٹک، ہائپر بولا، فوکس، ایلی ویشن، پیرابولا

16.8 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

16.8.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. نیوٹن کا گردش کا دوسرا قانون کیا ہے۔ مختصر جواب دیجیے۔
2. اگر کسی ذرہ کا مقام ویکٹر $\vec{r}(t)$ ہو، تب اس ذرہ کی کسی وقت t پر رفتار (Velocity) اور اسراع(Acceleration) بتایے۔
3. اگر کسی ذرہ کا مقام ویکٹر $\vec{r}(t)$ ہو، تب اس ذرہ کی کسی وقت کے وقفہ $t_1 \leq t \leq t_2$ پر نقل مکان(Displacement) بتایے۔
4. سیارے کو سورج سے جوڑنے والا ریڈیس ویکٹر(Radius Vector) برابر رقبہ برابر وقت کے وقفے میں پار کرتا ہے۔(صحیح / غلط)

5. کسی پروجیکٹائل کی ٹریجیکٹری ایک ایلپس ہوتی ہے۔(صحیح / غلط)

6. کسی سیارے کو اپنے مدار کے گرد ایک پورا چکر لگانے میں لگنے والے وقت کا مربع (Square) اس کے مدار کی سیمی میجر (Semi Major) محور کی لمبائی کے مربع کے متناسب (Proportional) ہوتا ہے۔(صحیح / غلط)

7. اگر کسی ذرہ کا مقام ویکٹر $\vec{r}(t) = \cos t\, \hat{\imath} + \hat{\jmath}$ ہو، تب اس ذرہ کی رفتار بتایئے۔

8. اگر کسی ذرہ کا مقام ویکٹر $\vec{r}(t) = 2t^2\hat{\imath} + t^3\hat{\jmath}$ ہو، تب اس ذرہ کا اسراع حاصل کریں۔

9. مان لیجیے کہ G گریوی ٹیشنل مستقل ہے، m اور M سیارے اور سورج کے اوزان ہیں، تب نیوٹن کے یونیورسل گریوی ٹیشن کے قانون کے مطابق سورج اور سیارہ ایک دوسرے کو .... قوت سے کھینچتے ہیں۔

10. کسی سیارے کو اپنے مدار کے گرد ایک پورا چکر لگانے میں لگنے والے وقت کا .... اس کے مدار کی سیمی میجر (Semi Major) محور کی لمبائی کے مربع کے متناسب (Proportional) ہوتا ہے۔

16.8.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. اگر کسی ذرہ کا مقام ویکٹر $\vec{r}(t) = t\hat{\imath} + t^2\hat{\jmath}$ ہو، تب $t = 2$ پر اس ذرہ کی رفتار بتایئے۔

2. اگر کسی ذرہ کا مقام ویکٹر $\vec{r}(t) = (2 + 4t)\hat{\imath} + (1 - t)\hat{\jmath}$ ہو، تب $t = 1$ پر اس ذرہ کا اسراع حاصل کریں۔

3. اگر کسی شیل کی کسی کینن (Canon) کے بیرل (Barrel) کو چھوڑنے کے وقت چال 1000 فٹ فی سیکنڈ ہو اور بیرل کا زمین سے جھکاؤ 60° ہو، تب شیل کتنی اونچائی تک جائے گا؟ (دیا ہے $g = 32ft/s^2$)

4. اگر کسی ذرہ کا کسی سطح (Plane) میں مقام ویکٹر $\vec{r}(t) = 3\cos t\, \hat{\imath} + 3\sin t\, \hat{\jmath}$ ہو، تب $t = \frac{\pi}{3}$ پر اس ذرہ کی رفتار اور اسراع حاصل کریں۔

5. اگر کوئی ذرہ کسی دیے گیے منحنی $x = 2\cos t\,, y = 2\sin t\,, z = t$ کے ساتھ گھوم رہا ہو، تب $t = \frac{\pi}{4}$ پر اس ذرہ کی رفتار، چال اور اسراع حاصل کریں۔

16.8.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. ایک ذرہ کسی پولر پاتھ کے ساتھ چل رہا ہے، جو اس طرح سے ہے $\mathrm{r}(t) = 3 + 2\sin \mathrm{t}$، $\theta(t) = \mathrm{t}^3$، تب اس ذرہ کی رفتار اور اسراع کو $\hat{\mu}_r$ اور $\hat{\mu}_\theta$ کے ٹرمس میں حاصل کیجیے۔

2. $\vec{V}(t) = \frac{dr}{dt}\hat{\mu}_r + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\mu}_\theta$ کا استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ

$$\vec{a}(t) = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{\mu}_r + \left[r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}\right]\hat{\mu}_\theta$$

3. ثابت کریں کہ اگر کوئی سیارہ اپنے سرکلر مدار میں اچانک رک جایے تو یہ سیارہ $\frac{\sqrt{2}}{8}t$ وقت میں سورج کے اندر گر جایے گا، جہاں t سیارہ کا چکر (Revolution) پورا کرنے میں لگا وقت ہے۔

16.9 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Calculus, H. Anton, I. Bivens, S. Davis, John Wiley & Sons, Inc. (10th Edition)
2. Calculus, M. J. Strauss, G. L. Bradley, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall (3rd Edition)

نمونہ امتحانی پرچہ

بیچلر آف سائنس (Bachelor of Science (Physical Science

Subject Code: BSMM101CCT

پرچہ: علم احصا (Calculus) سمسٹر–I

نشانات: 70 وقت: 3 گھنٹے

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم اور حصہ سوم۔ ہر جواب کے لیے لفظوں کی تعداد اشارتاً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1۔ حصہ اول میں 10 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات / خالی جگہ پر کرنا / مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ $10 \times 1 = 10$

2۔ حصہ دوم میں آٹھ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالات کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریبن 200 لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 6 نمبرات مختص ہیں۔ $5 \times 6 = 30$

3۔ حصہ سوم میں پانچ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالات کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریبن 500 لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 10 نمبرات مختص ہیں۔ $3 \times 10 = 30$

حصہ اول

سوال: 1

(i) $\frac{d^3}{dx^3}(sin\ 2x)$ کو محسوب کرو۔

(ii) خالی جگہ پر کرو۔ $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = \cdots\cdots\cdots$

(iii) خالی جگہ پر کرو۔ $\frac{d^n}{dx^n}\{\sin(ax+b)\} = \cdots\cdots\cdots$

(iv) $\int cos^2 x\, dx$ کو محسوب کرو۔

(v) اگر $\frac{d}{dx}[f(x)] = f(x)$، تب $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ کس کے برابر ہو گا؟

(vi) منحنی $x = f(y)$ کے a اور b عرضی مختصات رکھنے والے نقاط کے درمیان منقطع ہونے والی قوس کو y محور کے اطراف گھمانے سے حاصل کردہ ٹھوس کا حجم $\int_a^b \pi x^2\,\mathrm{dy}$ ہو گا۔ (صحیح/غلط)

(vii) دائرہ $x^2 + \mathrm{y}^2 = 4$ کا کل رقبہ ⋯ ⋯ ⋯ ہے۔

(viii) کیپلر کا دوسرا قانون لکھو۔

(ix) $\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \cdots\cdots$، جہاں $\hat{\imath}$ اکائی بردار ہے۔

(x) $\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \cdots\cdots$، جہاں $\hat{\imath}$ اکائی بردار ہے۔

حصہ دوم

2. اگر $x = a(\theta + \sin\theta), y = a(1 - \cos\theta)$، تب $\theta = \frac{\pi}{2}$ کی قیمت حاصل کریں۔

3. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^2 \sin x^2}$ حاصل کیجیے۔

4. $\int Sin^5 x dx$ حاصل کرو۔

5. $\int Sec^3 x dx$ حاصل کرو۔

6. منحنی $y = \log\sec x$, کی قوسی لمبائی $x = 0$ سے $x = \frac{\pi}{3}$ تک حاصل کرو۔

7. اگر $\vec{\mathrm{F}} = 5\mathrm{t}^2\hat{\imath} + \mathrm{t}\hat{\mathrm{j}} - t^3\hat{\mathrm{k}}$ اور $\vec{\mathrm{G}} = \sin t\,\hat{\imath} - \cos \mathrm{t}\,\hat{\mathrm{j}}$ تب حاصل کرو

(i) $\frac{d}{dt}(\vec{F} \times \vec{G})$ (ii) $\frac{d}{dt}(\vec{F} \cdot \vec{G})$

8. $\frac{d}{dt}\left(\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)$ کی قیمت حاصل کرو۔

9. ثابت کرو کہ $\vec{a} = 2\hat{\imath} + \frac{5}{2}\hat{\jmath} + \hat{k}$ اور $\vec{b} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ ایک دوسرے پر متوازی ہیں۔

حصہ سوم

10. اگر $cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = \log\left(\frac{x}{n}\right)^n$ تب دکھاؤ کہ $x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + 2n^2y_n = 0$

11. x کی قیمتوں کی وہ رینج حاصل کرو جس کے لیے منحنی $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 5x + 7$ اوپر کی طرف کانکیو(Concave)ہو یا نیچے کی طرف۔اور پھر انفلیکشن(Inflexion) کے نقاط بھی حاصل کرو۔

12. $\int tan^n x dx$ حاصل کرو اور پھر اس سے $\int tan^4 x dx$ حاصل کرو۔

13. کسی منحنی $x = acos\,\omega t\,, y = asin\,\omega t\,, z = bt$ کے کسی نقطے پر اکائی مماس ویکٹر حاصل کریں۔

14. اگر $\vec{a} = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}, \vec{b} = b_1\hat{\imath} + b_2\hat{\jmath} + b_3\hat{k}$ اور $\vec{c} = c_1\hat{\imath} + c_2\hat{\jmath} + c_3\hat{k}$ تب $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$ حاصل کریں۔

BSMM150CCP

لیب مینول

(علم احصا)

بی۔ ایس سی

(پہلا سمسٹر)

اکائی 17۔ اعلیٰ رتبے کے مشتقات اور زائدی تفاعل کے مسائل

نمونہ تجرباتی سوال

17.1 بتلاؤ کہ $\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), x \in \mathbb{R}$

مقصد (Aim)

معکوس زائدی تفاعل کو لوگر تھمک تفاعل کے ذریعے دکھا سکتے ہیں۔

طرز عمل (Procedure)

Step I

مان لو کہ

$$y = \sinh^{-1} x$$

Step II

زائدی تفاعل کو درجہ ذیل طریقہ سے قوت نما تفاعل (Exponential Function) کے ارکان میں بیان کرو۔

$$x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

Step III حل حاصل کرو۔

حل / تجویز (Solution/Calculation)

$$\Rightarrow \quad e^y - 2x - e^{-y} = 0$$
$$\Rightarrow \quad e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0$$

جو کہ e^y میں ایک کثیر رکنی ہے، اس لیے

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2}$$
$$= x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

چونکہ $e^y > 0$ لیکن $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$ یا $x < \sqrt{x^2 + 1}$

اس لیے

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$
$$\Rightarrow \qquad y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ ہم دی گئی معکوس زائدی تفاعل کو لوگر تھمک تفاعل کے ذریعہ دکھاسکتے ہیں جو کہ اس طرح ہو گا

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

☆☆☆☆☆

17.2 ذیل میں دیے ہوئے تفاعلات کے مشتقات معلوم کرو۔

(i) $y = \sinh(1 - x^2)$

(ii) $f(x) = \ln(\sinh x)$

(iii) $y = \ln\left(\tanh\frac{x}{2}\right)$

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

17.3 $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+4x^2}}$ تکمل حاصل کریں۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

17.4 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2}$ تکمل حاصل کریں۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

17.5 اگر $\cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = \log\left(\frac{x}{n}\right)^n$ تب دکھاؤ کہ $x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + 2n^2y_n = 0$

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

اکائی 18۔ لیبنیز قضیہ، کانکیوٹی، انفلیکشن نقاط اور ایسمپٹوٹس کے مسئلے

18.1 $\frac{d^n}{dx^n}(x^2e^xCosx)$ حاصل کرو۔

مقصد (Aim)

طرزِ عمل (Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

18.2 x کی قیمتوں کی وہ رینج حاصل کرو جس کے لیے مخنی $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 5x + 7$ اوپر کی طرف کانکیو (Concave) ہو یا نیچے کی طرف۔ اور پھر انفلیکشن (Inflexion) کے نقاط بھی حاصل کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

18.3 منحنی $y = (\log x)^3$ پر انفلیکشن (Inflexion) کے نقاط حاصل کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

18.4 ثابت کرو کہ $y = e^x$ ہر جگہ اوپر کی طرف کانکیو(Concave) ہے اور $y = \log x$ ہر جگہ نیچے کی طرف کانکیو(Concave) ہے۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

اکائی 19۔ منحنی کی ٹریسنگ، غیر متعینہ صورت اور L-ہاسپٹل قانون کے مسائل

19.1 $y^2(a^2+x^2)=x^2(a^2-x^2)$ کو ٹریس (Trace) کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ /اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

19.2 $y^2(x-a) = x^2(x+a)$ کوٹریس (Trace) کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

19.3 $r = a(1 + cos\theta)$ کوٹریس(Trace) کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

نمونہ تجرباتی سوال

19.4 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$ حاصل کیجیے۔

مقصد (Aim)

دی گئی منحنی $\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$ کی لمٹ حاصل کرنا ہے جبکہ $x\to 0$ ہو۔

طرز عمل (Procedure)

Step-I: معلوم کیجیے کہ $\frac{f(x)}{g(x)}$ کی لمٹ ایک $\frac{0}{0}$ قسم کی غیر متعینہ صورت ہے۔

Step-II: f اور g کا الگ الگ تفرق کیجیے۔

Step-III: $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ کی لمٹ معلوم کیجیے، اگر یہ لمٹ متناہی، $+\infty$ یا $-\infty$ تب یہ $\frac{f(x)}{g(x)}$ کی لمٹ کے برابر ہو گی۔

حل / تجویز (Solution/Calculation)

ہم کو دیا گیا ہے

$$\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}=\frac{1-\cos x^2}{x^2\cdot x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin x^2}$$

لیکن ہم جانتے ہیں کہ

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x^2}=1$$

اس لیے

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^4}\cdot 1\end{aligned}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^4}$$

لیکن ہم دیکھتے ہیں کہ $\lim_{x\to 0}(1-\cos x^2) = 0$ اور $\lim_{x\to 0}(x^4) = 0$ اس لیے یہ لمٹ صورت $\frac{0}{0}$ میں ہے تو ہم L' Hopital Rule استعمال کرتے ہیں

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin x^2}{4x^3}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times 1$$

$$= \frac{1}{2}$$

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

ہم کہہ سکتے ہیں کہ دیے گیے سوال کا جواب $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^2 \sin x^2} = \frac{1}{2}$ ہے۔

☆☆☆☆☆

19.5 دکھاؤ کہ $\lim_{x\to 0}\frac{5\sin x-7\sin 2x+3\sin 3x}{\tan x-x}=-15$

مقصد (Aim)

طرزِ عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

19.6 اگر $\lim_{x\to 0} \frac{ae^x - b\cos x + ce^{-x}}{x\sin x} = 2$، تب a, b, c کی قیمت حاصل کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

اکائی 20۔ تکمل-تحویلی ضابطے کے مسائل

20.1 سکسیسورڈکشن (Successive Reduction) کے طریقے کی مدد سے $\int x^n e^x dx$ حاصل کر۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ /اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

20.2 $\int x^4e^x dx$ حاصل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

20.3 سکسیسورڈکشن(Successive Reduction)کے طریقے کی مدد سے $\int Sin^n x dx$ حاصل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ /اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

20.4 $\int Sin^4 x dx$ حاصل کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

20.5 سکسیسورڈکشن(Successive Reduction)کے طریقے کی مدد سے $\int Sec^n x dx$ حاصل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

$\int Sec^3 x dx$ 20.6 حاصل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

20.7 سکسیسو رڈکشن (Successive Reduction) کے طریقے کی مدد سے $\int x^m (log x)^n dx$ حاصل کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

20.8 سکسیسور ڈکشن (Successive Reduction) کے طریقے کی مدد سے $\int x^4(log x)^3 dx$ حاصل کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

20.9 سکسیسورڈکشن(Successive Reduction) کے طریقے کی مدد سے $\int x^n e^{ax} dx$ حاصل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

20.10 سکسیسو رڈکشن (Successive Reduction) کے طریقے کی مدد سے $\int x^3 e^{ax} dx$ حاصل کرو۔

مقصد (Aim)

طرزِ عمل (Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ /اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

20.11 $\int tan^n x dx$ حاصل کرو اور پھر $\int tan^4 x dx$ حاصل کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ /اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

20.12 اگر $I_n = \int (logx)^n dx$، دکھاؤ کہ $I_n = (logx)^n - nI_{n-1}$، اور پھر $\int (logx)^4 dx$ حاصل کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

20.13 ثابت کرو کہ منحنی $x^2 + y^2 = a^2$ کا کل رقبہ πa^2 ہوتا ہے۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

اکائی 21۔ سلائسنگ، ڈسک، واشر اور استوانی خول کے ذریعے حجم کے مسائل

21.1 پیرابولا (Parabola) $y^2 = ax$ اور دائرہ (Circle) $x^2 + y^2 = 2ax$ کے درمیان اور محور x کے اوپر کے رقبہ کو محسوب کریں۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

21.2 اس خط کا رقبہ حاصل کرو جو $y^2 = x$ اور $x = 4$ سے گھرا ہوا ہے۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ /اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

21.3 x محور کے تحت اپلس (Ellipse) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ کو گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم (Volume) حاصل کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ /اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

21.4 اپنے بیس (base) کے تحت سائکلائڈ $x = a(\theta - sin\theta), y = a(1 - cos\theta)$ (Cycloid) کو گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم (Volume) حاصل کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

21.5 ابتدائی خط کے تحت کارڈائڈ(Cardioide) $r = a(1 + cos\theta)$ کو گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم (Volume)حاصل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

اکائی 22۔ خوسی لمبائی اور گردشی سطح کے رقبے کے مسائل

22.1 دکھاؤ کہ منحنی $x = a(t - sint), y = a(1 - cost)$ کی قوسی لمبائی $8a$ ہے۔

مقصد (Aim)

طرزِ عمل (Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ /اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

22.2 کارڈائڈ(Cardioide)، $r = a(1 + cos\theta)$ کا احاطہ(Perimeter)حاصل کرو۔

مقصد(Aim)

طرزعمل(Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

22.3 منحنی $y = \log \sec x$ کی قوسی لمبائی $x = 0$ سے $x = \frac{\pi}{3}$ تک حاصل کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ /اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

22.4 دکھاؤ کہ منحنی $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ کی قوس کی کل لمبائی $6a$ ہے۔

مقصد (Aim)

طرزِ عمل (Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ /اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

22.5 ایسٹرآئڈ (Astroid) $x = a\cos^3\theta,\ y = asin^3\theta$ کی قوس کی کل لمبائی حاصل کرو۔

مقصد(Aim)

طرزعمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

اکائی 23۔ تہرا حاصل ضرب اور ویکٹر تفاعل کی لمٹ، تسلسل، تفرق اور تکمل کے مسائل

23.1 ثابت کرو کہ $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

23.2 ثابت کرو کہ $[\vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b}] = [\vec{a}\vec{b}\vec{c}]^2$

مقصد(Aim)

طرزِ عمل(Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

23.3 ایک ذرہ کسی طاقت $\vec{F} = 6\hat{\imath} + 8\hat{k}$ کے ذریعے $A(1, -1, 2)$ سے $B(-1, 1, 2)$ تک منتقل ہوتا ہے۔ کیا گیا کام حاصل کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

23.4 اگر $\vec{F} = 5t^2\hat{\imath} + t\hat{\jmath} - t^3\hat{k}$ اور $\vec{G} = \sin t\,\hat{\imath} - \cos t\,\hat{\jmath}$ تب حاصل کرو۔

(i) $\frac{d}{dt}\left(\vec{F} \times \vec{G}\right)$ (ii) $\frac{d}{dt}\left(\vec{F} \cdot \vec{G}\right)$

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

23.5 $\left(\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)\frac{d}{dt}$ کی قیمت حاصل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

23.6 اگر $\vec{r}_1(t) = 3\hat{\imath} - t\hat{\jmath} + 5t^2\hat{k}$ اور $\vec{r}_2(t) = 3\hat{\imath} + 5t\,\hat{\jmath} - 3t^2\hat{k}$ دیے گئے ہیں، تب

مندرجہ ذیل کی قدر معلوم کیجیے۔

(i) $\frac{d}{dt}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$

(ii) $\frac{d}{dt}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

(iii) $\frac{d}{dt}(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)$

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ /اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

23.7 معین تکملے حاصل کیجیے

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \langle sin\, 2t \text{،}\ cos\, 2t \rangle\, dt$

(ii) $\int_0^1 (t^3\hat{\imath} + t^2\hat{\jmath})dt$

(iii) $\int_0^2 \left(t^2\hat{\imath} + t^{-2}\hat{\jmath} + \hat{k}\right)dt$

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

23.8 ثابت کرو کہ $\vec{a} = 2\hat{\imath} + \frac{5}{2}\hat{\jmath} + \hat{k}$ اور $\vec{b} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ ایک دوسرے پر متوازی ہیں۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ /اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

23.9 اگر $\vec{a} = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}, \vec{b} = b_1\hat{\imath} + b_2\hat{\jmath} + b_3\hat{k}$ اور $\vec{c} = c_1\hat{\imath} + c_2\hat{\jmath} + c_3\hat{k}$

تب $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$ حاصل کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ /اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

اکائی 24۔ اسراع کے مماسی اور عمودی اجزا اور موڈلنگ، بیلسٹکس اور پلانیٹری گردش کے مسائل

24.1 کسی مخنی $x = t^2 + 1, y = 4t - 3, z = 2t^2 - 6t$ کے کسی نقطے پر اکائی مماس ویکٹر حاصل کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

24.2 کسی مخنی $x = a\cos\omega t\ ,\ y = a\sin\omega t\ ,\ z = bt$ کے کسی نقطے پر اکائی مماس ویکٹر حاصل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ /اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

نمونہ امتحانی پرچہ

ریاضیات(لیب مینول)

BSMM101CCP

بی۔ایسسی- (سمسٹر اول)

سمسٹر- I

وقت: 3 Hrs | کل نمبر: 35

نوٹ: درج ذیل میں سے کوئی پانچ سوالات کے جواب دیجیے (5 × 7 = 35)

1۔ $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2}$ تکمل حاصل کریں۔

2۔ x کی قیمتوں کی وہ رینج حاصل کرو جس کے لیے مخنی $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 5x + 7$ اوپر کی طرف کانکیو(Concave) ہو یا نیچے کی طرف۔ اور پھر انفلیکشن (Inflexion) کے نقاط بھی حاصل کرو۔

3۔ $r = a(1 + cos\theta)$ کو ٹریس(Trace) کرو۔

4۔ سکسیسورڈکشن(Successive Reduction) کے طریقے کی مدد سے $\int Sin^n x dx$ حاصل کرو۔

5۔ پیرابولا (Parabola) $y^2 = ax$ اور دائرہ (Circle) $x^2 + y^2 = 2ax$ کے درمیان اور محور x کے اوپر، کے رقبہ کو محسوب کریں۔

6۔ x محور کے تحت الپس $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Ellipse) کو گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم(Volume) حاصل کرو۔

7۔ اگر $\vec{F} = 5t^2\hat{\imath} + t\hat{\jmath} - t^3\hat{k}$ اور $\vec{G} = \sin t\,\hat{\imath} - \cos t\,\hat{\jmath}$ تب حاصل کرو۔

a. (i) $\frac{d}{dt}(\vec{F} \times \vec{G})$ (ii) $\frac{d}{dt}(\vec{F} \cdot \vec{G})$

8۔ کسی مخنی $x = acos\,\omega t\,, y = asin\,\omega t\,, z = bt$ کے کسی نقطے پر اکائی مماس ویکٹر حاصل کرو۔

Rough Work Space

Rough Work Space

Notes/اہم نکات

Notes/اہم نکات