

BSPH201CCT

برق اور مقناطیسیت

(Electricity and Magnetism)

مع

لیب مینول

(Lab Manual)

پچلر آف سائنس (بی۔ ایس سی)

(دوسرا سمسٹر)

نظامت فاصلاتی تعلیم

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

حیدرآباد-32، تلنگانہ-بھارت

©Maulana Azad National Urdu University, Hyderabad

Course-Bachelor of Science

ISBN: 978-XX-80322-XX-X

Edition: January, 2022

ناشر	:	رجسٹرار، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد
اشاعت	:	جنوری، 2021
تعداد	:	500
قیمت	:	170 روپے
ترتیب و تزئین	:	ڈاکٹر محمد اکمل خان، نظامت فاصلاتی تعلیم، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد
سرورق	:	ڈاکٹر محمد اکمل خان، نظامت فاصلاتی تعلیم، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد
مطبع	:	پرنٹ ٹائم بزنس اینڈ انٹرنیٹ پرائیویٹ، مغل پورہ، حیدرآباد

برق اور مقناطیسیت

(Electricity and Magnetism)

For B.Sc. 2nd Semester

On behalf of the Registrar, Published by:

Directorate of Distance Education

Maulana Azad National Urdu University

Gachibowli, Hyderabad-500032 (TS), Bharat

Director: dir.dde@manuu.edu.in Publication: ddepublication@manuu.edu.in

Phone number: 040-23008314 Website: manuu.edu.in



مجلس ادارت

(Editorial Board)

مضمون مدیران (Subject Editors)	
Prof. H. Aleem Basha (Program Coordinator) Professor (Physics) School of Sciences, MANUU, Hyderabad	پروفیسر ایچ۔ علیم ہاشا (پروگرام کوآرڈینیٹر) پروفیسر (طبیعیات) اسکول برائے سائنسی علوم، مانو، حیدرآباد
Dr. Priya Hasan (Course Coordinator) Assistant professor, (Physics) School of Sciences, MANUU, Hyderabad	ڈاکٹر پریا حسن (کورس کوآرڈینیٹر) اسٹنٹ پروفیسر (طبیعیات) اسکول برائے سائنسی علوم، مانو، حیدرآباد
Dr. Rizwanul Haq Ansari Assistant Professor, (Physics) School of Sciences, MANUU, Hyderabad	ڈاکٹر رضوان الحق انصاری اسٹنٹ پروفیسر (طبیعیات) اسکول برائے سائنسی علوم، مانو، حیدرآباد
Mr. Zia ur Rahman Guest Faculty (Physics) DDE, MANUU, Hyderabad	جناب ضیاء الرحمن گیٹ فیکلٹی (طبیعیات) نظامت فاصلاتی تعلیم، مانو، حیدرآباد
زبان مدیر (Language Editor)	
Dr. Mohd Akmal Khan Guest Faculty (Urdu) Directorate of Distance Education, MANUU	ڈاکٹر محمد اکمل خان گیٹ فیکلٹی (اردو) نظامت فاصلاتی تعلیم، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

نظامت فاصلاتی تعلیم

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

حیدرآباد-32، تلنگانہ-بھارت

کورس کو آرڈی نیٹر

ڈاکٹر پریا حسن

اسسٹنٹ پروفیسر (طبیعیات)، اسکول برائے سائنسی علوم

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد

اکائی نمبر

اکائی 1،2،5،6،7،8،17

اکائی 9،10،11،12،13

اکائی 3،4،14،15،16،18

مصنفین

- پروفیسر ایچ۔ علیم باشا
- ڈاکٹر زینت فاطمہ
- جناب ضیاء الرحمن

لیب مینول

- پروفیسر ایچ۔ علیم باشا
- ڈاکٹر رضوان الحق انصاری
- جناب ضیاء الرحمن

تجربہ 19 تا 24

مترجم

- محمد عبد المعیز

اکائی 9،10،11،12،13،17

پروف ریڈرس:

- | | | |
|-----------------------------------------------|---|-------|
| جناب ضیاء الرحمن | : | اول |
| ڈاکٹر محمد اکمل خان / ڈاکٹر رضوان الحق انصاری | : | دوم |
| پروفیسر ایچ۔ علیم باشا | : | فائنل |

فہرست

7	وائس چانسلر	پیغام
8	ڈائریکٹر	پیغام
9	کورس کو آرڈی نیٹر	کورس کا تعارف
بلاک I		
11	سمتیوں کا تجزیہ	اکائی 1
31	سمتیوں کا تکمیلہ	اکائی 2
49	گاؤس تھیورم	اکائی 3
69	گاؤس تھیورم کا اطلاق	اکائی 4
بلاک II		
88	برقی قوت	اکائی 5
108	برقی ذوقطبیہ	اکائی 6
125	ذو برقیوں	اکائی 7
143	مکتبے	اکائی 8
بلاک III		
164	مقناطیسی سکونیات	اکائی 9
179	ایمپیریکلہ و مقناطیسی قوت	اکائی 10
192	مادہ کے مقناطیسی خواص	اکائی 11
205	برقی مقناطیسی امالہ	اکائی 12

218	برقی مقناطیسی خود امالیت	اکائی 13
234	برقی مقناطیسی باہمی امالیت	اکائی 14

بلاک IV

250	مکس ویل کی مساواتیں	اکائی 15
270	پوائنٹنگ ویکٹر	اکائی 16
285	برقی مقناطیسی موجیں	اکائی 17
299	تقطیب	اکائی 18

322 نمونہ امتحانی پرچہ

324 لیب مینول

بلاک V

325	ملٹی میٹر	اکائی 19
333	آر سی سرکیوٹ ہم سلسلہ کی خصوصیات	اکائی 20
341	ہم سلسلہ یل سی آر گملی دور	اکائی 21
350	ہم متوازی یل سی آر گملی دور	اکائی 22

بلاک VI

358	نٹ ورک کے مسئلوں کی تصدیق	اکائی 23
366	سپر پوزیشن اور اعظم ترین پاور ٹرانسفر مسئلہ کی تصدیق	اکائی 24

374 نمونہ امتحانی پرچہ

پیغام

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی 1998 میں وطن عزیز کی پارلیمنٹ کے ایکٹ کے تحت قائم کی گئی۔ اس کے چار نکاتی مینڈیٹس یہ ہیں۔
(1) اردو زبان کی ترویج و ترقی (2) اردو میڈیم میں پیشہ ورانہ اور تکنیکی تعلیم کی فراہمی (3) روایتی اور فاصلاتی تدریس سے تعلیم کی فراہمی اور (4) تعلیم نسواں پر خصوصی توجہ۔ یہ وہ بنیادی نکات ہیں جو اس مرکزی یونیورسٹی کو دیگر مرکزی جامعات سے منفرد اور ممتاز بناتے ہیں۔
قومی تعلیمی پالیسی 2020 میں بھی مادری اور علاقائی زبانوں میں تعلیم کی فراہمی پر کافی زور دیا گیا ہے۔

اردو کے ذریعے علوم کو فروغ دینے کا واحد مقصد و منشا اردو داں طبقے تک عصری علوم کو پہنچانا ہے۔ ایک طویل عرصے سے اردو کا دامن علمی مواد سے لگ بھگ خالی رہا ہے۔ کسی بھی کتب خانے یا کتب فروش کی الماریوں کا سرسری جائزہ اس بات کی تصدیق کر دیتا ہے کہ اردو زبان سمٹ کر چند ”ادبی“ اصناف تک محدود رہ گئی ہے۔ یہی کیفیت اکثر رسائل و اخبارات میں دیکھنے کو ملتی ہے۔ اردو میں دستیاب تحریریں قاری کو کبھی عشق و محبت کی پُر پیچ راہوں کی سیر کراتی ہیں تو کبھی جذباتیت سے پُرساسی مسائل میں الجھتی ہیں، کبھی مسلکی اور فکری پس منظر میں مذاہب کی توضیح کرتی ہیں تو کبھی شکوہ و شکایت سے ذہن کو گراں بار کرتی ہیں۔ تاہم اردو قاری اور اردو سماج دور حاضر کے اہم ترین علمی موضوعات سے نابلد ہیں۔ چاہے یہ خود ان کی صحت و بقا سے متعلق ہوں یا معاشی اور تجارتی نظام سے، یا مشینی آلات ہوں یا ان کے گرد و پیش ماحول کے مسائل ہوں، عوامی سطح پر ان شعبہ جات سے متعلق اردو میں مواد کی عدم دستیابی نے عصری علوم کے تئیں ایک عدم دلچسپی کی فضا پیدا کر دی ہے۔ یہی وہ مبارزات (Challenges) ہیں جن سے اردو یونیورسٹی کو نبرد آزما ہونا ہے۔ نصابی مواد کی صورت حال بھی کچھ مختلف نہیں ہے۔ اسکولی سطح پر اردو کتب کی عدم دستیابی کے چرچے ہر تعلیمی سال کے شروع میں زیر بحث آتے ہیں۔ چوں کہ اردو یونیورسٹی کا ذریعہ تعلیم اردو ہے اور اس میں عصری علوم کے تقریباً سبھی اہم شعبہ جات کے کورسز موجود ہیں لہذا ان تمام علوم کے لیے نصابی کتابوں کی تیاری اس یونیورسٹی کی اہم ترین ذمہ داری ہے۔ انہیں مقاصد کے حصول کے لیے اردو یونیورسٹی کا آغاز فاصلاتی تعلیم سے 1998 میں ہوا تھا۔

مجھے اس بات کی بے حد خوشی ہے کہ اس کے ذمہ داران بشمول اساتذہ کرام کی انتھک محنت اور ماہرین علم کے بھرپور تعاون کی بنا پر کتب کی اشاعت کا سلسلہ بڑے پیمانے پر شروع ہو گیا ہے۔ فاصلاتی تعلیم کے طلباء کے لیے کم سے کم وقت میں خود اکتسابی مواد اور خود اکتسابی کتب کی اشاعت کا کام عمل میں آ گیا ہے۔ پہلے سمسٹر کی کتب شائع ہو کر طلباء و طالبات تک پہنچ چکی ہیں۔ دوسرے سمسٹر کی کتابیں بھی جلد طلباء تک پہنچیں گی۔ مجھے یقین ہے کہ اس سے ہم ایک بڑی اردو آبادی کی ضروریات کو پورا کر سکیں گے اور اس یونیورسٹی کے وجود اور اس میں اپنی موجودگی کا حق ادا کر سکیں گے۔

پروفیسر سید عین الحسن

وائس چانسلر

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد

پیغام

فاصلاتی طریقہ تعلیم پوری دنیا میں ایک انتہائی کارگر اور مفید طریقہ تعلیم کی حیثیت سے تسلیم کیا جا چکا ہے اور اس طریقہ تعلیم سے بڑی تعداد میں لوگ مستفید ہو رہے ہیں۔ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی نے بھی اپنے قیام کے ابتدائی دنوں ہی سے اردو آبادی کی تعلیمی صورت حال کو محسوس کرتے ہوئے اس طرز تعلیم کو اختیار کیا۔ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کا آغاز 1998 میں نظامتِ فاصلاتی تعلیم اور ٹرانسلیشن ڈویژن سے ہوا اور اس کے بعد 2004 میں باقاعدہ روایتی طرز تعلیم کا آغاز ہوا اور بعد ازاں متعدد روایتی تدریس کے شعبہ جات قائم کیے گئے۔ نو قائم کردہ شعبہ جات اور ٹرانسلیشن ڈویژن میں تقرریاں عمل میں آئیں۔ اس وقت کے اربابِ مجاز کے بھرپور تعاون سے مناسب تعداد میں خود مطالعاتی مواد تحریر و ترجمے کے ذریعے تیار کرائے گئے۔

گزشتہ کئی برسوں سے یو جی سی۔ ڈی ای ب UGC-DEB اس بات پر زور دیتا رہا ہے کہ فاصلاتی نظام تعلیم کے نصاب اور نظامات کو روایتی نظام تعلیم کے نصاب اور نظامات سے کما حقہ ہم آہنگ کر کے نظامتِ فاصلاتی تعلیم کے طلباء کے معیار کو بلند کیا جائے۔ چونکہ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی فاصلاتی اور روایتی طرز تعلیم کی جامعہ ہے، لہذا اس مقصد کے حصول کے لیے یو جی سی۔ ڈی ای بی کے رہنمایانہ اصولوں کے مطابق نظامتِ فاصلاتی تعلیم اور روایتی نظام تعلیم کے نصاب اور معیار بلند کر کے خود اکتسابی مواد SLM از سر نو بالترتیب یو جی اور پی جی طلباء کے لیے چھ بلاک چوبیس اکیس اور چار بلاک سولہ اکیسوں پر مشتمل نئے طرز کی ساخت پر تیار کرائے جا رہے ہیں۔

نظامتِ فاصلاتی تعلیم یو جی پی جی ایڈ ڈپلوما اور سرٹیفکیٹ کورسز پر مشتمل جملہ پندرہ کورسز چلا رہا ہے۔ بہت جلد تکنیکی ہنر پر مبنی کورسز بھی شروع کیے جائیں گے۔ متعلمین کی سہولت کے لیے 9 علاقائی مراکز بنگلور، بھوپال، درہنگہ، دہلی، کولکاتا، ممبئی، پٹنہ، رانچی اور سری نگر اور 5 ذیلی علاقائی مراکز حیدرآباد، لکھنؤ، جموں، نوح اور امراتلی کا ایک بہت بڑا نیٹ ورک تیار کیا ہے۔ ان مراکز کے تحت **سردست 155 متعلم امدادی** مراکز (Learner Support Centre) کام کر رہے ہیں، جو طلباء کو تعلیمی اور انتظامی مدد فراہم کرتے ہیں۔ نظامتِ فاصلاتی تعلیم نے اپنی تعلیمی اور انتظامی سرگرمیوں میں آئی سی ٹی کا استعمال شروع کر دیا ہے، نیز اپنے تمام پروگراموں میں داخلے صرف آن لائن طریقے ہی سے دے رہا ہے۔

نظامتِ فاصلاتی تعلیم کی ویب سائٹ پر متعلمین کو خود اکتسابی مواد کی سافٹ کاپیاں بھی فراہم کی جا رہی ہیں، نیز جلد ہی آڈیو۔ ویڈیو ریکارڈنگ کالنگ بھی ویب سائٹ پر فراہم کیا جائے گا۔ اس کے علاوہ متعلمین کے درمیان رابطے کے لیے ایس ایم ایس کی سہولت فراہم کی جا رہی ہے، جس کے ذریعے متعلمین کو پروگرام کے مختلف پہلوؤں جیسے کورس کے رجسٹریشن، مفوضات، کونسلنگ، امتحانات وغیرہ کے بارے میں مطلع کیا جاتا ہے۔

امید ہے کہ ملک کی تعلیمی اور معاشی حیثیت سے پچھڑی اردو آبادی کو مرکزی دھارے میں لانے میں نظامتِ فاصلاتی تعلیم کا بھی نمایاں رول ہو

گا۔

پروفیسر محمد رضاء اللہ خان

ڈائریکٹر، نظامتِ فاصلاتی تعلیم

حیدرآباد۔ 500032

کورس کا تعارف

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کے مختلف شعبہ جات میں سن 2016ء میں سی بی ایس ای (CBSE) نصاب متعارف ہوا۔ یہ کتاب برقی اور مقناطیسیت (Electricity ad Magnetism) کے ان موضوعات سے بحث کرتی ہے جنہیں مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کے بی۔ ایس سی (فزیکل سائنس) پروگرام کے سال اول (سمسٹر-II) کے طبیعات کے نصاب میں شامل کیا گیا ہے۔ یہ موضوعات مضمون کی جدید تحقیقات کا احاطہ کرتے ہیں، اور بی۔ ایس سی (B.Sc.) کورس کے سال اول میں مطالعے کے لیے انہیں شریک کیا گیا ہے۔

سہولت کی خاطر نصاب کو چند بلاکس (Blocks) میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ہر ایک بلاک چند اکائیوں پر مشتمل ہے۔ ہر اکائی میں بالعموم مضمون کے مخصوص نکات کو ملحوظ رکھا گیا ہے۔ اکائیوں کو ماہرین کے ذریعے ایک مخصوص خاکے (Format) کے مطابق تیار کیا گیا ہے۔ خاکہ کچھ اس طرح ہے کہ طالب علم انہیں پڑھ کر بغیر وقت ضائع کیے ہوئے سمجھ جائے۔ ہر اکائی کا آغاز اس کے مقاصد، مفہوم، ذاتی تصدیق اور اس کے مطالعے کے بعد حاصل ہونے والے واقفیت پسندانہ بیان سے ہوتا ہے۔ ہر اکائی کے اختتام پر خلاصہ، معروضی سوالات، نمونہ امتحانی سوالات اور مشقیں دی گئی ہیں تاکہ طلباء نفس مضمون کے صحیح ادراک کا امتحان کر لیں۔

زیر نظر کتاب مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کے فاصلاتی نظام اور روایتی طلباء کے ساتھ ساتھ سائنسی مضامین میں دلچسپی رکھنے والے اردو قاریوں اور مدارس کے طلباء کے لیے بھی مفید ثابت ہو سکتی ہے۔ آسان اردو زبان میں لکھی گئی ہے۔ تکنیکی اصطلاحات کے خالص اردو ترجمے سے گریز کیا گیا ہے تاکہ طلباء دنیا میں کثرت سے استعمال ہو رہی انگریزی اصطلاحات سے واقف ہو سکیں۔

اس کتاب کے مصنفین امید کرتے ہیں کہ اس کورس میں پیش کردہ موضوعات طلباء کو سکونی برقیات، روانی برقیات اور مقناطیسیت کے نظریات، اصولوں اور اطلاقات سے واقف کروائیں گے۔ مزید امید ہے کہ قارئین اور ماہرین اپنے مشوروں سے بھی نوازیں گے۔

پروفیسر۔ ایچ علیم ہاشاہ

پروگرام کو آرڈی نیٹر

برق اور مقناطیسیت

(Electricity and Magnetism)

اکائی 1- سمتیوں کا تجزیہ

(Vector Analysis)

اکائی کے اجزا

تمہید	1.0
مقاصد	1.1
میزانی اور سمتی مقداریں	1.2
ریاضیاتی اظہار	1.3
سمتی الجبرا کے کلیات	1.3.1
باہم عمودی اکائی سمتیے	1.4
سمتیوں کی باہم عمودی تحلیل اور ڈائرکشن کو سائنس	1.5
کوسائین سمت	1.6
مقامی سمتیہ	1.7
میزانی حاصل ضرب مستطالی اجزا کی شکل میں	1.8
سمتی ضرب یا چلیپائی ضرب	1.9
میزانی اور سمتی میدان	1.10
میزانی میدان کا گریڈینٹ	1.11
میزانی میدان کی طبعی اہمیت	1.11.1
حل شدہ مثالیں	1.12
اکتسابی نتائج	1.13
کلیدی الفاظ	1.14
نمونہ امتحانی سوالات	1.15
معروضی جوابات کے حامل سوالات	1.15.1

مختصر جوابات کے حامل سوالات	1.15.2
طویل جوابات کے حامل سوالات	1.15.3
حل شدہ جوابات کے حامل سوالات	1.15.4
مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں	1.16

1.0 تمہید (Introduction)

سمتیوں کا تجزیہ ایک طاقتور حسابی ٹکنیک ہے۔ جو طبعی مساوات کی ترتیب میں ایک موثر آلے کار ہے اور ساتھ ہی ساتھ اس کی مدد سے مساوات کا طبعی مفہوم منفرد اور واضح انداز میں سمجھتی ہیں اور مدد ملتی ہے۔ خصوصاً برقی مقناطیسی نظریے ہیں۔

1.1 مقاصد (Objectives)

یہ اکائی میزانیے اور سمتیوں سے واقف کراتی ہے اور اس کی تفہیم مثالوں کے ذریعہ سمتیوں کا تجزیہ کے تمام اصولوں کو سمجھاتی ہے۔ اس اکائی میں ہم

- i. میزانی اور سمتی مقداریں اور ریاضیاتی اظہار کے بارے میں جانکاری حاصل کریں گے۔
- ii. سمتی الجبرا کے کلیات بیان کریں گے۔
- iii. باہم عمودی اکائی سمتیے، کوسائین سمت، مقامی سمتیہ کے بارے میں جانکاری حاصل کریں گے۔
- iv. سمتی ضرب یا چلیپائی ضرب، میزانی اور سمتی میدان کے بارے میں جانکاری حاصل کریں گے۔
- v. میزانی میدان کا گریڈینٹ، میزانی میدان کی طبعی اہمیت کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔

1.2 میزانی اور سمتی مقداریں (Vector and Scalar Quantities)

- عام طور پر تمام طبعی مقداروں کو دو درجوں میں تقسیم کیا جاتا ہے (i) میزانی مقداریں (ii) سمتی مقداریں
- i. میزانی مقداریں (Scalar Quantities): وہ طبعی مقداریں جو صرف مقدار رکھتی ہیں اور کوئی سمت نہیں رکھتیں۔ میزانی مقدار یا میزانیے کہلاتی ہیں۔
مثلاً: کمیت، حجم، کشافت، تپش، چال، کام وغیرہ۔
 - ii. سمتی مقداریں (Vector Quantities): وہ طبعی مقداریں جو مقدار اور سمت دونوں رکھتی ہیں سمتی مقداریں یا صرف سمتیے کہلاتی ہیں۔

مثلاً: رفتار، اسراع، قوت، معیار حرکت، برقی میدان۔۔۔

1.3 ریاضیاتی اظہار (Mathematical Representation)

سمتیے کو انگریزی کے حروف سے ظاہر کیا جاتا ہے حروف کے اوپر ایک تیر کا نشان لگایا جاتا ہے۔ جیسے سمتیہ \vec{A} کو \vec{A} سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ایک سمتیے کو ایک تیر نشان والی خط مستقیم سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس طرح کے تیر کا نشان سمتیے کی سمت اور خط مستقیم کی لمبائی اس کی مقدار کو ظاہر کرتی ہے۔ سمتیے کی مطلق قدر کو $|A|$ یا A سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ سمتیے کی مقدار ہمیشہ مثبت لی جاتی ہے۔

1.3.1 سمتی الجبرا کے کلیات (Laws of Vector Algebra)

1. مساوی سمتیے (Equal vectors): دو سمتیے اس وقت مساوی سمتیے کہلاتی ہیں جب کہ ان کی مقدار اور سمت یکساں ہو۔ مثلاً

$$\vec{A} = \vec{B} = \vec{C} \text{ اگر مساوی ہوں گے}$$

2. منفی سمتیہ (Negative Vector): ایسا سمتیہ جس کی مقدار یکساں نہیں لیکن سمت مخالف ہو دیے گئے سمتیے کا منفی سمتیہ کہلاتا ہے۔ علامتی طور پر دیے گئے سمتیے \vec{A} کا منفی سمتیہ $-\vec{A}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

3. اکائی سمتیہ (Unit Vector): ایسا سمتیہ جس کی مقدار اکائی ہو اکائی سمتیہ کہلاتا ہے۔ دیا گیا سمتیہ \vec{A} ہو تب اس کو اکائی سمتیہ \hat{A} علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے (کیا A پڑھا جاتا ہے)۔

4. سمتیے کا میزانے سے ضرب: سمتیے \vec{A} کا میزانے (حقیقی عدد) m سے حاصل ضرب یعنی $m\vec{A}$ ایک سمتی مقدار ہے۔ یعنی

طول \vec{A} کی مقدار کا m گنا ہے اور اس کی سمت m کے لحاظ سے مثبت یا منفی ہوتی ہے۔ اس طرح

$$m(-\vec{A}) = -m\vec{A} \text{ or } -m(-\vec{A}) = m\vec{A}$$

5. صفری سمتیہ (Null Vector): اگر کسی سمتیے کے ابتدائی اور انتہائی نقاط منطبق ہو جائیں تو حاصل سمتیہ صفر سمتیہ کہلاتا ہے۔ صفری سمتیے کی مقدار صفر ہوتی ہے۔

6. مقامی سمتیہ (Position Vector): ایسا سمتیہ جو محدودات کے نظام میں مبدا سے نقاط کے مقام کو ظاہر کرے مقامی سمتیہ کہلاتا ہے۔ اگر O مبدا اور P خلاء میں کسی نقطے کو ظاہر کرے تب \vec{OP} مقامی سمتیہ ہوگا۔

7. ہم آہنگی سمتیے (Co-initial Vectors): ایسے سمتیے جن کا ابتدائی نقطہ مشترک ہو یا جو ایک ہی نقطے سے نکلتے ہوں ہم آہنگی (Co-Initial) سمتیے کہلاتے ہیں۔

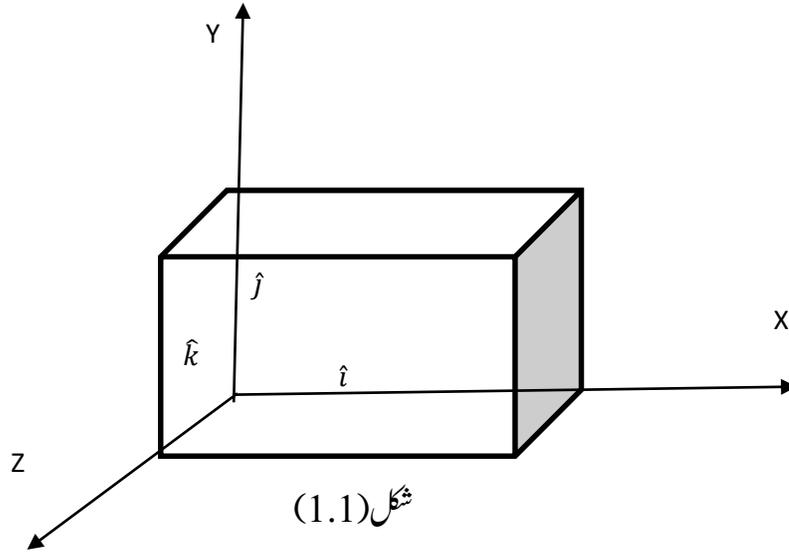
8. ہم خط یا متوازی سمتیے (Collinear or Parallel Vectors): ایسے سمتیے جو ایک ہی خط یا متوازی خطوط پر عمل کرتے ہیں۔ ہم خط یا متوازی سمتیے کہلاتے ہیں۔

9. ہم مستوی سمتیے یا ہم سطحی سمتیے (Coplanar Vectors): ایسے سمتیے جو ایک ہی مستوی تک محدود ہوتے ہیں۔ ہم مستوی

یاہم سطحی سمتیے کہلاتے ہیں۔

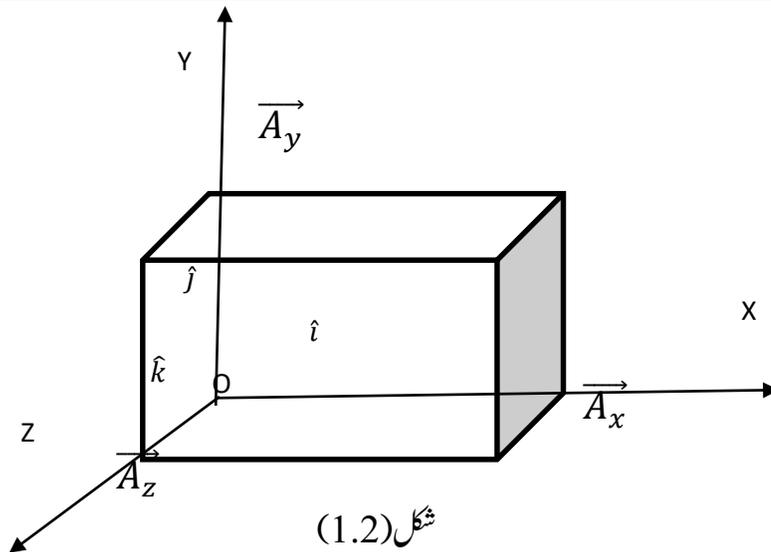
1.4 باہم عمودی اکائی سمتیے (Orthogonal Unit Vectors)

کار تیزی محددات کے نظام میں جو تین باہم عمود وار محور OX ، OY اور OZ پر مشتمل ہوتا ہے۔ دیا گیا سمتیہ تین اجزا میں تقسیم ہوتا ہے۔ X ، Y اور Z محوروں کی سمت میں پائے جانے والے اکائی سمتیے ترتیب وار \hat{i} ، \hat{j} اور \hat{k} ہیں۔ دیئے گئے سمتیے \vec{A} کا X محور کی سمت میں جز PA ہوگا۔ جہاں A ، سمتیے \vec{A} کی مقدار ہے۔



1.5 سمتیوں کی باہم عمودی تحلیل اور ڈائرکشن کوسائنس

(Orthogonal Resolution of Vector and Direction Cosines)



فرض کیجیے کہ ایک سمتیہ $\vec{A} = \overrightarrow{OP}$ مستطیلی محددات کے نظام میں X، Y اور Z محور کی سمت میں اس کے اجزاء میں تحلیل ہوتا ہے۔ فرض کیجیے کہ \vec{A} کا ابتدائی نقطہ مبدا 'O' ہے۔

فرض کیجیے کہ $\vec{A}_x, \vec{A}_y, \vec{A}_z$ اور \vec{A} ، X، Y اور Z محور کی سمت میں پائے جانے والے سمتیے ہیں جیسا کہ شکل (1.2) میں دکھایا گیا ہے۔ A_x, A_y, A_z اور A ترتیب وار ان سمتیوں کی مقدار ہے۔

$$\vec{A}_x = A_x \hat{i}, \vec{A}_y = A_y \hat{j}, \vec{A}_z = A_z \hat{k} \quad \text{تب}$$

$$\therefore \vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$$

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad (1.1)$$

پیتا غورث کے مسئلہ کے مطابق

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \quad (1.2)$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1.3)$$

سمتیہ \vec{A} کی سمت میں پائے جانے والا اکائی سمتیہ \hat{A} باہم عمودی اکائی سمتیوں $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ کی شکل میں اس طرح ہوں۔

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \quad (1.4)$$

1.6 کوسائین سمت (Direction Cosines)

سمتیہ \vec{A} اور X-محور، Y-محور، Z-محور کے درمیان بننے والے زاویے کے کوسائین کو ترتیب وار X-سمتی، Y-سمتی اور Z-سمتی کوسائین کہتے ہیں۔ جن کو ترتیب وار l, m, n سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

فرض کرو کہ سمتیہ \vec{A} ، X، Y اور Z محور ہے ترتیب وار زاویہ α, β, γ بناتا ہے۔

$$n = \cos \gamma = \frac{A_z}{A} \quad \text{اور} \quad m = \cos \beta = \frac{A_y}{A} \quad \text{اور} \quad l = \cos \alpha = \frac{A_x}{A} \quad \text{تب} \quad (1.5)$$

جہاں پر A_x, A_y, A_z ترتیب وار X، Y اور Z محور کی سمت میں سمتیہ \vec{A} کے اجزاء ہیں۔ جب کہ A ، سمتیہ \vec{A} کی مقدار ہے۔

کوسائین کو مربع کر کے جمع کرنے پر

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \left(\frac{A_x}{A}\right)^2 + \left(\frac{A_y}{A}\right)^2 + \left(\frac{A_z}{A}\right)^2$$

$$l^2 + m^2 + n^2 = \frac{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}{A^2} = \frac{A^2}{A^2} = 1 \quad (1.6)$$

فرض کیجیے کہ \vec{A}_1 اور \vec{A}_2 دو سمتیے ہیں جن کی مقدار ترتیب وار A_1 اور A_2 ہے تب

$$\begin{aligned}\vec{A}_1 &= A_1x\hat{i} + A_1y\hat{j} + A_1z\hat{k} \\ \frac{\vec{A}_1}{A_1} &= \frac{A_1x\hat{i}}{A_1} + \frac{A_1y\hat{j}}{A_1} + \frac{A_1z\hat{k}}{A_1}\end{aligned}$$

لیکن ہم جانتے ہیں کہ

$$\frac{A_1x}{A_1} = l_1; \frac{A_1y}{A_1} = m_1; \frac{A_1z}{A_1} = n_1$$

$$\therefore \vec{A}_1 = A_1(l_1\hat{i} + m_1\hat{j} + n_1\hat{k})$$

$$\text{اس طرح } \vec{A}_2 = A_2(l_2\hat{i} + m_2\hat{j} + n_2\hat{k})$$

$$\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2 = A_1A_2 \cos \theta \quad \text{تب}$$

جہاں پر θ ، \vec{A}_1 اور \vec{A}_2 کے درمیان بننے والا زاویہ ہے۔

$$\therefore \cos \theta = \frac{\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2}{A_1A_2}$$

$$\cos \theta = \frac{A_1(l_1\hat{i} + m_1\hat{j} + n_1\hat{k}) \cdot A_2(l_2\hat{i} + m_2\hat{j} + n_2\hat{k})}{A_1A_2}$$

$$\cos \theta = l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2$$

$$\text{کہ } \hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \text{ اور } \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0$$

1.7 مقامی سمتیہ (Position Vector)

اگر (x, y, z) کسی نقطے کے محددات ہوں تب اس نقطے کو مبدے سے ملانے والا سمتیہ \vec{r} اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے $(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$

اگر ایک ذرہ نقطے P پر ہے جس کے محددات (x_1, y_1, z_1) ہیں اور مقامی سمتیہ

$$\vec{r}_1 = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k} \quad (1.7)$$

ہو دوسرے نقطے Q کی جانب محرک ہو جس کے محددات (x_2, y_2, z_2) اور مقامی سمتیہ

$$\vec{r}_2 = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k} \quad (1.8)$$

تب ذرہ کا نقل مقام نقطے P سے Q تک سمتیہ \vec{R} سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس طرح

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})$$

$$\therefore \vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k} \quad (1.9)$$

اگر PQ چھوٹی سی سمتیہ تبدیلی کو ظاہر کرے تب $d\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ اور

$$x_2 - x_1 = dx, y_2 - y_1 = dy, z_2 - z_1 = dz$$

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ایک خط کے ٹکڑے کو ظاہر کرتا ہے جب کہ $d\vec{r}$ خط کے لامتناہی چھوٹے حصے کو ظاہر کرتا ہے۔

(1) سمتیوں کی ضرب (Product of Vectors): سمتیے \vec{A} اور \vec{B} کے حاصل ضرب کو دو طریقوں سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

(2) میزانی ضرب یا نقطی ضرب: سمتیے \vec{A} اور \vec{B} کے میزانی ضرب کو $\vec{A} \cdot \vec{B}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور حاصل ایک میزانیہ ہوتا ہے۔

سمتیے \vec{A} اور \vec{B} کا میزانی حاصل ضرب ایک میزانی مقدار ہے جو دو سمتوں کی مقدار کے حاصل ضرب اور ان کے درمیان بننے والے

زاویہ Cosine کے حاصل ضرب سے ظاہر کی جاتی ہے۔

اگر θ \vec{A} اور \vec{B} کے درمیان بننے والا زاویہ ہو تب

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

نوٹ:

1. اگر دو سمتیے باہم عمود ہوں تب $\theta = 90^\circ$ اور $\cos 90 = 0$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos 90 = 0$$

اس طرح یہ جو غیر صفری سمتیے باہم عمودی ہوں گے اور $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ ہو۔

2. دو سمتیے ہم توازی یا ہم خط (Collinear) ہوں گے اگر 2π یا $0 = \theta$ ہو۔

$$(a) \text{ اگر } \vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos 0 = AB \Rightarrow \cos 0 = 1, (\theta = 0)$$

$$(b) \text{ اگر یہ دو سمتیے قد توازی ہوں تب } \cos \pi = -1 \text{ اور } \theta = \pi$$

$$\therefore \vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta = AB(-1) = -AB$$

$$(c) \text{ اگر } \vec{A} = \vec{B} \text{ اور } \theta = 0 \text{ تب } \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot \vec{A} = AA \cos 0 = A^2$$

اس طرح کسی بھی سمتیے کا مربع اس کی مقدار کے مربع کے مساوی ہوگا۔

1.8 میزانی حاصل ضرب مستطالی اجزا کی شکل میں

(Scalar Product in Terms of Rectangular Components)

سمتیے \vec{A} اور \vec{B} ان کی اجزا کی شکل میں اس طرح ہوں گے۔

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \text{ اور } \vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

$$\therefore \vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \cdot (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k})$$

$$= A_x B_x (\hat{i} \cdot \hat{i}) + A_y B_y (\hat{j} \cdot \hat{j}) + A_z B_z (\hat{k} \cdot \hat{k}) + A_x B_y (\hat{i} \cdot \hat{j})$$

$$+ A_x B_z (\hat{i} \cdot \hat{k}) + A_y B_x (\hat{j} \cdot \hat{i}) + A_y B_z (\hat{j} \cdot \hat{k}) + A_z B_x (\hat{k} \cdot \hat{i}) + A_z B_y (\hat{k} \cdot \hat{j})$$

$$= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\therefore \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{i} = \hat{k} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{j} = 0$$

$$\text{اور } \hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

دو سمتیوں کے درمیان زاویہ: جیسا کہ ہم جانتے ہیں

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

1.9 سمتی ضرب یا چلیپائی ضرب (Vector Product or Cross Product)

دو سمتیے \vec{A} اور \vec{B} کے درمیان سمتی ضرب کو $\vec{A} \times \vec{B}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ جن کی سمت زاویہ θ کی سمت میں مائیل ہوتی ہے۔ یہ ایک سمتیہ ہے جس کی قدر $AB \sin \theta$ اور سمتیے \vec{A} اور \vec{B} سے گھری مستوی ہر عموداً ہوتی ہے۔ یہ سمت مثبت ہوگی اگر \vec{A} سے \vec{B} کی جانب گردش مخالف سمت سماعت ہو جب کہ یہ سمت منفی ہوگی اگر \vec{A} سے \vec{B} کی جانب گردش سمت سماعت ہو۔

$$\text{اس طرح } \vec{A} \times \vec{B} = AB \sin \theta \hat{n} = \vec{C}$$

جہاں یہ \hat{n} ایک اکائی سمتیہ ہے جو \vec{A} اور \vec{B} کے عموداً ہے۔ اس اکائی سمتیہ کو اکائی عمود بھی کہتے ہیں۔

نوٹ:

1. سمتی ضرب میں سمتیوں کی ترتیب الٹنے سے سمت مخالف ہو جاتی ہے۔

$$\vec{B} \times \vec{A} = -AB \sin \theta \hat{n} = -(\vec{A} \times \vec{B})$$

اس طرح دو سمتیوں کا سمتی حاصل ضرب تقلیبی کلیے کی پابندی نہیں کرتا یعنی $\vec{B} \times \vec{A} \neq \vec{A} \times \vec{B}$

2. دو سمتیوں کا سمتی حاصل ضرب تقسی می کلیے کی پابندی کرتا ہے۔ یعنی

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

3. اگر دو سمتیے ہم خط ہوں تب $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$ یعنی $\sin \theta = 0$

$$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = AB \sin \theta \hat{n} = 0$$

اس طرح دو سمتیے ہم خط (متوازی یا قدر متوازی) ہوں گے اگر $\vec{A} \times \vec{B} = 0$

4. اگر دو سمتیے مساوی ہوں تب $\theta = 0$ اور $\vec{A} \times \vec{A} = AA \sin \theta \hat{n} = 0$ اس طرح جو مساوی سمتیوں کا سمتی حاصل

ضرب ہمیشہ صفر ہوگا۔

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0 \text{ تب } \hat{i} \times \hat{j} \text{ اور } \hat{k} \text{ اکائی سمتیے ہوں تب}$$

5. دو اکائی سمتیوں کا سمتی حاصل ضرب

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin \theta \hat{n}$$

$$\frac{\vec{A}}{A} \times \frac{\vec{B}}{B} = \sin \theta \hat{n} \quad \text{یا} \quad \vec{A} \times \vec{B} = AB \sin \theta \hat{n}$$

اس طرح دو اکائی سمتیوں کا سمتی حاصل ضرب ایک سمتیہ ہے۔ جس کی مقدار ان کے درمیان بننے والے زاویے کے سائین (sine) کے مستوی ہوتی ہے جب کہ سمت ان سمتیوں سے گھری ہوئی مستوی کے عموداً ہوتی ہے۔

6. دو عمودی سمتیوں کا سمتی حاصل ضرب: دو عمودی سمتیوں کے درمیان بننے والا زاویہ $\theta = 90$ ہوگا۔

$$\theta = 90 \Rightarrow \sin 90 = 1 \Rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = AB \sin 90 \hat{n}$$

اس طرح دو باہم عمودی سمتیوں کا سمتی حاصل ضرب ایک سمتیہ ہے۔ جس کی مقدار ان سمتیوں کی مقدار کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتی ہے جب کہ سمت \hat{n} کی جانب ہوتی ہے۔

اگر \hat{i}, \hat{j} اور \hat{k} اکائی سمتیوں ہوں تب

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}; \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \quad \text{اور} \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$$

$$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k} \quad \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j} \quad \text{اور} \quad \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$$

7. اجزائی صورت میں سمتی حاصل ضرب: فرض کیجیے کہ (A_x, A_y, A_z) اور (B_x, B_y, B_z) ترتیب وار x, y اور z محور کی سمت میں سمتیے \vec{A} اور \vec{B} کے اجزائیں تب

$$\vec{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z \quad \text{اور} \quad \vec{B} = \hat{i}B_x + \hat{j}B_y + \hat{k}B_z$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (\hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z) \times (\hat{i}B_x + \hat{j}B_y + \hat{k}B_z)$$

$$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{i}(A_y B_z - B_y A_z) + \hat{j}(A_x B_z - B_x A_z) + \hat{k}(A_x B_y - B_x A_y)$$

8. سمتی ضرب کے ذریعے دو سمتیوں کے درمیان بننے والا زاویہ: ہم جانتے ہیں کہ

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin \theta \hat{n} \quad (1.10)$$

اس طرح

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{i}(A_y B_z - B_y A_z) + \hat{j}(A_x B_z - B_x A_z) + \hat{k}(A_x B_y - B_x A_y) \quad (1.11)$$

مساوات (1.10) اور (1.11) سے

$$AB \sin \theta \hat{n} = \hat{i}(A_y B_z - B_y A_z) + \hat{j}(A_x B_z - B_x A_z) + \hat{k}(A_x B_y - B_x A_y) \quad (1.12)$$

مساوات (1.12) کے دونوں جانب مربع کرنے پر

$$A^2 B^2 \sin^2 \theta = (A_y B_z - B_y A_z)^2 + (A_x B_z - B_x A_z)^2 + (A_x B_y - B_x A_y)^2$$

$$\hat{n} \cdot \hat{n} = 1 \text{ اور } \hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \text{ اور } B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$$

$$\therefore \sin^2 \theta = \frac{(A_y B_z - B_y A_z)^2 - (A_x B_z - B_x A_z)^2 + (A_x B_y - B_x A_y)^2}{(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2) \cdot (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)}$$

$$\therefore \sin \theta = \left[\frac{(A_y B_z - B_y A_z)^2 - (A_x B_z - B_x A_z)^2 + (A_x B_y - B_x A_y)^2}{(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2) \cdot (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)} \right]^{1/2}$$

$$\therefore \theta = \sin^{-1} \left[\frac{(A_y B_z - B_y A_z)^2 - (A_x B_z - B_x A_z)^2 + (A_x B_y - B_x A_y)^2}{(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2) \cdot (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)} \right]^{1/2}$$

1.10 میزانی اور سمتی میدان (Scalar & Vector Field)

میزانی میدان: خلا کا وہ علاقہ جس میں ایک میزانی مقدار تسلسل کے ساتھ موجود ہو اور جو کسی بھی نقطے پر مقامی متغیرات کی منفرد قدروں کے ذریعہ ظاہر کی جائے میزانی میدان کہلاتا ہے۔

اگر Φ محدودات کے سیٹ (x, y, z) کے مقامی متغیرات \vec{r} کا میزانی تفاعل ہو تب میزانی میدان اس طرح ہوگا۔

$$\Phi = (\vec{r}) - \Phi(x, y, z)$$

مثال: تپشی میدان، قوتی میدان، ہم قوتی میدان وغیرہ۔۔۔

سمتی میدان: خلاء کا وہ علاقہ جس میں ایک سمتی مقدار تسلسل کے ساتھ موجود ہو اور جو کسی بھی نقطے پر سمت اور مقدار کے لحاظ سے مقامی متغیر کی منفرد مقداروں سے ظاہر کی جائے سمتی میدان کہلاتا ہے۔

اگر V محدودات کے سیٹ (x, y, z) کے مقامی متغیرات \vec{r} کا سمتی تفاعل ہو تب سمتی میدان اس طرح ہوگا۔

$$V(\vec{r}) = \vec{v}(x, y, z)$$

مثالیں: برقی میدان، تجاذبی میدان، برقی روتی۔۔۔

1.11 میزانی میدان کا گریڈینٹ (Gradient of Scalar Field)

فرض کیجیے کہ P مقامی متغیر $\vec{R} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ کے میزانی میدان میں ایک نقطہ ہے اور نقطے پر اس میزانی میدان کی

قدر $\Phi(\vec{r}) = \Phi(x, y, z)$ ہوگی۔ جہاں پر Φ تین غیر منحصر محدودات x, y, z کا مسلسل تفرقی تفاعل ہے۔

اور z کو مستقل رکھ کر Φ کا بلحاظ x جزوی تفرق کرنے پر $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ کی قیمت ہوتی ہے۔ جو نقطے P پر x کی سمت میں Φ میں تبدیلی کی

شرح کو ظاہر کرتی ہے۔ اس طرح $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ نقطے P پر z کی سمت میں اور $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ نقطے P پر z کی سمت میں تبدیلی کی شرح کو ظاہر کرتی ہے۔ تفاعل

Φ مختلف سمتوں میں تبدیلی کی مختلف مقدا ریں رکھتا ہے۔

اس طرح ہم خلاء میں ایک ایسا سمتیہ ظاہر کر سکتے ہیں جس کے اجزا x, y, z سمتوں میں میزانی تفاعل Φ کے جزوی تفرق ہوں

گے۔ اسی سمتیے کو Φ کا گریڈینٹ کہتے ہیں اور اس کو $Grad\Phi$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\begin{aligned}\therefore Grad\Phi &= \frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{k} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\Phi \\ Grad\Phi &= \vec{\nabla}\Phi\end{aligned}$$

جہاں یہ علامت $(del)\nabla$ کو سمتی تفرقی آپریٹر (Vector Differential Operator) یا صرف (Del

Operator) کہتے ہیں۔ یہ بات قابل غور ہے کہ $\vec{\nabla}$ سمتیہ نہیں ہے صرف ایک آپریٹر ہے جو سمتیوں کے تمام کلیات کی پابندی کرتا ہے۔

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

میزانی میدان کی طبعی اہمیت (Physical Significance of Scalar field)

ایک نقطہ P لیجیے جس کے محددات x, y, z اور ایک نقطہ Q لیجیے جو P کے بہت قریب ہے جس کے محددات $x + dx + dy + z + dz$

شکل (1.3) میں دکھایا گیا ہے۔ نقاط P اور Q کے درمیان سمتی فاصلہ

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k} \quad (1.13)$$

فرض کیجیے کہ Φ نقطے P پر میزانی تقابل ہے اور $\Phi + d\Phi$

کو Φ کا جملہ تفرق (Total Differential) کہتے ہیں۔

x کی سمت Φ میں تبدیل $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ ہوگی۔

∴ A پر Φ کی قدر اس طرح ہوگی۔

$$\Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx$$

y کی سمت Φ میں تبدیل $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ ہوگی۔

B پر Φ کی قدر اس طرح ہوگی۔

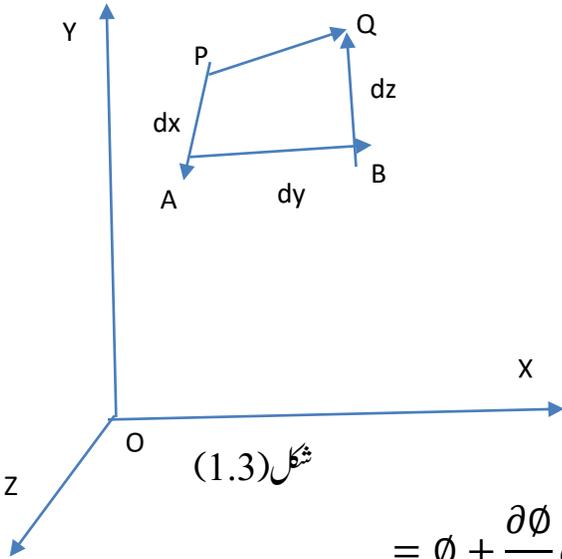
$$\Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx\right)dy$$

$$= \Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy \quad (1.14)$$

اس طرح Z کی سمت Φ میں تبدیلی $\frac{\partial\Phi}{\partial z}$ ہوگی۔ نقطے Q پر Φ کی قدر اس طرح ہوگی۔

$$= \Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy\right)dz$$

$$= \Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz \quad (1.15)$$



$$\begin{aligned} \therefore d\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi}{\partial z} dz \\ d\phi &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) \\ d\phi &= \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r} = \vec{\nabla}\phi \cdot \hat{r} dr \\ \therefore \frac{d\phi}{dr} &= \vec{\nabla}\phi \cdot \hat{r} \quad (1.16) \end{aligned}$$

جہاں پر \vec{r}, PQ کی جانب اکائی سمتیہ ہے۔

اس طرح میزانی میدان کا گریڈینٹ ($grad\phi$) ایک سمتی میدان کو ظاہر کرتا ہے جس کی مقدار ϕ کی قدر میں اعظم تبدیلی کے مساوی اور سمت اعظم تبدیلی کی جانب نقل مقام کی سمت میں ہوگی۔ اس طرح "میزانی میدان کا گریڈینٹ ایک سمتیہ ہے۔"

1.12 حل شدہ مثالیں (Solved Problems)

حل شدہ مثال 1

اگر $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ ، $\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ اور $\vec{C} = \hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$ تین سمتیہ ہوں تب سمتیہ ($\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$) کی مقدار اور سمتیہ کو سائین معلوم کیجیے۔

حل: $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ فرض کیجیے کہ

$$\vec{R} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k} + 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k} + \hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\vec{R} = 4\hat{i} - 3\hat{k}$$

$$R_x = 4\hat{i} \quad R_y = 0 \quad R_z = -3\hat{k}$$

$$\vec{R} \text{ کی مقدار } |\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

\vec{R} کے سمتیہ کو سائین

$$l = \frac{R_x}{|\vec{R}|} = \frac{4}{5}; m = \frac{R_y}{|\vec{R}|} = \frac{0}{5} = 0 \quad n = \frac{R_z}{|\vec{R}|} = -\frac{3}{5}$$

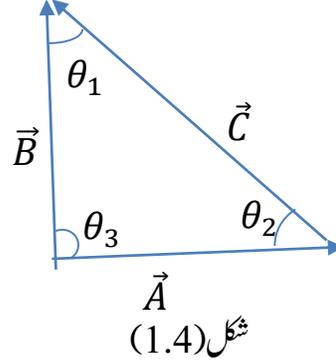
حل شدہ مثال 2

اگر $\vec{A} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$ اور $\vec{B} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ ایک مثلث کے دو اضلاع ہوں تب اس مثلث کے تمام زاویے معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیجیے کہ \vec{C} دیے گئے مثلث کا تیسرا ضلع ہے۔ تب

$$\vec{A} + \vec{C} = \vec{B} \quad \text{تب} \quad \vec{C} = \vec{B} - \vec{A}$$

دیا گیا ہے کہ $A = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$ اور $B = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$
 $\vec{C} = \vec{B} - \vec{A} = (4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}) - (3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k})$
 $\vec{C} = \hat{i} - 7\hat{j} + 5\hat{k}$



\vec{A} اور \vec{B} کے درمیان کا زاویہ

$$\cos \theta_3 = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

$$\cos \theta_3 = \frac{12 - 6 - 6}{AB} = \frac{0}{AB} = 0$$

$$\cos \theta_3 = 0 \Rightarrow \theta_3 = \cos^{-1}(0) = 90^\circ$$

\vec{A} اور \vec{C} کے درمیان کا زاویہ

$$\cos \theta_2 = \frac{\vec{A} \cdot \vec{C}}{AC} = \frac{A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2}}$$

$$\cos \theta_2 = \frac{3 - 42 - 10}{\sqrt{9 + 36 + 4} \sqrt{25 + 1 + 49}} = \frac{-49}{\sqrt{49} \sqrt{75}} = \frac{7 \times 9}{7 \times 5 \sqrt{3}}$$

$$\cos \theta_2 = -0.8083 \Rightarrow \theta_2 = 36^\circ 41'$$

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 180$$

$$\theta_1 = 180 - (\theta_2 + \theta_3)$$

$$= 180 - 36^\circ 41' - 90$$

$$\theta_1 = 53^\circ 56'$$

حل شدہ مثال 3

ثابت کیجیے کہ سمتیے $A = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $B = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$, اور $C = 2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ ایک

قائم الزاویہ مثلث بناتے ہیں۔

حل: سمتیے \vec{A} , \vec{B} , اور \vec{C} اگر ایک مثلث بنائیں تب ان میں سے دو کا مجموعہ تیسرے کے مساوی ہوگا۔

$$\vec{B} + \vec{C} = (\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) + (2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k})$$

$$= 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k} = \vec{A}$$

$$\therefore \vec{B} + \vec{C} = \vec{A}$$

دیئے گئے تین سمتیے \vec{A} , \vec{B} , اور \vec{C} ایک مثلث بناتے ہیں۔

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) = 3 + 6 + 5 = 14 \quad \text{مزید}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{C} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}) = 6 - 2 - 4 = 0$$

$$\vec{B} \cdot \vec{C} = (\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) \cdot (2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}) = 2 - 3 - 20 = -21$$

چوں کہ $\vec{A} \cdot \vec{C} = 0$ تب سمتیے \vec{A} اور \vec{C} باہم عمود آئیں۔ اس طرح \vec{A} , \vec{B} اور \vec{C} سے بننے والا مثلث قائم الزاویہ مثلث ہے۔

حل شدہ مثال 4

$$\text{اگر } \vec{A} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} \text{ اور } \vec{B} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k} \text{ تب دو سمتیوں کا میزانی ضرب حاصل کیجیے۔}$$

حل: دیا گیا ہے کہ

$$\vec{A} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}, \vec{B} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 3 + 2 + 4 = 9$$

حل شدہ مثال 5

سمتیے $(2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$ اور $(6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ کے درمیان بننے والا زاویہ معلوم کیجیے۔

$$\text{حل: } \vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}, \vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k} \text{ دیا گیا ہے کہ}$$

فرض کرو کہ \vec{A} اور \vec{B} کے درمیان کا زاویہ θ ہے۔ تب

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{12 - 6 + 6}{\sqrt{17} \sqrt{49}} = \frac{12}{7\sqrt{17}}$$

$$\cos \theta = \frac{12}{7 \times 4.123} = 0.4158$$

$$\theta = \cos^{-1}(0.4158) = 65.45^\circ$$

حل شدہ مثال 6

سمتیے $\vec{A} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$ اور $\vec{B} = (3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$ کے عمود آکائی سمتیہ معلوم کیجیے۔ ساتھ ہی

ساتھ زاویہ بھی معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیجیے سمتیے \vec{A} اور \vec{B} کے عمود آپائے جانے والا سمتیہ \vec{C} ہے جو \vec{A} اور \vec{B} کے سمتی حاصل ضرب سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(2 - 6) - \hat{j}(1 - 9) + \hat{k}(2 - 6)$$

$$\vec{C} = -4\hat{i} + 8\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$|\vec{C}| = \sqrt{4^2 + 8^2 + 4^2} = \sqrt{96}$$

$$\vec{C} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{-4\hat{i} + 8\hat{j} - 4\hat{k}}{\sqrt{96}}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14} \text{ اور } |\vec{B}| = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$$

فرض کیجیے کہ θ اور \vec{A} اور \vec{B} کے درمیان بننے والا زاویہ ہے۔ تب

$$|\vec{C}| = |\vec{A}||\vec{B}| \sin \theta$$

$$\sin \theta = \frac{|\vec{C}|}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{\sqrt{96}}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{96}}{14} = 0.6999$$

$$\theta = \sin^{-1}(0.6999)$$

حل شدہ مثال 7

سمتیے \vec{C} کے اجزا معلوم کیجیے جو سمتیے $\vec{A} = (2\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k})$ اور $\vec{B} = (3\hat{i} - \hat{j} - \hat{k})$ کے عموداً پر ہے۔

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = (2\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}) \times (3\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) \quad \text{حل:}$$

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \hat{i}(1 - 4) - \hat{j}(-2 + 12) + \hat{k}(-2 + 3)$$

$$\vec{C} = -3\hat{i} - 10\hat{j} + \hat{k}$$

حل شدہ مثال 8

دو سمتیے $A = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ اور $B = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ کا سمتی حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

حل: فرض کرو کہ \vec{C} حاصل سمتیہ ہے۔ تب

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = (3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) \times (\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(-2 + 4) - \hat{j}(6 - 2) + \hat{k}(-6 + 1)$$

$$\vec{C} = 2\hat{i} - 4\hat{j} - 5\hat{k}$$

حل شدہ مثال 9

اگر $\phi = x^4 + y^4 + z^4$ تب $\vec{\nabla}\phi$ معلوم کیجیے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $\vec{\nabla}\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k}\right)$

$$\vec{\nabla}\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)(x^4 + y^4 + z^4)$$

$$= \frac{\partial x^4}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial y^4}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial z^4}{\partial z}\hat{k}$$

$$\therefore \vec{\nabla}\phi = 4x^3\hat{i} + 4y^3\hat{j} + 4z^3\hat{k} = 4(x^3\hat{i} + y^3\hat{j} + z^3\hat{k})$$

حل شدہ مثال 10

اگر $\phi = x^{3/2} + y^{3/2} + z^{3/2}$ تب $\vec{\nabla}\phi$ معلوم کیجیے۔

$$\begin{aligned} \text{حل:} \quad \vec{\nabla}\phi &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot \phi \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) (x^{3/2} + y^{3/2} + z^{3/2}) \\ &= \frac{\partial x^{3/2}}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial y^{3/2}}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial z^{3/2}}{\partial z} \hat{k} \\ &= \frac{3}{2} x^{1/2} \hat{i} + \frac{3}{2} y^{1/2} \hat{j} + \frac{3}{2} z^{1/2} \hat{k} \\ \vec{\nabla}\phi &= \frac{3}{2} (x^{1/2} \hat{i} + y^{1/2} \hat{j} + z^{1/2} \hat{k}) \end{aligned}$$

حل شدہ مثال 11

اگر $\phi(x, y, z) = 3x^2y - y^3x^2$ کا ایک میزانی تقابل ہو ت $(1, 2, 2)$ پر $\text{grad}\phi$ کی

قدر معلوم کیجیے۔

$$\begin{aligned} \text{حل:} \quad \text{grad}\phi &= \vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \hat{k} \quad \phi = 3x^2y - y^3x^2 \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} &= 6xy - 2xy^3; \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2x^2; \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \\ \therefore \text{grad}\phi &= (6xy - 2xy^3)\hat{i} + (3x^2 - 3y^2x^2)\hat{j} \\ \text{grad}\phi \text{ at } (1, 2, 2) &= (6 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 2^3)\hat{i} + (3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 2^2 \cdot 1^2)\hat{j} \\ \text{grad}\phi \text{ at } (1, 2, 2) &= (12 - 16)\hat{i} + (3 - 12)\hat{j} \\ \text{grad}\phi \text{ at } (1, 2, 2) &= -4\hat{i} - 9\hat{j} \end{aligned}$$

حل شدہ مثال 12

اگر $\phi(x, y, z) = 3x^2y - yz^2$ تب $\text{Grad}\phi$ پر $(1, 2, -1)$ معلوم کیجیے۔

$$\begin{aligned} \text{حل:} \quad \vec{\nabla}\phi &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) (3x^2y - yz^2) \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} &= 6xy \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = 3x^2 - z^2 \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = -2yz \\ \therefore \vec{\nabla}\phi &= 6xy\hat{i} + (3x^2 - z^2)\hat{j} - 2yz\hat{k} \\ \therefore \vec{\nabla}\phi \text{ at } (1, 2, -1) &= (6 \cdot 1 \cdot 2)\hat{i} + (3 \cdot 1^2 - (-1)^2)\hat{j} - 2(2)(-1)\hat{k} \\ \vec{\nabla}\phi &= 12\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k} \end{aligned}$$

حل شدہ مثال 13

اگر $\phi(x, y, z) = 3x^3y - y^2z^2$ تب $\vec{\nabla}\phi$ پر $(1, -1, 1)$ معلوم کیجیے۔

$$\text{حل:} \quad \vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \hat{k}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 9x^2y; \frac{\partial \phi}{\partial y} = 3x^2 - 2yz^2; \frac{\partial \phi}{\partial z} = -2y^2z$$

$$\vec{\nabla}\phi = 9x^2y\hat{i} + (3x^2 - 2yz^2)\hat{j} - 2y^2z\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}\phi = (9 \times 1^2 \times 1)\hat{i} + (3 \times 1^2 - 2 \times -1 \times 1^2)\hat{j} - (2 \times 1^2 \times 1)\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}\phi = -9\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$$

حل شدہ مثال 14

میزانی تقابل $\phi(x, y) = x^2 - y^2$ کا گریڈینٹ معلوم کیجیے۔

$$\text{grad}\phi = \vec{\nabla}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{j} \quad \text{حل:}$$

$$\phi(x, y) = x^2 - y^2 \text{ دیا گیا ہے۔}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2x; \frac{\partial \phi}{\partial y} = -2y$$

$$\vec{\nabla}\phi = 2x\hat{i} - 2y\hat{j} = 2(x\hat{i} - y\hat{j})$$

حل شدہ مثال 15

$$\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z} \text{ اگر } \vec{A} = \lambda\vec{B} \text{ تب ثابت کرو کہ}$$

حل: دیا گیا ہے کہ $\vec{A} = \lambda\vec{B}$

$$(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) = \lambda(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$(A_x\hat{i} - \lambda B_x)\hat{i} + (A_y - \lambda B_y)\hat{j} + (A_z - \lambda B_z)\hat{k} = 0$$

چوں کہ $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ اکائی سمتیے ہیں تب مندرجہ بالا مساوات اسی وقت درست ہوگی اگر

$$\therefore A_x - \lambda B_x = 0, A_y - \lambda B_y = 0, A_z - \lambda B_z = 0$$

$$A_x = \lambda B_x \quad \text{یا} \quad \lambda = \frac{A_x}{B_x}$$

$$A_y = \lambda B_y \quad \text{یا} \quad \lambda = \frac{A_y}{B_y}$$

$$A_z = \lambda B_z \quad \text{یا} \quad \lambda = \frac{A_z}{B_z}$$

$$\text{اس طرح} \quad \frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z} = \lambda$$

$$\text{یا} \quad \frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z}$$

1.13 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- میزانی مقداریں (Scalar Quantities): وہ طبعی مقداریں جو صرف مقدار رکھتی ہیں اور کوئی سمت نہیں رکھتیں۔ میزانی مقدار یا میزانیہ کہلاتی ہیں۔ مثلاً: کمیت، حجم، کثافت، تپش، چال، کام وغیرہ

• سمتی مقداریں (Vector Quantities): وہ طبعی مقداریں جو مقدار اور سمت دونوں رکھتی ہیں سمتی مقداریں یا صرف سمتیہ کہلاتی ہیں۔ مثلاً: رفتار، اسراع، قوت، معیار حرکت، برقی میدان وغیرہ

• سمتیہ \vec{A} کی سمت میں پائے جانے والا اکائی سمتیہ \hat{A} باہم عمودی اکائی سمتیوں $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ کی شکل میں اسطرح ہوگا۔

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$$

• سمتیہ \vec{A} اور x -محور، y -محور، z -محور کے درمیان بننے والے زاویے کے کوسائین کو ترتیب وار x -سمتی کو سائین، y -سمتی اور z -سمتی کو سائین کہتے ہیں۔ جن کو ترتیب وار l, m, n سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ سمتیہ \vec{A} ، x, y, z اور z محور ہے ترتیب وار زاویہ α, β, γ بناتا ہے۔

$$n = \cos \gamma = \frac{A_z}{A} \quad \text{اور} \quad m = \cos \beta = \frac{A_y}{A} \quad \text{اور} \quad l = \cos \alpha = \frac{A_x}{A}$$

• دو سمتیہ \vec{A} اور \vec{B} کے درمیان سمتی ضرب کو $\vec{A} \times \vec{B}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ جن کی سمت زاویے θ کی سمت میں مائل ہوتی ہے۔ یہ ایک سمتیہ ہے جس کی قدر $AB \sin \theta$ اور سمتیہ \vec{A} اور \vec{B} سے گھری مستوی ہر عموداً ہوتی ہے۔ یہ سمت مثبت ہوگی اگر \vec{A} سے \vec{B} کی جانب گردش مخالف سمت سماعت ہو جب کہ یہ سمت منفی ہوگی اگر \vec{A} سے \vec{B} کی جانب گردش سمت سماعت ہو۔

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin \theta \hat{n} = \vec{C}$$

جہاں یہ \hat{n} ایک اکائی سمتیہ ہے جو \vec{A} اور \vec{B} کے عموداً ہے۔ اس اکائی سمتیہ کو اکائی عمود کہتے ہیں۔

• اسطرح ہم خلاء میں ایک ایسا سمتیہ ظاہر کر سکتے ہیں جس کے اجزا x, y, z سمتوں میں میزانی تفاعل ϕ کے جزوی تفرق ہوں گے۔ اسی سمتیہ کو ϕ کا گریڈینٹ کہتے ہیں اور اس کو $Grad \phi$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\therefore Grad \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{k}$$

1.14 کلیدی الفاظ (Keywords)

- مساوی سمتیہ (Equal vectors): دو سمتیہ اس وقت مساوی سمتیہ کہلاتی ہیں جب کہ ان کی مقدار اور سمت یکساں ہو
- منفی سمتیہ (Negative Vector): ایسا سمتیہ جس کی مقدار یکساں نہیں لیکن سمت مخالف ہو
- اکائی سمتیہ (Unit Vector): ایسا سمتیہ جس کی مقدار اکائی
- صفری سمتیہ (Null vector): اگر کسی سمتیہ کی مقدار صفر ہو
- ہم آہنگی سمتیہ (Co-initial vectors): ایسے سمتیہ جن کا ابتدائی نقطہ مشترک ہو یا جو ایک ہی نقطے سے نکلتے ہوں
- ہم خط یا متوازی سمتیہ (Collinear vectors): ایسے سمتیہ جو ایک ہی خط یا متوازی خطوط پر عمل کرتے ہیں
- ہم مستوی سمتیہ یا ہم سطحی سمتیہ (Coplanar Vectors): ایسے سمتیہ جو ایک ہی مستوی تک محدود ہو

1.15 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

1.15.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. سمتی مقداروں کے دو مثالیں دیجیے۔

2. مقامی سمتیہ سے کیا مراد ہے۔

3. سمتی ضرب $\vec{A} \times \vec{B}$ = _____

$AB \cos \theta \hat{n}(b)$ $AB \sin \theta \hat{n}(a)$

(d) ان میں سے کوئی بھی نہیں $AB \tan \theta \hat{n}(c)$

4. سمتیہ $\vec{A} = i + j$ کی $Grad \vec{A}$ کی قیمت کیا ہے۔

10 (d) 2 (c) 1 (b) 0 (a)

5. میزانی میدان سے کیا مراد ہے۔

6. سمتی میدان سے کیا مراد ہے۔

7. $\vec{A} = 3i + 4j$ سمتیہ کی قدر $|\vec{A}|$ معلوم کیجیے۔

5units (d) 2units(c) 4units (b) 3units(a)

8. سمتیہ \vec{A} اور \vec{B} کے میزانی ضرب کی تعریف۔ میزانی ضرب $\vec{A} \cdot \vec{B}$ = _____ ہوتی ہے۔

9. اکائی سمتیہ سے کیا مراد ہے؟

10. کن حالات میں سمتیہ کا جز سمتیہ کی قیمت کے مساوی ہوتا ہے۔

11. اکائی سمتیہ کی اکائیاں کیا ہوں گی۔

1.15.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions);

1. دو سمتیوں کے میزانی (نقطی) ضرب کو بیان کیجیے اور اس کے خصوصیات بتائیے۔

2. سمتی میدان کی تعریف کیجیے۔ اس کے کوئی دو خصوصیات بتائیے۔

3. دو سمتیوں کے سمتی حاصل ضرب کو بیان کیجیے۔

4. سمتی اور میزانی میدان کیا ہیں۔ مثالوں سے سمجھائیے۔

1.15.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. سمتی اور میزانی میدان کیا ہیں۔ مثالوں سے سمجھائیے۔ دو سمتیوں کے میزانی (نقطی) ضرب کو بیان کیجیے اور اس کے خصوصیات بتائیے۔

2. سمتی میدان کی تعریف کیجیے۔ اس کے خصوصیات بتائیے۔

1.15.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. دو سمتیے $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ اور $B = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ کا میزانی حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

2. ثابت کرو کہ تین سمتیے $\vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$, $B = \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$, اور $C = \hat{i} + 5\hat{j} - 4\hat{k}$ ایک دوسرے پر عمود ہیں۔

3. سمتیے $A = 2i + 3j + k$ اور $B = i - j + k$ کے عمود وار کائی سمتیہ معلوم کرو۔

4. اگر $F = 2i + 3j - k$ اور $r = i - j + 6k$ تب $r \times F$ معلوم کرو۔

5. $A = 2i + j - k$ اور $B = i - k$ کے درمیان زاویہ معلوم کرو۔

6. اگر $P = 2i + 3j - 4k$ اور $Q = 5i + 2j + 4k$ ہو تو دو سمتیوں کا درمیانی زاویہ معلوم کرو۔

7. اگر $F = i + 2j - k$ اور $V = 4i - j + 7k$ ہو تب $F \cdot V$ معلوم کرو۔

8. $A = 10i - 6j$ اور $B = -4i + 3j$ ہو تب $A \times B$ اور $B \times A$ کو معلوم کیجیے۔

9. $A = (4j - 7k)cm$ اور $B = (5i + 3j)$ کے درمیان زاویہ Sine کو معلوم کیجیے۔

1.16 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Engineering Physics by R.K.Gaur &S.L.Gupta,Dhanpat Rai Publications.
2. Physics Part- I by Resnik.R &Halliday.D, Wiley Eastern Pvt. Ltd. New Delhi.
3. Unified Physics Vol-I, Mechanics by, Dr.S.L.Gupta&Sanjeev Gupta Jai Prakash Nath &Co. Meerut
4. Vector Algebra by Dr. Rishi Kumar Johan& Dr. Anshuman Singh
5. Vector Algebra and Analysis with Application by Prasun Kumar nayak
6. Vector Algebra by Shanti Narayan& P.K. Mittal, s Chand
7. Vector Analysis tensor analysis and linear vector space by S.P. Kuil

اکائی 2۔ سمتیوں کا تکمیلہ

(Vectors Integration)

اکائی کے اجزا

تمہید	2.0
مقاصد	2.1
ایک سمتی تفاعل کا خطی تکمیلہ	2.2
ایک سمتی تفاعل کا سطح تکمیلہ	2.3
ایک سمتی میدان کا ڈائیورجینس	2.4
گاؤس غیر مرکوزیت مسئلہ	2.5
ایک سمتیہ میدان کا کرل	1.6
طبعی افادیت	2.6.1
سٹوکس مسئلہ	2.7
حل شدہ مثالیں	2.8
اکتسابی نتائج	2.9
کلیدی الفاظ	2.10
نمونہ امتحانی سوالات	2.11
معروضی جوابات کے حامل سوالات	2.11.1
مختصر جوابات کے حامل سوالات	2.11.2
طویل جوابات کے حامل سوالات	2.11.3
حل شدہ جوابات کے حامل سوالات	2.11.4
مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں	2.12

2.0 تمہید (Introduction)

سمتیوں کا تجزیہ ایک طاقتور حسابی ٹکنیک ہے۔ جو طبعی مساوات کی ترتیب میں ایک موثر آلے کار ہے اور ساتھ ہی ساتھ اس کی مدد سے مساوات کا طبعی مفہوم منفرد اور واضح انداز میں سمجھتی ہیں اور مدد ملتی ہے۔ خصوصاً برقی مقناطیسی نظریے ہیں۔ عام طور پر تمام طبعی مقداروں کو دو درجوں میں تقسیم کیا جاتا ہے (i) میزانی مقداریں (ii) سمتی مقداریں۔ میزانی مقداریں (Scalar Quantities) وہ طبعی مقداریں ہے جو صرف مقدار رکھتی ہیں اور کوئی سمت نہیں رکھتیں۔ میزانی مقدار یا میزانیہ کہلاتی ہیں۔ مثلاً: کمیت، حجم، کثافت، تپش، چال، کام وغیرہ۔ سمتی مقداریں (Vector Quantities) وہ طبعی مقداریں جو مقدار اور سمت دونوں رکھتی ہیں سمتی مقداریں یا صرف سمیتے کہلاتی ہیں۔ مثلاً: رفتار، اسراع، قوت، معیار حرکت، برقی میدان وغیرہ۔

2.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں ہم

- i. ایک سمتی تفاعل کا خطی تکمیل کے بارے میں جانکاری حاصل کریں گیں۔
- ii. ایک سمتی تفاعل کا سطح تکمیل کے بارے میں معلومات حاصل کریں گیں۔
- iii. ایک سمتی میدان کا ڈائیریکشن کے بارے میں جانکاری حاصل کریں گیں۔
- iv. گاؤس غیر مرکزیت مسئلہ کو آفاض کرے گے۔
- v. ایک سمتیہ میدان کا کرل، طبعی افادیت کے بارے میں معلومات حاصل کریں گیں۔
- vi. سٹوکس مسئلہ کو آفاض کرے گے۔

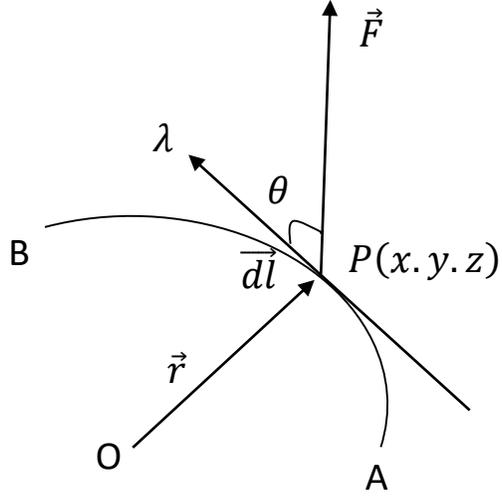
2.2 ایک سمتی تفاعل کا خطی تکمیل (Line Integral of a Vector Function)

شکل (2.1) کے مطابق فرض کیجیے کہ $\vec{F}(x, y, z)$ ایک سمتی تفاعل ہے اور AB ایک منحنی ہے۔ منحنی AB پر سمتی تفاعل \vec{F} کا خطی تکمیل دراصل نقطے P یہ منحنی کے مماس کی جانب \vec{F} کے جز کا تکمیل ہوتا ہے۔ منحنی AB کو چھوٹے چھوٹے خطوط میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ فرض کیجیے کہ $d\vec{l}$ نقطے P یہ منحنی کے ایک چھوٹے کے خط کا طول ہے \vec{F} اور نقطے P پر بننے والے مماس کے درمیان بننے والا زاویہ ہے۔

$$\vec{F} \cos \theta = \text{نقطے P پر مماس کی جانب } \vec{F} \text{ کا جز}$$

$$\text{نقطے P پر } \vec{F} \cos \theta \text{ اور } dl \text{ کا حاصل ضرب} = \vec{F} \cos \theta \cdot dl$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = \vec{F} dl \cdot \cos \theta$$



شکل (2.1)

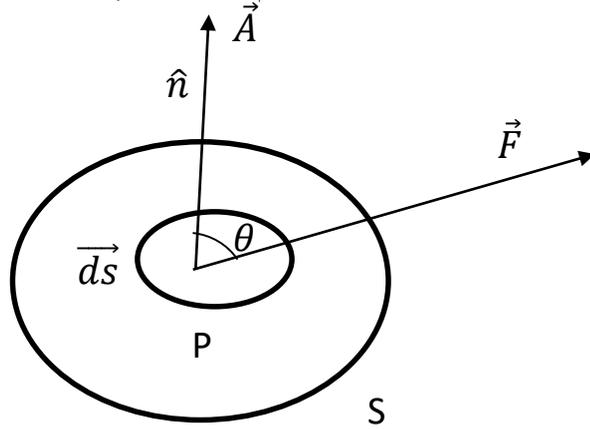
اس طرح کے حاصل ضرب کے مجموعے کی حد (Limit) یہاں تک کہ جملہ خط والے عناصر لاتناہی پر مائل ہوں اور ہر خط کا طول صفر پر مائل ہو، \vec{F} کا خطی تکمیل A سے B تک کہلاتا ہے اور اس کو اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} \text{ or } \int_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \vec{F}_i \cdot d\vec{l}_i \quad (2.1)$$

اگر \vec{F} منحنی AB پر عمل کرنے والی متغیر قوت ہو تب خطی تکمیل $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$ انجام کردہ کام کو ظاہر کرتا ہے تب \vec{F} ذرے کو A سے B کی جانب حرکت دے گی۔ اگر C ایک بند منحنی ہو (یعنی ایسی منحنی جو خود سے کہیں بھی منطبق نہ ہو) تب اس منحنی کے اطراف خطی تکمیل کے اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$

2.3 ایک سمتی تفاعل کا سطح تکمیلہ (Surface Integral of a Vector Function)

فرض کیجیے کہ $\vec{F}(x, y, z)$ مقام کا سمتی تفاعل ہے اور S دی گئی سطح کا رقبہ ہے جیسا کہ شکل (2.2) میں دکھایا گیا ہے۔



شکل (2.2)

S سطح پر سمتی تفاعل \vec{F} کا سطح تکمیل دراصل سطح کے عمود میں \vec{F} کے جز کا تکمیل ہوتا ہے۔ فرض کیجیے کہ سطح کئی چھوٹے اجزا میں تقسیم ہے۔ فرض کیجیے کہ ds نقطے P پر چھوٹے سے سطح جز کا رقبہ ہے θ ، اور \vec{F} اور ds پر عمود PN کے درمیان بننے والا زاویہ ہے۔ PN, \hat{n} کی سمت میں پائے جانے والا اکائی سمتیہ ہے۔

$$F \cos \theta = \text{جز } \vec{F} \text{ کی جانب PN پر عمود } ds$$

$$F \cos \theta ds = F ds \cos \theta = \text{نقطے P پر } F \cos \theta \text{ اور } ds \text{ کا حاصل ضرب}$$

$$\vec{F} \cdot \hat{n} ds = \vec{F} \cdot \vec{ds} =$$

∴ اس طرح کے حاصل ضرب کے مجموعے کی انتہائی حد (Limit) یہاں تک کہ جملہ سطح اجزا لامتناہی پر اور ہر سطحی جز کا رقبہ صہر پر مائیل ہو۔ \vec{F} کا مکمل سطح S پر سطحی تکمیل کہلاتا ہے۔ اس کو اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{ds} \text{ or } \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds$$

$$\text{سطح } \iint_S \vec{F} \cdot \vec{ds} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{ds}_i$$

سطحی تکمیل کو رقبہ S پر سمتیہ \vec{F} کا نفوذ (Flux) کہتے ہیں۔

کسی بند سطح کے سطحی تکمیل کو علامت \oiint سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

حجمی تکمیل (Volume Integral): کسی سطح سے گھیرے ہو یا حجم V پر تفاعل $F(x, y, z)$ کا تین تکمیل کو حجمی تکمیل

کہلاتا ہے۔ اس کو اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\iiint_V F(x, y, z) dv \quad (2.2)$$

حجمی تکمیل عام طور پر میزانی مقدا روں کے تکمیل کے طور پر واقع ہوتا ہے۔

2.4 ایک سمتی میدان کا ڈائیورجینس (Divergence of a Vector Field)

فرض کیجیے کہ \vec{A} ایک سمتی میدان ہے جس کی مقدار اور سمت کسی نقطے پر مقامی محدودات کا تفاعل ہے۔ تب اس سمتیہ \vec{A} اور تفرقی

آپریٹر (Differential Operator) $\vec{\nabla}$ کا میزانی حاصل ضرب مقام کے محدودات x, y, z کا میزانی تفاعل ہوگا۔ اسی کو سمتیہ \vec{A} کا

$$\text{ڈائیورجینس کہتے ہیں۔ } \text{Div. } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

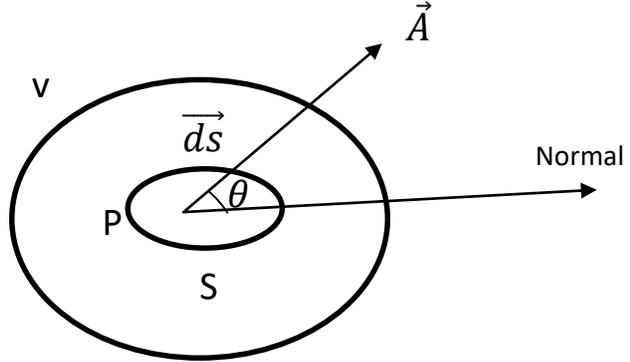
$$\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \text{ اور } \vec{A} = \hat{i} A_x + \hat{j} A_y + \hat{k} A_z$$

$$\therefore \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\hat{i} A_x + \hat{j} A_y + \hat{k} A_z)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (2.3)$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ کی طبعی افادیت: کسی سمتیہ کا ڈائیورجینس اکائی حجم والے سطح رقبے سے جب کہ حجم صفر کی جانب مائیل ہو کسی طبعی مقدار

جیسے مائع یا برقی نفوذ کی جملہ بیرونی بہاؤ کی انتہائی قدر بناتا ہے۔



شکل (2.3)

فرض کیجیے کہ ایک سمتی میدان میں ایک بند حجم V ہے اور جو سطح رقبہ S رکھتا ہے۔ جیسا کہ شکل (2.3) میں دکھایا گیا ہے۔
فرض کیجیے کہ \vec{A} سطحی پر نقطے P پر سمتی میدان ہے۔ \vec{ds} چھوٹے سے رقبے کو ظاہر کرتا ہے جو نقطے P کو گھیرا ہوا ہے۔
اگر θ سمتی \vec{A} اور سطحی پر نقطے P پر بیرونی جانب گرائے گئے عمود کے درمیان بننے والا زاویہ ہو تب

$$\vec{A} \cdot \vec{ds} \cos \theta = \vec{A} \cdot \vec{ds} \quad (\text{Flux})$$

$$\text{مکمل سطح کے بیرونی میدان کا جملہ نفوذ (Flux)} = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{ds}$$

اگر سطح سے گھرا ہوا حجم V بہت ہی چھوٹا ہو تب اکائی حجم کا بیرونی نفوذ \vec{A} کے ڈائیورجینس سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{Div. } \vec{A} = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{ds}$$

مثال:

i. فرض کیجیے کہ سمتی \vec{A} متحرک مائع کی رفتار \vec{V} کو ظاہر کرے تب کسی نقطے پر $\text{div } \vec{V}$ بند سطح سے گھرے ہوئے اکائی حجم سے اکائی وقت میں بہنے والے مائع کے حجم کو ظاہر کرتا ہے۔

اگر کسی نقطے $\text{div. } \vec{V}$ کی قدر منفی ہو تب اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ مائع کا بہاؤ اس نقطے کی جانب ہے یعنی یہ نقطہ منسلک (sink) ہے۔ اگر کسی نقطے پر $\text{div. } \vec{V}$ کی قدر مثبت ہو تب اسی سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ مائع کا بہاؤ اس نقطے کے مخالف جانب ہے۔ یعنی یہ مائع کا مبداء ہے۔

ii. ایک برقی میدان کے لیے اس میدان میں سطحی سے گھرے ہوئے اکائی حجم والے عنصر پر کسی نقطے پر میدانی سمتی \vec{E} کا ڈائیورجینس اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\text{Div } \vec{E} = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

جہاں پر S بند سطح ہے جو نقطے کو گھیرے ہوئی ہے اور V سطح سے گھرے ہوئے عنصر کا حجم ہے کسی بھی نقطے پر برقی میدان کے ڈائیور

جینس سے اس نقطے پر برقی بار کی کثافت (Charge density) حاصل ہوتی ہے جو ایک میزانی تفاعل ہے۔

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ کی طبعی افادیت کے لحاظ سے ہم جانتے ہیں کہ

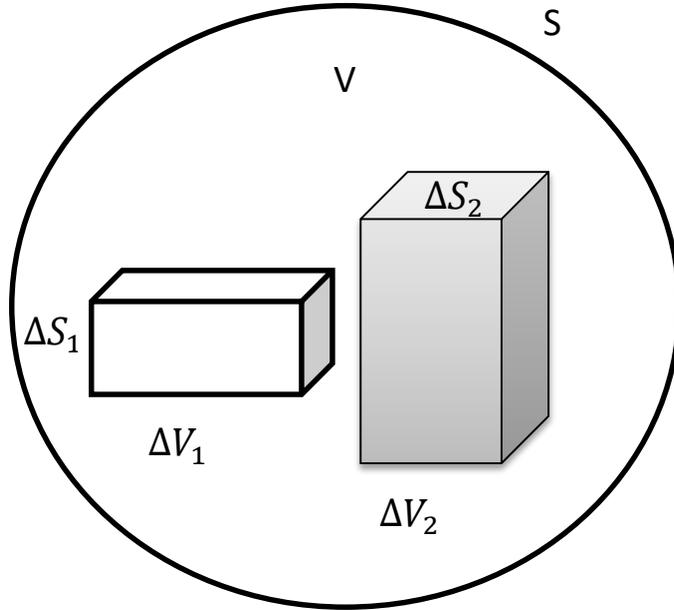
$$\text{Div. } \vec{A} = \oint_S \vec{A} \cdot \vec{ds}$$

اس طرح دیئے گئے نقطے پر ایک سمتی میدان کا ڈائیورجنس اس نقطے کے اطراف بنائی گئی سطح سے گھیرے ہوئے اکائی حجم سے گزرنے والے نفوذ کے مساوی ہوتا ہے اس طرح کے سطح سے گھیرا ہوا حجم صفر کی جانب مائل ہو اس طرح $\text{div. } \vec{A}$ حجمی نفوذ کثافت (Volume Flux Density) ہے جو ایک میزانی مقدار ہے۔

2.5 گاؤس غیر مرکوزیت مسئلہ (Gauss Divergence Theorem)

گاؤس کے مطابق، ایک سمتی میدان \vec{A} میں بند سطح S سے گھیرا ہوا حجم V ہو تب مکمل سطح S پر \vec{A} کے عمودی جز کا سطح تکمیل مساوی ہوتا ہے۔ سطح S سے گھیرے ہوئے حجم V ہر $\text{Div. } \vec{A}$ کے حجمی تکمیل کے

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{A} \cdot \vec{ds} &= \iiint_V (\text{div. } \vec{A}) dv \\ \text{or } \oint_S \vec{A} \cdot \vec{ds} &= \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dv \end{aligned}$$



ثبوت:

شکل (2.4)

فرض کیجیے کہ ایک سمتی میدان \vec{A} میں حجم V ایک بندی سطح S سے گھیرا ہوا ہے۔ فرض کیجیے کہ حجم چھوٹے اجزا $\Delta V_1, \Delta V_2, \Delta V_3, \dots, \Delta V_i, \dots, \Delta V_3, \Delta S_2, \Delta S_1, \dots, \Delta S_3, \Delta S_2, \Delta S_1$ سطحی اجزا ΔS_i سے گھرا ہوا ہے۔ بندی سطح سے سمتی تفاعل کا بیرونی نفوذ مثبت اور اندرونی نفوذ منفی لینے پر سطح سے جملہ بیرونی نفوذ یعنی جملہ سطح S پر \vec{A} کا سطح تکمیل مساوی ہوتا

ہے۔ سطحی اجزا $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3, \dots, \Delta S_i, \dots$ پر بیرونی نفوذ کے مجموعہ کے

$$\iint_S \vec{A} \cdot \vec{ds} = \sum \iint_{\Delta S_i} \vec{A} \cdot \vec{ds} \quad (2.4)$$

چھوٹے سے حجمی جز ΔV_i پر جو سطحی جز ΔS_i سے گھیرا ہوا ہے۔ $Div. \vec{A}$ کی قدر اس طرح ہوگی۔

$$Div. \vec{A} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V_i} \iint_{\Delta S_i} \vec{A} \cdot \vec{ds}$$

$$\text{or } \iint_{\Delta S_i} \vec{A} \cdot \vec{ds} = (div \vec{A}) \Delta V_i$$

$$\therefore \sum \iint_{\Delta S_i} \vec{A} \cdot \vec{ds} = \sum (div \vec{A}) \Delta V_i \quad (2.5)$$

جہاں $\Delta V_i = dv$ پر

$$\sum (div \vec{A}) \Delta V_i = \iiint_V (div \vec{A}) dv$$

$$\therefore \sum \iint_{\Delta S_i} \vec{A} \cdot \vec{ds} = \iiint_V (div \vec{A}) dv \quad (2.6)$$

مساوات (2.4) اور (2.5) کا تفاعل کرنے پر

$$\iint_S \vec{A} \cdot \vec{ds} = \iiint_V (div \vec{A}) dv = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{A}) dv$$

مندرجہ بالا مساوات سطح تکمیل کو حجمی تکمیل اور حجمی تکمیل کو سطحی تکمیل میں تبدیل کرنے کے لیے اہمیت کی حامل ہے۔

2.6 ایک سمتیہ میدان کا کرل (Curl of a Vector Field)

فرض کیجئے کہ \vec{A} ایک سمتیہ میدان ہے جس کی مقدار اور سمت دیئے گئے نقطے پر مقامی محدودات کا تفاعل ہے۔ تب نفرقی آپریٹر

$(\vec{\nabla})$ اور سمتیہ \vec{A} کا سمتیہ حاصل ضرب مقامی محدودات x, y اور z کا سمتیہ تفاعل ہے۔ اسی تفاعل کو سمتیہ میدان کا کرل کہتے ہیں۔

$$\therefore \text{Curl } \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \text{ اور } A = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad \text{اگر}$$

$$\therefore \vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \times (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \quad (2.1)$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} \hat{i} \times \hat{j} + \frac{\partial A_z}{\partial x} \hat{i} \times \hat{k} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \hat{j} \times \hat{i} + \frac{\partial A_z}{\partial y} \hat{j} \times \hat{k} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \hat{k} \times \hat{i} + \frac{\partial A_y}{\partial z} \hat{k} \times \hat{j}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

مندرجہ بالا مساوات کو اس طرح لکھا جاتا ہے کہ

$$\text{Curl } \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

2.6.1 طبعی افادیت (Physical Significance)

فرض کیجیے کہ $\vec{\Delta S}$ چھوٹا رقبہ ہے جو بند راستے سے گھرا ہوا ہے۔ یہ بند راستہ اس کی سرحد بتاتا ہے۔ فرض کیجیے کہ \vec{A} ایک سمتی میدان ہے اور فرض کیجیے کہ $d\vec{l}$ اس راستے میں ایک سمتی جز ہے جس کی سمت اس جز پر راستے کے مماس کی سمت ہوگی اگر θ ، A اور $d\vec{l}$ کے درمیان بننے والا زاویہ ہو تب

$$\vec{A} \cdot d\vec{l} = A dl \cos \theta$$

جہاں پر $A \cos \theta$ سمتی \vec{A} کا dl کی جانب جز ہے۔ اس بند راستے کے لیے سمتی میدان \vec{A} کا خطی تکمیل اس طرح ہوگا۔

$$\oint A dl \cos \theta = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

جہاں پر علامت \oint مکمل بند حلقے کہ مکمل کا ظاہر کرتی ہے۔ یہ ایک میزانی مقدار ہے یہ بند حلقہ ایک رقبہ $\vec{\Delta S}$ سے گھرا ہوا ہے۔ تب

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{\Delta S} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

فرض کیجیے کہ \hat{n} رقبہ S کی عمود سمت میں ایک اکائی سمتیہ ہے۔ سمتی میدان \vec{A} کا $\text{Curl } (\text{Curl } A)$ اس طرح بیان کیا جاتا ہے کہ یہ ایک سمتیہ ہے جس کے \hat{n} کی سمت میں پائے جانے والے جز کی مقدار سمتیہ \vec{A} کے اکائی رقبے پر خطی تکمیل سے حاصل ہوتی ہے جب کہ رقبہ صفر پر مائیکل ہو۔

$$\therefore \text{Curl } \vec{A} \cdot \hat{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

اگر $\Delta S \rightarrow 0$ کو ds سے ظاہر کیا جائے تب

$$\text{Curl } \vec{A} \cdot \hat{n} ds = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

$$\therefore \text{Curl } \vec{A} \cdot \vec{ds} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

$$\text{Curl } \vec{A} = \frac{1}{ds} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

کسی سمتی میدان کا کرل ایک سمتی مقدار ہے جو آپریٹر ∇ اور \vec{A} کا سمتی حاصل ضرب ہے۔

$$\text{Curl } A = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

2.7 سٹوکس مسئلہ (Stokes Theorem)

اس تھیورم کے مطابق کسی بھی شکل کی سطح کے لیے مکمل سطح S پر سمتی میدان \vec{A} کے Curl کا سطحی تکمیل مساوی ہوتا ہے۔ اس

سطحی کی سرحد پر اس سمتی میدان کے خطی تکمیل کے یعنی

$$\iint_S \text{Curl } (A) \cdot \vec{ds} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

جہاں پر علامت \oint سطح S سے گھرے ہوئے بند راستے پر خطی تکمیل کو ظاہر کرتی ہے۔ سٹوکس مسئلہ کو اس طرح بھی بیان کیا جاسکتا ہے کہ کسی بھی بند منحنی C پر سمتی میدان \vec{A} کا خطی تکمیل مساوی ہوتا ہے اس منحنی C سے گھری ہوئی ایک کھلی سطح S پر $Curl \vec{A}$ کے سطح تکمیل کے یعنی

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S Curl \vec{A} \cdot d\vec{s} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{s}$$

اس طرح اس تھیورم کی مدد سے کسی سمتی میدان کے خطی تکمیل کو سطحی تکمیل یا اس کے برخلاف تبدیل کیا جاسکتا ہے۔

2.8 حل شدہ مثالیں (Solved Problems)

حل شدہ مثال 1

سمتیے $\vec{A} = xy\hat{i} + yz\hat{j} + zx\hat{k}$ کا ڈائریور جینس معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے کہ $\vec{A} = xy\hat{i} + yz\hat{j} + zx\hat{k}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) (xy\hat{i} + yz\hat{j} + zx\hat{k})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (xy) + \frac{\partial}{\partial y} (yz) + \frac{\partial}{\partial z} (zx)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = y + z + x$$

حل شدہ مثال 2

اگر $\vec{A} = x^3z\hat{i} + 2y^2z^2\hat{j} - 4xyz^2\hat{k}$ تب نقطے $(2, -1, 1)$ پر $Div. A$ معلوم کیجیے۔

حل: $Div. \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (x^3z\hat{i} + 2y^2z^2\hat{j} - 4xyz^2\hat{k})$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (x^3z) + \frac{\partial}{\partial y} (2y^2z^2) + \frac{\partial}{\partial z} (4xyz^2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 3x^2z + 6yz^2 - 8xyz$$

$$Div. \vec{A} \text{ at } (2, -1, 1) = (3 \times 2^2 \times 1 + 6(-1)(1)^2 - 8(2)(-1)(1))$$

$$= 12 - 6 + 16 = 22$$

حل شدہ مثال 3

اگر ϕ ایک میزانی میدان اور \vec{A} ایک سمتی میدان ہو تب $\vec{\nabla} \cdot \phi(\vec{A})$ کی قدر معلوم کیجیے۔

حل: $div. \phi(\vec{A}) = div. \phi(\vec{A})$ جہاں $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot \phi(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})$$

$$= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial x} A_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} A_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} A_z$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial \phi}{\partial x} A_x + \phi \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} A_y + \phi \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} A_z + \phi \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
&= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) + \phi \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \\
&= \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{A} + \phi (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \\
&\text{Div. } \phi(\vec{A}) = \text{Grad} \phi \cdot \vec{A} + \phi \text{Div. } \vec{A} \\
&\nabla \cdot \phi(\vec{A}) = \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{A} + \phi \vec{\nabla} \cdot \vec{A}
\end{aligned}$$

حل شدہ مثال 4

ثابت کیجیے کہ $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ جہاں \vec{A} اور \vec{B} تفرقی سمتی تفاعلات ہیں۔

حل: فرض کیجیے کہ $A = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$ اور $B = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$

$$(A + B) = (A_x + B_x) \hat{i} + (A_y + B_y) \hat{j} + (A_z + B_z) \hat{k}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (\vec{A} + \vec{B})$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot [(A_x + B_x) \hat{i} + (A_y + B_y) \hat{j} + (A_z + B_z) \hat{k}]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (A_x + B_x) + \frac{\partial}{\partial y} (A_y + B_y) + \frac{\partial}{\partial z} (A_z + B_z)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} B_x + \frac{\partial}{\partial y} B_y + \frac{\partial}{\partial z} B_z \right)$$

$$= \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (A + B) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot \vec{B}$$

حل شدہ مثال 5

اگر $\phi = x^2 - y^2 + 2z$ تب $\text{Div. Grad} \phi$ معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے کہ $\phi = x^2 - y^2 + 2z$ تب $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi = ?$

$$\vec{\nabla} \phi = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (x^2 - y^2 + 2z) = (2x \hat{i} - 2y \hat{j} + 2 \hat{k})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi = \vec{\nabla} \cdot (2x \hat{i} - 2y \hat{j} + 2 \hat{k})$$

$$= \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (2x \hat{i} - 2y \hat{j} + 2 \hat{k})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (2x) - \frac{\partial}{\partial y} (2y) + \frac{\partial}{\partial z} (2)$$

$$= 2 - 2 + 0 = 0$$

$$\text{Div. Grad} \phi = 0$$

حل شدہ مثال 6

اگر سمتی تفاعل $\vec{A} = 3xyz \hat{i} + 2xy^2 \hat{j} - x^2yz \hat{k}$ اور میزانی تفاعل $\phi = 3x^2 - yz$ تب

نقطے $(+1, -1, 1)$ پر $div. (\phi \vec{A})$ معلوم کیجیے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ

$$Div(\phi \vec{A}) = \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{A} + \phi (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

$$Grad \phi = \vec{\nabla} \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{k} \right) = 6x\hat{i} - 3\hat{j} - y\hat{k}$$

$$Grad \phi \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{A} = (6x\hat{i} - 3\hat{j} - y\hat{k}) \cdot (3xyz\hat{i} + 2xy^2\hat{j} - x^2yz\hat{k}) \\ = 18x^2yz - 2xy^2z + x^2y^2z$$

$$\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{A} = xyz(18x - 2y + xy) \quad (2.7)$$

$$Div \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (3xyz\hat{i} + 2xy^2\hat{j} - x^2yz\hat{k}) \\ = \frac{\partial}{\partial x} (3xyz) + \frac{\partial}{\partial y} (2xy^2) + \frac{\partial}{\partial z} (-x^2yz)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 3yz + 4xy - x^2y$$

$$\therefore \phi (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \phi (3yz + 4xy - x^2y)$$

$$\phi (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = (3x^2 - yz)[3yz + 4xy - x^2y] \quad (2.8)$$

نقطے $(1, -1, 1)$ پر مساوات (1) سے

$$\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{A} = xyz(18x - 2y + xy) = (1)(-1)(1)(18(-1) - 2(-1) + (1)(-1)) \\ = -1(18 + 2 - 1) = -19$$

نقطے $(1, -1, 1)$ پر مساوات (2) سے

$$\phi (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = [3(1)^2 - (-1)(1)][3(-1)(1) + 4(1)(-1) - (1)^2(-1)] \\ = (3 + 1)(-3 - 4 + 1) = -24$$

مساوات (1) اور (2) سے

$$\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{A} + \phi (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -19 - 24 = -43$$

$$Div. (\phi \vec{A}) \text{ at } (1, -1, 1) = -43$$

حل شدہ مثال 7

گاؤس کی مساوات کو استعمال کر کے $\iint_S xdydz + ydzdx + zdx dy$ کو حل کیجیے جہاں S ایک کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

حل: فرض کیجیے کہ ایک کرہ کا نصف r ایک مرکز مبدے پر ہے۔

گاؤس کی مساوات کے لحاظ سے

$$\iint_S \vec{r} \cdot d\vec{s} = \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) dv$$

جہاں پر \vec{r} نصف قطر سمتیہ $d\vec{s}$ رقبہ سمتیہ جز اور dv صحیحی جز ہے۔

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} & \vec{ds} &= dydz\hat{i} + dx dz\hat{j} + dx dy\hat{k} \\ \therefore \vec{r} \cdot \vec{ds} &= (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})(dydz\hat{i} + dx dz\hat{j} + dx dy\hat{k}) \\ &= x dy dz + y dx dz + z dx dy \\ \therefore \iint_S \vec{A} \cdot \vec{ds} &= \iint_S (x^2\hat{i} + y^2\hat{j} + z^2\hat{k}) \cdot dsi = \iint ds = s\end{aligned}$$

سطح کا رقبہ $1 = (y = 1, z = 1)$

$$\text{اسطح ح} \iint_{S_1} \vec{A} \cdot \vec{ds} + \iint_{S_2} \vec{A} \cdot \vec{ds} = 1 \quad (2.9)$$

$$\text{اسطح ح} \iint_{S_3} \vec{A} \cdot \vec{ds} + \iint_{S_4} \vec{A} \cdot \vec{ds} = 1 \quad (2.10)$$

$$\text{اور} \iint_{S_5} \vec{A} \cdot \vec{ds} + \iint_{S_6} \vec{A} \cdot \vec{ds} = 1 \quad (2.11)$$

مساوات (2.11), (2.10), (2.9) سے

$$\therefore \iint_S \vec{A} \cdot \vec{ds} = 1 + 1 + 1 = 3$$

حل شدہ مثال 8

اگر ایک سمتیہ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ہو تب ثابت کرو کہ $\iint_S \vec{r} \cdot \vec{ds} = 3v$ جہاں پر V سطح S سے گھیرا ہوا حجم ہے۔

حل: گاس کے مساوات کے لحاظ سے

$$\iint \vec{A} \cdot \vec{ds} = \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dv$$

$$\text{یہاں } \vec{A} = \vec{r}$$

$$\therefore \iint \vec{r} \cdot \vec{ds} = \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) dv$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\iint_S \vec{r} \cdot \vec{ds} = \iiint_V 3 dv = 3 \iiint_V dv = 3v$$

حل شدہ مثال 9

اگر $\vec{A} = (x + y)\hat{i} + (y - zx)\hat{j} - 2z\hat{k}$ تب بتاؤ کہ $Div \vec{A} = 0$ اور $Curl \vec{A} = -3\hat{k}$

حل: دیا گیا ہے کہ $\vec{A} = (x + y)\hat{i} + (y - zx)\hat{j} - 2z\hat{k}$

$$Curl \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + y & y - zx & -2z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} \left[\frac{\partial}{\partial y} (-2z) - \frac{\partial}{\partial z} (y - 2x) \right] + \hat{j} \left[\frac{\partial}{\partial z} (x + y) - \frac{\partial}{\partial x} (-2z) \right] + \hat{k} \left[\frac{\partial}{\partial x} (y - 2x) - \frac{\partial}{\partial y} (x + y) \right]$$

$$Curl \vec{A} = \hat{k}(-2 - 1) = -3\hat{k} \Rightarrow Curl \vec{A} = -3\hat{k}$$

$$\begin{aligned} \text{Div} \vec{A} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot [(x+y)\hat{i} + (y-zx)\hat{j} - 2z\hat{k}] \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(x+y) + \frac{\partial}{\partial y}(y-zx) + \frac{\partial}{\partial z}(-2z) \\ \text{Div} \vec{A} &= 1 + 1 - 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Curl} \vec{A} = -3k \text{ اور } \text{Div} \vec{A} = 0 \text{ اس طرح ثابت ہوا کہ}$$

حل شدہ مثال 10

$$\vec{A} = 2x^2y\hat{i} + 3yz\hat{j} + x^2y^2z^2\hat{k} \text{ تب نقطے } (1, -2, 0) \text{ پر } \text{Curl} \vec{A} \text{ کی قدر معلوم کیجیے۔}$$

$$\begin{aligned} \text{Curl} \vec{A} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x^2y & 3yz & x^2y^2z^2 \end{vmatrix} \quad \text{حل:} \\ &= \hat{i} \left[\frac{\partial}{\partial y}(x^2y^2z^2) - \frac{\partial}{\partial z}(3yz) \right] + \hat{j} \left[\frac{\partial}{\partial z}2x^2y - \frac{\partial}{\partial x}x^2y^2z^2 \right] + \hat{k} \left[\frac{\partial}{\partial x}3yz - \frac{\partial}{\partial y}2x^2y \right] \\ &= \hat{i}(2x^2yz^2 - 3y) + \hat{j}(-2xy^2z^2) + \hat{k}(-2x^2) \\ &\quad \text{Curl } \vec{A} \text{ at } (1, -2, 0) \\ &= \hat{i}[2(1)^2(-2)(0)^2 - 3(-2)] + \hat{j}[-2(1)(-2)^2(0)^2] + \hat{k}[(-2)(1)^2] \\ \text{Curl } \vec{A} &= 6\hat{i} + 0\hat{j} - 2\hat{k} = 2(3\hat{i} - \hat{k}) \end{aligned}$$

حل شدہ مثال 11

$$\vec{A} = 2x^2y^2\hat{i} - 2xy^2\hat{j} + 2x^2y^2\hat{k} \text{ تب نقطے } (1, 1, 1) \text{ پر } \text{Curl} \vec{A} \text{ کی قدر معلوم کیجیے۔ جب کہ}$$

$$\vec{A} = 2x^2y^2\hat{i} - 2xy^2\hat{j} + 2x^2y^2\hat{k} \quad \text{دیا گیا ہے کہ حل:}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x^2y^2 & -2xy^2 & 2x^2y^2 \end{vmatrix} \\ &= \hat{i} \left[\frac{\partial}{\partial y}2x^2y^2 - \frac{\partial}{\partial z}(-2xy^2) \right] + \hat{j} \left[\frac{\partial}{\partial z}(2x^2y^2) - \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y^2) \right] + \hat{k} \left[\frac{\partial}{\partial x}(-2xy^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2x^2z^2) \right] \\ &= \hat{i}(4x^2y) + \hat{j}(4x^2z - 4xy^2) + \hat{k}(-2y^2) \\ &\quad \therefore \text{Curl } \vec{A} \text{ at } (1, 1, 1) \text{ i.e. } x = y = z = 1 \\ \vec{\nabla} \times \vec{A} &= i(4 \times 1^2 \times 1^2) + j(4 \times 1^2 \times 1 - 4 \times 1 \times 1^2) + k(-2 \times 1^2) \\ \vec{\nabla} \times \vec{A} &= 4i + 0j + 2k = 4i - 2k \end{aligned}$$

حل شدہ مثال 12

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \text{ اگر } \oint \vec{r} \cdot d\vec{r} = 0 \text{ ثابت کرو کہ}$$

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} \quad \text{حل:}$$

$$\vec{A} = \vec{r} \quad \text{اور} \quad d\vec{r} = d\vec{r} \quad \text{جہاں پر}$$

$$\therefore \oint A \cdot d\vec{l} = \oint \vec{r} \cdot d\vec{r}$$

$$\therefore \oint \vec{r} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

$$\text{لیکن} \quad \vec{\nabla} \times \vec{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) (xi + yj + zk)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

$$= i \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) + j \left(\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} \right) + k \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right)$$

$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\oint \vec{r} \cdot d\vec{r} = 0$$

حل شدہ مثال 13

اگر سمتیہ \vec{A} کا خطی تکمیل کسی بند منحنی کے اطراف مساوی ہو اس بند منحنی سے گھری ہوئی سطحی پراکھ سمیتے \vec{B} کے سطحی تکمیل کے

ثابت کرو کہ $\vec{B} = \text{Curl } \vec{A}$

حل: اگر ایک بند منحنی کسی سطح S سے گھری ہوئی ہو تب

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (2.12)$$

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{Curl } \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad (2.13)$$

سٹوکس مسئلہ کے مطابق

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint_S \text{Curl } \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad (1) \text{ اور } (2) \text{ مطابق}$$

$$\vec{B} = \text{Curl } \vec{A} \therefore$$

2.9 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- اگر \vec{F} منحنی AB پر عمل کرنے والی متغیر قوت ہو تب خطی تکمیل $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$ انجام کردہ کام کو ظاہر کرتا ہے تب \vec{F} ذرے کو A سے B کی جانب حرکت دے گی۔ اگر C ایک بند منحنی ہو (یعنی ایسی منحنی جو خود سے کہیں بھی منطبق نہ ہو) تب اس منحنی کے اطراف خطی تکمیل کو اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$
- حاصل ضرب کے مجموعے کی انتہائی حد (Limit) یہاں تک کہ جملہ سطح اجزائے متناہی پر اور ہر سطحی جز کا رقبہ ہر پرمائیل ہو۔ \vec{F} کا

مکمل سطح S پر سطحی تکمیل کہلاتا ہے۔ اس کو اسطرح ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} \text{ or } \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds$$

- حجمی تکمیل (Volume Integral): کسی سطح سے گھیرے ہو یا حجم V پر تفاعل $F(x, y, z)$ کا تین تکمیل کو حجمی تکمیل کہلاتا ہے۔ اس کو اسطرح ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\iiint_V F(x, y, z) dv$$

حجمی تکمیل عام طور پر میزانی مقداروں کے تکمیل کے طور پر واقع ہوتا ہے۔

- فرض کیجیے کہ \vec{A} ایک سمتی میدان ہے جس کی مقدار اور سمت کسی نقطے پر مقامی محدودات کا تفاعل ہے۔ تب اس سمتیے \vec{A} اور تفرقی آپریٹر (Differential Operator) $\vec{\nabla}$ کا میزانی حاصل ضرب مقام کے محدودات x, y, z کا میزانی تفاعل ہوگا۔ اسی کو سمتیے \vec{A} کا Divergence کہتے ہیں۔

$$Div. \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- گاؤس کے مطابق، ایک سمتی میدان \vec{A} میں بند سطح S سے گھیرا ہوا حجم V ہو تب مکمل سطح S پر \vec{A} کے عمودی جز کا سطحی تکمیل مساوی ہوتا ہے۔ سطح S سے گھیرے ہوئے حجم V ہر $Div. \vec{A}$ کے حجمی تکمیل کے

$$\iint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \iiint_V (div. \vec{A}) dv$$

$$\text{or } \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dv$$

- فرض کیجیے کہ \vec{A} ایک سمتی میدان ہے جس کی مقدار اور سمت دیئے گئے نقطے پر مقامی محدودات کا تفاعل ہے۔ تب تفرقی آپریٹر ($\vec{\nabla}$) اور سمتیے \vec{A} کا سمتی حاصل ضرب مقامی محدودات x, y, z کا سمتی تفاعل ہے۔ اسی تفاعل کو سمتی میدان کا کرل کہتے ہیں۔

$$\therefore \text{Curl } \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

- اس تھیورم کے مطابق کسی بھی شکل کی سطح کے لیے مکمل سطح S پر سمتی میدان \vec{A} کے Curl کا سطحی تکمیل مساوی ہوتا ہے۔ اس سطحی کی سرحد پر اس سمتی میدان کے خطی تکمیل کے یعنی

$$\iint_S \text{Curl } (A) \cdot d\vec{s} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

2.10 کلیدی الفاظ (Key Words)

- میزانیہ : وہ طبعی مقدار جو صرف عددی قدر رکھتی ہو،
- سمت : وہ طبعی مقدار جو عدد، قدر کے ساتھ سمت بھی رکھتی ہو،
- مقامی ویکٹر: وہ ویکٹر جو ایک نقطے کے مقام کو ظاہر کرتا ہو

2.11 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

2.11.1 معروفی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. حجی تکمیل (Volume Integral) سے کیا مراد ہے؟
2. سمتیہ میدان کا ڈائیورجنس کیا ہوگا؟ $\vec{A} = A_x i + A_y j + A_z k$
3. گاؤس ڈائیورجنس مسئلہ (Gauss Divergence Theorem) کو بیان کرو۔
4. سٹوکس مسئلہ (Stokes Theorem) کو بیان کرو۔
5. $\text{Grad} \phi$ کی طبعی اہمیت کیا ہیں۔
6. سمتیہ میدان کی تعریف کیجیے۔
7. سمتیہ میدان کے ڈائیورجنس کی تعریف کیجیے۔
8. میزانی میدان کے دو مثالیں دیجیے۔
9. دو سمتیہ \vec{A} کے سمتیہ حاصل ضرب $\vec{A} \times \vec{A} = \dots$ کی قیمت ہوگی۔
(a) صفر (b) ایک (c) دو (d) ان میں سے کوئی بھی نہیں

2.11.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. سمتیہ میدان کی تعریف کیجیے۔ اس کے کوئی دو خصوصیات بتائیے۔
2. سمتیہ اور میزانی میدان کیا ہیں۔ مثالوں سے سمجھائیے۔
3. $\text{Grad} \phi$ کی طبعی اہمیت بیان کیجیے۔
4. کسی سمتیہ کے خطی اور سطحی تکمیل کی تعریف کیجیے۔
5. کسی سمتیہ کے حجی تکمیل سے کیا مراد ہے۔

2.11.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. گاؤس ڈائیورجنس مسئلہ کو بیان کیجیے اور ثابت کیجیے۔
2. سمتیہ میدان کے ڈائیورجنس کی تعریف کیجیے۔ اس کی طبعی اہمیت بیان کیجیے۔
3. کسی سمتیہ کے خطی اور سطحی تکمیل کی تعریف کیجیے۔
4. سٹوکس مسئلہ کو بیان کیجیے ان کی اہمیت بتائیے۔

2.11.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. اگر \vec{A} اور \vec{B} دو تفریق پذیر سمتیہ ہوں تب ثابت کرو کہ $\vec{V} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{V} \times \vec{A} + \vec{V} \times \vec{B}$

2. ثابت کرو کہ سمتیہ $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ اور $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ہم سطحی ہیں۔

3. کسی سمتیہ \vec{A} کے لیے ثابت کرو کہ $\vec{A} \times \vec{A} = 0$ اور $\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$

4. ثابت کرو کہ تین سمتیہ $\vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$, $B = \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ اور $C = \hat{i} + 5\hat{j} - 4\hat{k}$ ایک دوسرے پر عمود ہیں۔

5. ایک قوت $a + bx + cx^2$ -X محور کے ذرہ پر عائد ہونے پر اس ذرہ کی حرکت $x = 1$ سے $x = 2$ کے

درمیان ہوئی ہو تب اس ذرہ میں ہوا کام معلوم کیجیے۔ [یہاں پر زاویہ $\cos^{-1}(x/d)$]

6. (اشارہ: $W = \int F \cdot dr$)

7. اگر $S = S(x, y, z) = x^2 - x^2y + xy^2z^2$ ہو تب $\text{grad} S$ کو نقاط $(2, -1, 3)$ پر معلوم کیجیے۔

8. اگر r مقامی سمتیہ ہو تو معلوم کیجیے $\text{grad} r(a)$ اور $\text{grad} \left(\frac{1}{r}\right)$

9. اگر r مقامی سمتیہ اور $\text{grad} \phi = \text{lagr}$ ہو تب $\text{grad} \phi$ معلوم کیجیے۔

10. اگر $A = iy + j(x^2 + y^2) + k(yz + zx)$ ہو تب $\text{div} A$ کو نقاط $(1, -2, 3)$ پر معلوم کیجیے۔

11. اگر r مقامی سمتیہ ہے۔ ثابت کیجیے کہ $\text{div} r = 3(a)$ اور $\nabla(r \cdot A) = A(b)$

12. $\text{div}(r^n r) = (3 + n)r^n(c)$

13. اگر a ایک مستقل سمتیہ ہے۔ معلوم کیجیے $\text{div}(r \times A)$

14. اگر $A = i(3xy) - j(y^2)$ ہو تب معلوم کیجیے $\int_C A \cdot dr$ جہاں $\phi = 2x^2y$ اور $(1, 2)$ سے $(0, 0)$

(C بند کروں)

15. اگر $A = iy + j(x^2 + y^2) + k(yz + zx)$ ہو تب $\text{Curl} A$ کو نقاط $(2, 2, -2)$ پر معلوم کیجیے۔

16. اگر r مقامی سمتیہ ہو تو ثابت کیجیے کہ $\text{Curl} r = 0$

17. ثابت کیجیے کہ $\text{Irrotational } A = e^{-x}(-yzi + zj + yk)$

18. $A = i(x + zy + az) + j(bx + 3y - z) + k(4x + cy + 2z)$

Irrotational ہو تب a, b, c مستقل کو معلوم کیجیے۔

19. $\text{Curl}(a \times r)$ کی قیمت کو معلوم کیجیے۔ (جہاں a سمتیہ مستقل ہے)

20. ثابت کیجیے کہ $\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = 0$

21. یہ قیمت کو معلوم کیجیے $\text{Curl grad} S$ (i) اور $\text{grad div} A$ (ii) اور $\text{div Curl} A$ (iii)

22. اگر r مقامی سمتیہ ہے ثابت کیجیے $\nabla^2 r^2 = n(n + 1)r^{n-2}$

23. ثابت کریں $\nabla \cdot (A \times r) = r \cdot (\nabla \times A)$

$$\text{Curl Curl } A = \text{Grad Div } A - \nabla^2 A \text{ ثابت کریں} \quad .24$$

$$\text{Curl grad } \phi = 0 \text{ سٹوک مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے کہ} \quad .25$$

$$\text{سٹوکس مسئلہ کے استعمال کرتے ہوئے} \oint_C (yzdx + xzdy + xydz) \text{ کو معلوم کیجیے۔} \quad .26$$

$$(Z = y^2 \text{ اور } x^2 + y^2 = 1 \text{ جہاں})$$

$$\iint_S \text{Curl } F \cdot ds = 0 \text{ ثابت کریں} \quad .27$$

$$\iint F \cdot nds = \frac{4}{3}\pi(a + b + c) \text{ اگر } F = iax + jby + kcz \text{ تب ثابت کیجیے کہ} \quad .28$$

(c) یہاں S سطح ہے رقبہ۔

$$F = \text{گاؤس ڈائیورجنس مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں} \quad \iint_S F \cdot \hat{n} ds = \frac{1}{5} 2\pi r^5 \quad .29$$

$$\text{S اور } ix^3 + jy^3 + Kz^3 \text{ سطح ہے رقبہ۔}$$

2.12 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Engineering Physics by R.K.Gaur & S.L.Gupta, Dhanpat Rai Publications.
2. Physics Part- I by Resnik.R & Halliday.D, Wiley Eastern Pvt. Ltd. New Delhi.
3. Unified Physics Vol-I, Mechanics by, Dr.S.L.Gupta & Sanjeev Gupta Jai Prakash Nath & Co. Meerut
4. Vector Algebra by Dr. Rishi Kumar Johan & Dr. Anshuman Singh
5. Vector Algebra and Analysis with Application by Prasun Kumar nayak
6. Vector Algebra by Shanti Narayan & P.K. Mittal, s Chand
7. Vector Analysis tensor analysis and linear vector space by S.P. Kuil

اکائی 3- گاؤس تھیورم

(Gauss's Theorem)

اکائی کے اجزا

تمہید	3.0
مقاصد	3.1
برقیانے کا جدید نظریہ	3.2
برقی بار۔ بقائے برقی بار	3.3
کولم کا کلیہ	3.4
خلا کی اور واسطے کی برقی اجازیت	3.5
برقی میدان	3.6
برقی خطوط قوت	3.6.1
برقی خطوط قوت کی خصوصیات	3.6.2
برقی میدان کی حدت	3.7
ہموار اور غیر ہموار برقی میدان	3.7.1
علاحدہ نقطی بار سے بننے والا میدان	3.7.2
کئی برقی باروں سے میدان	3.7.3
برقی نفوذ	3.8
گاؤس کا تھیورم	3.9
گاؤس کا تھیورم کا تفریق شکل	3.10
حل شدہ مثالیں	3.11
اکتسابی نتائج	3.12

کلیدی الفاظ	3.13
نمونہ امتحانی سوالات	3.14
معروضی جوابات کے حامل سوالات	3.14.1
مختصر جوابات کے حامل سوالات	3.14.2
طویل جوابات کے حامل سوالات	3.14.3
حل شدہ جوابات کے حامل سوالات	3.14.4
مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں	3.15

3.0 تمہید (Introduction)

قدیم برقی سکونیت کی تاریخ 600 ق م کے یونانی مفکرین سے منسوب ہے جب کہ تالیس (Thales) نامی یونانی مفکر نے دریافت کیا کہ اُن میں رگڑا ہوا کافور چھوٹے تنکوں جیسے کاغذ یا کارک کے تنکوں کو کشش کرتا ہے۔ ولیم گلبرٹ نے دیکھا کہ کافور کے علاوہ دوسرے اشیاء بھی ایسی کشش کرتے ہیں۔ بنجامن فرینکلن نے دریافت کیا کہ برقی بار دو قسم کے ہوتے ہیں۔ یہ دو مختلف برقی بار دو رگڑنے والی سطحوں پر آتے ہیں۔ یہ مثبت اور منفی برقی بار کہلاتے ہیں۔ شیشے کی سلاخ کو ریشم پر رگڑنے سے شیشے کی سلاخ پر مثبت اور ریشم پر منفی برقی آتا ہے۔ اُون پر پلاسٹک کو رگڑنے سے اُون پر مثبت اور پلاسٹک پر منفی برقی بار آتا ہے۔ اُون پر آبنوس کو رگڑنے سے اُون پر مثبت اور آبنوس پر منفی برقی بار آتا ہے۔ ان مثالوں سے یہ اشارہ ملتا ہے کہ برقی بار کبھی پیدا نہیں ہوتا۔ رگڑنے والی سطحوں کے درمیان یہ منتقل ہوتا ہے۔

اشیا کے امالے کے ذریعے بھی برقی بار قائم کیا جاسکتا ہے۔ جب کوئی مثبت برقی بار $+q$ کو تعدیلی جسم کے قریب لایا جائے تو اس تعدیلی جسم کے اگلے رخ پر مساوی اور مخالف برقی بار $-q$ بنتا ہے اور اس کو تعدیل کرنے کے لیے اس جسم کے پچھلے رخ پر $+q$ برقی بار بنتا ہے۔ تعدیلی جسم پر اس طرح سے منفی اور مثبت بار کا عارضی طور پر بننا برقی امالہ کہلاتا ہے۔ تعدیلی جسم اسی لیے برقی بار سے کشش کرتا ہے۔ دھاتی اجسام یا برقی موصل اجسام پر جب اضافہ برقی بار دیا جائے تو یہ اضافی بار صرف اس کی سطح پر رہتا ہے۔ کسی جسم کی بیرونی سطح پر موجود اضافہ برقی بار اس پر سطحی برقی کثافت (Surface Charge Density) بنتا ہے۔

کسی دھاتی شے پر اضافہ برقی بار دیا جائے تو یہ اس کی صرف بیرونی سطح پر رہتا ہے اور نوکدار حصوں پر سطحی برقی کثافت آعظم رہتی ہے۔ اس لیے اونچی عمارتوں کو بجلی گرنے کے حادثات سے محفوظ رکھنے کے لیے نوکدار سلاخ استعمال کی جاتی ہے جو برقی باروں کو حاصل کر کے راستے زمین میں پہنچاتی ہے۔

3.1 مقاصد (Objectives)

- یہ اکائی آپ کو برقی بھرنوں کے مفہوم سے متعارف کراتی ہے اور برقی میدان اور اس کی مدت کے مفہوم سے متعارف کراتی ہے۔
- مفہوم کے اورک میں آپ کی سہولت کے لیے یہ اکائی وضاحت کرتی ہے۔ اس اکائی میں ہم
- برقی بار۔ بقائے برقی بار کے بارے میں معلومات حاصل کرے گی۔
 - کولم کا کلیہ کو بیان کرے گی۔
 - برقی میدان، برقی میدان کی حدت کے بارے میں معلومات حاصل کرے گی۔
 - خطوط قوت کے بارے میں سمجھائے گی۔
 - گاؤس کا تھیورم کو اغاض کرے گی۔

3.2 برقیانے کا جدید نظریہ (Electric Current Of Modern Theory)

جوہری ساخت کے مطابق مثبت برقی بار والے پروٹان مرکز ہیں مقیم رہتے ہیں اور ان کے اطراف منفی برقی بار والے الیکٹران گردش کرتے رہتے ہیں۔ مرکز قیام پذیر رہتا ہے تو اس کے پروٹان یا نیوٹران میں کوئی تبدیلی نہیں آتی۔ البتہ گردش کرنے والے الیکٹران میں کی تعداد میں اضافہ یا کمی ہو سکتی ہے۔

جب کوئی دواشیا آپس میں رگڑی جاتی ہیں تو الیکٹران ایک سطح سے نکل کر دوسری سطح میں منتقل ہوتا ہے۔ جہاں سے الیکٹران نکلتا ہے وہ مثبت برقی بار والا بنتا ہے اور جس میں الیکٹران کا اضافہ ہوتا ہے وہ منفی برقی بار والا بنتا ہے۔ یعنی رگڑنے کے عمل سے الیکٹران ایک جسم سے دوسرے جسم میں منتقل ہوتا ہے اور ان دونوں کا مجموعی برقی بار ہمیشہ صفر رہتا ہے۔

3.3 برقی بار۔ بقائے برقی بار (Electric Current-Conservation of Electric Current)

اوپر کے بیان کردہ نظریے میں یہ دیکھا گیا کہ اس جسم سے خارج ہونے والے الیکٹران کی تعداد دوسرے جسم میں حاصل ہونے والے الیکٹران کی تعداد کے مساوی ہوتی ہے۔ یعنی الیکٹران یا برقی بار نہ ہی پیدا کیا جاسکتا ہے اور نہ ہی فنا کیا جاسکتا ہے۔ یہ کلیہ بقائے برقی بار کہلاتا ہے۔

کلیہ بقائے برقی بار کے بموجب کسی آزاد جسم میں مثبت اور منفی برقی باروں کا مجموعہ الجبری ہمیشہ مستقل رہتا ہے اور برقی بار نہ ہی پیدا کیا جاسکتا ہے اور نہ ہی فنا کیا جاسکتا ہے۔

3.4 کولم کا کلیہ (Coulomb Law)

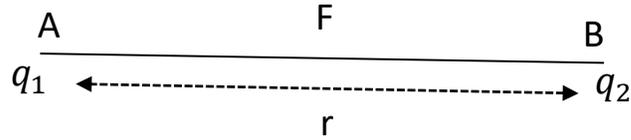
ایک فرانسیسی سائنسدان کولم (C.A. Coulomb) نے برقی باروں کے درمیان فاصلوں اور ان کے درمیان عمل کرنے

والے قوتوں کی پیمائش کی اور ان پر عمل کرنے والے ایک قانون کا انکشاف کیا جس کے مطابق یہ قوت برقی باروں کے حاصل ضرب کے راست تناسب اور ان کے درمیانی فاصلے کے مربع کے باعکس تناسب ہوتی ہے۔ مشابہ برقی بار وضع کرتے ہیں۔ اور غیر مشابہ برقی بار کشش کرتے ہیں دو پروٹانوں کے درمیان تجاذبی کشش کی قوت کے مقابلے میں برقی سکونیتی قوت دفع 10^{36} گنا زیادہ ہوتی ہے۔ یعنی برقی سکونیتی قوت کے مقابلے میں تجاذبی قوت قابل نظر انداز ہوتی ہے۔

اس کلیہ کو اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے۔

"دو برقی باروں کے درمیان قوت دفع یا قوت کشش کی سمت ان کو جوڑنے والی خط مستقیم پر ہوتی ہے اور اس کی مقدار برقی باروں کے حاصل ضرب کے راست تناسب اور ان کے فاصلے کے مربع کے باعکس تناسب ہوتی ہے۔

دو برقی بار q_1 اور q_2 ایک دوسرے سے r کے فاصلے پر ہیں ان پر عائد ہونی والی قوت F اس طرح ہوتی ہے۔



شکل (3.1)

$$F \propto q_1 q_2$$

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$$F = K \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

مستقیم K کی قیمت دو برقی باروں کے درمیان موجود واسطے پر اور ان کے فاصلے اکائیوں پر منحصر ہوتی ہے۔ خلاء یا فضا کے لیے اس کی قیمت $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ ہوتی ہے۔ جہاں ϵ_0 کو خلا کی برقی اجازیت کہتے ہیں۔

$$F_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad \text{لہذا}$$

یہ کولم کے کلیے کی حسابی شکل ہے۔ اس مساوات میں برقی بار کو کولم کی اکائی میں اور فاصلے کو میٹر میں لیا جائے تاکہ قوت کی قیمت نیوٹن میں حاصل ہو سکے۔

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{coulumb}^2 \quad \text{یعنی } K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{ جہاں } K = 9 \times 10^9 \text{ Fm}^{-1} \text{ ہوتی ہے۔}$$

$$F = 9 \times 10^9 \frac{q_1 q_2}{r^2} \text{ Newton}$$

جہاں ϵ_0 خلا کی برقی اجازیت کی قیمت $8.9 \times 10^{-12} \text{ cd}^2 / \text{H} - \text{m}^2$

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \hat{r} \quad \text{کولم کے کلیے کی ویکٹر کی شکل}$$

جہاں \hat{r} ، q_1 اور q_2 کے درمیان اکائی ویکٹر

کولم کی تعریف:

فضا میں ایک دوسرے سے ایک میٹر کے فاصلے پر رکھے ہوئے دو مساوی مقدار والے مثبت برقی بار اگر ایک دوسرے کو $9 \times 10^9 \text{N}$ کی قوت سے دفع کرتے ہیں تو یہ ایک کولم برقی بار کہلاتے ہیں۔

3.5 خلا کی اور واسطے کی برقی اجازیت (Space and Medium Permittivity)

عموماً جو واسطے برقی باروں کے درمیان پائے جاتے ہیں ان واسطوں کی وجہ سے دو برقی باروں کے درمیان عائد ہونے والی قوت پر اثر پڑتا ہے۔ کیوں کہ واسطے میں مادے سے بنتا ہے۔ ان میں بھی الکٹران اور پروٹان پائے جاتے ہیں۔ آتش شیشہ (Pyre glass)، ابرق (Mica)، ربر، گندھک، پانی، ہوا، کاربن ڈائی آکسائیڈ $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 k} \frac{q_1 q_2}{r^2}$ (جہاں $\epsilon = \epsilon_0 K$) برقی باروں کے درمیان عائد ہونیوالی قوت اعظم ترین اس وقت ہوتی ہے جب کہ یہ خلائی میں رکھے ہوں اور یہ قوت F_0 سے ظاہر کی جاتی ہے۔ اگر ان برقی باروں کے درمیان کوئی دوسرا واسطہ ہو تو یہ قوت F کم ہوتی ہے۔

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (3.1)$$

$$F_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (3.2)$$

مساوات (3.1) اور (3.2) سے

$$\frac{F_0}{F} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \epsilon_r \quad (3.3)$$

یہ ایک کسر غیر واجب ہوتی ہے یعنی اس کی قیمت 1 سے بڑی ہوتی ہے۔ یہ مادے کی اضافی اجازیت ایک ایسے ہندسے کو ظاہر کرتی ہے جو یہ بتاتا ہے مادے کی مطلق اجازیت خلا کی اجازیت سے کتنے گنا زیادہ ہے یا یہ مادہ برقی سکونیتی قوت کو کتنے گنا گھٹا دیتا ہے۔ اس اضافی اجازیت کو ذرو برقی مستقل (Dielectric Constant) بھی کہتے ہیں۔

$$\frac{\text{اجازیت مطلق کی واسطے}}{\text{اجازیت مطلق کی خلا}} = \text{مستقل برقی ذو یا اجازیت اضافی}$$

کئی برقی باروں سے ایک بار پر قوت:

اس کلیہ کے مطابق اگر کسی برقی بار پر دوسرے کئی مختلف برقی بار q_1, q_2, q_3, \dots وغیرہ قوتیں F_1, F_2, F_3, \dots وغیرہ عاید کرتے ہوں تو ان سب کی مجموعی قوت کے لیے کولم کے طریقے سے ان سب کی علاحدہ قوتوں کو معلوم کر کے ان کا سمتی مجموعہ لیا جاتا ہے۔ مجموعی قوت اس طرح ہوگی

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots$$

یہاں یہ بات غور طلب ہے کہ F_1, F_2, F_3, \dots اور F_n کی جمع سمتی طریقے پر ہو۔ منفی برقی بار کے لیے کمیت میں

(Electric Field)

3.6 برقی میدان

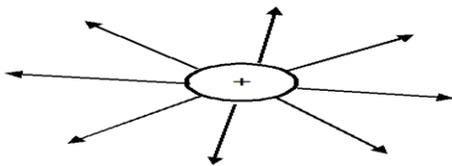
برقی میدان سے مراد برقی بار کے اطراف کا علاقہ جہاں اگر دوسرا برقی بار رکھا جائے تو اس پر قوت عائد ہوتی ہے۔ یہ علاقہ پہلے برقی بار کی وجہ سے بنا ہوا میدان کہلاتا ہے۔

3.6.1 برقی خطوط قوت:

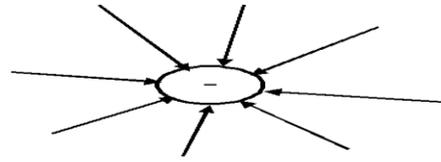
برقی میدان کے مشاہدے کے لیے مائیکل فریڈے نے خطوط قوت کا ایک تصور دیا۔ یہ ایک ایسی منحنی ہے جو اس سمت کو ظاہر کرتی ہے جس میں کہ اکائی مثبت بھرن سفر کرے گا۔ منحنی کے کسی نقطہ پر مماس اس نقطہ پر برقی قوت کی سمت کو بتلاتا ہے۔

مائیکل فریڈے نے \vec{E} کی تعبیر کے خطوط قوت کے مفہوم کو استعمال کیا تھا برقی میدان کے خاکوں کو آسانی کے ساتھ دیکھنے میں یہ مفہوم مدد کرے گا۔ اس کی مدد سے فضا کے کسی حصے میں میدان میں ہونے والی تبدیلیوں کی واضح تصویر مل سکتی ہے۔ برقی میدان کی قدر \vec{E} تراش عمودی کے اکائی رقبہ میں واقع خطوط قوت کی تعداد کے تناسب ہوتی ہے جب \vec{E} کی قیمت بہت بڑی ہوتی ہے تو خطوط قوت ایک دوسرے کے بہت قریب ہوتے ہیں اور اگر \vec{E} کمزور ہو تو ان میں دوری بڑھ جاتی ہے۔

فریڈے کے مطابق یہ فرض کیا جاتا ہے کہ قوتوں کی نلیوں کے ساتھ کے طولی تناؤ سے کشش قوتوں کی اور قوتوں کی نلیوں کے عموداً عرضی دباؤ سے دفاع قوتوں کی وضاحت ہوتی ہے۔ یہ نلیاں، جہاں کہیں بھی ہوں، واسطے میں ایک بگاڑ پیدا کر دیتے ہیں۔



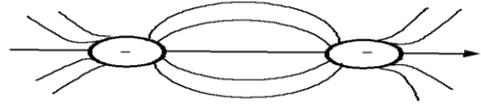
(a) Isolated Positive Charge



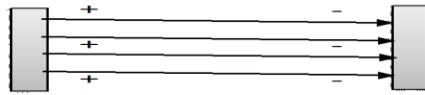
(b) Isolated negative charge



(c) Two Positive charges



(d) Electric dipole



(e) Uniform field

شکل (3.2)

کسی مثبت برقی جسم سے قوت کی نلی نکل کر ایک غیر برقی جسم سے تماس میں آتی ہے تو یہ آخر الذکر میں منفی بھرن امالہ کرتی ہے نلی چوں کہ محوری تناؤ کے تابع رہتی ہے اس لیے خود کو طول کے ساتھ چھوٹا کرنے کی متقاضی رہتی ہے اسی وجہ سے مخالف بھرن ایک دوسرے

کے قریب آتے ہیں۔ اس کا نتیجہ کشش ہوتا ہے۔ بہت دور مثبت بھرن سے ہونے والا ہٹاؤ کم ہوتا ہے۔ دو مشابہ بھرنوں کی صورت میں خطوط قوت ایک دوسرے کو دفع کرتے ہیں۔ شکل (3.2) میں چند خطوط قوت کی سمتوں کو دکھلایا گیا ہے۔

یہ خطوط لکیریں ہیں جو مثبت برقی بار سے نکلتی ہیں اور منفی بار میں داخل ہوتی ہے کسی بھی مقام پر ان لکیروں کی سمت میدان کی سمت میں ہوتی ہے۔ اگر کوئی آزاد چھوٹا مثبت برقی بار اس میدان میں (یعنی لکیروں میں) چھوڑ دیا جائے تو یہ ان کی کسی لکیرے پر چلتا ہوا مثبت ہے منفی برقی بار تک پہنچتا ہے۔ ہموار برقی میدان کے خطوط قوت متوازی اور فاصلہ ہوتے ہیں۔

3.6.2 برقی خطوط قوت کی خصوصیات:

1. کبھی بھی مقام پر ان خطوط کا تماس برقی میدان کی سمت کو ظاہر کرتا ہے۔
2. اکائی ورقیے سے عموداً گزرنے والی خطوط قوت کی تعداد اس مقام پر برقی میدان کی مقدار کے راست تناسب ہوتی ہے۔
3. خطوط قوت مثبت برقی بار سے نکلنے میں اور منفی برقی بار میں پہنچتے ہیں۔
4. خطوط قوت ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے۔ ورنہ ایک نقطے پر میدان کی دو سمتیں ہو جائیگی۔
5. برقی خطوط اجسام کی سطح کے انتصا ہوتی ہیں۔
6. مقناطیسی خطوط قوت بند اور مکمل ہوتے ہیں مگر برقی خطوط قوت پر ایسی کوئی پابندی نہیں۔
7. جہاں میدان طاقتور ہو وہاں یہ خطوط قریب ہوتے ہیں اور جہاں میدان کمزور ہو وہاں یہ خطوط دور دور ہوتے ہیں۔
8. ان خطوط کا کوئی طبعی موجود نہیں ہوتا یہ صرف تصوراتی ہوتے ہیں۔

3.7 برقی میدان کی حدت (E) (Electric Field Intensity)

کسی مقام پر برقی میدان کی حدت سے مراد وہاں رکھے ہوئے ایک کولم مثبت برقی بار پر عائد ہونے والی قوت ہوتی ہے۔ اگر مشاہدہ کے نقطے پر ایک چھوٹا سا امتحانی بار q_0 (Test Charge) رکھا جائے تو وہاں میدان کی حدت

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

برقی میدان ایک سمتیہ ہے اور اس کی سمت قوت کی سمت ہی ہوتی ہے۔ اور اس کی SI اکائی نیوٹن فی کولم N/Colums ہوتی ہے اور اس کی اکائی Volt/m بھی کہا جاسکتا ہے۔

3.7.1 ہموار اور غیر ہموار برقی میدان:

ہموار میدان وہ ہوتا ہے جس میں ہر نقطے پر میدان کی حدت اور سمت یکساں رہتی ہے۔

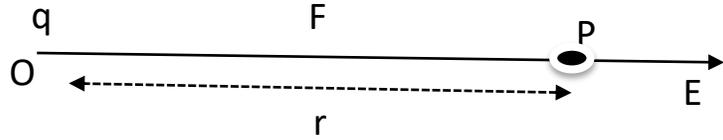
ایسا میدان جس میں میدان کی حدت یا سمت یا دونوں مقام کے لحاظ سے بدلتے ہوں، غیر ہموار میدان کہلاتا ہے۔

اگر کوئی برقی بار q کسی برقی میدان E میں رکھا ہو تو اس پر میدان کی جانب ایک قوت عائد ہوگی۔ وہ قوت $F=qE$

3.7.2 علاحدہ نقطی بار سے بننے والا میدان:

فرض کیجیے کہ ایک نقطی برقی بار نقطہ O پر موجود ہے اور اس سے r کے فاصلے پر نقطہ P ہے۔ نقطہ P مشاہدے کا نقطہ سے یہاں میدان کی حدت معلوم کرنا ہے۔

اگر مشاہدے کے نقطے پر بہت چھوٹا آزمائش برقی بار جو لایا جائے تو اس پر عائد ہونیوالی قوت اس طرح ہوگی۔



شکل (3.3)

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \quad (3.4)$$

برقی میدان معلوم کرنے کے لیے اس قوت کو q_0 سے تقسیم کیا جائے تب

$$E = \frac{F}{q_0} \quad (3.5)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (3.6)$$

اگر مشاہدے کے نقطے پر خلاء کے بجائے کوئی دوسرا واسطہ موجود ہو تو وہاں میدان کی حدت کم ہوگی۔

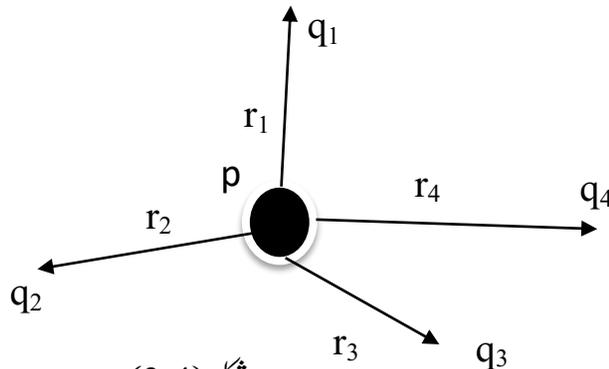
$$E_{med} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \quad (3.7)$$

$$E_{med} = \frac{E_{free}}{K} \quad (3.8)$$

3.7.3 کئی برقی باروں سے میدان:

فرض کیجیے کہ نقطہ P پر کل میدان کی حدت معلوم کرنا ہے اور یہ حدت مختلف برقی باروں q_1, q_2, q_3, q_4 وغیرہ سے بنتی ہے۔

اور یہ برقی بار نقطہ P کے لحاظ سے مقامی سمتیں r_1, r_2, r_3, r_4 وغیرہ پر موجود ہیں۔



شکل (3.4)

تب نقطہ P پر مجموعی میدان معلوم کرنے کے لیے ان تمام حدتوں کی سمتی جمع کی جائے یعنی

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 + \dots$$

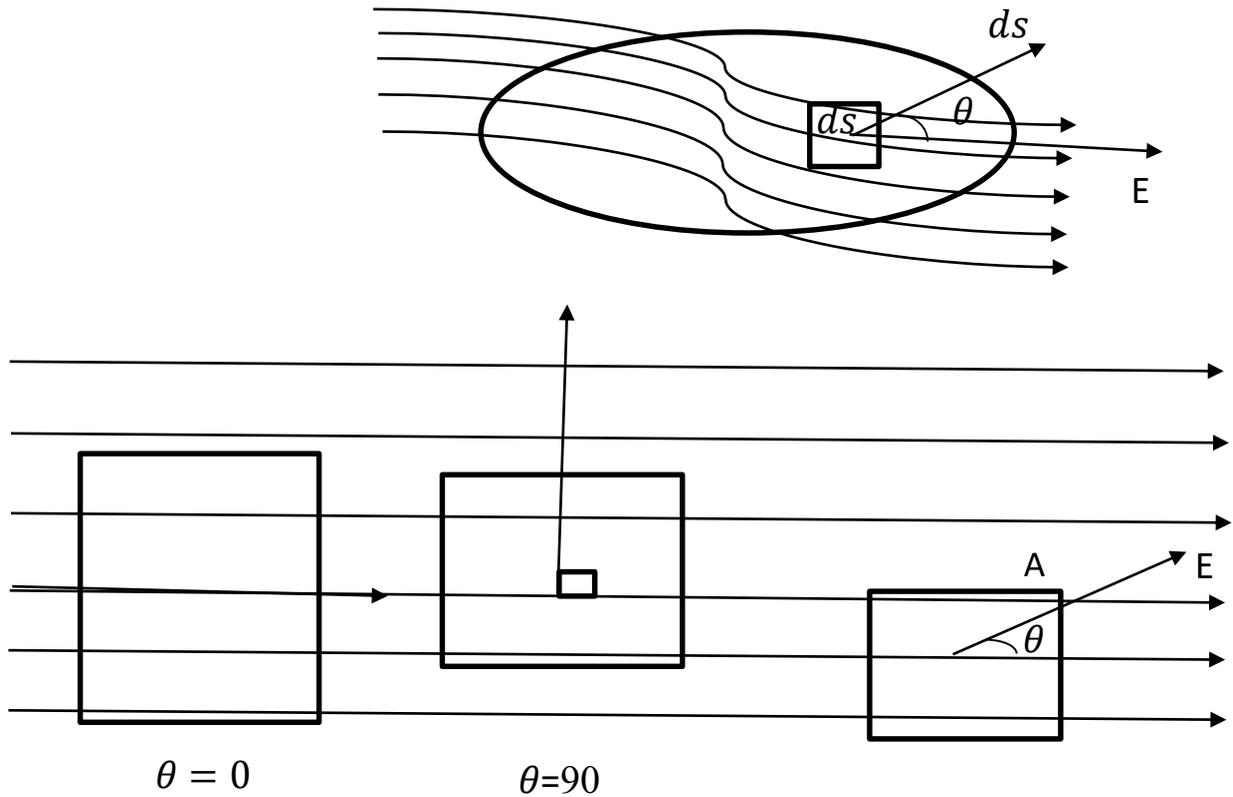
3.8 برقی امالہ / برقی نفوذ (Electric Flux)

فراڈے نے خطوط قوت اور قوت کی نلیوں کی قدری اہمیت کو واضح کیا۔ برقی خطوط قوت برقی میدان کی تفصیلات کو بتاتے ہیں۔ میدان کی حدت اور سمت دونوں بھی ان خطوط سے ظاہر ہوتے ہیں۔

برقی میدان میں رکھی ہوئی کسی سطح سے گزرنے والی برقی خطوط قوت کی تعداد اس سطح پر برقی امالہ (Electric Flux) کے تناسب ہوتی ہے۔

برقی امالہ ایک میزانیہ ہے اور اس کی اکائی Weber ہے۔

اگر یہ خطوط قوت سطح سے باہر نکلتے ہوں تو مثبت امالہ اور اگر سطح میں اندر جاتے ہیں تو منفی امالہ ہوگا۔



شکل (3.5)

اگر دی گئی سطح کا عمود برقی میدان سے θ کا زاویہ بنایا ہو تو اس A رقبے والی سطح پر برقی امالہ کی قیمت $EA \cos \theta$ ہوتی ہے۔

شکل (3.5) کی قیمت 0° ہے اس لیے امالہ اعظم ترین یعنی EA ہوگا۔ شکل (3.5) میں θ کی قیمت 90° ہے اس لیے امالہ صفر ہوگا۔

اکائی بھرن سے اگر 4π خطوط خارج ہوں تو ان خطوط کو امالے کے اکائی خطوط کہا جاتا ہے۔ نصف قطر r کی کروی سطح کے اکائی رقبہ کے امالی خطوط کی تعداد نفوذ کی کثافت (Flux Density) کہا جاتا ہے۔ اس طرح نفوذ کی کثافت ہوگی۔

$$K.E = K \frac{q}{Kr^2} = \frac{q}{r^2} = \frac{4\pi q}{4\pi r^2}$$

E کو تعبیر کرنے والے خطوط، قوت کے خطوط کہلاتے ہیں، جب کہ KE کو تعبیر کرنے والے خطوط امالے کے خطوط مانے جاتے ہیں۔ امالے کے خطوط کی مجموعی تعداد جو کسی سطح کو اس کے عموداً قطع کرتی ہے۔ مجموعی عمودی برقی امالہ یا برقی نفوذ کہا جاتا ہے۔

اگر دی گئی سطح کے مختلف حصوں پر میدان کی حدت یا سمت یا میدان اور سطح کے عمود میں زاویہ یکساں نہ ہو تو ایسی صورت میں کل سطح پر مقناطیسی نفوذ اس طرح ہے۔

$$\phi_E = \int_S \vec{E} \cdot \vec{\Delta S} = E \cdot S$$

E اور ΔS کے درمیان زاویہ θ ہے تو۔ تب اس کا مزانہ ضرب

$$E \cdot \Delta S = E ds \cos \theta$$

تب برقی امالہ

بند سطحوں کے لیے اگر خطوط قوت کا رخ باہر کی طرف ہو تو $\cos \theta$ مثبت ہو گا۔ اور اگر خطوط قوت اندر کی جانب عمل کر رہے ہیں

$$\phi_E = \oint E \cdot ds \cos \theta \quad \text{تو } \cos \theta \text{ منفی ہو گا۔}$$

$$\phi_E = E \cos \theta \oint ds$$

$$\phi_E = E \cos \theta A$$

$$\oint ds = A \text{ جہاں سطح ہی رقبہ}$$

$$\phi_E = EA \cos \theta$$

نفوذ، سمتی میدان کی ایک خاصیت ہے اس سے مراد میدان میں ایک فرضی سطح کی تعبیر ہے جو بند یا کھلی ہو سکتی ہے۔ مثلاً مستقل بہاؤ کی صورت میں نفوذ سے مراد سیدھے خطوط کی وہ تعداد ہے جو ایک سطح کو قطع کرتی ہے اور مقناطیسی میدان کے لیے نفوذ سے مقناطیسی خطوط قوت کی وہ تعداد ہے جو اس قسم کی سطح کو قطع کرتی ہے۔

3.9 گاؤس کا تھیورم (Gauss's Theorem)

کارل فریڈرک گاؤس (Karl Friedrich Gauss) (1777-1885) صدر گاہ کو گوتنبرگ (Göttingen) کے

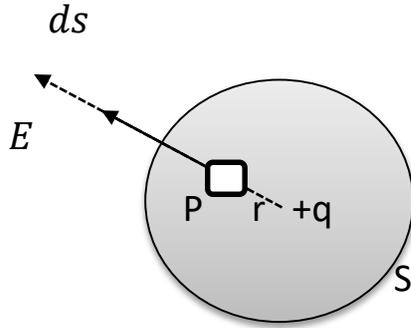
ڈائریکٹر تھے۔ فلکیات، ریاضیات، برق اور مقناطیسیت میں انہوں نے غیر معمولی کام انجام دیا ہے۔

گاؤس کے تھیورم کو اس طرح بیان کیا جاتا ہے۔ "کسی مکمل بند سطح پر موجود برقی نفوذ کی قیمت اس بند سطح میں گھرے ہوئے مادے کی برقی

اجازیت ϵ_0 کے بالعکس تناسب اور اس بند سطح میں موجود برقی بار کے راست تناسب ہوتی ہے۔

$$\phi_E = \oint E \cdot ds = \oint E \cdot ds \cos \theta = \left(\frac{1}{\epsilon_0}\right) Q \quad (3.9)$$

گاؤس کا تھیورم (یعنی مساوات) ان پیچیدہ سوالات میں بہت کارآمد ہوتی ہے جب کہ ایسے نظام کی برقی میدان کی حدت معلوم کرنا ہو جو کولم کے کلیے یا متزاج کے کلیے سے ممکن نہیں۔

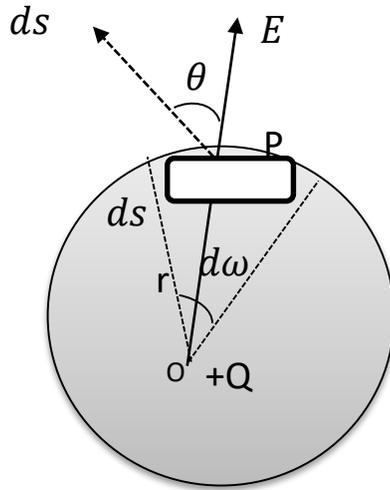


شکل (3.6)

گاؤس کے طریقے میں نفوذ کے معلوم کرنے کے لیے ایک گاسیائی سطح کو منتخب کیا جاتا ہے۔ اس سطح پر برقی میدان کی قیمت یا تو ہموار اور یکساں ہوتی ہے یا پھر صرف تب مساوات (3.9) کی تکمیل (Integration) باآسانی حل ہو جاتا ہے۔

Proof

نقطہ P کو گھیری ہوئی بند سطح پر



شکل (3.7)

فرض کرو کہ ایک نقطوی بھرن +Q کو ایک یکساں مستوائی السموت واسطے (یعنی ایسا واسطہ جس کی خصوصیات ہر سمت میں ایک جیسے ہوں) 'O' پر رکھا ہوا ہے اور فرض کرو کہ ایک نقطہ P کو گھیری ہوئی بند سطح پر 'O' سے 'r' فاصلہ میں رکھا ہوا ہے۔ 'P' کو گھیرے ہوئے ایک چھوٹے عنصر کا رقبہ ds ہے۔ فرض کرو کہ سطح پر نقطہ P پر کھینچا ہوا عمود PN، PE کے درمیان ایک زاویہ θ ہے۔ برقی حدت E ہے جس کی سمت عمل PE باہر کی جانب رنچ کیے ہوئے ہے۔ تب PN کی سمت میں E کا جز $E \cos \theta$ ہوگا۔

تب رقبہ کے چھوٹے عنصر ds پر برقی عمودی امالہ ہوگا۔

$$d\phi_E = E \cdot ds = E ds \cos \theta \quad (3.10)$$

اگر Q سے P کا میدان کی سمت میں فاصلہ 'r' ہو تو E کی قیمت ہوگی۔

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r^2} \right) \quad (3.11)$$

مساوات (3.10) اور (3.11) سے

$$d\phi_E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} ds \cos \theta = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{ds \cos \theta}{r^2} \right) \quad (3.12)$$

لیکن کسر $\frac{ds \cos \theta}{r^2}$ رقبہ ds کے مقابل 'q' پر بنا ہو گا زاویہ مجسمہ (Solid angle) ہوتا ہے جس کو $d\omega$ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔
تب سطح ds پر عمودی برقی امالہ ہوگا۔

$$d\phi_E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\omega \quad (3.13)$$

لہذا پوری بند سطح پر مجموعی عمودی برقی امالہ ہوگا۔

$$Q_E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\omega \quad (3.14)$$

کیوں کہ فضا کے کسی نقطہ پر اس سے بننے والا زاویہ مجسمہ 4π کے برابر ہوتا ہے۔

$$\phi_E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \times 4\pi \quad (3.15)$$

$$\phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (3.16)$$

اگر Q مثبت ہو تو امالے کی سمت باہر کی جانب رہے گی۔ جب Q منفی ہو تو امالہ اندر کی طرف رخ کیے ہوئے رہتا ہے۔

اندرون سطح اگر ایک سے زائد بھرن $Q_1 + Q_2 + Q_3$ --- $Q_1^1 - Q_2^1 - Q_3^1$ --- موجود ہوں تو یہ

بھرن اپنا حصہ Q ادا کرے گا۔ اس طرح تمام بھرنوں کی وجہ سے مجموعی عمودی برقی امالہ Q_E ہوگا۔

$$Q_E = \frac{1}{\epsilon_0} [Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots - Q_1^1 - Q_2^1 - Q_3^1 - \dots]$$

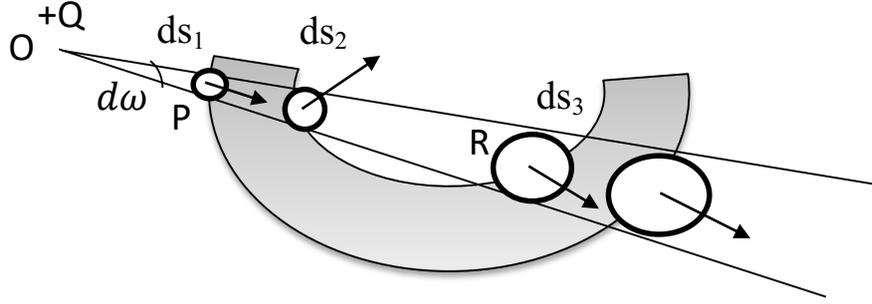
$$\phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \sum Q$$

گاؤس کے تھیورم کو اس طرح بھی بیان کیا جاتا ہے۔ ایک برقی میدان میں کھینچی گئی کسی بھی شکل کی بند سطح پر مجموعی عمودی امالہ سطح

کے اندر کے مجموعی بھرن کا $\frac{1}{\epsilon_0}$ گنا ہوتا ہے۔

ii. نقطہ P کو گھیری ہوئی بند سطح کے بہرے پر

فرض کرو کہ ایک یکساں مستوی السموت واسطے میں ایک نقطوی بھرن +q کو 'O' پر رکھا ہوا ہے۔ q کو گھیری ہوئی کھولی سطح پر نقطے S, R, Q, P کو گھیرے ہوئے چھوٹے عنصر کارقبہ ds_1, ds_2, ds_3, ds_4 ہیں۔ اگر برقی نفوذ (Electric Flux) سطح سے باہر نکلتے ہوں تو مثبت اور اگر سطح میں اندر جاتے ہوں تو منفی نفوذ ہوگا۔ لہذا رقبہ ds_2 اور ds_4 کے ذریعے برقی نفوذ مثبت اور رقبہ ds_1 اور ds_3 پر منفی نفوذ ہوگا۔



شکل (3.8)

$$\left(-\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\right) d\omega = ds_1 \text{ پر برقی نفوذ}$$

$$\left(\frac{+q}{4\pi\epsilon_0}\right) d\omega = ds_2 \text{ پر برقی نفوذ}$$

$$\left(\frac{-q}{4\pi\epsilon_0}\right) d\omega = ds_3 \text{ پر برقی نفوذ}$$

$$\left(\frac{+q}{4\pi\epsilon_0}\right) d\omega = ds_4 \text{ پر برقی نفوذ}$$

لہذا پوری کھولی کھلا سطح پر مجموعی برقی نفوذ ہوگا۔

$$ds = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega = 0$$

اس سطح پر برقی میدان کی قیمت صفر ہوتی ہے۔

3.10 گاؤس کا تھیورم کا تفریق شکل (Differential Form of Gauss's Law)

$$\text{گاؤس تھیورم کے مطابق } \oint E \cdot ds = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\epsilon_0 \oint E \cdot ds = Q \quad (3.17)$$

ایک حجم پر اگر بھرن کی تقسیم یکساں ہو تو مجموعی بھرن +Q ہوگا۔

$$Q = \iiint \rho dv \quad (3.18)$$

مساوات (3.17) اور (3.18)

$$\epsilon_0 \oint E \cdot ds = \iiint \rho dv \quad (3.19)$$

مسئلہ غیر مرکوزیت (Divergence Theorem) مطابق

$$\oint_s E \cdot ds = \iiint \text{div } E dv \quad (3.20)$$

مساوات (3.20) کو مساوات (3.19) میں درج کیا جائے۔ تب

$$\epsilon_0 \iiint \text{div } E dv = \iiint \rho dv \quad (3.21)$$

مساوات (3.21) کسی بھی اختیاری حجم (Arbitrary Volume) کے لیے درست ہے۔ لہذا تکمیلی کے برابر ہونا چاہیے۔

تب یہ ہے کہ

$$\epsilon_0 \text{div } E = \rho \text{ (or) } \text{div } E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ (or) } \Rightarrow \delta \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.22)$$

$$D = \epsilon_0 E \text{ (or) } E = \frac{D}{\epsilon_0} \text{ خلا میں}$$

$$\text{div } D = \rho \text{ (or) } \Rightarrow \delta \cdot D = \rho \quad (3.23)$$

مساوات (3.22) گاؤس تھیورم کا تفریقی شکل ہے۔

3.11 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

دو α ذرات فضا میں ایک دوسرے سے $10^{-13} m$ کے فاصلے ہیں۔ ان پر کتنی قوت دفع عائد ہوتی ہے۔

حل: کیوں کہ α ذرہ دو پروٹون اور دو نیوٹران پر مشتمل ہوتا ہے اس لیے اس پر برقی بار $2 \times 1.6 \times 10^{-19} C$ ہوگا۔

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$$F = \frac{9 \times 10^9 (+2 \times 1.6 \times 10^{-19})(+2 \times 1.6 \times 10^{-19})}{(10^{-13})^2} = 92.16 \times 10^{-3} N$$

حل شدہ مثال 2

چار الیکٹران کو خارج کیا ہوا کلورائیڈ کارواں $2NC^{-1}$ حدت والے برقی میدان میں رکھا ہوا ہو تو اس پر کتنی قوت عائد ہوگی۔

$$F = Eq \quad \text{حل:}$$

$$F = E4e$$

$$F = 2 \times 4 \times 1.6 \times 10^{-19} = 1.28 \times 10^{-18} N$$

کلورائیڈ کے روان پر $1.28 \times 10^{-18} N$ کی قوت میدان کی سمت میں عائد ہوتی ہے کیوں کہ یہ مثبت رواں ہے۔

حل شدہ مثال 3:

1μ کا برقی بار ایک برقی میدان میں $2 \times 10^{-3} N$ کی قوت سے متاثر ہوتا ہے۔ میدان کی حدت معلوم کیجیے۔

$$E = \frac{F}{q} \quad \text{حل:}$$

$$E = \frac{2 \times 10^{-3}}{1 \times 10^{-6}} = 2 \times 10^3 NC^{-1}$$

حل شدہ مثال 4

$5 \mu C$ اور $8 \mu C$ کے دو برقی بار فضا میں ایک دوسرے سے $0.4 m$ کے فاصلے پر ہیں ان دونوں کے وسطی نقطے پر میدان کی حدت معلوم

کیجیے جب کہ۔

(a) دونوں برقی بار مثبت ہوں

(b) جب کہ بڑا برقی بار منفی اور چھوٹا مثبت ہوں۔

حل: مجموعی میدان دو برقی باروں سے بننے والے میدانوں کا سمتی مجموعہ ہوگا اور یہ سمتیے ایک ہی خط مستقیم ہی ہوں گے پہلی صورت میں

یہ دو سمتیے ایک دوسرے کے مخالف سمت میں ہوں گے اور دوسری صورت میں سمتیے ایک ہی سمت میں ہوں گے۔ لہذا

$$E = E_1 - E_2 \quad (a)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{8 \times 10^{-6}}{(0.2)^2} - \frac{5 \times 10^{-6}}{(0.2)^2} \right]$$

$$= 9 \times 10^9 \times \frac{10^{-6}}{0.04} (8 - 5)$$

$$= \frac{9 \times 3}{4} \times 10^9 \times 10^{-6} \times 10^2 \Rightarrow E = 6.75 \times 10^5 NC^{-1}$$

$$E = E_1 - E_2 \quad (b)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{8 \times 10^{-6}}{[0.2]^2} - \frac{(-5 \times 10^{-6})}{(0.2)^2} \right]$$

$$= 9 \times 10^9 \times \frac{10^{-6}}{0.04} (8 + 5)$$

$$E = \frac{9 \times 13}{4} \times 10^9 \times 10^{-6} \times 10^2 \Rightarrow E = 29.25 \times 10^5 NC^{-1}$$

حل شدہ مثال 5

گاؤس تھیورم کی مدد سے کولم کے کلیے کو اخذ کیجیے۔

حل: فرض کیجیے کہ فضا میں ایک نقطی برقی بار q ہے جو اپنے اطراف ایک برقی میدان بناتا ہے۔ ایک مشاہدے کا نقطہ اس نقطی برقی بار سے 'r' کے

فاصلے پر موجود ہے۔ جہاں برقی میدان کی حدت مطلوب ہے۔

گاؤس کے تھیورم کے لیے ہم ایک کروئی سطح کا انتخاب کریں گے جس کا مرکز برقی بار q ہے اور نصف قطر r ہے۔ اس کروئی سطح پر برقی میدان کی مدت ہر جگہ یکساں ہوتی ہے۔ اور یہ کروئی سطح کے انتصاباً ہتی ہے۔ چنانچہ گاؤس کے کلیے کی رو سے

$$\frac{q}{\epsilon_0} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

کیوں کہ برقی میدان اس کروئی سطح پر یکساں ہے۔ $\frac{q}{\epsilon_0} = E \oint ds$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad \text{یعنی}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad \text{برقی سکونیت}$$

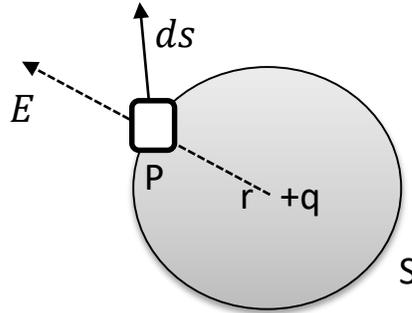
اگر اس کروئی گاسیائی سطح پر اگر ایک امتحان برقی بار q_0 رکھا جائے تو اس پر میدان کی جانب سے عائد ہونے والی قوت اس طرح ہوگی۔

$$F = E q_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r^2}$$

یہ کولم کا کلیہ ہے۔

حل شدہ مثال 6

ایک نقطئی برقی بار q کروئی کے مرکز θ پر رکھا ہے اور نصف قطر r ہے۔ کروئی سطح پر برقی میدان کی مدت ہر جگہ یکساں رہتی ہے اور یہ کروئی سطح کے انتصاباً ہتی ہے۔ کروئی سطح پر برقی میدان کی نفوذ معلوم کیجیے۔



شکل (3.9)

حل: فرض کرو کہ کروئی کو گھیرے ہوئے ایک چھوٹے عنصر کا تہ ds ہے۔ تب میدان کی سمت میں E کی قیمت ہوگی۔

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

جہاں E اور ΔS کے درمیان زاویہ صفر ہے۔

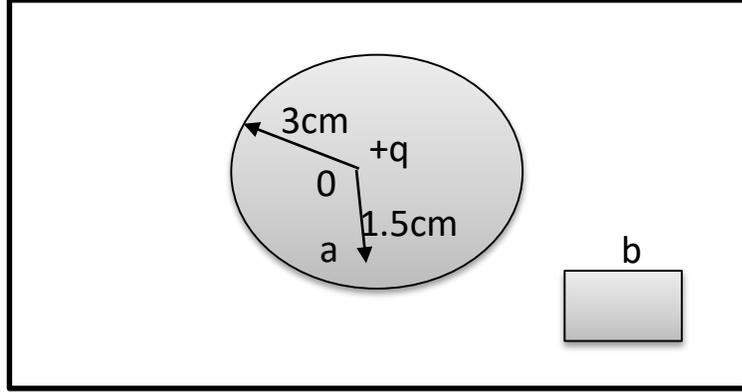
$$\Delta\phi = E \cdot \Delta S = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Delta S \quad \text{لہذا}$$

$$\phi = \sum_1 \Delta\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sum \Delta S$$

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

حل شدہ مثال 7

ایک برقی بار $q = 2.0 \times 10^7 C$ کو کروی کے مرکز پر رکھا ہے۔ اور دھات کا ٹکڑا میں اسفیریکل جو ف سے 3cm کے فاصلے پر ہیں۔ شکل (3.10) سے a اور b پر برقی حدت کو معلوم کیجیے۔



شکل (3.10)

حل:

(i). فرض کیجیے کہ برمائے ہوئے کروی خول کا نصف قطر 3cm ہے۔ اور اس کے اندر مشاہدے کا نقطہ مرکز سے 1.5cm کے فاصلے پر ہے۔ (گامیائی اسفیریکل جو ف سطح کے اندر کوئی برقی بار گھرا ہوا نہیں ہے)۔

$$E \times 4\pi(0.015)^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q}{(0.015)^2}$$

$$E = (9 \times 10^9) \times \frac{2.0 \times 10^{-7}}{(0.015)^2} \Rightarrow E = 8 \times 10^5 \text{ N/C}$$

ii. گامیائی اسفیریکل جو ف سطح کے اندر کوئی برقی بار گھرا ہوا نہیں ہے۔ لہذا اس اندرونی b نقطے پر برقی میدان کی حدت ($E = 0$) صفر ہوگی۔

حل شدہ مثال 8

کسی خطی میں برقی میدان پر فاصلہ r کے ساتھ بیرونی سطح پر مختلف ہوتے ہیں $E = 250 \text{ rv/m}^2$ کروی کے مرکز سے 0.2mm کے دائرے میں برقی بار کو معلوم کیجیے۔

$$\phi = \oint E \cdot ds = E_{\text{surface}} \times 4\pi a^2 \quad \text{حل: کروی کے ذریعہ برقی نفوذ}$$

کروی کے سطح پر برقی بار 'q' ہے۔ تب گاؤس تھیورم کے مطابق

$$\phi = \frac{q}{\epsilon_0} \text{ (or) } q = \phi \epsilon_0$$

$$q = E_{\text{surface}} \times 4\pi a^2 \times \epsilon_0 \\ = 4\pi \epsilon_0 E_{\text{surface}} \times (a^2)$$

$$E_{Surface} = 250 \text{ }^v/m^2 \quad \text{یہاں}$$

$$E_{Surface} = 250 \times (0.2) = 50 \text{ }^v/m^2$$

$$q = \frac{1}{9 \times 10^9} \times 50 \times (0.2)^2 \Rightarrow q = 2.22 \times 10^{-10} \text{ Coulum}$$

3.12 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- برقی سکونیتی قوت اور مقناطیسی قوت کی مقداریں سے مادے کی خصوصیات کا پتہ چلتا ہے۔
- برقی بار دو قسم کے ہوتے ہیں۔ مثبت اور منفی
- مشابہ برقی بار ایک دوسرے کو دفع کرتے ہیں اور غیر مشابہ برقی بار ایک دوسرے کو کشش کرتے ہیں۔
- کسی مادے میں دو نقطی برقی بار کچھ فاصلے سے رکھے ہوئے ہوں تو ان کے درمیان عائد ہونے والی قوت کو لم کے کلیے سے معلوم کی جا سکتی ہے۔ $F_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{r^2}$
- کسی علاقے میں برقی میدان کی موجودگی کا اندازہ وہاں پر ہونے والے برقی اثرات کے ذریعہ کیا جاسکتا ہے۔ کسی مقام پر رکھے گئے ایک کولم مثبت برقی بار پر عائد ہونے والی قوت اس مقام پر برقی میدان کی حدت ہوتی ہے۔ برقی میدان کی حدت کے لیے SI اکائی NC^{-1} یا Vm^{-1} دونوں مروج ہیں۔
- برقی خطوط قوت کے کسی نقطے پر گرایا گیا مسا برقی برقی میدان کی سمت کو ظاہر کرتا ہے۔ برقی خطوط قوت کا مکمل طور پر بند ہونا ضروری نہیں۔
- دی گئی سطح پر برقی میدان کا نفوذ اس سطح پر برقی میدان کا سطح تکمیل ہوتا ہے۔ یعنی $\phi_E = \int_S E \cdot ds$
- گاؤس (Gauss) کے کلیے کے مطابق کسی بند سطح پر لیا گیا برقی نفوذ اس سطح کے اندر گھرے ہوئے برقی بار کا $\frac{1}{\epsilon_0}$ گنا ہوتا ہے۔

3.13 کلیدی الفاظ (Key Words)

- بقائے برقی بار: الیکٹران یا برقی بار نہ ہی پیدا کیا جاسکتا ہے اور نہ ہی فنا کیا جاسکتا ہے۔
- برقی میدان: برقی بار کے اطراف کا علاقہ جہاں اگر دوسرا برقی بار رکھا جائے تو اس پر قوت عائد ہوتی ہے۔
- ہمووار برقی میدان: جس میں ہر نقطے پر میدان کی حدت اور سمت یکساں رہتی ہے۔
- غیر ہموار برقی میدان: ایسا میدان جس میں میدان کی حدت یا سمت یا دونوں مقام کے لحاظ سے بدلتے ہوں۔
- وولٹ (Volt): ایک وولٹ برقی قوت کی وہ قدر ہے جہاں پر 1 کولم برقی بار کو لا متناہی سے یہاں لانے کے لیے ایک جول کا کام واقع ہوتا ہو۔

3.14 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

3.14.1 معروفی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. اگر کوئی جسم مثبت بار سے برقا یا جائے تو اس کے وزن میں کیا کوئی تبدیلی آتی ہے۔
2. خطوط قوت پر تیر کا نشان بنایا جاتا ہے۔ وہ کس لیے۔
3. برقی میدان کی حدت $E = \frac{F}{q_0}$ _____
4. برقی میدان کی حدت کی SI اکائی _____ ہے۔
5. برقی میدان سے کیا مراد ہے۔
6. برقی نفوذ کی SI اکائی _____ ہے۔
7. برقی نفوذ سے کیا مراد ہے۔
8. گاس کا کلیہ کو بیان کریں۔
9. $E \cdot ds$ کی قیمت _____ ہوتی ہے۔
10. بتائے برقی بار سے کیا مراد ہے۔

3.14.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. کولم کا برقی سکونیت والا عکسی مربعوں کا کلیہ بیان کیجیے اور سمجھائیے۔
2. کسی مقام پر برقی میدان کی حدت کی تعریف لکھیے۔ نقطی برقی بار کی وجہ سے برقی میدان کی حدت کا ضابطہ اخذ کیجیے۔
3. ان کی تعریف لکھیے۔
- a. برقی میدان E کی حدت b. دونوں نقاط کے درمیان تفاوت قوں ان کے درمیان رشتے کو اخذ کیجیے۔
4. برقی نفوذ کی تعریف لکھیے۔ کیا یہ سمتیہ ہے یا میزانیہ۔
5. برقی سکونیت کا گاؤس کا کلیہ لکھیے اور اس کی اہمیت لکھیے۔

3.14.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. برقی سکونیت کے کولم کے کلیے کو بیان کیجیے اور سمجھائیے اس کلیے کی مدد سے برقی بار کی تعریف لکھیے اور برقی میدان کی حدت کی تعریف کیجیے۔

2. برقی نفوذ کی تعریف لکھئے، برقی سکونیات کا گاؤس کا کلیہ بیان کیجئے۔ گاؤس کے کلیے کی مدد سے کولم کے کلیے کو اخذ کیجئے۔
3. (a) برقی میدان، میدان کی حدت کی تعریفیں لکھئے۔ برقی بار کی وجہ سے برقی میدان کی حدت کا ضابطہ اخذ کیجئے۔
(b) گاؤس کے کلیے کو بیان کریں، اور گاؤس کے کلیے کی مدد سے کولم کے کلیے کو اخذ کیجئے۔
- 3.14.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)
1. $2\mu\text{C}$ والے برقی بار پر میدان کی جانب سے اگر $3 \times 10^{-3}\text{N}$ کی قوت عائد ہوتی ہے تو بتائیے وہاں میدان کی حدت کتنی ہے۔
2. 2C کے دو یکساں برقی بار فضا میں 2Km کے فاصلے پر ہیں۔ ان کے درمیان قوت معلوم کیجئے۔
3. $2\mu\text{C}$ اور $1\mu\text{C}$ کے دو برقی بار ایک دوسرے سے 10cm کی دوری پر رکھے ہوئے ہیں ان دونوں کے درمیان قوت معلوم کیجئے۔
4. کسی برقی میدان میں رکھے ہوئے $+2$ مائیکرو کولم برقی بھرن پر عمل پیرا قوت 8×10^{-4} نیوٹن ہے۔ برقی میدان کی حدت کی مقدار معلوم کیجئے۔
5. 3.0×10^{-6} کولوم کا ایک نقطوی بھرن ایک دوسرے 1.5×10^{-16} کولوم سے نقطوی بھرن سے 12cm کے فاصلے پر رکھا ہوا ہے۔ ہر بھرن پر عمل کرنے والی قوت کی مقدار اور اس کی سمت معلوم کیجئے۔

3.15 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Bleaney, B I, and B Bleaney. Electricity and Magnetism. Oxford: Oxford University Press, 2013.
2. Duffin, W J. Electricity and Magnetism. Cottingham: W.J. Duffin, 2001.
3. Gaur, R.K. & Gupta, S.L. Engineering Physics. Dhanpat Rai Publication.
4. Plonsey, R. & Collin, R.E. Principles and Application of Electromagnetic Field. Tata Mc Graw Hill Publication. New Delhi.
5. Purcell, Edward M, and David J. Morin. Electricity and Magnetism. , 2013.
6. Resnic, R. & Halliday, D. Physics Part-I & Part-II. Wiley Eastern Pvt. Ltd. New Delhi.
7. Resnick, Robert, David Halliday, and Kenneth S. Krane. Physics. New York: Wiley, 2002.
8. Schuh, Mari C. Magnetism. Minneapolis, MN: Bellwether Media, 2008.

اکائی 4۔ گاؤس تھیورم کا اطلاق

(Application of Gauss's Theorem)

اکائی کے اجزا

تمہید	4.0
مقاصد	4.1
لاتناہی وسعت والی مستوی سطح کے قریب برقی میدان کی حدت	4.2
برقائے ہوئے کرومی خول کی وجہ سے برقی میدان	4.3
خول کے باہر برقی میدان کی حدت	4.3.1
خول کی سطح پر برقی میدان	4.3.2
جب نقطہ 'P' اگر کرومی کے اندر واقع ہو یعنی ($r < R$)	4.3.3
طویل برقائے ہوئے لاتناہی خطی تار کے قریب برقی میدان	4.4
برقائے ہوئے استوانی کی وجہ سے برقی میدان	4.5
استوانی کے اندر میدان کی حدت	4.5.1
استوانی کے باہر میدان کی حدت	4.5.2
برقائے موصل کی سطح پر میکانی قوت یا زور۔ برقی	4.6
حل شدہ مثالیں	4.7
اکتسابی نتائج	4.8
کلیدی الفاظ	4.9
نمونہ امتحانی سوالات	4.10
معروضی جوابات کے حامل سوالات	4.10.1
مختصر جوابات کے حامل سوالات	4.10.2
طویل جوابات کے حامل سوالات	4.10.3

4.10.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات
4.11 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں

4.0 تمہید (Introduction)

اب تک ہم نے برقی میدان کی حدت کی قیمت کی تخمین کے لیے ایسی مثالیں لیں جس میں ایک دو یا کئی نقطی برقی بار موجود تھے۔ ان کی وجہ سے بننے والے میدان کی حدت کو معلوم کرنے کے لیے ہم نے کولم کا ضابطہ اور امتزاج کے کلیے کا استعمال کیا۔ لیکن کچھ مثالیں ایسی بھی ہو سکتی ہیں جن میں برقی بار کسی نقطے پر نہیں پایا جاتا۔ مثلاً ایک لمبے تار میں برقی بار یکساں طور پر پھیلا ہوا ہو۔ اس صورت میں خطی برقی کثافت (Linear Charge Density) کو معلوم کیا جاتا ہے۔ کسی سطح پر برقی بار پھیلا ہوا ہوتا ہے۔ اس صورت میں سطح برقی کثافت (Surface Charge Density) کو معلوم کیا جاتا ہے۔ اسی طرح بعض غیر موصل اجسام میں برقی باران کے حجم میں پھیلا ہوا ہوتا ہے۔ اس صورت میں حجمی برقی کثافت (Volume Charge Density) کو معلوم کیا جاتا ہے۔

i. خطی برقی کثافت $\lambda = \frac{dq}{dl}$ کو لم فی میٹر

ii. سطح برقی کثافت $\sigma = \frac{dq}{ds}$ کو لم فی مربع میٹر

iii. حجمی برقی کثافت $\rho = \frac{dq}{dv}$ کو لم فی مکعب میٹر

4.1 مقاصد (Objectives)

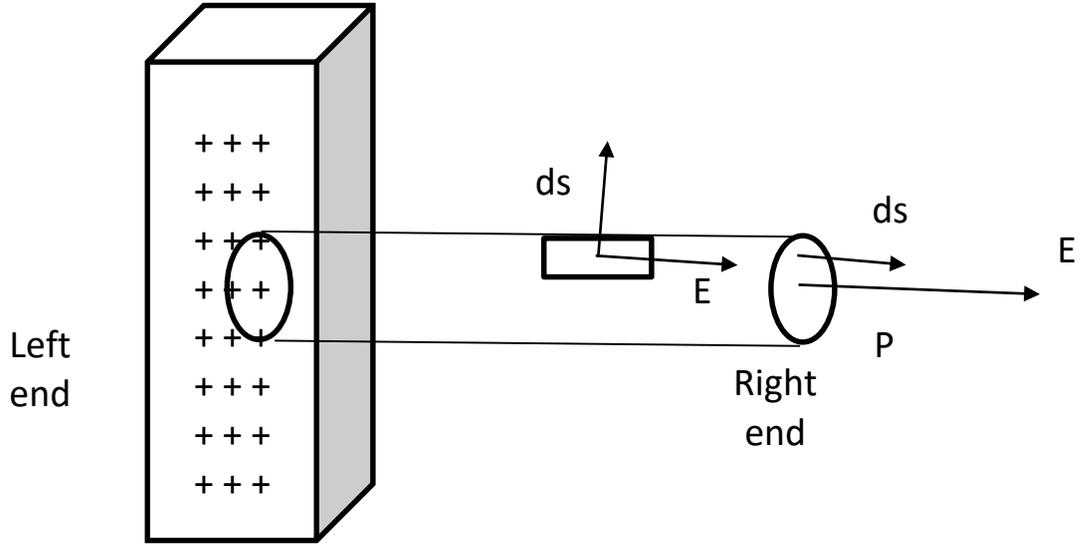
- یہ اکائی کسی برقائے موصل کے قریب برقی میدان کی حدت معلوم کرنے میں مدد دیتی ہے۔ اس ضمن میں یہ اکائی وضاحت کرتی ہے۔
- برقائے استوانی موصل کے قریب برقی میدان کی حدت معلوم کرے گے۔
 - گاؤس کے کلیہ اطلاق سے کسی برقائی چادر کی لاتناہی تختی کے قریب برقی میدان کی حدت کو محسوب کریں گیں۔
 - طویل برقائے ہوئے لاتناہی خطی تار کے قریب برقی میدان کو محسوب کریں گیں۔
 - برقائے موصل کی سطح پر میکائی قوت یا زور، برقی سکونی دباؤ کو معلوم کرے یں گیں۔
 - برقائے ہوئے کروئی خول کی وجہ سے برقی میدان کو محسوب کر سکیں۔
- اس طرح اس اکائی میں ہم گاؤس کے کلیے کی مدد سے برقائے موصل کے قریب برقی میدان کی حدت معلوم کرنے میں مدد دیتی ہے۔

4.2 لاتناہی وسعت والی مستوی سطح کے قریب برقی میدان کی حدت

(Intensity of Infinite Plane Sheet Surface)

ایک لاتناہی وسعت والی مستوی ہموار طور پر برقائی ہوئی ہے اور اس کی سطحی برقی کثافت σ ہے۔ اس سطح سے برقی خطوط قوت سطح

کے دونوں جانب انتصائباً باہر نکلتے ہیں اور ہم کو اس سطح کے قریب r کے فاصلے پر نقطہ P پر برقی میدان کی حدت معلوم کرنا ہے۔ کیوں کہ یہ خطوط قوت آپس میں متوازی ہیں اس لیے ہم گاسیائی سطح کے لیے ایک استوانے کا انتخاب کریں گے جس کا طول $2r$ اس سطح پر انتصائباً ہے اور اس استوانے کے وسط سے یہ اوسط گزرتی ہے۔ یہ استوانے کی سطح تین حصوں پر مشتمل ہے۔ دو دائروں کی سطحیں جن سے خطوط قوت گزرتی ہیں۔ اس سطحوں پر برقی نفوذ بنتا ہے اور ایک منحنی سطح جس میں کوئی بھی خط قوت نہ ہی داخل ہوتی ہے اور نہ ہی خارج ہوتی ہے۔ برقی قوت چوں کہ، منحنی سطح کے عموداً ہے اس لیے مستطیلی متوازی سطوح کے بازوں پر عمودی برقی امالہ صفر ہوتا ہے۔



شکل (4.1)

گاؤس تھیورم کو استعمال کرنے پر

$$\oint_s E \cdot ds = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (4.1)$$

$$\Phi = \oint_{\text{right end}} E \cdot ds + \oint_{\text{left end}} E \cdot ds + \oint_{\text{Curved Surface}} E \cdot ds \quad \text{برقی امالہ}$$

$$\Phi = ES + 0 + 0 \quad (4.2)$$

مساوات (4.1) اور (4.2) سے

$$\left(\because \sigma = \frac{q}{s} \Rightarrow q = \sigma s \right) ES = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (4.3)$$

$$ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \quad (4.4)$$

جہاں S استوانے کے دونوں دائروں کی حصوں کا رقبہ ہے۔

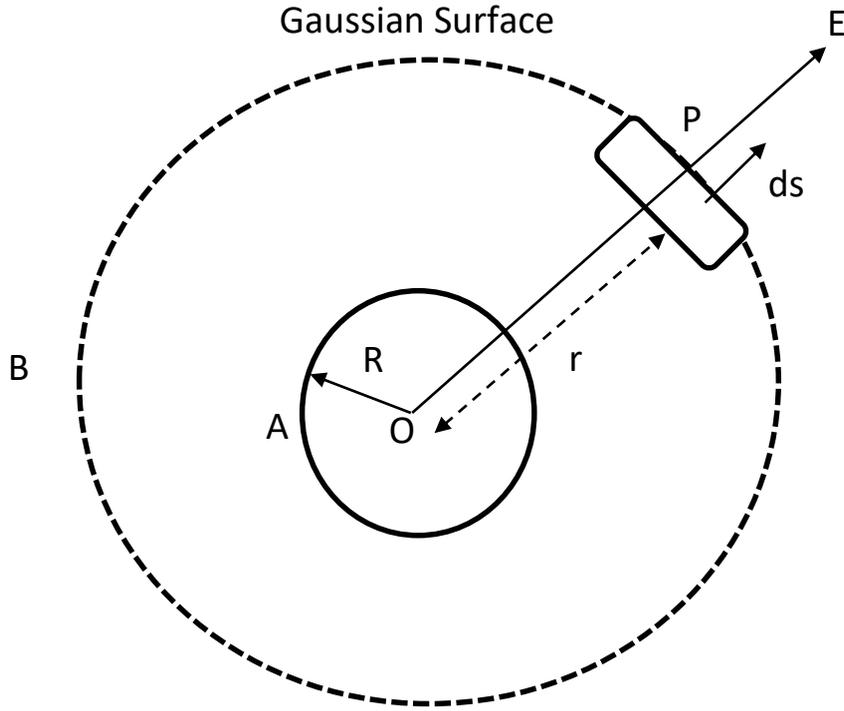
$$2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \quad \text{تب}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (4.5)$$

لاتناہی وسعت والی برقی سطح کے قریب برقی میدان کی حدت $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ ہوتی ہے۔
برقی میدان اس سطح کی دونوں جانب پایا جاتا ہے۔ اور اس کی حدت فاصلے کے لحاظ سے تبدیل نہیں ہوتی یہ میدان ہموار ہوتا ہے۔
البتہ اگر اس سطح کی وسعت لاتناہی نہ ہو تو اس سطح کے کناروں پر میدان غیر ہموار ہوتا ہے۔

4.3 برقائے ہوئے کروئی خول کی وجہ سے برقی میدان

(Conducting of Hollow Sphere of Electric Field)



شکل (4.2)

فرض کیجیے کہ ایک یکساں برقائے کروئی A کا بھرن q ہے اور اس کے باہر ایک نقطہ P ہے فرض کرو کہ کرے کا نصف قطر R ہے۔
برقائے کروئی A کے گرد ایک ہم مرکزی گاؤسین سطح B کھینچیے جو نقطہ P سے گزرتی ہو جیسا کہ شکل (4.2) میں بتلایا گیا ہے۔ اور r برقائے
کروئی کے مرکز O سے نقطہ P تک کا فاصلہ ہے۔ فرض کرو کہ اس کروئی کے کسی نقطے پر بھی برقی میدان کی حدت 'E' ہے جو سطح کے ہر نقطے
پر سطح کے علی القوائم ہے۔

اب ہم اس برقائے ہوئے کروئی خول کی وجہ سے بننے والے میدان کی حدت اور قوت تین مختلف مقامات پر معلوم کریں گے۔
خول کے باہر، خول کی سطح پر اور خول کے اندر

4.3.1 خول کے باہر برقی میدان کی حدت (Eclectic Intensity in Out Side of Hallow Sphere)

کروی کی سطح کا مجموعی رقبہ $4\pi r^2$ ہوگا۔

$$\phi_E = \oint E \cdot ds = E \oint ds \text{ گاؤسین سطح پر مجموعی عمودی برقی امالہ ہوگا۔}$$

$$\phi_E = E(4\pi r^2) \quad (4.6)$$

جہاں گاؤسین سطح کے رقبہ پر نصف قطر $r = 4\pi r^2$ گاؤس تھیورم کو استعمال کرنے پر

$$\phi_E = \oint_S E \cdot ds = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (4.7)$$

مساوات (4.6) اور (4.7) سے

فرض کیجیے کہ مشاہدے کا نقطہ خول کے باہر ہے (یعنی $r > R$) اور گاسیائی سطح r نصف قطر والی کروی سطح ہے۔

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (4.8)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \text{ Newton/Couloms (خلا کے لیے)}$$

سمتیہ کی شکل میں برقی میدان کی حدت $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \hat{r} \text{ N/C}$ جہاں \hat{r} اکائی سمتیہ ہے کسی واسطے جس کے لیے برق گزار مستقل K ہو۔

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \frac{q}{r^2}$$

کیوں کہ $\epsilon = \epsilon_0 K$

اگر بھرن کروی کی سطح پر یکساں مقدار میں پھیلا ہوا ہو تو $q = 4\pi R^2 \sigma$ جہاں σ بھرن کی سطحی کثافت کی تعبیر ہے۔ تب

$$E = \frac{4\pi R^2 \sigma}{4\pi\epsilon_0 K r^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 K} \left(\frac{R^2}{r^2} \right) \text{ Volts/m} \quad (4.9)$$

4.3.2 خول کی سطح پر برقی میدان (Electric Field on Surface of Hallow Sphere)

اگر مشاہدے کا نقطہ خول کی سطح پر ہو یعنی $r=R$ ہو تو

برقی میدان کی حدت اس طرح ہوگی۔

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (4.10)$$

مساوات (4.10) سے یہ ظاہر ہوتا ہے یکساں طور پر برقی کروی بیرونی نقطہ پر حدت وہی ہوتی ہے جو بھرن پر مرکوز ہونے کی

صورت میں حاصل ہوتی ہے۔

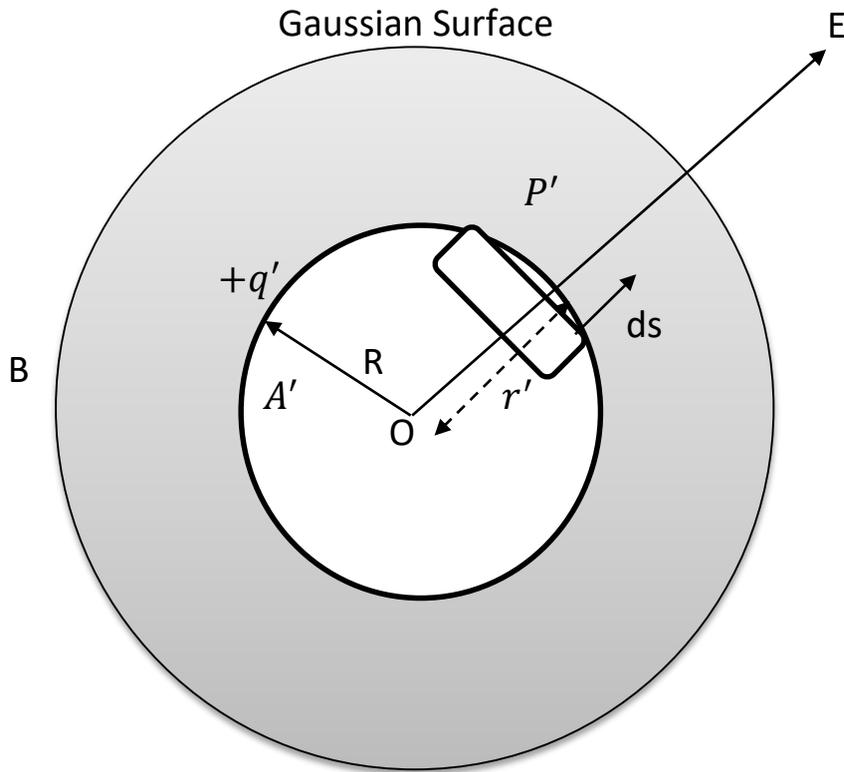
مساوات (4.9) سے

$$E = \frac{4\pi R^2 \sigma}{4\pi \epsilon_0 K R^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 K} \quad (4.11)$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 K} \quad (4.12)$$

4.3.3 جب نقطہ 'P' اگر کروی کے اندر واقع ہو یعنی ($r < R$) (Point 'P' in Sphere Inside)

اگر کروی خول کی سطح یکساں طور پر برقی ہوئی ہے اور اس کے اندر کسی نقطے P پر برقی میدان کی حدت معلوم کرنا ہو تو اس اندرونی نقطے پر ہم ایک کروی گاسیائی سطح کو منتخب کریں گے۔



شکل (4.3)

فرض کیجیے کہ برقائے ہوئے کروی خول کا نصف قطر R ہے اور اس کے اندر مشاہدے کا نقطہ مرکز سے 'r' کے فاصلے پر ہے ($r < R$)۔ گاسیائی کروی سطح کے اندر کوئی برقی بار گھرا ہوا نہیں ہے۔ اس لیے گاؤس کے تھیورم کے مطابق ایک بند سطح کے اندر برقی بھرن صفر ہوتا ہے۔

$$\oint E \cdot ds = 0$$

اس طرح ایک موصل کروی کے اندر برقی میدان صفر ہوتا ہے۔

بھرن کی کروی تشاکل تقسیم کی ایک دلچسپ مثال ایک یکساں بھرن کا کرہ ہے۔ یہ کرہ غیر موصل ہے اس قسم کی بھرن کی یکساں

تقسیم صرف مائع اور گیسوں جیسے برقی گزاروں میں ہو سکتی ہے۔

کروی کے مرکزہ سے نقطہ 'P' پر مجموعی حدت E کو یہ سمجھ کر حاصل کیا جاتا ہے۔ کہ بھرن کروی کے مرکز پر مرکوز ہے۔

مجموعی گاؤسیان سطح پر برقی امالہ ϕ_E ہوگا

$$\phi_E = \oint E ds = E \oint ds$$

$$\phi_E = E(4\pi r^2) \quad (4.13)$$

'q' برقی بھرن اور 'r' کروی کا نصف قطر بین کروی کے اندر تمام نقاط کے لیے گاؤسیان سطح کی بھرن

$$q = \frac{4}{3}\pi r^3 \times \rho \quad (4.14)$$

$$(\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi r^3} \text{ بھرن کی کثافت})$$

کروی کے R نصف قطر پر بھرن کی کثافت

$$\rho = \frac{\text{کل بھرن}}{\text{حجم}} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3q}{4\pi R^3} \quad (4.15)$$

مساوات (4.14) اور (4.15) سے گاؤسیان سطح کی بھرن

$$q = \frac{4}{3}\pi r^3 \times \frac{3q}{4\pi R^3} = q \left(\frac{r^3}{R^3}\right) \quad (4.16)$$

گاؤس کا تھیورم کو استعمال کرنے پر

$$\oint_E E ds = \phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (4.17)$$

مساوات (4.16) سے

$$\phi_3 = \frac{1}{\epsilon_0} q \left(\frac{r^3}{R^3}\right) \quad (4.18)$$

مساوات (4.13) اور (4.18) سے

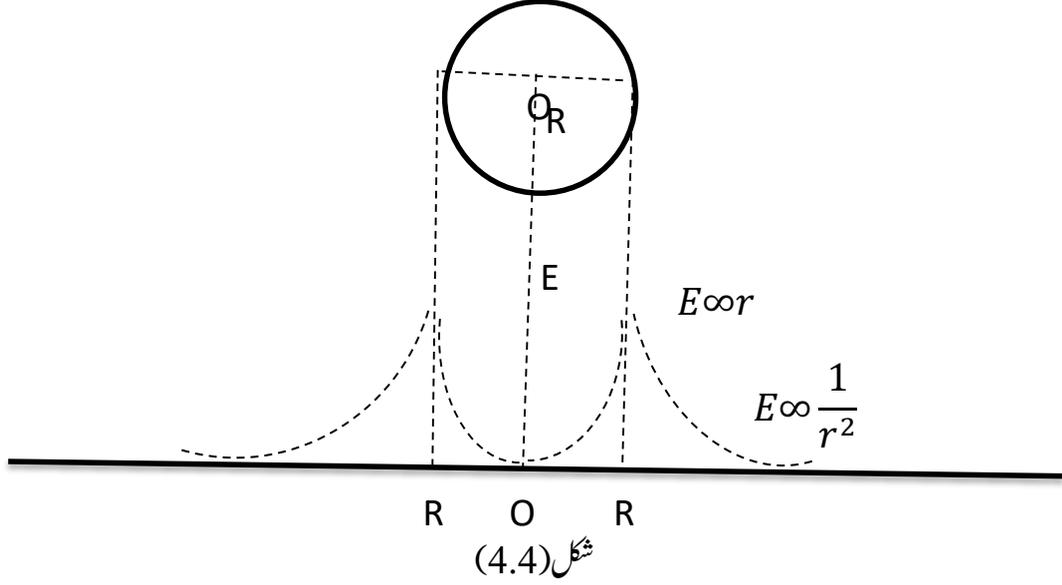
$$E(4\pi r^2) = \frac{1}{\epsilon_0} q \left(\frac{r^3}{R^3}\right) \quad (4.19)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qr^1}{R^3} \quad (4.20)$$

یہ مساوات سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ یکساں برقی کروی کے مرکز سے فاصلہ 'r' برقی میدان کی حدت E سے راست تناسب ہوتی ہے۔

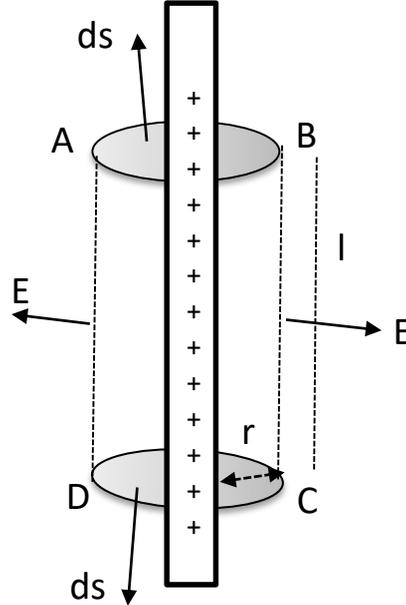
شکل (4.4) میں فاصلہ 'r' کی تبدیلی سے برقی میدان کی حدت E کے تبدیلی کو دکھایا گیا ہے۔

- i. کروی کے باہر برقی میدان کی حدت فاصلہ کے مربع کو بالعکس تناسب ہوتی ہے۔ یہ کروی کے سطح پر اعظم ترین ہوتی ہے۔
ii. کروی خول کی سطح یکساں طور پر برقی ہوئی ہے اور اس کے اندر کسی نقطے پر برقی میدان کی حدت ($E=0$) صفر ہوگی۔



4.4 طویل برقائے ہوئے لاتناہی خطی تار کے قریب برقی میدان

(Electric Field in Infinite Linear Wire)



شکل (4.5)

فرض کیجیے کہ ایک لاتناہی طویل برقی تار کا طول L ہے۔ اور اس پر کل برقی بھران q کو ہموار طور پر پھیلا یا گیا ہے اس تار سے قریب 'r' کے

فاصلے پر واقع ایک نقطہ P پر غور کیجیے۔ اس نقطہ پر میدان کی حدت معلوم کرنا ہے۔ ($L > r$) کیوں کہ برقی بار طول پر پھیلا ہوا ہے اس لیے

$$\lambda = \frac{q}{L} \text{ خطی برقی کثافت اس طرح ہوگی۔}$$

اس سوال کو حل کرنے کے لیے ہم استوانا نما گاسیائی سطح کا انتخاب کریں گے جس کا نصف قطر 'r' اور طول l ہے۔

$$\oint E ds = \frac{q}{\epsilon_0} \text{ تب گاس کے کھلیے کی رو سے}$$

یہاں تکمیل پوری گاسیائی پر کی جاتی ہے۔ یہ استوانا نما گاسیائی سطح تین حصوں پر مشتمل ہے۔ دو دائروں کی سطحیں جہاں نفوذ صفر

ہے اور ایک استوانا نما سطح جس پر برقی میدان یکساں ہے۔ تب

$$\oint E \cdot ds = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \quad \text{یا}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (4.21)$$

∴ لاتناہی طول کے برقائے تار کی وجہ سے برقی میدان کی حدت $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ تار کے عمود وار ہوگی۔

مساوات (4.21) ایک لاتناہی طول کے تار کے لیے اخذ کی گئی ہے۔ لیکن یہ تخمینہ ہے۔

4.5 برقائے ہوئے استوانی کی وجہ سے برقی میدان

(Electric Field of Conducting Cylinder)

فرض کرو کہ ایک یکساں برقائے دائری استوانی کا بھرن q ہے اور اس کے سطح پر ایک نقطہ P ہے فرض کرو کہ استوانی کا نصف قطر R ہے اور طول l استوانی کے اطراف و اکٹاف کے واسطے کا برق گزار مستقل K ہے۔

برقائے استوانی کے گرد ایک گاؤسین سطح B کھینچنے جو نقطہ P سے گزرتی ہو جیسا کہ شکل (4.6) میں بتلایا گیا ہے۔

اب ہم اس برقائے ہوئے استوانی کی وجہ سے بننے والے میدان کی حدت کو دو مختلف مقامات پر معلوم کریں گے۔ استوانی کے باہر

اور استوانی کے اندر۔

4.5.1 استوانی کے اندر میدان کی حدت (Electric Field inside the Cylinder)

برقائے استوانی کو ایک واسطے میں رکھا جاتا ہے۔ اس استوانی سے کسی فاصلے 'r' پر واقع ایک نقطہ P پر غور کیجیے۔ استوانی سطح پر E

مستقل ہوتا ہے جس کی قیمت $2\pi r l$ ہوتی ہے چوں کہ سطح کا رقبہ $2\pi r l$ ہوتا ہے۔

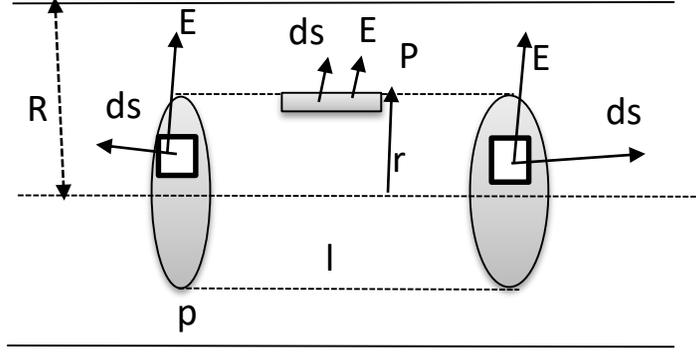
برقی میدان کی حدت کی سمت اس تصوری استوانے کے رخنوں (Faces) کے متوازی ہے، اس لیے ان رخنوں پر عمودی امالے کی

قیمت صفر ہوتی ہے۔

مجموعی گاؤسین سطح سے برقی امالہ Φ_E

$$\phi_E = \oint E \cdot ds = \oint E ds \cos \theta = \oint E ds \quad (4.22)$$

$$\phi_E = E \oint ds = E(2\pi r l) \quad (4.23)$$



شکل (4.6)

اگر بھرن استوانی کی سطح پر یکساں مقدار میں پھیلا ہوا ہو تو

بھرن = حجم x کثافت

بھرن = $\pi r^2 l \times \rho$

گاؤس کے کلیہ استعمال کرنے پر $\oint E \cdot ds = \frac{q}{\epsilon_0}$

$$E 2\pi r l = \frac{1}{\epsilon_0} \pi r^2 l \rho \quad (4.24)$$

$$E = \frac{r \rho}{2 \epsilon_0} \quad (4.25)$$

استوانی کے سطح پر بھرن فی اکائی طول λ

بھرن کی خطی کثافت λ (بھرن فی اکائی طول) $\lambda = \frac{q}{L}$

$q =$ استوانی پر مجموعی بھرن 'q'

$$\text{بھرن} = \pi r^2 l \times \rho = \pi r^2 \rho \times \frac{q}{\pi R^2 L}$$

$$\text{بھرن} = \frac{lr^2 \lambda}{R^2}$$

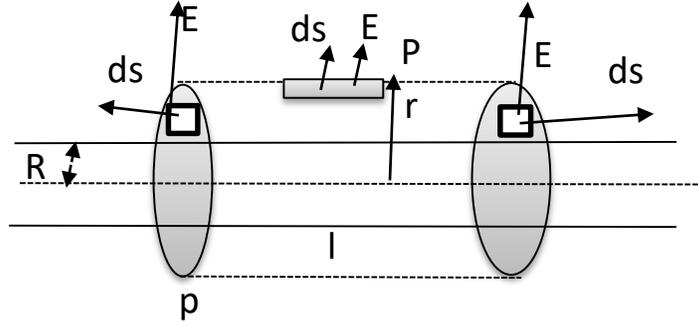
$$E(2\pi r l) = \frac{1}{\epsilon_0} \times \left(\frac{lr^2 \lambda}{R^2} \right) \quad \text{تب}$$

$$E = \frac{\lambda r}{2\pi \epsilon_0 R^2} \quad (4.26)$$

یہ مساوات سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ استوانی سے ایک نقطہ P کسی فاصلے 'r' اور استوانی کے اندر میدان کی حدت راست تناسب ہوتا ہے۔

4.5.2 استوانی کے باہر میدان کی حدت (Electric Field outside the Cylinder)

فرض کیجیے کہ مشاہدے کا نقطہ استوانی کے باہر ہے اور گاسیائی سطح 'r' نصف قطر والی استوانی سطح ہے۔
گاسیائی سطح پر مجموعی امالہ



شکل (4.7)

$$\phi_E = \oint E \cdot ds = E \cdot ds \quad (4.27)$$

$$\phi_E = E(2\pi r l) \quad (4.28)$$

مجموعی عمودی برقی امالہ بھرن q

$$q = \pi r^2 l \times \rho \quad (4.29)$$

گاؤس کے تھیورم کو استعمال کرنے پر

$$E(2\pi r l) = \frac{1}{\epsilon_0} \times (\pi R^2 l \rho) \quad (4.30)$$

$$E = \frac{R^2 \rho}{2\epsilon_0 r} \quad (4.31)$$

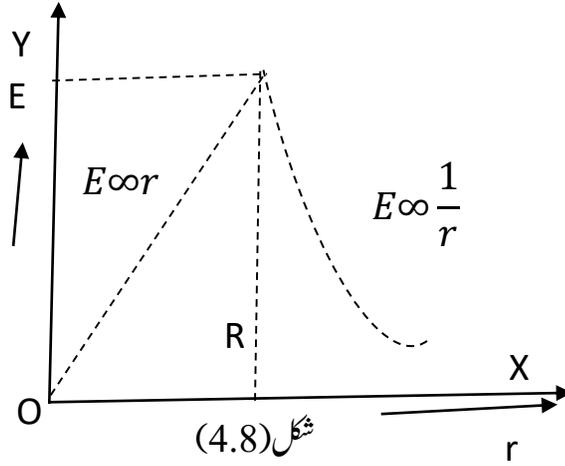
یہ مساوات سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ برقی میدان کی حدت E استوانی کے محور سے استوانی کے باہر نقطہ P کا فاصلہ مربع کا نصف قطر R کو راست تناسب اور استوانی کے محور سے نقطہ P کا فاصلہ کا نصف قطر r کو بالعکس تناسب ہوتی ہے۔ ایک ایکسا برقی استوانی کے محور سے فاصلہ 'r' کے ساتھ ساتھ برقی میدان کی حدت 'E' کی تبدیلی کو شکل (4.8) میں دیکھا گیا۔
استوانی کے سطح پر بھرن فی اکائی طول:

$$\lambda = \frac{q}{L} \text{ (بھرن فی اکائی طول)}$$

$$\rho = \frac{q}{\pi R^2 L} = \frac{\lambda}{\pi R^2}$$

$$E = \frac{R^2}{2\epsilon_0 r} \times \frac{\lambda}{\pi R^2}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$



4.6 برقائے موصل کی سطح پر میکانی قوت یا زور۔ برقی سکونی دباؤ

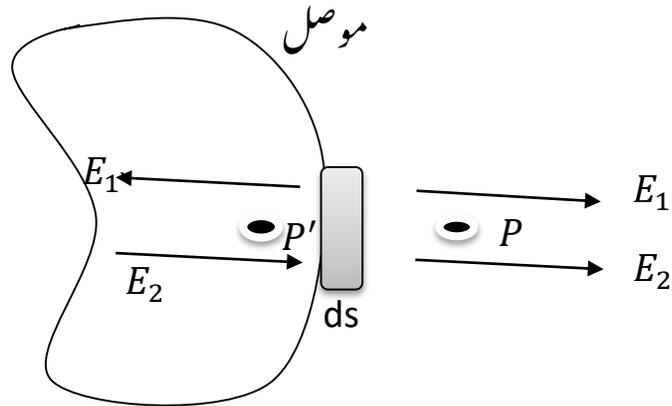
(Mechanical Force on Conductor-Electrostatic Pressure)

کسی موصل کو ایک ایسے واسطے میں رکھا گیا ہے۔ جس کا برق گزار مستقل K ہے۔ فرض کرو کہ موصل پر بھرن کی کثافت σ ہے۔ AB موصل کا ایک چھوٹا قبة اس کے اندر اور باہر بہت ہی قریبی فاصلوں پر دو نقاط P اور P^1 واقع ہیں۔ سطح AB کا قبة ds ہے اور اس کو مستوی تصور کیا جاتا ہے (کیوں کہ AB بہت چھوٹا ہے)۔

شکل (4.9) 'P' پر برق گزار میدان کی حدت 'E' جزوی طور پر ds پر کے بھرن اور جزوی طور پر باقی موصل پر کے بھرن کے وجود سے ہوگی۔ فرض کرو کہ مدتوں کے یہ اجزا E_1 اور E_2 ہیں۔

تب 'P' پر حاصل حدت E ہوگی

$$E = E_1 + E_2 \quad (4.32)$$



شکل (4.9)

Q (موصل کے اندر) پر حدت صفر ہوتی ہے۔ کیوں کہ کہ موصل کے اندر کوئی بھرن نہیں ہوتا۔

$$E = E_2 - E_1 \quad \text{اس طرح}$$

$$0 = E_2 - E_1 \quad \text{یا}$$

$$E_1 = E_2 \quad (4.33)$$

مساوات (4.33) کو (4.32) میں درج کرنے پر

$$E_1 = E_2 = \frac{E}{2} \quad (4.34)$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{کولم کے تھیورم کے روسے}$$

مساوات (4.34) میں E کو درج کرنے پر

$$E_1 = E_2 = \frac{E}{2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{ Newton/Coulomb}$$

یہ مساوات 'q' پر کی حاصل حدت E ہوگی۔

اب ہم فرض کریں گے کہ رقبہ ds موصل سے جدا ہو گیا ہے۔ تب اس کا وقوع مابقی موصل پر کے بھرن کے میدان میں ہوگا۔ اس

مابقی حصہ کی وجہ سے ہونے والی حدت ہوگی۔

$$E_1 = E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (4.35)$$

اگر 'P' کے قریب کے ابتدائی رقبہ 'ds' پر بھرن σds ہو (جب کہ σ بھرن کی کثافت ہے) تو اس کی وجہ سے عمل پیرامیکانی

قوت یا زور ہوگا۔ قوت = بھرن \times برقی حدت اس لیے قوت

$$F = E_2 \times \sigma ds \quad (4.36)$$

$$F = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \times \sigma ds \quad (4.37)$$

$$F = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} ds \text{ newton} \quad (4.38)$$

اس طرح اکائی رقبہ پر باہر کی جانب عمل پیرامیکانی قوت یا سطح پر عمل کرنے والا زور ہوگا۔

$$P = \frac{F}{ds} = \frac{\sigma^2 ds}{2\epsilon_0 ds} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \text{ Newton/m}^2 \quad (4.39)$$

اس لیے میکانی قوت فی اکائی رقبہ یا زور ہوتا ہے۔

$$\left(\because E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \text{ یا } \sigma = \epsilon_0 E \right) \quad \text{کولم کے کلیے کے روسے}$$

σ^2 ہمیشہ مثبت ہی رہتا ہے۔ اس لیے سطح کے ہر حصے پر عمل کرنے والے دباؤ کی سمت باہر کی جانب ہوتی ہے۔ لہذا سطح ہی زور کے تحت رہتی

ہے یا اس پر باہر کی جانب کوئی برقی دباؤ عمل کرتا ہے۔ تب

$$P = \frac{\epsilon_0^2 E^2}{2\epsilon_0} \quad (4.40)$$

$$P = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \quad (4.41)$$

حقیقت میں اگر کسی حصے کی جدائی عمل میں نہ آتی ہو تو بھی اتنی ہی قوت عمل کرتی ہے۔ موصل کے ہر حصے کے لیے یہ درست ہے خواہ موصل ایک مستوی سطح ہو یا ایک کروہی خول ہو یا ٹھوس کرہ کیوں کہ ان میں ہر ایک صورت کے لیے موصل کا ایک بہت ہی چھوٹا رقبہ، مستوی ہی تصور کیا جاسکتا ہے۔ گویا ایک برقائے ہوئے موصل میں اتساع (Dilate) ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر ایک برقیابلیبلہ اس قوت کے زیر اثر متعرج ہوگا۔

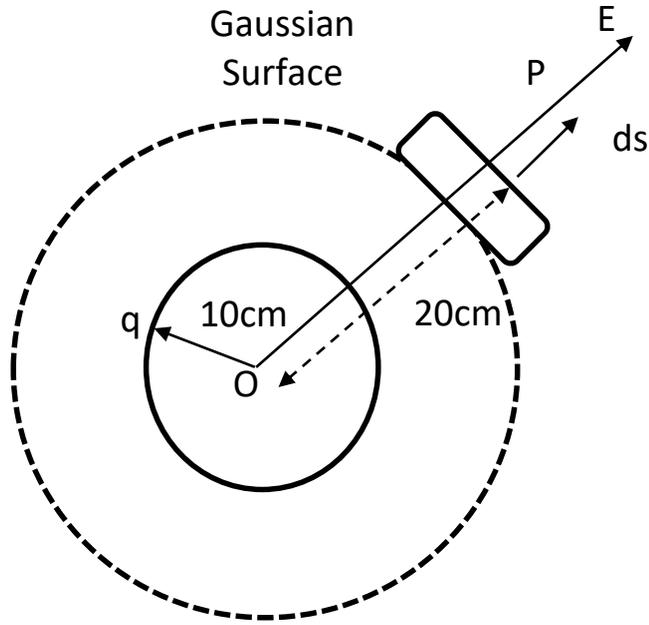
4.7 حل شدہ مثالیں (Solved Problems)

حل شدہ مثال 1

فرض کیجیے کہ برقائے کروہی کی نصف قطر 10cm ہے اور کروہی کے مرکز سے 20cm پر برقی میدان کی حدت

$1.5 \times 10^3 \text{ N/C}$ ہے۔ کروہی کے سطح پر برقی بھرن کو محسوب کیجیے۔

حل: شکل (4.10) میں کروہی کے مرکز سے 20cm پر گاؤسین سطح پر نقطہ P



شکل (4.10)

گاؤسین سطح پر برقی امالہ / نفوذ

$$\Phi = -Ex \quad \text{گاؤسین سطح کے رقب}$$

جہاں ”-“ منفی یہ ظاہر کرتی ہے کہ نفوذ کی سمت کروہی کے سطح کے اندر ہوتی ہے۔

$$\begin{aligned}\Phi &= -E \times 4\pi r^2 \\ &= -1.5 \times 10^{-2} \times 4\pi(0.2)^2\end{aligned}$$

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{گاؤس کلیئے کا استعمال کرنے پر}$$

$$\text{یا } \frac{q}{\epsilon_0} = -(1.5 \times 10^{-2}) \times 4\pi \times (0.2)^2$$

$$q = -(1.5 \times 10^{-2}) \times 4\pi\epsilon_0 \times (0.2)^2$$

$$q = \frac{-(1.5 \times 10^{-2}) \times (0.2)^2}{9 \times 10^9} \Rightarrow q = -6.67 \times 10^{-9} \text{ C}$$

حل شدہ مثال 2

1cm نصف قطر کا یکساں برقائے کروی کے سطح پر برقی بھرن $4 \times 10^{-8} \text{ C}$ اور کھوکھلے برقی بھرن کا نصف قطر 5cm ہو تو

مرکز سے 2cm کے نصف قطری برقی میدان حدت کو معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیجیے کہ 'P' نقطہ پر برقی میدان کو معلوم کریں۔ اب ہم اس نقطہ کے ذریعہ گاؤسین سطح کو کھینچے اور اس سطح پر امالہ ہوگا۔

$$\Phi = \oint E \cdot ds = E \int ds = 4\pi(2 \times 10^{-2})^2 E$$

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{گاؤس تھیورم کو استعمال کرنے پر}$$

$$4\pi \times (2 \times 10^{-2})^2 E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \times (2 \times 10^{-2})^2} = \frac{(9 \times 10^9) \times (4 \times 10^{-8})}{4 \times 10^{-4}} \Rightarrow E = 9 \times 10^5 \text{ N/C}$$

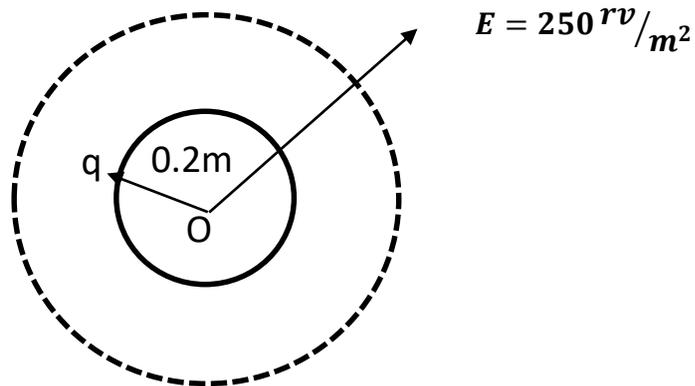
حل شدہ مثال 3

'r' فاصلے پر بہا ہر کے سمت میں برقی میدان کی حدت $E = 250 \text{ rv}/\text{m}^2$ ہے۔ کروی کے مرکز سے 0.2m پر نصف

قطری برقی بھرن کو محسوب کیجیے۔

$$\Phi = \oint E \cdot ds \quad \text{حل: برقی نفوذ}$$

$$\Phi = E_{\text{surface}} \times 4$$



شکل (4.11)

کروی کے سطح پر برقی بھرن q ہو تب
گاؤس کلیئے کو استعمال کرنے پر

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{یا} \quad q = \Phi \epsilon_0$$

$$q = E_{\text{surface}} \times 4\pi a^2 \times \epsilon_0$$

$$q = 4\pi \epsilon_0 E_{\text{surface}} \times (a^2)$$

$$E_{\text{surface}} = 250 \text{ v/m}^2 \quad \text{یہاں}$$

$$q = 250 \times (0.2) = 50 \text{ v/m}^2$$

$$q = \frac{1}{9 \times 10^9} \times 50 \times (0.2)^2 \Rightarrow q = 2.22 \times 10^{-10} \text{ C}$$

حل شدہ مثال 4

3 gm سونے کو ویٹ کر 78 مربع سم کا ایک پتلا ورق بنایا گیا۔ اس کے چھوٹے سے حصے کو کاٹ کر ایک موصل پر رکھ دیا گیا۔

موصل کے بھرن کی اس کثافت کو محسوب کیجیے جس کی وجہ سے سونے کا ورق عین اٹھنے کے قابل ہو جائے۔

حل: سونے کے ورق کو عین اٹھنے کے قابل ہونے کے لیے ضروری ہے کہ اس کا وزن موصل پر عمل پیرا بیرونی کھینچاؤ کے عین برابر ہو۔ یعنی

$$mg = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

$$\sigma^2 = \frac{3 \times 10^{-3} \times 98}{2 \times 78 \times 10^{-4} \times 8.85 \times 10^{-12}}$$

$$\sigma^2 = 2.13 \text{ Coul}^2/\text{m}^4 \Rightarrow \sigma = 1.46 \text{ coul}/\text{m}^2$$

حل شدہ مثال 5

جوہر کے ایک ابتدائی ماڈل میں یہ فرض کیا جاتا تھا کہ جوہر میں بار Ze کا ایک مثبت باردار نقطہ مرکزہ ہوتا ہے، جو نصف قطر R تک

منفی بار کی ہموار کثافت سے گھرا ہوتا ہے۔ جوہر مجموعی طور پر تعدیلی (Neutral) ہوتا ہے۔ اس ماڈل کے لیے، مرکزے سے r فاصلہ پر برقی

میدان کتنا ہوگا؟

حل: جوہر کے اس ماڈل کے نصف قطر R کی ہموار کروی بار تقسیم میں کل منفی بار $-Ze$ ہونا لازمی ہے کیوں کہ جوہر بار $-Ze$ کا مرکزہ + منفی

بار تعدیلی ہے۔ اس سے ہمیں فوراً منفی بار کثافت σ حاصل ہو جاتی ہے، کیوں کہ ضروری ہے کہ

$$\rho = -\frac{3Ze}{4\pi R^3} \quad \text{یا} \quad \frac{4\pi R^r}{3} \rho = 0 - Ze$$

اس لیے نقطہ P پر جو مرکزے سے فاصلہ r ہے، برقی میدان معلوم کرنے کے لیے ہم گاس کا کلیہ استعمال کرتے ہیں۔ بار کی تقسیم

کے کروی تشاکل کی وجہ سے برقی میدان $\vec{E}(\vec{r})$ کی عددی قدر صرف نصف قطری فاصلے پر منحصر ہوگی، چاہے \vec{r} کی کوئی بھی سمت ہو۔ برقی

میدان کی سمت، نصف قطری سمتیہ \vec{r} جو مبدے سے نقطہ P کی جانب ہے کی جانب (یا اس کے مخالف) ہوگی۔ گاس سطح کے بطور ایک کروی

سطح منتخب کرنا بالکل واضح ہے، جس کا مرکزہ مرکزہ ہو۔ ہم دو صورتیں لیتے ہیں۔ یعنی $r < R$ or $r > R$

(i) $r < R$: کروی سطح سے گھرا ہوا برقی فلکس Φ ہے۔

$$\Phi = E(r) \times 4\pi r^2$$

جہاں $E(r)$ پر برقی میدان کی عددی قدر ہے۔

4.8 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- سیدھے لمبے تار پر λ کی خطی کثافت سے برتایا جائے تو اس تار سے r کے فاصلے پر میدان کی حدت $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ ہوتی ہے۔
- وسیع اور مستوی سطح پر σ کی سطح کثافت سے برتایا جائے تو اس سطح کے قریب برقی میدان کی حدت $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ ہوتی ہے۔
- R نصف قطر والے کھوکھلے کروی خول پر σ کی سطحی کثافت سے برتایا جائے تو اس کے مرکزہ سے r کی دوری پر میدان کی حدت $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{R^2}{r}\right)$ ہوتی ہے۔ اس کی سطح پر میدان کی حدت $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ اور خول کے اندر حدت صفر ہوتی ہے۔

4.9 کلیدی الفاظ (Keywords)

- خطی برقی کثافت (Linear Charge Density): ایک تار میں برقی بار یکساں طور پر پھیلا ہوا ہو۔
- سطح برقی کثافت (Surface Charge Density): سطح پر برقی بار پھیلا ہوا ہوتا ہے۔
- حجمی برقی کثافت (Volume Charge Density): حجم میں برقی بار پھیلا ہوا ہوتا ہے۔

4.10 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

4.10.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. برقی نفوذ منفی کب ہوتا ہے۔
 2. کھوکھلے کروی برقائے ہوئے خول کے باہر برقی میدان کی حدت کا ضابطہ۔۔۔۔۔ ہے۔
 3. سیدھے لمبے برقائے تار کے قریب برقی میدان کی حدت کا ضابطہ۔۔۔۔۔ ہے۔
- (a) $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ (b) $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ (c) $E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r}$ (d) $e = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0 r}$
4. کھوکھلے کروی برقائے ہوئے خول کے اندر برقی میدان کی حدت کا ضابطہ۔۔۔۔۔ ہے۔
 5. لاتناہی وسعت والی برقائی سطح کے قریب برقی میدان کی حدت۔۔۔۔۔ ہوتی ہے۔
 6. برقی سکونیات کے گاؤس کے کلیے کو بیان کیجیے۔
- (a) $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ (b) $E = 0$ (c) $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{R^2}{r}\right)$ (d) اس میں سے کوئی بھی نہیں
- (a) $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ (b) $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ (c) $E = \sigma\epsilon_0$ (d) $\sigma = E/\epsilon_0$

7. برقی میدان کی حدت کی SI اکائی لکھیے۔
8. برقائے ہوئے دھاتی خول کے اندر برقی میدان کی حدت۔۔۔ ہوتی ہے۔
- (a) صفر (b) ایک (c) σ (d) اس میں سے کوئی بھی نہیں
9. برقائے موصل کی سطح پر میکانی قوت کی مساوات۔۔۔۔ ہوتی ہے۔
10. برقی نفوذس سے کیا مراد ہے۔

4.10.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. گاؤس کے کلیے کو استعمال کر کے بتائیے کہ برقائے گئے ٹھوس کرومی کے اندر برقی میدان کی حدت صفر ہوتی ہے۔
2. گاؤس کے کلیے کی مدد سے ایک سیدھے لمبے برقائے نالہ کے قریب برقی میدان کی حدت کے لیے ضابطہ اخذ کیجیے۔
3. کیا برقائے موصل کی سطح پر عمل کرنے والی قوت میکانی نوعیت کی ہوتی ہے اور اگر ایسا ہے تو اس کی کیا وجہ ہے۔
4. $P = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$ کیا مساوات سے ظاہر ہونے والے برقی سکونی دباؤ کا ضابطہ صرف کرومی موصلوں کے لیے درست ہے؟
5. کسی نقطہ 'P' پر برقی میدان کی حدت کیا ہوگی جب کہ نقطہ استوائیہ موصل کے اندر ہو۔
6. ایک مستوی برقی چادر کی صورت میں کیا E کا انحصار نقطہ 'P' کو محصور کرنے والی سطح کی نوعیت پر ہوتا ہے؟ سمجھائیے۔

4.10.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. گاؤس کے کلیے کی مدد سے ایک سیدھے لمبے برقائے تار کے قریب برقی میدان کی حدت کے لیے ضابطہ اخذ کیجیے۔ (اس کے لیے فرض کیجیے کہ میدان کی حدت تار کے عموداً اور تار سے مشاہدے کے نقطے کے فاصلے پر منحصر ہوتی ہے)۔
2. گاؤس کے کلیے کی مدد سے ہموار برقائی وسیع مستوی سطح کے قریب میدان کی حدت کے لیے ضابطہ اخذ کیجیے۔
3. گاؤس کے کلیے کی مدد سے ہموار برقائے گئے کھوکھلے کرومی خول کے لیے برقی میدان کی حدت کے لیے ضابطہ اخذ کیجیے جب کہ مشاہدے کا نقطہ (i) خول کے باہر ہو (ii) خول کی سطح پر ہو (iii) خول کے اندر ہو۔
4. ایک مثبت بھرن والی لاتناہی برقی چادر سے کسی فاصلہ 'r' پر برقی میدان کی حدت کے لیے ایک ضابطہ اخذ کیجیے۔
5. گاؤس کے کلیے کو استعمال کرتے ہوئے یہ ثابت کیجیے کہ ایک لاتناہی خطی بھرن سے کسی فاصلے R پر برقی میدان کی حدت E ہوتی ہے۔ $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$
6. ایک برقائے موصل کی سطح کے اکائی رقبہ پر عمل کرنے والے میکانی قوت کے لیے ضابطہ اخذ کیجیے۔

4.10.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. ایک برقائے کرومی خول کا نصف قطر 0.25m اور اس سطح پر برقی بھرن 0.2 ماٹیکرو کولوم ہو تو برقی میدان کی حدت معلوم کیجیے۔
- i. کرومی خول کے اندر ii. کرومی خول کے باہر iii. کرومی خول کے مرکز سے 3.0 میٹر پر

[Ans: (i) کر دی خول کے اندر صفر (ii) 2.88×10^4 N/C (iii) 200 N/C]

$$\left[\text{Hints: ii} \right] E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\epsilon}{R^2} = (9 \times 10^9) \times \frac{0.2 \times 10^{-6}}{(0.25)^2}$$

$$\text{(iii)} E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q}{r^2} = (9 \times 10^9) \times \frac{0.2 \times 10^{-6}}{(300)^2}$$

2. قطر کے کر دی کی برقی سطح کثافت +8 نینانو کولوم 2M ہے۔ اس کی سطح سے 2m کے فاصلے پر میدان کی حدت کتنی ہوگی۔

(جواب 2.05 نیوٹن / کولوم)

3. فرض کیجیے کہ ایک سطح پر $S = 10\text{J}$ پر برقی میدان کی حدت $E = 2i + 4j + 7k$ ہے۔ اس سطح کے ذریعہ برقی نفوذ کو محسوب

(جواب 40 units)

کیجیے۔

$$[\text{Hints: } \phi = \sum E \cdot ds = E \cdot S = 2i + 4j + 7k (10j) = 40 \text{units}]$$

4.11 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Aziz, W A, and Mashood Ahmad. Millenium Science Dictionary, Physics - Chemistry & Mathematics, English - English - Urdu. Mumbai: Saifee Book Agency, 2003.
2. Bleaney, B I, and B Bleaney. Electricity and Magnetism. Oxford: Oxford University Press, 2013.
3. Duffin, W J. Electricity and Magnetism. Cottingham: W.J. Duffin, 2001.
4. Gaur, R.K. & Gupta, S.L. Engineering Physics. Dhanpat Rai Publication.
5. Peck, Edson R. Electricity and Magnetism. , 2013.
6. Plonsey, R. & Collin, R.E. Principles and Application of Electromagnetic Field. Tata Mc Graw Hill Publication. New Delhi.
7. Purcell, Edward M, and David J. Morin. Electricity and Magnetism. , 2013.
8. Resnic, R. & Halliday, D. Physics Part-I & Part-II. Wiley Eastern Pvt. Ltd. New Delhi.
9. Resnick, Robert, David Halliday, and Kenneth S. Krane. Physics. New York: Wiley, 2002.

اکائی 5۔ برقی قوہ

(Electric Potential)

اکائی کے اجزا

تمہید	5.0
مقاصد	5.1
برقی بار کی بنیادی خاصیتیں	5.2
برقی قوہ	5.3
بقائے برقی میدان	5.4
سمتی میدان کا خطی تکملہ	5.5
برقی سکونی میدان کا خطی تکملہ	5.6
بند راستہ پر کسی سمتی میدان کا خطی تکملہ	5.7
بند راستے پر برقی میدان کا خطی تکملہ صفر ہوتا ہے	5.8
قوہ ورتفاوت قوہ	5.9
نقطوی بار کی وجہ سے قوہ	5.10
جب بار مبداء پر ہوں	5.10.1
جب بار کسی اختیاری نقطہ پر ہو	5.10.2
برقی قوہ بوجہ مسلسل بار کی تقسیم کے	5.11
ہم قوہ سطح	5.12
کسی برقی میدان میں موجود دو نقاط کے درمیان برقی تفاوت قوہ	5.13
حل شدہ مثالیں	5.14
اکتسابی نتائج	5.15
کلیدی الفاظ	5.16

نمونہ امتحانی سوالات	5.17
معروضی جوابات کے حامل سوالات	5.17.1
مختصر جوابات کے حامل سوالات	5.17.2
طویل جوابات کے حامل سوالات	5.17.3
حل شدہ جوابات کے حامل سوالات	5.17.4
مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں	5.18

5.0 تمہید (Introduction)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد برقی سکونی قوتہ (Electrostatic Potential) کے تصور کو سمجھنے میں آسانی ہوگی اور اس کو استعمال کرتے ہوئے ایک نقطوی بار، برقی باروں کے نظام اور ہم قوتہ سطحیں سے برقی قوتہ کو کس طرح معلوم کیا جاسکتا ہے سمجھیں گیں۔ ایک طالب علم بناء کسی کی مدد کے وہ آسانی ان چیزوں کو سمجھنے میں دلچسپی محسوس کرے گا۔

دوساکن برقی باروں کے درمیان کولمب قوت بھی ایک بقائی قوت ہے کیوں کہ برقی قوت اور مادی کششی قوت فاصلے کے مربع کے مقلوب پر منحصر ہیں اور صرف تناسبی مستقلوں کی قدر کے لحاظ سے ہی مختلف ہیں۔ تجاذبی کشش قانون میں شامل کمیتیں، کولمب کے کلیے میں باروں سے تبدیل ہو جاتی ہیں۔ اس لیے ایک تجاذبی کشش میدان میں ایک کمیت کی وضعی توانائی کی طرح، ہم ایک برقی میدان میں ایک بار کی برق، سکونی وضعی توانائی کی تعریف کر سکتے ہیں۔

5.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں ہم برقی قوتہ (Electric Potential) الکٹریک پوٹینشل کے تصور کو سمجھیں گیں۔ اور اس کو استعمال کرتے ہوئے ایک نقطوی بار (Point Charge) کی وجہ سے برقی قوتہ کو معلوم کریں گیں۔

اس یونٹ کا مطالعہ کرنے کے بعد ہم برقی باروں (System of Charges) کے نظام کی وجہ سے بننے والے برقی قوتہ کو معلوم کر سکیں گیں اور ہم قوتہ سطحیں (Equipotential Surfaces) کو بھی سمجھا سکیں گیں۔

5.2 برقی بار کی بنیادی خاصیتیں (Basic Characteristics of Electric Charge)

ہمیں اس بات کا علم ہی کہ برقی بار دو قسم کے ہوتے ہیں یعنی مثبت اور منفی اور ان کے اثر ایک دوسرے کو منسوخ (Cancel) کرنے کی سمت میں ہوتے ہیں۔ برقی بار کی کچھ اور خاصیتیں مندرجہ ذیل ہیں۔

i. برقی باروں کی جمعیت (Additive of Charges)

برقی بار کی کوئی معیاری تعریف نہیں ہے۔ اگر ایک نظام دو نقطی برقی باروں q_1 اور q_2 پر مشتمل ہو تو نظام کا کل برقی بار q_1 اور q_2 کو سادہ الجبرائی طریقہ سے جمع کر کے حاصل کیا جاتا ہے۔ یعنی برقی بار حقیقی اعداد کی طرح جمع ہوتے ہیں اور وہ میزانیہ (Scalars) ہوتے ہیں یعنی یہ مقدار تو رکھتے ہیں پر کوئی خاص سمت نہیں رکھتے۔ اس طرح اگر ایک نظام میں n برقی بار ہوں جو $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ تک ہوں تو اس نظام کا جملہ بار $(q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n)$ ہوگا اس بار کی عددی قدر تو ہوتی ہے لیکن کوئی سمت نہیں ہوتی۔ ایک جسم کی کمیت ہمیشہ مثبت ہوتی ہے جب کہ بار مثبت بھی ہو سکتا ہے اور منفی بھی۔

ii. بقائے برقی بار (Charge is Conserved)

برقی باروں کو اگر ہم ذرات کی شکل میں تصور کریں تو بار کی بقا کے تصور کو سمجھنے میں آسانی ہوتی ہے۔ جب ہم دو اجسام کو رگڑتے ہیں تو ایک جسم بار کو جتنا حاصل کرتا ہے، دوسرا جسم بار کو اتنا ہی کھوتا ہے، ایک منفرد (Isolated) نظام کے اندر جو کئی برقی بار دار اجسام پر مشتمل ہوتا ہے، ان اجسام کے باہم عمل کے نتیجے میں بار اپنے آپ کو دوبارہ تقسیم کر سکتے ہیں تو یہ معلوم ہوتا ہے کہ منفرد نظام کے کل بار کی ہمیشہ بقا ہوتی ہے۔

ایک منفرد نظام کے کل بار میں کوئی بار تخلیق کرنا یا کسی بار کو فنا کرنا ممکن نہیں ہے حالانکہ کسی عمل کے دوران بار رکھنے والے ذرات تخلیق یا فنا ہو سکتے ہیں کبھی کبھی قدرت بار دار ذرات کی تخلیق کرتی ہے۔ ایک نیوٹران ایک پروٹان اور ایک الیکٹران میں بدل جاتا ہے۔ اس طرح تخلیق پائے پروٹان اور الیکٹران کے بار مساوی اور مخالف ہوتے ہیں اور ان کے تخلیق ہونے سے پہلے اور تخلیق ہونے کے بعد بھی کل بار صفر ہوتا ہے۔

iii. برقی بار کی کوانٹم سازی (Quantization of Charge)

تجربہ سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ تمام آزاد بار، ہمیشہ بار کی ایک بنیادی اکائی کے صحیح ضعف (Integral Multiples) ہوتے ہیں جسے q ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ کسی جسم پر بار ہمیشہ اس طرح ہوتا ہے۔ $q = ne$ جہاں n ہمیشہ ایک صحیح عدد (Integer) ہوتا ہے۔ بار کی بنیادی اکائی وہ بار ہے جو ایک الیکٹران یا پروٹان پر ہوتا ہے۔ الیکٹران کے بار کو منفی مانا جاتا ہے اور پروٹان کے بار کو مثبت مانا جاتا ہے اور اس لیے الیکٹران کے بارے کو $-e$ لکھا جاتا ہے اور پروٹان کے بار کو $+e$ لکھا جاتا ہے۔ برقی بار ہمیشہ e کا صحیح ضعف ہوتا ہے۔ بار کی کوانٹم سازی کہلاتی ہے طبیعیات میں ایسی کئی صورتیں سامنے آتی ہیں جہاں کچھ طبعی مقداریں کوانٹم سازی شدہ ہوتی ہیں۔ بار کی کوانٹم سازی سب سے پہلے انگریز ماہر تجربات فیراڈے کے برقی پاشیدگی (Electrolysis) کے تجرباتی کلیات نے تجویز کی تھی۔ 1912ء میں ملیکن (Millikan's) نے اسی کا تجربہ کے ذریعہ مظاہرہ کیا۔

اکائیوں کے بین الاقوامی نظام (SI نظام) میں بار کی اکائی کولمب کہلاتی ہے اور اسے علامت C سے ظاہر کرتے ہیں۔ ایک کولمب وہ بار ہے جو ایک تار سے ایک سکند (1 sec) میں بہتا ہے جب کہ برقی رو ایک ایمپیر (IA) ہو۔ اس نظام میں بار کی بنیادی اکائی کی قدر $e = 1.602 \times 10^{-19} c$ ہوتی ہے۔

5.3 برقی قوتہ (Electric Potential)

تحلیلی سمتیات کے مطابق سمتی میدان کی دو اہم خصوصیات ہوتی ہیں، بہاؤ اور گھماؤ یعنی جس کا مطلب ہیکہ سمتی میدان میں علی الترتیب بہاؤ اور گردش ہوتے رہتی ہے۔

ایسا سمتی میدان جس کے لئے خطی تکملہ صرف اختتامی نقطہ پر منحصر ہوتا ہے اور حقیقی راستہ پر منحصر نہیں ہوتا ہے۔ بقائے میدان کھلاتا ہے۔ دوسرے لفظوں میں کسی بند راستہ کے لیے بقائے میدان کا تکملہ صفر ہوتا ہے۔

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0$$

5.4 بقائے برقی میدان (Electric field is Conservatives)

برقی میدان بھی بقائے میدان کی ایک مثال ہے کیوں کہ یہ سمتی تقابل (ϕ) کا منفی تدریجی فرق (گرڈینٹ) ہوتا ہے۔

$$\vec{E} = -\text{Grad}\phi = -\vec{\nabla}\phi$$

برقی میدان کا خمیدہ ہونا curl کو اس طرح لکھا جاتا ہے۔

$$\text{Curl}\vec{E} = -\text{CurlGrad}\phi = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = 0$$

بقائے برقی میدان کے لیے حسب ذیل شرائط ہیں۔

i. ایسا سمتی میدان جس کے لیے خطی تکملہ صرف اختتامی نقطہ پر منحصر ہوتا ہے اور حقیقی راستہ پر منحصر نہیں ہوتا ہے۔ بقائے میدان کھلاتا ہے۔

ii. ایک بند راستے پر بقائے میدان کا خطی تکملہ صفر ہوتا ہے۔ اگر \vec{A} ایک بقائے میدان ہے تب $\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0$

iii. بقائے میدان کو ہمیشہ سمتی میدان کے تدریجی فرق (اتار چڑھاؤ کا درجہ) Gradient کے طور پر کو ظاہر کیا جاتا ہے۔

اگر \vec{A} ایک بقائے میدان ہو اور ϕ اس سے متعلق سمتی میدان ہو تب $\vec{A} = \vec{\nabla}\phi = \text{Grad}\phi$

iv. بقائے میدان کا خمیدہ Curl صفر ہوتا ہے۔ اگر \vec{A} ایک بقائے میدان ہو تو $\text{Curl}\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$

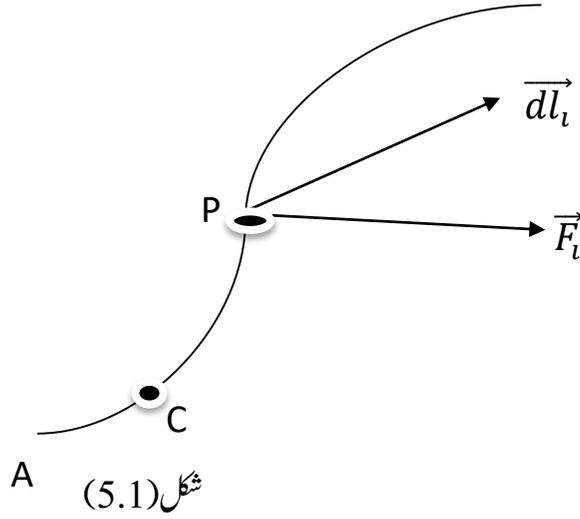
5.5 سمتی میدان کا خطی تکملہ (Line Integral of a Vector Field)

ایک سمتی میدان F میں دو نقاط A اور B کے درمیان راستہ ACB پر غور کریں۔ اس راستے کو بہت سارے چھوٹے چھوٹے

ٹکڑے $dl_1, dl_2, dl_3, \dots, dl_n$ میں اس طرح تقسیم کرتے ہیں کہ ہر ایک ٹکڑے سے متعلق سمتی میدان $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ بھی ہوتا ہے۔

ہر ایک ٹکڑا یا جز $d\vec{l}$ کا ایک سمتیہ ہوتا ہے جس کی جسامت یا مقدار (Magnitudes) dl اور سمت A سے B جانے والے

راستے کے متوازی ہوتا ہے۔



غیر سمتی مقداروں کے حاصل ضرب (Scalar Product) کا مجموعہ

$$\vec{F}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{l}_2 + \vec{F}_3 \cdot d\vec{l}_3 + \dots + \vec{F}_n \cdot d\vec{l}_n = \sum_{i=0}^n \vec{F}_i \cdot d\vec{l}_i \quad (5.1)$$

تمام اجزاء کو حد $\text{Limit } d\vec{l}_i \rightarrow 0$ کے اندر ہوں ان کو سمتی میدان \vec{F} کا خطی تکملہ (line integral) کے نام سے جانا جاتا ہے۔

$$\therefore \text{Line Integral of a vector field} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

5.6 برقی سکونی میدان کا خطی تکملہ (Line Integral of an Electrostatic field)

فرض کریں کہ برقی میدان ایک سمتی میدان ہے جس میں ایک بہت چھوٹا سا امتحانی بار (امتحانی بار (Test Charge)) q_0 کسی نقطہ P پر رکھا ہے۔

جو کہ ایک قوت کو محسوس کرتا ہے۔

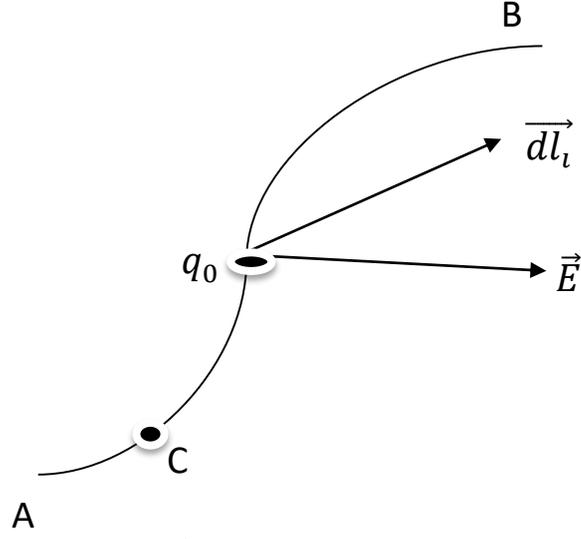
$$\vec{F} = q_0 \vec{E} \quad (5.2)$$

تب امتحانی بار (Test Charge) ایک چھوٹے سے سمتیہ فاصلہ $d\vec{l}$ کو طے کرتا ہے تب اس میدان کے ذریعہ کیا گیا کام ہوگا۔

$$d\omega = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (5.3)$$

امتحانی بار (Test Charge) کے A سے B تک حرکت کرنے میں کیا گیا جملہ کام ہوگا

$$\omega = \int_A^B d\omega = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (5.4)$$



شکل (5.2)

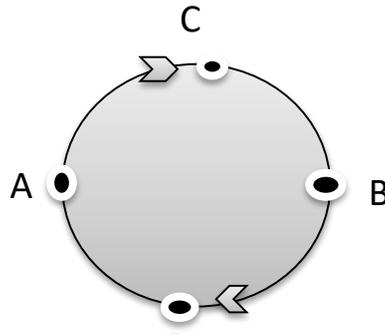
میدان کے ذریعہ فی اکائی بار کیا گیا کام ہوگا

$$= \frac{W}{q_0} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (5.5)$$

کسی اکائی مثبت بار کا میدان کے زیر اثر کسی نقطہ A سے B کی تک حرکت کرتے ہوئے کیا گیا کام برقی سکونی میدان کے خطی تکملہ A سے B کے برابر ہوتا ہے۔

5.7 بند راستہ پر کسی سمتی میدان کا خطی تکملہ

(Line Integral of a Vector Field over a closed path)



شکل (5.3)

کسی میدان کے بقاء کو غیر سمتی میدان کے خمیدہ ہونے (Gradient) کے طور پر بھی ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

$$\vec{\nabla} \phi = \text{Grad} \phi = \vec{A}$$

جہاں ϕ ایک غیر سمتی میدان ہے اور \vec{A} ایک بقاء میدان ہے۔

کسی پوائنٹ A اور B کے درمیان سمتی میدان \vec{A} کا خطی تکملہ $\int_A^B \vec{A} \cdot d\vec{r}$ ہوگا۔ جہاں $d\vec{r}$ فاصلہ کا چھوٹا سا سمتی جز ہے۔

$$\begin{aligned} \therefore \int_A^B \vec{A} \cdot d\vec{r} &= \int_A^B \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r} = \int_A^B d\phi \\ \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r} &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \hat{k} \right) (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi}{\partial z} dz = d\phi \end{aligned}$$

$$\therefore \int_A^B \hat{A} \cdot d\vec{r} = \int_A^B d\phi = \phi_B - \phi_A \quad (5.6)$$

جہاں ϕ غیر سمتی تفاعل کی قدر نقطہ B پر ϕ_B اور نقطہ A پر ϕ_A ہوگی۔

مساوات (5.6) سے ظاہر ہوتا ہے کہ کسی بقائے سمتی میدان \hat{A} کا خطی تکملہ غیر سمتی میدان کے مقام A اور B کے ابتدائی و انتہائی مقام پر منحصر ہوتا ہے۔ A اور B کے راستے پر منحصر نہیں ہوتا ہے۔

شکل (5.3) میں دیئے ہوئے بند راستہ (closed path) ACBDA پر غور کریں۔ ACBDA کے گرد خطی تکملہ راستہ ABC کے گرد نقطہ A سے B کے خطی تکملہ اور راستہ BDA کے گرد نقطہ A سے D کے خطی تکملہ کے مجموعہ برابر ہوگا۔

$$\therefore \oint_{ACBDA} \hat{A} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \hat{A} \cdot d\vec{r} + \int_B^A \hat{A} \cdot d\vec{r} \quad (5.7)$$

تعیین کرنے پر $\int_A^B \hat{A} \cdot d\vec{r} = - \int_B^A \hat{A} \cdot d\vec{r}$

$$\int_{ACBDA} \hat{A} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \hat{A} \cdot d\vec{r} - \int_A^B \hat{A} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (5.8)$$

یعنی کسی بند راستے پر کسی سمتی میدان کا خطی تکملہ صفر ہوتا ہے۔

5.8 بند راستے پر برقی میدان کا خطی تکملہ صفر ہوتا ہے

(Line Integral of an electric field over a closed path is Zero)

کسی اکائی مثبت بار کا کسی نقطہ A سے B تک کیا گیا کام یہ ہوگا

$$W = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (5.9)$$

جہاں dr ایک اس راستے کا چھوٹا سا ٹکڑا یا جز ہے۔

کسی برقی میدان میں راستہ ACB پر کسی اکائی مثبت چارج کو نقطہ A سے B تک جانے کے لیے کیا گیا کام یہ ہوگا

$$W_1 = \int_A^B \hat{E} \cdot \widehat{dr} \quad (5.10)$$

ٹھیک اس طرح سے راستہ BDA پر کسی اکائی مثبت بار کو نقاط B سے A تک جانے کے لیے برقی میدان کے خلاف کیا گیا کام یہ ہوگا۔

$$W_2 = \int_B^A \hat{E} \cdot \widehat{dr} = - \int_A^B \hat{E} \cdot \widehat{dr} \quad (5.11)$$

کسی بند راستے ACBDA پر کسی اکائی مثبت بار کے ذریعہ راستہ A سے B تک اور پھر واپس A تک آنے میں کیا گیا کام یہ ہوگا

$$\oint_A^B \hat{E} \cdot \widehat{dr} = \int_A^B \hat{E} \cdot \widehat{dr} - \int_A^B \hat{E} \cdot \widehat{dr} = 0 \quad (5.12)$$

یعنی بند راستے پر برقی میدان کا خطی تکملہ صفر ہوتا ہے۔

دوسرے لفظوں میں برقی سکونی قوت Electrostatics force ایک بقائی قوت ہے۔ اس لیے ایک بند راستے پر کل کام

صفر ہے۔ یہاں پر یہ خیال رکھنا ہے کہ برقی میدان سمتیہ ہوتا ہے۔ جس کا curl انفرج صفر ہوتا ہے۔ یعنی $\nabla \times \hat{E} = 0$

5.9 قوت اور تفاوت قوت (Potential and Potential difference)

کسی نقطہ پر قوت: کسی برقی میدان کے کسی نقطہ پر لامتناہی فاصلہ سے برقی قوت کے مخالف سمت میں لائے گئے اکائی مثبت بار کو لانے کے لیے کیا گیا کام کو کسی نقطہ پر برقی قوت کہا جاتا ہے۔

تفاوت قوت (Potential Difference)

کسی برقی میدان میں کسی اکائی مثبت بار کو نقطہ A سے B تک لے جانے کے لیے کیے گئے کام کو برقی تفاوت قوت کہا جاتا ہے۔ دوسرے الفاظ میں اسے A سے B تک برقی میدان کے خطی تکملہ کے منفی کے طور پر بیان کہا جاسکتا ہے۔

دونوں نقطوں کے درمیان برقی قوت (Potential difference between two points)

کسی امتحانی بار (Test Charge) q_0 کو ایک چھوٹے سے سمتیہ دوری یا فاصلہ \vec{dr} کو پورا کرنے کے لیے برقی سکونی

$$d\omega = q_0 \vec{E} \cdot \widehat{dr} \quad \text{میدان } \vec{E} \text{ کا کیا گیا کام ہوگا}$$

کسی امتحانی بار (Test Charge) q_0 کو ایک چھوٹے سے سمتیہ دوری یا فاصلہ \vec{dr} کو پورا کرنے کے لیے برقی سکونی میدان \vec{E} کے خلاف

$$d\omega = -q_0 \hat{E} \cdot \widehat{dr} \quad \text{کیا گیا کام ہوگا}$$

یہ کام امتحانی بار (Test Charge) q_0 میں توانائی بالقوت کی شکل میں محفوظ ہو جائے گی۔

$$dU = -q_0 \hat{E} \cdot \widehat{dr} \quad (5.13)$$

اور جیسا کہ ہمیں معلوم ہے کہ برقی سکونی میدان بقائی میدان ہے اس لیے توانائی بالقوة صرف ابتدا اور انتہا کے نقطہ پر منحصر کرے گی۔
اگر بار ایک محدود فاصلہ پر برقی میدان کے خلاف نقطہ A سے B کی طرف حرکت کرتا ہے تب

$$U_B - U_A = - \int_A^B q_0 \hat{E} \cdot \widehat{dr}$$

برقی میدان کی خصوصیت کو کسی سمتی مقدار کے ذریعہ بیان کیا جاسکتا ہے۔ جو کہ کسی مثبت چارج کے کسی دو نقاط کے درمیان حرکت کرنے کے لیے کیے گئے کام کے برابر ہوتا ہے جسے دو نقاط کے درمیان کا تفاوت قوت کہا جاتا ہے۔
دو نقاط کے درمیان کسی چھوٹے سے سمتی دوری یا فاصلہ dr کے درمیان تفاوت قوت ہوگا۔

$$dv = \frac{-dU}{q_0} = -\hat{E} \cdot \widehat{dr} \quad (5.14)$$

دو نقطے A اور B کے لیے جو کہ ایک متناہی فاصلہ پر ہے۔

$$V_B - V_A = \frac{U_B - U_A}{q_1} = - \int_A^B \hat{E} \cdot \widehat{dr} \quad (5.15)$$

دو نقطے A اور B کے درمیان برقی میدان کا خطی تکملہ کہا جاتا ہے۔ مساوات میں موجود منفی نشانی سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ امتحانی بار (Test Charge) میں محفوظ توانائی بالقوة برقی میدان کے خلاف کیے گئے کام کے وجہ سے ہے۔

برقیقوتہ کی اکائیاں (Units of Electric Potential) 'V'

چھوٹا سا سمتی فاصلہ dr رکھنے والے دو نقاط کے درمیان برقیقوتہ ہوگا۔ $dv = \frac{-du}{q_0}$
جہاں du امتحانی بار (Test Charge) میں محفوظ برقیقوتہ ہے۔

$$\begin{aligned} \frac{U \text{ کی اکائی}}{q_0 \text{ کی اکائی}} &= \text{قوت یا تفاوت قوتہ کی اکائی} \\ &= \frac{\text{erg}}{\text{Stat.Coulomb}} \text{ in CGS unit} \\ &= \frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}} \text{ in S.I Unit - Volt} \end{aligned}$$

بین القوامی نظام میں جول فی اکائی کولمب۔ ولٹ

Stat Volt: برقیقوتہ کی CGS اکائی Stat-Volt ہے۔ کسی برقی قوت کے خلاف اکائی مثبت بار کو لا متناہی سے کسی نقطہ پر لانے کے لیے کیے گئے ایک erg کام کو اس نقطہ پر ایک Stat Volt برقیقوتہ کہا جاتا ہے۔

Volt: قوتہ کی بین الاقوامی نظام S.I میں اکائی Volt ہوتی ہے۔

کسی برقی قوت کے خلاف اکائی Coulomb مثبت بار کو لا متناہی سے کسی نقطہ پر لانے کے لیے کیے گئے ایک Joule کام کو اس نقطہ پر ایک Volt کی برقیقوتہ کہا جاتا ہے۔

$$1\text{Volt} = \frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}} = \frac{10^7 \text{erg}}{3 \times 10^9 \text{statcoulomb}} = \frac{1}{300} \text{StatVolt}$$

i. e. $1\text{Stat Volt} = 300\text{volts}$

5.10 نقطوی بار کی وجہ سے قوہ (Electric Potential due to Point Charge)

سب سے پہلے ہم کسی نقطوی بار کے وجہ سے بننے والے قوہ کو معلوم کریں گے جو کہ مبداء پر اور کسی نقطہ کے درمیان ہوگا۔ پھر اس نتیجہ کو مسلسل بار کی تقسیم کے لیے وسعت دیں گے۔

5.10.1 جب بار مبداء پر ہوں

کسی برقی میدان میں اکائی مثبت بار کو لا متناہی سے کسی نقطہ پر لانے کے لیے کیے گئے کام کو اس نقطہ کا برقی قوہ کہا جاتا ہے۔

$$V = \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (5.16)$$

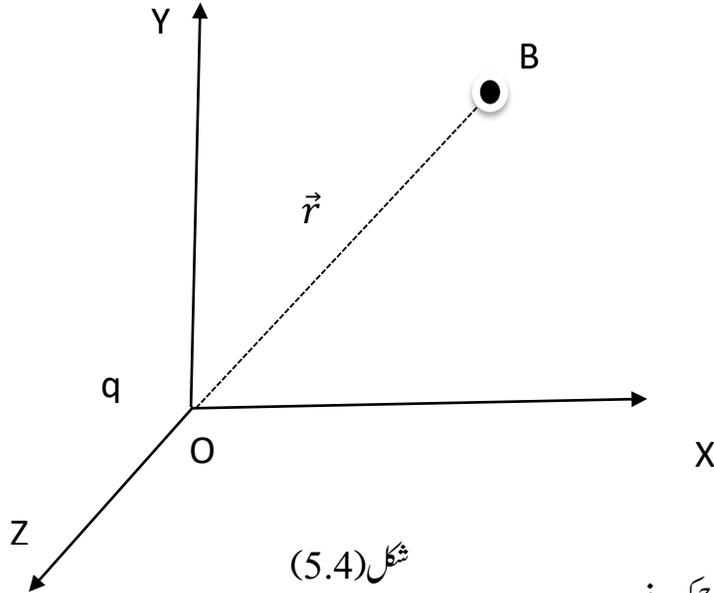
جہاں \vec{r} ایک سمتی مقام (Position Vector) ہے اور \vec{E} برقی میدان ہے۔ اور غور کریں کہ ایک نقطوی بار q مبداء پر ہے

تب نقطہ B پر برقی قوہ ہوگا۔

$$V_B = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (5.17)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r}|^3} \vec{r}$$

مبداء پر بار q کے وجہ سے نقطہ B پر برقی میدان \vec{r}



مساوات (5.17) میں درج کرنے پر

$$V_B = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{\hat{r} \cdot d\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{r dr}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} \quad (5.18)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_{\infty}^r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

کسی نقطوی بار کے ذریعہ فاصلہ r پر برقیقوہ $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$

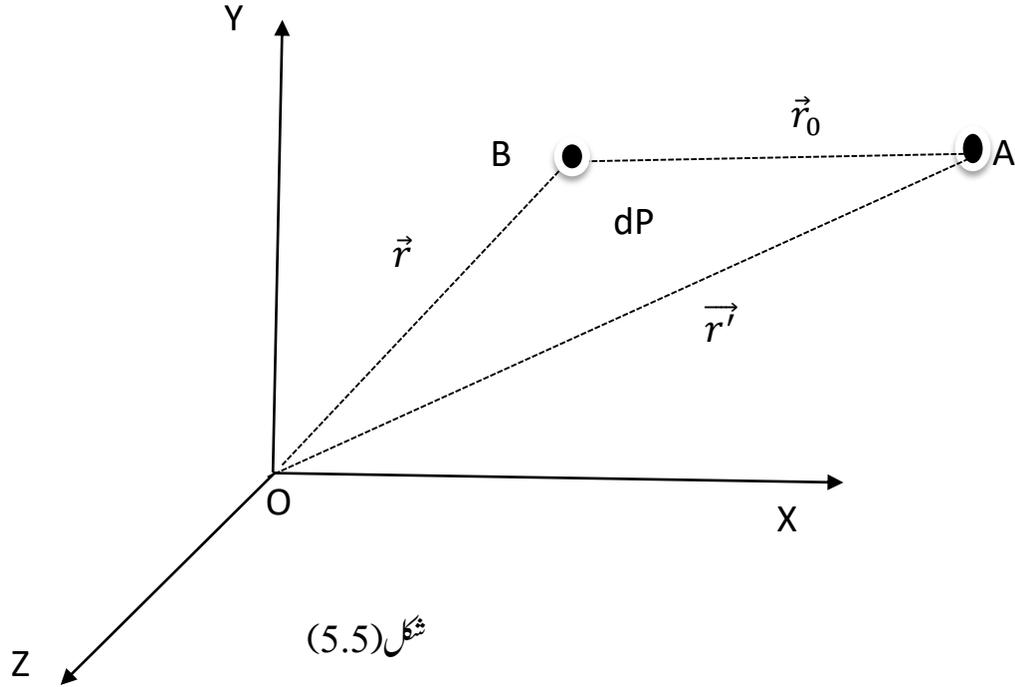
5.10.2 جب بار کسی اختیاری نقطہ پر ہو (When a charge is located at an arbitrary point)

فرض کریں کہ بار q کسی position مقام سمتیہ \vec{r}^1 پر مقیم ہے۔

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$$

جہاں \vec{r}_0 نقطہ A سے B تک کی سمتیہ دوری یا فاصلہ ہے۔

$$|\vec{r}_0| = |\vec{r} - \vec{r}^1|$$



نقطوی بار q کے وجہ سے نقطہ B پر برقیقوہ

$$V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}^1|}$$

جہاں \vec{r} نقطہ مشاہدہ کا position مقام سمتیہ ہے اور \vec{r}^1 بار q کا position مقام سمتیہ ہے۔

5.11 برقی قوہ بوجہ مسلسل بار کی تقسیم کے

(Electric potential due to continuous charge distributors)

سبب:

برقی قوہ ایک غیر سمتی مقدار ہے۔ اور متعدد نقطوی بار $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ جو مختلف مقام سمتیہ $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ پر مقیم ہیں۔ اس طرح سے \vec{r} پر جملہ برقی قوہ یہ ہوگا۔

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|} + \dots + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_m}{|\vec{r}-\vec{r}_m|}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

مشاہدہ کی بنا پر بار q_1 کے وجہ سے قوہ $V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}$

Similarly $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|} = V_2$ and So on.

$$\therefore V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n = \sum_{i=1}^n V_i$$

مسلسل بار کی تقسیم (Continuous Charge Distributions)

مسلسل بار کی تقسیم (Continuous Charge Distributions) کی صورت میں q کو ابتدائی بار dq سے تبدیل کیا

جاتا ہے اور مبداء سے اس کی سمتی فاصلہ یا دوری \vec{r}_2 لینے پر

$$\therefore V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dl}{|\vec{r}-\vec{r}_2|} \quad \text{خط بار کی تقسیم کے لیے}$$

جہاں λ is charge per unit length ہے (Where λ is charge per unit length)

سطح بار کی تقسیم کے لیے (For surface charge distributions.)

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma ds}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}$$

حجم بار کی تقسیم کے لیے سگمانی اکائی (σ is charge per unit) سطحی رقبہ ہے۔

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dv}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}$$

ρ بارنی اکائی حجم ہے۔

5.12 ہم قوہ سطح (کوئی ایسی سطح جس کے تمام نقطے یکساں قوہ رکھتے ہوں) (Equipotential surface)

ایسی سطح جس کے ہر ایک نقطہ پر برقی قوہ ایک جیسا ہوتا ہے۔ اسے ہم قوہ سطح کہتے ہیں۔ نقطوی بار کے گرد ہم قوہ سطح ہم مرکزی کروں

پر مشتمل رہتی ہے اور کروں بار کے گرد بھی ہم قوہ سطح ہم مرکزی کروں پر مشتمل رہتی ہے۔ یہ ہموار برقی میدان کے علی القوائم ہوتی ہے۔

ہم قوہ سطح پر برقی میدان کا خطی تکملہ صفر ہوتا ہے:

(Line integral of electric field on equipotential surface is zero)

کسی برقی میدان میں کسی دو نقطہ A اور B کے درمیان تفاوت قوہ ہوگا۔

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (5.19)$$

ہم قوہ سطح کے لیے $V_B = V_A$ or $V_B - V_A = 0$

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (5.20)$$

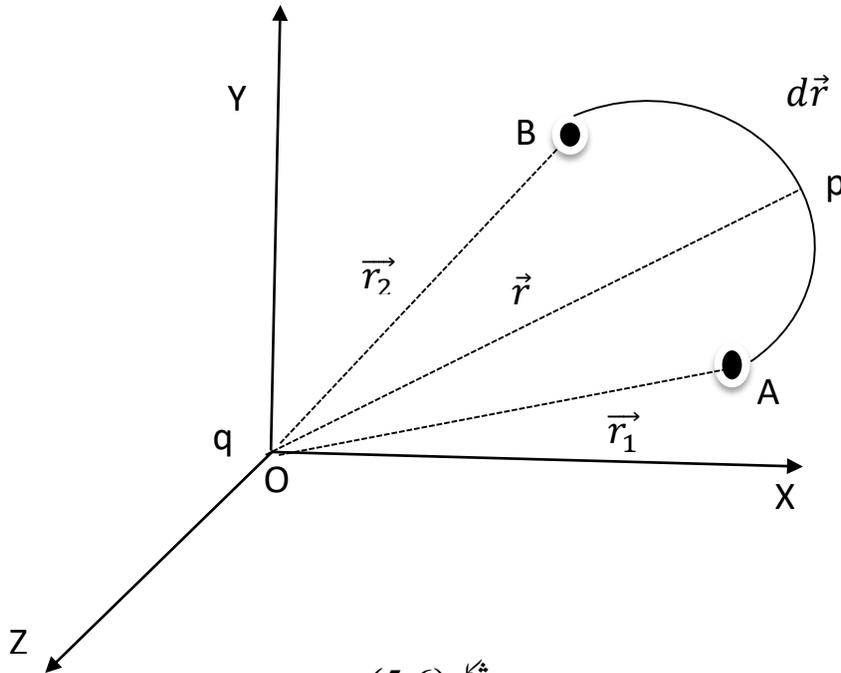
لہذا ہم قوہ سطح پر برقی میدان میں دو نقاط کا خطی تکملہ صفر ہوتا ہے۔

5.13 کسی برقی میدان میں موجود دو نقاط کے درمیان برقی تفاوت قوہ

(Electric potential difference between two points)

برقی میدان میں موجود دو نقاط A اور B میں برقی قوہ کا فرق ہوگا۔

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (5.21)$$



جہاں $\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$ برقی میدان کے دو نقاط کے درمیان کا خطی تکملہ ہے۔

اگر کوئی بار q مبدا پر ہو اور نقطہ A اور B ان کی radial دوری \vec{r}_1 اور \vec{r}_2 ہے۔

q جو مبدا پر ہے اور ایک نقطہ r ہے۔ تب نقطہ P پر موجود برقی میدان کیا ہوگا

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r}|^3} \vec{r} \quad (5.22)$$

مساوات (5.21) اور (5.22) سے

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{|\vec{r}|^3} \vec{r} d\vec{r} \quad (5.23)$$

$$\text{Now, } \vec{r} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} d(r)^2 = \frac{1}{2} 2r dr = r dr$$

$$V_B - V_A = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{r^2} dr$$

$$V_B - V_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} \right]$$

5.14 حل شدہ مثالیں (Solved Problems)

حل شدہ مثال 1

ثابت کیجیے کہ $\vec{E} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$ بقائی برقی میدان ہے۔

حل: دیا گیا ہے $\vec{E} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x & y & z \end{vmatrix} \\ &= \hat{i} \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) \\ &\therefore \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \end{aligned}$$

\vec{E} بقائی برقی میدان ہے

حل شدہ مثال 2

ثابت کیجیے کہ $\vec{E} = xy\hat{i} + y^3\hat{j}$ بقائی برقی میدان ہیں یا نہیں؟

حل: دیا گیا ہے کہ $\vec{E} = xy\hat{i} + y^3\hat{j}$

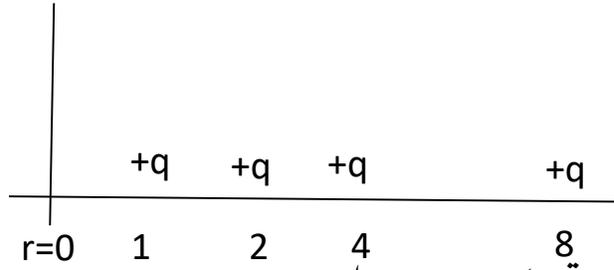
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xy & y^3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \hat{i} \left(0 - \frac{\partial y^3}{\partial z} \right) - \hat{j} \left(0 - \frac{\partial xy}{\partial z} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial yz}{\partial x} - \frac{\partial xy}{\partial y} \right) \\
&= \hat{i}(0) + \hat{j}(0) + \hat{k}(-x) = -\hat{k}x \\
&\therefore \nabla \times \vec{E} \neq 0 \\
&\therefore \vec{E} \text{ بقائی برقی میدان نہیں ہے۔}
\end{aligned}$$

حل شدہ مثال 3

مساوی مقدار والے ایک جیسے نقطی برقی بار ایک قطار میں صف بندی کیے ہوئے ہیں۔ مشاہدے کے نقطے پر کل برقی قوت معلوم کیجیے۔ جہاں سے ان کے فاصلے ملی لاتریتب۔۔۔ 1، 2، 4، 8، وغیرہ ہیں۔ اگر ترتیب وار ایک مثبت اور ایک منفی برقی بار لیا جائے تو قوت کتنی ہوگی؟

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{r_n} \quad \text{حل:}$$



کیوں کہ تمام برقی بار ایک جیسے ہیں اس لیے

$$\begin{aligned}
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right]
\end{aligned}$$

قوسین (Cosine) میں ایک ہندسی سلسلہ ہے جس کی پہلی رقم 1 اور مشترک نسبت $\frac{1}{2}$ ہے۔

لہذا اس لانتناہی ہندسی سلسلے کا مجموعہ اس طرح ہوتا ہے۔

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-1/2} = 2$$

$$\therefore V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times 2 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}$$

اگر اس برقی باروں کے سلسلے میں ہر دوسرا برقی بار منفی ہو تو مشاہدے کے مقام پر برقی قوت اس طرح ہوگی۔

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots \right]$$

قوسین میں ایک ہندسی سلسلہ ہے جس کی پہلی رقم 1 اور مشترک نسبت $\frac{1}{2}$ ہے۔

لہذا اس لانتناہی ہندسی سلسلے کا مجموعہ

$$\therefore S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

لہذا برقی قوت کی قیمت اس طرح ہوگی۔

$$\therefore V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{2}{3} = \frac{q}{6\pi\epsilon_0}$$

حل شدہ مثال 4

10 μ C برقی بار کے نقطے سے کتنی دوری پر قوتہ $3 \times 10^4 V$ ہوگی۔

حل: فرض کیجیے کہ اس نقطی برقی بار سے 'r' کے فاصلے پر دی گئی قوتہ کی قیمت ہوگی۔ یعنی

$$= \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right) \frac{q}{r}$$

$$r = \frac{9 \times 10^9 \times 10^{-5}}{3 \times 10^4} = 3m$$

حل شدہ مثال 5

9cm ضلع والے مربع کی چار راسوں پر چار نقطی برقی بار $0.02\mu C$ ۔ علی الترتیب مخالف سمت ساعت میں مرتب ہیں۔ مربع

کے مرکز پر جملہ برقی قوتہ معلوم کیجیے۔

حل: کیوں کہ مشاہدے کے نقطے سے تمام برقی بار یکساں دور پر ہیں اور فرض کیجیے کہ یہ فاصلہ 'r' ہے۔

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_1^\infty \frac{q}{r}$$

اس لیے کل برقی قوتہ اس طرح ہوگی

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} [-2 + 4 + 2 - 4] \times 10^{-3} \times 10^{-6}$$

یہاں تو سین میں برقی باروں کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔ اس لیے کل برقی بار صفر ہوگا۔

حل شدہ مثال 6

دو پروٹان ایک دوسرے سے $0.53 \times 10^{-10} m$ کے فاصلے پر ہیں۔ اس نظام کی برقی توانائی بالقیوں معلوم کیجیے۔

$$q_1 = q_2 = 1.6 \times 10^{-19} C \quad \text{حل:}$$

$$r = 5.3 \times 10^{-11} m$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$$

$$= 9 \times 10^9 \frac{1.6 \times 1.6 \times 10^{-38}}{5.3 \times 10^{-11}}$$

$$U = \frac{9 \times 10^9 \times 1.6 \times 1.6 \times 10^{-38}}{1.6 \times 10^{-19} \times 5.3 \times 10^{-11}} eV$$

حل شدہ مثال 7

0.4m نصف قطر والے کروئی پر آٹھ نقطی برقی بار $5\mu C, 3\mu C, 7\mu C, 10\mu C, 15\mu C, -1\mu C, -5\mu C$

اور $7\mu C$ ۔ علی الترتیب مخالف سمت ساعت میں مرتب ہیں۔ کروئی کے مرکز پر جملہ برقی قوتہ معلوم کیجیے۔

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_1^\infty \frac{q_i}{r} \quad \text{حل: برقی قوتہ}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} [q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 + q_7 + q_8]$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{0.4} [7 + 5 + 3 + 10 + 15 - 5 - 1 - 7]$$

$$V = 9 \times 10^9 \times \frac{27 \times 10^{-6}}{0.4} = 6.075 \times 10^5 \text{ Volt}$$

5.15 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- برقی میدان کا خمیدہ ہونا (Curl) کو اس طرح لکھا جاتا ہے۔

$$\text{Curl} \vec{E} = -\text{Curl Grad} \phi = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi = 0$$
- کسی اکائی مثبت بار کا کسی نقطہ A سے B تک کیا گیا کام یہ ہوگا $\omega = \int_A^B \vec{E} \cdot \widehat{dr}$
- کسی برقی میدان میں کسی اکائی مثبت بار کو نقطہ A سے B تک لے جانے کے لیے کیے گئے کام کو برقی تقاوہ کہنا جاتا ہے۔ دوسرے الفاظ میں اسے A سے B تک برقی میدان کے خطی تکملہ کے منفی کے طور پر بیان کہا جاسکتا ہے۔
- دو نقطے A اور B کے لیے جو کہ ایک متناہی فاصلہ پر ہے۔

$$V_B - V_A = \frac{U_B - U_A}{q_1} = - \int_A^B \vec{E} \cdot \widehat{dr}$$
- **Stat Volt**: برقی تقوہ کی CGS اکائی Stat-Volt ہے۔ کسی برقی قوت کے خلاف اکائی مثبت بار کو لانا متناہی سے کسی نقطہ پر لانے کے لیے کیے گئے ایک erg کام کو اس نقطہ پر ایک Stat Volt برقی تقوہ کہا جاتا ہے۔
- **Volt**: توہ کی بین الاقوامی نظام S.I میں اکائی Volt ہوتی ہے۔

5.16 کلیدی الفاظ (Keywords)

- **امالی برقی رو** : تبدیل ہوتے ہوئے مقناطیسی میدان کے ذریعے کسی موصل میں پیدا ہونے والی برقی رو امالی برقی رو کہلاتی ہے۔
- **مقناطیسی نفوذ** : یہ کسی دیے گئے رقبے میں جملہ مقناطیسی میدان کی پیمائش ہوتی ہے۔
- **برقی میدان کی حدت**: ایک کولم مثبت برقی بار پر عاید ہونے والی قوت۔
- **Stat Volt**: برقی تقوہ کی CGS اکائی Stat-Volt ہے۔ کسی برقی قوت کے خلاف اکائی مثبت بار کو لانا متناہی سے کسی نقطہ پر لانے کے لیے کیے گئے ایک erg کام کو اس نقطہ پر ایک Stat Volt برقی تقوہ کہا جاتا ہے۔
- **Volt**: توہ کی بین الاقوامی نظام S.I میں اکائی Volt ہوتی ہے۔

5.17 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

5.17.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. برقی قوہ کی SI اکائی-----ہے۔

Farad(d) Ohm(c) Amp(b) Volt (a)

2. زمین کی قوہ کو-----مانا جاتا ہے۔

(a) ایک (b) صفر (c) دو (d) ∞

3. کیا کسی مقام پر صفر حدت کا میدان ہوتے ہوئے برقی قوہ ہو سکتی ہے؟

4. برقی قوہ سے کیا مراد ہے۔

5. بقائی میدان سے کیا مراد ہے۔

6. برقی قوہ کا ابعادی ضابطہ-----ہے

7. ایکساں برقی قوہ سطح سے کیا مراد ہے۔

8. وولٹ سے کیا مراد ہے۔

9. برقی سکونیتی قوہ سے کیا مراد ہے۔

10. تفاوت قوہ-----مقدار ہے۔

(a) میزانی (b) سمت (c) a اور b (d) ان میں سے کوئی نہیں

11. بقائے برقی میدان کی شرط-----ہوتی ہے۔

$\nabla \cdot E \neq 0$ (d) $\nabla \cdot E = 0$ (c) $\nabla \times E \neq 0$ (b) $\nabla \times E = 0$ (a)

12. برقی بار منقدر (quantized) ہوتا ہے کا مطلب کیا ہے۔

5.17.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions);

1. برقی میدان سے کیا مراد ہے۔ بقائے برقی میدان اور $\nabla \times E = 0$ کو اخذ کیجیے۔

2. بتائیے کہ میزانی میدان کی گریڈینٹ (Gradient) اور میزانی میدان کی کرل (Curl) میلان کی بقائے صفر ہوتی ہے۔

3. برقی قوہ کی تعریف لکھئے۔ اس کی SI اکائی کیا ہے اور کیا یہ سمتیہ ہے یا میزانیہ۔

4. برقی سکونیت برقی میدان اور برقی قوہ پر ایک نوٹ لکھیئے۔

5. بتائیے کہ بند سطح پر برقی میدان کی قطعی تکمیلہ صفر ہوتی ہے سمجھائیے۔

5.17.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. برقی قوہ اور تفاوت قوہ کی تعریفیں لکھئے اور "وولٹ" کی تعریف کیجیے۔ نقطی برقی باروں کے نظام کی توانائی بالقوہ کے لیے ضابطہ اخذ

کیجیے۔

2. سمتیہ میدان کی قطعی تکمیلہ کی طبعی اہمیت کو سمجھائیے اور مثالیے کے ذریعہ سمجھائیے۔
3. ہموار برقائے گئے کھوکھلے کر وی تول کے لیے برقی قوہ کے لیے ضابطہ کیجیے جب کہ مشاہدے کا نقطہ (i) خول کے مرکز پر (ii) خول کی سطح پر ہو۔
4. برقی قوہ کی تعریف کریں اور اس کے SI اکائی کیا ہے۔ ولٹ اور سکونیاٹی ولٹ کے درمیان فرق کو سمجھائیے۔ ان کے درمیان رشتے کو اخذ کیجیے۔

5.17.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. تین نقطی برقی بار $5\mu C, -5\mu C, -5\mu C$ کو 10cm ضلع والے مثلث مساوی الاضلاع کی راسوں پر رکھا گیا ہے۔ دو منفی برقی باروں کے درمیانی نقطے پر برقی قوہ معلوم کیجیے۔
2. ایک علاقے میں برقی میدان $\vec{E} = 20\hat{i} + \hat{j} \text{NC}^{-1}$ ہے اور مبداء پر قوہ صفر ہے۔ نقطہ 2.2 پر کتنی قوہ ہوگی؟
3. $+9\mu C$ اور $-3\mu C$ کے دو نقطی برقی بار ایک دوسرے سے 0.16cm کے فاصلے پر ہیں۔ ان سے بننے والی برقی قوہ کی قیمت معلوم کیجیے۔ (i) ان دونوں کے باہر منفی برقی بار سے 0.04m دوری پر (ii) ان دونوں کے باہر منفی برقی بار سے 0.08m دوری پر۔
4. ایک ذرے کی کمیت ایک گرام اور برقی بار 10^{-8}C ہے۔ یہ ذرہ اس طرح حرکت کر رہا ہے کہ ایک مقام پر اس ذرے کی رفتار 0.2ms^{-1} اور دوسرے مقام پر اس کی رفتار $\sqrt{0.028}\text{ms}^{-1}$ ہو جاتی ہے۔ اگر پہلے مقام پر قوہ صفر ہو تو دوسرے مقام پر قوہ کتنی ہوگی۔

$$\left(\frac{1}{2}m(V_1^2 - V_2^2)\right) = q(V_2 - V_1) \text{ (اشارہ)}$$

5. دو دھاتی کروں کی برقی گنجائش 3:4 کی نسبت میں ہے اور ان کو ایک دوسرے سے تماس میں رکھ کر $7 \times 10^{-6} \text{C}$ کے بار سے برقیایا گیا۔ پھر ان کو جدا کر کے اتنا دور لے جایا گیا کہ یہ ایک دوسرے پر کچھ بھی اثر نہیں کرتے۔ چھوٹے کرے سے 50m دوری پر کتنی قوہ بنتی ہے۔

[اشارہ: دو کروں میں برقی بار کی تقسیم ان کی گنجائش کے لحاظ سے ہوتی ہے کیوں کہ دونوں پر یکساں قوہ ہے]

5.18 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Aziz, W A, and Mashood Ahmad. Millenium Science Dictionary, Physics - Chemistry & Mathematics, English - English - Urdu. Mumbai: Saifee Book Agency, 2003.
2. Bleaney, B I, and B Bleaney. Electricity and Magnetism. Oxford: Oxford

- University Press, 2013.
3. Bennet, G A. G. Electricity and Modern Physics. London: English Language Book Society & Edward Arnold, 1983.
 4. Duffin, W J. Electricity and Magnetism. Cottingham: W.J. Duffin, 2001.
 5. Gaur, R.K. &Gupta, S.L.Engineering Physics.Dhanpat Rai Publication.
 6. Kurrelmeyer, Bernhard, and Walter H. Mais. Electricity and Magnetism. Princeton, N.J: Van Nostrand, 1967.
 7. Peck, Edson R. Electricity and Magnetism. , 2013.
 8. Plonsey.R&Collin.R.E.Principles and Application of Electromagnetic Field. Tata Mc Graw Hill Publication. New Delhi.
 9. Purcell, Edward M, and David J. Morin. Electricity and Magnetism. , 2013.
 - 10.Resnic.R&Halliday.D.Physics Part-I&Part-II.Wiley Eastern Pvt.Ltd.New Delhi.
 - 11.Resnick, Robert, David Halliday, and Kenneth S. Krane. Physics. New York: Wiley, 2002.
 - 12.Schuh, Mari C. Magnetism. Minneapolis, MN: Bellwether Media, 2008.

اکائی 6- برقی ذوقطبیہ

(Electric Dipole)

اکائی کے اجزا

تمہید	6.0
مقاصد	6.1
برقی ذوقطبیہ	6.2
برقی مقناطیسی موجوں کی خصوصیات	6.2.1
ایک برقی ذوقطبیہ کا برقی میدان	6.3
ایک ہموار باردار پتلے کرومی خول کی وجہ سے پیدا ہونے والا برقی میدان	6.4
برقی ذوقطبیہ کی وجہ سے عائد برقی قوت	6.5
برقی باروں کے نظام کی وجہ سے برقی قوت	6.6
برقی قوت سے برقی میدان	6.7
حل شدہ مثالیں	6.8
اکتسابی نتائج	6.9
کلیدی الفاظ	6.10
نمونہ امتحانی سوالات	6.11
معروضی جوابات کے حامل سوالات	6.11.1
مختصر جوابات کے حامل سوالات	6.11.2
طویل جوابات کے حامل سوالات	6.11.3
حل شدہ جوابات کے حامل سوالات	6.11.4
مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں	6.12

6.0 تمہید (Introduction)

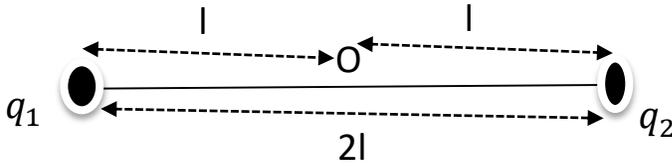
ایک برقی ذوقطبیہ، مساوی اور مخالف نقطی باروں q اور $-q$ کا ایک جوڑا ہوتا ہے۔ جب کہ ان نقطی باروں کے درمیان فاصلہ $2a$ ہو۔ دونوں باروں کو ملانے والا خط، فضا میں ایک سمت کو دکھلاتا ہے۔ قرار دادر کے مطابق $-q$ سے q کی جانب، سمت کو ذوقطبیہ کی سمت مانا جاتا ہے۔ q اور $-q$ کے مقامات کا وسطی نقطہ (Middle Point) ذوقطبیہ کا مرکز کہلاتا ہے۔

ظاہر ہے کہ ایک برقی ذوقطبیہ کا حاصل بار صفر ہوگا۔ اس کا یہ مطلب نہیں ہے کہ برقی ذوقطبیہ کا میدان بھی صفر ہوگا۔ کیوں کہ بار q اور بار $-q$ کے درمیان کچھ فاصلہ ہے۔ اس لیے جب ان کے ذریعے پیدا ہونے والے برقی میدان جوڑے جاتے ہیں تو وہ مکمل طور پر ایک دوسرے کی تینخ نہیں کرتے۔ حالانکہ ذوقطبیہ تشکیل دینے والے باروں کے درمیان فاصلے کے مقابلے میں بہت زیادہ فاصلوں $r \gg 2a$ پر q اور $-q$ کی وجہ سے پیدا ہونے والے برقی میدان ایک دوسرے کی تقریباً تینخ کر دیتے ہیں۔ اس لیے مقابلتاً بڑے فاصلوں پر ایک ذوقطبیہ کی وجہ سے پیدا ہونے والے برقی میدان کی قدر $\frac{1}{r^2}$ سے زیادہ تیزی کے ساتھ کم ہوتی ہے (جو کہ ایک واحد بار q کی وجہ سے پیدا ہونے والے برقی میدان کا r پر انحصار ہے)۔

6.1 مقاصد (Objectives)

- یہ اکائی برقی ذوقطبیہ کے مفہوم کو پیش کرتی ہے۔ اس مفہوم کو قابل ادراک بنانے کے لیے یہ اکائی سمجھاتی ہے۔ اس اکائی میں ہم
- برقی ذوقطبیہ کے تصور کو سمجھیں گیں۔
 - ایک برقی ذوقطبیہ کا برقی میدان کو اور ایک ہموار بار دار پتے کے روی خول کی وجہ سے پیدا ہونے والا برقی میدان معلوم کریں گیں۔
 - ہم برقی ذوقطبیہ کی وجہ سے عائد برقی قوت کو معلوم کر سکیں گیں۔
 - برقی باروں کے نظام کی وجہ سے برقی قوت اور برقی کشیر قطبی کو بھی سمجھا سکیں گیں۔

6.2 برقی ذوقطبیہ (Electric Dipole)



شکل (6.1)

ایک برقی ذوقطبیہ، مساوی اور مخالف نقطی باروں q اور $-q$ کا ایک جوڑا ہوتا ہے جب کہ ان نقطی باروں کے درمیان فاصلہ $2l$ ہو۔ دونوں باروں کو ملانے والا خط، فضا میں ایک سمت کو دکھلاتا ہے۔ $-q$ سے q کی جانب، سمت کو ذوقطبیہ کی سمت مانا جاتا ہے۔ q اور $-q$ کے

مقامات کا وسطی نقطہ ذوقطبیہ کا مرکز کہلاتا ہے۔

$$P = q \times 2l = 2ql$$

برقی ذوقطبیہ معیار اثر کو اس طرح دیا جاتا ہے۔
P ایک ویکٹر (سمتیہ) ہے اور اس کی سمت -q سے +q کی جانب مانی جاتی ہے۔

ذوقطبیوں کی طبعی اہمیت (Physical Significance of Dipoles)

زیادہ تر سالموں میں مثبت باروں اور صنعتی باروں کے مراکز ایک ہی مقام پر ہوتے ہیں اس لیے ان کا ذوقطبیہ معیار اثر صفر ہوتا ہے۔
CO₂ اور CH₄ اس قسم کے سالمے ہیں حالانکہ جب ایک برقی میدان لگایا جاتا ہے تو ان میں ذوقطبیہ معیار اثر پیدا ہو جاتا ہے۔ لیکن کچھ سالموں میں منفی باروں اور مثبت باروں کے مراکز ایک دوسرے پر منطبق نہیں ہوتے اس لیے ایک برقی میدان کو غیر موجودگی میں بھی ان میں ایک مستقل برقی ذوقطبیہ معیار اثر ہوتا ہے۔ ایسے سالمے قطبیہ سالمات (Polar Molecule) کہلاتے ہیں۔ پانی H₂O کے سالمے، اس قسم کی ایک مثال ہے۔

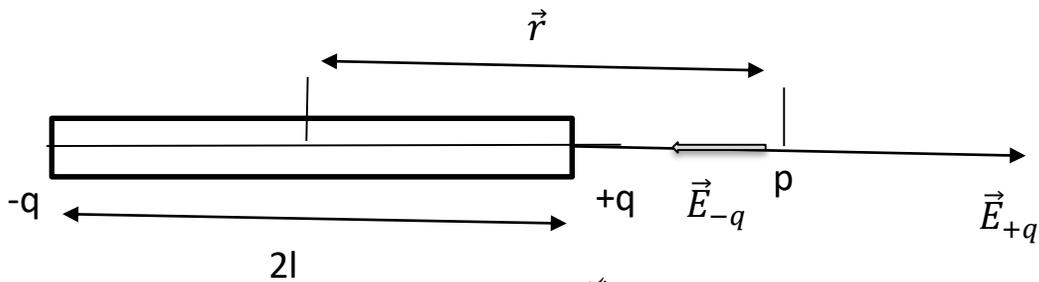
مختلف قسم کی مادی اشیاء برقی میدان کی موجودگی اور غیر موجودگی میں دلچسپ خاصیتیں ظاہر کرتی ہیں اور ان کے اہم استعمال ہیں۔

6.3 ایک برقی ذوقطبیہ کا برقی میدان (Electric Field of an Electric Dipole)

فضا میں کسی بھی نقطے پر باروں کے جوڑے (q اور -q) کا برقی میدان کہ کلب کے کلیے اور انطباق کے اصول سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔ ذیل میں دو صورتوں میں سادہ نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

(i) جب کہ نقطہ ذوقطبیہ محور (dipole axis) پر ہو (ii) جب نقطہ ذوقطبیہ کے استوائی مستوی یعنی کہ (Equatorial axis) ایسے مستوی میں ہو جو ذوقطبیہ کے مرکز سے گزرتے ہوئے محور پر عمود وار ہو۔ کسی بھی عمومی نقطہ P پر برقی میدان، اس نقطہ پر بار -q کی وجہ سے پیدا ہونے والے برقی میدان \vec{E}_{-q} اور بار +q کی وجہ سے پیدا ہونے والے برقی میدان \vec{E}_{+q} کو سمتیوں کے متوازی الاضلاع کا (Law of Parallelogram) کے ذریعے جوڑ کر حاصل کیا جاسکتا ہے۔

i. محور پر نقاط کے لیے:



شکل (6.2)

فرض کرو کہ نقطہ 'P' ذوقطبیہ کے مرکز سے r فاصلہ پر، بار +q کی سمت میں ہے۔ تب

$$\vec{E}_{-q} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0(r+l)^2}\hat{P} \quad (6.1)$$

جہاں \hat{P} ذوقطبی محور (-q سے q کی جانب) کی سمت میں اکائی سمتیہ ہے۔ اسی طرح

$$\vec{E}_{+q} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0(r-l)^2}\hat{P} \quad (6.2)$$

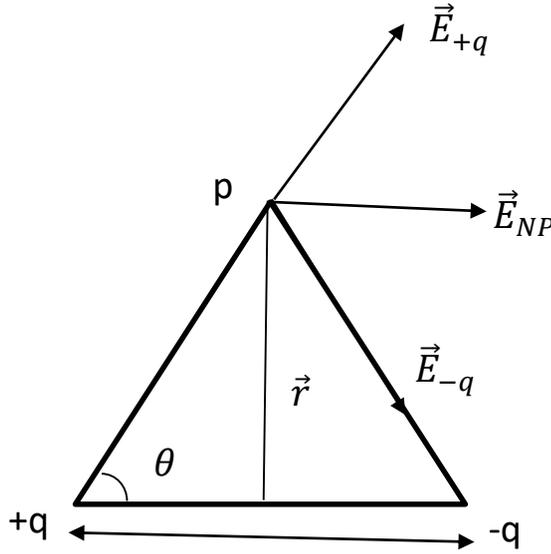
P پر جملہ میدان ہے۔

$$\vec{E} = \vec{E}_{+q} + \vec{E}_{-q} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(r-l)^2} - \frac{1}{(r+l)^2} \right] \hat{P}$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4rl}{(r^2 - l^2)^2} \hat{P} \quad (6.3)$$

$$\text{if } r \gg l \text{ then } \vec{E} = \frac{4ql}{4\pi\epsilon_0 r^3} \hat{P} \quad (6.4)$$

.ii استوائی مستوی کے ایک نقطہ کے لیے:



شکل (6.3)

دونوں باروں +q اور -q کی وجہ سے پیدا ہونے والے برقی میدانوں کی عددی قدریں

$$\vec{E}_{+q} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2 + l^2} \quad (6.5)$$

$$\vec{E}_{-q} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2 + l^2} \quad (6.6)$$

اور یہ دونوں عددی قدریں ایک دوسرے کے مساوی ہیں۔

\vec{E}_{+q} اور \vec{E}_{-q} کی سمتیں وہی ہیں جو شکل (6.3) میں دکھائی گئی ہیں۔ کل برقی میدان \hat{P} کی مخالف سمت میں ہے۔

$$\therefore \vec{E} = -(E_{+q} + E_{-q}) \cos \theta = \frac{2ql}{4\pi\epsilon_0(r^2 + l^2)^{3/2}} \hat{P} \quad (6.7)$$

زیادہ فاصلوں پر ($r \gg l$) یہ تحلیل ہو جاتا ہے۔

$$\vec{E} = -\frac{2ql}{4\pi\epsilon_0 r^3} \hat{P} \quad (6.8)$$

مساوات (6.8) سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ زیادہ بڑے فاصلوں پر ذوقطبیہ میدان میں q اور l جداگانہ طور پر شامل نہیں ہوتے بلکہ یہ میدان کے حاصل ضرب ql پر منحصر ہے۔ ذوقطبیہ معیار اثر (Dipole Moment) کی تعریف تجویز کرتا ہے کہ ایک برقی ذوقطبیہ کے ذوقطبیہ معیار اگر سمتیہ کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ

$$\vec{P} = q \times 2l\hat{P} = 2ql\hat{P} \quad (6.9)$$

یعنی P یہ ایک ایسا سمتیہ ہے جس کی عددی قدر q اور درمیانی فاصلہ $2l$ کی حاصل ضرب ہے اور سمت $-q$ سے q کی جانب ہے۔

ذوقطبیہ محور کے ایک نقطہ پر:

$$\vec{E} = \frac{2\vec{P}}{4\pi\epsilon_0 r^3} (r \gg l) \quad (6.10)$$

استوائی مستوی میں ایک نقطہ پر:

$$(r \gg l) \vec{E} = \frac{-\vec{P}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (6.11)$$

یہاں یہ بات نوٹ کریں کہ زیادہ بڑی فاصلوں پر ذوقطبیہ میدان $1/r^2$ کی مناسبت سے نہیں بلکہ $1/r^3$ کی مناسبت سے کم ہوتا ہے۔ مزید یہ کہ ذوقطبیہ میدان کی عددی قیمت اور فاصلہ r پر ہی منحصر نہیں بلکہ مقام سمتیہ \vec{P} اور ذوقطبیہ معیار اثر \vec{P} کے مابین زاویہ پر بھی منحصر ہے۔

6.4 ایک ہموار باردار پتلے کروی خول کی وجہ سے پیدا ہونے والا برقی میدان

(Field Due to a Uniformly Charged thin spherical shell)

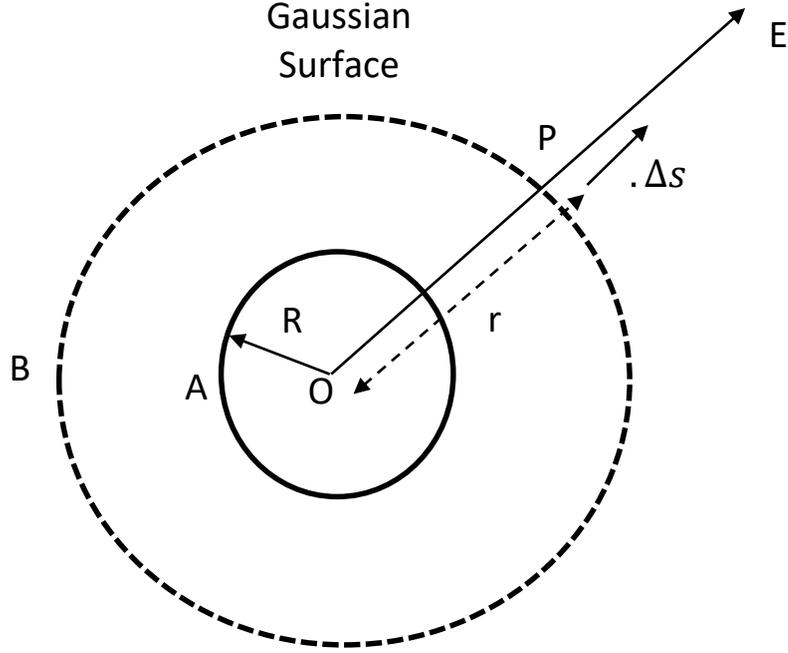
عرض کریں کہ نصف قطر R کے ایک پتلے کروی خول کی ہموار سطح بارکشافت ہے۔ باہر یا اندر، کسی بھی نقطے P پر برقی میدان صرف r پر منحصر ہو سکتا ہے اور نصف قطری ہونا لازمی ہے۔

خول کے باہر میدان:

خول سے باہر ایک نقطے P لیجیے جس کا نصف قطری سمتیہ ہے۔ نقطہ P پر \vec{E} معلوم کرنے کے لیے ہم گاؤس سطح کے بطور ایک کرہ منتخب کرتے ہیں جس کا نصف قطر r ہے اور مرکز O ہے۔ دی ہوئی باز تشکیل کی مناسبت سے، اس کرہ پر تمام نقطے متبادل (Equivalent) ہوں گے اس لیے گاؤس سطح کے ہر نقطے پر برقی میدان کی عددی قدر E یکساں ہوگی اور ہر نقطے پر برقی میدان کی

سمت نصف قطری سمتیہ کی جانب ہوگی۔ اس لیے ہر نقطہ پر \vec{E} اور $\Delta\vec{S}$ متوازی ہیں اور ہر چیز سے گزرنے والا فلکس $E \cdot \Delta s$ ہے۔ تمام Δs پر جمع کرنے پر گاؤس سطح سے گزرنے والا فلکس $E \times 4\pi r^2$ ہے۔ سطح سے گھرا ہوا بار $\sigma \times 4\pi R^2$ ہے۔ گاس کے کلیے سے

$$E \times 4\pi r^2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} 4\pi R^2$$



شکل (6.4)

$$E = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (6.12)$$

جہاں $q = 4\pi R^2 \sigma$ کروی خول پر جملہ بار ہے۔ ویکٹر فارم میں

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (6.13)$$

اگر $q > 0$ ہو تو برقی میدان باہر کی جانب ہو گا اور اگر $q < 0$ ہو تو اندر کی جانب ہو گا۔ لیکن یہ قطعی وہی میدان ہے جو ایک مرکزہ پر رکھے ہوئے بار کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے۔ اس لیے خول سے باہر کے نقاط کے لیے ایک ہموار طور پر بار دار خول کی وجہ سے پیدا ہونے والا برقی میدان ایسا ہو گا جیسے کہ خول کا جملہ بار اس کے مرکزہ پر مرکوز ہو۔

خول کے اندر میدان:

اگر نقطہ P خول کے اندر ہو تو گاؤس سطح پھر ایک کرہ ہے جس کا مرکزہ ہے اور جو P سے گزر رہا ہے۔ گاؤس سطح سے گزرنے والا فلکس $E \times 4\pi r^2$ ہے۔ لیکن اس صورت میں گاؤس سطح کسی بار کو گھیرے ہوئے نہیں ہے تو گاس کے کلیے کے مطابق۔

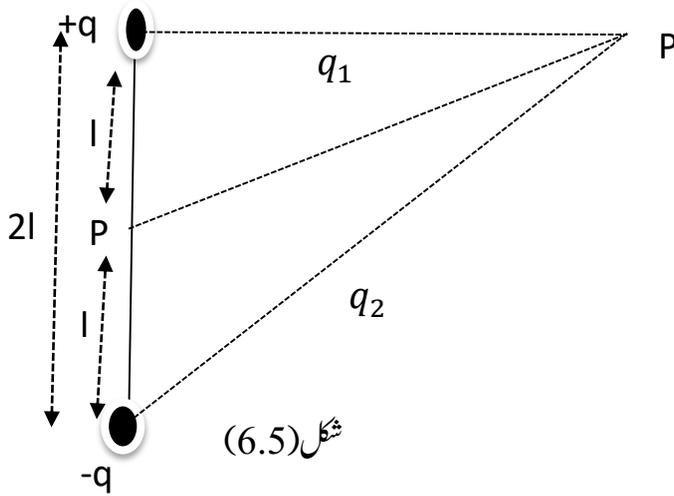
$$E \times 4\pi r^2 = 0$$

$$E = 0 (r < R) \quad (6.14)$$

یعنی ایک ہموار طور پر باردار پتلے خول کی وجہ سے پیدا ہونے والا برقی میدان خول کے اندر ہر نقطہ پر صفر ہوگا۔ یہ ہم نتیجہ گاؤس کے کلیے کا براہ راست حاصل ہے جو کولمب کے کلیے سے اخذ کیا جاتا ہے۔ اس نتیجہ کا تجرباتی ثبوت، کولمب کے کلیے میں شامل $1/r^2$ انحصار کو تصدیق کر دیتا ہے۔

6.5 برقی ذوقطبیہ کی وجہ سے عائد برقی قوتہ (Potential Due to an Electric Dipole)

ہم جانتے ہیں کہ ایک برقی ذوقطبیہ دو باروں q اور $-q$ پر مشتمل ہوتا ہے جنکے درمیانی فاصلہ $2l$ ہے۔ اس کا جملہ بار صفر ہوتا ہے۔ اس کی خاصیت اس کا ذوقطبی معیار اثر \vec{P} جس کی عددی قدر $q \times 2l$ ہے اور جس کی سمت $-q$ سے q کی جانب ہوتی ہے۔ شکل (6.5) ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ ایک نقطہ پر جس کا مقام سمتیہ \vec{r} ہے۔



ایک ذوقطبیہ کا برقی میدان نہ صرف عددی قدر r پر منحصر ہے بلکہ \vec{r} اور \vec{P} کے درمیانی زاویہ پر بھی منحصر ہے۔ مزید یہ کہ بڑے فاصلوں پر، برقی میدان $1/r^2$ کی مناسبت سے کم نہیں ہوتا بلکہ $1/r^3$ کی مناسبت سے کم ہوتا ہے۔ ہم ایک برقی ذوقطبیہ کی وجہ سے برقی قوتہ معلوم کریں گے۔

شکل (6.5) کے مطابق مبداء ذوقطبیہ کے مرکز پر منتخب کرتے ہیں۔ برقی میدان انطباق کے اصول کی پابندی کرتا ہے اور برقی قوتہ بھی انطباق کے اصول کا پابند ہے۔ اس لیے ذوقطبیہ کی وجہ سے برقی قوتہ باروں q اور $-q$ کی وجہ سے قوتوں کا حاصل جمع ہے۔

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right] \quad (6.15)$$

جہاں r_1 اور r_2 بالترتیب نقطہ P کے q اور $-q$ سے فاصلے ہیں۔

$$\therefore r_1^2 = r^2 + l^2 - 2al \cos \theta \quad (6.16)$$

$$r_2^2 = r^2 + l^2 + 2al \cos \theta \quad (6.17)$$

اگر ($r \gg l$) اور پھیلاؤ میں $1/r$ کے صرف پہلے درجے تک کے ارکان ہی لیتے ہیں۔

$$r_1^2 = r^2 \left(1 - \frac{2l \cos \theta}{r} + \frac{l^2}{r^2} \right) \approx r^2 \left[1 - \frac{2l \cos \theta}{r} \right] \quad (6.18)$$

$$r_1^2 = r^2 \left[1 - \frac{2l \cos \theta}{r} \right] \quad \text{اسی طرح (6.19)}$$

دور کنی مسئلہ استعمال کرتے ہوئے اور $1/r$ میں صرف پہلے درجے تک کے ارکان لینے پر

$$\frac{1}{r_1} \cong \frac{1}{r} \left[1 - \frac{2l \cos \theta}{r} \right]^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{l}{r} \cos \theta \right] \quad (6.20)$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{2l \cos \theta}{r} \right]^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{l}{r} \cos \theta \right] \quad (6.21)$$

مساوات (6.15) اور (6.20)، (6.21) اور $\vec{P} = 2ql$ استعمال کرتے ہوئے حاصل قوہ ہے۔

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2ql \cos \theta}{r^2} = \frac{\vec{P} \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (\because \vec{P} \cos \theta = \vec{P} \cdot \hat{r}) \quad (6.22)$$

جہاں \hat{r} مقام سمتیہ OP کی جانب اکائی سمتیہ ہے۔

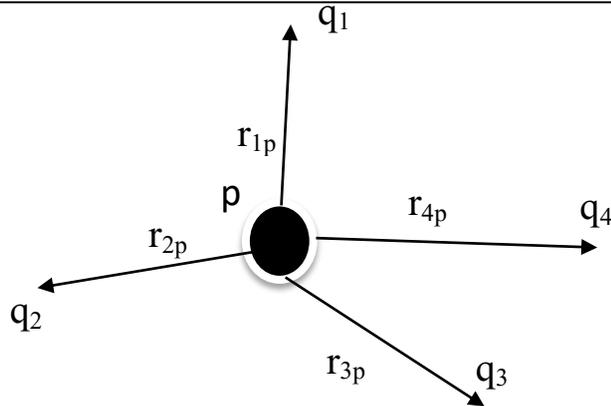
\therefore ایک ذوقطبیہ کا برقی قوہ

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{P} \cdot \hat{r}}{r^2} \quad (r \gg l) \quad (6.23)$$

مساوات (6.23) سے یہ ظاہر ہے کہ ذوقطبیہ کی جسامت کے مقابلے میں صرف بہت بڑے فاصلوں کے لیے ہی نزدیکی طور پر

درست ہے، اس طرح کہ $1/r$ میں بڑے درجے کے ارکان قابل نظر انداز ہیں۔

6.6 برقی باروں کے نظام کی وجہ سے برقی قوہ (Potential Due to a System of Charges)



شکل (6.6)

برقی باروں $q_1 q_2 q_3 \dots q_n$ کا ایک نظام مان لیجیے جس کے مقام سمتیے کسی مبدے کو مناسبت $\vec{q}_1 \vec{q}_2 \dots \vec{q}_n$ شکل (6.6) پر بار q_1 کی وجہ سے توہ V_1 یہ ہے۔

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{1p}}$$

جہاں q_1, r_{1p} اور P کا درمیان فاصلہ ہے۔ اسی طرح P پر q_2 کی وجہ سے توہ V_2 اور q_3 کی وجہ سے توہ $V_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{r_{3p}}$ ،

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{2p}}$$

جہاں r_{2p} اور P, r_{3p} کے بالترتیب q_2 اور q_3 سے فاصلے ہیں۔ بالکل اسی طرح دوسرے باروں کی وجہ سے توہ بھی ہوں گے۔ انطباق کے اصول کے ذریعہ جملہ بار تشکیل کی وجہ سے P پر توہ V انفرادی باروں کی وجہ سے توہ کا الجیر یا ئی مجموعہ یہ ہوتا ہے۔

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n \quad (6.24)$$

$$\therefore V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1}{r_{1p}} + \frac{q_2}{r_{2p}} + \frac{q_3}{r_{3p}} + \dots + \frac{q_n}{r_{np}} \right] \quad (6.25)$$

اگر ہمارے پاس ایک مسلسل بار تقسیم ہے جس کی بار کثافت (\vec{r}) ہو تو اسے چھوٹے حجم اجزاء میں تقسیم کر لیتے ہیں جن میں سے ہر جز کی جسامت $\rho \Delta V$ ہے اور اس پر جملہ بار $\rho \theta$ ہے۔ پھر ہم ہر حجم خردی وجہ سے توہ معلوم کرتے ہیں اور ایسے تمام حصوں کو جمع یا تکمید کر لیتے ہیں اور اس طرح پوری تقسیم کی وجہ سے توہ معلوم کر لیتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ ایک ہموار طور پر برقائے ہوئے کروی خول کہ لیے، خول کے باہر برقی میدان ایسا ہوتا ہے کہ جیسے کہ خول کا پورا بار اس کے مرکز پر مرتکز ہو، اس لیے خول کے باہر توہ اس طرح دیا جاتا ہے۔

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (r \geq R) \quad (6.26)$$

جہاں q خول پر جملہ بار ہے اور R اس کا نصف قطر ہے۔ خول کے اندر برقی میدان صفر ہے۔ اس سے یہ معلوم کیا جاسکتا ہے کہ خول کے اندر توہ مستقل ہے کیوں کہ خول کے اندر ایک بار کو حرکت دینے میں کوئی کام نہیں کیا جاتا اور اس لیے اس کی قدر سطح پر قدر کے مساوی ہے

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R} \quad (6.27)$$

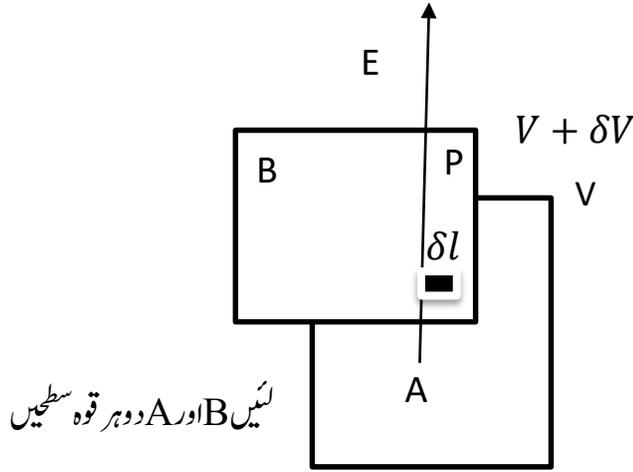
برقی کثیر قطبی (Electric Multi poles)

جب ایک سے زائد ذوقطبیہ کو چھوٹی سی جگہ میں جمع کرتے ہوں تو اس برقی باروں کے نظام کو برقی کثیر قطبیہ کہتے ہیں اور یہ پیچیدگیوں کو بڑھاتی ہے۔ مثال کے طور پر ذوقطبیہ، چار قطبیہ، آٹھ قطبیہ اور عام طور پر 2^n قطبیہ جہاں n = کثیر قطبیہ کی قدر ہے۔

6.7 برقی قوت سے برقی میدان (Electric Field from Potential)

ایک دوسرے کے نزدیک رکھی ہوئی دوہر قوتہ سطحیں A اور B لیں جن کے قوتہ کی قدریں V اور $V + \delta V$ ہیں۔ فرض کریں کہ نقطہ P سطح B پر ایک نقطہ ہے۔ δl سطح A سے عمودی فاصلہ ہے۔ فرض کریں کہ ایک اکائی مثبت بار کو اس عمود پر سطح B سے سطح A تک برقی میدان کے خلاف حرکت دی جاتی ہے۔ اس دوران کیا گیا کام $|E|\delta l$ ہوگا۔ یہ کام تفاوت قوتہ $V_A - V_B$ کے مساوی ہے۔ اس لیے

$$|\vec{E}|\delta l = V(V + \delta V) = -\delta V$$



لسیں B اور A دوہر قوتہ سطحیں

شکل (6.7)

یعنی کہ

$$|\vec{E}| = -\frac{\delta V}{\delta l} \quad (6.28)$$

کیوں کہ δV منفی ہے $-\delta V = |\delta V|$ اس لیے مساوات (6.28) کو اس طرح سے لیے سکتے ہیں۔

$$|\vec{E}| = -\frac{\delta V}{\delta L} = \frac{|\delta V|}{\delta l} \quad (6.29)$$

اس لیے ہم برقی میدان اور قوتہ کے رشتہ سے متعلق دو اہم نتائج یہ ہیں۔

- i. برقی میدان اس سمت میں ہے جس میں قوتہ سب سے زیادہ شرح سے کم ہو رہا ہے۔
- ii. برقی میدان کی عمودی قدر، قوتہ کی عددی قدریں تبدیلی فی اکائی نقل اس نقطہ پر ہم قوتہ کے عمودار سے دی جاتی ہے۔

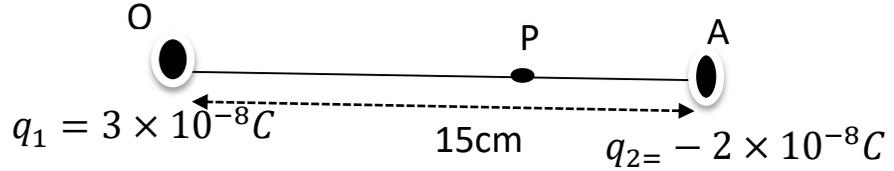
6.8 حل شدہ مثالیں (Solved Problems)

حل شدہ مثال 1

دو برقی بار $3 \times 10^{-8} C$ اور $-2 \times 10^{-8} C$ ایک دوسرے سے 15cm کے فاصلے پر رکھتے ہوئے ہیں۔ ان دونوں

باروں کو ملانے والے خط کے کس نقطے پر برقی قوت صفر ہے۔

حل: فرض کریں کہ مثبت بار کے مقام پر مبدا O ہے۔ ان دونوں برقی باروں کو ملانے والے خط کو x-محور مان لیتے ہیں اور منفی بار کو مبدا کے دائیں جانب لے لیتے ہیں۔ جیسا کہ شکل (6.8) میں بتلایا گیا ہے۔



شکل (6.8)

فرض کریں کہ نقطہ X، P محور پر وہ مطلوبہ نقطہ ہے جہاں قوت صفر ہے۔

اگر نقطہ O، P اور A کے درمیان ہو تو ہمارے پاس

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3 \times 10^{-8}}{P \times 10^{-2}} - \frac{2 \times 10^{-8}}{(15-P) \times 10^{-2}} \right] = 0$$

جہاں P دیا گیا فاصلہ سنٹی میٹر میں ہے تو اس کو میٹر میں لیں۔

$$\frac{3}{P} - \frac{2}{(15-P)} = 0$$

اس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $P = 9$

اگر P بڑھائے خط OA پر ہے تو مطلوبہ شرط یہ ہے۔

$$P = 45 \text{ جس سے حاصل ہوتا ہے } \frac{3}{P} - \frac{2}{(P-15)} = 0$$

اس لیے برقی قوت مثبت بار سے منفی بار کی جانب 9cm اور 45cm فاصلے پر صفر ہے۔

حل شدہ مثال 2

دی گئی شکلوں میں بالترتیب ایک مثبت اور منفی بار کے میدانی خطوط دکھائے گئے تو

(a) فرق قوت $V_P - V_Q$ اور $V_B - V_A$ کی علامتیں بتائیے۔

(b) نقاط Q اور P، A اور B کے درمیان ایک کم مقدار کے منفی بار کے قوت توانائی فرق کی علامت بتائیے۔

(c) P سے Q تک ایک قلیل مثبت بار کو لے جانے میں میدان کے ذریعے کیے گئے کام کی علامت بتائیے۔

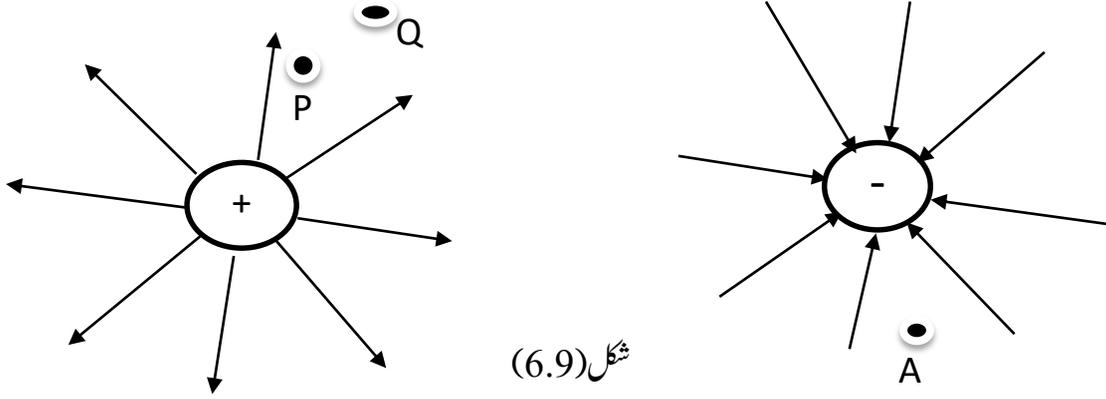
(d) B سے A تک ایک کم منفی بار کو لے جانے میں بیرونی ایجنسی کے ذریعے کیے گئے کام کی علامت بتائیے۔

حل:

(a) کیوں کہ $V_P > V_Q$ ، $V \propto \frac{1}{r}$ اس لیے $(V_P - V_Q)$ اور $(V_B - V_A)$ مثبت ہیں۔

(b) ایک قلیل منفی بار مثبت بار کی جانب کشش ہوگا۔

یہ منفی بار زیادہ قوت تو انائی سے مقابلتاً کم قوت تو انائی کی طرف حرکت کرتا ہے اس لیے P اور Q کے درمیان ایک قلیل منفی بار کے قوت تو انائی فرق کی علامت مثبت ہوگی اس طرح $(P.E)_A > (P.E)_B$ اس لیے قوت تو انائی فرق کی علامت مثبت ہے۔



(c) Q سے P تک ایک قلیل مثبت بار کو لے جانے میں، ایک بیرونی ایجنسی کو برقی میدان کے خلاف کام کرنا ہوگا اس لیے برقی میدان کے ذریعے کیا گیا کام منفی ہوگا۔

(d) B سے A تک، ایک منفی بار کو لے جانے میں بیرونی ایجنسی کے ذریعے کام کیا جائیگا یہ مثبت۔

(e) منفی بار پر دفع کی قوت کی وجہ سے رفتار کم ہوتی ہے اور اس لیے B سے A تک جانے میں حرکی تو انائی کم ہوتی ہے۔

حل شدہ مثال 3

دو باروں 5C اور 15C ایک دوسرے سے نقاط $(2, -4, 3)$ اور $(-3, 2, 1)$ پر رکھے ہوئے ہیں۔ تب 15C پر دو باروں

کے درمیانی قوت کو معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے کہ $q_2 = +15C$ $q_1 = +5C$

$$\vec{r}_2 = -3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k} \quad \text{اور} \quad \vec{r}_1 = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (-3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) - (2\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$= -5\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad \text{قوت } q_2 \text{ بار پر}$$

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{(-5)^2 + (6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{25 + 36 + 4} = \sqrt{65}$$

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{5 \times 15}{(\sqrt{65})^3} (-5\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$= \frac{9 \times 10^9 \times 5 \times 15}{65^{3/2}} (-5\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$\vec{F}_{21} = 1.288 \times 10^9 (-5\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}) \text{ Newton}$$

حل شدہ مثال 4

دو پروٹان کے درمیان برقی قوت اس پروٹان کے قیمت کے مساوی ہیں۔ ان دو پروٹان کے درمیان فاصلہ معلوم کیجیے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ پروٹان کی قیمت
 $m = 1.67 \times 10^{-27} \text{ Kg}$
 $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$

دو پروٹان کے درمیان فاصلے

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e \times e}{r^2} = \text{پروٹان کے وزن}$$

فرض کیجیے کہ دو پروٹان کے درمیان فاصلے r اور پروٹان کے وزن

$$mg = 1.67 \times 10^{-27} \times 9.8 \text{ Newton}$$

$$\therefore F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 1.6 \times 10^{-19}}{r^2}$$

$$r^2 = \frac{9 \times 10^9 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 1.6 \times 10^{-19}}{1.67 \times 10^{-27} \times 9.8} = 1.408 \times 10^{-2}$$

$$r = \sqrt{1.408 \times 10^{-2}} = 1.186 \times 10^{-1} \text{ m} = 0.1186 \text{ m}$$

حل شدہ مثال 5

ہائیڈروجن ایٹم کے پروٹان اور الیکٹران کے درمیانی فاصلے $5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$ ہیں۔ ان کے درمیانی برقی قوت کی قدر کو

معلوم کیجیے۔

حل: پروٹان اور الیکٹران باروں کی قیمت $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$

فاصلے $r = 5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$

$$\begin{aligned} \text{قوت } F &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e \times e}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{(5.3 \times 10^{-11})^2} \\ &= \frac{9 \times 1.6 \times 1.6 \times 10^{-16}}{5.3 \times 5.3} \times 10^9 = 0.82 \times 10^{-7} \end{aligned}$$

$$F = 8.2 \times 10^{-8} \text{ Newton}$$

حل شدہ مثال 6

$r = 7 \times 10^{-15} \text{ m}$ قطر پر نصف معلوم کیجیے۔ یہاں پر $(Z = 92)U_{92}$ کے سطح پر برقی میدان کی شدت

حل: دی گئی ہیں کہ $r = 7 \times 10^{-15} \text{ m}$

$$Q = Ze = 92 \times e$$

$$= 92 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$Q = 92 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad \text{برقی میدان کی شدت}$$

$$E = \frac{9 \times 10^9 \times 92 \times 1.6 \times 10^{-19}}{(7 \times 10^{-15})^2}$$

$$E = 27.04 \times 10^{20} \text{ N/C}$$

حل شدہ مثال 7

برقی میدان کی تصور کیجیے جس کا ذوقطبیہ معیار اثر $4.5 \times 10^{-10} \text{ cm}$ ہیں (i) محور پر نقاط کے لیے ہو (ii) استوائی مستوی کے ایک نقطہ کے لیے۔

حل:

$$i. \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2P}{r^3} \text{ محور پر نقاط کے لیے برقی میدان}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9, r = 1 \text{ m}, P = 4.5 \times 10^{-10} \text{ Cm} \text{ جہاں}$$

$$\vec{E} = \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times 4.5 \times 10^{-10}}{1 \times 1 \times 1} = 8.1 \text{ N/C}$$

ii. استوائی مستوی کے ایک نقطہ کے لیے

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P}{r^3} = \frac{8.1}{2} \text{ N/C}$$

$$\vec{E} = 4.05 \text{ N/C}$$

حل شدہ مثال 8

100c بارو کو (3, 4, 0) نقطہ پر رکھا ہے۔ (0, 0, 0) مرکزی نقطہ پر برقی میدان کی شدت معلوم کیجیے۔

حل: دی گئی ہیں کہ $\vec{r} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$

$$|\vec{r}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ m}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(\vec{r})^3} \vec{r} \text{ مرکزی پر برقی میدان}$$

$$= 9 \times 10^9 \times \frac{100}{5^3} |-3\hat{i} - 4\hat{j}|$$

$$= 9 \times 10^9 \left[\frac{-12\hat{i}}{5} - \frac{16\hat{j}}{5} \right]$$

$$9 \times 10^9 - (2.4\hat{i} + 3.2\hat{j})$$

$$\vec{E} = 9 \times 10^9 \sqrt{(2.4)^2 + (3.2)^2} = 36 \times 10^9 \text{ N/C}$$

$$\vec{E} = 36 \times 10^9 \text{ N/C}$$

6.9 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- ایک برقی ذوقطبیہ، مساوی اور مخالف نقطی باروں q اور -q کا ایک جوڑا ہوتا ہے جب کہ ان نقطی باروں کے درمیان فاصلہ 2l ہو۔ دونوں باروں کو ملانے والے خط، فضا میں ایک سمت کو دکھلاتا ہے۔ -q سے q کی جانب، سمت کو ذوقطبیہ کی سمت مانا جاتا ہے۔ -q اور q کے مقامات کا وسطی نقطہ ذوقطبیہ کا مرکز کہلاتا ہے۔

برقی ذوقطبیہ معیار اثر کو اس طرح دیا جاتا ہے۔ $P = q \times 2\vec{l} = 2q\vec{l}$

$$\therefore \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4rl}{(r^2 - l^2)^2} \hat{P} \text{ P ایک ویکٹر (سمتیہ) ہے اور اس کی سمت -q سے +q کی جانب مانی جاتی ہے۔}$$

- ذوقطبیہ محور کے ایک نقطہ پر: $\vec{E} = \frac{2\vec{P}}{4\pi\epsilon_0 r^3} (r \gg l)$
- استوائی مستوی میں ایک نقطہ پر: $\vec{E} = \frac{-\vec{P}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$
- جہاں $q = 4\pi R^2 \sigma$ کروئی خول پر جملہ بار ہے۔ ویکٹر فارم میں $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$
- خول کے اندر میدان:

اگر نقطہ P خول کے اندر ہو تو گاس سطح پھر ایک کرہ ہے جس کا مرکز ہے اور جو P سے گزر رہا ہے۔ گاس سطح سے گزرنے والا فلکس $E \times 4\pi r^2$ ہے۔ لیکن اس صورت میں گاس سطح کسی بار کو گھیرے ہوئے نہیں ہے تو گاس کے کلیے کے مطابق۔

$$E \times 4\pi r^2 = 0$$

$$E = 0 (r < R)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{P} \cdot \hat{r}}{r^2} (r \gg l) \quad \text{ایک ذوقطبیہ کا برقی قوتہ}$$

6.10 کلیدی الفاظ (Keywords)

➤ **وولٹ (Volt):** ایک وولٹ برقی قوتہ کی وہ مقدار ہے جہاں پر 1 کولم برقی بار کو لتناہی سے یہاں لانے کے لیے ایک جول کا کام واقع ہوتا ہو۔

➤ **الکٹران وولٹ (ev):** توانائی کی پیمائش کی یہ چھوٹی اکائی ہے۔ ایک الکٹران وولٹ کی چھوٹی توانائی اس الکٹران میں آتی ہے جس کو ایک وولٹ کے برقی میدان میں اسراع کروایا گیا ہے۔

$$1ev = 1.6 \times 10^{-19} J$$

➤ **ذو برقی حدت:** ذو برقیے پر عائد کردہ بیرونی میدان کی وہ حدت جس پر امن کی پاشیدگی (break down) ہوتی ہے۔

6.11 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

6.11.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. برقی ذوقطبیہ سے کیا مراد ہے۔
 2. محور پر نقطہ کے لیے ایک برقی ذوقطبیہ کا میدان کی مساوات $\vec{E} = \dots$ ۔
 3. استوائی مستوی میں ایک نقطہ پر ایک برقی ذوقطبیہ Γ میدان کی مساوات $\vec{E} = \dots$ ۔
- (a) $\vec{E} = \frac{2P}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ (b) $\vec{E} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ (c) $E = \frac{P}{2\pi\epsilon_0 r^3}$ اور (d) $E = \frac{P}{2\pi\epsilon_0 r^2}$
- (a) $\vec{E} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ (b) $\vec{E} = \frac{2P}{4\pi\epsilon_0 r^3}$
- (c) $E = \frac{P}{2\pi\epsilon_0 r^2}$ (d) ان میں سے کوئی بھی نہیں

4. ذوقطبیہ کی SI اکائی----- ہے۔
5. ذوقطبیہ کی ابعاد ضابطہ----- ہے۔
6. ہمواری برقی میدان میں برقی ذوقطبیہ پر عائد جفت کے لیے مساوات-----
7. جفت (Torque) سے کیا مراد ہے۔
8. قطبیہ سالمات (Polar molecule) سے کیا مراد ہے۔
9. باروں (Charge) کی SI اکائی کیا ہیں۔

6.11.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات; (Short Answer type Questions)

1. ہموار برقی میدان میں برقی ذوقطبیہ پر عائد جفت کے لیے مساوات اخذ کرو۔
2. برقی ذوقطبیہ محوری، مستوی کے کسی نقطہ پر برقی میدان کی حدت کے لیے عبارت اخذ کرو۔
3. برقی ذوقطبیہ کے استوائی مستوی کے کسی نقطہ پر برقی میدان کی حدت کے لیے عبارت اخذ کرو۔
4. برقی ذوقطبیہ سے کیا مراد ہے اور اس کی اہمیت کو بیان کرو۔
5. برقی ذوقطبیہ کی تعریف کیجیے اس کی اکائی ابعادی ضابطہ لکھیے۔

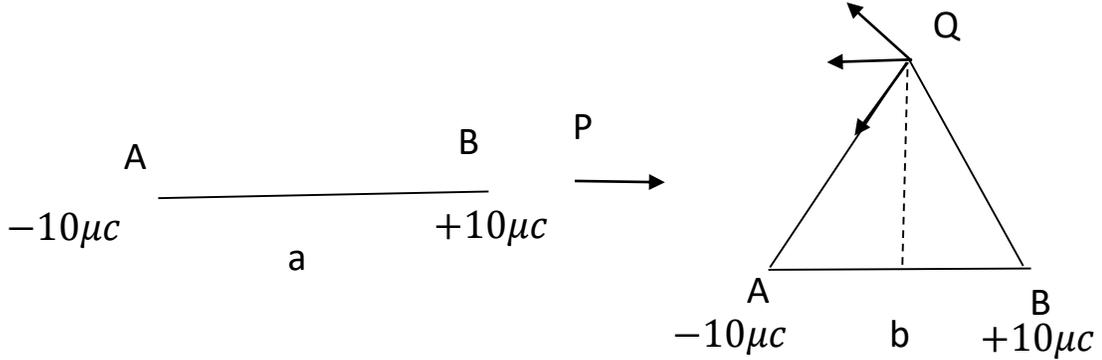
6.11.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer type Questions)

1. برقی ڈائی پول سے کیا مراد ہے؟ ایک ڈائی پول کی وجہ سے ایک نقطہ پر کے قوہ کو محسوب کیجیے۔ اور علی ہذا القیاس برقی میدان کی قیمت معلوم کیجیے۔ اس میدان کی قیمت کیا ہوگی جب کہ (i) نقطہ ڈائی پول کے محور پر ہو (ii) نقطہ محور کے عمود پر ہو۔
2. برقی ذوقطبیہ کی تعریف کرو۔ ہموار برقی میدان سے کیا مراد ہے اور ہموار برقی میدان میں برقی ذوقطبیہ پر عائد جفت کے لیے مساوات اخذ کرو۔
3. برقی قوہ کی تعریف کرو۔ ذوقطبیہ کی برقی قوہ کے لیے عبارت اخذ کرو اور حسب ذیل کے کسی لفظ پر برقی قوہ معلوم کرو۔ (a) ذوقطبیہ محوری خط پر (b) ذوقطبیہ استوائی خط پر۔

6.11.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. ہائیڈروجن جوہر میں الیکٹران اور پروٹان کا درمیانی فاصلہ 0.5 \AA ہے۔ نظام کا دو قطبی معیار شرت کیا ہوگی۔
2. $10\sqrt{2} \text{ C}$ باروں کو $(3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k})m$ نقاط پر رکھے $(5\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k})m$ نقاط پر برقی میدان کی شدت معلوم کیجیے۔
3. دو باروں $+5\text{C}$ اور $+15\text{C}$ کو $(2, -4, 3)$ اور $(-3, 2, 1)$ نقاطوں پر رکھے تب 15C پر برقی قوت کو معلوم کیجیے۔
4. $\pm 10\mu\text{C}$ کے دو باروں ایک دوسرے سے 5.0 ملی میٹر کے فاصلے پر رکھے ہوئے ہیں۔ برقی میدان معلوم کیجیے۔ (a) ایک نقطہ

P پر جو ذوقطبیہ کے محور پر اس کے مرکزہ سے 15cm دور مثبت بار کی جانب ہے (b) ایک نقطہ Q پر جو O سے گزرتے ہوئے اور ذوقطبیہ محور کے علی القوائم خط پر 0 سے 15cm ہے۔



6.12 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Bleaney, B I, and B Bleaney. Electricity and Magnetism. Oxford: Oxford University Press, 2013.
2. Duffin, W J. Electricity and Magnetism. Cottingham: W.J. Duffin, 2001.
3. Gaur, R.K. & Gupta, S.L. Engineering Physics. Dhanpat Rai Publication.
4. Kurrelmeyer, Bernhard, and Walter H. Mais. Electricity and Magnetism. Princeton, N.J: Van Nostrand, 1967.
5. Plonsey, R & Collin, R.E. Principles and Application of Electromagnetic Field. Tata Mc Graw Hill Publication. New Delhi.
6. Purcell, Edward M, and David J. Morin. Electricity and Magnetism. , 2013.
7. Resnick, Robert, David Halliday, and Kenneth S. Krane. Physics. New York: Wiley, 2002.
8. Schuh, Mari C. Magnetism. Minneapolis, MN: Bellwether Media, 2008.

اکائی 7- ذو برقیوں

(Dielectrics)

اکائی کے اجزا

تمہید	7.0
مقاصد	7.1
ذو برقیوں میں برقی میدان	7.2
دو قطبی ہوائیہ	7.3
برقی میدانوں میں قطبی ریزوں کی صف بندی	7.4
ذو برقیوں کی تقطیب	7.5
قطبی شے کا برقی میدان	7.6
ذو برقیہ میں برقی سکونیات مساوات	7.7
دو برقیوں میں برقی میدان	7.8
ذو برقیہ میں گواس کا کلیہ	7.9
حل شدہ مثالیں	7.10
اکتسابی نتائج	7.11
کلیدی الفاظ	7.12
نمونہ امتحانی سوالات	7.13
معروضی جوابات کے حامل سوالات	7.13.1
مختصر جوابات کے حامل سوالات	7.13.2
طویل جوابات کے حامل سوالات	7.13.3
حل شدہ جوابات کے حامل سوالات	7.13.4
مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں	7.14

7.0 تمہید (Introduction)

ہم جانتے ہیں کہ مادہ ایک یا ایک سے زیادہ ذروں (atoms) سے بنا ہوا ہے۔ ایک ذرے کے پاس مثبت چارج شدہ نیوکلس (Positively charged Nucleus) ہوتا ہے اور ایک یا ایک سے زیادہ برقیہ (Electrons) اس کے گرد گھومتے ہیں تاکہ مجموعی طور پر ایک ذرہ تعدیلی (تعدیلی) بن جائے۔ ایسے برقیوں کو آزاد برقیات (Free electrons) کہتے ہیں۔ جدید برقی نظریہ کے مطابق تمام مادے اپنے برتاؤ کے بنیاد پر تین حصوں میں تقسیم کیے جاتے ہیں۔ موصل، نیم موصل، غیر موصل یا حاجز۔

7.1 مقاصد (Objectives)

- یہ اکائی برقی ذوقطبیہ کے مفہوم کو پیش کرتی ہے۔ اس مفہوم کو قابل ادارک بنانے کے لیے یہ اکائی سمجھاتی ہے۔ اس اکائی میں برقی گزار مستقل پر بحث کی گئی ہے۔ اور بتایا گیا ہے کہ ایک مکتفہ کی گنجائش پر برقی گزار واسطے کا کیا اثر ہوتا ہے۔
- اس اکائی میں ہم ذو برقیات کے تصور کو سمجھیں گیں۔
 - ذو برقیوں میں برقی میدان کو اور برقی میدانوں میں قطبی ریزوں کی صف بندی معلوم کریں گیں۔
 - ہم ذو برقیہ میں برقی سکونیات کی مساوات اور دو برقیوں میں برقی میدان کو معلوم کر سکیں گیں۔
 - ذو برقیہ میں گھو اس کا مسئلہ کو بھی سمجھا سکیں گیں۔

7.2 ذو برقیوں میں برقی میدان (Electric Fields in Dielectrics)

ہم جانتے ہیں کہ مادہ ایک یا ایک سے زیادہ ذروں (atoms) سے بنا ہوا ہے۔ ایک ذرے کے پاس مثبت چارج شدہ نیوکلس (Positively charged Nucleus) ہوتا ہے اور ایک یا ایک سے زیادہ برقیہ (electrons) اس کے گرد گھومتے ہیں تاکہ مجموعی طور پر ایک ذرہ تعدیلی (تعدیلی) بن جائے۔ ایسے برقیوں کو آزاد برقیات (Free electrons) کہتے ہیں۔ جدید برقی نظریہ کے مطابق تمام مادے اپنے برتاؤ کے بنیاد پر تین حصوں میں تقسیم کیے جاتے ہیں۔

موصل (Conductors)

ایک اچھے موصل میں ہر ذرہ ایک آزاد برقیہ کو جنم دیتی ہے۔ ایک ٹھوس میں ذروں کی تعداد فی کیوبک سنٹی میٹر 10^{22} کے آڑر کا ہوتا ہے۔ اس لیے آزاد برقیوں کی تعداد بھی اتنا ہی یعنی 10^{22} ہوتا ہے۔ دھاتیں جیسے Al, Cu, Ag, \dots وغیرہ اچھے موصل کی کچھ مثالیں ہیں۔

نیم موصل (Semi-Conductors)

نیم موصل ایسے مواد ہیں جن کے ایصالیت (Conductivity) اچھے موصل اور غیر موصل کے درمیان ہے یعنی جن کی

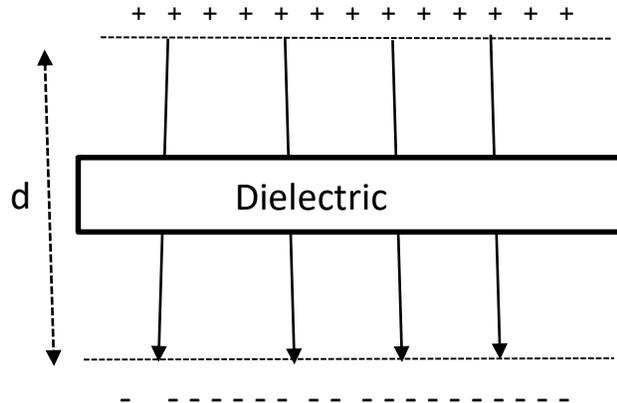
ایصالیت 10^{-10} گنا اچھے موصل کے ایصالیت کے برابر ہے۔ یہ مادے ایک مفید طبقہ بنانے میں استعمال ہوتے ہیں۔

غیر موصل یا حاجز: (Insulators)

ایک حاجز میں عملی طور پر کوئی آزاد برقیہ نہیں ہوتا۔ ان کی ایصالیت مشکل سے 10^{-20} گنا ہوتی ہے۔ اچھے موصل سے مادے جیسے گلاس، ایبونٹ (Ebonite) اور ابرک (Mica) حاجز کی کچھ مثالیں ہیں۔ ایسے مادوں کو ذوب برقیوں بھی کہتے ہیں۔
ذوب برقیوں یا حاجز ایک خاص طبقہ ہے مادوں کا جن کو بہت سے چیزوں میں استعمال کیا جاتا ہے جیسے برقی حاجز ریڈیو، کیپیسٹر..... وغیرہ۔ ذوب برقیوں کا مطالعہ، ہمیں مدد کرتا ہے سمجھنے میں کہ ایک خاص ذوب برقیہ کا چناؤ کیسے کرنا ہے ایک کیپیسٹر کے لیے اور باقی نوری رجحان (Optical Phenomenon) جیسے انعکاس (Reflection) انعطاف (refraction) اور دوری انعطاف (double refraction) سنگ مرمر کے ذروں میں۔

فطری ربر، کپاس، لکڑی کچھ مثالیں ہیں اچھے برقی ذوب برقیوں کی۔ کاغذ (paper) ابرک (Mica)، اور شیشہ (glass) اچھے ذوب برقیہ ہے جو کیپیسٹر کے استعمال میں ہوتے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ ذوب برقیوں کو کیپیسٹر میں استعمال کیا جاتا ہے تاکہ ان کی گنجائش بڑھائی جائے۔

اس تصور (Concept) کو سمجھنے کے لیے، ایک متوازی پلیٹ کیپیسٹر کو لیتے ہیں جس کے تختیوں پر آزاد چارج Q ہو جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔



شکل (7.1)

ہم جانتے ہیں کہ اگر ایک مثبت چارج اوپر والی پلیٹ پر ہو اور اگر منفی چارج نیچے والی پلیٹ پر ہے۔ اگر تختیوں کا رقبہ A ہے اور 'd' ان کے درمیان کی دوری ہو تو کیپیسٹر کی گنجائش ہمیں ملتی ہے۔

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (7.1)$$

پلیٹ پر چارج ہمیں پوٹینشل فرق دیتا ہے۔

$$V = Q/C \quad (7.2)$$

دوسری مساوات سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ اگر گنجائش کو بڑھایا جائے تو پلیٹوں کے درمیان پوٹینشل فرق کم ہو جاتی ہے اس بات کو ہم نیچے دئے گئے تصور سے سمجھا جاسکتا ہے۔

- (a) ذوبرقیہ بنتے ہے ذروں اور ریزوں (Molecules) کے ایک بہت بڑے تعداد ہے۔
- (b) ہر ذرے میں ایک مثبت چارج کا ایک مرکز ہوتا ہے جس کے گرد منفی چارج کے برقیہ ہوتے ہے۔
- (c) مثبت چارج اور منفی چارج برابر ہوتی ہے تاکہ ایک ذرہ برقی طور پر تعدیلی ہوتا ہے۔
- (d) ذوبرقیوں میں موصل کے مقابلے میں ذروں سے جھڑے ہوئے چارج حرکت کرنے کے لیے آزاد نہیں ہوتے ہے۔ یعنی چارج جو ہے وہ بندھے ہوئے ہوتے تھے ذوبرقیوں میں۔
- (e) ایک ریزہ (Molecule) بنتا ہے ایک ہی قسم یا مختلف قسم کے ذروں سے۔
- اس طرح سے ہم ذوبرقیوں کا برتاؤ، برقی میدانوں میں سمجھ سکتے ہے۔
- اگر ذوبرقیوں کو باہر کی برقی میدان میں ڈال جائے تو کیا ہوتا ہے؟ بنیادی طور پر ذوبرقیوں کے دو قسمیں ہے۔
- غیر قطبی (Non-Polar) ذوبرقیہ یا تعدیلی ریزوں یا غیر قطبی ریزوں سے بنے ہے اور قطبی ذوبرقیہ قطبی ریزوں سے بنے ہے۔ دو طریقہ کار ہے جن سے باہر کی برقی میدان مؤثر کرتا ہے چارج کی تقسیم کو ایک ذوبرقیہ میں۔
1. غیر قطبی ریزوں یا تعدیلی ذروں میں ذوبرقیوں کو ڈالنا ایک غیر قطبی ذوبرقیوں کے اندر۔
 2. قطبی ریزوں کے مستقل ذوبرقیوں کو قطبی ذوبرقیہ کے اندر صف بندی کرنا۔

7.3 دو قطبی امالی (Dipoles Induced)

- ذروں کے اس مثال پر غور کر لیں۔
- i. مثبت مرکز ایک ذرے کے بیچ میں ہوتا ہے۔
 - ii. منفی برقیہ اس مرکز کے گرد کرے کی شکل میں گھومتے ہے۔
 - iii. مثبت اور منفی چارج کا مرکز ایک ہی ہوتا ہے۔
 - iv. ذرہ برقی طور پر تعدیلی ہے اور کوئی برقی ڈائپول معیار اثر نہیں ہوتا۔
- اب جب ”تعدیلی“ ذرہ ایک برقی میدان میں رکھا جاتا ہے، دو خطے ایک مثبت اور ایک منفی چارج اس ذرے کے اندر برقی میدان سے مؤثر ہوتے تھے۔ مثبت مرکز میدان کی سمت میں منتقل ہو جاتا ہے اور منفی برقیہ اس کے الٹی سمت میں منتقل ہو جاتے ہے۔ لیکن مثبت اور منفی چارج ایک دوسرے کو کھینچتے ہے اور ذرے کو تھام کے رکھتے ہے۔
- اگر برقی میدان بہت بڑا ہے تو ذرے کی روانگی (Ionizes) ہوتی ہے اور اگر برقی میدان زیادہ بڑا نہیں ہے تو دو مختلف طاقتے، ایک جو کہ باہر کی برقی میدان سے ہے جو مثبت مرکز اور برقیہ کو ایک دوسرے سے دور لے کے جاتے ہیں اور دوسرا طاقت جو ان کی آپسی برقی

کشش سے ہے ایک دوسرے کی طرف کھینچتے ہے اور ایک توازن پیدا ہوتا ہے۔ جب یہ ہوتا ہے تو مثبت چارج کا مرکز تھوڑا سے ہل جاتا ہے ایک سمت میں اور منفی چارج کا مرکز دوسری سمت میں چلا جاتا ہے۔ اس کے نتیجے سے ایک تھوڑی سے دوری پیدا ہوتی ہے دونوں چارج کے مرکزوں کے بیچ میں اور ایک دو قطبی اعلیٰ ظاہر ہو جاتا ہے۔

پس ایک دو قطبی اعلیٰ پیدا ہوتا ہے ایک باہری برقیہ میدان کی موجودگی میں۔ اگر مثبت مرکز اور منفی مرکز کے درمیان کی دوری 'd' ہے تو پھر ڈائپول معیار اثر

$$\vec{P} = qd\hat{n} = q\vec{d} \quad (7.3)$$

جہاں \hat{n} یونٹ سمتیہ ہے \vec{d} کی سمت میں اور \vec{E} کی سمت میں ہوتا ہے۔ یعنی دوری 'd' باہری برقی میدان پر متناسب ہوتی ہے۔

$$\begin{aligned} \vec{p} &\propto \vec{E} \\ \vec{p} &= \alpha \vec{E} \end{aligned} \quad (7.4)$$

α کو جوہری تقطیب شدہ کہتے ہے اور اس کی اکائی $C^2 mN^{-1}$ اس کی قیمت ذرے کی ساخت پر منحصر ہے۔ یعنی ہم نے یہ دیکھا کہ برقی دو قطبی اعلیٰ پیدا ہوتا ہے ایک تعدیلی ذرے میں باہری برقی میدان کی موجودگی میں اسی طرح ہم ریزوں (Molecules) کے مسئلے کا مطالعہ بھی کر سکتے ہیں۔

ایک قسم کے ریزوں جن کو غیر قطبی ریزے کہتے ہیں، مثبت اور منفی چارج کے مرکز ہمیشہ ایک دوسرے کے اوپر ہوتے ہیں ایسے ریزوں کا ڈائی پول حرکت سفر (zero) ہوتا ہے باہری برقی میدان کی غیر موجودگی میں۔ ایسے ریزوں سے بنے ہوئے ذوبرقیوں کو غیر قطبی ذوبرقیہ (Non-Polar Dielectrics) کہتے ہیں۔ مثلاً ہوا، ہائیڈروجن، کاربن، بینزین،..... وغیرہ۔

پس غیر قطبی ریزوں کا مستقل ڈائپول معیار اثر نہیں ہوتا ہے۔ ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ان کا برتاؤ باہری برقی میدان کی موجودگی میں بالکل ایک تعدیلی جوہر کے جیسا ہونا چاہئے۔ یعنی جب ایک تعدیلی جوہر یا غیر قطبی ریزہ باہری برقی میدان میں رکھا جاتا ہے تو مالیت کی مدد سے اس پر چھوٹا سا ڈائپول معیار اثر برقی میدان کی سمت میں آتا ہے۔

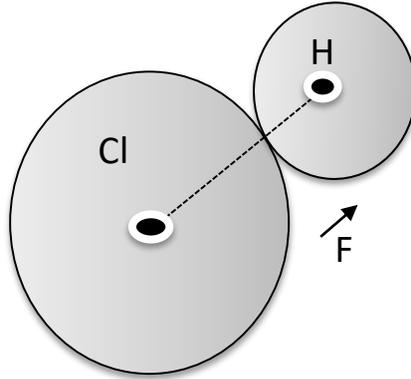
7.4 برقی میدانوں میں قطبی ریزوں کی صف بندی

(Alignment of Polar Molecules in Electric Fields)

کچھ ریزے ایسے بنے ہوتے ہیں کہ مثبت اور منفی چارج کے مراکز ایک دوسرے کے ساتھ جڑے نہیں ہوتے ہیں۔ ایسے ریزے برقی طور پر تعدیلی ہوتے ہیں مگر باہری برقی میدان کے باوجود برقی ڈائپول معیار اثر رکھتے ہیں اور ان کو قطبی ریزے بھی کہا جاتا ہے۔ یعنی جو دو برقیہ ایسے ریزوں سے بنتے ہیں ان کو قطبی ذوبرقیہ کہتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ ہائیڈروجن کلورائیڈ یعنی HCl یا کہ دوزروں (Diatomic) والا ریزہ ہے جو دو مختلف ذروں سے بنا ہوا ہے۔ بنیادی طور پر یہ دونوں ذرے گول ہیں جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ جب ان ذروں سے HCl بنتا ہے ہائیڈروجن کا برقیہ تھوڑا سا

Cl کے ڈھانچے سے اوپر چلا جاتا ہے اور پیچھے مثبت H کا مرکز جھوڑتا ہے۔ یعنی Cl کی جانب تھوڑا منفی چارج زیادہ ہوتا ہے اور H کی جانب مثبت چارج زیادہ ہوتا ہے۔



شکل (7.2)

اس مثبت اور منفی چارج کے درمیان کی دوری سے HCl میں مستقل ڈائپول معیار اثر پیدا ہوتا ہے۔ یعنی قطبی ریزوں کے اندر منتقل برقی ڈائی پول S ہوتے ہیں۔ اگر ان ریزوں کو باہری برقی میدان میں رکھا جائے تب مثبت چارج پر طاقت یعنی $+F$ ، منفی چارج والی طاقت $-F$ کو رد کرتے ہیں۔ یعنی یہ طاقتیں ایک جوڑا (couple) بناتی ہیں۔ اس لیے ہر برقی ڈائی پول ایک قوت مروڑ (Torque) محسوس کرتا ہے جو اس کو برقی میدان کی سمت میں لاتا ہے۔

موجودہ دروس میں ہم نے یہ سیکھا کہ کیسے غیر قطبی ریزے یا تعدیلی ذرے اور قطبی ریزے برتاؤ کرتے ہیں جب ان کو باہری برقی میدان میں رکھا جاتا ہے۔ اب ہم یہ دیکھے گئے کہ ذورقیہ مادے کو باہری برقی میدان میں رکھنے سے کیا ہوتا ہے۔

7.5 ذورقیوں کی تقطیب (Polarization of Dielectrics)

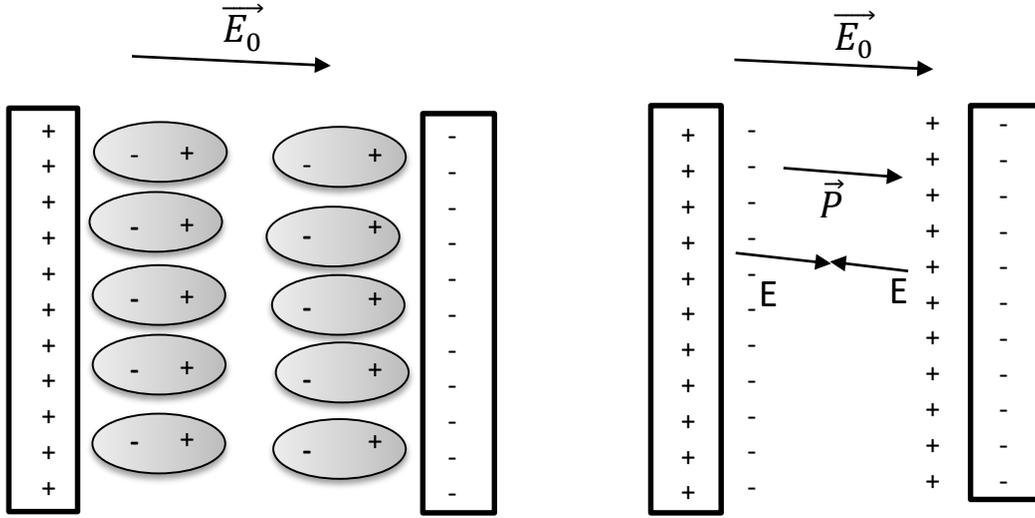
ہمیں بات یہ پتہ چلی ہے کہ ذورقیوں کے دو قسمیں ہیں۔ غیر قطبی ذورقیہ غیر قطبی ریزوں یا تعدیلی ذروں سے بنے ہیں اور قطبی ذورقیہ جو قطبی ریزوں سے بنے ہیں۔

غیر قطبی ذورقیہ: جب ایک غیر قطبی ذورقیہ، جو غیر قطبی ریزوں اور تعدیلی ذروں سے بنے ہیں، باہری برقی میدان میں رکھا جائے تو برقی میدان کی سمت میں ڈائپول معیار اثر حاصل ہوتا ہے۔

قطبی ذورقیہ: جب ایک قطبی ذورقیہ، جو قطبی ریزوں سے بنے ہیں اور مستقل ڈائپول معیار اثر رکھتے ہیں، جب ان کو باہری برقی میدان میں رکھا جاتا ہے تو قطبی ریزوں کا مستقل ڈائپول معیار اثر ایک قوت مروڑ محسوس کرتا ہے اور ان کو برقی میدان کی سمت میں رکھ دیتے ہیں۔

پس اوپر کے طریقہ کاروں سے یہ بات واضح ہو گئی کہ دونوں غیر قطبی ذورقیہ اور قطبی ذورقیہ جو ہری سالماتی ڈائی پول بناتے ہیں ذورقیہ میں میدان کی سمت میں ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ذورقیہ قطبی ہوتے ہیں۔ مجموعی طور پر ذورقیہ برقی طور پر تعدیلی ہے اور ذورقیوں کے اندر کوئی زائد چارج نہیں ہوتا۔

اب ہم مقداری طور پر ذو برقیہ کی تفصیل بیان کریں گے۔ اب ہم ایک یکساں (Homogeneous) اور ہم رخ (Isotropic) تختی لیتے ہیں۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ ذو برقیوں کی خصوصیات پر سمت میں ایک جیسے ہوتے ہیں۔ اگر ایک ذو برقیہ تختی کو ایک باہری برقی میدان \vec{E}_0 میں رکھا جائے (شکل 7.3) اگر ذو برقیہ مواد تعدیلی ذروں یا غیر قطبی ریزوں سے بنا ہو تو ایک ڈائپول معیار اثر ہر ذرے میں پیدا ہوتا ہے۔ اسی طرح اگر ایک ذو برقیہ قطبی ریزوں سے بنا ہے تو ہر مستقل ڈائی پول ایک قوت مروڑ محسوس کرے گا جو اس کو میدان کی سمت میں رکھنے کی کوشش کرتا ہے۔ مزید ڈائپول معیار اثر کی سمت کسی بھی ذو برقیہ میں ایک جیسی ہوتی ہے جو میدان کی سمت ہے۔



شکل (7.3)

مثبت اور منفی چارج کے مراکز کی دوری ذو برقیہ تختی کے چہروں پر سطح چارج بناتی ہے۔ جو پھر برقی میدان بناتی ہے ذو برقیوں کے چہروں پر جیسے \vec{E} جو ہری برقی میدان کے سمت کے مخالف ہے۔ برقی میدان کا نتیجہ ایک ذو برقیہ کے اندر سمتیہ کے نشان سے دیا جاتا ہے۔ \vec{E}_0 اور \vec{E} اس رجحان کو ریاضی کے طور پر سمجھنے کے لیے ہم نقطیہ \vec{P} کو بیان کرتے ہیں۔ جملہ ڈائپول معیار اثری کی حجم

$$\vec{P} = \text{Dipole Movement Per volume}$$

اگر ایک ذو برقیہ کے اندر N قطبی ریزے فی کی حجم

$$\vec{P} = N\vec{p} \quad (7.5)$$

ایک یکساں اور ہم رخ ذو برقیہ میں \vec{p} برقی میدان \vec{E} پر منحصر ہے۔

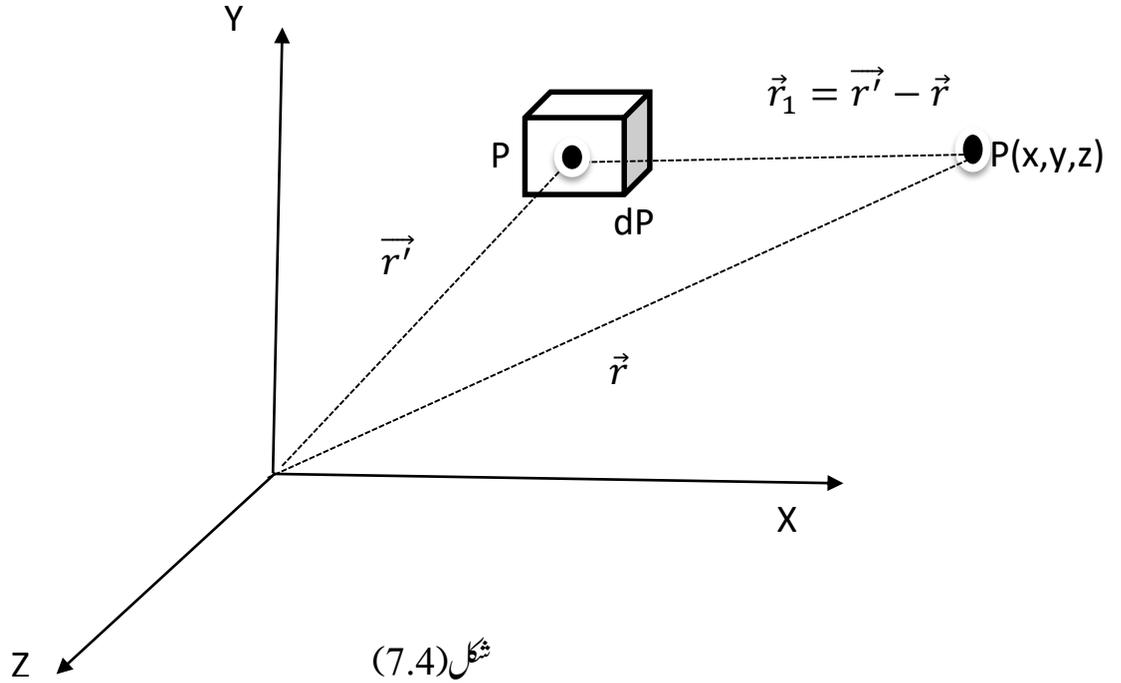
$$\vec{p} \propto \vec{E} \quad (7.6)$$

$$\vec{p} = \chi \epsilon_0 \vec{E} \quad (7.7)$$

جہاں χ کو برقی اثر پذیری کہا جاتا ہے۔ ذو برقی مادے جو مساوات (7.7) کے تابع ہوتے ہیں ان کو قطبی ذو برقیہ کہتے ہیں۔ مساوات (7.7) کو تجرباتی طور پر بہت سے مادوں کے لیے صحیح پایا گیا اور برقی میدان کمزور ہو۔ مساوات (7.7) ہمیں یہ بھی بتاتی ہے کہ ذو

برقی کی اثر پذیری ہمیں ایک حد بتاتی ہے جہاں تک اس کو ایک باہری برقی میدان میں تقطیب کہا جاسکتا ہے۔ ایک ذوبرقیہ کی اثر پذیری اس کی ساخت پر منحصر ہے اور باہری عوامل پر جیسے کہ درجہ حرارت۔ مزید مساوات (7.6) میں \vec{E} کل برقی میدان ہے ایک ذوبرقیہ میں جو کہ آزاد چارج اور ذوبرقیہ کی تقطیب سے ہے۔
نوٹ: \vec{P} ہے ڈائپول معیار اثر اس کی اکائی Cm^{-2} ہے۔

7.6 قطبی شے کا برقی میدان (Electric Field of a Polarized Object)



شکل (7.4)

مان لو ایک قطبی ذوبرقیہ شے ہے جس میں بہت سے ذرے یاریزے برقی میدان کی سمت میں ہے۔ اگر اس مادے کا ڈائپول معیار اثر فی حجم \vec{P} ہے۔ اب ایک سوال پیدا ہوتا ہے کہ اس شے کی وجہ سے ایک خاص جگہ پر کتنا برقی میدان پیدا ہوتا ہے؟
برقی سکونیات SI میں ہم جانتے ہیں کہ ایک ڈائی پول کی وجہ سے کتنا برقی میدان ہوتا ہے۔ اس علم کی بنیاد پر ہم اس شے کو بہت سے ویسے ڈائی پول S میں تقسیم کریں گے اور ان کے برقی میدانوں کو جوڑیں گے تاکہ ہمیں پورا برقی میدان پتہ چل سکے۔
اس شے کا ایک چھوٹا سا حصہ لیتے ہیں۔ جس کا ڈائپول معیار اثر \vec{P} ہو۔ پہلے اس ڈائی پول کی وجہ سے اس جگہ پر برقی قوت (Electric Potential) پتہ کریں گے۔ اور پھر ان سب برقی قوتوں کو جوڑیں گے تاکہ پوری برقی قوت پتہ چل جائے۔ ہمیں یہ پتہ ہے کہ ایک اکیلے ڈائی پول کے لیے \vec{r} نقشہ پر برقی قوت ہوتی ہے۔

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}\vec{P}}{r^2} \quad (7.8)$$

شکل (7.4) ایک حجم کا حصہ دکھاتی ہے۔ جو ذوبرقیہ کا ہے $r(x, y, z)$ اور جس کا $\vec{\rho} dv$ ڈائپول معیار اثر اس حجم کے حصہ کی وجہ سے ρ نقشہ پر برقی قوت ہوگی۔

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}_1}{r_1^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}_1}{r_1^2} dv \quad (\vec{p} = \vec{\rho} dv) \quad (7.9)$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{r}_1 \quad (7.10) \quad \text{جہاں}$$

پورے حجم پر جوڑنے کے بعد برقی قوت کچھ اس طرح سے آتی ہے

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} dv \quad (7.11)$$

اب ہم یہ دکھا سکتے ہیں۔

$$\nabla \left(\frac{1}{r_1} \right) = \frac{\hat{r}_1}{r_1^2} \quad (7.12)$$

جہاں ∇^2 کو (Laplacian Operator) بولتے ہیں۔

7.7 ذوبرقیہ میں برقی سکونیات کی مساوات (نقل مکان سمتیہ \bar{D})

(Electrostatic Equations in Dielectrics)

ہمیں برقی سکونیات S کی بنیادی مساوات یاد ہے جس کو گواس کا کلیہ بھی بولتے ہیں اور جو

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \quad (7.13)$$

جہاں ρ کو حجم چارج کثافت اور \vec{E} کو برقی میدان کہا جاتا ہے۔ لیکن ذوبرقیہ کے لیے یہ مناسب ہے کہ اس برقی میدان کو دو حصوں میں تقسیم کیا جائے۔

ایک جو باؤنڈ تقطیب (Bound Polarization) چارج کثافت (ρ_b) کی وجہ سے ہے اور دوسرا جو آزاد چارج کی وجہ سے ہے۔ پھر ہم ذوبرقیہ کے اندر پوری حجم چارج کثافت (ρ) کو باؤنڈ تقطیب چارج کثافت (ρ_b) اور مفت چارج کثافت (ρ_f) کے جوڑنے سے ظاہر کریں گے۔

$$\rho = (\rho_b) + (\rho_f) \quad (7.14)$$

پس ذوبرقیہ کے لیے گواس کا کلیہ کچھ اس طرح کا بن جاتا ہے۔

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f + \rho_b}{\epsilon_0} = \frac{\rho_f - \vec{\nabla} \cdot \vec{p}}{\epsilon_0} \quad (\because \rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{p}) \quad (7.15)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \right) = \frac{\rho_f}{\epsilon_0} \quad (7.16)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{p}) = \rho_f \quad (7.17)$$

اب ہم ایک نیا سمتیہ \vec{D} کو بیان کریں گے جس کو برقی نقل مکان سمتیہ کہتے ہیں۔

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{p} \quad (7.18)$$

مساوات (7.18) کو مساوات (7.17) میں استعمال کرنے کے بعد گواس کا کلیہ کچھ اس طرح بن جاتا ہے۔

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \quad (7.19)$$

تکملہ (Integral) کی شکل کو اس طرح سے لکھا جاتا ہے۔

$$\int \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_f \quad (7.20)$$

جہاں Q_f پوری آزاد چارج ہے۔ یعنی ہم \vec{D} کو گواس کا کلیہ کی مدد سے ناپ سکتے ہیں اس چارج distribution میں جہاں قطبی،

Symmetry Cylindrical یا Planar، Spherical ہو۔ \vec{E} کے کرل کی مساوات میں کوئی تبدیلی نہیں آتی ہے۔

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (7.21)$$

قطبی دو برقیوں میں تقطیب \vec{P} برقی میدان پر ہی منحصر ہے۔

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (7.22)$$

بشرطیکہ کہ \vec{E} کمزور ہو۔

χ کو برقی اثر پذیری کہتے ہیں۔

مساوات (7.18) اور (7.22) سے ہمیں یہ ملتا ہے۔

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} \quad (7.23)$$

اگر ہم $\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi)$ لکھیں۔

تو پھر ذرو برقیہ کے اندر \vec{D} کچھ اس طرح کا ہو گا۔

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (7.24)$$

جہاں ϵ کو ذرو برقیہ شے کی مختاری کہتے ہیں۔

مساوات (7.23) ہمیں یہ بتاتی ہے کہ \vec{D} پورے برقی میدان پر منحصر ہے۔ اگر ہم مساوات (7.24) کو ϵ_0 سے تقسیم کریں گے تو ہمیں

ایک شے ملتی ہے۔

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \chi = K \quad (7.25)$$

$\epsilon_r K$ کو اضافیت مختاری یا ذوبرتی مستقل کہا جاتا ہے۔ مساوات (7.24) اور (7.25) سے ہمیں ملتا ہے۔

$$\vec{D} = \epsilon_0 K \vec{E} \quad (7.26)$$

اثر پذیری اور ذوبرتیہ مستقل ایک ذوبرتی شے کی اہم بڑی خصوصیات میں سے ہے۔ اگر ایک ایسے چیز کو جس کا ذوبرتی مستقل بڑا ہو۔ ایک برقی میدان میں ڈالا جائے تو ذوبرتیہ کے اندر برقی میدان کم ہو جائے گا۔ اس خصوصیت کو گنجائش بڑھانے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے اور کیپیسٹر کو جو ڈکرنے کے لیے کافی اہم ہے۔

پس خلا میں برقی سکونیات قوتیں کچھ اس طرح سے ہے۔

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = \frac{\rho_f}{\epsilon_0} \text{ and } \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (7.27)$$

سیدھے ذوبرتیوں کے لیے

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = \rho_f \text{ or } \vec{\nabla} \cdot (K \vec{E}) = \frac{\rho_f}{\epsilon_0} \text{ \& } \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (7.28)$$

اگر K ہر جگہ ایک جیسا ہے تو یہ ایک مستقلہ کو پھر ہم لکھ سکتے ہیں۔

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times (K \vec{E}) = \vec{\nabla} \times \vec{D} = 0 \quad (7.29)$$

مساوات (7.28) اور (7.29) سے خلا میں برقی میدان

$$K E = E_0 \quad (7.30)$$

مساوات (7.30) ہمیں بتاتی ہے کہ ایک ذوبرتیہ اوسط میں جس کا ذوبرتیہ مستقل K ہے، برقی میدان K سے کم ہو جاتا ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ ایک متوازی پلیٹ کے لیے جو چارج پلیٹ پے ہوتی ہے وہ ایک جیسی ہوتی ہے۔ یعنی اس کی گنجائش یعنی $C = Q/V$ سے بڑھ جاتی ہے۔ مساوات $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$ سے یہ بات ظاہر ہے کہ

$$C = \frac{\epsilon_0 K A}{d} \quad (7.31)$$

ہم مساوات (7.31) کو ایک ذوبرتی والے متوازی پلیٹ کیپیسٹر کے لیے استعمال کر سکتے ہیں۔

7.8 دو برقیوں میں برقی میدان (Electric Field in a Dielectric)

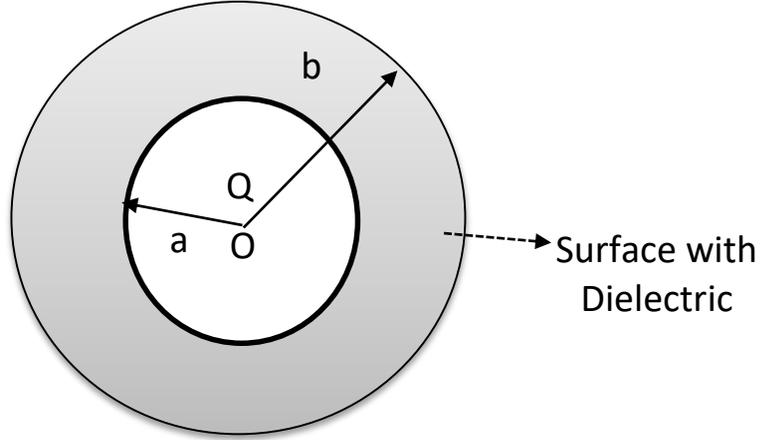
ایک دھاتی کرہ (Metal sphere) جس کا نصف قطر (a) اور چارج (Q) ہے۔ یہ ایک سیدھے ذوبرتیہ مواد سے گھیرا ہوا ہے

جس کا ذوبرتیہ 'K' مستقل دوری b تک۔

ان خطوں میں برقی میدان پتہ کرنا ہے۔ $a < r < b$ اور $r > b$ اور مرکز پر برقی قوت پتہ کرنی ہے۔

چوں کہ ایک موصل میں چارج ہمیشہ سطح پر ہوتا ہے۔

گو اس کا کلیہ کی مدد سے ہم کہہ سکتے ہیں۔ $E = 0$ جب $r < a$



شکل (7.5)

خط $a < r < b$ میں برقی میدان پتہ کرنے کے لیے ہم $DA = Q$ کا استعمال کریں گے۔

$$D(4\pi r^2) = Q$$

$$\bar{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r} (a < r < b) \quad (7.32)$$

ہم جانتے ہیں کہ $D = \epsilon_0 K \bar{E}$ یا $\bar{E} = \frac{\bar{D}}{\epsilon_0 K}$

$$\bar{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 K r^2} \hat{r} = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \hat{r} (a < r < b) \quad (7.33)$$

خط $r > b$ کے لیے جہاں ذوبرقیہ موجود نہیں ہے۔

$$\bar{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r} (r > b) \quad (7.34)$$

مرکز پر برقی قوت (Electric Potential)

$$V = - \int_{\infty}^0 \bar{E} \cdot d\bar{l} = - \int_{\infty}^b \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} dr - \int_b^a \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} dr - \int_a^0 0 \cdot dr \quad (7.35)$$

$$V = \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{1}{\epsilon_0 b} + \frac{1}{\epsilon_0 a} - \frac{1}{\epsilon_0 b} \right] \quad (7.36)$$

7.9 ذوبرقیہ میں گواں کا کلیہ (Gauss's Law for Dielectrics)

ذوبرقیہ اوسط میں گواں کا کلیہ تھوڑا سا مختلف ہوتا اس کے جو برقی سکونیاں S میں ہوتا ہے۔ اور یہ بات درست ہوگی اگر ہم ایک اور

نفوض کا تعارف کرائے جس کو نقل مکان سمتیہ کہتے ہیں اور جو برابر ہوتی ہے۔

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

\vec{D} کی زبان میں گواس کا کلیہ کہتا ہے ایک بند سطحی سے \vec{D} کا بہاؤ برابر ہوتا ہے پورے آزاد چارج کے جس اس بند سطحی میں بند رہتا ہے۔

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q \text{ or } \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$$

برقی مختاری، اثر پذیری اور ذوب برقیہ مستقل ایک یکساں اور ہم رخ ذوب برقیہ کو قطعی ذوب برقیہ کہتے ہیں۔ $\vec{p} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$

جہاں χ کو برقی اثر پذیری کہتے ہیں \vec{D} (Displacement value) اس ذوب برقیہ کے لیے

$$D = \epsilon_0(1 + \chi)\vec{E} = \epsilon\vec{E}$$

جہاں ϵ کو اوسط کی مختاری کہتے ہیں۔

ہم ایک اور بغیر جہت کی مقدار K کو تعارف کرتے ہیں جو $K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ اور یعنی $\vec{D} = \epsilon_0 K \vec{E}$

\vec{D} خالی آزاد چارج پر منحصر ہے اور کسی کے بغیر بھی حاصل کیا جاتا ہے۔

گنجائش پر دو قریبہ کا اثر: ایک ذوب برقیہ کے اندر برقی میدان جو آزاد چارج کی وجہ سے ہوتا ہے K کی مقدار سے کم ہو جاتا ہے۔ اس کی وجہ سے ایک کیپیسٹر کی گنجائش بڑھ جاتی ہے جو ایک ذوب برقیہ سے بھرا ہوا ہے اور جو برابر ہوتی ہے اس چیز کے ذوب برقیہ مستقل کے۔

7.10 حل شدہ مثالیں (Solved Problems)

حل شدہ مثال 1

دو متوازی پلیٹیں جن کا تراشی رقبہ 100 cm^2 ہے اور برابر اور مخالف چارج $1.0 \times 10^{-7} \text{ C}$ کا دو پلیٹوں کے درمیان کی جگہ جو ذوب برقیہ مواد سے بھرا گیا ہے اور ذوب برقیہ کے اندر برقی میدان $3.3 \times 10^5 \text{ V/m}$ کا ہے۔ ذوب برقیہ مستقل کیا ہوگا؟ اگر ذوب برقیوں کے بغیر پلیٹوں کا برقی میدان $E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ جہاں J پلیٹوں کی چارج کثافت ہے۔

حل: سطحی چارج کی کثافت $\sigma = Q/A$

$$\sigma = \frac{1.0 \times 10^{-7}}{100 \times 10^{-4}} = 10^{-5} \text{ C/m}^2$$

ذوب برقیہ کی غیر موجودگی میں پلیٹوں کے بیچ میں برقی میدان

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{1.0 \times 10^{-5}}{8.85 \times 10^{-12}} \frac{\text{cm}^{-2}}{\text{C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2}} = \frac{1.0 \times 10^7}{8.85} \text{ V/m}$$

ذوب برقیہ کی موجودگی میں برقی میدان کم ہوتا ہے ذوب برقیہ مستقل کے برابر والے نمبر سے یعنی $E = E_0/K$

$$K = \frac{E_0}{E} = \frac{1.0 \times 10^7}{8.85 \times 3.3 \times 10^5} = 3.4$$

حل شدہ مثال 2

مان لیجیے کہ ایک متوازی پلیٹ کیپیسٹر دو چکور پلیٹوں کی بنی ہو جن کا رقبہ $6.45 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ ہے اور جن کی آپس میں دوری $2 \times 10^{-3} \text{ m}$ کی ہے۔ 100 V کی برقی قوت کو استعمال کیا گیا۔ اگر ذوب برقیہ مستقل (قیمت 6) پلیٹوں کے بیچ میں ڈالا جائے تو پھر بتائیں۔

(i) کیپیسیٹر کی گنجائش (ii) ہر ایک پلیٹ پر کتنی چارج جمع ہوگی (iii) نقل مکان (iv) (D) تقطیب P

حل:

i. ہم جانتے ہیں کہ ذوبرقیہ سے بھرے ہوئے متوازی پلیٹ کیپیسیٹر کی گنجائش

$$C = \frac{K\epsilon_0 A}{d} = \frac{6 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 6.45 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-3}} = 1.7 \times 10^{-11} \text{ First}$$

ii. پلیٹ پر جمع چارج برابر ہوتی ہے CV کے جہاں

$$V = 100v \text{ \& } C = 1.7 \times 10^{-11} f$$

iii. بس چارج - $-1.7 \times 10^{-9} c$

iv. ذوبرقیہ میں گو اس کا کلیہ سے

$$DA = Q \quad \text{یا} \quad D = Q/A$$

$$D = Q/A = \frac{1.7 \times 10^{-9} c}{6.45 \times 10^{-9} m^2} = 2.6 \times 10^{-6} cm^{-2} \quad \text{پس}$$

چوں کہ $E = \frac{V}{d}$ اور $D = \epsilon_0 E + P$

$$P = D - \epsilon_0 E = \left[2.6 \times 10^{-6} - \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 100}{2.0 \times 10^{-3}} \right]$$

$$P = 2.6 \times 10^{-6} - 4.4 \times 10^{-7} = 2.2 \times 10^{-6} cm^{-2}$$

حل شدہ مثال 3

ایک بڑھا دھاتی پلیٹ جس کا رقبہ $1m^2$ ہے $4.4 \times 10^{-10} c$ چارج کے لیے چلتا ہے۔ اس پلیٹ کے نزدیک ایک جگہ پر

برقی میدان بتاؤ؟

حل: مان لو کہ پلیٹ کی سطح پر T چارج کثافت ہے۔

جیسا کہ \vec{E} اور $d\vec{s}$ آپس میں عمودی (Perpendicular) ہے اور انکا مضامینا ضرب صفر ہے۔ یعنی

$$\oint E \cdot ds = \partial AE = \frac{JA}{\epsilon_0} \text{ or } \vec{E} = J/2 \epsilon_0$$

چوں کہ $A = 1m^2$

$$J = \frac{Q}{A} = \frac{4.4 \times 10^{-10} c}{1m^2} = 4.4 \times 10^{-10} cm^{-2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{J}{2\epsilon_0} = \frac{4.4 \times 10^{-10}}{2 \times 8.85 \times 10^{-12}} = 24.9 V/m = 25 V/m$$

حل شدہ مثال 4

متوازی تختیوں والے کنڈکٹس کی تختیوں کا رقبہ 2 مربع میٹر ہے۔ ان کا درمیانی فاصلہ $5 \times 10m$ ہے اور ان کے درمیان عائد کردہ تفاوت 10

وولٹ ہے۔

i. (a) گنجائش (b) ہر تختی پر بار و (c) ہر تختی کی سطح پر بار و کی کثافت (d) برقی حدت (e) ان کے درمیانی جگہ میں برقی نقل مکان معلوم کیجیے۔

ii. جب بیٹری کو عائد کر کے $K=S$ مستقل اور $0.5 \times 10 \text{m}$ کید بازت والے برق گزار کو داخل کیا جائے تو E, C تفاوت توہ اور برقی نقل مکان معلوم کیجیے۔

$$\begin{aligned} \text{حل: (i)} \\ a) C &= \frac{\epsilon_0 KA}{d} = \frac{8.9 \times 10^{-12} \times 1 \times 2}{5 \times 10^{-3}} = 3.56 \times 10^{-3} \mu F \\ b) q &= CV = 3.56 \times 10^{-9} \times 10^4 = 3.56 \times 10^{-5} \text{ coul} \\ c) \sigma &= \frac{q}{A} = \frac{3.56 \times 10^{-5}}{2} = 1.78 \times 10^{-5} \text{ Coul}/m^2 \\ d) E &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{1.78 \times 10^{-5}}{8.9 \times 10^{-12}} = 2.0 \times 10^6 \text{ volt}/m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \\ C^1 &= CK = 3.56 \times 10^{-9} \times 5 = 17.8 \times 10^{-3} \mu F \\ q^1 &= C^1 V = 17.8 \times 10^{-9} \times 10^4 = 17.8 \times 10^{-5} \text{ Coul} \\ \sigma^1 &= \frac{q^1}{A} = \frac{17.8 \times 10^{-9} \times 10^4}{2} = 8.9 \times 10^{-5} \text{ coul}/m^2 \\ E &= \frac{\sigma^1}{K \epsilon_0} = \frac{8.9 \times 10^{-5}}{5 \times 8.9 \times 10^{-12}} = 2.0 \times 10^6 \text{ Volt}/m \\ D &= \epsilon_0 KE = \frac{5 \times 8.9 \times 10^{-5} \times 8.9 \times 10^{-12}}{5 \times 8.9 \times 10^{-12}} = 8.9 \times 10^{-5} \text{ Volt}/m \\ P \cdot d &= E^1 d = 2 \times 10^6 \times 0.5 \times 10^{-2} = 1 \times 10^4 \text{ Volt} \end{aligned}$$

7.11 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- جب ایک ذو برقیہ کو باہری برقی میدان میں رکھا جاتا ہے۔ تو یہ تقطیب شدہ ہو جاتا ہے۔
- ذو برقیہ (تقطیب): برقی دو قطبیہ معیار اثرنی حجم \vec{p} کو تقطیب کہتے ہے۔
- ذرہ (Atomic) تقطیب پزیری: برقی دو قطبیہ معیار اثر جو ایک ذرہ یا ریزہ نے حاصل کیا ہے۔ وہ برقی میدان پر منحصر ہے۔ اور $\vec{p} = \alpha E$ کی شکل میں لکھا جاتا ہے۔ جہاں α کو ذری تقطیب پزیری کہتے ہے۔
- بند (بالونز) چارج: برقی میدان جو ایک قطبی ذو برقیہ پیدا کرتا ہے وہ برابر ہوتا اس برقی میدان کے جو ایک بالونز سطح چارج کثافت $\vec{\rho}_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ اور $J_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$ سے بنتا ہے۔
- ذو برقیہ میں گواں کا کلیہ: ذو برقیہ اوسط میں گواں کا کلیہ تھوڑا سا مختلف ہوتا اس کے جو برقی سکونیاں S میں ہوتا ہے۔ اور یہ بات درست ہوگی اگر ہم ایک اور نفوذ کا تعارف کرائے جس کو نقل مکان سمتیہ کہتے ہے اور جو برابر ہوتی ہے۔ $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$
- \vec{D} کی زبان میں گواں کا کلیہ کہتا ہے ایک بند سطح ہی سے \vec{D} کا بہاؤ برابر ہوتا ہے پورے آزاد چارج کے جس اس بند سطح میں بند

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q \text{ or } \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \text{ رہتا ہے۔}$$

برقی مختاری، اثر پذیری اور ذوب برقیہ مستقل ایک یکساں اور ہم رخ ذوب برقیہ کو قطبی ذوب برقیہ کہتے ہیں۔ $\vec{p} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$

جہاں χ کو برقی اثر پذیری کہتے ہیں \vec{D} (Displacement value) اس ذوب برقیہ کے لیے

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

جہاں ϵ کو اوسط کی مختاری کہتے ہیں۔

ہم ایک اور بغیر جہت کی مقدار K کو تعارف کرتے ہیں جو $K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ اور یعنی $\vec{D} = \epsilon_0 K \vec{E}$

\vec{D} خالی آزاد چارج پر منحصر ہے اور کسی حوالہ کے بغیر بھی حاصل کیا جاتا ہے۔

7.12 کلیدی الفاظ (Keywords)

- غیر موصل: وہ مادے ہوتے ہیں جن سے برقی رو نہیں گزر سکتی
- غیر قطبی سالمہ (Non-Polar): اگر مثبت بار کا برقی مرکز اور منفی بار کا برقی مرکز ایک ہی نقطے پر منطبق ہو
- قطبی سالمات (Polar): اگر مثبت اور منفی باروں کے مرکز ایک دوسرے سے ہٹے ہوئے ہوں

7.13 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

7.13.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. ذرہ ڈائپول معیار اثر کی تعریف کرو؟
2. ذوب برقی تقطیب سے کیا مراد ہے؟
3. قطبی اور غیر قطبی سالمات کیا ہوتے ہیں۔
4. ذوب برقیوں سے کیا مراد ہے۔
5. غیر قطبی ذوب برقیہ سے کیا مراد ہے۔
6. قطبی ذوب برقیہ سے کیا مراد ہے۔
7. سمتیہ نقل مکان (نقل مکان سمتیہ) کی مساوات $\vec{D} = \dots$
8. ذوب برقی مستقل کو کس مساوات سے ظاہر کیا جاتا ہے؟
9. ذوب برقی مواد کے دو مثالیں دیجیے۔
10. مثبت اور منفی چارج کا مرکز۔۔۔۔۔ ہوتا ہے۔

- (a) صفر (b) ایک ہی (c) دو (d) ان میں سے کوئی بھی نہیں
11. غیر موصل کے دو مثالیں دیجیے۔
12. نیم موصل سے کیا مراد ہے؟
13. ذرہ برقی طور پر تعدیلی ہے اور کوئی برقی ڈائپول معیار اثر کی قیمت۔۔۔۔ ہوتی ہیں۔
- (a) صفر (b) ایک (c) دو (d) ان میں سے کوئی بھی نہیں

7.13.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات; (Short Answer Type Questions)

1. ذریڈائپول معیار اثر اور ذری تقطیب کی تعریف کرو؟
2. دو برقی مواد کیا ہے؟ مثالیں بھی دے؟
3. ذو برقی تقطیب سے کیا مراد ہے؟ دو برقیوں کی افادیت پر بحث کیجیے؟
4. قطبی اور غیر قطبیسالماتیں کیا ہوتے ہیں۔ مثالیں بھی دیجیے۔
5. ظرفیہ میں ذخیرہ توانائی کے لیے عبارت اخذ کرو۔ تختیوں کے درمیان کسی ذو برقی شے کی موجودگی میں ذخیرہ توانائی معلوم کرو جب کہ (a) برقی خانے کا برقیانہ منقطع کرنے پر (b) برقاؤ برقی خانے کو کسی دور سے جوڑنے پر
6. بیرونی میدان میں ذو برقی واسطہ کے برقاؤ کی وضاحت کرو۔
- 7.

- a. ایک متوازی تختیوں والے کثیفے میں دو تختیوں کے درمیان فاصلے کے $\frac{2}{3}$ حصے کو ذو برقی سے بھرا گیا جس کے نتیجے میں کثیفے کی گنجائش 2.25 گنا بڑھ گئی۔ ذو برقیے کا مستقل معلوم کیجیے۔
- b. غیر قطبی سالمات اور برقی تقطیب کو سمجھائیے۔
- c. برقی موصل اور غیر موصل کیا ہوتے ہیں؟

7.13.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. دو برقی مواد کیا ہے؟ مثالیں بھی دے؟ دو برقیوں کی افادیت پر بحث کیجیے؟
2. \vec{D} , \vec{E} & \vec{P} ان تین برقی Vectors کی تعریف اور وضاحت کیجیے۔ $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{p}$ کو ثابت کرو؟ اور ان کی اکائی بھی بتائے؟
3. برقی نقل مکان سمتیہ کی وضاحت کیجیے؟

7.13.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

6. ایک اوسط کا ذو برقی 5 مستقل ہے۔ برقی نقل مکان سمتیہ کی قیمت $2 \times 10^{-2} \text{ C/m}^2$ ہے۔ برقی میدان کی Intensity

$$D = K\epsilon_0 E / \text{or } E = D / K\epsilon_0 \text{؟ کی مقدار پتہ کیجیے؟}$$

7. $8 \times 10^{-3} \text{ m}$ جڑ دہاڑت والے ایک محور مادے کے کندے کو جب متوازی تختیوں والے لکٹھے کی تختیوں کے درمیان داخل کیا

جاتا ہے تو معلوم ہوا کہ لکٹھے کی گنجائش کو اپنی اصلی قیمت پر بحال کرنے کے لیے تختیوں کے درمیان فاصلے میں $7 \times 10^{-3} \text{ m}$ کا

اضافہ کرنا پڑتا ہے۔ مادے کا ذوب برقیہ مستقل محسوب کیجیے۔

8. ایک متوازی تختیوں والے لکٹھے کی تختیوں کا درمیانی فاصلہ $2.4 \times 10^{-2} \text{ m}$ ہے۔ ان کے درمیانی $1.2 \times 10^{-2} \text{ m}$ جڑ

دہاڑت اور 5 ذوب برقیہ مستقل کے مستطیلی کندے کو داخل کیا گیا اور تختیوں کے درمیانی فصل میں اتنا اضافہ کیا گیا کہ لکٹھے کی گنجائش

میں کوئی تبدیلی نہ ہونے پائے۔ اس نئے درمیانی فاصلے کو محسوب کیجیے۔

9. کسی واسطے کے ذوب برقیہ مستقل اور اضافہ اجازیت (مختاری relative) کی تعریف لکھئے۔ ایک نقطہ برقی سے کسی فاصلے پر برقی

میدان کی حدت کے لیے ضابطہ اخذ کیجیے۔

7.14 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Bleaney, B I, and B Bleaney. Electricity and Magnetism. Oxford: Oxford University Press, 2013.
2. Duffin, W J. Electricity and Magnetism. Cottingham: W.J. Duffin, 2001.
3. Gaur, R.K. & Gupta, S.L. Engineering Physics. Dhanpat Rai Publication.
4. Kurrelmeyer, Bernhard, and Walter H. Mais. Electricity and Magnetism. Princeton, N.J: Van Nostrand, 1967.
5. Plonsey, R. & Collin, R.E. Principles and Application of Electromagnetic Field. Tata Mc Graw Hill Publication. New Delhi.
6. Resnic, R. & Halliday, D. Physics Part-I & Part-II. Wiley Eastern Pvt. Ltd. New Delhi.
7. Resnick, Robert, David Halliday, and Kenneth S. Krane. Physics. New York: Wiley, 2002.
8. Schuh, Mari C. Magnetism. Minneapolis, MN: Bellwether Media, 2008.

اکائی 8۔ مکثفے

(Capacitors)

اکائی کے اجزا	
تمہید	8.0
مقاصد	8.1
گنجائش	8.2
مکثفے میں ذخیرہ شدہ توانائی	8.3
متوازی تختیوں والا مکثف	8.4
برق گزار واسطے کے ساتھ متوازی تختیوں والا مکثف	8.5
جزوی طور پر بھرا ہوا مکثف	8.6
مکثفے کی گنجائش پر برق گزار واسطے کا اثر	8.7
مکثفے کی توانائی فی اکائی حجم (کشافت توانائی)	8.7.1
E یا V کو مستقل رکھنے پر	8.7.2
کروی مکثف	8.8
اسطوانہ نما مکثف	8.9
مکثفوں کی ترتیب	8.10
مکثفوں کی ہم سلسلہ ترتیب	8.10.1
مکثفوں کی ہم متوازی ترتیب	8.10.2
مکثفوں کے اقسام واستعمالات	8.11
حل شدہ مثالیں	8.12
اکتسابی نتائج	8.13
کلیدی الفاظ	8.14

نمونہ امتحانی سوالات	8.15
معروضی جوابات کے حامل سوالات	8.15.1
مختصر جوابات کے حامل سوالات	8.15.2
طویل جوابات کے حامل سوالات	8.15.3
حل شدہ جوابات کے حامل سوالات	8.15.4
مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں	8.16

8.0 تمہید (Introduction)

اس اکائی میں ہم مکثف (Capacitor) کا مطالعہ کریں گے جو کہ برقی و برقیاتی اشیا میں استعمال ہوتا ہے۔ پچھلی اکائی میں ہم برقی میدان میں موجود برقی گزار (Dielectric) مادہ اور برقی گزار (Dielectric) قوت کے برقی میدان کے طرز عمل کا مطالعہ کرے تھے۔ جس سے ہمیں معلوم ہوا کہ برقی گزار (Dielectric) مادہ کو مکثف (Capacitor) میں استعمال کیا جاتا ہے پر ہم اس اکائی میں مکثف (Capacitor) پر توجہ مرکوز کریں گے۔

پچھلی جماعتوں میں یہ ہمیں معلوم ہوا تھا کہ کسی موصل پر عائد بار (بھرن) میں اضافہ کرنے اس کے قوت میں بھی اضافہ ہوتا ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ کسی موصل پر عائد بار (بھرن) اس کے ولٹیج یا تفاوت قوت کے راست متناسب ہوتا ہے اور اس نسبت کے مستقل کو مکثف (Capacitor) کی گنجائش (Capacitance) کہتے ہیں۔ یا پھر ہم اسے یوں بھی کہہ سکتے ہیں کہ بھرن اور تفاوت قوت میں پائی جانی والی نسبت موصل کی گنجائش (Capacitance) کہلاتی ہے۔

ریاضی کو استعمال کرتے ہوئے ہم اس کو اس طرح ظاہر کر سکتے ہیں

$$Q \propto V$$

$$Q = CV$$

جہاں پر مستقل C کو گنجائش (Capacitance) کہتے ہیں اور یہ بھی ہمیں معلوم ہے کہ جب کسی شے میں گنجائش (Capacitance) ہوتی ہے تب اس شے کو مکثف (Capacitor) کہتے ہیں۔ ہماری روزمرہ زندگی میں مکثف (Capacitor) (کئی جگہ استعمالات ہوتا ہے۔

مکثف (Capacitor) برقی و برقیاتی دور میں استعمال ہوتے ہیں۔ عام طور پر یہ موٹر اور پنکھوں میں ہمیں نظر آتے ہیں اسی طرح امالہ کے ساتھ اسے جوڑ کر اہتزاز کو پیدا کیا جاتا ہے اس طرح برقیاتی ترسیل میں بھی انکا استعمال ہوتا ہے۔

8.1 مقاصد (Objectives)

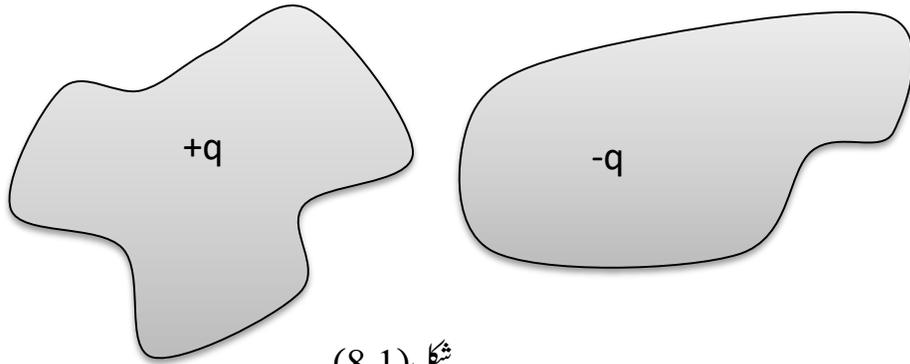
یہ اکائی برق گنجائش کے مفہوم سے بحث کرتی ہے اور برقی باروں اور ولٹیج سے اس کے تعلق کی وضاحت کرتی ہے۔ یہ اکائی اس شرط کو سمجھاتی ہے جو بقائے ہوئے کثیفے میں توانائی کے محفوظ کرنے کے لیے ضروری ہوتی ہے اور اس اکائی میں متوازی تختیوں والے کثیفے کی گنجائش کو محسوب کرنے والی مساواتوں کو سمجھایا گیا ہے۔ اس اکائی کو پڑھنے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ

- i. کثیفے (Capacitor) کی گنجائش (Capacitance) کو بیان کر سکیں گے۔
- ii. کثیفے (Capacitor) اور برق گزار (Dielectric) واسطہ میں ذخیرہ شدہ توانائی کو معلوم کر سکیں گے۔
- iii. کثیفے میں برق گزار (Dielectric) مادہ کو نصب کرنے کے بعد کثیفے کی گنجائش کو معلوم کر سکیں گے۔
- iv. متوازی تختیوں والے کثیفے، کروی تختیوں والے کثیفے اور استوانی تختیوں والے کثیفے کی گنجائش کو معلوم کر سکیں گے۔
- v. ہم سلسلہ و ہم متوازی ترتیب میں کثیفے کی موثر گنجائش کو معلوم کر سکیں گے۔
- vi. عملی طور پر کثیفے کی وضاحت کر سکیں گے اور ان کے استعمالات کی فہرست بنا پائیں گے۔

8.2 گنجائش (Capacitance)

فرض کرو کہ دو موصلوں کی چادریں (Sheets) ہیں۔ جس میں علی الترتیب مثبت $+q$ اور منفی $-q$ برقی بار (بھرن) ہے جس طرح ہمیں شکل (8.1) میں نظر آ رہا ہے۔ ہمیں معلوم ہے کہ ان موصل پر تفاوت قوتہ مستقل رہے گا کیوں کہ یہ ہم قوتہ (مساوی قوتہ رکھنے والی) (Equipotential) سطح رکھتے ہیں۔ اس طرح ان دونوں چادروں (Sheets) کے درمیان تفاوت قوتہ یہ ہوگا۔

$$V = V_+ + V_- = - \int_{-}^{+} \vec{E} \cdot d\vec{t} \quad (8.1)$$



شکل (8.1)

جہاں V_+ موصل کا قوتہ ہے جو $+q$ برقی بار (بھرن) رکھتا ہے اور V_- موصل کا قوتہ ہے جو $-q$ برقی بار (بھرن) رکھتا ہے۔

ہمیں معلوم ہے کہ دو موصلوں پر مشتمل نظام جس کا تفاوت قوتہ V مساوات ایک (8.1) میں بتایا گیا ہے اس کا جملہ برقی

بار (بھرن) Q تفاوت قوتہ V کے راست متناسب ہوتا ہے۔ $Q \propto V$

$$Q = CV \quad (8.2)$$

جہاں متناسب کے مستقل C کو اس نظام کی گنجائش (Capacitance) کہتے ہیں۔ مساوات دو کے لحاظ سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$C = \frac{Q}{V}$$

جہاں V مثبت موصل اور منفی موصل کے قوتہ کا درمیانی فرق ہے اور Q مثبت موصل کا برقی بار (بھرن) ہے۔ اس

طرح C ایک مثبت مقدار ہوگی اور اس کی بین الاقوامی نظام میں اکائی فی ریڈ ہوتی ہے۔ جس کو F سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$1 \text{ Farad} = \frac{1 \text{ Coloumb}}{1 \text{ Volt}} \quad (8.3)$$

برقی دور میں مکثف (Capacitor) کو بتلانے کے لیے اس علامت کو استعمال کیا جاتا ہے۔ $\text{—}||\text{—}$

8.3 مکثف میں ذخیرہ شدہ توانائی (Energy Stored in a Capacitor)

ہم جانتے ہیں کہ مکثف (Capacitor) ایسا برقیاتی آلہ ہے جو اپنے اندر موجود تختیوں میں برقی بار (بھرن) کو جمع کرتے ہوئے برقی توانائی کو ذخیرہ کرتا ہے۔ ان تختیوں میں موجود برقی بار (بھرن) کو منتقل کرتے ہوئے مکثف (Capacitor) میں موجود ذخیرہ شدہ توانائی کو حاصل کیا جاسکتا ہے۔ پر ایسا کرنے کے لیے ہمیں برقی میدان کے مخالف سمت میں کام کرنا پڑتا ہے جو انہیں مثبت موصل کی جانب واپس کھینچتا ہے اور منفی موصل سے دور ڈھکیلتا ہے۔

فرض کرو کہ کے موصل پر موجود برقی بار (بھرن) q ہے اور تفاوت قوتہ V ہے اس طرح کہ $V = \frac{q}{C}$ اور موصل پر چھوٹے

سے برقی بار (بھرن) dq کو لامتناہی سے مکثف تک لانے کے لیے کیا ہوا کام dw ہوگا جو

$$dw = Vdq = \frac{q}{C} dq \quad (8.4)$$

مکثف (Capacitor) کو صفر برقی بار (بھرن) $q=0$ سے حتمی برقی بار (بھرن) $q=Q$ میں تبدیل کرنے کے لیے کیا گیا کام ہوگا۔

$$W = \int_0^Q dw = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{q^2}{2C} \Big|_0^Q = \frac{Q^2}{2C} \quad (8.5)$$

یہ کام برقی توانائی بالقوتہ U کی شکل میں مکثف (Capacitor) میں ذخیرہ ہوتا ہے۔ کیوں کہ $Q = CV$ ہوتا ہے لہذا

$$U = \frac{C^2 V^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2 \quad (8.6)$$

جہاں V مکثف (Capacitor) کا حتمی قوتہ ہے۔ جہاں مساوات (8.5) اور (8.6) کسی بھی ساخت اور جسامت کے مکثف

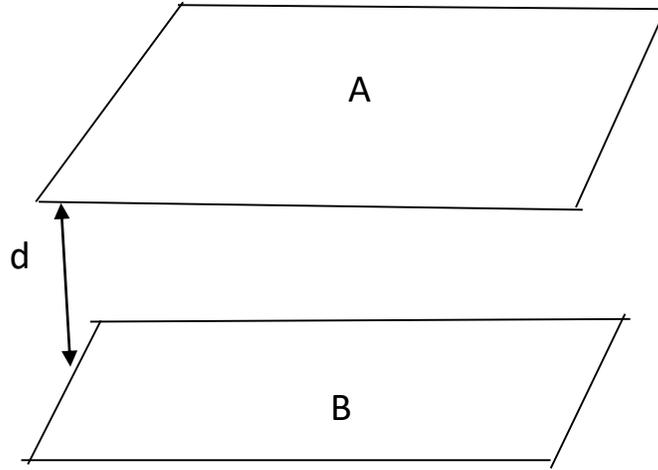
(Capacitor) کے لیے درست ہوتی ہے۔

مثال کے طور پر 10 v قوت رکھنے والے 1 μF (Capacitor) میں ذخیرہ شدہ توانائی ہوگی۔

$$U = \frac{1}{2} cv^2 = \frac{1}{2} (10^{-6} F)(10V^2) = 50 \times 10^{-6} j$$

8.4 متوازی تختیوں والا مکثف (Parallel Plate Capacitor)

متوازی تختیوں والا مکثف (Capacitor) میں دو دھاتی تختیاں پائی جاتی ہے جو مستطیل کی شکل یا دائرو کی شکل کی ہو سکتی ہیں جو باہم ایک دوسرے کے متوازی ہوتی ہیں اور d درمیانی فاصلہ ان کے درمیان ہوتا ہے۔ جس طرح ہمیں شکل (8.2) میں نظر آ رہا ہے۔



شکل (8.2)

فرض کرو کہ کے ایک A تختی پر مثبت برقی بار (+Q) اور دوسری تختی B پر منفی برقی بار (بھرن) -Q ہے اور تختیوں میں

برقی بار (بھرن) برابر طور پر تمام سطح پر منقسم ہے۔ سطحی بار (بھرن) کی کثافت σ ہر تختی پر یہ ہوگی۔ $\sigma = \frac{Q}{A}$

اور جہاں پر A تختی کا رقبہ ہوگا۔ ہم گاؤس کے کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے تختیوں کے درمیان برقی میدان کو معلوم کر سکتے ہیں۔

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (8.7)$$

متوازی تختیوں والا مکثف میں برقی میدان:

گاؤس کے کلیہ کی مدد سے ہمیں تختی A اور B کے درمیان پائے جانے والا تفاوت قوت معلوم ہوتا ہے۔

$$V = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{\sigma}{\epsilon_0 A} d \quad (8.8)$$

$$C = \frac{\sigma}{\epsilon_0 A} d \quad (8.9) \quad \text{اور}$$

اگر تختیاں مربعی شکل کی ہو جس کا ضلع 10 سم ہو اور ایک دوسرے سے $1.0 \times 10^{-4} m$ فاصلے پر ہوں تب ان کی گنجائش (Capacitance) ہوگی۔

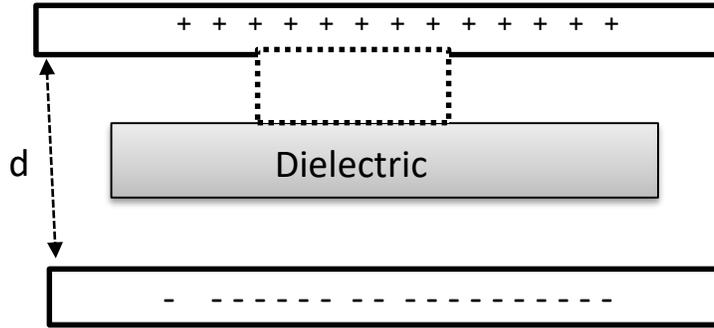
$$C = \frac{\sigma}{\epsilon_0 A} d = \frac{(1.0 \times 10^{-1} m)^2}{1.0 \times 10^{-4} m} \times 8.85 \times 10^{-12} = 885 \text{ pF}$$

$$\therefore C = 8.85 \times 10^{-10} F$$

8.5 برق گزار واسطے کے ساتھ متوازی تختیوں والا کثیف

(Parallel Capacitor with Dielectric Medium)

جب متوازی تختیوں والے کثیف کی تختیوں کے درمیان ایک برق گزار واسطے کو رکھا جاتا ہے تب تختیوں کے برقی میدان میں تخفیف یا کمی ہوتی ہے جو مستقل k کے سبب ہوتی ہے اسے برق گزار (Dielectric) مستقل کہتے ہیں۔ اس کی تصدیق کرنے کے لیے ہم فرض کرتے ہیں کہ متوازی تختیوں والا کثیف (Capacitor) ہے جس کا تراش عمودی کارقبہ A ہے برق گزار واسطے کو ان پلیٹوں کے درمیان رکھا گیا ہے جس طرح شکل (8.3) میں نظر آ رہا ہے۔ فرض کرو کہ تختیوں کا درمیانی فاصلہ d ہے اور تختی کی سطحی بار (بھرن) کی کثافت سگمہ σ ہے۔ اب برق گزار (Dielectric) واسطے پر گاوسین سطح کے رقبہ کے لیے گاوس کے کلیہ کو استعمال کرتے ہیں۔ جو ہمیں شکل (8.3) میں نظر آ رہی ہے۔



شکل (8.3)

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = (Q)_{Enclosed}$$

جہاں برقی نقل مکان \vec{D} کثیف (Capacitor) کی تختیوں کے عمود وار ہوتا ہے اور صرف آزاد سطحی بار (بھرن) کی کثافت ہی اس میں شریک ہوتی ہے۔

$$D = \frac{Q}{A} = \sigma \quad (8.10)$$

ہمیں معلوم ہے کہ بندیشی سطحی بار (بھرن) D امانہ میں شرکت نہیں کرتے۔ لہذا $\vec{D} = \epsilon_0 K \vec{E}$ یا

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0 K} \quad (8.11)$$

مساوات (8.10) اور (8.11) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ

$$E = \frac{D}{\epsilon_0 K} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 K} \quad (8.12)$$

مگر تختیوں کے درمیان تفاوت قوتہ $V = Ed$ ہوگا اور مساوات (8.13) سے ہمیں اس کی گنجائش (Capacitance) حاصل ہوتی ہے جو

$$D = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0 K} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0 K} = \frac{\epsilon_0 AK}{d}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 AK}{d} \quad (8.13)$$

مساوات (8.10) اور (8.13) سے ہمیں متوازی تختیوں والے مکثفہ (Capacitor) کی گنجائش (Capacitance) معلوم ہوتی ہے اور اس سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ برق گزار (Dielectric) مادے کو مکثفہ (Capacitor) کی تختیوں میں رکھنے پر مکثفہ (Capacitor) کی گنجائش (Capacitance) میں اضافہ ہوتا ہے۔

برق گزار مادے کے ساتھ مکثفہ (Capacitor) کی گنجائش (Capacitance) اور بغیر برق گزار (Dielectric) مادے کے ساتھ مکثفہ (Capacitor) کی گنجائش (Capacitance) کے درمیان پائی جانے والی نسبت سے ہمیں برقی گزار مستقل حاصل ہوتا ہے جسے ہم k سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$K = \frac{\text{گنجائش کی (Capacitor) مکثفہ ساتھ کے مادے گزار برق}}{\text{گنجائش کی (Capacitor) مکثفہ ساتھ کے مادے گزار برق بغیر}}$$

$$K = \frac{C_d}{C_a} \quad (8.14)$$

یعنی برق گزار (Dielectric) مستقل K دراصل کسی مکثفہ (Capacitor) کی تختیوں میں برق گزار (Dielectric) مادے کے ساتھ گنجائش (Capacitance) اور اسی مکثفہ (Capacitor) کی تختیوں میں ہوا کے ساتھ جو گنجائش (Capacitance) ہوتی ہے ان دونوں میں پائی جانے والی نسبت کو برق گزار مستقل کہتے ہیں۔

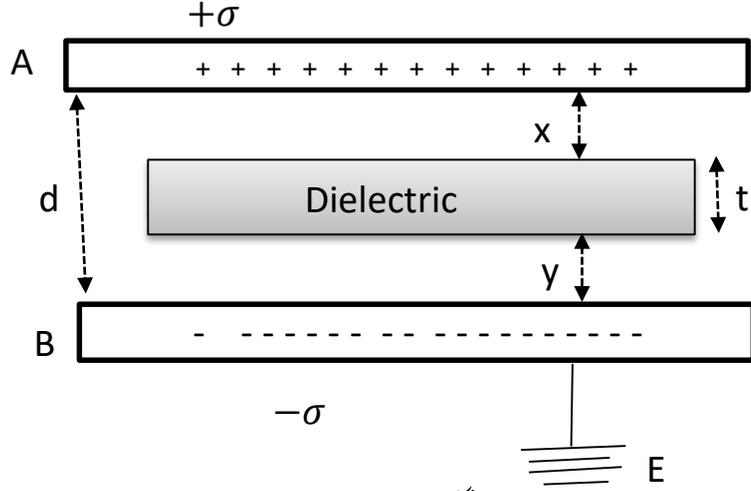
8.6 جزوی طور پر بھرا ہوا مکثفہ (Capacitor) (جب کہ $t < d$)

جب برق گزار (Dielectric) D مادے کی موٹائی t مکثفہ (Capacitor) میں موجود تختیوں کے درمیانی فاصلے d سے کم ہو اور مکثفہ (Capacitor) کی تختیوں کے ساتھ ہوا بھی ہو اور برق گزار (Dielectric) مستقل K بھی ہو تب برق گزار

واسطے میں برقی میدان $\frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r}$ ہوگا اور ہوائی حصہ میں برقی میدان $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ ہوگا۔

فرض کرو کہ برق گزار مادہ کے اوپر ہوائی موٹائی x ہے اور مادے کے نیچلے حصے میں ہوائی موٹائی y ہیں تب

$$x + y = d - t \quad (8.15)$$



شکل (8.4)

چنانچہ برقی میدان کے برخلاف A سے B کی جانب برقی بار کو لے جانے کے لیے کیا گیا کام ہوگا۔

$$\begin{aligned} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} y + \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} t + \frac{\sigma}{\epsilon_0} x = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(x + y + \frac{t}{\epsilon_r} \right) \\ &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(d - t + \frac{t}{\epsilon_r} \right) \end{aligned} \quad (8.16)$$

چنانچہ تفاوت قوتہ ہوگی

$$V_B - V_A = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left[d - t + \frac{t}{\epsilon_r} \right] \quad (8.17)$$

$$\begin{aligned} \text{مکنتفہ } C &= \frac{A\sigma}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} \left[d - t + \frac{t}{\epsilon_r} \right]} = \frac{\epsilon_0 A}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} \left[d - t + \frac{t}{\epsilon_r} \right]} \\ &= \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{\epsilon_r d - t(\epsilon_r - 1)} = \frac{K \epsilon_0 A}{d - t + \frac{t}{\epsilon_r}} \end{aligned} \quad (8.18)$$

8.7 مکنتفہ کی گنجائش پر برقی گزار واسطے کا اثر

(Dielectric Effect in Capacitor in Capacitance)

مکنتفہ (Capacitor) کی تختیوں کے درمیان برقی گزار (Dielectric) مادہ کے برقی گزار (Dielectric) مستقل پر اثر یہ ہوتا ہے کہ دو تختیوں کے درمیان کسی نقطے پر برقی میدان کی حدت $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ سے $\frac{\sigma}{K\epsilon_0}$ تک گر جاتی ہے جہاں سکما σ برقی قوتی ہوئی تختیوں پر بارنی اکائی رقبہ ہے اور دو تختیوں کے درمیان تفاوت قوتہ کم ہوتے ہوئے $\frac{\sigma d}{\epsilon_0}$ سے $\frac{\sigma d}{K\epsilon_0}$ ہوتا ہے جب کہ d دونوں تختیوں کا درمیانی فاصلہ ہے اور گنجائش (Capacitance) $C = \frac{Q}{V}$ ہوتی ہے یہ گنجائش (Capacitance) بڑھتے ہوئے $\frac{\epsilon_0 A}{d}$ سے $\frac{A\sigma}{\frac{\sigma d}{K\epsilon_0}} = \frac{A\sigma}{\frac{\sigma d}{\epsilon_0}}$ بڑھتے ہوئے

$\frac{K\epsilon_0 A}{d}$ ہوتی ہے اس کا مطلب ہے کہ یہ برق گزار (Dielectric) کو متعارف کرانے سے پہلے کی قدر سے k گنا زیادہ ہو جاتی ہے۔ یہی وجہ ہے کہ برق گزار (Dielectric) کی موجودگی کے سبب مکثفہ (Capacitor) کی گنجائش (Capacitance) میں اضافہ ہوتا ہے۔

$$C_d = k C_a \quad (8.19)$$

8.7.1 مکثفہ کی توانائی فی اکائی حجم (کشافت توانائی):

ہم متوازی تختیوں والے مکثفہ (Capacitor) میں فی اکائی حجم ذخیرہ شدہ توانائی کو کشافتِ توانائی کہتے ہیں۔ تختیوں کے درمیان قوتہ کو مستقل رکھتے ہوئے یا تبدیل کرتے ہوئے بھی ہم اس کی جانچ کر سکتے ہیں۔ ہمیں معلوم ہے کہ مکثفہ (Capacitor) میں ذخیرہ شدہ توانائی ہوتی ہے۔

$$U = \frac{1}{2} C V^2 \quad (8.20)$$

اگر ہمارے پاس ایک ہم متوازی تختیوں والا مکثفہ (Capacitor) C_a ہے جب کہ کہ تختیوں کے درمیان ہوا موجود ہے اور ہر ایک تختی کا رقبہ A اور جن کا درمیانی فاصلہ d ہے۔ اب بالکل اتنی ہی موٹائی d والے برق گزار (Dielectric) مادے کو متعارف کرانے پر حاصل ہونے والی گنجائش (Capacitance) ہوگی۔

$$C_d = k C_a$$

8.7.2 E یا V کو مستقل رکھنے پر:

اگر ہم مکثفہ پر مزید بار (بھرن) کو عائد کرتے ہوئے تختیوں کے درمیان قوتہ کو مستقل رکھتے ہیں تب برق گزار (Dielectric) کے ساتھ مکثفے کی توانائی یہ ہوگی۔

$$U_d = \frac{1}{2} C_d V^2 \quad (8.21)$$

اور ہوا کے ساتھ

$$U_a = \frac{1}{2} C_a V^2 \quad (8.22)$$

کیوں کہ V مستقل حالت میں ہے اس لیے

$$\frac{U_d}{U_a} = \frac{\frac{1}{2} C_d V^2}{\frac{1}{2} C_a V^2} = \frac{C_d}{C_a} = K \quad (8.23)$$

لہذا مکثفہ (Capacitor) میں ذخیرہ شدہ توانائی جب کہ تختیوں کے درمیان برق گزار (Dielectric) واسطہ، مستقل ہونے کی صورت میں یہ ذخیرہ شدہ توانائی خلیا ہوا سے k گنا زیادہ ہوتی ہے۔ ہم متوازی تختیوں والے مکثفہ (Capacitor) میں ہوا

یا خلا کی موجودگی میں ذخیرہ شدہ توانائی ہوگی۔

$$U_a = \frac{1}{2} C_a V^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A (Ed)^2}{d} = \frac{1}{2} \epsilon_0 A d (E)^2 \quad (8.24)$$

جہاں E مکثفہ (Capacitor) کی تختیوں کے درمیان برقی حدت ہے جب کہ Ad حجم ہے۔
ہو اور کھنے والے مکثفہ (Capacitor) کے لیے کثافت توانائی = ذخیرہ شدہ توانائی فی اکائی حجم

$$= \frac{\frac{1}{2} \epsilon_0 A d (E)^2}{Ad} = \frac{1}{2} \epsilon_0 (E)^2 \quad (8.25)$$

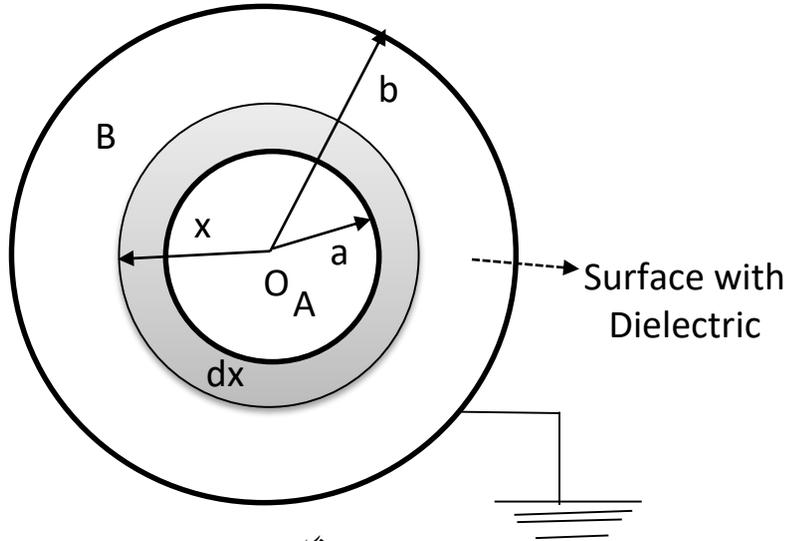
برق گزار (Dielectric) مادہ رکھنے والے مکثفہ (Capacitor) کے لیے

$$U_d = \frac{1}{2} C_d V^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A (Ed)^2}{d} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r A d (E)^2 \quad (8.26)$$

$$\text{کثافت توانائی} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r (E)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon \vec{E} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \text{ اور } \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (8.27)$$

8.8 کروی مکثفہ (Spherical Capacitor)



شکل (8.5)

فرض کرو کہ A اور B دو ہم مرکزی کرے ہیں جن کے نصف قطر ترتیب وار A اور B ہیں جن کے درمیان ہوا موجود ہے۔ بیرونی کرے کو ارتھنگ زمینی تار لگا ہوا ہے اور اندرونی کرے کو مثبت برقی بار q فراہم کیا جا رہا ہے۔
فرض کرو کہ ایک ہم مرکزی خول جس کا نصف قطر x اور موٹائی dx ہے جس طرح ہمیں شکل (8.5) میں نظر آ رہا ہے۔

مرکز سے x فاصلے پر پائے جانے والے کسی نقطے پر برقی میدان یہ ہوگا۔ $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2}$
 میدان باہر کی جانب عمل کرتا ہے۔ تب کرہ A اور B درمیان پائی جانے والا تفاوت قوتہ یہ ہوگی۔

$$V_A - V_B = \int_b^a \vec{-E} \cdot \vec{dr} \quad (8.28)$$

یہاں E اور dr کی سمت x محور کی سمت میں ہے۔

$$\int_b^a \vec{-E} \cdot \vec{dr} = \int_b^a -E \cdot dx = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_b^a -\frac{q}{x^2} dx$$

$$V_a - V_b = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left| \frac{1}{x} \right|_b^a = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b-a}{ab}$$

ہوائی کثیفہ (Capacitor) کی کثافت

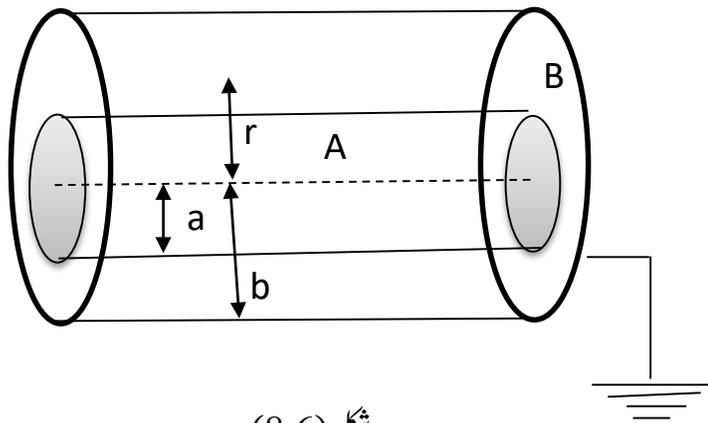
$$C = \frac{q}{V_A - V_B} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} \quad (8.29)$$

اور جب دو کروی کے درمیان موجود جگہ مکمل طور پر برقی گزار (Dielectric) مادے سے بھری ہوئی ہے جس کی اضافی اجازیت ϵ_r ہے۔ تب E کی قدر کم ہوتے ہوئے یہ ہو جائے گی $\frac{E}{\epsilon_r}$ اور سطح A پر بار کی قدر تقطیب کی وجہ سے کم ہوتے ہوئے q سے $\frac{q}{\epsilon_0}$ ہو جائے گی

$$V_A - V_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{b-a}{ab}$$

$$C = \frac{q}{V_A - V_B} = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{ab}{b-a} \quad (8.30)$$

8.9 اسطوانہ نما کثیفہ (Cylindrical Capacitor)



شکل (8.6)

اسطوانہ نمائندہ (Capacitor) دو ہم محوری اسطوانوں پر مشتمل ہوتا ہے۔ ان دو اسطوانوں کے درمیان موجود جگہ میں یا تو ہوا ہوتی ہے یا برقی گزار (Dielectric) مادہ پایا جاتا ہے۔

فرض کرو کہ A اور B ان دو ہم محوری اسطوانوں کو بتلا رہے ہیں اور ان کے نصف قطر ترتیب وار a اور b ہیں اور ہم فرض کرتے ہیں کہ اسطوانہ B ارتھنگ زمینی تار سے جڑا ہوا ہے اور اسطوانہ A کو بارنی اکائی طول λ فراہم کیا جا رہا ہے۔ اور دونوں اسطوانوں کے درمیان محور سے x فاصلے پر ایک نقطہ P ہے۔ تب برقی میدان کی حدت کی مقدار یہ ہوگی

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \quad (8.31)$$

دو اسطوانوں کا درمیان تفاوت قوت ہوگا

$$V_A - V_B = \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_b^a \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} dr$$

E اور dr ایک ہی سمت میں ہے

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} [\log]_b^a = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log_e \frac{b}{a} \quad (8.32)$$

لہذا نمائندہ (Capacitor) کی گنجائش (Capacitance) فی اکائی طول یہ ہوگی

$$C = \frac{\lambda}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log_e \frac{b}{a}} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\log_e \frac{b}{a}} \quad (8.33)$$

اسطوانہ نمائندہ (Capacitor) کے طول کی گنجائش (Capacitance) یہ ہوگی

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\log_e \frac{b}{a}} \quad (8.34)$$

جب دو اسطوانوں کے درمیانی جگہ کو برقی گزار (Dielectric) مادے کے مستقل k یا اضافی اجازیت ϵ_r سے پُر کیا جاتا ہے۔ تب

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{\lambda}{r} \text{ اور}$$

$$C_d = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\log_e \frac{b}{a}} \text{ and } C_l = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r l}{\log_e \frac{b}{a}} \quad (8.35)$$

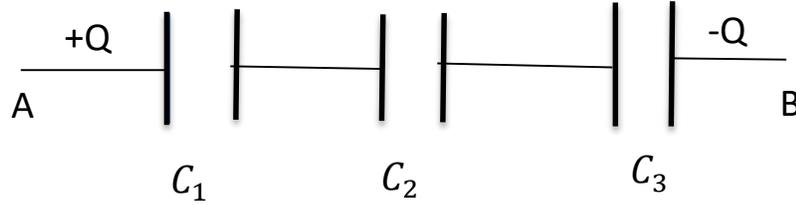
اور k کے لحاظ سے اس طرح ہوگا

$$C_d = \frac{2\pi\epsilon_0 K}{\log_e \frac{b}{a}} \text{ and } C_l = \frac{2\pi\epsilon_0 K l}{\log_e \frac{b}{a}} \quad (8.36)$$

8.10 مکثفوں کی ترتیب (Combination of Capacitors)

مزاحمتوں کی طرح مکثفوں کو بھی برقی دور میں مختلف طریقوں سے جوڑا جاتا ہے جیسے کہ ہم سلسلہ یا ہم متوازی یا ان دونوں کو آپس میں ملا کر جوڑا جا سکتا ہے۔

8.10.1 مکثفوں کی ہم سلسلہ ترتیب (Series Combination Of Capacitors)



شکل (8.7)

شکل (8.7) میں ہمیں نظر آرہا ہے کہ یہاں مکثفے (Capacitors) ہم سلسلہ ترتیب سے جڑے ہوئے ہیں اگر کسی ولٹیج کے مبداء کو ہم سلسلہ ترتیب سے جڑے ہوئے مکثفے (Capacitor) کے دونوں کناروں سے یعنی پہلے مکثفے (Capacitor) کے کنارے A اور آخری مکثفے (Capacitor) کے کنارے B سے جوڑا جائے تب ہر مکثفے (Capacitor) میں مساوی بار ظاہر ہوتا ہے اور ہر مکثفے (Capacitor) میں تفاوت قوت مکثفے (Capacitor) کی گنجائش (Capacitance) پر منحصر ہوتا ہے۔ اب ہم سلسلہ ترتیب سے جڑے ہوئے تین مکثفوں کی موثر گنجائش (Capacitance) کو معلوم کرتے ہیں جس طرح ہمیں شکل (8.7) میں نظر آرہا ہے۔

جہاں C_1 , C_2 اور C_3 انفرادی طور پر ہر مکثفے (Capacitor) کی گنجائش (Capacitance) ہے۔ جب اس ترتیب میں سرے A اور B سے ولٹیج کو عائد کیا جاتا ہے تب پہلی تختی پر بار $+Q$ ظاہر ہوتا ہے جس کے سبب دوسری تختی پر $-Q$ ہوتا ہے۔ برقی سکونی مالہ کے مطابق ہر مکثفے (Capacitor) میں قوتہ کا کم ہونا گنجائش (Capacitance) کے بالالعکس تناسب میں ہوتا ہے یعنی: (∴)

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow V = \frac{Q}{C} \quad \text{یعنی } V \propto \frac{1}{C} \text{ اور } Q \text{ معین و مستقل ہوتا ہے۔}$$

$$V_1 = \frac{1}{C_1}, V_2 = \frac{1}{C_2}, V_3 = \frac{1}{C_3}$$

$$V_1 = \frac{Q}{C_1}, V_2 = \frac{Q}{C_2}, V_3 = \frac{Q}{C_3}$$

$$\therefore V = V_1 + V_2 + V_3$$

گنجائش (Capacitance) C اس ترتیب کی موثر گنجائش (Capacitance) کہلاتی ہے۔

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{V}{Q}$$

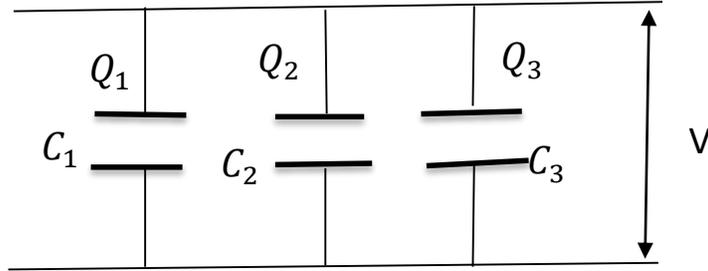
$$V = V_1 + V_2 + V_3 \text{ اور}$$

$$\therefore \frac{1}{C} = \frac{V_1+V_2+V_3}{Q} = \frac{V_1}{Q} + \frac{V_2}{Q} + \frac{V_3}{Q}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad (8.37)$$

اس مساوات سے یہ واضح ہوتا ہے کہ جب مکثفوں کو ہم سلسلہ ترتیب میں جوڑا جاتا ہے تب گنجائش (Capacitance) کے مقلوب کے مجموعے سے موثر گنجائش (Capacitance) کا مقلوب حاصل ہوتا ہے۔

8.10.2 مکثفوں کی ہم متوازی ترتیب (Parallel Combination Of Capacitors)



شکل (8.8)

جس طرح ہمیں شکل (8.8) میں نظر آرہا ہے اس طرح مکثفوں کو ہم متوازی ترتیب دیتے ہوئے ہم ان کی گنجائش (Capacitance) کو معلوم کر سکتے ہیں۔ یہاں \$C_1\$, \$C_2\$, اور \$C_3\$ انفرادی مکثفے (Capacitors) ہیں اور ان کا بار ترتیب وار \$Q_1\$, \$Q_2\$, اور \$Q_3\$ ہے اور ان مکثفوں کے تختیوں کے درمیان پائی جانے والی تفاوت قوتہ \$V\$ ہے۔ اس طرح ترتیب دینے پر ہم دیکھتے ہیں کہ تختیوں کے درمیان تفاوت قوتہ ایک ہی رہتا ہے پر اس ترتیب سے منسلک کرنے پر حاصل ہونے والا جملہ بار تمام مکثفوں کے بار کا مجموعہ ہوتا ہے۔ فرض کیجیے کہ \$C\$ اس ترتیب کی موثر گنجائش (Capacitance) ہے اور جملہ برقی بار \$Q\$ ہے۔

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 \quad (8.38)$$

ہم متوازی ترتیب میں تفاوت قوتہ اتنا ہی ہوتا ہے جتنا کیلے منفرد مکثف (Capacitor) کا ہوتا ہے

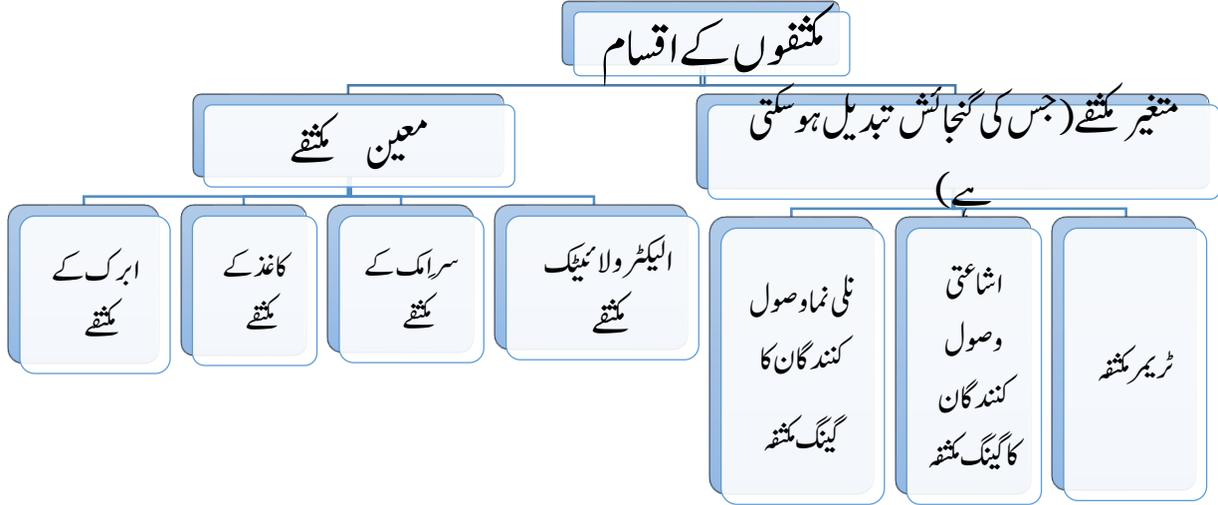
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q_1+Q_2+Q_3}{V} = \frac{Q_1}{V} + \frac{Q_2}{V} + \frac{Q_3}{V}$$

$$\therefore C = C_1 + C_2 + C_3 \quad (8.39)$$

لہذا مکثفوں کو ہم متوازی ترتیب دینے پر حاصل ہونے والی موثر گنجائش (Capacitance) تمام منفرد مکثفوں کی گنجائش (Capacitance) کے مجموعے برابر ہوتی ہے۔

8.11 مکثفوں کے اقسام و استعمالات (Capacitor Types and Uses)

عمومی طور پر مکثفوں کی دو زمروں میں درجہ بندی کی جاتی ہے۔ معین مکثفے اور متغیر مکثفے (جن کی گنجائش تبدیل ہو سکتی ہے) اور پھر ان کی بھی مزید درجہ بندی ان کے ڈیزائن اور بناوٹ کے لحاظ سے کی جاتی ہے۔



شکل (8.9) مکثفوں کے اقسام

مکثف (Capacitor) کی تختیوں کے درمیانی فاصلے پر منحصر ہوتا ہے کہ یہ کس و لٹیج پر کام کرتے ہیں اسی لحاظ سے انہیں ڈیزائن کیا جاتا ہے اور بنایا جاتا ہے چند مثالیں ہم مندرجہ ذیل ٹیبل میں دیکھ سکتے ہیں۔

مکثف کے حدود	استعمال ہونے والا برق گزار (Dielectric)	انتہائی و لٹیج
250 pf – 10μf	کاغذ	150kv
25 pf – 0.25μf	ابرک	2 kv
0.5 pf – 0.0μf	سرامک	500kv
1μf – 1000μf	الیکٹرو لائٹک	600kv

8.12 حل شدہ مثالیں (Solved Problems)

حل شدہ مثال 1

ہوا بردار متوازی تختیوں والے مکثفے کی تختیاں ہر مقام پر ایک دوسرے سے 1.5mm دور ہیں۔ اگر اس کی گنجائش 1.5f ہو تو تختی

کار قبہ معلوم کیجیے۔

$$\text{حل: } C = \frac{q}{V} = \frac{\epsilon_0 EA}{ED} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

$$A = \frac{Cd}{\epsilon_0} = \frac{1.5 \times 10^{-3} \times 1.5}{8.9 \times 10^{-12}} = 2.532 \times 10^8 m^2$$

حل شدہ مثال 2

دھاتی پیٹوں کو استعمال کر کے ایک کنڈنسر بنایا گیا۔ ہر پیٹی کا رقبہ $6 \times 4 cm^2$ ہے۔ ان کو ایک برقی چادر کے ذریعہ ایک دوسرے سے علاحدہ کیا گیا ہے برقی چادر گزار مستقل اور اس کی مستقل دہارت $0.15 cm$ ہے۔ گنجائش معلوم کیجیے۔

$$C = \frac{(n-1)\epsilon_0 KA}{d}$$

$$C = \frac{14 \times 8.9 \times 10^{-12} \times 6 \times 6 \times 10^{-2} \times 4 \times 10^{-2}}{1.5 \times 10^{-4}}$$

$$C = 12000 PF$$

حل شدہ مثال 3

مدور تراش عمودی کے متوازی تختیوں والے کنڈنسر کی تختیوں کا نصف قطر $10 cm$ ہے اور ان کا درمیانی فاصلہ $1 cm$ ہے۔ ان کے درمیان کے برقی گزار تیل کا مستقل 6 ہے۔ اگر تفاوت قوت 300 ولٹ ہو تو تختیوں کے مابین عمل پیرا قوت کشش معلوم کیجیے۔

$$C = \frac{K\epsilon_0 A}{d}$$

$$7.54 \times 10^{-2} N = \frac{6 \times 8.9 \times 10^{-12} \times \pi \times (10^{-1})^2 \times 300^2}{2 \times (10^{-3})^2}$$

حل شدہ مثال 5

$2 \mu F$ کے ایک کنڈنسر A کو $10 \mu F$ کے کنڈنسر B سے ہم متوازی ملا لیا گیا ہے اولز کو 1500 ولٹ تک اور آخر الذکر کو 150 ولٹ تک برقی لیا گیا ہے۔ الحاق سے قبل کی مجموعی توانائی، الحاق کے بعد توانائی کا نقصان اور مشترکہ قوت معلوم کیجیے۔

$$A = 20 \times 10^{-6} \times 500 = 0.03 C$$

$$B = 10 \times 10^{-6} \times 150 = 0.0015 C$$

مجموعی گنجائش $30 \mu F$ ہے۔

$$\frac{1}{2} 20 \times 10^{-6} \times (1500)^2 + \frac{1}{2} 10 \times 10^{-6} \times (150)^2 = 22.61$$

$$\frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{(0.0315)^2}{2 \times 30 \times 10^{-6}} = 6.07 J$$

$$1050 V = \frac{0.0315}{30 \times 10^{-6}} = \frac{q}{C} =$$

حل شدہ مثال 5

$4 cm$ قطر کے ایک کروی موصل کی وجہ سے اس کے مرکز سے $20 cm$ کے فاصلے پر برقی میدان کی حدت $30 V/cm$ ہے۔ موصل کی توانائی معلوم کیجیے۔

$$E = 3000 V/m$$

$$C = 4\pi\epsilon_0(0.02)$$

$$V_{20cm} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}(0.02)$$

$$V = E \cdot d = \frac{q}{C} \quad \text{یا} \quad q = 4\pi\epsilon_0(0.02) \times 3000 \times (0.02)$$

$$\frac{q^2}{2C} = \frac{[4\pi\epsilon_0 \times 0.02 \times 3000 \times 0.02]^2}{2 \times 4\pi\epsilon_0 \times 0.02}$$

$$4\pi\epsilon_0 \frac{(3000)^2 \times (0.02)^3}{2} = 4.00 \times 10^{-13} \text{ Joules}$$

حل شدہ مثال 6

چار $10\mu F$ کے ظرفیوں کے ایک دور کو $500V$ سپلائی سے جوڑا گیا ہے معلوم کیجیے کہ۔
 (a) دور کی موثر ظرفیت (b) ہر ظرفیے پر پار (نوٹ کریں کہ ایک ظرفیہ کا بار اس کی مقابلاً زیادہ توہ والی تختی کا بار ہے جو مقابلاً کم توہ والی تختی کے بار کے مساوی اور مخالف ہے۔)

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad \text{حل: (a)}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \quad \text{لیے } C_1 = C_2 = C_3 = 10\mu F$$

$$C = 10/3\mu F$$

اور C_4 متوازی ہے۔ تب

$$C^1 = C + C_4 = \left(\frac{10}{3} + 10\right) \mu F = 13.3\mu F$$

(b) C_1, C_2 اور C_3 تینوں مکٹھے میں سے ایک ہر بار یکساں ہے۔ فرض کرو یہ یکساں بار Q ہے

فرض کیجیے C_4 پر بار Q^1 ہے۔

$$\frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = 500V$$

$$\frac{Q^1}{C_4} = 500V$$

$$Q = 500V \times \frac{10}{3} \mu F = 1.7 \times 10^{-3} C$$

$$Q^1 = 500V \times 10\mu F = 5.0 \times 10^{-3} C$$

8.13 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

• مکٹھے (Capacitor): ایسا آلہ جو بار (بھرن) کو اپنے اندر ذخیرہ کر سکتا ہے مکٹھے کہلاتا ہے۔ ہم متوازی تختیوں والے مکٹھے کے

تختیوں کے درمیان اگر خالی جگہ ہوں تب ان کی گنجائش (Capacitance) یہ ہوگی $C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$

• متوازی تختیوں والے مکٹھے (Capacitor) کی تختیوں کے درمیان برق گزار (Dielectric) مستقل k ہو تب ان کی گنجائش

$$C = \frac{\epsilon_0 A k}{d} \quad \text{یہ ہوگی (Capacitance)}$$

- مکثف (Capacitor) میں ذخیرہ شدہ توانائی: $U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{Q^2}{2C}$
- مکثف (Capacitor) پر برق گزار (Dielectric) واسطے کا اثر: اگر ہم متوازی تختیوں والے مکثف (Capacitor) کی تختیوں کے درمیان حاجز یا غیر موصل مادے کو رکھا گیا ہے جس کی موٹائی t ہے تب حاصل ہونے والی گنجائش (Capacitance) یہ ہوگی $C = \frac{\epsilon_0 A}{d-t+\frac{t}{k}}$
- برق گزار (Dielectric) واسطے کی موجودگی میں فی اکائی حجم ذخیرہ شدہ توانائی ہوگی $\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$
- استوانہ نما مکثف (Capacitor): استوانہ نما مکثف (Capacitor) میں برق گزار (Dielectric) واسطے کے ساتھ گنجائش (Capacitance) فی اکائی طول یہ ہوگی $C = \frac{2\pi\epsilon_0 k}{\log_e \frac{b}{a}}$
- مکثفوں کی ہم سلسلہ ترتیب: جب دو مکثفوں کو ہم سلسلہ ترتیب میں جوڑا جاتا ہے تب ان کی گنجائش یہ ہوتی ہے $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$
- مکثفوں کی ہم متوازی ترتیب: جب دو مکثفوں کو ہم متوازی ترتیب میں جوڑا جاتا ہے تب ان کی گنجائش (Capacitance) یہ ہوتی ہے $C = C_1 + C_2$

8.14 کلیدی الفاظ (Keywords)

- ہم سلسلہ مکثفے: مکثفوں کو ہم سلسلہ میں جوڑنے کے لیے
- متوازی مکثفے: مکثفوں کو متوازی میں جوڑنے کے لیے
- مکثف (Capacitor): دو موصل برق کے پرزے جو ایک غیر موصل کے ذریعہ ایک دوسرے سے جدا ہوئے ہو،
- برقی گنجائش: کسی برقی پرزے پر IV کا تفاوت قوتِ عامل کرنے پر اس میں جتنا برقی بار ذخیرہ ہوتا ہے وہ اس کی برقی گنجائش کہلاتی ہے
- Farad: Farad ایک بہت بڑی اکائی ہے۔ یہ برقی گنجائش کی SI اکائی ہے

8.15 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

8.15.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. مکثف سے کیا مراد ہے۔
2. مکثف کے دو استعمالات لکھئے۔
3. مکثف کی SI اکائی۔۔۔۔۔ ہے۔
4. مکثفوں کے ہم سلسلہ سے کیا مراد ہے۔
5. فیراڈے کی تعریف کریں۔

6. $1\mu F$ کی قیمت-----Faraday ہوتی ہے
 (a) $10^{-6} f$ (b) $10^{-12} f$ (c) $10^{-9} f$ (d) ان میں سے کوئی بھی نہیں۔

7. کثیف کے سلسلہ وار جوڑ کے لیے جملہ کثیف C کی مساوات =-----

8. کثیف کے متوازی وار جوڑ کے لیے جملہ کثیف C کی مساوات =-----

9. کثیف C کے کثیف میں، جس پر بار Q اور قوت V ہے، ذخیرہ شدہ توانائی U =-----

(a) $\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ (b) $\frac{1}{2} CV^2$ (c) $\frac{1}{2} av$ (d) تمام a, b, c, d

10. کثیف کو کس شکل میں ظاہر کیا جاتا ہے۔

(a)  (b)  (c)  (d) ان میں سے کوئی بھی نہیں۔

8.15.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات; (Short Answer Type Questions)

1. کثیف کی گنجائش (Capacitance) اور اس کی اکائی بیان کیجیے؟
2. کر و ی کثیف (Capacitor) کی گنجائش (Capacitance) کے لیے مساوات اخذ کیجیے؟
3. اسطوانہ نمائندہ (Capacitor) کی گنجائش (Capacitance) کے لیے مساوات اخذ کیجیے؟
4. کثیف (Capacitor) میں ذخیرہ شدہ توانائی کے لیے مساوات حاصل کیجیے۔؟
5. بتلائے کہ برق گزار (Dielectric) میں برقی سکونی توانائی فی اکائی حجم $\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$ ہوتی ہے؟
6. برقی دور میں کثیفوں کی ترتیب پر نوٹ لکھیے؟
7. جب ایک کثیف کو کسی کوہ والے دوسرے کثیف سے ملانے پر توانائی کا نقصان کیوں ہوتا ہے؟
8. کثیف کی گنجائش کی تعریف لکھئے اور کثیف کے اصول کو سمجھائیے۔
9. کئی کثیفوں کو متوازی جوڑنے پر حاصل کثیف کی گنجائش کے لیے ضابطہ اخذ کیجیے۔
10. کئی کثیفوں کو ہم سلسلہ جوڑنے پر حاصل کثیف کے لیے ضابطہ اخذ کیجیے۔
11. ایک متوازی تختیوں والے کثیف میں K مستقل کے برق گزار مادے کے داخل کرنے پر توانائی میں کمی ہو جاتی ہے جب کہ باروں وہی رہتا ہے۔ سمجھائیے۔
12. کیا آپ ایک برقی متوازی تختیوں والے کثیف کی تختیوں کے درمیان ایک برق گزار کاندے کو آہستہ آہستہ داخل کر سکتے ہیں؟ اگر نہیں کر سکتے تو کیوں؟ سمجھائیے۔
13. اگر ایک کثیف کو ایک بیٹری سے جوڑ دیا جائے تو ہر ایک تختی پر ایک ہی مقدار والا باروں کیوں آتا ہے۔

8.15.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. مکثف کی گنجائش (Capacitance) اور اس کی اکائی بیان کیجیے؟ متوازی تختیوں والے مکثف (Capacitor) کی گنجائش (Capacitance) کے لیے مساوات اخذ کیجیے؟
2. متوازی تختیوں والا مکثف (Capacitor) جو جزوی طور پر برق گزار (Dielectric) مادہ سے بھرا گیا ہے اس کی گنجائش (Capacitance) کے لیے مساوات اخذ کیجیے؟
3. متوازی تختیوں والا مکثف (Capacitor) جو مکمل طور پر برق گزار مادہ سے بھرا گیا ہے اس کی گنجائش (Capacitance) کے لیے مساوات اخذ کیجیے؟
4. کر و ی مکثف (Capacitor) کی گنجائش (Capacitance) کے لیے مساوات اخذ کیجیے؟ اسطوانہ نما مکثف (Capacitor) کی گنجائش (Capacitance) کے لیے مساوات اخذ کیجیے؟
5. مکثف (Capacitor) میں ذخیرہ شدہ توانائی کے لیے مساوات حاصل کیجیے۔
6. بتلائے کہ برق گزار (Dielectric) میں برقی سکونی توانائی فی اکائی حجم $\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$ ہوتی ہے؟
7. مکثف (Capacitor) C_1 اور C_2 آپس میں ہم سلسلہ و ہم متوازی ترتیب دیے گئے ہیں تب ان کی مؤثر گنجائش (Capacitance) کیا ہوگی؟
8. متوازی تختیوں کے مکثف کی گنجائش محسوب کیجیے۔
9. برقائے ہوئے متوازی تختیوں والے مکثف محفوظ کردہ توانائی کی شرط کو اخذ کیجیے۔ تختیوں کے درمیان ذوق برقیہ مادے کے کندے کو داخل کرنے پر کیا اثرات مرتب ہوتے ہیں۔
10. ثابت کرو کہ N تختیوں والے ایک Multiple Plate مکثف کی مجموعی گنجائش جب کہ ان کے درمیان برق گزار مادہ ہو $C_0 = \frac{(N-1)\epsilon_0 A}{d}$ جہاں A ایک تختی کا رقبہ 'd' تختیوں کے ایک دوسرے سے دوری ہے۔

8.15.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. متوازی تختیوں والے مکثف (Capacitor) کی گنجائش (Capacitance) کو معلوم کیجیے جب کہ ان کے درمیان برق گزار واسطہ ہے جن کا برق گزار مستقل 6 کے مساوی ہے اور تختیوں کا رقبہ $6 \times 10^{-3} m^2$ اور تختیوں کا درمیانی فاصلہ $2.5 \times 10^{-4} m$ ہے؟ [جواب-1274pf]
2. برقی میدان کی حدت کو معلوم کیجیے جب کہ برق گزار واسطے کا مستقل 5 ہے اور برقی نقل مکانی سمتیہ $5 \times 10^{-12} \frac{Coul}{m^2}$ ہے؟ $[D = k\epsilon_0 E]$

3. فرض کرو کہ زمین کا نصف قطر 6.4×10^6 m ہے اور خلا میں یہ ایک کرہ ہے جس کی سطح پر کے برقی میدان کی حدت 300 v/m ہے۔ اس کے باروں کی توانائی اور اگر اس کو مکمل طور پر ڈس چارج کر دیا جائے تو اس سے پیدا ہونے والی حرارت کو محسوب کیجیے۔
4. گنجائش کا مختلف بنانا مقصود ہے۔ اس کے بنانے میں ٹین کے پتلے ورتوں کو استعمال کیا گیا ہے اور جنہیں برقی سے علاحدہ کیا گیا ہے۔ اس طرح اگر برقی کی 30 مادریں استعمال ہوئی ہوں اور ہر پتھرے کا رقبہ 10 cm^2 ہو اور برقی کا برقی گزار مستقل 6.5 k ہو تو برقی کی چادر کی تقریبی فاصلہ معلوم کیجیے۔
5. دو مکثفوں جن کی گنجائش $4 \mu\text{F}$ اور $2 \mu\text{F}$ کو ہم متوازی جوڑ کر اجتماع پر 300 volt کے تفاوت قوتہ کو عائد کیا گیا تو نظام میں محفوظ کردہ مجموعی توانائی معلوم کیجیے۔
6. $4 \mu\text{f}$, $2 \mu\text{f}$ اور $6 \mu\text{f}$ گنجائش والے تین مکثفوں کو متوازی جوڑ کر 12 v تفاوت قوتہ عائد کیا گیا۔ ان میں ذخیرہ ہونے والے برقی بار کی مقداریں معلوم کیجیے۔

8.16 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Bleaney, B I, and B Bleaney. Electricity and Magnetism. Oxford: Oxford University Press, 2013.
2. Duffin, W J. Electricity and Magnetism. Cottingham: W.J. Duffin, 2001.
3. Gaur, R.K. & Gupta, S.L. Engineering Physics. Dhanpat Rai Publication.
4. Kurrelmeyer, Bernhard, and Walter H. Mais. Electricity and Magnetism. Princeton, N.J: Van Nostrand, 1967.
5. Plonsey, R. & Collin, R.E. Principles and Application of Electromagnetic Field. Tata Mc Graw Hill Publication. New Delhi.
6. Purcell, Edward M, and David J. Morin. Electricity and Magnetism. , 2013.
7. Resnic, R. & Halliday, D. Physics Part-I & Part-II. Wiley Eastern Pvt. Ltd. New Delhi.
8. Resnick, Robert, David Halliday, and Kenneth S. Krane. Physics. New York: Wiley, 2002.
9. Schuh, Mari C. Magnetism. Minneapolis, MN: Bellwether Media, 2008.

اکائی 9۔ مقناطیسی سکونیات

(Magneto Statics)

اکائی کے اجزا

تمہید	9.0
مقاصد	9.1
مقناطیسی سکونیات	9.2
مقناطیسی امالہ بلحاظ قوت	9.3
بیوٹ۔ ساورٹ کا کلیہ	9.4
بیوٹ۔ ساورٹ کلیہ کے استعمالات	9.5
B بوجہ مستقیم لمباتار	9.5.1
B بوجہ روبردارد اُروی لچھ	9.5.2
مقناطیسی میدان بوجہ (سولینائیڈ) پیچول	9.5.3
حل شدہ مثالیں	9.6
اکتسابی نتائج	9.7
کلیدی الفاظ	9.8
نمونہ امتحانی سوالات	9.9
معروضی جوابات کے حامل سوالات	9.9.1
مختصر جوابات کے حامل سوالات	9.9.2
طویل جوابات کے حامل سوالات	9.9.3
حل شدہ جوابات کے حامل سوالات	9.9.4
مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں	9.10

9.0 تمہید (Introduction)

اور سٹیڈ (Oersted) نے 1820ء میں برقی رورکھنے والے تار کے قریب قطب نما کو رکھا تب اس نے محسوس کیا کہ قطب نما کی مقناطیسی سوئی میں انحراف ہو رہا ہے اس طرح برق کا مقناطیسی اثر نظر آیا۔ اس سے اس تجربہ کا خلاصہ اور سٹیڈ نے کلیہ میں بیان کیا کہ برقی رو مقناطیسی میدان پیدا کرتی ہے۔ اس طرح اس نے پہلی مرتبہ برق اور مقناطیسیت میں تعلق کا انکشاف کیا۔ اس باب میں ہم برقی رور بردار موصل کی وجہ سے پیدا ہونے والے مقناطیسی میدان کو معلوم کرنے کے چند طریقوں کا فہم حاصل کریں گے۔

9.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں ہم

- i. برقی مقناطیسی امالہ کے مظہر کو سمجھائیں گے۔
- ii. فیراڈے کے کلیے کو بیان کرے گے اور اس سے متعلق سوالات کے جوابات حل کریں گے۔
- iii. لینز کے کلیہ کو بیان کر سکیں گے اور اس کا اطلاق کو سمجھائیں گے۔

9.2 مقناطیسی سکونیات (Magneto statics)

مقناطیسی میدان سمتی خاصیت رکھتا ہے یعنی جس میں سمت اور مقدار دونوں ہوتے ہیں۔ مقناطیسی میدان میں کسی طہ پر سمت اور مقدار کو \vec{B} سے ظاہر کرتے ہیں جیسے مقناطیسی امالہ یا مقناطیسی نفوذی کثافت کہتے ہیں۔
مقناطیسی میدان کو تصوراتی خطوط کے ذریعہ ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ ان خطوط کو امالی خطوط کہتے ہیں۔ امالی خطوط کہ کسی نقطہ پر خط مماس کھینچنے سے اس نقطہ پر B کی سمت معلوم ہوتی ہے۔
کسی بند سطح گزرنے والے مقناطیسی میدان کے خطوط کی تعداد کو مقناطیسی نفوذی کہتے ہیں۔ مقناطیسی نفوذی کو Φ سے ظاہر کرتے ہیں۔
جس طرح برقی نفوذی کو Φ_B سے ظاہر کرتے ہیں۔ اگر بند سطح کا رقبہ Φ_E تب مقناطیسی نفوذی کا رقبہ $d\Phi_B$ ہوگا۔

$$d\Phi_B = B \cdot dA \quad (9.1)$$

$$\Phi_B = \int B \cdot dA \quad \text{یا} \quad \Phi = B \cdot A$$

$$\Phi = B$$

لہذا مقناطیسی میدان میں عمود وار رقبہ پر کسی نقطہ گزرنے والا مقناطیسی نفوذی کو اس نقطہ کا مقناطیسی امالہ B کہتے ہیں۔

مقناطیسی (Magnetic Flux) نفوذی کی اکائی ویبر (weber) ہے اور مقناطیسی نفوذی (Flux density)

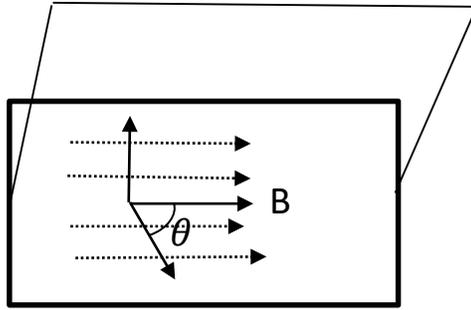
کثافت (Magnetic) یا مقناطیسی (Magnetic) امالہ (Magnetic induction) B کی اکائی ویبر فی مربع میٹر wb/m^2 یا (tesla)

ٹلسہ ہے۔

9.3 مقناطیسی امالہ بل حافظ قوت (Magnetic Induction in Term of Force)

ہم جانتے ہیں کہ ہموار مقناطیس میدان میں برقی بار (q) رکھنے والا ذرہ V رفتار سے حرکت کر رہا ہے تب متحرک برقی بار پر عائد ہونے والا قوت \vec{F} ہوگی۔

$$\vec{F} = q(\vec{V} \times \vec{B})$$



شکل (9.1)

جہاں q متحرک ذرہ کا برقی بار ہے۔

$$\vec{F} = qvB \sin \theta$$

$$\left[\vec{F}_{\text{اعظم}} \right] = qvB \quad \text{جہاں} \quad \theta = 90$$

مقناطیسی میدان کے مقناطیسی امالہ کی عددی قدر مساوی ہوتی ہے میدان کے عموداً متحرک ایک اکائی برقی بار کے جو ایک میٹر فی سکنڈ کی چال سے حرکت کر رہا ہے۔

$$B = \frac{F_{\text{اعظم}}}{qv} \quad (9.2)$$

B کی اکائی $Tesla = \frac{N}{A.M} = \frac{N}{C.ms^{-1}}$ ٹلسہ اور B کی اکائی C.G.S نظام میں gauss گاؤس ہے جہاں $1T = 10^4 gauss$ جہاں \vec{B} کی سمت کو بائیں ہاتھ کا اصول بتلاتا ہے۔ بائیں ہاتھ کے اصول کے مطابق انگشت شہات، درمیانی انگلی اور انگوٹھا کو آپس میں باہم عمود وار رکھیں۔ تب درمیانی انگلو متحرک برقی بار یا برقی رو کی سمت بتلاتی ہے اور انگوٹھا قوت کی سمت کو بتلاتا ہے اور انگشت شہات مقناطیسی میدان \vec{B} کی سمت کو بتلاتی ہے۔

9.4 بیوٹ۔ ساورٹ کا کلیہ (Biot-Savart's Law)

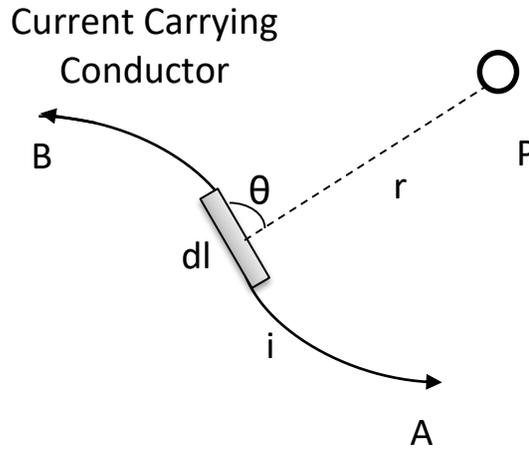
بیوٹ۔ ساورٹ کا کلیہ جو برقی رو (Current Element) سے پیدا ہونے والے مقناطیسی میدان (Magnetic

(Field) کے درمیان رشتہ کو بتلاتا ہے۔ فرض کرو کہ ایک دائرہ کا ٹکڑا dl یا برقی رو i نہ رہی ہے۔ دائرے کے ٹکڑے میں جز برقی رو dt اور نقطہ P کو ملانے والے خط کا درمیانی زاویہ θ ہے۔ بیوٹ۔ ساورٹ کلیہ کے مطابق برقی رو i کی وجہ سے نقطہ P پر پیدا ہونے والا مقناطیسی میدان dB حسب ذیل عناصر پر مشتمل ہوتا ہے۔

i. dB راست تناسب ہے۔ برقی رو i اور dl کے طول کے

$$\vec{dB} \propto dl$$

$$\vec{dB} \propto i$$



شکل (9.2)

ii. dB معکوس تناسب ہے کہ جو نقطہ P اور dl کا درمیانی فاصلہ ہے۔

iii. dB راست تناسب ہونا زاویہ $\sin \theta$ کے۔

ان سب کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\vec{dB} \propto \frac{idl \sin \theta}{r^2}$$

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{idl \sin \theta}{r^2} \quad (9.3)$$

جہاں $\frac{\mu_0}{4\pi}$ تناسبی مستقل ہے اور μ_0 کو آزاد فضائی (خلاء) کی مقناطیسی اجازیت (Permeability) کہتے ہیں۔ جس کی قدر $\mu_0 =$

$$4\pi \times 10^{-7} \text{ wb/A.m}$$

اگر dl برقی رو i یا نفاؤ V کی سمت میں ہے تب دائرے کے ٹکڑے میں جز برقی رو dl کا طول سمتیہ ہوگا۔ تب dB کو اس طرح لکھیں گے۔

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (9.4)$$

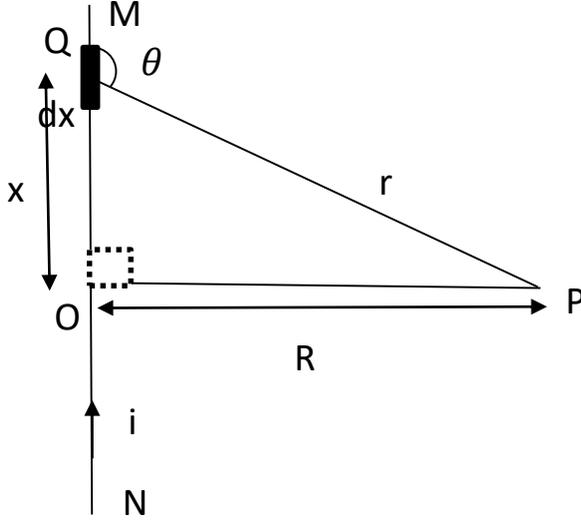
نتیجتاً مکمل برقی رو کی وجہ سے نقطہ P پر میدان B اس طرح ہوگا۔

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{i}{r^3} (d\vec{l} \times \vec{r}) \quad (9.5)$$

9.5 بیوٹ-ساورٹ کلبیہ کے استعمالات (Applications of Biot-Sawart's Law)

9.5.1 B بوجہ مستقیم لمباتار (B Due to Long Strength Wire)

ہم برقی رو دن بردار سیدھے لمبے تار کی وجہ سے کسی نقطہ P پر مقناطیسی امالہ کو محبوب کریں گیں۔ فرض کرو کہ وار MN کا چھوٹا جو dx ہے۔ O اور P کا درمیانی فاصلہ x ہے اور P اور O کا درمیانی فاصلہ R ہے۔



شکل (9.3)

بیوٹ-ساورٹ کے کلبیہ کا اطلاق کرنے پر

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^3} dx \times \vec{r} \quad (9.6)$$

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{dx \times r}{r^3} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{dx \sin \theta}{r^2} \quad (9.7)$$

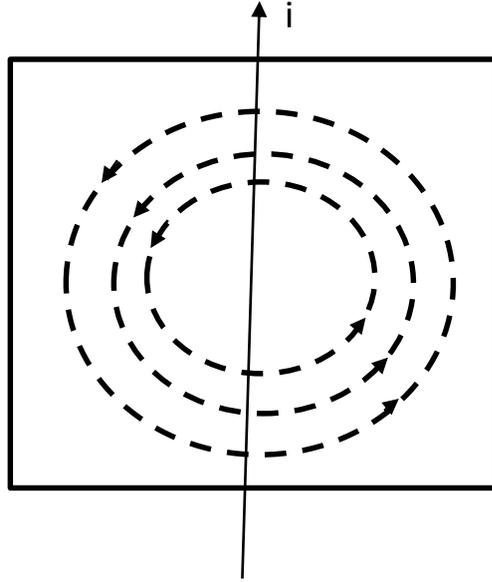
میں PQOΔ

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sin(180 - \theta) = \frac{R}{r} \\ \cot \theta &= -\cot(180 - \theta) = \frac{r}{R} \\ \sin \theta &= \frac{R}{r} \Rightarrow \sin^2 \theta = \frac{R^2}{r^2} \Rightarrow \frac{\sin^2 \theta}{R^2} = \frac{1}{r^2} \quad \text{چوں کہ} \\ -x &= R \cot \theta \\ dx &= R \operatorname{cosec}^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

مساوات (9.7) میں درج کرنے پر

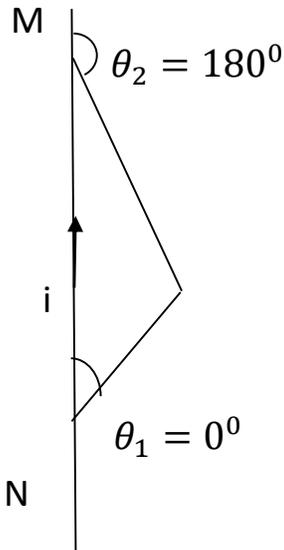
$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int R^2 \operatorname{cosec}^2 \theta \cdot d\theta \cdot \frac{\sin^2 \theta}{R^2} \cdot \sin \theta \\ B &= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

جہاں θ_1 اور N , θ_2 اور M کے ذریعہ سے والے زاویے ہیں۔

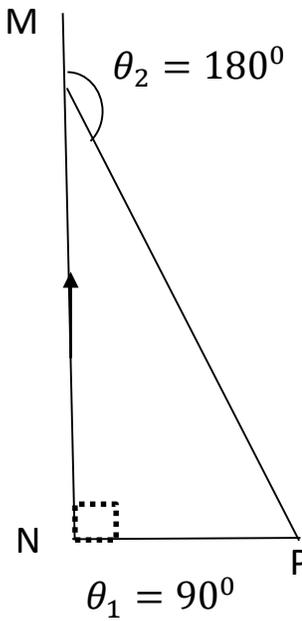


شکل (9.4)

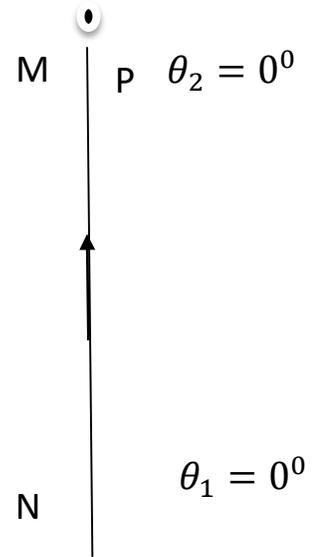
$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \{ \cos \theta_1 - \cos \theta_2 \} \quad (9.8)$$



شکل (9.5(a))



شکل (9.5(b))



شکل (9.5(c))

شکل (9.5)

(a) لاتناہی طول رکھنے والے تار کے لیے: شکل کے مطابق $\theta_1 \rightarrow 0$ اور $\theta_2 \rightarrow 180$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \quad \text{لہذا (9.9)}$$

تاہمکہ عمود وارتار سے پیدا ہونے والے مقناطیسی امالہ کے خطوط دائروی اور ہم مرکزی ہوتے ہیں اور تار سے مساوی فاصلہ رکھنے والے تمام نقاط کے لیے B کی قدر مساوی ہوتی ہے۔

(b) نصف تناہی تار کے لیے: نصف تناہی یعنی ایسا تار جو ایک سمت میں محدود اور دوسرے سمت میں لاتناہی ہو۔ شکل (9.5(b)) کے

$$\theta_1 = 90 \quad \text{اور} \quad \theta_2 = 180 \quad \text{مطابق}$$

مساوات (9.8) میں درج کرنے پر

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \quad (9.10)$$

نصف تناہی تار کے لیے: نصف تناہی یعنی ایسا تار جو ایک سمت میں محدود اور دوسرے سمت میں لاتناہی ہو۔ شکل (9.5(b)) کے مطابق

$$\theta_1 = 90 \quad \text{اور} \quad \theta_2 = 180$$

مساوات (9.8) میں درج کرنے پر

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \quad (9.10)$$

(c) اگر تار کے طول کے آگے نقطہ ہو۔

شکل (9.5(c)) کے مطابق θ_1 اور θ_2 دونوں ہی صفر ہوتے ہیں۔ اس لیے $B=0$ ہوگا۔ لہذا اگر تار کے طول کے آگے نقطہ ہو

تب اس نقطہ پر میدان صفر ہوگا۔

9.5.2 B بوجہ روبردار دائروی لچھ (B Value to a Circular Current Coil)

فرض کرو کہ ایک برقی رو (i) بردار دائروی لچھ کا نصف قطر ہے۔ اس کے مرکز سے x فاصلہ کہ طور پر ایک نقطہ P ہے۔

بیوٹ۔ ساورٹ کے کلیہ کا طلاق کرنے پر۔ a پر (Current Element) جز برقی رو MN کا طول dl کی وجہ سے نقطہ P پر مقناطیسی

امالہ dB ہے۔ تب P سے r کا فاصلہ ہوگا۔

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

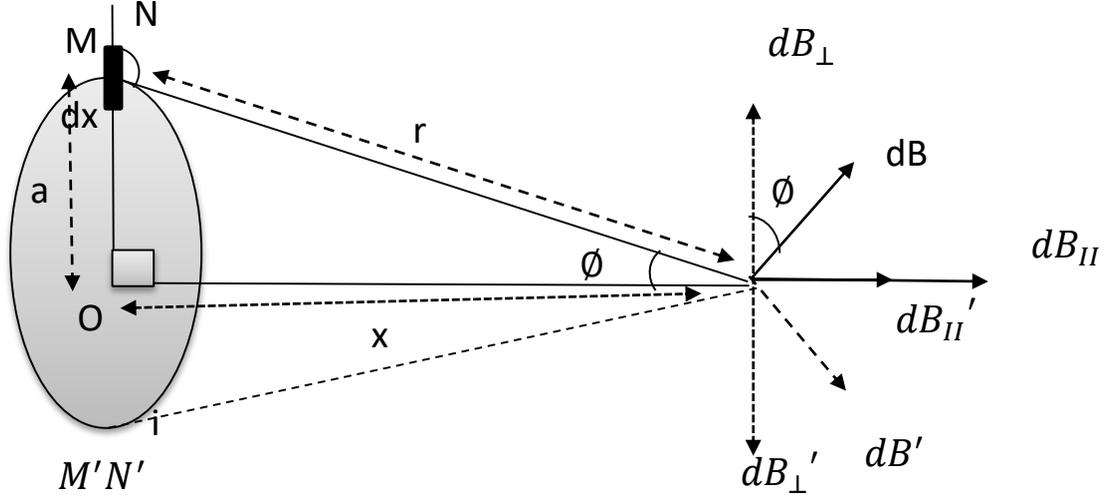
فرض کرو کہ حلقہ کا مستوی کا قد کے مستوی کے علی الاقوام ہے۔ تب سمتیہ $d\vec{l}$ کی سمت عموداً کاغذ سے باہر کی طرف ہوگی۔ جب

کہ r حلقہ کے ایصابی اجزائی کے لیے عمودوار ہوگا۔ یعنی $d\vec{l} \times \vec{r}$ اور $d\vec{B}$ کی سمت کاغذ کے مستوی پر اور $d\vec{l}$ اور \vec{r} سے تشکیل دئے گئے مستوی

پر عمودوار ہے۔

فرض کرو کہ r اور حلقہ کے محور کا درمیانی زاویہ θ ہے۔ تب dB کو اس کے اجزائی میں تحلیل کیا گیا جہاں ایک جز dB_{\perp} جو

B تمام حلقہ کا جملہ ہے۔ متوازی کے محور کے $dB_{\parallel} = dB \sin \phi$ سے جو $dB_{\perp} = dB \cos \phi$ کے عمود وار اور ایک dB_{\parallel} سے dB_{\perp} کے دونوں اجزا کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا۔ تشاکل (Symmetry) کی مدد سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ عمود وار اجزا جیسے MN کی وجہ سے dB_{\perp} اور $M'N'$ کی وجہ سے dB'_{\perp} مساوی اور متضاد ہیں اسی طرح ان کی تنسیخ ہو جاتی ہے اور صفر نتیجتاً حاصل ہوتا ہے۔ اب متوازی اجزا dB_{\parallel} اور dB'_{\parallel} سیدھا شور کی سمت میں ہوتے ہیں۔ اس کا نتیجہ یہ نکلتا ہے کہ B محور کی سمت میں ہوتی ہے جو $\int dB \sin \theta$ کے مساوی ہوتی ہے۔



شکل (9.6)

شکل (9.6) سے

$$\sin \theta = \frac{a}{r} \quad (9.11)$$

$$\theta = \int \frac{\mu_0 i dl \sin \theta}{4\pi r^2} \sin \phi \quad \text{چوں کہ}$$

$$dl \perp r \quad \text{کیوں کہ } \theta = 90$$

$$B = \frac{\mu_0 i \sin \theta}{4\pi r^2} \int dl \quad (9.12)$$

مساوات (9.11) کو مساوات (9.12) میں درج کرنے پر

$$B = \frac{\mu_0 i a}{4\pi r^3} \int dl$$

دائروی لچھ کے لیے

$$\begin{aligned} \phi dl &= 2\pi a \\ (r = \sqrt{a^2 + n^2}) \quad B &= \frac{\mu_0 i a}{4\pi r^3} 2\pi a \\ B &= \frac{\mu_0 i a^2}{2r^3} \end{aligned}$$

$$B = \frac{\mu_0 i a^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad (9.13)$$

a. حلقہ کے مرکز میں $X=0$ ہوگا۔ اس قدر کو مساوات (9.13) میں درج کرنے پر۔

$$B = \frac{\mu_0 i}{2a} \quad (9.14)$$

b. اگر لچھ میں N گھماؤ یا چکر ہوں اس کو N سے ضرب دیں گیں۔

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{iNa^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad (9.15)$$

c. اگر $a \gg x$ اور $r \approx x$ اور لچھ کا رقبہ $= \pi a^2$ ہے ان کو مساوات (9.15) میں درج کرنے پر

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2iNA}{x^3} \quad (9.16)$$

مساوات (9.16) کا تقابل برقی میدان کے برقی ذوقطبیہ کی مساوات سے کرنے پر۔

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Pe}{x^3} \quad (9.17)$$

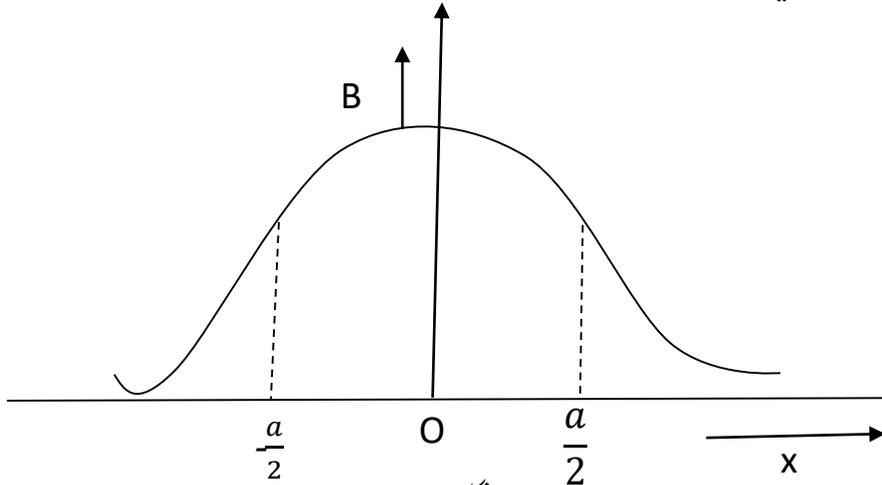
اس طرح مساوات (9.16) ہمیں بتلاتی ہے کہ روبردار حلقہ کو ہم مقناطیسی دو قطبیہ (Dipole) کی طرح ملاحظہ کر سکتے ہیں۔ جو اپنا خود مقناطیسی میدان پیدا کرنا ہے۔

مساوات (9.16) اور مساوات (9.17) کا تقابل کرنے پر iNA کو حلقہ (Loop) کا مقناطیسی دو قطبیہ (Dipole) کا اثر

کہتے ہیں جسے P_m سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$P_m = iNA \quad (9.18)$$

B کی x کے ساتھ ہونے والی تبدیلی



شکل (9.7)

9.5.3 مقناطیسی میدان بوجہ (سولینائیڈ) پیچول (Field due to a Solenoid)

سولینائیڈ ایک طویل تار پر مشتمل ہوتا ہے جو ایک مرغولی شکل میں لپیٹا ہوتا ہے۔ جس میں دو پڑوسی چکروں کے درمیان بہت کم جگہ ہوتی ہے۔ یہ طویل لچھہ سولینائیڈ کھلاتا ہے۔

فرض کرو کہ N چکروں والا لچھہ ہے جس کا طول l ہے اور اگر n چکروں کی تعداد فی اکائی طول ہے تب یہ $n = \frac{N}{L}$ ہوگا اور کسی موصل کی جز بقی dx کے n چکروں کی تعداد ہوگی اور محوری نقطہ O پر تب dx کی وجہ سے مقناطیسی امالہ ہوگا۔

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{indxa^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad (9.19)$$

مساوات (9.19) کو استعمال کرتے ہوئے۔

متغیر کو θ کی شکل میں لکھنا سہولت بخش ہوگا اس لیے۔

$$x = a \cot \theta \Rightarrow dx = -a \operatorname{cosec}^2 \theta d\theta$$

$$r^3 = (a^2 + x^2)^{3/2} = (a^2 + a^2 \cot^2 \theta)^{3/2}$$

$$r^3 = a^3 \operatorname{cosec}^3 \theta$$

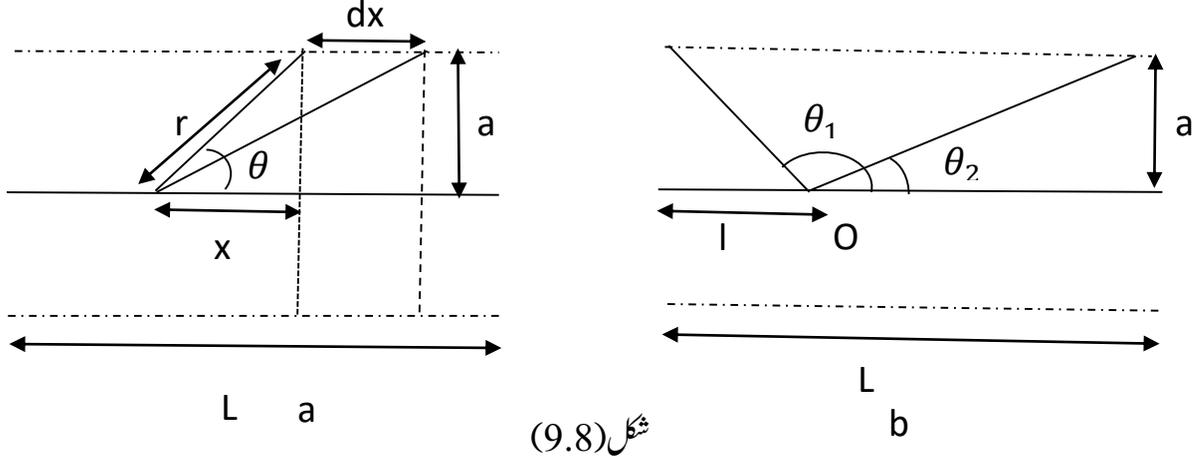
یہ مساوات (9.19) میں درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا کہ

$$dB = -\frac{\mu_0}{2} ni \sin \theta d\theta$$

مکمل سولینائیڈ کی وجہ سے پیدا ہونے والا مقناطیسی میدان یہ ہوگا۔ $B = \frac{1}{2} \mu_0 ni \int_{\theta_1}^{\theta_2} (-\sin \theta) d\theta$

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 ni \{ \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \} \quad (9.20)$$

جہاں θ_1 اور θ_2 سولینائیڈ کے پہلے اور آخری چکر کے نصف عمودی زاوے ہیں۔



شکل (9.8)

شکل (9.8(b)) سے مساوات (9.20) کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$B = \frac{\mu_0 ni}{2} \left\{ \frac{L-l}{\{a^2 + (L-l)^2\}^{1/2}} + \frac{l}{\{a^2 + l^2\}^{1/2}} \right\}$$

i. لاتناہی طویل سولینائیڈ کے محور کے درمیان میں B

(B Value the Middle of axis of an Infinitely Long Solenoid)

لاتناہی طول رکھنے والا سولینائیڈ کے لیے $L > a$ اور $\theta \approx 180^\circ$ اور $\theta_2 \approx 0$ کو مساوات (9.21) میں درج کرنے پر

$$B = \mu_0 ni \quad (9.21)$$

ii. سولینائیڈ کے اختتام پر

$$\theta_1 = 90^\circ \text{ اور } \theta_0 = 0$$

مساوات (9.21) سے

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 ni \quad (9.22)$$

9.6 حل شدہ مثالیں (Solved Problems)

حل شدہ مثال 1

دائروی لچھہ (Circular Coil) کے درمیان پر مقناطیسی نفوذ کو معلوم کیجیے۔ جس کا نصف قطر 10cm اور جس کے

20 turns ہیں۔ جس میں برقی رو 2A ہو۔

حل : دیا ہوا ہے

$$i = 2A$$

$$N = 20$$

$$a = 10cm = 10 \times 10^{-2}m$$

$$B = \frac{\mu_0 Ni}{2a}$$

$$B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 20 \times 2}{2 \times 2 \times 10^{-2}}$$

$$B = 25.12 \times 10^{-5} \text{ tesla}$$

حل شدہ مثال 2

مقناطیسی میدان کی شدت کو معلوم کیجیے۔ جب کہ دائروی لچھہ (circular coil) کے 10 turns اور وہ 10cm

دوری پر واقع ہے جو 1amp برقی رکھتا ہے اور جس کا نصف قطر 20cm ہے۔

حل : دیا ہوا ہے

$$i = 1amp$$

$$a = 20cm = 2 \times 10^{-2}m$$

$$x = 10cm = 10 \times 10^{-2}m$$

$$B = \frac{\mu_0 N i a^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{N i a^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$H = \frac{10 \times 1 \times (0.2)^2}{2\{(0.2)^2 + (0.1)^2\}^{3/2}}$$

$$H = 17.89 \text{ amp / metre}$$

9.7 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- مقناطیسی میدان سمتی خاصیت رکھتا ہے یعنی جس میں سمت اور مقدار دونوں ہوتے ہیں۔ مقناطیسی میدان میں کسی طہ پر سمت اور مقدار کو \vec{B} سے ظاہر کرتے ہیں جیسے مقناطیسی امالہ یا مقناطیسی نفوذی کثافت کہتے ہیں۔
- مقناطیسی نفوذ (Magnetic Flux) کی اکائی ویبر (weber) ہے اور مقناطیسی نفوذی کثافت (Magnetic Flux density) یا مقناطیسی (Magnetic) امالہ (B (induction) کی اکائی ویبر فی مربع میٹر wb/m^2 یا tesla ٹسلا ہے۔
- ہم جانتے ہیں کہ ہموار مقناطیس میدان میں برقی بار (q) رکھنے والا ذرہ V رفتار سے حرکت کر رہا ہے تب متحرک برقی بار پر عائد ہونے والا قوت \vec{F} ہوگی۔

$$\vec{F} = q(\vec{V} \times \vec{B})$$

9.8 کلیدی الفاظ (Keywords)

- مقناطیس (Magnet): کسی شے کی کینچیاں خاصیت جو قدرتی طور پر ہو یا Artificial ہو۔ جو کہ لوہا اور Steel ہیں۔
- مقناطیسی میدان (Magnetic Field): مقناطیسی کے اطراف بننے والا میدان، جہاں تک مقناطیس قوت کار آمد ہوں۔ اُسے ہم مقناطیسی میدان کہتے ہیں۔
- سمتیہ میدان (Vector Field): سمتیہ میدان کے ساتھ جو سمتیہ (Vector) ہے۔ جو space کے ہر نقطہ پر واقع ہے۔
- مقناطیسی بہاؤ (Magnetic Flux): مقناطیسی بہاؤ یہ ایک طرح کی پیمائش ہوتی ہے۔ جو ایک Unit area میں گزرنے والی مقناطیسی قطبی نکلنے کا مجموعہ ہوتا ہے یا ایک حصہ سے نکلنے والی مقناطیسی قطبی کو اس حصہ کا نفوذ کہتے ہیں۔
- Tesla : T (Testa) یہ ایک derived unit ہے۔ جس سے مقناطیسی نفوذ کثافت (Magnetic Flux Density) کو ظاہر کرتے ہیں۔ B یہ ایک SI Unit ہے۔ $1T = 1 \text{ web}/m^2$

- گواس (Gauss): مقناطیسی املا (Magnetic Induction) کا C.G.S یونٹ Gauss ہوتا ہے۔
- گواس بیٹا (Gauss Meter): مقناطیسی میدان کے (Intensity) شدت کے ناپنے کے لیے گواس بیٹا (Gauss Meter) کا استعمال کیا جاتا ہے۔
- اورسٹیڈ (Oersted): مقناطیسی میدان کے شدت ایک اکائی C.G.S، اورسٹیڈ (Oersted) ہوتا ہے۔

9.9 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

9.9.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. اورسٹیڈ کا کلیہ (Oersted law) کو بیان کیجیے۔
 2. مقناطیسی شامل (Magnetic Induction) کی بیان کیجیے۔
 3. مقناطیسی شامل r فاصلہ پر جو اپنے میں روبرق رکھتا ہے۔ یہ تناسب میں ہوگا۔
 4. مقناطیسی نفوذی (Flux density) کا C.G.S یونٹ ہے۔
- $\frac{1}{r^3}$ (a) $\frac{r}{i^2}$ (b) $\frac{c^2}{r^2}$ (c) $\frac{i}{r^2}$ (d)
- Ampere/meter (d) Tesla (c) Gauss (b) Weber (a)
5. ایک Tesla برابر ہوتا ہے۔۔۔۔۔۔۔۔ گواس کے۔
 6. کیا ایک برق رولے جانے والے لچھے کو ہموار مقناطیسی میدان پیدا کرتی ہے۔
 7. ایک تانبہ کاتار نصف دائری موڑ کیا ہے۔ مقناطیسی میدان کی قیمت اس کے درمیان میں کیا ہوگی؟
 8. برقی بار ایک ہموار مقناطیسی میدان کی سمت میں حرکت کرتی ہے۔ تب اس کا راستہ کیا ہوگا۔
 9. بیٹ سوارٹ کا کلیہ بیان کیجیے۔
 10. بتلاؤ کہ مقناطیسی میدان کی ماہیت کیا ہے؟
 11. سولی نائڈ سے جڑا مقناطیسی معیار اثر کیا ہے؟

9.9.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions):

1. بیٹ سوارٹ کے قانون کو بیان اور اس کو وضاحت کیجیے۔
2. پتھول کی وجہ سے مقناطیسی میدان کی امالہ کو وضاحت کیجیے۔
3. مقناطیسی سکونیات (Magneto Statics) اور مقناطیسی امالہ بل حاظ قوت کو بیان کیجیے۔
4. روبرد دائری لچھے (Circular Current Coil) مقناطیسی میدان \vec{B} کی عدد قدر کو وضاحت کیجیے؟

5. مقناطیسی میدان بوجہ (سولینائیڈ) پیچول (Field due to a Solenoid) مقناطیسی میدان \vec{B} کی عدد قدر کو وضاحت کیجیے؟

9.9.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. بیٹ سوارٹ قانون کی وضاحت کیجیے اس کے لیے مساوات کو معلوم کیجیے۔
2. مقناطیسی میدان کی امالہ (Magnetic Field Induction) کو معلوم کیجیے۔ جہاں ایک دائروی لچھے (Circular Coil) ہے جو اپنے میں فرق کو x کہتے ہوئے ہے گراف (graph) کے مور سے اس کے اندر کے (Verities) کو دیکھا ہے۔

3. بیٹ۔ ساورٹ کلیہ کے استعمالات مقناطیسی میدان \vec{B} کی عدد قدر کو وضاحت کیجیے۔

(a) B بوجہ مستقیم لمباتار (B Due to Long Strength Wire) پر

(b) B بوجہ روبردار دائروی لچھے پر

9.9.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. ایک سیدھے تار سے 10A کی برقی رو گزر رہی ہے۔ اس سے 0.5cm کے فاصلے پر خلا میں مقناطیسی امالے کے میدان کی حدت معلوم کیجیے۔
2. ایک دائروی لچھے میں 32 تار ہیں۔ جن کا نصف قطر 25cm ہے۔ اگر اس میں 50A کی برقی رو گزاری جائے تو اس کے مرکز پر امالے کے میدان کی حدت معلوم کرو؟ لچھے کے مرکز پر کثافت نفوذ معلوم کرو۔
3. ایک لچھے میں 100 تار ہیں اور ان کا امالہ 0.05H ہے جب اس میں 0.05 ہے جب اس میں 0.02A کی برقی رو گزار جائے تو اس میں کتنا نفوذ (flux) بنے گا۔
4. ایک 10cm نصف قطر کا سختی سے لپینا گیا 100 چکروں کا لچھا (coil) لیجیے، جس میں 1A برقی رو بہ رہی ہے۔ لچھے کے مرکز پر مقناطیسی میدان کی عددی قدر کیا ہے۔
5. ایک 0.5m طول کے سولی نائڈ کا نصف قطر 1cm ہے اور یہ 500 چکروں کا بنا ہوا ہے۔ اس میں 5A برقی رو ہے۔ سولی نائڈ کے اندر مقناطیسی میدان کی عددی قدر کیا ہے؟
6. ایک دائری حلقہ کا تار جس کا قطر 30cm ہے اس سے 3.5A کی برقی رو بہ رہی ہے تب محور کے ایک نقطہ پر جو مرکز سے 40cm کے فاصلے پر واقع ہے مقناطیسی میدان معلوم کرو؟
7. تار کا ایک دائری لچھا 100 چکروں پر مشتمل ہے جس میں سے ہر ایک کا نصف قطر 8.0cm ہے۔ اس میں 0.40A برقی رو ہے۔ لچھے کے مرکز پر مقناطیسی میدان \vec{B} کی عدد قدر کیا ہے؟

8. ایک طویل مستقیم تار میں 35A برقی رو ہے۔ تار سے 20cm فاصلے پر ایک نقطہ پر میدان \vec{B} کی عددی قدر کیا ہے؟

9.10 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Bleaney, B I, and B Bleaney. Electricity and Magnetism. Oxford: Oxford University Press, 2013.
2. Duffin, W J. Electricity and Magnetism. Cottingham: W.J. Duffin, 2001.
3. Gaur, R.K. & Gupta, S.L. Engineering Physics. Dhanpat Rai Publication.
4. Peck, Edson R. Electricity and Magnetism. , 2013.
5. Plonsey.R&Collin.R.E. Principles and Application of Electromagnetic Field. Tata Mc Graw Hill Publication. New Delhi.
6. Purcell, Edward M, and David J. Morin. Electricity and Magnetism. , 2013.
7. Resnic.R&Halliday.D. Physics Part-I&Part-II. Wiley Eastern Pvt.Ltd. New Delhi.
8. Resnick, Robert, David Halliday, and Kenneth S. Krane. Physics. New York: Wiley, 2002.

اکائی 10 - ایمپیر کا کلیہ و مقناطیسی قوت

(Ampere's Law and Magnetic Potential)

اکائی کے اجزا

تمہید	10.0
مقاصد	10.1
ایمپیر کا دوری کلیہ	10.2
مقناطیسی میدان کا خمیدہ ہونا	10.3
مقناطیسی میدان کا انفرج	10.4
مقناطیسی سمتی و غیر سمتی قوت	10.5
حل شدہ مثالیں	10.6
اکتسابی نتائج	10.7
کلیدی الفاظ	10.8
نمونہ امتحانی سوالات	10.9
معرضی جوابات کے حامل سوالات	10.9.1
مختصر جوابات کے حامل سوالات	10.9.2
طویل جوابات کے حامل سوالات	10.9.3
حل شدہ جوابات کے حامل سوالات	10.9.4
مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں	10.10

10.0 تمہید (Introduction)

پچھلے باب میں ہم بیوٹ ساورٹ کے کلیہ کی مدد سے مختلف روبردار موصولوں میں برقی میدان کو معلوم کرنا سیکھے تھے اس باب میں ہم اور مزید آسان طریقے کو استعمال کرتے ہوئے مقناطیسی میدان کو معلوم کریں گے۔ اس باب میں ہم ایمپیر کے کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے مقناطیسی میدان کو معلوم کریں گے اور ساتھ ہی مقناطیسی سمتی وغیر سمتی قوت کا بھی فہم حاصل کریں گے۔

10.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں ہم

- i. ایمپیر کے دوری کلیہ کو بیان کرے گے اور اس کی تشریح کریں گے۔
- ii. ایمپیر کے کلیہ کا اطلاق کرتے ہوئے اسے آسان جیومیٹری کے ذریعے مقناطیسی میدان کو معلوم کریں گے۔
- iii. مقناطیسی میدان کا انفرج (Divergence) اور خمیدہ (Curl) معلوم کریں گے۔
- iv. مقناطیسی سمتی وغیر سمتی قوت کو سمجھیں گے۔
- v. ایمپیر کے کلیہ پر منحصر سوالات کو حل کریں گے۔
- vi. مقناطیسی قوت پر منحصر سوالات کو حل کرے یں گے۔

10.2 ایمپیر کا دوری کلیہ (Amperes Circuital Law)

ہمیں معلوم ہے کہ طویل برقی رونا i بردار تار کے اطراف مقناطیسی میدان $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$ اور مقناطیسی خطوط تار کے اطراف ہم مرکزی دائروں میں ہوتے ہیں۔ کسی بند سطح کے نصف قطر R کے اطراف خطی تکمل (Line Integral) رہے گا۔

$$\oint B \cdot dl = \int B dl \cos\theta$$

$\theta = 0$ صرف درجہ ہو تب مقناطیسی میدان دائری راستہ کی مماسی کی سمت ہوگا۔

$$\oint B \cdot dl = \int \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \cos\theta dl$$

$$\oint B \cdot dl = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \int dl$$

اگر R کسی خاص دائری راستے پر مستقل ہے تب اسے باہر کی طرف تکمل لے سکتے ہیں اور $\int dl$ کا $2\pi r$ کے مساوی ہوگا

لہذا

$$\oint B \cdot dl = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} 2\pi r \quad (10.1)$$

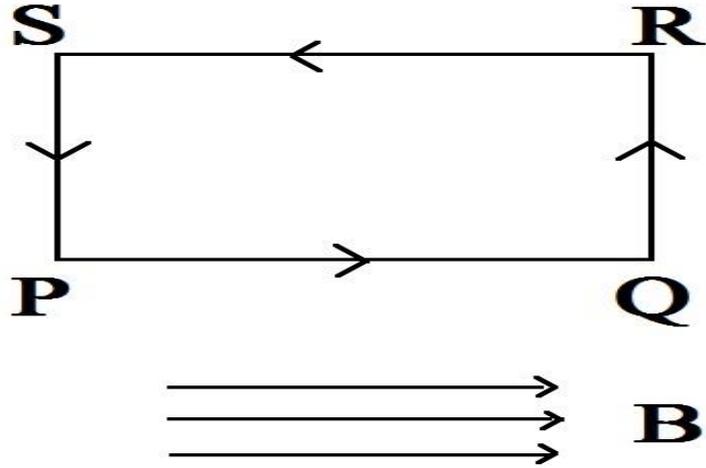
$$\oint B \cdot dl = \mu_0 i \quad (10.2)$$

مندرجہ بالا مساوات بتاتی ہے کہ کوئی بھی آزاد ساخت رکھنے والے بند راستے کے لیے حسب بالا رشتہ درست ہوتا ہے یعنی خطی تکمیل راستے کی ساخت پر منحصر نہیں ہوتا یا کسی بند راستے کے لیے $\oint B \cdot dl$ راستے کی جسامت سے آزاد ہوتا ہے اور تار کے مقام سے بھی آزاد ہوتا ہے۔

مساوات (10.2) ایمپیر کے کلیہ کو بتلاتی ہے جسے اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے کہ کسی بند راستے پر مقناطیسی امالہ B کا خطی تکمیل برقی رو راستے سے گھرے تمام علاقہ کہ μ مرتبہ کے مساوی ہوتا ہے۔

10.3 ایمپیر کے کلیہ کے اطلاقات (Applications of Ampere's Law)

جب کبھی ایسا نظام ہوتا ہے جہاں برقی رو کی تقسیم میں تشاکل (Symmetry) پایا جاتا ہے تب ایمپیر کے کلیہ کے ذریعے مقناطیسی میدان B کی قدر معلوم کرنا آسان ہو جاتا ہے ذیل کی مثال میں لامتناہی طول رکھنے والے سولینائیڈ کی وجہ سے مقناطیسی میدان پیدا ہو رہا ہے۔



شکل (10.1)

پہچواں یا سولینائیڈ کے اندر مقناطیسی میدان محور کے متوازی اور ہموار ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ ایک مستطیلی حلقہ PQRS ہے اس کے اطراف تکمیل اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\oint B \cdot dl = \int_P^Q B \cdot dl + \int_Q^R B \cdot dl + \int_R^S B \cdot dl + \int_S^P B \cdot dl$$

$$= B \cdot dl + 0 + 0 + 0$$

پہلی قدر $B \cdot dl$ کے مساوی ہوگی جہاں $\theta = 0$ پر ہوگا۔ دوسری اور چوتھی قدر صفر ہوگی کیوں کہ dl کی سمت مقناطیسی میدان B کی سمت کے عمود وار ہے۔ تیسری قدر میں S سولینائیڈ کے باہر ہوگا اور ہم جانتے ہیں کہ سولینائیڈ کے باہر میدان صفر ہوتا ہے۔ اس طرح تیسری قدر بھی صفر ہوگی۔

لہذا

$$\oint B \cdot dl = Bl$$

$$\oint B \cdot dl = \mu_0 i$$

N چکروں کے لیے یہ $\mu_0 N i$ کے مساوی ہوگا۔

$$Bl = \mu_0 N i \quad (10.3)$$

$$n = \frac{N}{l}$$

$$ln = N$$

$$Bl = \mu_0 n l i \quad (10.4)$$

$$B = \mu_0 n i \quad (10.5)$$

یہ بالکل ایسا ہی ہے جیسے مساوات (10.5) میں ہمیں حاصل ہوا پر یہاں ہم بہت آسانی سے B کی قدر معلوم کر سکتے ہیں اور ہم ایمپیری حلقہ کو ترتیب دے کر ایسا نظام بنا سکتے ہیں جہاں برقی رو کی تقسیم میں تشاکل (Symmetry) پایا جاتا ہے جیسے کہ تار، ٹورائیڈ (Toroid)، استوانہ وغیرہ اور اس میں ہم اب ایمپیر کے کلیہ کہ ذریعے بہت آسانی سے مقناطیسی میدان B کو معلوم کر سکتے ہیں۔

10.3.1 مقناطیسی میدان کا خمیدہ (Curl of B)

فرض کرو کہ ایک خطہ میں برقی رو بہ رہی ہے۔ بننے والی جملہ برقی رو i ہے۔ سطح کا چھوٹا سا جز ds ہے جو بند راستے سے گھیرا ہے اور اس جز ds میں برقی رو کی کثافت j ہے۔

$$i = \int j \cdot ds \quad (10.6)$$

ایمپیر کے کلیہ کے مطابق

$$\oint B \cdot dl = \mu_0 i$$

$$\oint B \cdot dl = \mu_0 \int j \cdot ds \quad (10.7)$$

مسئلہ اسٹوکس (Stokes Theorem) کو استعمال کرتے ہوئے۔

$$\oint B \cdot dl = \int \text{curl } B \cdot ds = \mu_0 \int j \cdot ds \quad (10.8)$$

$$\text{Cur } B = \mu_0 j \quad (10.9)$$

یہ ایمپیر کے کلیہ کی تفرقی (Differential) شکل ہے۔ یہ رشتہ بتاتا ہے کہ برقی سکونی میدان کے برعکس مقناطیسی سکونی میدان میں گھماو یا خمیدہ ہوتا ہے۔

10.3.2 مقناطیسی میدان کا انفرج (Divergence of Magnetic Field)

بیوٹ سیاورٹ کی کلیہ سے (Biot-Savart's Law)

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{i dl \times r}{r^3}$$

$$i dl = j dr$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j \times r}{r^3} dr \quad (10.10)$$

$$\text{div } B = \nabla \cdot B = \nabla \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j \times r}{r^3} dv$$

عامل ڈیل (Del Operator) میدان کے نقطہ کا ایک تفاعل ہوتا ہے۔ یہ تکمل (Integral) میں آزاد متغیر ہوتا ہے جو مبدأ نقطہ (عنصر برقی رو) کا تفاعل ہے۔ اس لیے یہ تکمل (Integral) کے دائیں جانب ہٹ سکتا ہے۔

$$\nabla \cdot B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \cdot \frac{j \times r}{r^3} dv$$

سمتیہ کے مطابق

$$\nabla \cdot (A \times B) = B \cdot (\nabla \times A) - A \cdot (\nabla \times B)$$

کیوں کہ $B = \frac{x}{r^3}$ اور $A = j$

$$\nabla \cdot \left(j \times \frac{x}{r^3} \right) = \frac{x}{r^3} \cdot (\nabla \times j) - j \cdot (\nabla \times \frac{x}{r^3})$$

دائیں جانب کی پہلی قدر صفر ہے کیوں کہ j مبدأ کے نقطے کا تفاعل اور ∇ میدان کے نقطہ کے حوالے سے ہے۔ ہم $\nabla \times \frac{x}{r^3}$ کو مزید سہل کر سکتے ہیں۔

$$\nabla \times \frac{x}{r^3} = \nabla \times \left\{ -\nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right\} = -\nabla \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right)$$

مگر کسی بھی تفاعل کے لیے خمیدہ (Curl) کا درجی فرق (Gradient) صفر ہوتا ہے۔ اس لیے یہ قدر بھی صفر ہو گئی۔

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (10.11)$$

برقی سکونیات کی مساوات سے تقابل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\nabla \cdot E = P$$

جہاں P برقی بار کی کثافت ہے۔ اس سے ہم نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ ایک قطبی مقناطیس نہیں رہتا ہے دوسرے الفاظ میں مقناطیسی میدان B میں انفرج (Divergence) یا $\nabla \cdot B$ ہمیشہ صفر ہوتا ہے اس طرح کسی بند سطح (Closed Surface) پر نفوذ صفر ہوتا ہے۔ یعنی B کے خطوط اس طرح ہوتے ہیں کہ مقناطیسی نفوذ (Flux) میں نہ ہی ان کی ابتدا ہوتی ہے اور نہ انتہا ہوتی ہے۔ بلکہ یہ خود اپنے اندر ہی مل جاتے ہیں۔

$$\phi = \int_S B \cdot ds = \int \nabla \cdot B \, dv$$

10.4 مقناطیسی سمتی و غیر سمتی قوتہ (Magnetic Scalar and Vector Potential)

مقناطیسی میدان کو مقناطیسی قوتہ کی شکل میں بھی ظاہر کر سکتے ہیں مساوات (10.9) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\nabla \times B = \mu_0 j$$

برقی رو کی غیر موجودگی میں برقی رو کی کثافت سفر ہوگی۔

$$j = 0$$

$$\nabla \times B = 0$$

کسی غیر سمتی مقدار (Scalar) کے لیے خمیدہ (Curl) کا تدریجی فرق (Gradient) صفر ہوتا ہے B کو ہم غیر سمتی مقدار (Scalar) کے تدریجی فرق (Gradient) کی طرح ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$B = -\nabla \Phi_m \quad (10.12)$$

جہاں Φ_m کو مقناطیسی غیر سمتی قوتہ (Magnetic Scalar Potential) کہتے ہیں۔

مساوات (10.11) سے ہم کو معلوم ہوتا ہے کہ

$$\nabla \cdot B = 0$$

اور غیر سمتی میدان کے انفرج یا تباعد (Divergence) کا تدریجی فرق (Gradient) بھی صفر ہوتا ہے۔ یعنی

$$-\nabla \cdot \nabla \Phi_m = 0$$

$$\nabla^2 \Phi_m = 0 \quad (10.13)$$

عامل ∇^2 کو لپ لیسین (Laplacian) کہتے ہیں۔ مساوات (10.13) لپ لیسین مساوات کہلاتی ہے پر تب ہی یہ قابل عمل ہے جب کے میدان کا خطہ آزاد برقی رو سے الگ ہوں جہاں $j \neq 0$ جہاں ہوتا ہے یعنی برقی رو کی کثافت کی مقدار ہوگی وہاں پر مقناطیسی سمتی قوت (Magnetic Vector Potential) کو استعمال کرتے ہیں۔

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

برقی سکونیات کے گاؤس کلیہ کے مطابق

کیوں کہ سمتیہ کے خمیدہ (Curl) کا تباعد یا انفرج (Divergence) صفر ہوتا ہے۔ B کو ہم سمتی تفاعل \vec{B} کا خمیدہ (Curl) لکھ سکتے ہیں۔

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (10.14)$$

اس مقدار \vec{A} کو مقناطیسی سمتی قوت (Magnetic Vector Potential) کہتے ہیں۔ ہم \vec{A} ایسا تفاعل نہیں ہے جس کا خمیدہ (Curl) صفر کو A کے ساتھ جوڑنے سے وہی نتیجہ دیتا ہے اس لیے \vec{A} پر ایک اضافی شرط اعلا کی جاتی ہے۔ یعنی

$$\nabla \times \vec{A} = 0 \quad (10.15)$$

مقناطیسی سمتی قوت (Magnetic Vector Potential) کو حسب ذیل مساواتوں کے سیٹ کے ذریعے بیان کیا جاتا ہے۔

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

اور

$$\nabla \times \vec{A} = 0$$

10.6 حل شدہ مثالیں (Solved Problems)

حل شدہ مثال 1

لاٹناہی طویل موصل جو 20 ایمپیئر برقی رو رکھتا ہے اس سے 10 سمر دور فاصلے پر مقناطیسی امالہ معلوم کریں۔؟

حل: دیا گیا ہے کہ

$$i = 20 \text{ mA} = 20 \times 10^{-3} \text{ A}$$

$$R = 10 \text{ cm} = 10 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

$$B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 20 \times 10^{-3}}{2\pi \times 10 \times 10^{-2}} \Rightarrow B = 4 \times 10^{-8} \text{ Tesla}$$

حل شدہ مثال 2

مستقیم طویل 3.5 ایمپیئر رو بردار واڑ میں کتنے فاصلے پر مقناطیسی نفوذی کثافت $7 \times 10^{-6} \text{ A/m}$ ہوگی؟

حل:

دیا گیا ہے کہ

$$i = 3.5 \text{ A}$$

$$B = 7 \times 10^{-6} \text{ A/M}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

$$R = \frac{\mu_0 i}{2\pi B}$$

$$R = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 3.5}{2\pi \times 7 \times 10^{-6}}$$
$$R = 0.1 \text{ m}$$

حل شدہ مثال 3

ایک طویل سولینائیڈ میں 10 چکر فی سمر ہیں اور برقی رو 10 mA ہے۔ محور کے داخلی نقطہ پر مقناطیسی امالہ معلوم کیجیے؟

حل: دیا گیا ہے کہ

$$i = 10 \text{ mA} = 10 \times 10^{-3} \text{ A}$$

$$n = 10 \text{ per cm} = 1000 \text{ per m}$$

$$B = \mu_0 n i$$

$$B = 4\pi \times 10^{-7} \times 1000 \times 10 \times 10^{-3}$$

$$B = 12.56 \times 10^{-6} \frac{\text{ویبر}}{\text{میٹر}}$$

حل شدہ مثال 4

سولینائیڈ جو پچاس 50 سمر طول رکھتا ہے جس میں ہزار 1000 چکر ہیں اور اس سے ایک 1 ایمپیر برقی رو بہ رہی ہے۔ محور کے

اندرونی حصے پر مقناطیسی میدان کی حدت کیا ہوگی؟

حل: دیا گیا ہے کہ

$$N = 1000 = 10 \times 10^{-3} \text{ A}$$

$$L = 50 \text{ cm} = 0.5 \text{ m}$$

$$i = 1 \text{ amp}$$

$$B = \mu_0 n i$$

$$H = \frac{B}{\mu_0} = n i$$

$$n = \frac{N}{l} = \frac{1000}{0.5} = 2000$$

$$H = 2000 \times 1$$

$$H = 2000 \frac{\text{چکر}}{\text{میٹر}} \text{ ایسپیر}$$

حل شدہ مثال 5

اگر مقناطیسی غیر سمتی قوت $\Phi_m = \frac{1}{2}x^2 - xy - \frac{1}{2}z^2$ ہے تب مقناطیسی امالہ B معلوم کریں؟

حل:

$$B = -\nabla\Phi_m$$

$$B = \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2}x^2 - xy - \frac{1}{2}z^2 \right) i + \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{2}x^2 - xy - \frac{1}{2}z^2 \right) j \right. \\ \left. + \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{2}x^2 - xy - \frac{1}{2}z^2 \right) k \right]$$

$$B = [(x - y)i - xj + zk]$$

$$B = [(y - x)i + xj + zk]$$

حل شدہ مثال 6

اگر مقناطیسی سمتی قوت $\vec{A} = (3x^2 + 2y^2)k$ ہے تب مقناطیسی میدان کی حدت B معلوم کریں؟

حل:

$$B = \nabla \times A$$

$$H = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times A)$$

$$H = \frac{1}{\mu_0} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ 0 & 0 & 3x^2 + 2y^2 \end{bmatrix}$$

$$H = \frac{1}{\mu_0} \{ 4y - 6j \}$$

حل شدہ مثال 7

دئے گئے خطے میں سمتی قوتہ $\vec{A} = -2y i + xj$ ہے B کو معلوم کریں؟

حل:

$$B = \nabla \times A$$

$$B = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ -2y & x & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \{1 - (-2)\}\hat{k}$$

$$B = 3\hat{k}$$

10.7 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- مندرجہ بالا مساوات بتاتی ہے کہ کوئی بھی آزاد ساخت رکھنے والے بند راستے کے لیے حسب بالا رشتہ درست ہوتا ہے یعنی خطی مکمل راستے کی ساخت پر منحصر نہیں ہوتا یا کسی بند راستے کے لیے $\oint B \cdot dl$ راستے کی جسامت سے آزاد ہوتا ہے اور تار کے مقام سے بھی آزاد ہوتا ہے۔

$$\oint B \cdot dl = \mu_0 i$$

- فرض کرو کہ ایک خطہ میں برقی رو بہ رہی ہے۔ بننے والی جملہ برقی رو i ہے۔ سطح کا چھوٹا سا جز ds ہے جو بند راستے سے گھیرا ہے اور اس جز ds میں برقی رو کی کثافت j ہے۔

$$i = \int j \cdot ds$$

- مقناطیسی سمتی قوتہ (Magnetic Vector Potential) کو حسب ذیل مساواتوں کے سیٹ کے ذریعے بیان کیا جاتا ہے۔

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

اور

$$\nabla \times \vec{A} = 0$$

10.8 کلیدی الفاظ (Keywords)

➤ برقی روکی کثافت j : یہ اکائی تراش عمودی کے رقبے میں سے گزرنے والی برقی روکی مقدار ہے اس کی بین الاقوامی اکائی ایمپیر فی مربع میٹر $\frac{amp}{m^2}$ ہے۔

➤ حقیقی قدر رکھنے والے تفاعل کی تدریج: $\nabla f(x, y, z) = \frac{df}{dx} \hat{i} + \frac{df}{dy} \hat{j} + \frac{df}{dz} \hat{k}$

➤ سمتیہ تفاعل کا انفرج یا تباعد: $f = f_1 i + f_2 j + f_3 k$

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

➤ حقیقی قدر رکھنے والے تفاعل $f(x, y, z)$ کا لاپلا سین: ∇^2

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

➤ قضیہ اسٹوکس یا مسئلہ اسٹوکس: گھری ہوئی بند سطح کے تفاعل کا انفرج کا سطحی تکمل، سطح کی اطراف مخصوص سمتی تفاعل کے خطی تکمل کے مساوی ہوتا ہے۔

10.9 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

10.9.1 معروفی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. صحیح جواب کا انتخاب کیجیے۔

i. ایمپیر کی دوری کلیہ کو بتلائے؟

$$\oint B \cdot dl = \frac{\mu_0}{i} (b) \quad \oint B \cdot dl = \mu_0 i (a)$$

$$\oint B \cdot dl = \frac{\mu_0}{j} (d) \quad \oint B \cdot dl = \mu_0 j (c)$$

ii. طویل رو بردار مستقیم موصل سے r فاصلہ پر پائی جانے والے مقناطیسی میدان B راست متناسب ہوتا ہے۔

$$1/r^2 (d) \quad \frac{1}{r} (c) \quad r^2 (b) \quad r (a)$$

2. ایمپیر کی کلیہ کو تفرقہ کی شکل میں لکھیے؟

3. مقناطیسی میدان کا انفرج ہمیشہ مساوی ہوتا ہے.....

4. $\oint H \cdot dl$ کی قدر ہے.....

5. مقناطیسی غیر سمتی قوت کے لیے لاپلا سین کی مساوات لکھیے؟

6. مقناطیسی سمتی قوت کی دو مساوات لکھئے اور سمجھائے؟

7. ایمپیر کا کلیہ بیان کیجئے؟

8. (Ammeter) ایم پیما اور وولٹ پیما (Voltmeter) میں فرق بتلاؤ۔

9. مقناطیسی سمتی قوتہ بیان کیجئے؟

10. مقناطیسی سمتی قوتہ (Magnetic Vector Potential) کی مساواتیں.....ہے۔

10.9.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. ایمپیر کے دوری کلیوں کو بیان کیجئے اور اخذ کیجئے۔ ثابت کیجئے کہ $j=0$ کے لیے مقناطیسی میدان باقی نہیں رہتا ہے؟
2. ایمپیر کے کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے طویل روبردار مستقیم موصل کے ذریعے مقناطیسی امالہ کو معلوم کرنے؟
3. طویل بیچوں (سولینائیڈ) سے ایمپیر کے کلیہ کا اطلاق کرتے ہوئے مقناطیسی نفوذی کثافت کو معلوم کرنے؟
4. ایمپیر کے دوری کلیوں کو بیان کیجئے اور اخذ کیجئے۔
5. مقناطیسی غیر سمتی و سمتی قوتہ (Magnetic Potential and Scalar Potential) کو بیان کیجئے۔

10.9.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. B کا انفرانج کا (Divergence) اور خمیدہ ہونا (Curl) معلوم کیجئے اور ثابت کیجئے کہ ایک قطبی مقناطیس نہیں پایا جاتا ہے؟
2. مقناطیسی غیر سمتی و سمتی قوتہ (Magnetic Potential and Scalar Potential) کیلئے مساوات اخذ کیجئے؟
3. ایمپیر کے دوری کلیوں کو بیان کیجئے اور اخذ کیجئے۔ ثابت کیجئے کہ $j=0$ کے لیے مقناطیسی میدان باقی نہیں رہتا ہے؟ ایمپیر کے کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے طویل روبردار مستقیم موصل کے ذریعے مقناطیسی امالہ کو معلوم کرنے؟

10.9.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. ایک لچھے میں 100 تار ہیں اور ان کا امالہ 0.05H ہے جب اس میں 0.05 ہے جب اس میں 0.02A کی برقی رو گزار جائے تو اس میں کتنا نفوذ (flux) بنے گا۔
2. ایک دائری حلقہ کا تار جس کا قطر 30cm ہے اس سے 3.5A کی برقی رو بہ رہی ہے تب محور کے ایک نقطہ پر جو مرکز سے 40cm کے فاصلہ پر واقع ہے مقناطیسی میدان معلوم کرو؟
3. تار کا ایک دائری لچھا 100 چکروں پر مشتمل ہے جس میں سے ہر ایک کا نصف قطر 8.0cm ہے۔ اس میں 0.40A برقی رو ہے۔ لچھے کے مرکز پر مقناطیسی میدان \vec{B} کی عدد قدر کیا ہے؟
4. ایک طویل مستقیم تار میں 35A برقی رو ہے۔ تار سے 20cm فاصلے پر ایک نقطہ پر میدان \vec{B} کی عددی قدر کیا ہے
5. ایک اوپر سے جارہی افقی پاور لائن میں 90A برقی رو ہے، جس کی سمت مشرق سے مغرب کی جانب ہے۔ لائن سے 1.5 نیچے،

برقی روکی وجہ سے پیدا ہونے والے مقناطیسی میدان کی سمت اور عددی قدر کیا ہے؟

6. ہائیڈروجن جوہر کے بھور ماڈل میں الیکٹران، مرکزہ کے گرد $5.1 \times 10^{-11} m$ نصف قطر کے دائروں میں $68 \times 10^{15} rev/sec$ چکر فی سکینڈ کے تعدد کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔ مدار مرکز پر قائم ہونے والے B کی قیمت کیا ہوگی۔

10.10 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Bleaney, B I, and B Bleaney. Electricity and Magnetism. Oxford: Oxford University Press, 2013.
2. Duffin, W J. Electricity and Magnetism. Cottingham: W.J. Duffin, 2001.
3. Gaur, R.K. & Gupta, S.L. Engineering Physics. Dhanpat Rai Publication.
4. Kurrelmeyer, Bernhard, and Walter H. Mais. Electricity and Magnetism. Princeton, N.J: Van Nostrand, 1967.
5. Peck, Edson R. Electricity and Magnetism. , 2013.
6. Plonsey, R. & Collin, R.E. Principles and Application of Electromagnetic Field. Tata Mc Graw Hill Publication. New Delhi.
7. Purcell, Edward M, and David J. Morin. Electricity and Magnetism. , 2013.
8. Resnic, R. & Halliday, D. Physics Part-I & Part-II. Wiley Eastern Pvt. Ltd. New Delhi.
9. Resnick, Robert, David Halliday, and Kenneth S. Krane. Physics. New York: Wiley, 2002.
10. Schuh, Mari C. Magnetism. Minneapolis, MN: Bellwether Media, 2008.

اکائی 11۔ مادہ کے مقناطیسی خواص

(Magnetic Properties of Material)

اکائی کے اجزا

تمہید	11.0
مقاصد	11.1
مقناطیسی خواص	11.2
مقناطیسی امالہ / مقناطیسی نفوذی کشافت	11.2.1
اجازیت	11.2.2
مقناطیسی حدت	11.2.3
مقناطیسی میلانیت	11.2.4
مقناطیسی اشیا کی درجہ بندی	11.3
ڈیا مقناطیسی اشیا	11.3.1
پیرامقناطیسی اشیا	11.3.2
لوہ مقناطیسی اشیا	11.3.3
حل شدہ مثالیں	11.4
اکتسابی نتائج	11.5
کلیدی الفاظ	11.6
نمونہ امتحانی سوالات	11.7
معروضی جوابات کے حامل سوالات	11.7.1
مختصر جوابات کے حامل سوالات	11.7.2
طویل جوابات کے حامل سوالات	11.7.3
حل شدہ جوابات کے حامل سوالات	11.7.4

11.0 تمہید (Introduction)

پچھلے باب میں ہم برقی رو بردار موصولوں کی وجہ سے پیدا ہونے والے برقی میدان کے بارے میں معلومات حاصل کرے تھے اور مقناطیسی سمستی و غیر سمستی قوت کا فہم ہم حاصل کرے تھے۔ اس باب میں ہم مختلف مادوں کے مقناطیسی خصوصیات اور ان کی اصل کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔

11.1 مقاصد (Objectives)

- اس اکائی کے مطالعہ میں ہم
- مقناطیسی نفوذ، مقناطیسی امالہ، مقناطیسی میدان کی وحدت، اجازیت اور مقناطیسی میلانیت کے تصورات کو سمجھائے گئے۔
 - مقناطیسی میلانیت اور مقناطیسی اجازیت کے درمیان نسبت قائم کریں گئے۔
 - ڈایا، پیر اور لوہ مقناطیسی اشیا میں درجہ بندی کریں گئے۔
 - مندرجہ بالا تصورات پر مبنی سوالات کو حل کریں گئے۔

11.2 مقناطیسی خواص (Magnetic Properties)

وہ اشیا جو مقناطیس سے کشش کرتے ہیں مقناطیسی اشیا کہلاتے ہیں۔ مقناطیسی اشیا کے جوہر کے اندر موجود برقی بار رکھنے والے ذرات کی گردش کی وجہ سے مقناطیسی اثر پیدا ہوتا ہے۔ ہم پہلے پڑھ چکے ہیں کہ برقی بردار رکھنے والا حلقہ مقناطیسی ذوقطبیہ کے برابر ہوتا ہے۔ یہ ہی وجہ ہے کہ ظاہر میں مرکزے کے اطراف اپنے مدار پر منفی الیکٹران کی حرکت کی وجہ سے مقناطیسی اثر پیدا ہوتا ہے اسے مداری مقناطیسی معیار اثر کہتے ہیں اور الیکٹرون کے گھماؤ کی وجہ سے بھی مقناطیسی اثر پیدا ہوتا ہے۔ اگر الیکٹرون کے گھماؤ کی وجہ سے ہونے والے مقناطیسی معیار اثر کو (Bohr Magnetron) بھور کا مقنیطیہ (گنی ٹون) کہتے ہیں۔ جس سے M_B سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$M_B = \frac{eh}{4\pi m_e} = 9.274 \times 10^{-24} \text{ A/m}^{-2} \quad (11.1)$$

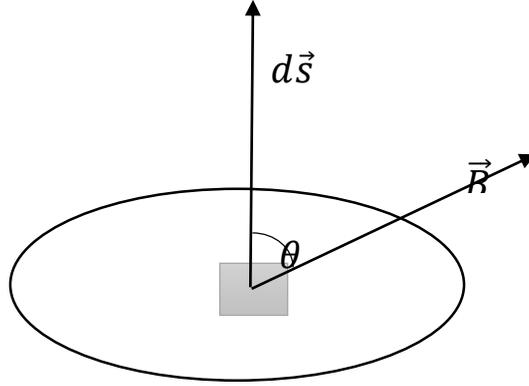
جہاں e الیکٹران کا برقی بار h پلانک کا مستقل m_e الیکٹران کی کمیت ہے۔ بوہر مقنیطیہ (Magnetron) بہت ہی بنیادی مقناطیسی معیار اثر ہے۔ یہی وجہ ہے کہ جوہر کی ساخت پر اشیا کا مقناطیسی معیار اثر منحصر رہتا ہے۔

11.2.1 مقناطیسی امالہ / مقناطیسی نفوذی کثافت (Magnetic induction/ Magnetic flux)

((H) Density)

کسی نقطے پر مقناطیسی امالہ مقناطیسی میدان B کے عمود وار اکائی رقبے میں سے گزرنے والا مقناطیسی نفوذ ہوتا ہے۔

$$\phi_m = B \cdot A \quad (11.2)$$



شکل (11.1)

مقناطیسی میدان کی حدت دراصل کسی شے میں موجود مقناطیسی میدان ہوتا ہے جو کسی کا ذاتی و قدرتی نہیں ہوتا ہے یہ بیرونی برقی رو کے ذریعے پیدا ہوتا ہے۔ اس کو H کی سمتیہ کی شکل میں ظاہر کیا جاتا ہے اور H کی اکائی A/m ہے۔ اگر برقی رو n سے لچھے کے ذریعے مقناطیسی میدان پیدا کیا گیا ہے جس کا طول l ہے اور اس میں n چکر ہیں اسے اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$H = \frac{n i}{l} \quad (11.3)$$

11.2.2 اجازیت (Permeability) (μ)

اجازیت (Permeability) μ یہ مادہ کی خصوصیت ہوتی ہے۔ جو مادہ میں مقناطیسی نفوذی کثافت B اور مقناطیسی حدت کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے یا مقناطیسی نفوذی کثافت B اور مقناطیسی حدت کو آپس میں تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

$$\mu = \frac{B}{H} \quad (11.4)$$

اجازیت (Permeability) (μ) واسطے کی مخصوص خصوصیت ہے اور اس کی اکائی $\frac{web}{A-M}$ و بیرونی ایمپیئر میٹر ہے یا ہنری (Henry) فی میٹر (Meter) ہے۔ اضافی مقناطیسی اجازیت کو اس طرح بیان کیا جاتا ہے۔

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (11.5)$$

جہاں μ_r اس درجہ کی پیمائش ہے جس درجہ پر مادہ کو مقناطیس بنایا جاسکتا ہے اور μ_0 خلاء کی مقناطیسی اجازیت ہے۔

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{web}{A-M}$$

11.2.3 مقناطیسی حدت (Intensity of Magnetization) (I)

مقناطیسی حدت، مقناطیسی شے میں مقناطیسی میدان کے ذریعے مقناطیسی معیار اثر کو ترغیب دینے یا مائل کرنے کا عمل ہے۔

مقناؤکی حدت سمتیہ (Intensity of Magnetization) I سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ جب مادہ کو مقناطیسی میدان میں رکھا جاتا ہے تب جوہری ذوقطبیہ (Atomic Dipole) میدان کی سمت میں مکمل یا جزوی مائل ہوتا ہے۔ اس لیے میدان کی سمت میں جملہ مقناطیسی معیار اثر ترتیب پاتا ہے۔ I دیے گئے مادہ کی مستقل یا ترغیب شدہ ذوقطبی معیار اثر کی کثافت کی پیمائش ہے۔

$$I = \frac{M}{V} \quad (11.6)$$

جہاں M جملہ مقناطیسی معیار اثر ہے جو مقناطیسی میدان کی وجہ سے حجم V کے اندر ہے۔ I مقناطیسی شے کا مقناطیسی معیار اثر فی اکائی حجم ہے۔ جس کی پیمائش ایمپیر فی مربع میٹر ہوتی ہے۔ جس کی اکائی ایمپیر فی میٹر Am^{-1} میں ہوتی ہے۔

11.2.4 مقناطیسی میلانیت (Magnetic Susceptibility) (χ)

مقناطیسی میلانیت (Magnetic Susceptibility) اس حد کی پیمائش ہے جس میں بیرونی مقناطیسی میدان سے کسی شے کو مقناطیس بنایا جاسکتا ہے۔ یہ کسی مادہ میں ترغیب شدہ مقناؤکی حدت I اور مقناطیسی میدان کی حدت H کے درمیان نسبت ہوتی ہے۔

$$\chi = \frac{I}{H} \quad (11.7)$$

کیوں کہ I اور H کی اکائیاں ایک ہی ہوتی ہے یعنی Am^{-1} اس وجہ سے ان کی نسبت کی اکائی نہیں ہوتی ہے۔

μ_r اور χ میں نسبت :

$$B = \mu_0 H + \mu_0 I \quad (11.8)$$

یہاں جملہ مقناطیسی میدان دو حصوں میں تقسیم ہے پہلا یعنی H بیرونی عوامل جیسے سولینائیڈ سے گزر رہے برقی رو کی وجہ سے پیدا ہونے والا ہے اور دوسرا $\mu_0 I$ اضافی مقناطیسی نفوذ فی اکائی حجم ہے جو مابلی اثر کی وجہ سے ہوتا ہے۔

مگر $B = \mu H$ اور مساوات (11.8) سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

$$\chi = \frac{I}{H} \Rightarrow \chi H = I$$

مساوات (11.8) میں درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\mu H = \mu_0 H + \mu_0 (\chi H)$$

$$\mu H = \mu_0 H (1 + \chi)$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = (1 + \chi)$$

$$\mu_r = (1 + \chi)$$

$$\mu_r - 1 = \chi \quad (11.9)$$

11.3 مقناطیسی اشیا کی درجہ بندی (Classification of Magnetic Materials)

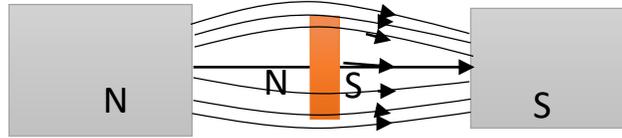
مقناطیسی اشیا کو ان کے مقناطیسی طرز عمل کی بنیاد پر درجہ بندی کی جاتی ہے جس کا انحصار χ پر ہوتا ہے اور اس کی مقدار اور

علامت پر ہوتا ہے اس کے بنیادی طور پر تین اقسام ہیں -

- ڈیامقناطیسی (Diamagnetic) اشیا
- پیرامقناطیسی (Paramagnetic) اشیا
- لوہ مقناطیسی (Ferromagnetic) اشیا

11.3.1 ڈیامقناطیسی اشیا (Diamagnetic Materials)

ڈیامقناطیسی مادہ مقناطیس سے کمزور طور پر دفاع کرتا ہے۔ اس مادہ میں مستقل ذوقطبیہ (Dipole) کی کمی ہوتی ہے۔ جب بیرونی مقناطیسی میدان کو عائد کیا جاتا ہے جس کے نتیجے میں جوہر کے مداروں میں گردش کرنے والے الیکٹرانس اپنا توازن کھودیتے ہیں اور ہلکا سا مقناطیسی ذوقطبیہ (Dipole) بناتے ہیں جو عائد ہونے والے میدان کے مخالف سمت میں ہوتا ہے۔ جو منفی مقناطیسی اثر پیدا کرتا ہے جسے ہم ڈیامقناطیسیت کہتے ہیں۔

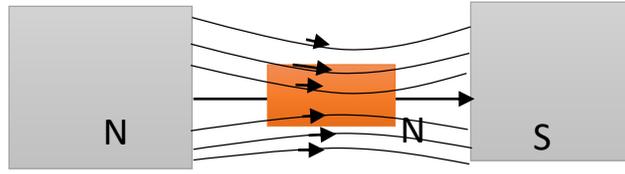


شکل (11.2) ڈیامقناطیسی اشیا میں حسب ذیل خواص ہوتے ہیں -

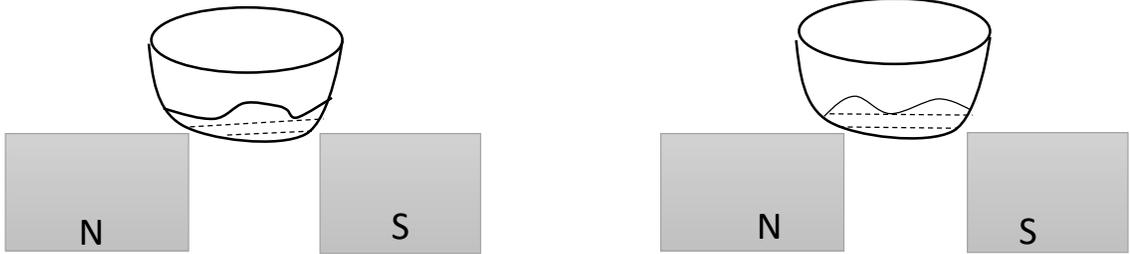
- یہ کمزور اثر رکھتے ہیں۔
- مستقل ذوقطبیہ (Dipole) غیر موجود رہتے ہیں۔
- امالی مقناطیسی معیار اثر بہت کم رہتا ہے اور مقناطیسی I کی سمت عائد ہونے والے مقناطیسی میدان H کی سمت کی مخالف سمت میں ہوتی ہے۔
- اس وجہ سے نفوذی کثافت باہر کے مقابلے اندر کم ہوتی ہے۔
- اضافی اجازیت اکائی سے کم ہوتی ہے یعنی مقناطیسی میلان منفی ہوتا ہے۔
- مثال کے طور پر تانبہ Cu ، چاندی Ag ، سیلیکان Si وغیرہ۔

11.3.2 پیرامقناطیسی اشیا (Paramagnetic Materials)

پیرامقناطیسی اشیا مقناطیس سے کمزور طور پر کشش کرتے ہیں۔ پیرامقناطیسی اشیا مستقل ذوقطبی معیار اثر (Dipole Moment) رکھتے ہیں۔ کیوں کہ ان میں الیکٹرونی گھماؤں اور مداری مقناطیسی معیار اثر کی نامکمل تفسیح ہوتی ہے۔ بیرونی مقناطیسی میدان کی غیر موجودگی میں جوہری مقناطیسی معیار اثر کی بے ترتیبی کی وجہ سے جملہ مقناطیسیت نہیں پائی جاتی ہے۔ لیکن جب بیرونی مقناطیسی میدان عائد کیا جاتا ہے تب ذوقطبی (Dipoles) میدان کے ساتھ ترتیب پاتے ہیں۔ جس کے نتیجے میں مثبت مقناطیسیت پائی جاتی ہے۔ پیرامقناطیسی اشیا میں حسب ذیل خواص پائے جاتے ہیں۔



شکل (a)



شکل (b)

شکل (c)

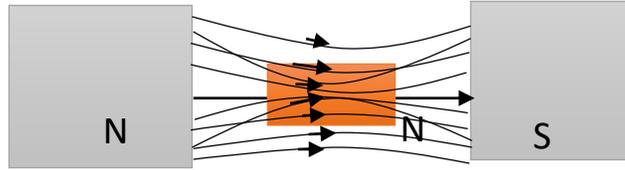
شکل (11.3)

- ان کا اثر ڈیامقناطیس سے کچھ طاقتور ہوتا ہے۔
- مستقل ذوقطیبی (Dipoles) موجود ہوتی ہیں لیکن ذوقطیبی (Dipoles) ایک دوسرے پر اثر انداز نہیں ہوتے ہیں۔
- کیوں کہ یہ ایک دوسرے پر اثر انداز نہیں ہوتے ہیں اس لیے ان سب کو ترتیب دینے کے لیے بہت بڑے مقناطیسی میدان کی ضرورت ہوتی ہے۔
- بیرونی مقناطیسی میدان کو ان سے ہٹانے سے ان کا اثر ختم ہو جاتا ہے۔
- ان اشیا کی مقناطیسی میلانیت (Susceptibility) مثبت ہوتی ہیں۔
- اضافی اجازیت ایک سے زیادہ ہوتی ہے۔
- اگر حراری حرکت بے ترتیب ہو تب مقناطیسی ذوقطبی میں کمی ہوتی ہے اور تپش کے اضافہ سے میلان میں کمی ہوتی ہے۔

- جہاں $\chi = \frac{c}{T}$ تپش مطلقے اور اسے کیوری کا کلیہ کہتے ہیں اور مستقل کو کیوری کا مستقل کہتے ہیں۔
- مثال کے طور پر پلاٹینیم، المونیم، کرومیم، ٹیٹانیم وغیرہ۔

11.3.3 لوہا مقناطیسی اشیا (Ferromagnetic Materials)

فیرو مقناطیسی مادہ مقناطیس سے طاقتور طور پر کشش کرتے ہیں۔ جب انہیں بیرونی مقناطیسی میدان میں رکھا جاتا ہے تب یہ بھی طاقتور مقناطیس بن جاتے ہیں اور شے کے اندر مقناطیسی نفوذی کثافت میں اضافہ ہوتا ہے۔ ان اشیا میں بیرونی مقناطیسی میدان کی غیر موجودگی میں بھی مستقل مقناطیس اثر ہوتا ہے۔ جب کہ ڈایا مقناطیسی اشیا اور پیرامقناطیسی اشیا میں ایسا نہیں ہوتا ہے۔ جب بیرونی مقناطیسی میدان میں ان کو رکھا جاتا ہے تب یہ بہت تیزی سے مقناطیسی میدان کی سمت میں ترتیب پاتے ہیں۔



شکل (11.4)

- لوہا مقناطیسی اشیا میں حسب ذیل خواص پائے جاتے ہیں۔
- ان کے اثرات بہت طاقتور ہوتے ہیں۔
- ان میں مستقل ذوقطبے (Dipoles) ہوتے ہیں۔
- ان میں ذوقطبے (Dipoles) ایک دوسرے پر اثر انداز ہوتے ہیں۔
- ان میں اضافی اجازیت بہت زیادہ ہوتی ہے اور مثبت χ قریب قریب 10^6 سے زیادہ ہوتا ہے۔
- ان میں میلان تپش پر بہت زیادہ منحصر رہتی ہے۔
- لوہا مقناطیسی خاصیت تپش پر منحصر ہوتی ہے۔ کافی زیادہ تپش پر لوہا مقناطیس پیرامقناطیس کی طرح ہو جاتا ہے۔
- لوہا مقناطیس پیرامقناطیس میں تبدیل ہونے کی تپش کیوری تپس T_c کہلاتی ہے۔
- میلانیت اور تپش میں رشتہ کو Curie-Weiss law کلیہ میں بتلایا گیا ہے جو یہ ہے $\chi = \frac{c}{T-T_c}$
- جہاں C مستقل ہے اور T تپش ہے اور T_c کیوری تپش ہے۔
- مثال کے طور پر کوبالٹ، لوہا، نکل اور ان کی بھرتیں ہیں۔

11.4 حل شدہ مثالیں (Solved Problems)

حل شدہ مثال 1

ایک فیرومقناطیسی مادے سے بنی سلاخ کا مستطیلی تراش عمودی کارقبہ چار 4 مربع میٹر ہے اسے ہزار 1000 ایمپیر فی مربع میٹر حدت رکھنے والے مقناطیسی میدان کے متوازی اس سلاخ کو رکھا گیا ہے سلاخ کا مقناطیسی نفوذ 4×10^{-4} ویبر ہے۔ اس سلاخ کے مادہ کی اجازیت کیا ہوگی؟

حل: دیا گیا ہے کہ

$$H = 1000 \text{ amp/m}$$

$$A = 4 \text{ sq cm}$$

$$\Phi = 4 \times 10^{-4} \text{ weber}$$

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{4 \times 10^{-4} \text{ ویبر}}{4 \times 10^{-4} \text{ m}^2}$$
$$B = 1 \text{ Tesla}$$
$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{1}{1000}$$

$$\mu = 1 \times 10^{-3} \frac{\text{ویبر}}{\text{میٹر} \times \text{ایمپیر}}$$

حل شدہ مثال 2

ایک مقناطیس جس کے ابعاد $5 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$ ہیں۔ جملہ مقناطیسی معیار 5.4 ایمپیر فی مربع میٹر رکھتا ہے۔ مقناطیس کی حدت معلوم کیجیے؟

حل: دیا گیا ہے کہ

$$l = 5 \text{ cm}$$

$$b = 2 \text{ cm}$$

$$h = 1 \text{ cm}$$

$$m = 5.4 \text{ amp m}^2$$

$$v = l \times b \times h$$
$$v = 5 \times 2 \times 1 \text{ cm}^3$$
$$v = 10 \text{ cm}^3$$
$$v = 10 \times 10^{-6} \text{ cm}^3$$

$$I = \frac{M}{V} = \frac{5.4 \text{ ایمپیئر}}{10^{-5} \text{ میٹر}}$$

$$I = 5.4 \times 10^5 \frac{\text{ایمپیئر}}{\text{میٹر}}$$

حل شدہ مثال 3

ایک سولینائیڈ کے اندر مقناطیسی میدان $4.8 \times 10^{-4} \text{ T}$ ہے۔ اگر یہی سولینائیڈ کو کولوہے کے گرد لپیٹا گیا ہے تب میدان 1.2 T ہوگا۔ لوہے کی اضافی اجازت کو معلوم کریں؟

حل: دیا گیا ہے کہ

$$M = 1.2 \text{ T}$$

$$H = 4.8 \times 10^{-4} \text{ T}$$

$$\chi = \frac{M}{H} = \frac{1.2}{4.8 \times 10^{-4}} = 2500$$

$$\chi = 2500$$

$$\chi_r = 1 + \chi$$

$$\chi_r = 1 + 2500$$

$$\chi_r = 2501$$

11.5 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- الیکٹرون کے گھماؤ کی وجہ سے بھی مقناطیسی اثر پیدا ہوتا ہے۔ اگر الیکٹرون کے گھماؤ کی وجہ سے ہونے والے مقناطیسی معیار اثر کو (Bohr Magneton) بھور کا مقنیطیہ (گنی ٹون) کہتے ہیں۔ جس سے M_B سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$M_B = \frac{eh}{4\pi m_e} = 9.274 \times 10^{-24} \text{ A/m}^{-2}$$

- کسی نقطے پر مقناطیسی امالہ مقناطیسی میدان B کے عمود وار اکائی رقبے میں سے گزرنے والا مقناطیسی نفوذ ہوتا ہے۔

$$\Phi_m = B \cdot A$$

- اجازیت (Permeability) (μ) یہ مادہ کی خصوصیت ہوتی ہے۔ جو مادہ میں مقناطیسی نفوذی کثافت B اور مقناطیسی حدت کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے یا مقناطیسی نفوذی کثافت B اور مقناطیسی حدت کو آپس میں تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

$$\mu = \frac{B}{H}$$

- اجازیت ((μ) Permeability) واسطے کی مخصوص خصوصیت ہے اور اس کی اکائی $\frac{web}{A-M}$ ویبرنی ایمپیر میٹر ہے یا ہنری (Henry) فی میٹر (Meter) ہے۔ اضافی مقناطیسی اجازیت کو اس طرح بیان کیا جاتا ہے۔

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$$

- مقناطیسی حدت سمتیہ I سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ جب مادہ کو مقناطیسی میدان میں رکھا جاتا ہے تب جوہری ذوقطبیہ (Atomic Dipole) میدان کی سمت میں مکمل یا جزوی مائل ہوتا ہے۔ اس لیے میدان کی سمت میں جملہ مقناطیسی معیار اثر ترتیب پاتا ہے۔ I دیے گئے مادہ کی مستقل یا ترغیب شدہ ذوقطبی معیار اثر کی کثافت کی پیمائش ہے۔

$$I = \frac{M}{V}$$

- جہاں M جملہ مقناطیسی معیار اثر ہے جو مقناطیسی میدان کی وجہ سے حجم V کے اندر ہے۔ I مقناطیسی شے کا مقناطیسی معیار اثر فی اکائی حجم ہے۔ جس کی پیمائش ایمپیر فی مربع میٹر ہوتی ہے۔ جس کی اکائی ایمپیر فی میٹر Am^{-1} میں ہوتی ہے
- مقناطیسی میلانیت (Magnetic Susceptibility) اس حد کی پیمائش ہے جس میں بیرونی مقناطیسی میدان سے کسی شے کو مقناطیس بنایا جاسکتا ہے۔ یہ کسی مادہ میں ترغیب شدہ مقناطیسی حدت I اور مقناطیسی میدان کی حدت H کے درمیان نسبت

$$\chi = \frac{I}{H}$$

کیوں کہ I اور H کی اکائیاں ایک ہی ہوتی ہے یعنی Am^{-1} اس وجہ سے ان کی نسبت کی اکائی نہیں ہوتی ہے۔

$$\mu_r - 1 = \chi$$

- مقناطیسی اشیا کو ان کے مقناطیسی طرز عمل کی بنیاد پر درجہ بندی کی جاتی ہے جس کا انحصار χ پر ہوتا ہے اور اس کی مقدار اور علامت پر ہوتا ہے اس کے بنیادی طور پر تین اقسام ہیں۔

i. ڈیامقناطیسی (Diamagnetic) اشیا

ii. پیرامقناطیسی (Paramagnetic) اشیا

iii. لوہ مقناطیسی (Ferromagnetic) اشیا

- ڈیامقناطیسی اشیا (Diamagnetic Materials): ڈیامقناطیسی مادہ مقناطیس سے کمزور طور پر دفاع کرتا ہے۔

- پیرامقناطیسی اشیا (Paramagnetic Materials): پیرامقناطیسی اشیا مقناطیس سے کمزور طور پر کشش کرتے

ہیں۔

- لوہ مقناطیسی اشیا (Ferromagnetic Materials): فیروں یا لوہ مقناطیسی مادہ مقناطیس سے طاقتور پر کشش کرتے

11.6 کلیدی الفاظ (Keywords)

- مقناطیسیت : مقناطیسی اثر کے سبب مادہ دوسرے مادے کو کشش یا دفاع کرتا ہے یہ مظہر مقناطیسیت کہلاتی ہے۔
- مداری مقناطیسی معیار اثر: مداری مقناطیسی معیار اثر مرکز کے اطراف الیکٹران کا اپنے مدار میں حرکت کے سبب مقناطیسی معیار اثر
- بوہر مقنیطیہ۔ گنی ٹون: یہ الیکٹرون کے گھومنے (Spin) کے سبب پائے جانے والا مقناطیسی معیار اثر ہے۔
- مقناطیسی میدان کی شدت H: یہ کسی ایسے مادہ میں مقناطیسی میدان کا راستہ ہے جو بیرونی کرنٹ سے پیدا ہوتا ہے اور خود مادہ میں اندرونی نہیں ہوتا ہے۔
- اجازیت: یہ مقناطیسی نفوذی کثافت B اور مقناطیسی میدان کی شدت H کا تناسب ہے۔
- اضافی اجازیت μ_r : یہ مادہ کی اجازیت اور خلاء کی اجازیت کے درمیان پائے جانے والے نسبت ہے۔
- مقناطیسی حدت: مقناطیسی معیار اثرنی اکائی حجم مقناطیسی حدت کہلاتی ہے۔
- مقناطیسی میلانیت: یہ کسی مادہ میں ترغیب شدہ مقناطیسی حدت اور مقناطیسی میدان کی حدت کے درمیان پائی جانے والی نسبت ہے۔ مقناطیسی میلانیت اس حد کی پیمائش ہے جس پر بیرونی مقناطیسی میدان سے کسی شے کو مقناطیس بنایا جا سکتا ہے۔
- مقناطیسی اشیاء: بیرونی مقناطیسی میدان کے ذریعہ جن اشیاء کو مقناطیس بنایا جا سکتا ہے وہ اشیاء مقناطیسی اشیاء کہلاتی ہیں۔
- کیوری درجہ حرار یا تپش: وہ تپش جس سے پر فیرو مقناطیسی مادہ پیرا مقناطیسی مادہ کے طور پر برتاؤ کرتا ہے۔

11.7 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

11.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. میں کون ہوں ؟
 الف:- میں وہ مقناطیسی مادہ ہو جس میں مستقل مقناطیس ڈائی پول نہیں ہوتا ہے؟
 ب:- میں وہ تپش ہو جس سے فیرو مقناطیسی اشیاء پیرا مقناطیسی اشیاء بن جاتی ہیں؟
2. درست جواب کا انتخاب کیجیے ؟
 الف:- ڈیا مقناطیسی اشیاء کی میلانیت ہوتی ہے ؟
 (a) قلیل، مثبت (b) کثیر، منفی (c) قلیل، منفی (d) کثیر، مثبت
 ب:- مقناطیسی امالہ B کا تعلق مقناطیسی میدان کی حدت H تک ہوتا ہے؟

$$B = \mu_0(H - M) \quad (d) \quad B = \mu_0\left(\frac{H}{M}\right) \quad (c) \quad B = \mu_0\left(\frac{M}{H}\right) \quad (b) \quad B = \mu_0(H + M) \quad (a)$$

3. مقناؤ کی حدت کی تعریف کیجیے؟
4. مقناطیسی اجازیت کی تعریف کیجیے؟
5. بوہر مقناطیہ۔ مگنیٹون مساوی ہوتا ہے.....
6. جب مقناطیس کو مقناطیسی میدان میں رکھا جاتا ہے تب مقناطیسی اشیاء سے مقناطیسی خطوط قوت بہت زیادہ دفع ہو رہے ہیں یہ کونسا مادہ ہوگا.....
7. فیرو مقناطیسی اشیاء میں چند کی فہرست بنائیے؟
8. مقناطیسی میلانیت کے لحاظ سے اضافی اجازیت کو ظاہر کیجیے؟
9. مقناطیسی میدان کی حدت کی اکائی کیا ہے؟

11.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. مقناطیسی امالہ B، مقناطیسی میدان کی حدت H، اور اجازیت μ کو بیان کیجیے؟
2. مقناؤ کی حدت I، مقناطیسی میلانیت χ و اضافی اجازیت μ_r کو بیان کیجیے؟
3. اضافی اجازیت μ_r اور میلانیت χ کے درمیان نسبت کو حاصل کیجیے؟

11.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. ڈیا، پیرا اور فیرو مقناطیسی اشیاء کے خصوصیات پر تفصیلی گفتگو کیجیے۔
2. مقناؤ کی حدت I، مقناطیسی میلانیت χ ، اور اضافی اجازیت μ_r کو بیان کیجیے اور اضافی اجازیت μ_r اور میلانیت χ کے درمیان نسبت کو حاصل کیجیے؟

11.7.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. ایک سولی نائیڈ کا قالب ایسے مادے کا ہے جس کی اضافی اجازیت 400 ہے۔ سولی نائیڈ کی لپٹیں قالب سے عاجز کر دی گئی ہیں اور ان میں 2A برقی رو ہے۔ اگر چکروں کی تعداد 1000 فی میٹر ہے تو حساب لگائیے۔
- (a) مقناطیسی میدان کی حدت H (b) M (c) مقناطیسی امالہ B (d) مقناؤ کی برقی رو I_m
- اشارہ: $B = \mu_0 n_0 (I + I_m)$, $M = B - \mu_0 H / \mu_0$, $B = \mu_r \mu_0 H$, $H = nI$
2. اس سولی نائیڈ جس کے قالب کو عاجز تار لپٹا گیا ہے جس کی اضافی مقناطیسی اجازیت 400 ہے۔ اگر ہر ایک میٹر تار کے لیے 1000 چکروں کی تعداد ہے اور 2A کی برقی رو بہ رہی ہے تب B، H اور مقناطیسی معیار اثر M محسوب کرو؟

11.8 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Bleaney, B I, and B Bleaney. Electricity and Magnetism. Oxford: Oxford University Press, 2013.
2. Duffin, W J. Electricity and Magnetism. Cottingham: W.J. Duffin, 2001.
3. Gaur, R.K. & Gupta, S.L. Engineering Physics. Dhanpat Rai Publication.
4. Kurrelmeyer, Bernhard, and Walter H. Mais. Electricity and Magnetism. Princeton, N.J: Van Nostrand, 1967.
5. Peck, Edson R. Electricity and Magnetism. , 2013.
6. Plonsey.R&Collin.R.E.Principles and Application of Electromagnetic Field. Tata Mc Graw Hill Publication. New Delhi.
7. Purcell, Edward M, and David J. Morin. Electricity and Magnetism. , 2013.
8. Resnic.R&Halliday.D.Physics Part-I&Part-II.Wiley Eastern Pvt.Ltd.New Delhi.
9. Resnick, Robert, David Halliday, and Kenneth S. Krane. Physics. New York: Wiley, 2002.
10. Schuh, Mari C. Magnetism. Minneapolis, MN: Bellwether Media, 2008.

اکائی 12۔ برقی مقناطیسی امالہ

(Electromagnetic Induction)

اکائی کے اجزا

تمہید	12.0
مقاصد	12.1
فیراڈے کا کلیہ	12.2
پہلا تجربہ	12.2.1
دوسرا تجربہ	12.2.2
فیراڈے کے کلیہ کا ریاضیاتی اظہار	12.3
فیراڈے کے کلیہ کی سمتیہ شکل	12.4
لینز کا کلیہ	12.5
حل شدہ مثالیں	12.6
اکتسابی نتائج	12.7
کلیدی الفاظ	12.8
نمونہ امتحانی سوالات	12.9
معروضی جوابات کے حامل سوالات	12.9.1
مختصر جوابات کے حامل سوالات	12.9.2
طویل جوابات کے حامل سوالات	12.9.3
حل شدہ جوابات کے حامل سوالات	12.9.4
مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں	12.10

12.0 تمہید (Introduction)

اٹھارہ سو بیس 1820 میں اور اسٹیڈ نے دریافت کیا کہ برقی رو رکھنے والے موصل کے اطراف مقناطیسی میدان پیدا ہوتا ہے اس کے بعد کئی سائنس دان جیسے کہ بیوٹ ساورٹ اور ایمپیر وغیرہ نے مقناطیسی میدان کے ذریعے برقی میدان کو پیدا کرنے کے لیے کئی تجربات کیے۔ تقریباً ایک دہائی بعد یعنی اٹھارہ سو اکتیس 1831 میں مائیکل فیراڈے نے امالی برقی رو کو دریافت کیا اس نے مقناطیسی میدان کے ذریعے یعنی مقناطیسی میدان میں تبدیلی کرتے ہوئے برقی رو کو پیدا کرنے میں کامیابی حاصل کی اس مظہر کو برقی مقناطیسی امالہ کہتے ہیں۔ اس باب میں ہم برقی مقناطیسی امالہ کے مظہر کے بارے میں پڑھیں گیں اور ساتھ ہی برقی مقناطیسی امالہ سے متعلق چند بنیادی کلیات کو پڑھیں گے۔

12.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں ہم

- i. برقی مقناطیسی امالہ کے مظہر کو سمجھائیں گے۔
- ii. فیراڈے کے کلیے کو بیان کرے گیں اور اس سے متعلق سوالات کے جوابات حل کریں گیں۔
- iii. لینز کے کلیے کو بیان کرے گے اور اس کا اطلاق کریں گیں۔

12.2 فیراڈے کا کلیہ (Faraday's Law)

مائیکل فیراڈے نے متعدد تجربات کیے اور دریافت کیا کہ جب بھی مقناطیسی نفوذ کسی بند دور سے کٹتا ہے تب اس دور میں امالی برقی رو بہتی ہے اور جب تک یہ عمل قائم رہتا ہے امالی برقی رو بہتی رہتی ہے۔ دراصل یہ عمل امالی برقی قوت محرکہ کو پیدا کرتا ہے جو برقی مقناطیسی امالہ کھلاتا ہے۔

ہم یہاں فیراڈے کے ذریعے کیے گئے تجربات کی طرح دو تجربات کو بیان کریں گیں۔

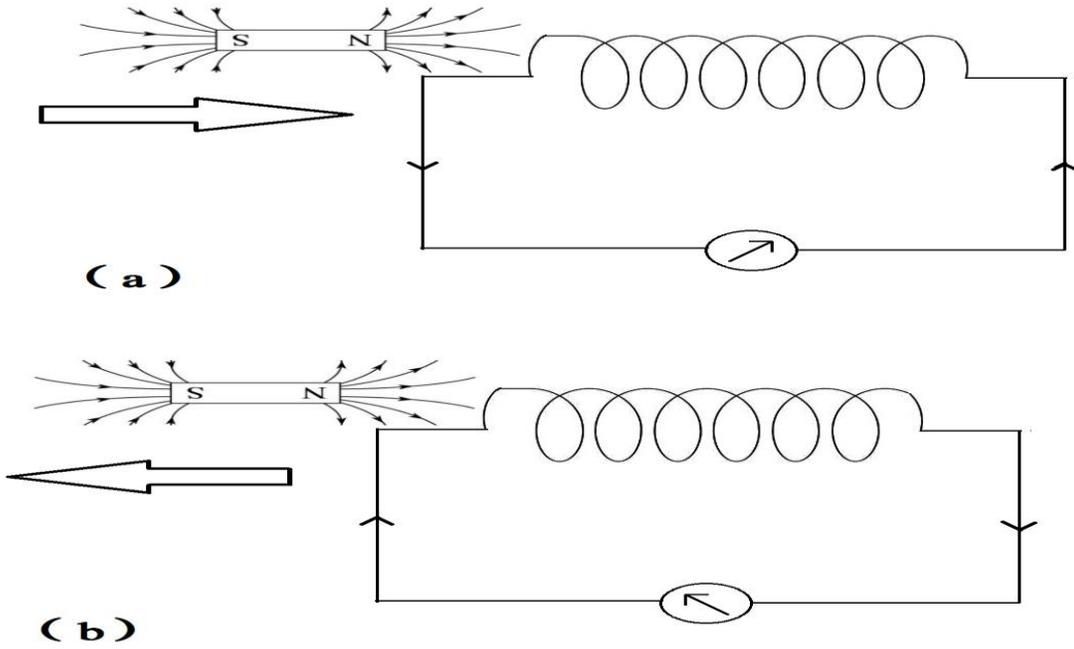
12.2.1 فیراڈے پہلا تجربہ (Faraday's First Experiment)

اس تجربے کے لیے ہم ایک دائروے لچھے کو ایک گیلوانومیٹر سے جوڑیں گے اور ایک مقناطیس کو اس ساکن لچھے کے اندر اور باہر حرکت دیں گے اس طرح کرنے پر ہم کو حسب ذیل مشاہدات حاصل ہوتے ہیں۔

1. جب مقناطیس لچھے سے گزرتا ہے لچھے کے اندر برقی رو بہتی ہے۔
2. جب مقناطیس حرکت نہیں کرتا ہے یعنی رکتا ہے تب برقی رو بھی نہیں بہتی ہے۔
3. جب مقناطیس کو لچھے کی جانب دھکیلا جاتا ہے تب گیلوانومیٹر کی سوئی ایک جانب منحرف ہوتی ہے اور جب مقناطیس کو لچھے

سے پرے دھکیلا جاتا ہے تب گیلوانومیٹر کی سوئی دوسری جانب منحرف ہوتی ہے۔

4. اس تجربہ کے دوران اگر مقناطیسی قطب کو تبدیل کیا جائے یعنی وہ مقناطیسی قطب جو لچھے کی جانب ہے اس کو دوسری جانب کیا جائے اور وہ مقناطیسی قطب جو دوسری جانب میں اس کو لچھے کی جانب کیا جائے اور اس طرح جب لچھے میں مقناطیس کو داخل کیا جائے تب گیلوانومیٹر کی منحرف ہونے والی سوئی کی سمت بھی تبدیل ہو جاتی ہے۔
5. جب مقناطیس کو تیزی سے حرکت کیا جاتا ہے تب انحراف بھی زیادہ ہوتا ہے اور جب مقناطیس کو آہستہ حرکت کیا جاتا ہے جب انحراف بھی کم ہوتا ہے۔ یہ بتاتا ہے کہ مقناطیس کی حرکت کرنے کی شرح پر برقی رو کی مقدار منحصر ہوتی ہے۔



شکل (12.1)

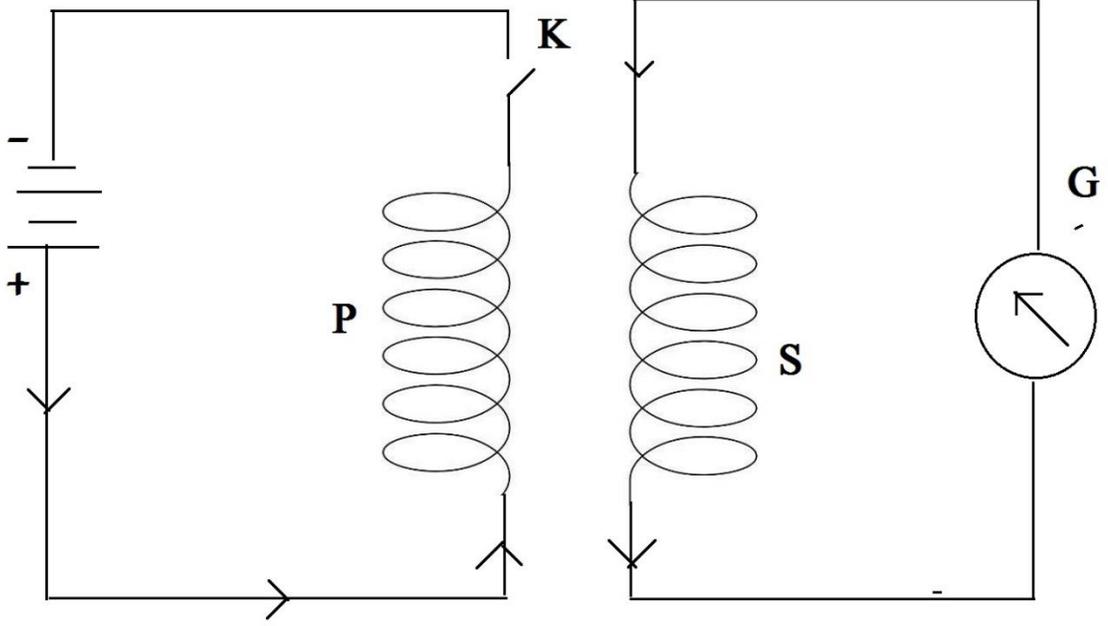
a. مقناطیس کو لچھے کی جانب دھکیلا جا رہا ہے۔

b. مقناطیس کو لچھے سے پرے دھکیلا جا رہا ہے۔

12.2.2 فیراڈے دوسرا تجربہ (Faraday's Second Experiment)

- اس تجربے کو کرنے کے لیے ہم پہلے لچھے p کو بیٹری سے جوڑیں گے اور دوسرے لچھے S کو گیلوانومیٹر سے جوڑیں گے جس طرح ہمیں شکل میں نظر آ رہا ہے۔ تجربہ کے دوران ہمیں حسب ذیل مشاہدات نظر آتے ہیں۔
1. جب اس برقی دور کو کبھی کی ذریعہ بند کیا جاتا ہے تب اس برقی دور میں برقی رو بہنا شروع ہوتی ہے اور دوسرے لچھے S سے جڑے ہوئے گیلوانومیٹر کی سوئی ایک جانب منحرف ہوتی ہے۔

2. جب پہلے برقی دور P میں برقی رو مستقل رہتی ہے یعنی برقی رو میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی ہے اس وقت دوسرے برقی دور S سے منسلک گیلوانومیٹر میں کچھ انحراف نہیں ہوتا ہے۔



شکل (12.2)

3. جب کنجی کو برقی دور سے نکالا جاتا ہے تب پہلے برقی دور P میں برقی رو آہستہ آہستہ کم ہوتی ہے اور دوسرے برقی دور S سے منسلک گیلوانومیٹر کی سوئی واپس منحرف ہوتی ہے۔ پر اس بار مخالف سمت میں منحرف ہوتی ہے۔

ان دونوں تجربات سے معلوم ہوتا ہے کہ مقناطیسی میدان کو تبدیل کرنے سے برقی رو پیدا ہوتی ہے اس برقی رو کو امالی برقی رو کہتے ہیں۔ اور جب تک یہ عمل قائم رہتا ہے امالی برقی رو بہتی رہتی ہے۔ پہلے تجربے میں مقناطیس کی حرکت کی وجہ سے برقی رو پیدا ہوتی ہے اور دوسرے تجربے میں لچھے S میں مقناطیسی نفوذ کی اضافے یا کمی کے سبب برقی رو پیدا ہوتی ہے۔ فیراڈے نے ان دو تجربات کے نتائج کا خلاصہ اپنے برقی مقناطیسی امالہ کے دو کلیات کے اندر پیش کیا ہے جو یہ ہیں

1. کسی برقی دور سے منسلک مقناطیسی نفوذ جب تبدیل ہوتا ہے تب برقی قوت محرکہ emf پیدا ہوتی ہے۔

2. امالی برقی قوت محرکہ emf کی مقدار برقی دور سے منسلک مقناطیسی نفوذ میں تبدیلی کی منفی شرح کہ راست متناسب ہوتی ہے۔

اس طرح فیراڈے ثابت کرتا ہے کہ برقی مقناطیسی میدان میں تبدیلی سے امالی برقی قوت محرکہ پیدا ہوتی ہے جو جو امالی برقی رو کا سبب بنتی ہے۔ برقی میدان میں تبدیلی کی وجہ سے پیدا ہونے والا امالی برقی میدان، برقی قوت محرکہ اور برقی رو کو ظاہر کرنے والا مظہر برقی مقناطیسی

امالہ (Electromagnetic Induction) کہلاتا ہے۔

12.3 فیراڈے کے کلیہ کا ریاضیاتی اظہار (Mathematical statement of Faraday's law)

فرض کرو کہ Φ_B برقی دور سے منسلک ملک کسی لمحہ کا مقناطیسی نفوذ ہے اور ε امالی برقی قوت محرکہ ہے۔ برقی دور میں امالی برقی قوت محرکہ اس برقی دور سے گزرنے والے مقناطیسی نفوذ میں تبدیلی کی منفی شرح کہ راست متناسب ہوتی ہے۔ یعنی

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (12.1)$$

12.4 فیراڈے کے کلیہ کی سمتیہ شکل (Vector form of Faraday's law)

ہمیں معلوم ہے کہ امالی برقی قوت محرکہ emf برقی دور میں حرکت کرنے والے اکائی برقی بار کے ذریعہ کیئے گئے کام کہ مساوی ہوتی ہے۔

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (12.2)$$

بند حلقہ C میں برقی میدان کا خطی تکمیلہ سے

مساوات (12.1) اور (12.2) سے

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (12.3)$$

ہمیں معلوم ہے کہ مقناطیسی نفوذ Φ_B ہوتا ہے

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (12.4)$$

جہاں S ، c کے ذریعہ گھیری ہوئی سطح ہے۔

مساوات (12.3) کو (12.4) میں درج کرنے پر

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (12.5)$$

مساوات (12.5) فیراڈے کی کلیہ کی تکمیلی شکل ہے۔

مسئلہ اسٹوکس کو استعمال کرتے ہوئے۔

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \cdot d\vec{s} \quad (12.6)$$

مساوات (12.6) کو (12.5) میں درج کرنے پر

$$\iint_S (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \cdot \vec{ds} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{ds} \quad (12.7)$$

چوں کہ B زماں و مکاں کا تفاعل ہو سکتا ہے اس لیے مساوات (12.7) کو دوبارہ اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\iint_S (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \cdot \vec{ds} = - \iint_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \vec{ds} \quad (12.8)$$

جہاں $\frac{d\vec{B}}{dt}$ مقناطیسی میدان \vec{B} کے وقت کے ساتھ تبدیل ہونے کو ظاہر کرتا ہے اور چوں کہ اختیاری (arbitrary) سطح S کے لیے مساوات (12.8) درست ہے لہذا تکمیلہ کو مساوی کیا جاسکتا ہے۔

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt} \quad (12.9)$$

مساوات (12.9) فیئرڈے کے کلیہ (Faraday's law) کی تفرقی شکل ہے۔

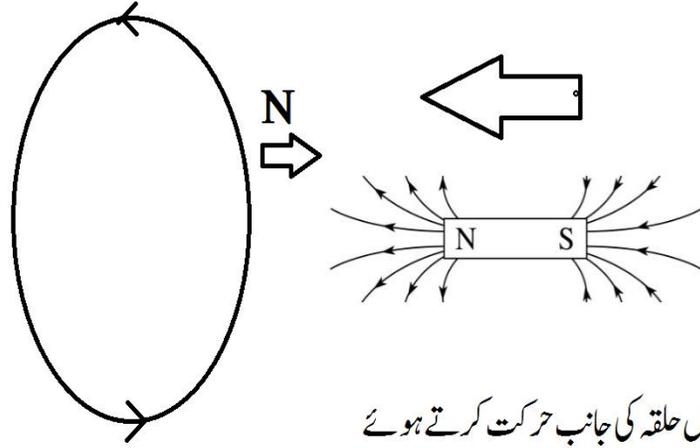
12.5 لینز کا کلیہ (Lenz's law)

کلیہ کا بیان :

امالی برقی قوت محرکہ یا برقی رواپسی سمت میں عمل کرتی ہے جو اس مقناطیسی نفوذ میں تبدیلی کی مخالفت کرتی ہے جس تبدیلی کی وجہ سے یہ برقی قوت محرکہ یا برقی رو خود پیدا ہوتی ہے۔

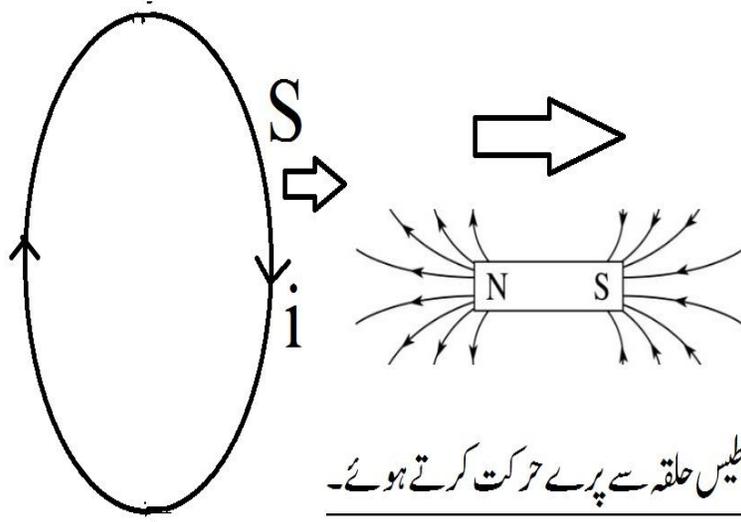
فرض کرو کہ ایک مقناطیس ہے جس کا شمالی قطب ایک حلقے کی جانب حرکت کر رہا ہے جب مقناطیس کو تیزی کے ساتھ حلقے کی جانب دھکیلا جاتا ہے تب حلقے میں امالی برقی رو i رونما ہوتی ہے جس کی سمت مخالف سمت ساعت ہوتی ہے یہاں امالی برقی قوت محرکہ حلقے کے اطراف و اکناف میں اپنا ایک مقناطیسی میدان پیدا کرتی ہے۔ لینز کے کلیے کے مطابق یہ امالی برقی رو i مقناطیسی کشافیت میں اضافے کی مخالفت کرتی ہے۔ یعنی حلقے میں برقی رو کی وجہ سے پیدا ہونے والا مقناطیسی میدان سلاخی مقناطیس کی وجہ سے پائے جانے والے مقناطیسی میدان B کی مخالفت کرتا ہے۔ جس طرح ہمیں شکل میں نظر آ رہا ہے حلقہ میں پیدا ہونے والی برقی رو کے اطراف والے مقناطیس کی جانب مقناطیسی میدان بھی شمالی قطب کا ہوتا ہے۔

حلقے میں برقی رو کی سمت کو سیدھے ہاتھ کے اصول کو استعمال کرتے ہوئے معلوم کیا جاتا ہے۔ سیدھے ہاتھ کے انگوٹھے کو مقناطیسی میدان کی سمت میں رکھیے اور اپنے انگلیوں کو موڑیے۔ موڑے ہوئے انگلیوں کی سمت برقی رو کی سمت کو ظاہر کرتی ہے۔ اس طرح یہاں پر شمالی قطب سلاخی مقناطیس کی جانب ہے اور یہ دونوں آپس میں ایک دوسرے کی مخالفت کریں گے۔



شکل (12.3)

جب مقناطیس کو حلقے سے پرے دھکیلا جاتا ہے تب حلقے میں پیدا ہونے والی برقی رو کے اطراف کا مقناطیسی میدان ان مقناطیسی حرکت کی مخالفت کرے گا اس طرح خواہ مقناطیس کو ہم ڈھکیلیں یا کھینچیں ہر صورت میں خود بخود ہمیشہ اس حرکت کی مخالفت ہوگی۔



شکل (12.4)

12.6 حل شدہ مثالیں (Solved Problems)

حل شدہ مثال 1

الف:- مقناطیسی نفوذ برقی دور میں مستوی سطح کے عمود وار گزرتا ہے اگر مقناطیسی نفوذ وقت کے لحاظ سے اس طرح تبدیل ہوتا ہے جس طرح کے یہاں بیان کیا گیا ہے -

$$\Phi_B = 5 t^2 - 6t + 10 \text{ mwb}$$

اگر وقت دو سیکنڈ ہے تب حلقے میں جب امالی برقی قوت محرکہ (Induced emf) کی مقدار کیا ہوگی ؟
 ب :- برقی رو کی سمت معلوم کیجیے اگر برقی دور کاغذ کے مستوی پر اور مقناطیسی میدان کی سمت کاغذ کے اندر کی جانب ہے؟

حل: الف :- دیا گیا ہے:

$$\Phi_B = 5 t^2 - 6t + 10 \text{ mwb}$$

$$t = 2s$$

$$\varepsilon = \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\varepsilon = \frac{d(5 t^2 - 6t + 10) \times 10^{-3}}{dt}$$

$$\varepsilon = (10t - 6t) \times 10^{-3}$$

$$t = 2s$$

$$\varepsilon = (10 \times 2 - 6) \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon = (20 - 6) \times 10^{-3} \Rightarrow \varepsilon = 14 \text{ mVolt}$$

ب :- فلکس Φ_B کے علامتی اظہار سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ مقناطیسی نفوذ جو حلقے سے منسلک ہے فزوں ہوتا ہے۔
 لیز کے کلیے کے مطابق امالی برقی قوت محرکہ یا برقی روا ایسی سمت میں عمل کرتی ہے جو اس مقناطیسی نفوذ میں تبدیلی کی مخالفت کرتی ہے جس
 تبدیلی کی وجہ سے یہ برقی قوت محرکہ یا برقی رو خود پیدا ہوتی ہے۔

اس طرح امالی برقی روا اس سمت میں بہے گی کہ اس سے پیدا ہونے والی مقناطیسی میدان کی سمت عائد کیے گئے مقناطیسی میدان کی سمت کی
 مخالفت کرے گی۔

اس طرح امالی مقناطیسی میدان سطح کے عمود وار ہوگا اور امالی برقی روا کی سمت مخالف سمت ساعت میں ہوگی۔

حل شدہ مثال 2

ایک دھاتی قرص (Disc) جس کا قطر 10 سمر ہے اس کا محور اس سے عمود وار گزرتا ہے یہ ایک سیکنڈ میں 10 مرتبہ گردش کرتی
 ہے۔ ایک ہموار مقناطیسی میدان 10^{-3} ویرنی مربع میٹر جو قرص (Disc) کے مستوی کے عمود وار عمل کرتا ہے اس کی امالی برقی قوت
 محرکہ (Induced emf) معلوم کریں؟

حل: دیا گیا ہے

$$\text{قطر } d = 10 \text{ سمر} \quad \text{نصف قطر } r = 5 \text{ سمر}$$

$$\text{مقناطیسی میدان } B = 10^{-3} \text{ ویرنی مربع میٹر}$$

$$\Phi_B = B A \quad \text{مقناطیسی نفوذ}$$

$$|\varepsilon| = \frac{d\phi_B}{dt}$$

$$|\varepsilon| = \frac{dB A}{dt}$$

$$|\varepsilon| = \frac{B dA}{dt}$$

$\frac{dA}{dt}$ رقبہ جو قرص سے باہر فی اکائی وقت گیا۔

$$\frac{dA}{dt} = \pi r^2 \times \text{گردش محوری فی سکنڈ}$$

$$\frac{dA}{dt} = \pi r^2 \times 10$$

$$\frac{dA}{dt} = 3.14(5)^2 \times (10)^2 \times 10$$

$$\frac{dA}{dt} = 0.0785$$

$$|\varepsilon| = \frac{B dA}{dt}$$

$$|\varepsilon| = 10^{-3} \times 0.0785 \Rightarrow |\varepsilon| = 78.5 \mu V$$

حل شدہ مثال 3

ایک لچھا جس کے 100 چکر ہیں اور جس کا تراش عمودی کارقبہ 200 مربع میٹر ہے جو 250 ریڈین فی سیکنڈ زاویائی رفتار سے عمودوار محور پر مقناطیسی میدان 0.4 وبری فی مربع میٹر میں گردش کر رہا ہے۔ اگر لچھہ 2 اوم کی مزاحمت سے جڑا ہوا ہے تو برقی دور میں برقی رو کو معلوم کریں۔؟

حل: دیا گیا ہے کہ $N = 100 \text{ turns}$ چکر $A = 200 \text{ Cm}^2$ سمر $A = 200 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ میٹر $R = 2 \text{ Ohm}$ اوم

$$\omega = 250 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}, B = 0.4 \text{ wb/m}^2, R = 2 \text{ Ohm}$$

$$\varepsilon_{max} = NAB\omega$$

$$\varepsilon_{max} = 100 \times 200 \times 10^{-4} \times 0.4 \times 250$$

$$\varepsilon_{max} = 200 \text{ volts}$$

$$i_{max} = \frac{\varepsilon_{max}}{R}$$

$$= \frac{200}{2} = 100 \text{ ایمپیر}$$

حل شدہ مثال 4

ایک 10 ہنری موصل 1 ایمپیر مستقل و قائم برقی رکھتا ہے۔ وہ کون سی شرح ہے جس پر کرنٹ میں اضافہ ہونا چاہئے تاکہ ای ایم ایف یا 20 ولٹ ہو سکے؟

$$\text{حل: دیا گیا ہے کہ ولٹ } \varepsilon = 20 \quad \text{ایمپیر } i = 1 \quad \text{ہنری } L = 10$$

$$\varepsilon = -L \frac{di}{dt}$$

$$|\varepsilon| = -L \frac{di}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon}{L}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{20}{10} \Rightarrow \frac{di}{dt} = 2 \text{ ایمپیر فی سکند}$$

حل شدہ مثال 5

ایک لچھے کی امالیت 50 mH اور 100 چکر ہیں اگر اس میں سے 20×10^{-3} ایمپیر برقی رو گزر رہی ہے تب اس سے منسلک مقناطیسی نفوذ کو معلوم کرے؟

$$\text{حل: دیا گیا ہے کہ ہنری } L = 50 \text{ mH} = 50 \times 10^{-3} \quad \text{ایمپیر } i = 20 \times 10^{-3} \quad N = 200$$

$$Li = N\Phi \Rightarrow \Phi = \frac{Li}{N}$$

$$\Phi = \frac{50 \times 20 \times 10^{-3} \times 10^{-3}}{200}$$

$$\Phi = 5 \times 10^{-6}$$

12.7 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- مائیکل فیراڈے نے متعدد تجربات کیئے اور دریافت کیا کہ جب بھی مقناطیسی نفوذ کسی بند دور سے کٹتا ہے تب اس دور میں امالی برقی رو بہتی ہے اور جب تک یہ عمل قائم رہتا ہے امالی برقی رو بہتی رہتی ہے۔ دراصل یہ عمل امالی برقی قوت محرکہ کو پیدا کرتا ہے جو برقی مقناطیسی امالہ کھلاتا ہے۔

- اس طرح فیراڈے ثابت کرتا ہے کہ برقی مقناطیسی میدان میں تبدیلی سے امالی برقی قوت محرکہ پیدا ہوتی ہے جو جو امالی برقی رو کا سبب بنتی ہے۔ برقی میدان میں تبدیلی کی وجہ سے پیدا ہونے والا امالی برقی میدان، برقی قوت محرکہ اور برقی رو کو ظاہر کرنے والا مظہر برقی مقناطیسی امالہ (Electromagnetic Induction) کہلاتا ہے۔
 - فرص کرو کے Φ_B برقی دور سے منسلک ملک کسی لمحہ کا مقناطیسی نفوذ ہے اور ϵ امالی برقی قوت محرکہ ہے۔ برقی دور میں امالی برقی قوت محرکہ اس برقی دور سے گزرنے والے مقناطیسی نفوذ میں تبدیلی کی منفی شرح کہ راست متناسب ہوتی ہے۔ یعنی
- $$\epsilon = -\frac{d\phi_B}{dt}$$
- لینز کا کلیہ کا بیان: امالی برقی قوت محرکہ یا برقی رو ایسی سمت میں عمل کرتی ہے جو اس مقناطیسی نفوذ میں تبدیلی کی مخالفت کرتی ہے جس تبدیلی کی وجہ سے یہ برقی قوت محرکہ یا برقی رو خود پیدا ہوتی ہے۔

12.8 کلیدی الفاظ (Keywords)

- ای ایم ایف یا برقی قوت محرکہ: برقی قوت محرکہ بدلتے ہوئے مقناطیسی میدان سے پیدا ہونے والی برقی قوت ہے۔ اس کی تعریف یوں بھی کی جاتی ہے کہ یہ موصل کے ایک حلقہ کے ارد گرد کیا گیا برقی مقناطیسی کام ہے جو برقی بار کا ایک بار حلقہ کے گرد سفر کرنے کے نتیجے میں ہوتا ہے
- برقی مقناطیسی امالہ: مقناطیسی میدان میں تبدیلی کے ذریعے موصل میں برقی قوت محرکہ پیدا کرنے کا عمل
- گیولانو میٹر: برقی دور میں قلیل مقدار میں برقی رو کی پیمائش و ظاہر کرنے کے لیے استعمال ہونے والا آلہ ہے
- امالی برقی رو: تبدیل ہوتے ہوئے مقناطیسی میدان کے ذریعے کسی موصل میں پیدا ہونے والی برقی رو
- مقناطیسی نفوذ: یہ کسی دیے گئے رقبے میں جملہ مقناطیسی میدان کی پیمائش ہوتی ہے

12.9 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

12.9.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. میں کون ہوں؟
- الف: میں برقی دور سے منسلک مقناطیسی نفوذ میں منفی تبدیلی کی شرح کے براہ راست متناسب ہوتا ہوں؟
- ب: میں اکائی برقی رو گزرنے والے لچھے سے منسلک مقناطیسی نفوذ کے عددی طور پر میں مساوی ہوں؟
2. صحیح جواب کا انتخاب کریں؟
- a. الف: ایک ہمہ نری مساوی ہوتا ہے؟

(a) ایک وولٹ فی سیکنڈ (b) ایک ولٹ فی ایمپی (c) $\frac{\text{ایک ولٹ}}{\text{ایک ایمپیئر}}$ فی سیکنڈ (d) ایک ولٹ

3. برقی مقناطیسی امالہ کے فیراڈے کے کلیہ کو بیان کیجیے؟

4. لینز (Lenz's) کے کلیہ کو بیان کیجیے؟

5. برقی مقناطیسی امالہ کی تعریف کیجیے؟

6. فیراڈے اور ہنری کے تجربات کیا ظاہر کرتے ہیں؟

7. فیراڈے کا برقی مقناطیسی امالہ کا کلیہ بیان کرو؟

8. ای ایم ایف یا برقی قوت محرکہ کی تعریف کیجیے؟

9. برقی مقناطیسی امالہ کی تعریف کیجیے؟

10. فیراڈے کے کلیہ کا ریاضیاتی اظہار..... ہے۔

12.9.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. تجربہ کی مدد سے فیراڈے کے کلیہ کو سمجھائے؟

2. برقی مقناطیسی امالہ کے لینز (Lenz's) کے کلیہ کو سمجھائے؟

3. فیراڈے کے کلیہ کو تکمیلی اور تفرقی شکل میں اظہار کیجیے؟

12.9.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. تجربہ کی مدد سے فیراڈے کے کلیہ کو سمجھائے؟ فیراڈے کے کلیہ کو تکمیلی اور تفرقی شکل میں اظہار کیجیے؟

2. برقی مقناطیسی امالہ کے لینز (Lenz's) کے کلیہ کو بیان کیجیے اور مثالوں کے ذریعے اس کو سمجھائے؟

12.9.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. ایک دائرویی لچھے میں 32 تار ہیں۔ جن کا نصف قطر 25cm ہے۔ اگر اس میں 50A کی برقی رو گزاری جائے تو اس کے مرکز پر امالے کے میدان کی حدت معلوم کرو؟ لچھے کے مرکز پر کثافت نفوذ معلوم کرو۔

2. ایک چار اووم مزاحمت کا موصلی گھیرا اس کاغذ کی سطح پر ہے اسے ہموار مقناطیسی امالہ B اس کے $0.002m^2$ پر ہے۔ B کی سمت گھیرے کے عموداً ہے تب گھیرے میں امالہ واں برقی رو معلوم کرو B کی قیمت شرح گراوٹ $0.1 \frac{wb}{m^2}$ ہو۔

3. ایک دھاتی سلاخ جس کا طول 1m ہے کہ ایک سرے کو 90° زاویہ پر ہموار مقناطیسی میدان حدت $2.5 \times 10^{-3} \frac{wb}{m^2}$ ہے۔ کھمایا جاتا ہے اگر یہ 1800 چکر فی میٹر لگاتا ہو تب اس کے سروں پر امالی emf کتنا ہوگا۔

4. ایک تار میں 4A کی برقی رو گزر رہی ہے اس کو کتنے نصف قطر والے دائرے میں موڑ لینا چاہئے تاکہ مرکز پر $10^{-6}T$ کی حدت

12.10 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Bleaney, B I, and B Bleaney. Electricity and Magnetism. Oxford: Oxford University Press, 2013.
2. Duffin, W J. Electricity and Magnetism. Cottingham: W.J. Duffin, 2001.
3. Gaur, R.K. & Gupta, S.L. Engineering Physics. Dhanpat Rai Publication.
4. Kurrelmeyer, Bernhard, and Walter H. Mais. Electricity and Magnetism. Princeton, N.J: Van Nostrand, 1967.
5. Peck, Edson R. Electricity and Magnetism. , 2013.
6. Plonsey. R & Collin. R.E. Principles and Application of Electromagnetic Field. Tata Mc Graw Hill Publication. New Delhi.
7. Purcell, Edward M, and David J. Morin. Electricity and Magnetism. , 2013.
8. Resnic. R & Halliday. D. Physics Part-I & Part-II. Wiley Eastern Pvt. Ltd. New Delhi.
9. Resnick, Robert, David Halliday, and Kenneth S. Krane. Physics. New York: Wiley, 2002.
10. Schuh, Mari C. Magnetism. Minneapolis, MN: Bellwether Media, 2008.

اکائی 13۔ برقی مقناطیسی خود امالیت

(Electromagnetic Self Inductance)

اکائی کے اجزا

تمہید	13.0
مقاصد	13.1
ذاتی یا خود امالیت	13.2
ذاتی امالہ کی شرح	13.3
ذاتی امالہ	13.4
اکیلے لچھے کا	13.4
پتچواں سے ذاتی امالہ	13.5
ایک ٹورائیڈ کی امالیت	13.6
مقناطیسی میدان میں ذخیرہ شدہ توانائی	13.7
حل شدہ مثالیں	13.8
اکتسابی نتائج	13.9
کلیدی الفاظ	13.10
نمونہ امتحانی سوالات	13.11
معروضی جوابات کے حامل سوالات	13.11.1
مختصر جوابات کے حامل سوالات	13.11.2
طویل جوابات کے حامل سوالات	13.11.3
حل شدہ جوابات کے حامل سوالات	13.11.4
مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں	13.12

13.0 تمہید (Introduction)

اسے پہلے باب میں ہم برقی مقناطیسی امالہ کے مظہر کے بارے میں پڑا اور ساتھ ہی برقی مقناطیسی امالہ سے متعلق چند بنیادی کلیات کو پڑا گیا ہے۔ اس باب میں ہم خود امالیت یا ذاتی امالیت کے تصور کا فہم کو حاصل کریں گے۔

13.1 مقاصد (Objectives)

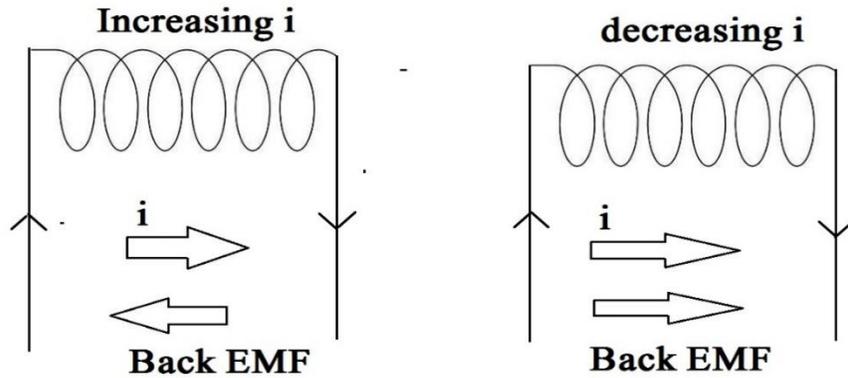
اس اکائی کے میں ہم

- i. خود امالیت یا ذاتی امالیت کو معلوم کریں گیں اور اس سے متعلق سوالات حل کریں گیں۔
- ii. کسی بھی دیے گئے امالہ گر برقی دور میں ذخیرہ شدہ مقناطیسی توانائی کا تعین کریں گیں۔
- iii. مقناطیسی میدان میں ذخیرہ شدہ توانائی کو بھی معلوم کریں گیں۔

13.2 ذاتی یا خود امالیت (Self-Inductance)

ذاتی امالیت یا خود امالیت کے مظہر کو 1832 میں جوزف ہنری نے دریافت کیا جب برقی رو ایک لچھے یا حلقے سے گزرتی ہے تب حلقے یا لچھے کے اطراف مقناطیسی میدان ترتیب پاتا ہے جب تک برقی رو تبدیل نہیں ہوتی ہے تب تک اس میں مقناطیسی نفوذ تبدیل نہیں ہوتا ہے۔ جب حلقے میں برقی رو تبدیل ہوتی ہے یعنی بڑھتی ہے یا کم ہوتی ہے تب اس کی وجہ سے ہونے والا مقناطیسی نفوذ بھی تبدیل ہوتا ہے تبدیل ہونے والا مقناطیسی نفوذ اسی حلقے میں برقی قوت محرکہ کو پیدا کرتا ہے۔

اس طرح حلقے میں خود امالی برقی رو ظاہر ہوتی ہے۔ جو حقیقی برقی رو میں تبدیلی کی مخالفت کرتی ہے۔ اس مظہر کو خود امالیت یا ذاتی امالیت کہتے ہیں۔ برقی رو رکھنے والے حلقے میں بہنے والی برقی رو میں تبدیلی کی مزاحمت یا مخالفت کرنے کی خصوصیت کو امالیت کہتے ہیں اور اس امالی برقی قوت محرکہ کو معکوس برقی قوت محرکہ Back emf کہتے ہیں۔



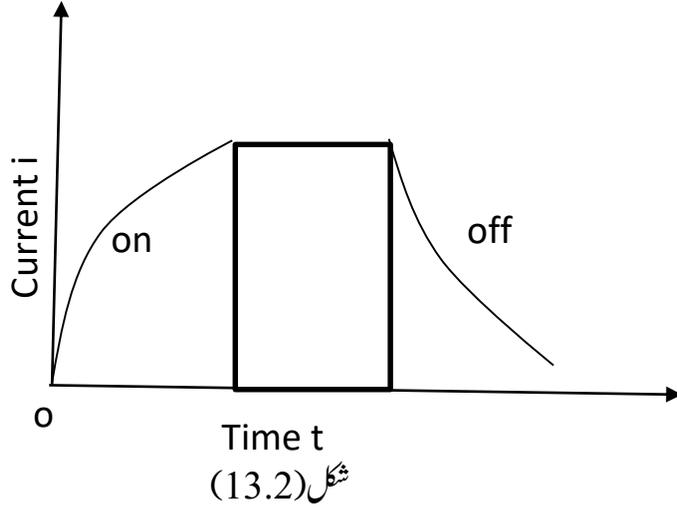
شکل (a) شکل (b) شکل (13.1)

لیکن شکل (13.1(a)) میں یہ نوٹ کرنا چاہیے کہ برقی رو اپنی مکمل قیمت تک بڑھنے کے لیے ایک محدود وقت لیتی ہے جب کہ

شکل (13.1(b)) میں برقی رو فوری اپنی مکمل قیمت حاصل کر لیتی ہے۔ مزید یہ کہ جب ادوار کو توڑا جاتا ہے تو شکل (13.1(a)) میں برقی رو بتدریج ایک محدود وقت میں صفر تک گھٹتی ہے جب کہ شکل (13.1(b)) کے دور میں یہ فوری صفر تک پہنچ جاتی ہے۔

شکل (13.1(a)) میں لچھا کیوں برقی رو کے بڑھنے (Growth) اور گھٹنے (Decay) میں تاخیر کا باعث بنتا ہے۔ لچھے کے اندر سے برقی رو کا بڑھنا لچھے سے متعلق مقناطیسی نفوذ میں ایک تبدیلی پیدا کرتا ہے۔ لینز (Lenz) کے کلیے کے مطابق لچھے میں ایک قوت محرکہ برقی (emf) کا امالہ عمل میں آتا ہے جو عائد کردہ emf کی مخالفت کرتا ہے۔ امالہ شدہ emf وقت تک باقی رہتا ہے جب تک کہ برقی رو کا بڑھنا اور گھٹنا واقع ہوتا رہتا ہے۔

ایک بند برقی دور میں دور کے جوڑنے اور توڑنے سے امالہ کردہ emf کو ذاتی امالہ emf یا امالہ شدہ emf ہوتا ہے۔ بڑھنے اور گھٹنے کے محدود وقت کا انحصار لچھے میں سے نفوذ (flux) کے دھسنے پر ہوتا ہے۔ اور ساتھ ہی یہ لچھے پر بھی مختصر ہوتا ہے۔ اس ساخت اور نوعیت کے لچھے امالہ گر (Inductors) کہلاتے ہیں۔



13.3 ذاتی امالہ کی شرح (Co-efficient of Self Induction "L")

حلقے سے منسلک مقناطیسی نفوذ Φ_B راست متناسب ہوتا ہے حلقے سے گزرنے والی برقی رو i کے یعنی حلقے میں برقی رو i میں اضافہ ہوگا تو مقناطیسی نفوذ Φ_B میں بھی اضافہ ہوگا اور حلقے سے گزرنے والی برقی رو i میں اگر کمی ہوگی تو مقناطیسی نفوذ Φ_B میں بھی کمی ہوگی۔

$$\Phi_B \propto i$$

$$\Phi_B = Li \quad (13.1)$$

جہاں L تناسبی مستقل ہے جسے خود امالیت یا ذاتی امالیت کی شرح یا حلقے یا امالہ گر کی امالیت کہتے ہیں۔ اگر $i=1$ ہو تب $\Phi_B = L$

حلقے سے اگر اکائی برقی رو گزر رہی ہے تب خود امالیت عددی طور پر حلقے سے منسلک مقناطیسی نفوذ کے مساوی ہوتی ہے۔

N عدد چکر رکھنے والے تار کے لچھے میں برقی رو گزرتی ہے فرض کیجیے جس میں ہر چکر سے متعلقہ نفوز Φ_B ہے۔

$$e = -\frac{d}{dt}(N\Phi_B) \text{ غیر اڑے کے کلیے امالیت کے بموجب امالہ شدہ emf ہوگا۔}$$

کسی تار کے لچھے میں مقناطیسی نفوز Φ_B اور جو لچھے میں گزرنے والی برقی رو کے راست تناسب ہے۔

$$N\Phi_B \propto i$$

$$N\Phi_B = Li$$

جہاں L کو ذاتی امالہ کی شرح یا حلقہ کا ذاتی امالہ کہتے ہیں۔ عموماً اسے حلقہ کا امالہ کہتے ہیں۔

برقی مقناطیسی کلیات کی رو سے جب نفوز کسی لچھے میں مستفیر ہے تب امالہ والی قوت محرکہ بنتی ہے۔ یعنی

$$e = -\frac{d}{dt}(N\Phi_B) \quad (13.2)$$

$$e = \frac{-Ldi}{dt} \quad (13.3)$$

جو لچھے میں امالہ والی قوت محرکہ پر بننے والی قوت محرکہ کی قیمت ہے۔

(a) ذاتی امالہ: اس کی تعریف کرنے والی مساوات کے طور پر لیا جاسکتا ہے کہ یہ لچھے سے جڑا مقناطیسی نفوز ہوتا ہے جب اس میں سے ایک

اکائی برقی رو کا گزر ہو۔

کسی تار کے لچھے کے خود امالہ سے مراد اکائی شرح سے برقی رو کی تبدیلی کرنے پر بننے والی قوت محرکہ کی قیمت ہے۔

$$\therefore L = \frac{-edt}{dt} \quad \text{یا} \quad L = \frac{Q}{i}$$

$$1 \text{ Henry} = \frac{1 \text{ tesla-m}^2}{\text{ampere}} \text{ ہے۔ Henry (H) خود امالیت کی SI اکائی ہینری (H) ہے۔}$$

$$\frac{\text{Volt sec}}{\text{amp}} \quad \text{یا} \quad \text{weber/amp}$$

اس اکائی کا نام ہنری (Henry) دیا گیا ہے۔ اور H علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اس کا ابعادی ضابطہ $[M^1L^2T^{-2}I^{-2}]$ - اکائیاں میں $1\mu H = 10^{-3}h$ بھی عام طور پر استعمال کی جاتی ہیں۔

$$1\mu H = 10^{-6}h$$

ہمیں معلوم ہے کہ امالی برقی قوت محرکہ دی گئی ہے

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (13.4)$$

$$(\because \Phi_B = Li)$$

$$\varepsilon = -\frac{d(Li)}{dt} \quad (13.5)$$

$$\varepsilon = -L\frac{di}{dt} \quad (13.6)$$

$$\varepsilon = -L \frac{di}{dt} \quad \text{اگر } 1 = \frac{di}{dt} \text{ ہو تب}$$

اس لیے ذاتی امالیت یا خود امالیت کو برقی قوت محرکہ کی شکل میں بھی ظاہر کیا جاسکتا ہے اس طرح کے برقی رو میں تبدیلی کی شرح

ایک ہو تب ذاتی امالیت یا خود امالیت عددی طور پر امالی برقی قوت محرکہ کے مساوی ہوتی ہے۔

استعمال:

ذاتی امالہ ہمارے گھروں میں استعمال شدہ ٹیوب ٹسٹ میں تفاوت خواں کو کم کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ ایک لچھے کا چوکہ جس میں زیادہ امالہ اور کم مزاحمت لچھے ٹیوب کے ساتھ سلسلہ وار جوڑا جاتا ہے۔ جو ابتدا میں بہت زیادہ تفاوت قواں پیدا کر کے ٹیوب میں برقی رو گزرتی ہے۔

جب تار سے لچھے میں برقی رو کو روک دے تب اس کو کم ہونے والی برقی رو کی وجہ سے نفوذ کم ہوگی۔

$$d\omega = -eidt \quad \text{تب}$$

$$\left[\because e = \frac{-Ldi}{dt} \right] \quad d\omega = +L \frac{di}{dt} idt$$

کل کام کے لیے $i = i_0$ اور $i = 0$ کے دو کے درمیان تکملہ کیا جائے۔ تب برقی رو i قائم کرنے میں کیے گئے کام کی کل مقدار ہے۔

$$\omega = L \int_0^{i_0} i \frac{di}{dt} dt \quad (13.7)$$

$$\omega = L \int_0^{i_0} i di \quad (13.8)$$

$$\omega = \frac{1}{2} Li_0^2 \quad (13.9)$$

اس لیے رو i قائم کرنے کے لیے درکار توانائی ہے۔ $\omega = \frac{1}{2} Li^2$

یہ ریاضیاتی عبارت ہمیں ایک m کمیت کے ذرے کی حرکی توانائی $\frac{1}{2} m v^2$ کی یاد دلاتی ہے اور اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ $2m$ اور

مشابہ ہے (یعنی کہ L برقی جمود ہے اور دور میں برقی رو کے بڑھنے یا کم ہونے کی مخالفت کرتا ہے)۔

13.4 اکیلے لچھے کا ذاتی امالہ (Self Inductance of Single Coil)

فرض کرو کہ ایک طویل سولینائیڈ ہے جس کا طول l ہے اور ہموار تراش عمودی کارقبہ A ہے۔ پچھلے باب میں ہم برقی رو رکھنے

والے سولینائیڈ کا مقناطیسی میدان B کو معلوم کر چکے ہیں جو یہ ہے۔

$$B = \mu_0 ni \text{ weber/m}^2$$

جہاں خلاء میں اجازیت μ_0 ، n فی میٹر چکروں کی تعداد

$$\phi_B = BA \mu_0 ni A \text{ weber} = \text{مقناطیسی نفوذ}$$

N = پچواں (سولینائیڈ) میں جملہ چکروں کی تعداد

$$n = \frac{N}{l} \Rightarrow nl = N$$

اور سولینائیڈ سے منسلک نفوذ ہوگا

$$\phi_B = \mu_0 ni A \times N$$

$$\phi_B = \mu_0 ni A \times nl$$

$$\phi_B = \mu_0 n^2 i Al$$

مگر $\phi_B = L i$ جہاں L ذاتی امالیت یا خود امالیت ہے۔

$$\therefore Li = \mu_0 n^2 i Al$$

$$L = \mu_0 n^2 Al$$

سولینائیڈ کے جملہ چکروں کی تعداد کو ظاہر کرتے ہوئے L کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔ $L = \mu_0 \left(\frac{N}{l}\right)^2 Al$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \quad (13.10)$$

ذاتی امالہ $N=1$

اکیلے لچھے کا

$$L = \frac{\mu_0 A}{l}$$

مندرجہ بالا مساوات سے یہ واضح ہوتا ہے کہ لچھے کی ذاتی امالیت یا خود امالیت لچھے کی مہندس (جو میٹری) پر منحصر ہوتی ہے۔ یعنی

i. لچھے میں چکروں کی تعداد

ii. تراش عمودی کا رقبہ اور

iii. پیچوں (سولینائیڈ) کا طول

13.5 پیچوں سے ذاتی امالہ (Self-Inductance of Long Solenoid)

ایک لامبا استوانہ نما لچھا پیچواں کہلاتا ہے۔ اس طرح پیچواں دراصل ایک لامبا تار ہوتا ہے جس کو ایک ایسے مرغولہ کی شکل میں پٹا جاتا ہے جس کے چکریں ایک دوسرے کے بہت قریب ہوں یہ مرغولہ اس کے قطر کے مقابلہ میں بہت طویل تصور کیا جاتا ہے۔ پیچواں کے طول l اور سیکس عمودی تراش کا رقبہ A ہے۔ فرض کرو کہ چکروں کی تعداد فی اکائی طول n ہے تمام چکروں سے گزرنے والی مجموعی رو i ہے۔ پیچواں کے اندر کے مقناطیسی امالے کی مقدار 'B' ہے۔ ایک ایسے پیچواں کو فرض کیجیے جس کے فی اکائی طول میں 'n' عدد چکر موجود ہیں۔ اس کا طول l اور اس کی تراش عمودی کا رقبہ A ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ ایک پیچواں کے لیے مقناطیسی امالہ B ہوتا ہے۔

$$B = \mu_0 ni \quad (13.11)$$

فی اکائی طول میں 'n' عدد چکر میں مقناطیسی نفوذ $\Phi_B = BA$

$$\Phi_B = \mu_0 niA \quad (13.12)$$

پچھوں کے چکروں کی مجموعی تعداد N ہے۔ تب پچھوں میں مقناطیسی نفوذ

$$\Phi_B = \mu_0 niA \times N \quad (13.13)$$

چکروں کی مجموعی تعداد $nl = N$

$$\Phi_B = \mu_0 niA \times nl \quad (13.14)$$

$$\Phi_B = \mu_0 n^2 iAl \quad (13.15)$$

ایک پچھوں کی ذاتی امالیت کی مقدار کو محسوب کرنا ممکن ہے۔ ایک امالہ گر کے لیے۔

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} \quad (13.16)$$

پچھوں کے ذاتی امالیت

پچھوں کے چکروں کی مجموعی نفوذ $Li =$

$$Li = \mu_0 n^2 iAl \quad (13.17)$$

$$L = \mu_0 n^2 Al \text{ Henry} \quad (13.18)$$

جہاں فی اکائی طول میں 'n' عدد چکریں ہے۔

پچھوں کے چکروں کی مجموعی تعداد N میں ذاتی امالیت 'L'

$$L = \mu_0 \left(\frac{N}{l}\right)^2 Al \quad (13.19)$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \quad (13.20)$$

لہذا طول 'l' رکھنے والے ایک پچھوں کی امالیت اس کے حجم (IA) اور فی اکائی طول میں موجوں چکروں کی تعداد کے تناسب ہوتی ہے۔

13.6 ایک ٹورائیڈ کی امالیت (Self-Inductance of a Toroid)

ایک ٹورائیڈ کو بتلاتی ہے جو ایک محدود پچھوں ہے جس پر تار کے چکروں کی تعداد N ہے اور ان سے گزرنے والی رو i ہے اور اس کا

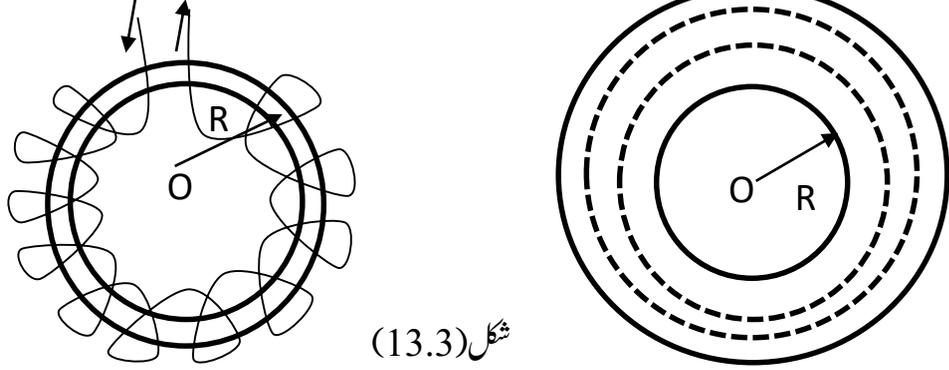
اوسط نصف قطر 'R' ہے۔

ٹورائیڈ کو اس کے بیرونی ہوائی منطقتہ سے علاحدہ کرنے والی سرحد پر مماسی میدان B مسلسل ہے۔ اس لیے ٹورائیڈ کے بیرون کے

مقابلے میں اندرون میں نفوذ کی کثافت B بہت زیادہ ہے۔ اس لیے نفوذ کے خطوط کی کثیر تعداد ٹورائیڈ کے اندرون میں مرکوز ہے۔

نصف قطر 'R' کے تکمیلی راستے پر ایمپیر کے کلیے کے اطلاق سے

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 iN$$



شکل (13.3)

جہاں ٹورائیڈ کے لچھے سے گزرنے والی رو i ہے چکروں کی مجموعی تعداد N ہے۔ لہذا

$$B = \frac{\mu_0 iN}{2\pi R} \quad (13.21)$$

ٹورائیڈ کی تراش عمودی کارقبہ A ہے اور ٹورائیڈ میں N چکر موجود ہو تو ہر تار پر اتنا ہی نفوذ بنتا ہے تو جملہ نفوذ اس طرح ہوگا۔

$$\Phi = BNA \quad (13.22)$$

مساوات (13.21) اور (13.22) سے

$$\Phi = \left(\frac{\mu_0 Ni}{2\pi R} \right) NA \quad (13.23)$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 N^2 iA}{2\pi R} \quad (13.24)$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$\Phi = Li \quad (13.25)$$

مساوات (13.24) اور (13.25) کو مساوی کیا جائے تو

$$Li = \frac{\mu_0 N^2 iA}{2\pi R} \quad (13.26)$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi R} \text{ Henry} \quad (13.27)$$

13.7 مقناطیسی میدان میں ذخیرہ شدہ توانائی (Energy Stored in a Magnetic Field)

برقی دور میں برقی رو کو جانے کے لیے معکوس برقی قوت محرکہ Back emf کے خلاف کام کرنا ہوگا۔

معکوس برقی قوت محرکہ Back emf کے خلاف کی اکائی وقت میں کیا گیا کام ہوگا۔

$$\frac{dw}{dt} = -\varepsilon_i \quad (13.28)$$

$$-L \frac{di}{dt} = -\varepsilon_i \quad (13.29)$$

مساوات دو کو ایک میں درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا۔

$$\frac{dw}{dt} = -(-L \frac{di}{dt})i \quad (13.30)$$

$$\frac{dw}{dt} = Li \frac{di}{dt} \quad (13.31)$$

مساوات تین کو تکمیل کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا۔

$$W = \frac{1}{2} Li^2 \quad (13.32)$$

ہمیں معلوم ہے کہ L حلقے کی جیومیٹری پر منحصر ہوتا ہے۔ ہم کسی بھی سطح اور حجم کے لیے ایک عمومی مساوات حاصل کرنے کے لیے آئیے مقناطیسی سمتیہ قوت A کے لحاظ سے مساوات (13.25) کو دوبارہ لکھیں گے۔

$$\phi = Li \quad (13.33)$$

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{s} \quad (13.34)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (13.35)$$

$$\phi = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot ds \quad (13.36)$$

اسٹوکس تھیورم کا استعمال کرتے ہوئے۔

$$\phi = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (13.37)$$

جہاں C لوپ (حلقہ) کا پیرامیٹر ہے اور S سے C سے آگے کی کوئی بھی سطح ہے۔

مساوات (13.36) اور (13.32) کو مساوی کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$Li = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (13.38)$$

مساوات (13.37) کو (13.32) میں درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$W = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} i \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (13.39)$$

حجم برقی رو کے لیے مساوات (13.39) میں idl کو jdv اور $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$ کو $\iiint_V \nabla \cdot \vec{A}$ سے تبدیل کرنے پر۔ جہاں V برقی رو کا حجم ہے۔

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{A} \cdot \vec{J} dv \quad (13.40)$$

ایمپیر کی کلیے سے۔

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (13.41)$$

مساوات (13.41) کو (13.40) میں درج کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_V \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) dv \quad (13.42)$$

سمتیہ کو استعمال کرتے ہوئے۔

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \\ \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) &= \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \\ \vec{B} \cdot \vec{B} - \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) & \end{aligned} \quad (13.43)$$

مساوات (13.42) کو (13.41) میں درج کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \left\{ \iiint_V \vec{B} \cdot \vec{B} dv - \iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) dv \right\}$$

مسئلہ انفرج کو استعمال کرتے ہوئے۔

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \left\{ \iiint_V \vec{B} \cdot \vec{B} dv - \oiint_S (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} \right\} \quad (13.44)$$

اگر ہم تمام کی تمام جگہ کا تکمیل کرتے ہیں تب سطح کا تکمیل صفر ہوگا۔

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_{all\ space} B^2 dv$$

اس طرح مقناطیسی میدان میں ذخیرہ شدہ توانائی $\frac{B^2}{2\mu_0}$ فی اکائی حجم کے مساوی ہوگی۔

13.8 حل شدہ مثالیں (Solved Problems)

حل شدہ مثال 1

ایک لچھے میں 100 تار ہیں۔ اس میں 5A کی برقی رو گزرنے پر 10^{-6} کا نفوذ (flux) بنتا ہے۔ اس لچھے کا خود امالہ معلوم کیجیے۔

$$i = 5A \quad \phi = 10^{-6}$$

حل: مثال میں دی گئی قیمت

$$N = 100$$

$$L = \frac{N\Phi}{i}$$

$$L = \frac{100 \times 10^{-6}}{5} = 20 \mu m$$

حل شدہ مثال 2

ایک 10H والے امالہ گر میں 2amp کی قائم رو گزر رہی ہے۔ کس طرح اس امالہ گر میں ایک 100Volt کی ذاتی امالہ شدہ قوت محرکہ برقی پیدا کی جاسکتی ہے۔

$$\varepsilon = L \frac{di}{dt} \quad \text{حل:}$$

$$\varepsilon = 100 \text{ Volt}$$

$$L = 10H$$

$$100 = 10 \frac{di}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} = 10 \text{ amp/sec}$$

حل شدہ مثال 3

ایک بیچواں پر 10 تانبے کے تاروں کی ایک واحد تہہ لپیٹی گئی ہے۔ (تار کا قطر 0.1 انچ ہے) بیچواں کا قطر 40 مٹر ہے اور اس کا طول 2m ہے۔ بیچواں کے مرکز کے قریب فی اکائی طول امالیت کتنی ہوگی۔

$$L = n^2 lA \quad \text{حل:}$$

$$L = 1.26 \times 10^{-6} \left[\frac{10^2}{0.1 \times 2.54} \right]^2 \times \pi \times \left(\frac{2}{10^2} \right)^2$$

$$L = 245.4 \times 10^{-6} H$$

$$L = 0.245 mH$$

حل شدہ مثال 4

ایک لچھے کی امالیت 2H اور مزاحمت 100Hm ہے۔ اس کو ایک مزاحمت سے 100Volt کی بیڑی سے جوڑا گیا (a) تو ازنی برقی کتنی ہوگی؟ (b) جب یہ برقی رو لچھے میں موجود ہوتی ہے تو مقناطیسی میدان میں کتنی توانائی ذخیرہ ہوگی۔

$$\text{حل: (a) تو ازنی برقی رو}$$

$$i = \frac{E}{R} = \frac{100}{10} = 10 \text{ amps}$$

$$\text{(b) ذخیرہ شدہ توانائی} = \frac{1}{2} Li^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 10^2 = 100J$$

حل شدہ مثال 5

5cm نصف قطر والے تار کا ایک حلقہ 100amp برقی رو کا حامل ہے۔ اس کی توانائی کی کثافت کتنی ہوگی۔

$$U_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \quad \& \quad B = \frac{\mu_0 i}{2R} \quad \text{حل:}$$

$$U_B = \frac{1}{2} \frac{\mu_0^2 i^2}{4R^2}$$

$$U_B = \frac{1.26 \times 10^{-6} \times (100)^2 \times 10^4}{8 \times 5 \times 5}$$

$$U_B = 0.63 \text{ Joule / m}^3$$

حل شدہ مثال 6

سولینائیڈ جس کا طول 0.5 میٹر اور تراش عمودی کا رقبہ 0.01 مربع میٹر ہے جس کے 1000 چکر ہیں اس کی خود امالیت یا ذاتی امالیت معلوم کریں۔؟

$$N = 1000 \text{ turns} \quad A = 0.01 \text{ m}^2 \quad l = 0.5 \text{ m} \quad \text{حل: دیا گیا ہے کہ}$$

$$L = \mu_0 n^2 A l$$

$$L = \mu_0 n^2 A l$$

$$L = (4 \pi \times 10^{-7}) \left\{ \frac{1000}{0.5} \right\}^2 (0.01) \times 0.5$$

$$L = \frac{4 \times 3.14 \times 10^{-7} \times 10^6 \times 0.01}{0.5}$$

$$L = 0.02512 \text{ henry}$$

حل شدہ مثال 7

اگر لچھے کے چکروں کی تعداد گنی کر دی گئی ہو تب لچھے کی ذاتی امالیت معلوم کریں؟

$$\text{حل: } L \propto N^2$$

$$N_2 = 2 N_1$$

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{N_1^2}{N_2^2}$$

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{N_1^2}{4N_2^2} \Rightarrow \frac{L_1}{L_2} = \frac{1}{4}$$

$$L_2 = 4 L_1$$

حل شدہ مثال 8

ایک لچھ جس کے 1000 چکر ہیں اس کی ذاتی امالیت 100mH ہے۔ اسی طرح کا لچھ جس کے 600 چکر ہیں ذاتی امالیت معلوم کریں؟

حل: دیا گیا ہے $N_1 = 1000 \text{ turns}$ $L_1 = 100 \text{ mH}$ $N_2 = 600 \text{ turns}$

$$L \propto N^2$$

$$\frac{100}{L_2} = \frac{(1000)^2}{(600)^2}$$

$$L_2 = \frac{360000 \times 100}{1000000}$$

$$L_2 = 36 \text{ m henry}$$

حل شدہ مثال 9

ایک 10 ہنری موصل 1 ایمپیر مستقل و قائم برقی رکھتا ہے۔ وہ کون سی شرح ہے جس پر کرنٹ میں اضافہ ہونا چاہئے تاکہ ای ایم

ایف یا 20 ولٹ ہو سکے؟

حل: دیا گیا کہ ولٹ $\varepsilon = 20$ ایمپیر $i = 1$ ہنر $L = 10$

$$\varepsilon = -L \frac{di}{dt}$$

$$|\varepsilon| = -L \frac{di}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon}{L} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{20}{10}$$

$$\frac{di}{dt} = 2 \text{ ایمپیر فی سکند}$$

حل شدہ مثال 10

ہموار مقناطیسی میدان کا امالہ 10 ویبر فی مربع میٹر 10^{-3} مکعب میٹر حجم میں ہوتی مقناطیسی توانائی ذخیرہ ہوگی۔؟

حل: دیا گیا کہ مکعب میٹر $V = 10^{-3}$ ویبر مربع میٹر $B = 10$

$$\mu = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$\mu = \frac{(10)^2}{2 \times 4\pi \times 10^{-7}}$$

فی اکائی حجم میں ذخیرہ شدہ توانائی μ ہے۔

$$U = u \times v$$

$$U = 39.8 \times 10^6 \times 10^{-3}$$

$$U = 39.8 \times 10^6 \times 10^3 \text{ جول}$$

13.9 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

• ایک لچھے میں برقی رو تبدیل ہوتا ہے تو وہ اسی لچھے میں ایک الٹی برقی قوت محرکہ کا امالہ کرتا ہے۔ یہ ذاتی امالہ / نفوذ برقی قوت محرکہ دی جاتی ہے $\mathcal{E} = L \frac{di}{dt}$ جہاں $L \Leftarrow$ لچھے کی ذاتی امالیت ہے۔

• ایک طویل سولی نائیڈ (بیچواں) کی ذاتی امالیت جس کا قابل مقناطیسی اجازیت μ_r کے مقناطیسی مادے سے بنا ہوا ہے، دی جاتی ہے۔

$$L = \mu_0 n^2 Al$$

• برقی بھرنوں سے پیدا ہونے والے ایک برقی سکونی میدان میں ذخیرہ شدہ توانائی ہوگی۔

$$U_B = \frac{1}{2} Li^2$$

اور ایک مقناطیسی میدان میں توانائی کی کثافت ہوگی $U_B = \frac{1}{2} \frac{Li^2}{VA}$

13.10 کلیدی الفاظ (Keywords)

➤ ذاتی امالیت یا خود امالیت : لچھے میں تبدیل ہونے والی برقی رو اسی لچھے میں امالی قوت محرکہ پیدا کرتی ہے اس مظہر کو ذاتی امالیت یا خود امالیت کہتے ہیں۔

➤ باہمی امالیت : دو لچھوں کی باہمی امالیت سے مراد ایک لچھے کی مقناطیسی میدان کے ذریعے پیدا ہونے والی امالی برقی قوت محرکہ دوسرے لچھے میں برقی رو اور ولٹیج میں تبدیلی کی مخالفت کرتی ہے اس مظہر کو باہمی امالیت کہتے ہیں۔

➤ ہنری (اکائی) : ہنری بین الاقوامی نظام میں برقی امالیت کی اکائی ہے۔

➤ باہمی امالیت کی شرح : یہ برقی دور سے منسلک نفوذ ہے جو دوسرے برقی دور میں برقی رو کے بہنے کے سبب ہوتا ہے۔

➤ برقی مقناطیسی امالہ : مقناطیسی میدان میں تبدیلی کے ذریعے موصل میں برقی قوت محرکہ کو پیدا کرنے کا عمل

13.11 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

13.11.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. میں کون ہوں؟

الف: میں برقی دور سے منسلک مقناطیسی نفوذ میں منفی تبدیلی کی شرح کے براہ راست متناسب ہوتا ہوں؟

ب : میں اکائی برقی رو گزرنے والے لچھے سے منسلک مقناطیسی نفوذ کے عددی طور پر میں مساوی ہوں؟

2. مندرجہ بالا میں سے کوئی نہیں۔

i. ذاتی یا خود امالیت L اس پر منحصر ہوتی ہے؟

(a) لچھے کے طول L پر (b) لچھے کے چکروں L پر (c) لچھے کے تراشے عمودی کے رقبے A پر (d) مندرجہ بالا تمام پر

3. برقی مقناطیسی امالہ کی تعریف کیجیے؟

4. ذاتی امالیت کی بین الاقوامی اکائی ہے۔

5. سولینائیڈ میں ذخیرہ شدہ توانائی ہوگی۔

6. ایک چھوٹا مقناطیسی ایک دھاتی حلقہ اقتصاً محو ہے حالت سکون گرایا گیا ہے۔ تب ایک سکنڈ میں اس مقناطیسی کتنا فاصلہ طے کرے گی۔

7.0m (d) 6.0m (c) 5.0m (b) 4.0m (a)

7. ذاتی امالہ کی تعریف کیجیے۔

8. ذاتی امالے کی شرح کی تعریف کیجیے۔

9. امالیت کی اکائی ہوگی۔

Volt –sec (d) Henry (c) amp (b) volt (a)

10. ہنری کی اکائی ہے۔

13.11.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. ایک بیچرواں کی امالیت کی تحسب کے لیے ایک مساوات اخذ کیجیے۔

2. ایک مقناطیسی میدان میں موجود توانائی کے لیے ایک ضابطہ اخذ کیجیے۔

3. ذاتی امالہ کی شرح کی تعریف کرو۔

4. ایک ٹورائیڈ کی امالیت کے اظہار کے لیے مساوات اخذ کیجیے؟

13.11.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. ذاتی امالیت کیا ہے؟ ذاتی امالیت کی شرح کو بیان کیجیے اور سولینائیڈ کی ذاتی امالیت کے اظہار کے لیے مساوات اخذ کیجیے؟

2. ذاتی امالیت کیا ہے؟ ذاتی امالیت کی شرح کو بیان کیجیے اور ایک ٹورائیڈ کی ذاتی امالیت کے اظہار کے لیے مساوات اخذ کیجیے؟

3. مقناطیسی میدان میں ذخیرہ شدہ توانائی کے لیے مساوات کو اخذ کیجیے اور کثافتِ توانائی کے لیے مساوات کی تخریج کیجیے؟

4. ذاتی امالہ کی شرحوں (Coefficients) کے لیے ضابطہ اخذ کیجیے۔

13.11.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. ایک لچھے میں 1000 تار ہیں اس میں 2A کی برقی رو 0.5 wb کا نفوذ پیدا کرتی ہے لچھے کا ذاتی امالہ معلوم کیجیے۔
2. یہ بتائیے کہ ایک طول 'l' والے لچھے تار کی ذاتی امالیت جو تار کے اندر نفوذ (flux) سے متعلق ہوتی ہے۔ وہ $\mu_0 / 8 \pi$ ہوگی اور یہ تار کے قطر پر منحصر نہیں ہوتی۔

13.12 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Bleaney, B I, and B Bleaney. Electricity and Magnetism. Oxford: Oxford University Press, 2013.
2. Duffin, W J. Electricity and Magnetism. Cottingham: W.J. Duffin, 2001.
3. Gaur, R.K. & Gupta, S.L. Engineering Physics. Dhanpat Rai Publication.
4. Kurrelmeyer, Bernhard, and Walter H. Mais. Electricity and Magnetism. Princeton, N.J: Van Nostrand, 1967.
5. Peck, Edson R. Electricity and Magnetism. , 2013.
6. Plonsey.R&Collin.R.E.Principles and Application of Electromagnetic Field. Tata Mc Graw Hill Publication. New Delhi.
7. Purcell, Edward M, and David J. Morin. Electricity and Magnetism. , 2013.
8. Resnic.R&Halliday.D.Physics Part-I&Part-II.Wiley Eastern Pvt.Ltd.New Delhi.
9. Resnick, Robert, David Halliday, and Kenneth S. Krane. Physics. New York: Wiley, 2002.
10. Schuh, Mari C. Magnetism. Minneapolis, MN: Bellwether Media, 2008.

اکائی 14۔ برقی مقناطیسی باہمی امالیت

(Electromagnetic Mutual Inductance)

اکائی کے اجزا

تمہید	14.0
مقاصد	14.1
باہمی امالیت	14.2
دو لچھوں میں باہمی امالیت	14.3
پچھواں بندھن کی شرح	14.4
مقناطیسی میدان میں ذخیرہ شدہ توانائی	14.5
ایک مقناطیسی میدان میں توانائی کی کثافت	14.6
ٹرانسفارمر کا اصول	14.7
حل شدہ مثالیں	14.8
اکنسبائی نتائج	14.9
کلیدی الفاظ	14.10
نمونہ امتحانی سوالات	14.11
معروضی جوابات کے حامل سوالات	14.11.1
مختصر جوابات کے حامل سوالات	14.11.2
طویل جوابات کے حامل سوالات	14.11.3
حل شدہ جوابات کے حامل سوالات	14.11.4
مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں	14.12

14.0 تمہید (Introduction)

اور سٹیڈ (Oersted) نے 1820ء میں دریافت کیا کہ برقی موصل سے برقی رو گزرنے پر مقناطیسی میدان بنتا ہے۔ برقی موصل کے اطراف قائم ہونے والے مقناطیسی میدان کی حدت اور موصل سے گزرنے والی برقی رو کی مقدار میں رشتہ ایبیمپیر نے معلوم کیا۔ اس طرح کے مسلسل مشاہدات کے بعد ان حقائق کو مائیکل فیراڈے نے 1831ء میں کچھ آسان کلیات کی شکل میں پیش کیا۔ نظریاتی اور تجرباتی دریافت نے یہ ظاہر کیا کہ حرکی برقی بار نہ صرف برقی میدان پیدا کرتا ہے بلکہ مقناطیسی میدان بھی پیدا کرتا ہے۔ فیراڈے اور جوزف ہنری نے 1831ء کے ذریعے کیے گئے تجربات نے قطعی طور پر مظاہرہ کر کے ثابت کر دیا کہ جب بند لچھوں پر تبدیل ہوتا ہو مقناطیسی میدان لگایا گیا تو ان میں برقی رو کا امالہ ہوا۔ اس اکائی میں ہم تبدیل ہوئے مقناطیسی میدان سے منسلک مظاہر کا مطالعہ کریں گے اور ان کے اصول سمجھیں گے۔ وہ مظہر جس میں برقی رو، مقناطیسی میدان کے تغیر کے ذریعہ پیدا ہوتا ہے، بجا طور پر، برقی مقناطیسی امالہ (Electromagnetic Induction) کہلاتا ہے۔

فیراڈے اور ہنری کے رہنمائیہ تجربات نے جدید دور کے جزیٹر اور ٹرانسفارمر تیار کرنے کی براہ راست راہ دکھائی۔ آج کی جدید تہذیب اپنی ترقی کے لیے بری حد تک برقی مقناطیسی امالہ کی دریافت کی مرہون منت ہے۔

14.1 مقاصد (Objectives)

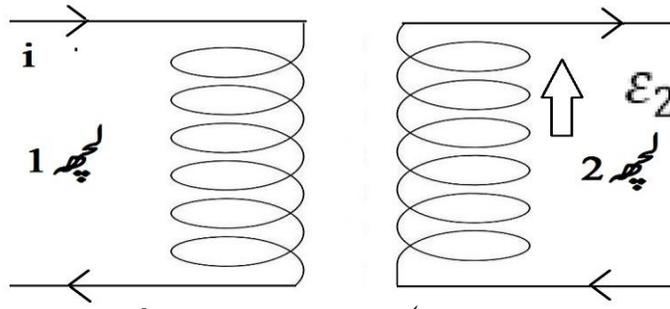
- یہ اکائی املیت کے مظہر سے بحث کرتی ہے۔ اس مظہر کو سمجھانے کے لیے اس اکائی میں اس بات کی وضاحت کی گئی ہے کہ:
- باہمی املیت کو معلوم کریں اور اس سے متعلق سوالات حل کریں گیں۔
 - کسی بھی دیے گئے امالہ گر برقی دور میں ذخیرہ شدہ مقناطیسی توانائی کا تعین کریں گیں اور مقناطیسی میدان میں ذخیرہ شدہ توانائی کو بھی معلوم کریں گیں۔
 - ایک ٹرانسفارمر کے اصول کی وضاحت کرتی ہے۔

14.2 باہمی املیت (Mutual Inductance "M")

فرض کرو کہ دو حلقے یا امالہ گرا ایک دوسرے کے قریب رکھے گئے ہیں جس طرح ہمیں شکل میں نظر آ رہا ہے۔ جب پہلے لچھے میں برقی رو گزرتی ہے تب اس سے منسلک مقناطیسی نفوذ میں تبدیلی واقع ہوتی ہے اور امالی برقی قوت محرکہ \mathcal{E}_2 دوسرے لچھے میں ترتیب پاتی ہے اس مظہر کو باہمی املیت (Mutual Inductance) کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ پہلے حلقے میں برقی رو i_1 ہے جو پہلے لچھے میں مقناطیسی میدان B_1 کو پیدا کر رہی ہے کیوں کہ دونوں لچھے ایک دوسرے کے قریب ہے اس لیے B_1 دوسرے لچھے سے بھی گزرے گی فرض کرو کہ Φ_2 دوسرے لچھے کا مقناطیسی نفوذ ہے جو B_1 کی وجہ سے ہیں۔ اگر برقی رو i_1 اور مقناطیسی میدان B_1 میں تبدیلی واقع ہوتی ہے تب Φ_2 بھی تبدیل ہوگا جو دوسرے لچھے میں امالی قوت محرکہ

ϵ_2 پیدا کرتا ہے۔



شکل (14.1)

اس طرح دوسرے لچھے سے منسلک نفوذ پہلے لچھے میں موجود برقی رو سے راست متناسب ہوگا۔

$$\Phi_2 = i_1$$

$$\Phi_2 = Mi_1 \quad (14.1)$$

جہاں M تناسبی مستقل ہے جسے باہمی امالے کی شرح یاد دلچھوں کی باہمی امالیت (Mutual Inductance) کہا جاتا ہے۔ اگر

$$i=1 \text{ تو } \Phi_2 = M \text{ ہوگا۔}$$

اس طرح ہم باہمی امالیت کے بارے میں کہہ سکتے ہیں کہ یہ اکائی برقی رو کے بننے کی وجہ سے دوسرے برقی دور سے منسلک مقناطیسی نفوذ ہے۔

مساوات ایک کو وقت کے لحاظ سے تفرق کرنے پر

$$\frac{d\Phi_2}{dt} = M \frac{di_1}{dt} \quad (14.2)$$

فیراڈے کے مطابق

$$\epsilon_2 = - \frac{d\Phi_2}{dt} \quad (14.3)$$

مساوات (14.3) کو مساوات (14.2) میں درج کرنے پر

$$\epsilon_2 = - M \frac{di_1}{dt} \quad (14.4)$$

$$\epsilon_2 = M \quad \text{اگر } 1 = \frac{di}{dt} \text{ ہو تب}$$

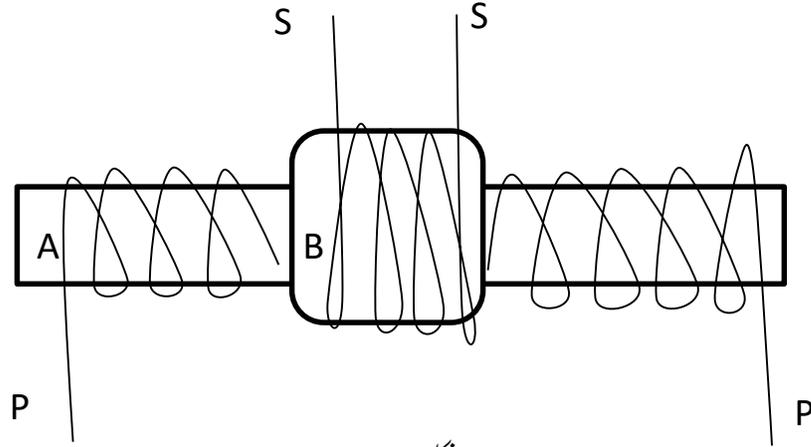
لہذا باہمی امالے کی شرح اس وقت اکائی ہوگی جب کہ امالہ شدہ برقی قوت محرکہ ایک ولٹ ہو جب کہ دوسرے لچھے میں برقی رو کی مقدار ایک امپیرنی سینڈ کی شرح سے بدل رہی ہو۔

باہمی امالیت کی SI اکائی بھی ہینری (H) ہے۔

$$\frac{\text{Volt sec}}{\text{amp}} \quad \text{یا} \quad \text{weber/amp}$$

اس اکائی کا نام ہنری (Henry) دیا گیا ہے اور H علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔
 اس کا ابعادی ضابطہ $[M^1L^2T^{-2}I^{-2}]$ - اکائیاں میں $1\mu H = 10^{-3}h$ بھی عام طور پر استعمال کی جاتی ہیں۔
 $1\mu H = 10^{-6}h$

14.3 دو لچھوں میں باہمی امالیت (Mutual Induction of Two Given Coils)



شکل (14.2)

شکل (14.2) میں دکھایا گیا ہے کہ ایک لامباستوانہ لچھوں میں ایک لچھوں A اور دوسرا لچھوں B۔

ابتدائی (Primary) لچھوں A کی چکروں کی تعداد = n_1

ہر لچھوں کا طول = l رقبہ کا عمودی تراش = a

ثانوی (Secondary) لچھوں B کی تعداد = n_2

A لچھوں میں برق رو = i

$$\frac{\mu_0 n_1 r i}{l} = \text{A لچھوں کے اندرونی مقناطیسی میدان}$$

A لچھوں میں چکروں کی تعداد فی اکائی مقناطیسی نفوذ

$$\Phi = BA = \mu_0 \frac{ni}{l} \times i \times a \quad \text{Weber} \quad (14.5)$$

لچھوں کے مرکز مقام پر لچھے B لچھے A کے ساتھ نفوذ بندھن ہے۔ دوسری لچھے B میں چکروں کی تعداد فی اکائی مقناطیسی نفوذ

لچھے A کے برابر ہوگی۔

دوسرے لچھے B میں مقناطیسی نفوذ

$$\Phi = \mu_0 \frac{ni}{l} \times i \times a \times n_2 \quad (14.6)$$

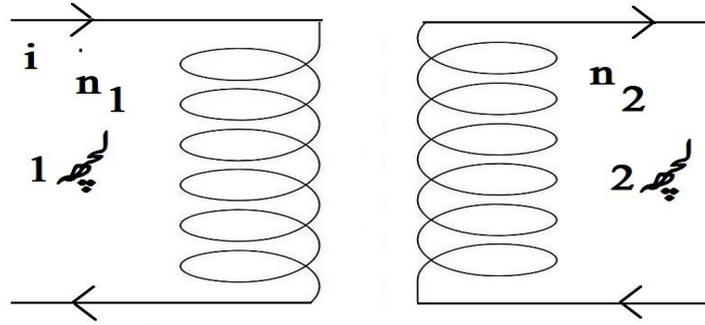
یہاں پر M دو لچھوں میں باہمی امالہ ہیں۔ اس لیے بیچواں B کے ساتھ نفوذ

$$M_i = \mu_0 \frac{n_1 i}{l} \times a \times n_2 \quad (14.7)$$

$$M = \frac{\mu_0 n_1 n_2 a}{l} \quad (14.8)$$

(or) another method

(M of two Coils) دو لچھوں کا ایم



شکل (14.3)

فرض کرو کہ برقی رو پہلے لچھے یا امالہ گر سے بہ رہی ہے جسے لچھے 1 (Coil 1) کہیں گے اور پہلے لچھے میں چکروں کی تعداد n_1 ہے اور دوسرے لچھے میں چکروں کی تعداد n_2 ہے اور تراشے عمودی کا رقبہ A ہے تب پہلے لچھے میں مقناطیسی میدان ہوگا

$$B = \mu_0 \frac{n_1}{l} i \quad (14.9)$$

$$\phi_2 BA = \mu_0 \frac{n_1}{l} i A \quad (14.10)$$

کیوں کہ لچھے ایک دوسرے کے قریب ہیں اس لیے نفوذ دوسرے لچھے سے بھی گزرے گا۔
∴ دوسرے لچھے یا امالہ گر سے منسلک مقناطیسی نفوذ ہوگا۔

$$\phi_2 = \frac{\mu_0 n_1 i A}{l} \times n_2 \quad (14.11)$$

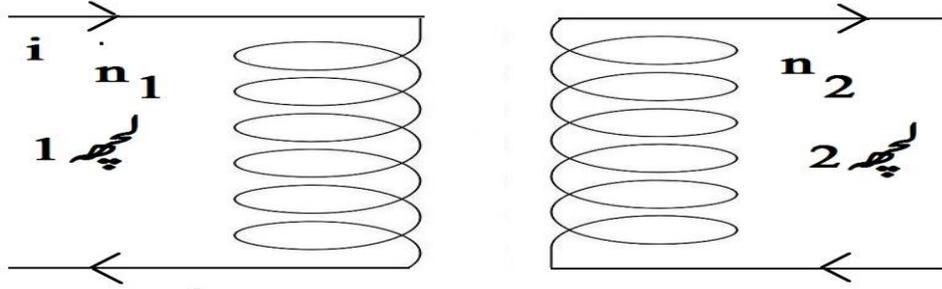
$$(\because \phi = M_i)$$

$$M_i = \frac{\mu_0 n_1 i A n_2}{l} \quad (14.12)$$

$$M = \frac{\mu_0 n_1 n_2 A}{l} \quad (14.13)$$

14.4 پتچواں بندھن کی شرح (Coefficient of Coupling)

شکل (14.4) میں دکھایا گیا ہے کہ جس میں دو اہم محور طویل پتچواں دکھائے گئے ہیں۔ ہر پتچواں کا طول 'l' ہے۔ عرض کیجیے n_1 اور n_2 بالترتیب دو لچھوں کے چکروں کی کل تعداد ہے۔ اس دو لچھوں میں برق رو i_1 اور i_2 گزاری جاتی ہے۔ تب دو لچھوں میں ذاتی امالیت



شکل (14.4)

$$L_1 = \frac{n_1 \Phi_1}{i_1} \quad (14.14)$$

$$L_2 = \frac{n_2 \Phi_2}{i_2} \quad (14.15)$$

جہاں پتچواں (Solenoid) (1) اور (2) کے اندرونی برقی رو بالترتیب i_1 اور i_2 کے ذریعہ متناطیسی نفوذ Φ_1 اور Φ_2 ظاہر کرتے ہیں۔ جب پتچواں (2) میں سے ایک رو i_2 گزاری جاتی ہے تو یہ پتچواں (1) میں ایک متناطیسی نفوذ پیدا کرتا ہے۔ ہم اسے Φ_1 سے ظاہر کرتے ہیں۔ پتچواں (1) کے ساتھ مطابق پتچواں بندھن ہے۔ تب

$$N_1 \Phi_1 = M_{12} I_2 \quad (14.16)$$

جہاں پتچواں (2) کی مناسبت سے پتچواں (1) کی باہمی امالیت کہلاتی ہے۔ اسے باہمی امالہ کی شرح بھی کہتے ہیں۔ اسی طرح اب ہم اس کی مخالف صورت لیتے ہیں۔ پتچواں (1) میں سے ایک برقی رو i_1 گزاری جاتی ہے اور لچھے (2) کے ساتھ نفوذ بندھن ہے۔

$$N_2 \Phi_2 = M_{21} I_1 \quad (14.17)$$

جہاں M_{21} پتچواں (1) کی مناسبت سے، پتچواں (2) کی باہمی امالیت کہلاتی ہے۔

باہم دگری مسئلہ (Reciprocity Theorem) استعمال کرنے پر

$$M_{12} = M_{21} = M_{\text{maximum}}$$

یہ قیمت کو مساوات (14.16) اور (14.17) میں استعمال کرنے پر

$$n_2 \Phi_1 = M_{\text{max}} i_1 \quad (14.18)$$

$$n_1 \Phi_2 = M_{\text{max}} i_2 \quad (14.19)$$

مساوات (14.18) اور (14.19) کو ضرب کرنے پر

$$M^2_{max} i_1 i_2 = n_1 n_2 \Phi_1 \Phi_2 \quad (14.20)$$

$$M^2_{max} = \left(\frac{n_1 \Phi_1}{i_1} \right) \times \left(\frac{n_2 \Phi_2}{i_2} \right) \quad (14.21)$$

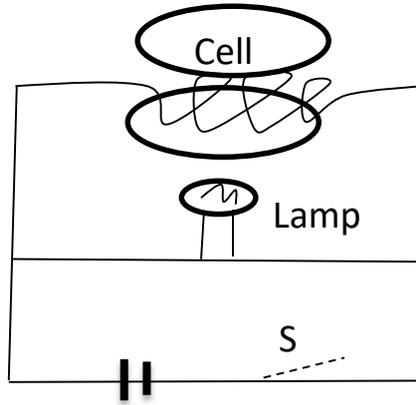
مساوات (14.18) اور (14.19) کو (14.21) میں درج کرنے پر

$$M^2_{max} = L_1 L_2 \quad (14.22)$$

$$M_{max} = \sqrt{L_1 L_2} \quad (14.23)$$

14.5 ایک مقناطیسی میدان میں ذخیرہ شدہ توانائی

ایک امالہ گر سے برقی رو گزرتی ہے تو یہ اپنے گرد توانائی کو ذخیرہ کر لیتے ہے۔ اس کو بموجب شکل (14.5) ایک برقی دور کی مدد سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ جب سوئچ S کو بند کیا جاتا ہے۔ تو بلب روشن ہوتا ہے۔ لیکن جب سوئچ کو کھولا جاتا ہے تو بلب کی چمک لمحے کے لیے برہ جاتی ہے۔ اس چمک میں یہ اضافہ امالہ کے مقناطیسی میدان میں ذخیرہ شدہ توانائی کی وجہ سے ہوتی ہے۔ کیوں کہ جب میدان ڈھلتا ہے تو امالہ گر کا مقناطیسی میدان پر ایک بڑی مقدار میں برقی رو کا امالہ کرتا ہے۔

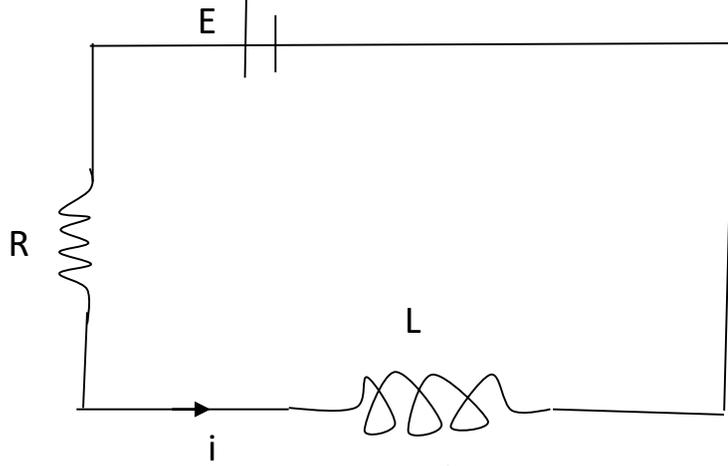


شکل (14.5)

ایک مقناطیسی میدان کو قائم کرنے میں مطلوبہ کام کو محسوب کرنے کے لیے ہم مبداء شکل (14.5) سے ایک علاحدہ دور کو فراہم کردہ توانائی کو محسوب کریں گے۔ جب کہ برقی رو صفر سے شروع ہو کر ایک قیمت تک بڑھتی ہے۔

اس دور میں مزاحمت 'R' ذاتی امالیت 'L' اور emf 'e' والے شکل (14.6) بیڑی پر مشتمل ہوتا ہے۔ دور میں بہنے والی رو ہے اور لچھے کے گرد قوت - $L \frac{di}{dt}$ ہے اور آگے کی جانب رواں حاصل $\mathcal{E} - L \frac{di}{dt}$ ہے۔ لہذا اوم کے کلیے کو استعمال کرنے پر

$$\varepsilon - \frac{Ldi}{dt} = iR \quad (14.24)$$



شکل (14.6)

برقی بھرن کی ایک مقدار dq کو برقی دور میں گزارنے کے لیے emf سے ہوا کام dw

$$dw = \varepsilon dq \quad (14.25)$$

$$(\because dq = idt) \quad dw = \varepsilon idt$$

$$\frac{dw}{dt} = \varepsilon i \quad (14.26)$$

مساوات (14.24) اور (14.26) سے

$$\frac{dw}{dt} = Li \frac{di}{dt} + i^2 R \quad (14.27)$$

کام اور توانائی اصلاحوں میں اس مساوات کی وضاحت یوں ہوگی۔ مساوات (14.27) کے بائیں جانب کی اصطلاح وہ شرح ہے جس سے دور میں توانائی فراہم کرتی ہے۔ جب کہ دائیں جانب کی اصطلاح $i^2 R$ وہ ضائع کردہ توانائی ہے جو مزاحمت میں جول حرارت کے طور پر ضائع ہو جاتی ہے۔

لہذا وہ توانائی جو جول حرارت کے طور پر ظاہر نہیں ہوتی، اسے لازمی طور پر مالہ گر سے متعلقہ مقناطیسی میدان میں ذخیرہ ہو جانا چاہئے۔ اس طرح اصطلاح $\frac{Lidi}{dt}$ مقناطیسی میدان میں توانائی کے ذخیرہ ہونے کی شرح کو ظاہر کرتی ہے۔

$$Li \frac{di}{dt} = \frac{du_B}{dt}$$

$$du_B = Lidi \quad \text{یا}$$

$$U_B = \int du_B = \int_0^i Lidi$$

$$U_B = \frac{1}{2} Li^2 \quad (14.28)$$

مساوات (14.28) برقی رو i لے جانے والی امالیت 'L' سے متعلق مقناطیسی توانائی کو تعبیر کرتی ہے۔ مقناطیسی توانائی کے ابعاد

ہوتے ہیں امالیت ضرب برقی رو کا مربع۔

14.6 ایک مقناطیسی میدان میں توانائی کی کثافت (Power of Energy in Magnetic Field)

مقناطیسی امالیت کی رقم میں اس توانائی کی کثافت کو معلوم کرنے کے لیے مقناطیسی میدان کو امالہ گر کے اندر ایکساں سمجھا جاتا ہے۔ لہذا ذخیرہ شدہ توانائی کو لازمی طور پر بیچواں کے سارے حجم میں ایکساں منقسم ہونا چاہیے۔

برقی رو لے جانے والے امالہ گر میں محفوظ توانائی امالہ گر کے اطراف مقناطیسی میدان کی شکل میں ذخیرہ ہو جاتی ہے۔

مقناطیسی میدان میں توانائی کے ذخیرہ ہونے کی مساوات

$$U = \frac{1}{2} L i_0^2 \quad (14.29)$$

ایک ایسے بیچواں کو فرض کیجیے جس کا طول 'l' اور تراش عمودی کا رقبہ A ہے۔ تب بیچواں کے طول سے متعلقہ حجم 1A ہوگا۔

ایک بیچواں کے امالیت

$$L = \mu_0 n^2 A l \quad (14.30)$$

جہاں بیچواں (Solenoid) کے فی اکائی طول میں n عدد چکریں ہیں۔

$$U = \frac{1}{2} (\mu_0 n^2 A l) i_0^2 = \frac{1}{2} \frac{(\mu_0 n i_0)^2}{\mu_0} A l \quad (14.31)$$

ایک بیچواں میں مقناطیسی میدان $B = \mu_0 n i$

$$U = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} A l \quad (14.32)$$

مقناطیسی میدان کی توانائی کی کثافت ہوگی

$$U = \frac{U}{l A} \quad (14.33)$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} A l \quad (14.34)$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \quad (14.35)$$

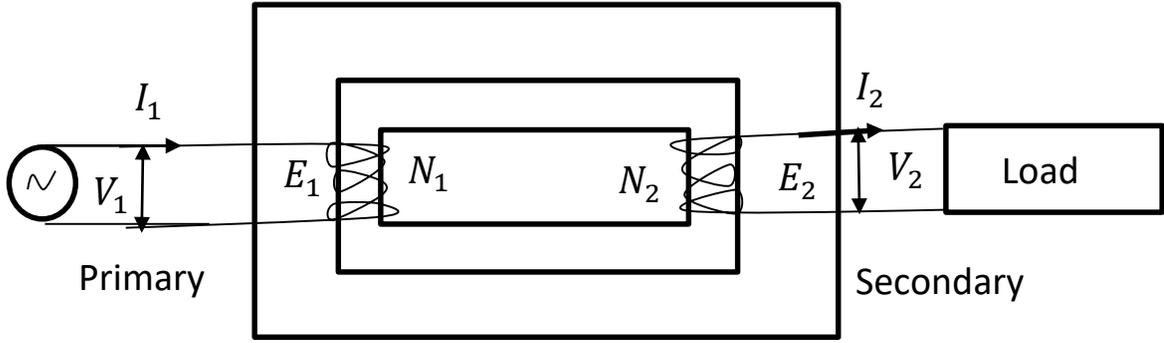
حالانکہ مقناطیسی میدان کی کثافت کی یہ مساوات ایک بیچواں کے خصوصی کہیں کے لیے اخذ کی گئی ہے۔ مگر مساوات (14.35) کا ضابطہ تمام مقناطیسی میدانوں کے لیے بھی درست ہوتا ہے۔

اس طرح مقناطیسی میدان میں ذخیرہ شدہ توانائی $\frac{B^2}{2\mu_0}$ فی اکائی حجم کے مساوی ہوگی۔

14.7 ٹرانسفارمر کا اصول (Principle of Transformer)

اصول: کئی مقاصد کے لیے، نیک متبادل برقی قوں کو اس سے کم یا زیادہ مقدار کی برقی قوں میں تبدیل کرنا ضروری ہوتا ہے۔ یہ ایک ایسے آلہ کی مدد سے کیا جاتا ہے، جسے ٹرانسفارمر (Transformer) کہتے ہیں جو باہم امالہ کے اصول پر مبنی ہے۔

ٹرانسفارمر ایک برقی آلہ ہے جو برقی طاقت کو ایک لچھے سے دوسرے لچھے میں مستقل کرتا ہے۔ یہ صرف متبادل رو (AC) کے لیے کام کرتا ہے۔ جس کے ابتدائی لچھے اور ثانوی لچھے میں تعداد مساوی ہوتی ہے۔ کچھ ٹرانسفارمر تفاوت قتا کو گھٹاتے اور برقی رو کو بڑھاتے ہیں۔ یہ Step down کہلاتے ہیں۔ یہ دو لچھوں کے باہمی امالہ کو ملانے والے مشترکہ مقناطیسی نفوذ پر کام کرتا ہے۔ ٹرانسفارمر کو قواں زیادہ برقی رو کو زیادہ قوں کم برقی رو اور اس کے معکوس کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ یہ صرف متبادل رو AC کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔



شکل (14.7)

تشریحات: ٹرانسفارمر ایک مشترکہ قالب پر لپٹے ہوئے دو لچھوں پر مشتمل ہوتا ہے۔ قالب ایک بلند نفوذ پذیری رکھنے والے مادے جیسے نرم لوہے کا بنا ہوتا ہے۔ اس قالب کا کام یہ ہوتا ہے کہ وہ لچھے سے جڑے مقناطیسی نفوذ میں اضافہ کرتا ہے۔ لچھا 'P' جو اس دو لٹچ کو جوڑا جاتا ہے جس کو تبدیل کرنا مقصود ہوتا ہے۔ ابتدائی (Primary) کہلاتا ہے اور دوسرا لچھا 'S' جس کے سروں کے درمیان متبادل دو لٹچ حاصل کیا جاتا ہے، ثانوی (Secondary) کہلاتا ہے۔ قالب جس پر لچھے 'P' اور 'S' لپٹے ہوتے ہیں۔ عام طور پر مقناطیسی مادوں کی پتلی پر قوں سے بنا ہوتا ہے۔ ان پر قوں کو اوراق (Laminations) کہا جاتا ہے جن کو لیمیننگ کاغذ کی پتلی پر قوں کے ذریعہ برقی طور پر عاجز بنایا جاتا ہے۔

شکل (14.7) میں ایک ٹرانسفارمر کی ایک تراش عمودی اور دور (Circuit) کی روایتی علامت کو دکھا گیا ہے۔

emf کی مساوات (e.m.f Equation):

ابتدائی (Primary) لچھوں کے سروں پر ایک متبادل دو لٹچ عائد کیا جاتا ہے تو یہ قالب میں تبدیل پذیر مقناطیسی نفوذ پیدا کرتا ہے۔ فیراڈے کے امالے کے کلیے کے مطابق ابتدائی لچھے میں ایک متبادل امالہ شدہ emf وجود میں آجاتا ہے۔ یہ امالہ شدہ emf ابتدائی لچھے میں عائد کردہ دو لٹچ سے بڑی حد تک مساوی ہوتا ہے۔ فرض کیجیے کہ ابتدائی لچھے میں چکروں کی تعداد N اور نفوذ کی تبدیلی شرح $\frac{d\phi}{dt}$ ہے۔ تب

لینز (Lenz) کے کلیے کے مطابق ε_1 ہوگا۔

$$\varepsilon_1 = -N_1 \frac{d\phi}{dt} \quad (14.36)$$

ٹرانسفارمر سے گزرنے والے مقناطیسی نفوذ

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_m \sin \omega t \\ \phi &= \phi_m \sin 2\pi f t \quad \text{Weber} \end{aligned} \quad (14.37)$$

مساوات (14.37) کو (14.36) میں درج کرنے پر

$$\begin{aligned} e_1 &= -N \frac{d\phi}{dt} \\ E_1 &= -N \frac{d}{dt} (\phi_m \sin 2\pi f t) \end{aligned} \quad (14.38)$$

$$E_1 = -N \phi_m 2\pi f \cdot \cos 2\pi f t$$

$$E_1 = +N_1 \phi_m 2\pi f \sin(2\pi f t - \pi/2) \text{ volt}$$

مبداء کی برقی قوت emf اور نفوذ میں برقی رو کے لیے مساوات (14.38) سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ برقی رو، برقی قوتوں سے

$\pi/2$ یا 90° دور سے یعنی قدم (log) ہے۔

$$E_{max} = N_1 \phi_m \cdot 2\pi f \text{ vol} \quad \text{تب}$$

$$E_{rms} = \frac{E_{msu}}{\sqrt{2}} = E_1 = \frac{2\pi f \cdot N_1 \phi_m}{\sqrt{2}}$$

$$E_1 = 4.44 \phi_m N_1 f \text{ Volt} \quad (14.39)$$

اسی طرح

چوں کہ ثانوی لچھا بھی اسی مالب پر لپٹا ہوا ہے۔ اس لیے سارا نفوذ اور متناظر نفوذ میں تبدیلیاں بھی ثانوی لچھے سے منسلک ہو جاتی

ہے۔ اگر ثانوی لچھے میں چکروں کی تعداد N_2 ہے اور نفوذ میں تبدیلی کی شرح $\frac{d\phi}{dt}$ ہے، تب ثانوی لچھے میں امالی emf E_2 ہوگا۔

$$E_2 = -N_2 \frac{d\phi}{dt}$$

$$E_2 = 4.44 \phi_m N_2 f \text{ volt} \quad (14.40) \quad \text{تب}$$

مساوات (14.39) اور مساوات (14.40) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{4.44 f N_1 \phi_m}{4.44 f N_2 \phi_m} = \frac{N_1}{N_2} = a \quad (14.41)$$

مساوات (14.41) کو ٹرانسفارمر کی مساوات کہا جاتا ہے، جس 'a' کو ٹرانسفارمر کی نسبت کہتے ہیں۔ عروجی (stepup) ٹرانسفارمر میں

$E_2 > E_1$ ہوتا ہے۔ اس لیے N_2 کو لازمی N_1 سے بڑا ہونا چاہیے۔

جب کہ نزولی (Step down) ٹرانسفارمر میں $E_2 < E_1$ یعنی $N_2 < N_1$ ہوتا ہے لہذا
ثانوی لچھے میں امالی emf \times ثانوی لچھے میں چکروں کی تعداد = ابتدائی لچھے میں امالی emf \times ابتدائی لچھے میں چکروں کی تعداد (یا)
حاصل شدہ دو لٹیج \times ثانوی لچھے میں چکروں کی تعداد = عائد کردہ دو لٹیج \times ابتدائی لچھے میں چکروں کی تعداد

ایک کامل ٹرانسفارمر میں ایسا کامل کپلنگ (Coupling) موجود ہوتا ہے کہ توانائی
کا کوئی انتشار (dissipation) واقع نہیں ہوتا۔ اس لیے لچھوں کی مزاحمت صفر ہوتی ہے اور اس طرح قالب میں کوئی حرارت ضائع نہیں
ہوتی۔ چونکہ تقریب (Approximation) کی صورت میں کوئی جملہ زیادہ واقع نہیں ہوتا۔ لہذا عائد کردہ اور حاصل شدہ طاقتوں کو
لازمی طور پر مساوی ہونا چاہیے۔ یعنی

$$\varepsilon_2 i_2 = \varepsilon_1 i_1 \quad (14.42)$$

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1} \quad (14.43)$$

ایک عروجی ٹرانسفارمر میں ثانوی لچھے کے مقابلے میں ابتدائی لچھا زیادہ طاقتور برقی رو کا حاصل ہوتا ہے۔ جب کہ ایک نزولی
ٹرانسفارمر میں ابتدائی لچھے کے مقابلے میں ثانوی لچھا طاقتور برقی رو رکھتا ہے۔
عملی ٹرانسفارمر میں حاصل شدہ طاقت کے عائد کردہ طاقت سے ہمیشہ کم ہوتی ہے۔ کیوں کہ ڈیزائین وغیرہ میں نقص کی وجہ سے
توانائی کا نقصان واقع ہوتا ہے۔ اس کی مندرجہ ذیل وجوہات ہیں۔

i. نفوذ کارسنہ (Flux Leakage): کچھ نہ کچھ نفوذ ہمیشہ رستا ہے، یعنی کہ ابتدائی کا پورا نفوذ ثانوی سے نہیں گزرتا۔ اس کی وجہ
قالب کا خراب ڈیزائن یا قالب میں خالی جگہوں میں بھری ہوا (air gap) ہو سکتی ہے۔ ابتدائی اور ثانوی لچھے کو ایک دوسرے
کے اوپر لپیٹ کر اسے کم کیا جاسکتا ہے۔

ii. لپیٹوں کی مزاحمت: لپیٹوں میں استعمال ہوئے تاروں کی کچھ مزاحمت ضرور ہوتی ہے اور اس لیے تاروں میں پیدا ہوئی حرارت
 $I^2 R$ کی وجہ سے کچھ توانائی ضرور ضائع ہوتی ہے۔ اعلیٰ برقی رو اور کم برقی قوں کی لپیٹوں میں، موٹے تار کو استعمال کر کے اسے کم کیا
جاسکتا ہے۔

iii. گردابی رو: متبادل مقناطیسی مکس لوہے کے قالب میں گردابی رو کا امالہ کرتا ہے اور حرارت پیدا کرتا ہے۔ ایک ورقہ دار قالب
استعمال کر کے اس اثر کو کم کیا جاسکتا ہے۔

iv. پسماندگی (Hysteresis): قالب کا مقناطیسی میدان کی وجہ سے بار بار الٹا ہوتا ہے۔ اس کے نتیجے میں قالب میں
صرف ہونے والی توانائی حرارت کی شکل میں ظاہر ہوتی ہے اور اسے کم ترین رکھنے کے لیے ایسا مقناطیسی مادہ استعمال کیا جاسکتا ہے
جس کا پسماندگی ریاں کم ہو۔

برقی توانائی کی بڑے پیمانے پر ترسیل اور لمبے فاصلوں پر تقسیم ٹرانسفارمر کے استعمال سے کی جاتی ہے۔ جزیٹر سے حاصل ہوئے توانائی

مخرجه کو اسٹیپ آپ کیا جاتا ہے (تاکہ برقی رو کم ہو جائے اور $i^2 R$ کم ہو جائے) پھر اسے لمبی دوریوں پر صارفین کے نزدیک علاقے کے تحت اسٹیشن تک ترسیل کیا جاتا ہے۔ یہاں برقی قوت کو اسٹیپ ڈاؤن کیا جاتا ہے۔ اسے تقسیم کرنے والے تحت اسٹیشن اور بجلی کے کھمبوں پر مزید اسٹیپ ڈاؤن کیا جاتا ہے اور اس رح $240V$ سپلائی ہمارے گھروں تک پہنچتی ہے۔

متبادل پیمانے پر استعمال کیے جانے والے بڑے ٹرانسفارمرز کی استعداد 98.6% ہوتی ہے۔ جب کہ چھوٹے ٹرانسفارمرز کی استعداد تقریباً 90% فیصد ہوتی ہے۔

14.8 حل شدہ مثالیں (Solved Problems)

حل شدہ مثال 1

ایک لچھے میں $5A$ کی برقی رو 10^2 sec میں برہ $10A$ ہو جاتی ہے جس کی وجہ سے دوسرے لچھے پر $50mV$ امالہ محرکہ قوت بنتی ہے ان کا باہمی امالہ معلوم کرو؟

$$\begin{aligned} dt &= 10^{-2} \text{ sec} & di &= (10 - 5) = 5A & \text{حل:} \\ emf(\varepsilon) &= 50mv = 50 \times 10^{-3} \text{ volt} & m &=? \\ \varepsilon &= \frac{M di}{dt} \\ M &= \varepsilon \frac{dt}{di} = 50 \times 10^{-3} \times \frac{10^{-2}}{5} \\ M &= 10^{-4} H = 100 \mu H \end{aligned}$$

حل شدہ مثال 2

ایک کامل ٹرانسفارمر کے چکروں کی نسبت 2 ہے۔ یعنی ایک 18 Volts emf، والی متبادل رو اس کے ابتدائی لچھے پر عائد کی گئی ہے۔ اس کے ثانوی کے سروں پر ظاہر ہونے والی emf یا وولٹیج کو معلوم کرو۔

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \frac{N_2}{N_1} \varepsilon_1 & \text{حل:} \\ \varepsilon_2 &= 2 \times 10 = 20V \end{aligned}$$

حل شدہ مثال 3

ایک ٹرانسفارمر کی نسبت $10:1$ ہے۔ اگر ابتدائی قوت $440V$ ہے تب ثانوی emf معلوم کرو۔ مزید یہ کہ ثانوی برقی رو $100A$ کی ضرورت ہو تب ابتدائی برقی رو کتنی ہوگی فرض کرو کہ ٹرانسفارمر ایک تمثیلی ہے۔

$$\begin{aligned} \frac{N_2}{N_1} &= \frac{10}{1}, E_1 = 400V, E_2 = ? & \text{حل:} \\ \frac{E_2}{E_1} &= \frac{N_2}{N_1} \\ E_2 &= E_1 \left(\frac{N_2}{N_1} \right) = 400 \left(\frac{10}{1} \right) = 4400V \end{aligned}$$

تمثیلی ٹرانسفر مر کے لیے

$$E_1 I_1 = E_2 I_2 \quad (\because I_2 = 100A)$$

$$400 \times I_1 = 4400 \times 100 \Rightarrow I_1 = 1000A$$

حل شدہ مثال 4

5cm نصف قطر والے تار کا ایک حلقہ 100amp برقی رو کا حامل ہے۔ اس کی توانائی کی کثافت کتنی ہوگی۔

$$U_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \quad \& \quad B = \frac{\mu_0 i}{2R} \quad \text{حل:}$$

$$U_B = \frac{1}{2} \frac{\mu_0^2 i^2}{4R^2}$$

$$U_B = \frac{1.26 \times 10^{-6} \times (100)^2 \times 10^4}{8 \times 5 \times 5}$$

$$U_B = 0.63 \text{ Joule / m}^3$$

14.9 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- ایک لچھے میں تبدیل ہوتی ہوئی برقی رو ایک نزدیک رکھے ہوئے لچھے میں ایک برقی قوت باہمی نفوذ کر سکتی ہے۔ یہ رشتہ دیا جاتا ہے $\mathcal{E} = -M \frac{di}{dt}$ جہاں M = لچھے کی باہمی امالیت کہلاتی ہے۔
- برقی بھرنوں سے پیدا ہونے والے ایک برقی سکونی میدان میں ذخیرہ شدہ توانائی ہوگی۔ $U_B = \frac{1}{2} Li^2$
- اور ایک مقناطیسی میدان میں توانائی کی کثافت ہوگی $U_B = \frac{1}{2} \frac{Li^2}{LA}$
- ٹرانسفر مر باہمی امالہ کے اصول پر کام کرتا ہے۔ ایک تمثیلی ٹرانسفر مر کے لیے ابتدائی گھیرے میں طاقت ثانوی گھیرے کی طاقت کے مساوی ہوگی۔
- ابتدائی لچھے کو ایک GC مبداء سے جوڑ دیا جائے تو ابتدائی برقی قوت اور ثانوی برقی قوت میں رشتہ ہے۔ $V_2 = \left(\frac{N_2}{N_1}\right) V_1$
- اور ابتدائی برقی رو اور ثانوی برقی رو میں رشتہ ہے۔ $I_2 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right) I_1$
- اگر ثانوی لچھا میں ابتدائی لچھا سے زیادہ چکریں ہوں تو قوت عروجی (اسٹیپ اپ) ہو جاتی ہے اس قسم کی ترتیب کو ایک عروجی ٹرانسفر مر کہتے ہیں۔ اگر ثانوی لچھا میں ابتدائی لچھا سے کم چکریں ہوں تو ہمیں نزولی (اسٹیپ ڈاؤن) ٹرانسفر مر کہلاتا ہے۔

14.10 کلیدی الفاظ (Keywords)

- **باہمی امالیت**: دو لچھوں کی باہمی امالیت سے مراد ایک لچھے کی مقناطیسی میدان کے ذریعے پیدا ہونے والی امالی برقی قوت محرکہ دوسرے لچھے میں برقی رو اور وولٹیج میں تبدیلی کی مخالفت کرتی ہے اس مظہر کو باہمی امالیت کہتے ہیں۔
- **باہمی امالیت کی شرح**: یہ برقی دور سے منسلک نفوذ ہے جو دوسرے برقی دور میں برقی رو کے بہنے کے سبب ہوتا ہے۔

- عروجی (اسٹیپ اپ) : ثانوی لچھ میں ابتدائی لچھ سے زیادہ چکر ہوں یعنی $(N_2 > N_1)$ -
- نزولی (اسٹیپ ڈاؤن) : ثانوی لچھ میں ابتدائی لچھ سے کم چکر ہوں یعنی $N_1 > N_2$

14.11 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

14.11.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. باہمی امالہ کی تعریف کیجیے ؟
 2. باہمی امالیت کی بین الاقوامی اکائی ہے۔
 3. ٹرانسفر مر کے مغز کو غیر موصلی پرت کیوں لگادی جاتی ہے۔
 4. کس اصول پر ٹرانسفر مر کام کرتا ہے۔
 5. کچھ ٹرانسفر مر تفاوت قوت کو گھٹاتے اور برقی رو کو بڑھاتے ہیں تو----- کہتے ہیں۔
 6. باہمی امالے کی شرح $M=$ -----
 7. امالیت کی اکائی----- ہوگی۔
- | | | | |
|---------------|-----------|---------|----------|
| Volt –sec (d) | Henry (c) | amp (b) | volt (a) |
|---------------|-----------|---------|----------|
8. ہنری----- کی اکائی ہے۔
 9. باہمی امالیت کو آپ کیا سمجھتے ہیں؟

14.11.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. ایک مقناطیسی میدان میں موجود توانائی کے لیے ایک ضابطہ اخذ کیجیے۔
2. دو طویل ہم محور بیچواں کے باہمی امالیت کی مساوات اخذ کرو۔
3. باہمی امالہ کی شرح کی تعریف کرو۔
4. ٹرانسفر مر کا اصول کیا ہے؟ اس کی کارکردگی کو بیان کرنے کے لیے ضروری نکات لکھو۔

14.11.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. مقناطیسی میدان میں ذخیرہ شدہ توانائی کے لیے مساوات کو اخذ کیجیے اور کشاف ت توانائی کے لیے مساوات کی تخریج کیجیے ؟
2. باہمی امالیت کو بیان کیجیے۔ دو (سولینائیڈ) بیچواں کے لیے باہمی امالیت کی مساوات کو اخذ کیجیے ؟
3. ٹرانسفر مر کس اصول پر کام کرتا ہے۔ موزوں نظریہ کے ساتھ ٹرانسفر مر کی کارکردگی بیان کرو۔

14.11.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. ایک ٹرانسفارمر کے ابتدائی لچھے میں 10 تار ہیں اور یہ متبادل مبداء کے 100V کو 1000V میں تبدیل کرتا ہے اس کے ثانوی لچھے میں کتنے تار ہیں۔
2. ایک ٹرانسفارمر کے لچھوں کا باہمی امالہ 5H ہے ابتدائی لچھے سے گزرنے والی برقی رو $10^{-4} sec$ کے عرصے میں صفر ہونے جانے پر ثانوی لچھے میں 20,000V کی امالی قوت محرکہ بنتی ہے۔ ابتدائی لچھے میں کتنی برقی رو گزر رہی تھی۔
3. ایک Step Down ٹرانسفارمر میں ابتدائی لچھے میں 1100V ہے ٹرانسفارمر کی نسبت 15:1 اگر ابتدائی کچھ سے 10A برقی رو گزر رہی ہو تب ثانوی لچھے کا قواں اور برقی رو معلوم کرو۔ یہ مان لیا گیا ہے کہ ٹرانسفارمر تمثیل ہے۔
4. ایک کامل ٹرانسفارمر کی باہمی امالیت کتنی ہوگی۔ اگر اس کے ابتدائی لچھے پر ایک 60Hz والی 2amp برقی رو عاملہ کرنے سے اس کے ثانوی لچھے کے سروں پر 6VH کے rms کا امالہ ہوتا ہو۔ (یہاں نسبت یکساں ہے)۔

14.12 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Bleaney, B I, and B Bleaney. Electricity and Magnetism. Oxford: Oxford University Press, 2013.
2. Duffin, W J. Electricity and Magnetism. Cottingham: W.J. Duffin, 2001.
3. Gaur, R.K. & Gupta, S.L. Engineering Physics. Dhanpat Rai Publication.
4. Peck, Edson R. Electricity and Magnetism. , 2013.
5. Plonsey.R&Collin.R.E. Principles and Application of Electromagnetic Field. Tata Mc Graw Hill Publication. New Delhi.
6. Purcell, Edward M, and David J. Morin. Electricity and Magnetism. , 2013.
7. Resnic.R&Halliday.D. Physics Part-I&Part-II. Wiley Eastern Pvt.Ltd. New Delhi.
8. Resnick, Robert, David Halliday, and Kenneth S. Krane. Physics. New York: Wiley, 2002.
9. Schuh, Mari C. Magnetism. Minneapolis, MN: Bellwether Media, 2008.

اکائی 15- مکس ویل کی مساواتیں

(Maxwell's Equations)

اکائی کے اجزا

تمہید	15.0
مقاصد	15.1
بقائے بار کا کلیہ - استمراری مساوات	15.2
بقائے بار کے کلیہ کی تکمیلی شکل	15.2.1
کلیہ بقائے بار کی تفریقی شکل	15.2.2
نقل رو	15.3
نقل رو اور ایصال رو	15.4
تفرق شکل میں مکس ویل کے مساوات	15.5
مکس ویل کی موجی مساوات	15.6
ہمدار مستوی موجیں	15.7
حل شدہ مثالیں	15.8
اکنسابی نتائج	15.9
کلیدی الفاظ	15.10
نمونہ امتحانی سوالات	15.11
معروضی جوابات کے حامل سوالات	15.11.1
مختصر جوابات کے حامل سوالات	15.11.2
طویل جوابات کے حامل سوالات	15.11.3
حل شدہ جوابات کے حامل سوالات	15.11.4
مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں	15.12

15.0 تمہید (Introduction)

سائنسدانوں کو برقی اور مقناطیسی میدانوں کے وجود کے بارے میں معلومات 20 صدی کے وسط تک حاصل ہو چکی تھیں۔ حقیقت تو یہ ہے کہ برقی مقناطیسی کو اس وقت فیراڈے (Faraday) کے پیش کردہ اس نئے نظریے کو بہت سارے سائنسدانوں نے شک کی نظر سے دیکھا تھا۔ اس سے قابل میدانوں کو برقی اور مقناطیسی عمل کیوجہ سے قوتوں کی ترتیبوں کو سمجھنے کے ایک سہولت بخش ذریعہ کے طور پر دیکھا جاتا تھا۔ لیکن فیراڈے کے لیے مقناطیسی میدان ہی اصل ذریعہ تھا جس سے مقناطیسی قوت لگائی جاتی تھی۔

امپیر (Ampere) کے تحقیقاتی کام (1820-1825) کی بنیاد پر یہ سمجھا جا رہا ہے کہ برقی رولے جانے والا ایک تار دوسرے برقی رولے جانے والے تار پر ایک قوت لگاتا ہے اور اس قوت لگانے کے لیے کسی درمیانی ذریعہ کو شمار میں نہیں لیا گیا۔ یہ ایک فاصلے سے عمل (Action at a Distance) کا نظریہ تھا جس کے بعد منطقی طور پر نیوٹن کا آفاق کلیہ کشتی وجود میں آیا۔ نیوٹن کے کلیہ نے ایک فاصلے سے عمل کو فرض کیا۔ کیوں کہ اس کلیہ نے کشتی قوت کی ترسیلہ کے لیے کسی ذریعے کو ضروری نہیں سمجھا۔ بہر حال فیراڈے نے برقی اور مقناطیسی میدانوں کے طبعی حقیقت کو سمجھا (Conceived) اور اس کے لیے مکس ویل نے درمیانی تعلق کو معلوم کیا۔

برقی اور مقناطیسی کے بنیادی کلیہ (Basic Laws of Electricity and Magnetism)

- برقی اور مقناطیسی کے بنیادی کلیہ یہ ہیں۔ $\oint E \cdot ds = \frac{q}{\epsilon_0}$
- گاؤس (Gauss) کا کلیہ کے مطابق کسی بند سطح پر لیا گیا برقی نفوذ اس سطح کے اندر گھرے ہوئے برقی بار کا $\frac{1}{\epsilon_0}$ گنا ہوتا ہے۔

$$\oint B \cdot ds = 0$$

$$\oint B \cdot dl = \mu_0 i$$

- ایمپیر کا کلیہ برقی بردار تار کے اطراف سے گھیرے ہوئے بند راستے پر مقناطیسی امالی میدان کا اوسط کسی مقناطیسی اجازیت اور برقی رو کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔ $\oint E \cdot dl = \frac{-d\phi_B}{dt}$
- فیراڈے کے امالہ کے کلیات سے اخذ کیا جاسکتا ہے کہ ایک لچھے میں امالی برقی قوت محرکہ اس لچھے سے گزر رہے فلکس کی تبدیلی کی شرح سے راستہ رشتہ رکھتی ہے۔

15.1 مقاصد (Objectives)

آپ کو اس مظہر کو سمجھنے میں مدد دینے کے لیے یہ اکائی

- i. نقل مکانی رو (Displacement Current) کے سلسلہ میں مکس ویل کے کارناموں کو پیش کرتی ہے۔
- ii. برقی مقناطیسی (Electromagnetism) کی بنیاد پر اخذ کردہ کلیوں کا جائزہ لیتی ہے۔
- iii. بقائے بار کا کلیہ۔ استمراری مساوات کو بیان کریں گے۔
- iv. تفرق شکل میں مکس ویل کے مساواتوں کو حاصل کریں گے۔

15.2 بقائے بار کا کلیہ۔ استمراری مساوات

(Charge Conservation Law – Continuity Equation)

بقائے بار کے کلیہ کے مطابق کسی نظام کا کل برقی بار مستقل رہتا ہے۔ یعنی بار ہی نہ ہی پیدا ہوتا ہے اور نہ فنا ہوتا ہے اور وہ مساوات جو اس کلیہ کی وضاحت کرتی ہے استمراری مساوات (Continuity Equation) کہلاتی ہے۔

15.2.1 بقائے بار کے کلیہ کی تکمیلی شکل (Integral form of Charge Conservation Law)

فرض کرو کہ کسی خاص حجم V میں بار اسی وقت تبدیل ہوتا ہے جب اس کے اندر یا اس سے باہر جاتا ہے۔ یعنی حجم V بند حدود S پر محیط ہیں۔

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dv = - \oint j \cdot ds \quad (15.1)$$

جہاں ρ بار کی کثافت ہے۔ $(Q = \rho dv)$ اور Z رو کی کثافت ہے یعنی برقی روئی اکائی ترش عمودی کے رقبہ ہے۔ حسب بالانسیب میں بائیں طرف کی قدریں (LHS) حجم میں ہونے والے بار کے تغیر کی شرح کو بتلاتے ہیں جب کہ دائیں طرف کی قدریں (RHS) حجم کی سطح کے حدود سے گزرنے والے رو کی طاقت کو بتلاتا ہے۔ منفی علامت حجم میں مثبت بار کے کم ہونے کو ظاہر کرتی ہے۔ جب کہ رو کی کثافت کی سمت حجم سے باہر کی جانب ہے۔ اس سے سمجھ آتا ہے کہ بند سطح سے بیرونی جانب عمود مثبت ہوگا۔ لہذا حسب بالا نسب میں سمتیہ S سیدھا سطح کے بیرونی عمود کے ساتھ ہوگا۔

15.2.2 کلیہ بقائے بار کی تفریقی شکل (Differential form of Charge Conservation Law)

مساوات (15.1) میں حج V اور سطحی رقبہ S وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتا ہے۔ اس وجہ سے مساوات (15.1) کے (L.H.S) بائیں طرف کی قدر میں مشتق زمانی (Time Derivative) کو تکمیلہ (Integral) میں شامل کر سکتے ہیں۔ دوسری طرف گاؤس کے کلیہ کے مطابق مساوات کے دائیں طرف (R.H.S) کو تکمیلہ حجمی (Volume Integral) میں تبدیل کر سکتے ہیں۔

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dv = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \quad (15.2)$$

$$\oint j \cdot ds = \int_V \text{div} j dv \quad (15.3)$$

مساوات (15.1) میں درج کرنے پر

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = - \int_V \text{div} j dv \quad (15.4)$$

$$\int_v \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \text{div} j \right] dv = 0 \quad (15.5)$$

مساوات ہر حجم کے لیے معتبر و درست ہوتی ہے۔ تضاد (Contradiction) کے ذریعہ تکمیلہ (Integral) صفر حاصل کر سکتے ہیں۔ اگر کسی نقطہ پر تکمیل (Integral) صفر کے مساوی نہیں ہے۔ تب ہم اس نقطہ کے اطراف چھوٹا سا حجم V لے سکتے ہیں جس میں تکمیل (Integral) کی علامت تبدیل نہیں ہوتی ہے۔ بہر کہف یہ مساوات (15.5) کا تضاد (Contradiction) ہے۔ نتیجتاً تکمیل (Integral) ہر نقطہ پر صفر کے مساوی ہوگا۔

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} j = 0 \quad (15.6)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot j = 0 \quad (15.7)$$

یہ کلیہ بقائے بار کی تفرقی شکل ہے اور اسے استمراری مساوات (Continuity equation) بھی کہتے ہیں۔

15.3 نقل رو (Displacement Current)

ہم جانتے ہیں کہ موصل میں برقی رو مقناطیسی میدان پیدا کرتی ہے مگس ویل (Maxwell) نے ثابت کیا کہ خلاء میں یا ذو برقیہ (Dielectric) میں برقی میدان کی تبدیلی مقناطیسی میدان پیدا ہوتا ہے۔ برقی میدان میں تبدیلی مساوی ہوتی ہے برقی رو کے جو برقی میدان میں بہتی ہے اور جو ایسا ہی مقناطیسی دائرہ پیدا کرتی ہے جیسا کہ عام ایصابی رو (Conduction Current) پیدا کرتی ہے اسے نقل رو (Displacement Current) کہتے ہیں۔ ہم ایمپیر کے کلیہ میں تبدیلی کے ذریعہ نقل رو کو دیکھیں گیں۔ ایمپیر کے کلیہ کو سمتیہ شکل میں اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\vec{\nabla} \times B = \mu_0 j \quad (15.8)$$

جہاں j برقی رو کی کثافت ہے۔

اس مساوات کا انفرج (Divergence) لینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times B) = \text{div} \text{curl} B = \text{div} \mu_0 j = \mu_0 \text{div} j$$

ہمیں معلوم ہے کہ سمتیہ کے کرل کا انفرج (Divergence) ہمیشہ صفر ہوتا ہے۔ لہذا

$$\therefore \vec{\nabla} \cdot (\mu_0 j) = 0 \text{ and } \text{div} j = 0 \quad (15.9)$$

اس سے ہمیں معلوم ہو رہا ہے کہ کسی بند سطح سے باہر برقی رو کا جملہ نفوذ صفر ہوتا ہے۔ پر اس مساوات کا استمراری مساوات کے ساتھ تضاد (Contradiction) ہے۔ جو بتلاتی ہے کہ

$$\text{div} j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (15.10)$$

جہاں ρ بار کی کثافت کو بیان کرتا ہے۔

مکس ویل (Maxwell) کہتا ہے کہ مساوات (15.10) نامکمل ہے مکس ویل کہتا ہے کہ ایمپیر کا کلیہ جو $\vec{\nabla} \times B = \mu_0 j$ قائم حالت کے لیے درست ہے اور جہاں پر بار کی کثافت وقت کے لحاظ سے تبدیل ہوتی ہے وہاں پر یہ ناکافی ہے۔ یعنی $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ صفر نہیں ہوتا ہے۔ مکس ویل ایمپیر کے کلیہ میں تبدیلی کرتا ہے یہ اسطرح قائم (Standing) اور وقت کے لحاظ سے تبدیل ہونے والی دونوں حالتوں کے لیے درست ثابت ہوتا ہے۔ یہ کہتا ہے کہ مساوات (15.8) میں j کے ساتھ ضرور کسی چیز کا اضافہ کرنا چاہیے۔ اسطرح مساوات کے دونوں جانب انفرج (Divergence) ایکسا ہوگا۔

$$\text{Curl } B = \mu_0 j \text{ (کچھ چیز)}$$

اس کچھ چیز کے لیے مکس ویل مفروضہ قائم کرتا ہے کہ جس طرح (فیراڈے کا امالی کلیہ) مقناطیسی میدان کی تبدیلی سے برقی میدان پیدا ہوتا ہے اسی طرح برقی میدان کی تبدیلی سے مقناطیسی میدان پیدا ہوتا ہے چنانچہ برقی میدان میں تبدیلی دراصل برقی رو کے مساوی ہوتی ہے جو جب تک بہتی ہے جب تک کہ برقی میدان کی تبدیلی سے مقناطیسی میدان پیدا ہوتا ہے۔ اسے نقل رو (Displacement Current) کہتے ہیں۔

گاؤس کے کلیہ کو سمتیہ (Vector) کی شکل میں اسطرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\vec{\nabla} \cdot D = \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \text{ تفرقی کرنے پر}$$

دونوں جانب $\vec{\nabla} \cdot j$ لگانے پر

$$\vec{\nabla} \cdot j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot j + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial D}{\partial t} \quad (15.11)$$

$$= \vec{\nabla} \cdot \left[j + \frac{\partial D}{\partial t} \right] \quad (15.12)$$

استمراری مساوات کے مطابق

$$\vec{\nabla} \cdot j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \left[j + \frac{\partial D}{\partial t} \right] = 0 \quad (15.13)$$

چنانچہ $\vec{\nabla} \cdot j = 0$ برائے قائم رو (Steady Current)

(Steady Current) قائم رو DC راست رو کی ایک قسم ہے جس کی حدت وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتی ہے

اور (قائم رو) $\vec{\nabla} \cdot j = 0$

(ہر جگہ کے لیے)

$$\vec{\nabla} \left[j + \frac{\partial D}{\partial t} \right] = 0 \quad (15.14)$$

یعنی قائم رو اور روجو وقت کے ساتھ تبدیل ہوتی ہے ان کے میدانوں کے لیے
مکس ویل نے ایمپیر کے کلیہ میں j کو اس طرح تبدیل کیا۔

$$\left(j + \frac{\partial D}{\partial t} \right)$$

ایمپیر کا کلیہ اس طرح ہوگا۔

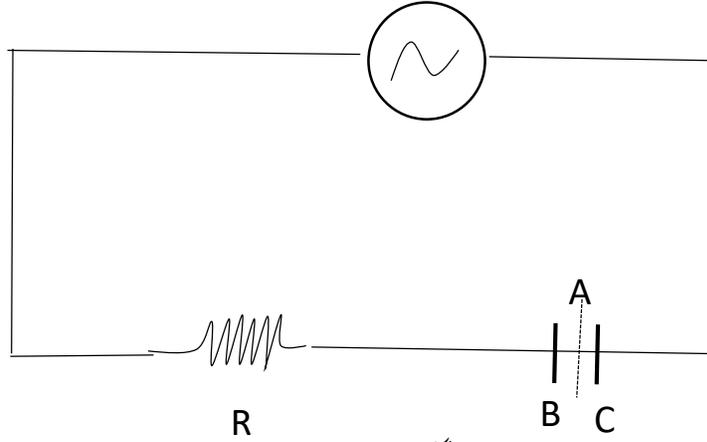
$$\text{Curl } B = \mu_0 \left(j + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \quad (15.15)$$

جہاں $\frac{\partial D}{\partial t}$ کو نقل رو کی کثافت کہتے ہیں کیوں کہ یہ جب نقل برقی D جب وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے یہ بڑھتا ہے۔
اس طرح مساوات (15.15) کو ہم اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$\text{Curl } B = \mu_0 \left(j + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) \quad (15.16)$$

15.4 نقل رو اور ایصال رو (Conduction Current and Displacement Current)

طبعی تشریح: فرض کرو کہ ایک متوازی تختیوں والا مکشف متبادل جنریٹر سے ہم سلسلہ مزاحمت سے جڑا ہوا ہے۔ جس طرح ہم شکل میں دیکھ سکتے ہیں۔



شکل (15.1)

ہمیں معلوم ہے کہ ہم سلسلہ برقی دور میں تمام تراش عمودی پر برقی رو کی قدر یکساں ہوتی ہے۔ برقی دور میں ایصال
رو (Conduction Current) جو برقی باروں کی وجہ سے ہے تمام تراشی عمودی پر یکساں ہوتی ہے سوائے مکشف (Capacitor)
کے اندر موجود تمام ذو برقیہ (Dielectric) کے تراش عمودی کے (جیسے کہ A, B)۔ ذو برقیہ ہوا ہے جس کی اجازت ہے۔۔۔۔۔ ہے۔ یہاں
یہ کہنا بھی ضروری ہے کہ ذو برقیہ میں آزاد الیکٹران بہتے ہیں اور دوسرے الیکٹران پر قوت عائد کرتے ہیں دوسری پلیٹ کی جانب ہے۔ پر

دوسرے الفاظ میں مکشفہ (Capacitor) کے تختیوں کے درمیان برقی رو جاری نہیں رہتی ہے۔ اس کے لیے مکس ویل نے (J.C. Maxwell) مکس ویل نے (Displacement Current) نقل رو کو متعارف کروایا۔

فرض کرو کہ کسی خاص لمحہ میں q مکشفہ (Capacitor) کی تختی کا برقی بار ہے اور ایصالی رو (Conduction Current) (i_c) برقی رو کے بننے کی شرح ہے۔ یعنی

$$i_c = \frac{dq}{dt} \quad (15.17)$$

ذو برقیہ میں برقی نقل مکان D یہ ہوگا۔

$$D = \sigma = \frac{q}{A} \quad (15.18)$$

جہاں σ سطح کے بار کی کثافت اور A پر تختی کا رقبہ ہے۔ تب $q=DA$ کی قدر کو مساوات (15.17) میں درج کرنے پر۔

$$i = \frac{d}{dt}(DA) = A \frac{dD}{dt} \quad (15.19)$$

مکس ویل $A \left(\frac{dD}{dt} \right)$ کو ذو برقیہ کے اندر کی رو رکھتا ہے اور اسے نقل رو (Displacement Current) کہتے ہیں اور اسے J_d سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس وجہ سے

$$i_d = A \frac{dD}{dt} \quad (15.20)$$

لہذا کثافت نقل رو ہوگی J_d جو ہوگی

$$J_d = \frac{dD}{dt} \quad (15.21)$$

اور سمتیہ D ہوگا۔ $J_d = \frac{\partial D}{\partial a}$

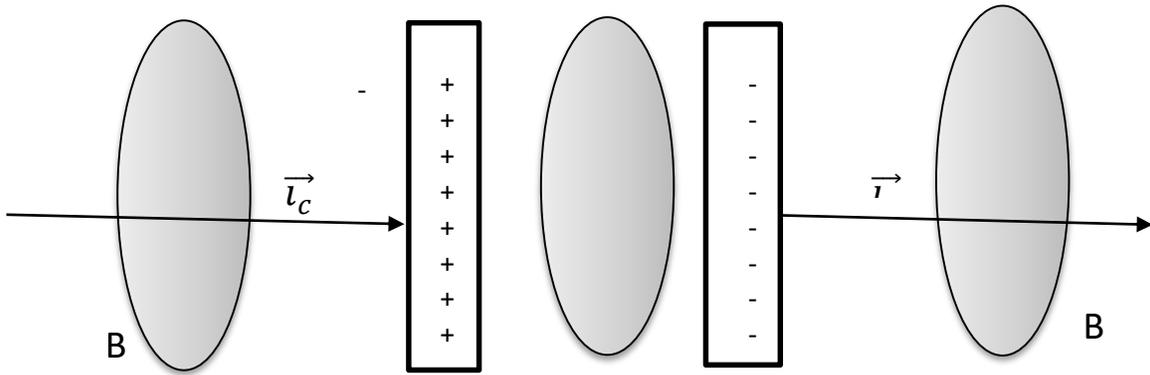
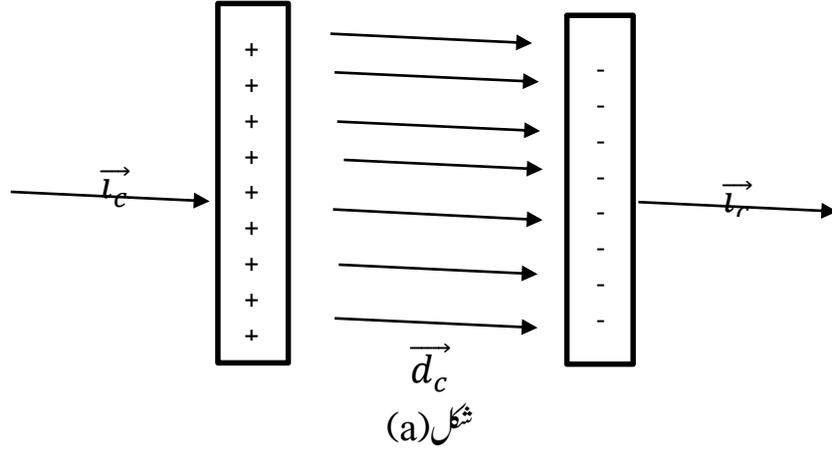
چنانچہ لائن میں ذو برقیہ کے اندر نقل رو (Displacement Current) i_d جو ایصالی رو (Conduction Current) کے مساوی ہوگا۔

اہم نکات (Important Points):

i. ایصالی رو (Conduction Current) اور نقل رو (Displacement Current) کا تصور شکل (15.2) میں نظر آرہا ہے۔

ii. مکشفہ میں ایک پلیٹ سے دوسری پلیٹ میں ایصالی رو (i_c) (Conductor Current Capacitor) موصل تاروں کے ذریعہ گزرتی ہے۔ مکس ویل (Maxwell) کہتا ہے کہ مکشفہ کے پلیٹوں کے درمیان برقی میدان جو ہوتا ہے اس پر کی برقی رو کو نقل رو (Displacement Current) کہتے ہیں اسے i_d سے ظاہر کرتے ہیں یہ پلیٹوں کے درمیان جگہ کے آر پار بہتا

.iii نقل رو کی کثافت i_d زکشفہ سے براہ راست گزرنے والی برقی رو کو ظاہر نہیں کرتا ہے۔ یہ صرف ایک پلیٹ سے دوسری پلیٹ کی جانب ظاہر ہونے والے برقی رو کی شرح ہوتی ہے۔



شکل (15.2)

.iv ایصالی رو (Conduction Current) اور نقل رو (Displacement Current) مساوی ہوتی ہیں یعنی

$$i_c = i_d$$

ایصالی رو کی طرح نقل رو بھی مقناطیسی میدان کا منبع ہے۔

.v اچھے موصلوں میں نقل رو ایصالی رو کے مقابلہ قابل نظر انداز ہوتی ہے۔

.vi نقل رو تب ہوتی ہے جب کہ برقی میدان E وقت کے لحاظ سے تبدیل ہوتا ہے۔ یعنی نقل D وقت کے ساتھ تبدیل ہو رہا ہو۔ اگر

مکشفہ مکمل چارج ہو تب پلیٹوں کے درمیان برقی میدان اپنی قائم قدر کو پہنچ گیا ہو تب dE/dt اور dD/dt صفر ہوگا۔

15.5 تفرق شکل میں مکس ویل کے مساوات (Maxwell's Equations in Differential)

(Form)

برقی اور مقناطیسی کے بنیادی کلیے کے ذریعے مکس ویل نے 1862ء میں چار مساواتیں کو معلوم کیا ہے۔ یہ مساوات ہی مکس ویل مساواتیں کہلاتے ہیں۔ تکمیلی شکل میں مکس ویل مساواتیں

$$\oint E ds = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (15.22)$$

$$\oint B \cdot ds = 0 \quad (15.23)$$

$$\oint E \cdot dl = \frac{-d\phi_B}{dt} \quad (15.24)$$

$$\oint B \cdot dl = \mu_0 \left(j + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) \quad (15.25)$$

تفرقی شکل میں مکس ویل مساواتیں کو ماخذ کثافت (ڈائیورجنس اور گردش کثافتوں (کرل)) دونوں کے لیے عبادت دونوں بنیادی میدانی ویکٹروں کے لیے ہیں۔

$$\text{div} E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (15.26)$$

$$\text{div} B = 0 \quad (15.27)$$

$$\text{Curl} E = \frac{-\partial B}{\partial t} \quad (15.28)$$

$$\text{Curl} B = \mu_0 \left(j + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) \quad (15.29)$$

مساواتیں (15.26) تا (15.27) برقی مقناطیسی فطریے کی بنیادی مساواتیں ہیں جو مکس ویل کی مساواتیں کہلاتی ہیں۔ یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ مکس ویل کی مساواتوں کا اطلاق جب ایک ایسے متجانس (Homogeneous) واسطے پر کیا جاتا ہے تو یہ آسان اور متشکل (Symmetrical) بن جاتی ہیں۔ جس میں کوئی بھرن اور کوئی موصلیت (Conductivity) نہیں ہے۔

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{dE}{dt} \quad (15.30)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{d\vec{H}}{dt} \quad (15.31)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (15.32)$$

$$\nabla \times \vec{H} = 0 \quad (15.33)$$

مشق (Derivations) :

مندرجہ ذیل کے تفرقی مساواتیں کو تکمیل مساواتیں سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

1. گاؤس کا برقی سے متعلق کلیہ

$$\oint E \cdot ds = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (15.34)$$

اگر برقی بھرن کثافت ρ اور V حجم کی سطح پر چوٹا حجم کی مقدار dv پر غور کریں تب برقی بھرن کی مساوات

$$q = \int_v \rho dv \quad (15.35)$$

مساوات (15.34) اور (15.35) سے

$$\oint E \cdot ds = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho dv \quad (15.36)$$

$$\oint \epsilon_0 E \cdot ds = \int_v \rho dv \quad (15.37)$$

$$(\because q_0 E = D) \oint D \cdot ds = \int_v \rho dv \quad (15.38)$$

ڈائیورجنس تھیورم کو استعمال کرنے پر

$$\oint A \cdot ds = \int_v (\vec{\nabla} \cdot A) dv \quad (15.39)$$

$$\oint D \cdot ds = \int_v (\vec{\nabla} \cdot D) dv \quad (15.40)$$

$$\int_v \vec{\nabla} \cdot D dv = \int_v \rho dv \quad (15.41)$$

$$\vec{\nabla} \cdot D = \rho \quad (15.42)$$

$$\vec{\nabla} \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (15.43)$$

$$\text{div} E = \rho / \epsilon_0 \quad (15.44)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (15.45)$$

2. گاؤس کا مقناطیسیت کا کلیہ $\oint B \cdot ds = 0$

سطحی تکمیل سے حجم تکمیل میں بدلنا پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\oint_s B \cdot ds = \int_v \vec{v} \cdot B dv \quad (15.46)$$

$$\int_v \vec{v} \cdot B dv = 0 \quad (15.47)$$

جیسا کہ حجم اختیاری (Arbitrary) ہے۔ تکمیل صفر ہوگا۔

$$\vec{v} \cdot B = 0 \quad (15.48)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (15.49)$$

3. فیراڈے کا مالے (Induction) کا کلیہ

$$\oint E \cdot dl = \frac{d\phi_B}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_s B \cdot ds \quad (15.50)$$

$$= - \int_s \frac{\partial B}{\partial t} ds \quad (15.51)$$

اسٹوک تھیورم کے متعلق

$$\oint E \cdot dl = \int_s (\vec{v} \times E) \cdot ds \quad (15.52)$$

$$\therefore \int_s (\vec{v} \times E) \cdot ds = - \int_s \frac{\partial B}{\partial t} \cdot ds \quad (15.53)$$

جیسا کہ یہ مساوات تمام سطحوں کے لیے درست ہے۔ تب

$$\vec{v} \times E = - \frac{\partial B}{\partial t} \quad (15.54)$$

$$\therefore \text{Curl } E = - \frac{\partial B}{\partial t} \quad (15.55)$$

$$i \left[\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right] + j \left[\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] + k \left[\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] \quad (15.56)$$

$$= - \frac{\partial}{\partial t} [iB_x + jB_y + kB_z] \quad (15.57)$$

$$\therefore \left[\frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial z} \right] = - \frac{\partial B_x}{\partial t} \quad (15.58)$$

$$\left[\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] = - \frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (15.59)$$

$$\left[\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] = - \frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (15.60)$$

4. امپیر (Ampere) کا کلیہ $\oint B \cdot dl = \mu_0 i$

اسٹوک تھیورم کو استعمال کرنے پر

$$\oint B \cdot dl = \int_s (\vec{\nabla} \times B) \cdot ds \quad (15.61)$$

$$\int_s (\nabla \times B) \cdot ds = \mu_0 \int_s j \cdot ds \quad (15.62)$$

$$\vec{\nabla} \times B = \mu_0 j \quad (15.63)$$

$$\vec{\nabla} \times B = \mu_0 \left[j + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right] \quad (15.64)$$

($j + \partial t$) کی جگہ $\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + j$ کو تبدیل کرنے پر ہمیں حاصل ہونے والی مساوات

$$\vec{\nabla} \times B = \mu_0 \left[j + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right] \quad (15.65)$$

15.6 مکس ویل کی موجی مساوات (یا) برقی مقناطیسی موجوں کی مساوات

(Maxwell's Wave Equations (or) Equation of Electromagnetic Waves)

مکس ویل کی برقی مقناطیسی مساوات کو متجانس (Homogeneous)، ہم سمت (Isotropic) ذو برقیہ واسطہ (جس میں برقی خرمی اسپیس بھی شامل ہے جس کی اجازیت $\epsilon = \epsilon_0$ ہے) ذو برقیہ واسطہ برقی روکے لیے لامتناہی مزاحمت فراہم کرتا ہے اور اس موصلیت صفر ہوتی ہے۔ یعنی $j=0$ ، متجانس ہم سمت مادہ میں بار کی حجمی تقسیم نہیں ہوتی ہے۔ اس لیے بار کی کثافت ρ صفر ہوتی ہے۔ لہذا

$$j = 0, \rho = 0, D = K\epsilon_0, E = \epsilon E, H = \mu H \quad \text{اور} \quad B = \mu_0 \mu_r H$$

لہذا ذو برقیہ کے لیے مکس ویل کی مساوات ہوگی:

$$\vec{\nabla} \cdot E = 0 \quad (15.66)$$

$$\vec{\nabla} \cdot B = 0 \quad (15.67)$$

$$\vec{\nabla} \times E = - \frac{\partial B}{\partial t} \quad (15.68)$$

$$\vec{\nabla} \times B = \mu \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \quad (15.69)$$

(a) ہمدوبرقیہ واسطہ سے موج کی اشاعت کی مساوات کو حاصل کرنے کے لیے مساوات (15.68) اور (15.69) سے E کو حذف کر کے حاصل کر سکتے ہیں۔

مساوات (15.69) کا کرل (Curl)

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times B = \vec{\nabla} \times \mu \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} = \mu \epsilon \left[\vec{\nabla} \times \frac{\partial E}{\partial t} \right]$$

(∴ واسطہ میں یہ مستقل (Constant) ہوں گیں ε اور μ ∴)

$$= \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times E)$$

مساوات (15.67) سے $\vec{\nabla} \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$

$$= \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial B}{\partial t} \right)$$

$$\therefore \vec{\nabla} \times E = -\frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

$$= \mu \epsilon \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times B = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \quad (15.70) \quad \text{تب}$$

ہم جانتے ہیں کہ $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times B = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot B - \nabla^2 B)$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times B = \vec{\nabla}(0) - \nabla^2 B$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times B = -\nabla^2 B \quad (15.71)$$

$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times B$ قیمت کو مساوات (15.70) کو (15.71) میں درج کرنے پر

$$-\nabla^2 B = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 B = \mu \epsilon \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \quad (15.72)$$

اسی طرح مساوات (15.68) کے ذریعہ ہم حاصل کر سکتے ہیں

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times E = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial B}{\partial t} \right)$$

کو دو جانب کر ل کو لیے پر (15.68) مساوات

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times E = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times E)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times E = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (15.73)$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times E = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot E - \nabla^2 E)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times E = \vec{\nabla} (0) - \nabla^2 E \quad (15.74)$$

$$-\nabla^2 E = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 E = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (15.75)$$

رفتار موج (Wave Velocity):

مساوات (15.72) اور (15.75) برقی میدان E اور مقناطیسی میدان B کے زماں و مکاں کے تغیر کو بتلاتی ہیں۔ انہیں B اور E کی موجی مساوات کہتے ہیں۔ یہ مساواتیں موجی حرکت کی تفرقی مساواتوں کی عمومی شکل ہیں۔ عمومی موجی حرکت کی مساوات کو اس طرح ظاہر کرتے ہیں۔

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (15.76)$$

جہاں V موج کی رفتار اور y اس کا حیثہ (Amplitude) ہے۔ مساوات (15.75) اور (15.76) کا تقابل کرنے پر پتہ چلتا ہے کہ اور μ اور ϵ کا ایک ہی مفہوم ہیں۔ جیسا کہ $(\frac{1}{N^2})$ تب اس سے معلوم ہونا ہے کہ B اور E میں تغیر ہو رہا ہے اور متجانس و ہم سمتی واسطے میں اس کی اشاعت ہو رہی ہے جس کی رفتار ہے۔

$$\frac{1}{V^2} = \mu \epsilon \quad (15.77)$$

$$V^2 = \frac{1}{\mu \epsilon} \quad (15.78)$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \quad (15.79)$$

جہاں μ اور ϵ واسطہ کی اجازیت (Permeability) اور Permittivity ہے اس لیے برقی سمتیہ E اور مقناطیسی میدانی

سمتیہ B کی اشاعت فضا میں ہو رہی ہے۔ موجی مساوات کے لحاظ سے رفتار $\frac{1}{\sqrt{(\mu_0 \epsilon_0)}}$ ۔ یہ موجیں برقی مقناطیسی کھلاتی ہیں۔

$$V = \frac{1}{\sqrt{(\mu_0 \epsilon_0)}}$$

$$\mu_0 = 4 \times 10^{-7}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4} \pi \times 9 \times 10^9 \quad \text{یا} \quad \frac{1}{4} \pi \epsilon_0 = 9 \times 10^9$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{(4\pi \times 10^{-7}) \times (1/4 \pi 9 \times 10^9)}} = \sqrt{(9 \times 10^{16})} = 3 \times 10^8 \text{ m/sec}$$

اس طرح E اور H کے تغیر کی اشاعت کی رفتار روشنی کی رفتار کے مساوی ہوتی ہے۔

مساوات (15.72) اور (15.75) بتلاتی ہے کہ موجی اشاعت سے ابعادی ہوتی ہے اور اس موج میں مقناطیسی میدان اور برقی میدان کا دوری تغیر ہوتا رہتا ہے۔ اس لیے اس برقی مقناطیسی موج کہتے ہیں مکس ویل اس موج کے بارے میں کہتا ہے کہ برقی مقناطیسی موج کی اشاعت سے ابعادی ہوتی ہے اور ثابت کیا کہ یہ موجیں روشنی کی رفتار سے سفر کرتی ہیں۔

ڈائی الیکٹرک (ذو برقی) کا انعطاف نما (Refraction Index of Dielectric):

$$V = \frac{1}{\sqrt{(\mu \epsilon)}} \text{ (ذو برقی واسطہ (غیر موصل واسطے) میں برقی مقناطیسی موج کی رفتار V ہوگی)}$$

جہاں μ مادہ کی (Permeability) اجازیت اور ϵ (Permittivity) ہے اسی طرح خلائی میں برقی مقناطیسی موج کی رفتار یہ

$$C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \text{ ہوگی۔}$$

$$n \text{ اور } n \text{ مادہ کا انعطاف نما ہوگا۔} \quad n = \frac{c}{v} = \frac{\sqrt{1/\mu_0 \epsilon_0}}{\sqrt{1/\mu \epsilon}} = \frac{\sqrt{\mu \epsilon}}{\sqrt{(\mu_0 \epsilon_0)}}$$

زیاتر ذو برقیہ کے لیے $\mu = \mu_0$ ہوتا ہے تب

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} = \sqrt{K}$$

جہاں K مادہ کا ذو برقیہ مستقل ہے۔

اس طرح مادہ کا انعطاف نما مساوی ہوتا ہے۔ ذو برقیہ مستقل کے مربع کے مساوی ہوتا ہے۔

واسطے کے انعطاف نما کے لحاظ سے ذو برقیہ واسطے میں برقی مقناطیسی موجوں کی رفتار

Velocity of Electromagnetic waves in Dielectric medium in term of Refractive)

(Index of the Medium)

$$C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \text{ خلاء میں برقی مقناطیسی موجوں کی رفتار}$$

$$C_m = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \text{ ذو برقی واسطے میں}$$

$$\epsilon = k \epsilon_0 \text{ اور } \mu = \mu_r \text{ جہاں}$$

$$C_m = \frac{1}{\sqrt{(\mu_r \mu_0 k \epsilon_0)}} = \frac{1}{\sqrt{(\mu_r k) \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\mu_r k}} \times \frac{1}{1/C} = \frac{C}{\sqrt{\mu_r k}} = \frac{C}{n}$$

جہاں n واسطے کا انعطاف نما۔

15.7 ہمدار مستوی موجیں (Uniform Plane Waves)

ہموار مستوی موجیں دراصل موجی مساوات کی خاص شکل ہے۔ جس کے لیے برقی میدان y اور z پر منحصر نہیں ہوتا اور یہ

صرف x اور t کا تفاعل ہوتا ہے۔ اس طرح کی موج کو ہموار مستوی موج (Uniform Plane Wave) کہتے ہیں۔ مستوی موج کو ہم

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \text{ اس طرح لکھ سکتے ہیں۔}$$

E کے اجزاء کے لحاظ سے

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (15.74)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad (15.75)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x^2} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \quad (15.76)$$

ایسے علاقہ میں جہاں کثافت میں تبدیلی نہیں ہوتی یعنی $\rho = 0$ کے لیے

$$\vec{\nabla} \cdot E = 0 \quad (15.77)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (15.78)$$

ایسی ہموار مستوی موج جس میں E کا انحصار Y اور Z پر نہیں ہوتا ہے۔ اس کے لیے $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ اور $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ = 0 ہوتا ہے۔ مستقل E_x

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad (15.79)$$

مساوات (15.79) بتلاتی ہے کہ x-سمت میں E_x میں تغیر نہیں ہوتا ہے اس لیے ہموار مستوی موج جس کی x-سمت میں

اشاعت ہوتی ہے اس میں E کی اجزا نہیں یا E پر مشتمل حصہ x-سمت میں نہیں ہوتے ہے۔ اسی طرح H یا H کے اجزا یا H یا B پر مشتمل حصہ x-سمت میں نہیں ہوتے ہے۔ اس لیے ہمواری مستوی برقی مقناطیسی موجیں عرض موجیں ہوتی ہیں اور E اور H کی سمت، سمت اشاعت کے عمودوار ہوتی ہیں۔

15.8 حل شدہ مثالیں (Solved Problems)

حل شدہ مثال 1

ایک برقی مقناطیسی موجی کی تعداد $f = 3.0 \text{ MHz}$ ہے۔ یہ موجی خلا کے اندر غیر مقناطیسی واسط میں مختاری (permittivity) μ سے سفر کر رہی ہیں۔ اضافہ موجی طول کو معلوم کیجیے۔

حل: رفتار $C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \leftarrow \frac{C}{\sqrt{\mu \epsilon}} = v$ یا $\lambda = v/f$

$$\lambda^1 = \frac{1}{f} \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}} \quad \text{اور} \quad \lambda = \frac{C}{f} = \frac{1}{f} \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

$$\lambda^1 - \lambda = \frac{1}{f} \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}} - \frac{1}{f} \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

$$= \frac{1}{f} \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} - 1 \right) = \frac{C}{f} \left(\frac{2}{\sqrt{\epsilon_r}} - 1 \right)$$

$$\lambda^1 - \lambda = \Delta \lambda = \frac{3 \times 10^6}{3 \times 10^6} \left(\frac{1}{\sqrt{4}} - 1 \right) = -50 \text{ m}$$

$$\lambda \Delta = -50 \text{ m}$$

موجی طول 50m کم سے خلا میں سفر کرتی ہیں۔

15.9 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- ڈائینور جینس اور گردشی کثافتوں (کرل) دونوں کے لیے عبارت دونوں بنیادی میدانوں ویکٹروں کے لیے کس ویل کے مساواتیں

$$\text{div} E = \rho / \epsilon_0$$

$$\text{div} B = 0$$

$$\text{Curl} E = \frac{-\partial B}{\partial t}$$

- بقائے بار کے کلیہ کے مطابق کسی نظام کا کل برقی بار مستقل رہتا ہے۔ یعنی بار ہی نہ ہی پیدا ہوتا ہے اور نہ فنا ہوتا ہے اور وہ مساوات جو اس کلیہ کی وضاحت کرتی ہے استمراری مساوات (Continuity Equation) کہلاتی ہے۔

- ہم جانتے ہیں کہ موصل میں برقی رومقناطیسی میدان پیدا کرتی ہے کس ویل (Maxwell) نے ثابت کیا کہ خلاء میں یا ذو برقیہ (Dielectric) میں برقی میدان کی تبدیلی مقناطیسی میدان پیدا ہوتا ہے۔ برقی میدان میں تبدیلی مساوی ہوتی ہے برقی رو کے

جو برقی میدان میں بہتی ہے اور جو ایسا ہی مقناطیسی دائر وی پیدا کرتی ہے جیسا کہ عام ایصابی رو (Conduction Current) پیدا کرتی ہے اسے نقل رو (Displacement Current) کہتے ہیں۔

- برقی اور مقناطیسی کے بنیادی کلیے کے ذریعے مکس ویل نے 1862ء میں چار مساواتیں کو معلوم کیا ہے۔ یہ مساوات ہی مکس ویل مساواتیں کہلاتے ہیں۔ تکمیلی شکل میں مکس ویل مساواتیں

$$\oint E ds = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\oint B \cdot ds = 0$$

$$\oint E \cdot dl = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

$$\oint B \cdot dl = \mu_0 \left(j + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right)$$

- تفرق شکل میں مکس ویل مساواتیں کو ماخذ کثافت (ڈائیورجنس اور گردشی کثافتوں (کرل)) دونوں کے لیے عبادت دونوں بنیادی میدانوں کے لیے ہیں۔

$$\text{div} E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{div} B = 0$$

$$\text{Curl} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\text{Curl} B = \mu_0 \left(j + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right)$$

- مکس ویل کی برقی مقناطیسی مساوات کو متجانس (Homogeneous)، ہم سمت (Isotropic) ذو برقیہ واسطہ (جس میں برقی خرمی اسپیس بھی شامل ہے جس کی اجازیت $\epsilon = \epsilon_0$ ہے) ذو برقیہ واسطہ برقی رو کے لیے لا متناہی مزاحمت فراہم کرتا ہے اور اس موصیلت صفر ہوتی ہے۔ یعنی $j=0$ ، متجانس ہم سمت مادہ میں بار کی حجی تقسیم نہیں ہوتی ہے۔ اس لیے بار کی کثافت

$$\rho = 0, j = 0, D = K\epsilon_0, E = \epsilon E, H = \mu H \quad \text{اور} \quad B = \mu_0 \mu_r H$$

لہذا ذو برقیہ کے لیے مکس ویل کی مساوات ہوگی۔ $\vec{\nabla} \cdot E = 0$

$$\vec{\nabla} \cdot B = 0$$

$$\vec{\nabla} \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times B = \mu \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}$$

- ہموار مستوی موجیں دراصل موجی مساوات کی خاص شکل ہے۔ جس کے لیے برقی میدان y اور z پر منحصر نہیں ہوتا اور یہ صرف x اور t کا تفاعل ہوتا ہے۔ اس طرح کی موج کو ہموار مستوی موج (Uniform Plane wave) کہتے ہیں۔ مستوی

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

15.10 کلیدی الفاظ (Keywords)

مقناطیسی نفوذ (magnetic flux): کسی بھی دیئے گئے رقبے پر مقناطیسی نفوذ Φ اس رقبے سے گزرنے والی مقناطیسی خطوط قوت کی تعداد یا یہ کسی دیئے گئے رقبے میں جملہ مقناطیسی میدان کی پیمائش ہوتی ہے
گیلو انومیٹر: برقی دور میں قلیل مقدار میں برقی رو کی پیمائش و ظاہر کرنے کے لیے استعمال ہونے والا آلہ ہے
امالی برقی رو: تبدیل ہوتے ہوئے مقناطیسی میدان کے ذریعے کسی موصل میں پیدا ہونے والی برقی رو امالی برقی رو کہلاتی ہے

15.11 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

15.11.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. امیپر کا کلیہ $\oint B \cdot dl =$
2. مکس ویل کی مساوات $\nabla \cdot E =$
3. مکس ویل کی دوسری مساوات $\nabla \cdot B =$
4. فیراڈے کا کلیہ $\oint E \cdot dl =$ ہے۔
5. مکس ویل کی چوتھی مساوات $\text{Curl } B = \nabla \times B =$ ہے۔
6. گاؤس کا مقناطیسیت کا کلیہ $\oint B \cdot ds$ ہوتی ہے۔
7. استمراری مساوات (Continuity equation) سے کیا مراد ہے۔
8. نقل رو (Displacement Current) سے کیا مراد ہے۔
9. ڈائی الیکٹرک سے کیا مراد ہے۔

15.11.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. مکس ویل کی مساوات کیا ہے؟
2. نقل رو (Displacement current) پر ایک نوٹ لکھیے۔
3. رفتار موج (Wave Velocity) پر نوٹ لکھیے۔
4. ہموار مستوی موجیں سے کیا مراد ہے۔ اس کی مساوات کو حاصل کیجیے۔

5. برقی اور مقناطیسی کے بنیادی کلیہ کو بیان کریں۔

15.11.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. مکس ویل کی مساواتیں تفرق شکل میں اخذ کیجیے۔ یہ ثابت کریں کہ برقی مقناطیسی موجیں کی ہیت (Phase) میں برقی اور مقناطیسی کی کثافت مساوی ہوگی۔
2. مکس ویل کی مساواتیں تفرق اور تکمیل شکل میں لکھیے۔ برقی مقناطیسی موجیں کے ذریعے توانائی رفتار کی مساوات اخذ کیجیے۔
3. نقل رو کو بیان کریں۔ مکس ویل کی مساواتیں کی مدد سے نقل رو اور ایصال رو (Conduction current) کی مقداریں مساوی ہوتے ہیں ثابت کیجیے۔
4. برقی میدان میں مکس ویل کی مساواتیں لکھیے اور ہر مساوات کی وضاحت کریں اور برقی مقناطیسی موجوں کی عرضی فطرت پر نوٹ لکھیے۔

15.11.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. برقی مقناطیسی موجی $E = E_0 \cos(kx - \omega t)$ سے خلا میں سفر کر رہی ہیں۔ یہ دکھائیں کہ نفوذ کثافت $I = \frac{c\epsilon_0}{2} E_0^2$

15.12 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Bleaney, B I, and B Bleaney. Electricity and Magnetism. Oxford: Oxford University Press, 2013.
2. Duffin, W J. Electricity and Magnetism. Cottingham: W.J. Duffin, 2001.
3. Gaur, R.K. & Gupta, S.L. Engineering Physics. Dhanpat Rai Publication.
4. Plonsey, R. & Collin, R.E. Principles and Application of Electromagnetic Field. Tata Mc Graw Hill Publication. New Delhi.
5. Purcell, Edward M, and David J. Morin. Electricity and Magnetism. , 2013.
6. Resnic, R. & Halliday, D. Physics Part-I & Part-II. Wiley Eastern Pvt. Ltd. New Delhi.
7. Resnick, Robert, David Halliday, and Kenneth S. Krane. Physics. New York: Wiley, 2002.
8. Schuh, Mari C. Magnetism. Minneapolis, MN: Bellwether Media, 2008.

اکائی 16- پوائنٹنگ ویکٹر

(Pointing Vector)

اکائی کے اجزا

تمہید	16.0
مقاصد	16.1
پوائنٹنگ ویکٹر	16.2
پائٹنگ ویکٹر کی مثال	16.3
موصلیت و سطح میں برقی مقناطیسی موجیں۔ جلدی گہرائی	16.4
سفر کرنے والی امواج	16.5
حل شدہ مثالیں	16.6
اکتسابی نتائج	16.7
کلیدی الفاظ	16.8
نمونہ امتحانی سوالات	16.9
معروضی جوابات کے حامل سوالات	16.9.1
مختصر جوابات کے حامل سوالات	16.9.2
طویل جوابات کے حامل سوالات	16.9.3
حل شدہ جوابات کے حامل سوالات	16.9.4
مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں	16.10

16.0 تمہید (Introduction)

برق سکونی میدانوں میں توانائی کے رشتوں پر بحث کرتے وقت ایک مخصوص عمل پر غور کرنے سے ہم برقی میدان کے ساتھ ایک توانائی کثافت منسلک کرنے میں کامیاب ہوئے تھے۔ اس سلسلہ میں مخصوص عمل چارجوں کہ اکٹھا کرنا تھا جس کے دوران کام ہوا تھا اور میدان میں تبدیلیاں واقع ہوئی تھیں۔ کام اور توانائی کی رقموں کا توازن کرنے سے حرکیاتی معنی میں آزاد توانائی کی کثافت پانا ممکن ہوا۔ اس سے قبل کہ ہم برقی مقناطیسی میدان کے لیے ایک عام رشتوں کو پانے کے لیے رجوع کریں۔ آئیے ہم ایک مقناطیسی میدان کو قائم کرنے کے لیے اسی طرح کے عمل پر غور کریں۔

مندرجہ اکائی میں ہم بحث کی جا چکی ہے جب حد سے مبداء میں برقی مقناطیسی توانائی کی مقدار بڑھ جاتی ہے تو وہ نہ تو ایک جگہ ساکن ٹھہر سکتی ہے اور نہ ہی محض ضائع ہو جاتی ہے۔ وہ صرف ایک موج کے طور پر سفر کر سکتی ہے۔ یعنی کہ وہ منتشر (Dissipate) نہ ہو جائے۔ یہ بتانے کے لیے کہ واقع یہی وہ عمل ہے جو مکس ویل کی مساوات پیش کرتی ہے، ہم ان سے سفر کرنے والے موج کی مساواتوں کو اخذ کریں گے۔

16.1 مقاصد (Objectives)

یہ اکائی میں مکس ویل کی مساوات کے حل کا جائزہ لیتی ہے۔ جس میں برقی اور مقناطیسی میدان کے سمتیے ایک محدود رفتار سے سفر کرنے والی موج کے حیٹوں کی نمائندگی کرتی ہے۔

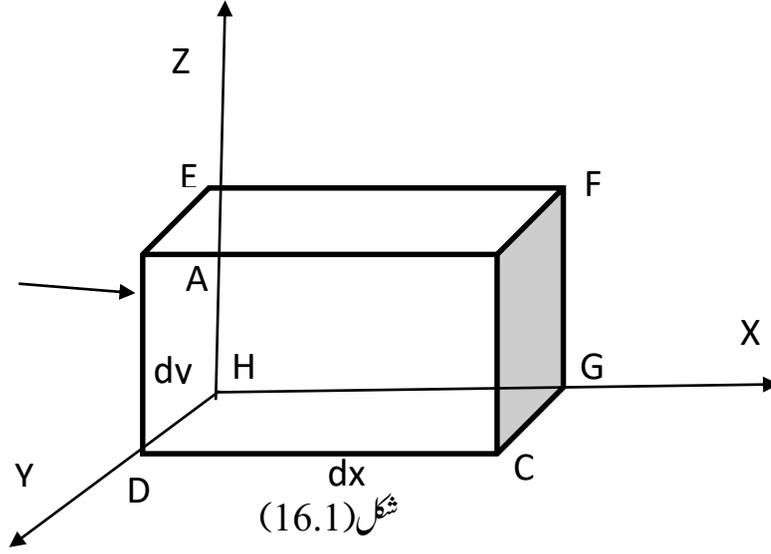
16.2 پوائنٹنگ ویکٹر (Pointing Vector)

موج کی اشاعت کا ایک اہم پہلو ہے خلاء میں توانائی کا بہاؤ جیسے جیسے موج خلاء میں ایک سطح میں گزرتی ہے، ویسے ویسے توانائی بھی منتقل ہو جاتی ہے۔ کسی بھی لمحے سطح کے ایک ہر ایک اکائی رتبے میں طاقت کا بہاؤ watt/m^2 یا $\text{Joule/m}^2 \times \text{sec}$ واقع ہوگا اور اس کی علامت \vec{P} سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ حاصل ضرب $\vec{P} \cdot A$ وہ طاقت ہے جو ایک رقبہ A سے گزرتی ہے۔ لہذا ایک برقی مقناطیسی موج میں توانائی کے بہاؤ کی شرح اکائی رقبے کو سمتیے ρ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ اس کو پوائنٹنگ سمتیے کے نام سے جانا جاتا ہے۔ کیوں کہ جان ہنری پوائنٹنگ نے جس سے پہلے اس کی خصوصیات کا پتہ چلایا تھا۔ جب نفوذ (flux) کے مضبوط (سمتیہ \vec{P}) کھینچے جاتے ہیں تو یہ برقی مقناطیسی توانائی کے بہاؤ کو ظاہر کرتے ہیں۔

$$\rho = \frac{1}{\mu_0} (E \times B) \text{ (or)} (E \times H)$$

فرض کیجیے جو کہ ایک مستطیل نما مستواری پمپ (Rectangular parallelepiped) کے سطح dx, dy, dz جیسے کی شکل (16.1) میں دکھایا گیا ہے۔ مستطیل نما کا حجم $dv = dx dy dz$

مشق (Derivation):



فرض کیجیے کہ مستطیل نما کے $-x$ محور علاقے سے جس شرح سے برقی مقناطیسی توانائی بہتی ہے۔ تب توانائی کے پھیلاؤ $dydz$ عمودی رقبہ کی سمتیہ میں ہوتی ہیں۔ یہ حجم پر برقی مقناطیسی توانائی U اور توانائی کی تبدیلی کی شرح $\frac{\partial U}{\partial t}$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = - \oint_s P \cdot ds \quad (16.1)$$

منفی (-) یہ ظاہر کرتا ہے کہ توانائی اس حجم میں داخل ہو رہی ہیں۔

$$\oint_s P \cdot ds = - \frac{\partial U}{\partial t} \quad (16.2)$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$(a) \text{ برقی میدان } E \text{ پر توانائی کثافت فی اکائی حجم } U_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \text{ برقی توانائی}$$

$$(b) \text{ مقناطیسی میدان } H \text{ پر توانائی کثافت فی اکائی حجم } U_B = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \text{ مقناطیسی توانائی}$$

یہ برقی اور مقناطیسی توانائیوں کا مجموعہ (sum) ہوتا ہے۔

$$\text{جملہ توانائی} \quad U = U_E + U_B$$

$$U = \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right) \quad (16.3)$$

لیکن اگر توانائی اس علاقے سے باہر نکل رہی ہے تب لازمی طور پر اس علاقے میں برقی مقناطیسی توانائی میں متناظر نقصان واقع ہونا

چاہیے تب حجم dv

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right) dv \quad (16.4)$$

حجم v کے لیے توانائی کی کمی کی شرح (rate)

$$\begin{aligned} -\frac{\partial U}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right) dv \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} v \int_v \left[\frac{1}{2} \epsilon_0 E \cdot E + \frac{1}{2} \mu_0 H \cdot H \right] dv \\ &= \int_v - \left[\epsilon_0 E \left(\frac{\partial E}{\partial t} \right) + \mu_0 H \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right) \right] dv \end{aligned} \quad (16.5)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times H &= j + \frac{\partial D}{\partial t} \quad \text{مکس ویل کی مساوات سے} \\ \vec{\nabla} \times H &= j \end{aligned}$$

موجیں کی اشاعت (Propagation) غیر موصل واسط میں سفر کر رہی ہیں۔ $\vec{\nabla} \times H = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\vec{\nabla} \times H}{\epsilon_0} \quad (16.6)$$

$$\vec{\nabla} \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} \quad \text{اسی طرح}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla} \times E}{\mu_0} \quad (16.7)$$

مساوات (16.6) اور (16.7) کو مساوات (16.5) میں درج کرنے پر

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = \int_v - \left[\epsilon_0 E \left(\frac{\vec{\nabla} \times H}{\epsilon_0} \right) - \mu_0 H \left(\frac{\vec{\nabla} \times E}{\mu_0} \right) \right] dv \quad (16.8)$$

مساوات (16.8) کو ہم اس طرح لکھیے۔

$$\begin{aligned} -\frac{\partial U}{\partial t} &= \int_v [H \cdot (\vec{\nabla} \times E) - E \cdot (\vec{\nabla} \times H)] dv \\ -\frac{\partial U}{\partial t} &= \int_v \vec{\nabla} \cdot (E \times H) dv \end{aligned} \quad (16.9)$$

$$| \because \vec{\nabla} \cdot (A \times B) = B \cdot (\vec{\nabla} \times A) - A \cdot (\vec{\nabla} \times B)$$

یعنی گاؤس تھیورم کا غیر مرکوزیت (Gauss Theorem of Divergence) کو استعمال کرتے ہوئے حجم پر تکمیل کیا گیا ہے۔ اس کے لیے ہم یہاں اس حجم کو گھیرنے والی سطح پر تکمیل (Integration) کو اس کی جگہ رکھ سکتے ہیں۔ اس لیے مساوات (16.9) ذیل کی مساوات بن جائے گی۔

$$= \oint_s (E \times H) \cdot n ds \quad (16.10)$$

جہاں 'n' سطح پر اکائی ویکٹر

مساوات (16.2) اور (16.9) کو مساوی کیا جائے۔

$$\oint_s P \cdot ds = \oint (E \times H) \cdot ds \quad (16.11)$$

چوں کہ مساوات (16.11) کی دونوں جانب سطحی تکملے ہیں جو خلاء (Space) کے ایک اختیار کردہ مان لیے گئے علاقے کو گھیرے ہوئی سطح پر پھیل رہے ہیں۔ لہذا ہمیں پوائنٹنگ سمتیہ (Pointing Vector) اس طرح حاصل ہوتا ہے۔

$$P = (E \times H)$$

$$P = EH \sin \theta$$

$$P = EH \quad (\because \theta = 90^\circ \Rightarrow \sin 90^\circ = 1)$$

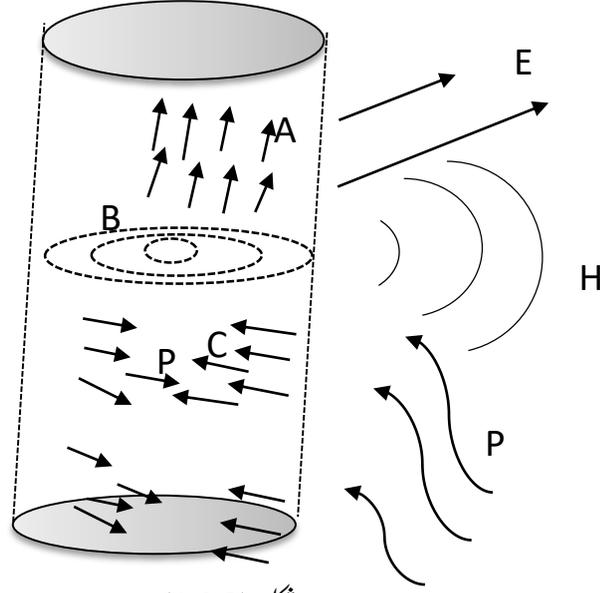
$$\vec{P} = \frac{1}{2\mu} (\vec{E}_m \times \vec{B}_m) \quad \text{یا}$$

اور اس طرح موجی حرکت میں طاقت کے بہاؤ کو حاصل کیا جاتا ہے اور یہ عمودی طور پر موصل یا غیر موصل خطوں علاقوں میں برقی مقناطیسی توانائی کے بہاؤ کے لیے درست (Valid) ہوتا ہے۔

16.3 پوائنٹنگ ویکٹر کی مثال (Example of Pointing Vector)

اس پوائنٹنگ ویکٹر کے میدان کے ایک آسان مثال کے طور پر برقی رولے جانے والے ایک لمبے استوانوی موصل پر غور کیجیے۔ جیسا کہ شکل (16.2) میں بتایا گیا ہے ایک استوانوی موصل میں ایک قائم (Steady) برقی رولے اوپر کی جانب بہ رہی ہے۔ اس شکل میں موصل کے سامنے کا نصف حصہ کاٹ کر دکھایا گیا ہے۔ موصل کے اندر برقی میدان متناظر طور پر (Correspondingly) یکساں اور اوپر کی جانب رخ کیا ہوا ہے۔ موصل کے باہر برقی میدان کافی قوی ہے۔ جس کا ماسی (Tangential) جزو کے کسی اور حصے پر ختم (Terminate) کے متناسب ہے۔ موصل کے اندر پوائنٹنگ ویکٹر $\vec{E} \times \vec{H}$ ہے اور نصف قطری کے اندر کی جانب ہے اور جیسے جیسے یہ موصل کے اندر گھستا ہے کمزور پڑتا جاتا ہے۔

پوائنٹنگ میدان کی بڑھتی ہوئی کمزوری توانائی کے فرج ہونے کو ظاہر کرتی ہے۔ توانائی موصل کی سطح سے داخل ہوتی ہے اور اس کے مرکز کی جانب بہتی ہے۔ اس توانائی کو موصل میں مزاحمت سے ہونے والے نقصان کی پابجائی کے لیے استعمال کیا جاتا ہے اور جیسے جیسے یہ موصل کے مرکز تک پہنچتی ہے اس توانائی کا اندرونی بہاؤ نصف ہو جاتا ہے۔ موصل کے باہر پوائنٹنگ میدان بنیادی طور پر موصل کے متوازی ہے جو یہ ظاہر کرتا ہے کہ توانائی موصل کی سمت میں گزر رہی ہے (جو کہ توانائی کے لیے ایک رہنما (guide) کا کام کرتا ہے)۔ لیکن بیرونی میدان میں خاصی (Sufficient) حد تک نصف قطری جز موجود ہے۔ جو موصل میں توانائی کے نقصان کی پابجائی کے لیے توانائی کا ایک اندرونی بہاؤ عمل میں لاتا ہے۔ صرف ایک کامل (Perfect) موصلیت رکھنے والے موصل کے گرد ہی پوائنٹنگ میدان پوری طور پر موصل کے متوازی رہ سکتا ہے۔



شکل (16.2)

پائٹنگ ویکٹر اور سہاقت ہی موج کے سفر کے سمت کو خصوصی طور پر ملاحظہ کیجیے۔ اگر دائیں ہاتھ کی انگلیاں \vec{E} سے \vec{H} کی جانب موڑ لی جائیں تب انگوٹھے موج کے سفر کی سمت کو بتاتا ہے۔ اس بہت ہی اہم تعلق کو آسانی کے ساتھ ذہن نشین کر لیا جاسکتا ہے۔ اگر $\vec{E} \times \vec{H}$ کو مضبوطی سے دھیان میں رکھا جائے۔ یہ واقع ہے کہ ان ویکٹریں ترتیب کی الٹ (یعنی $\vec{H} \times \vec{E}$) تباہ کن (runinous) ہو سکتا ہے۔ لیکن یادداشت کی اس طرح مدد کی جاسکتی۔ یہ بات پیش نظر رہے کہ انگریزی حروف تہی میں \vec{E} پہلے آتا ہے \vec{H} بعد میں۔

16.4 موصلیت و اسطح میں برقی مقناطیسی موجیں۔ جلدی گہرائی

(Electromagnetic Waves in Conducting Media – Skin Depth)

ہم جانتے ہیں کہ مکس ویل مساواتیں

$$\text{div}D = \rho, \text{div}B = 0 \quad (16.12)$$

$$\text{Curl}H = J + \frac{\partial H}{\partial t} \text{ اور } \text{Curl}E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (16.13)$$

جہاں $J = \rho$ و کثافت

غور کریں متجانس آکسوٹراپک موصل و اسطح میں سرایت پذیری (Permeability) (μ) مختاری (Permittivity) (ϵ) اور

موصلیت σ ہیں تب

$$J = \sigma E \quad D = \epsilon E \quad \text{اور} \quad B = \mu H$$

موصلیت و اسطح میں $\rho = 0$ ہو تب مکس ویل مساواتیں

$$\nabla E = 0, \nabla H = 0, \nabla \times H = \sigma E + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \quad \text{اور}$$

$$\nabla \times E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \quad (16.14)$$

کرل (Curl E) کی مساوات

$$\vec{\nabla} \times E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \quad (16.15)$$

یہ مساوات کو دائیں اور بائیں Curl لینے پر

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\nabla \times E) &= \vec{\nabla} \times \left(-\mu \frac{\partial H}{\partial t} \right) \\ &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times H) \\ (\because \nabla \times H &= \sigma E + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}) &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left[\sigma E + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right] \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times E) &= -\sigma \mu \frac{\partial E}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times E) &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot E) - \nabla^2 E \quad \text{ہم جانتے ہیں کہ} \\ &= \vec{\nabla} (0) - \nabla^2 E = -\nabla^2 E \\ \therefore -\nabla^2 E &= -\sigma \mu \frac{\partial E}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \\ \nabla^2 E &= \sigma \mu \frac{\partial E}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (16.16) \end{aligned}$$

اسی طرح

$$\nabla^2 H = \sigma \mu \frac{\partial H}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \quad (16.17)$$

مساوات (16.16) اور (16.17) یہ ظاہر کرتے ہیں کہ برقی میدان E اور H موجیں کی مساواتیں ہیں۔ اب ہم تقطیب شدہ مستوی برقی

مقناطیسی موجیں کی اشاعت z-سمتیہ اور x-سمتیہ پر E

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0, E = iE_x \text{ اور } H = jH \quad \text{تاکہ}$$

مساواتیں (16.16) اور (16.17) سے

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \sigma \mu \frac{\partial E_x}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (16.18)$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \sigma \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} \quad \text{اور}$$

$$E_x = E_0 e^{j\omega t} \quad \text{t کے ساتھ } E_x \text{ کی تبدیلی}$$

$$\text{اور } \frac{\partial E_x}{\partial t} = E_0 (j\omega) e^{j\omega t} = j\omega E_x$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 e^{j\omega t} = -\omega^2 E_x \quad (16.19)$$

مساوات (16.18) کو (16.19) میں درج کرنے پر

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial Z^2} = \sigma \mu j \omega E_x - \mu \epsilon \omega^2 E_x \quad (16.20)$$

$$\text{یا} \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial Z^2} - \sigma \mu j \omega E_x + \mu \epsilon \omega^2 E_x = 0$$

$$\text{یا} \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial Z^2} - (j \omega \sigma \mu - \omega^2 \mu \epsilon) E_x = 0 \quad (16.21)$$

مساوات (16.21) میں $j \omega \sigma \mu - \omega^2 \mu \epsilon$ کو γ شاعت مستقل لینے پر

$$\gamma^2 = j \omega \sigma \mu - \omega^2 \mu \epsilon \quad (16.22)$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial Z^2} - \gamma^2 E_x = 0 \quad (16.23)$$

یہ مساوات (16.23) E کے لیے موجی کی تفاعل (Wave Function) کہلاتی ہے۔

مساوات (16.23) کے حل کے لیے $-z$ سمتیہ میں موجی سفر کی مساوات

$$E_x = E_0 e^{-\gamma z} \quad (16.24)$$

$$\gamma = [j \omega \sigma \mu - \omega^2 \mu \epsilon]^{1/2} \quad \text{جہاں}$$

$$= \left[j \omega \sigma \mu \left(1 + \frac{j \omega \epsilon}{\sigma} \right) \right]^{1/2}$$

اچھی موصل کے لیے $\omega \epsilon / \sigma \ll 1$ لہذا

$$\gamma = 1 + j \left[\frac{\omega \mu \sigma}{2} \right]^{1/2} \quad (16.25)$$

اس قیمت سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ γ حقیقی اور (Imaginary) جز (part) ہے۔ یعنی $\gamma = \alpha + j \beta$

یہاں α حقیقی جز ہے اور تخفیف مستقلہ (Attenuation Constant) کہتے ہیں۔ β (Imaginary) جز ہے اور یہ موجی کی

ہیت کہتے ہیں یا ہیٹ مستقلہ کہتے ہیں۔

مساوات (16.25) سے

$$\alpha = \beta = \left[\frac{\omega \mu \sigma}{2} \right]^{1/2} \quad (16.26)$$

مساوات (16.25) کو مساوات (16.24) میں درج کرنے پر

$$E_x = E_0 \exp \left[-(1 + j) \sqrt{\left(\frac{\omega \mu \sigma}{2} \right)} \cdot z \right]$$

$$E_x = E_0 \exp \left[-\sqrt{\left(\frac{\omega \mu \sigma}{2} \right)} \cdot z \right] \exp. (-j \sqrt{\left(\frac{\omega \mu \sigma}{2} \right)} \cdot z) \quad (16.27)$$

مساوات (16.27) میں تخفیف فیکٹر (Attenuation factor) $\exp \left[-\sqrt{\left(\frac{\omega\mu\sigma}{2}\right)} \cdot z \right]$

اور ہیٹ فیکٹر (Phase factor) $\exp \left[-j\sqrt{\left(\frac{\omega\mu\sigma}{2}\right)} \cdot z \right]$

ہیٹ رفتار (Phase velocity): اچھی موصل میں موجی کی ہیٹ رفتار

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{[\omega\mu\sigma/2]^{1/2}} = \left(\frac{2\omega}{\mu\sigma}\right)^{1/2} \quad (16.28)$$

انعطافی اشاریہ (Refractive index): موصلیت و اسطیخ میں انعطافی اشاریہ

$$n = \frac{c}{v} = c \left(\frac{\mu\sigma}{2\omega}\right)^{1/2} \quad (16.29)$$

پینیٹریشن کی گہرائی یا جلدی گہرائی (Depth of Penetration (or) Skin Depth)

ہم دیکھتے ہیں کہ ایک موصلیت و اسطیخ میں ایک موجی تخفیف (attenuation)، تشکل کی لہذا اس موصل و اسطیخ میں موجی کی پینیٹریشن کو تلاش کرتے ہیں۔ یہی جلدی گہرائی (Skin Depth) پینیٹریشن کی گہرائی کہلاتا ہے۔ پینیٹریشن کی گہرائی (δ) کو اس طرح بیان کی جاتی ہے کہ موجیں تخفیف کی گہرائی، اس موجیں کی پہلے پینیٹریشن کی طاقت کا $\frac{1}{e_0}$ گنا ہوتا ہے۔

مساوات (16.24) سے

$$E_x = E_0 e^{-\gamma z} = E_0 e^{-\alpha z}$$

$$\frac{E_x}{E_0} = \frac{1}{e} \text{ تب } \alpha z = 1 \text{ اگر}$$

اس طرح $z = 1/\alpha$ نقل مکان سفر کرتی ہے اور $Z = 0$ کی قیمت پر حیث $1/e$ گنا زوال پذیر ہوتا ہے۔ اس طرح نقل مکان پینیٹریشن

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\left(\frac{2}{\omega\mu\sigma}\right)} \quad \text{کی گہرائی } (\delta) \text{ کی مساوی ہوتی ہے۔}$$

تعداد زیادہ ہو تو δ چھوٹی قیمت ہوگا۔ i.e. پینیٹریشن کم ہوگا۔ اچھے موصل کے لیے تعداد کی قیمت 10^4 cycle ہے اور جلدی کی

نقل مکان کی قیمت $0.667 \times 10^{-3} m$ ہوتی ہے اور زیادہ تعداد پر روموصل کے اسطیخ پر سفر کرتی ہے۔

16.5 سفر کرنے والی امواج (Travelling Waves)

اب ہم مکس ویل کی پہلی دو مساواتوں پر غور کریں گے۔ یہ مساوات میں E اور H دونوں موجود ہیں۔ ان میں پہلا قدم یہ ہوگا کہ ایک

متغیر کو ساقط کرنے کے لیے دونوں مساواتوں کو ایک ساتھ حل کیا جائے۔ یہ فرض کرتے ہیں کہ واسطہ (medium)

متجانس (Homogeneous) ہے جس میں کوئی بھرن (Charge) نہیں ہے اور کوئی موصلیت (Conductivity) نہیں

ہے۔

مکس ویل کی پہلی دو مساواتیں ہوں گی۔

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{d\vec{H}}{dt} \quad (16.30)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{d\vec{E}}{dt} \quad (16.31)$$

مساوات (16.31) کی دونوں جانب کا کرل (Curl) لینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu \nabla \times \frac{d\vec{H}}{dt} \quad (16.32)$$

مساوات کی دائیں جانب نوٹ کیجیے کہ کرل (Curl) جو فاصلے کے لحاظ سے ایک جزوی (Partial) تفرقہ (Derivative)

ہے، وقت کے لحاظ سے ایک جزوی تفرقہ (Partial Derivative) پر عمل (Operate) کرتا ہے۔ چوں کہ جزوی

تفرقہ (Partial Differentiation) کا درجہ (Order) سے کوئی فرق نہیں پڑتا۔

ہمیں تب یہ مساوات حاصل ہوتی ہے۔

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu \frac{d}{dt} (\nabla \times \vec{H}) \quad (16.33)$$

مساوات (16.32) سے حاصل کردہ H کے کرل (Curl) کی قیمت کو (16.33) سے درج کرنے پر

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu \frac{d}{dt} \left(\epsilon \frac{d\vec{E}}{dt} \right) = -\mu \epsilon \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} \quad (16.34)$$

ریاضیاتی تھیورم کی رو سے ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی سمتیے کا کرل (Curl) مساوی ہوتا ہے۔ اس سمتیے کے انشاع (Divergence) کے

ڈھلان (Gradient) اور اس سمتیے کے لاپلاشین (Laplacian) کے فرق کے لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \quad (16.35)$$

برقی میدان کا انشاع (Divergence) صفر ہوتا ہے۔ کیوں کہ یہ فرض کر لیا گیا کہ موج جس واسطے میں اشاعت پارہی ہے۔ اس میں کوئی

آزاد بھرن موجود نہیں ہے۔

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\mu \epsilon \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2}$$

یہاں ∇^2 لاپلاشین آپریٹر کہلاتا ہے۔ اس کی قیمت $\nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu \epsilon \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} \quad (16.36)$$

نوٹ کیجیے کہ مساوات (16.36) میں سمتی مقدار میں کارٹیشن شکل میں دی گئی ہیں۔

لہذا ہمیں یہ مساواتیں حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{d^2 E_x}{dx^2} + \frac{d^2 E_y}{dy^2} + \frac{d^2 E_z}{dz^2} &= \mu\epsilon \frac{d^2 E_x}{dt^2} \\ \frac{d^2 E_y}{dx^2} + \frac{d^2 E_y}{dy^2} + \frac{d^2 E_z}{dz^2} &= \mu\epsilon \frac{d^2 E_y}{dt^2} \\ \frac{d^2 E_x}{dz^2} + \frac{d^2 E_y}{dy^2} + \frac{d^2 E_z}{dz^2} &= \mu\epsilon \frac{d^2 E_z}{dt^2}\end{aligned}$$

اب ایک سادہ صورت حال کا جائزہ لیں جس میں برقی میدان کے سمتیے کے اجزا E_x اور E_z موجود نہیں ہیں۔ لیکن جز E_y 'x' کے تفاعل کے طور پر موجود ہے۔ لہذا $E_x = 0$ اور $E_z = 0$ کے ساتھ مساوات (16.31) ذیل کے طور پر (reduces) بن جاتی ہے۔

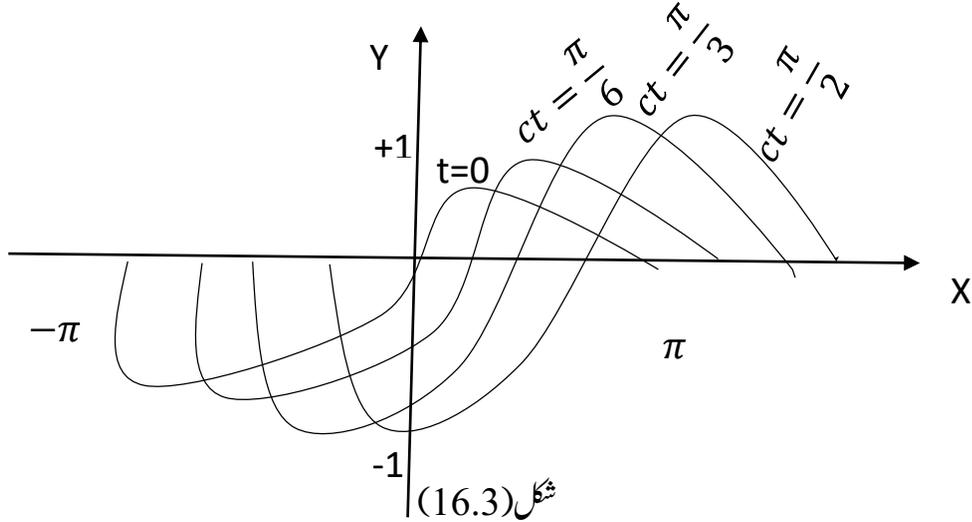
$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} = \mu\epsilon \frac{d^2 E_y}{dt^2} \quad (16.37)$$

مساوات (16.37) ایک برقی میدان کی سفر کرنے والی موج کی تفرقی مساوات کی ایک جانی پہچانی شکل کو پیش کرتی ہے۔ مساوات (16.37) کو پورا کرنے موثری حل ذیل کی شکل ہوگی۔

$$E_y = f(x - vt) \quad (16.38)$$

جہاں v خلاء میں رفتار ہے اس کی قیمت $v = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

اور تفاعل $f(x - vt)$ مقدار $(x - vt)$ کے کسی بھی تفاعل کی نمائندگی کرتا ہے۔ مساوات (16.37) کے دوسرے حل بھی موجود ہیں۔ عملاً $f(x + vt)$ جو منفی x محور پر سفر کرنے والی موج کو وقت کے ایک تفاعل کے طور پر ظاہر کرتی ہے۔



ہمیں یہ بتانا ہے کہ مساوات (16.38) ایک عرضی موج کو بیان کرتی ہے۔ مثال کے طور پر خلاء میں سفر کرنے والی مساوات (16.38) کی موج جیسی (Sinusoidal) نوعیت کی ہو سکتی ہے جس کو ذیل کے طور پر ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

$$E_y = E_{0y} e^{i(Kz - \omega t)} \quad (16.39)$$

شکل (16.3) اس موج کے ایک سائیکل (Cycle) کو بتاتی ہے جو وقت کی متعدد مختلف قیمتوں کے لیے 'x' کے ایک تفاعل کے

طور پر مرتسم کی گئی ہے۔

یہ الفاظ دیگر، موج جیسے جیسے خلاء میں سفر کرتی ہے، اگر دکھائی دیتی تو شکل (16.3) اس موج کے متواتر فوری فوٹوؤں (Snapshots) کو ظاہر کرتی ہے جو کہ مختلف وقتوں میں یعنی $ct = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ میں لیے گئے ہیں۔ مساوات سے یہ ظاہر ہے کہ یہ تمام Sine امواج ہوں گی۔ لیکن $ct = \frac{\pi}{6}$ کے لیے منحنی $\frac{\pi}{6}$ کے مقابلہ میں ہٹی ہوئی (displaced) ہوگی اور ان تباہی قیمتوں میں سے ہر ایک اس وقت واقع ہوگی جب کہ 'x' کی قیمت $\frac{\pi}{6}$ سے بڑھ جائے گی۔ یعنی E_y کی اصلی قیمت کے لیے 'x' میں وقت کے ساتھ اضافہ ہونا چاہیے۔ اس کا حاصل ایک موج ہوگی۔ وقت کے ساتھ بائیں سے دائیں جانب سفر کرے گی۔ وقت اور فاصلہ کو جس جز سے ملایا جاتا ہے، وہ رفتار (Velocity) ہے۔

مساوات (16.39) ایک عرضی موج کی مساوات ہے۔ کیوں کہ برقی میدان E_y کی سمت کہ محور کے ساتھ ہے۔ جب کہ موج کی اشاعت 'x' سمت میں واقع ہو رہی ہے۔ اسی طرح \vec{E} کو صاقط کرتے ہوئے اور \vec{H} کو قائم رکھ کر مقناطیسی سمتیے کے لیے ایک ملتی جلتی (Similar Wave) موج مساوات حاصل کی جاتی ہے۔

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu\epsilon \frac{d^2 \vec{H}}{dt^2} \quad (16.40)$$

اس مساوات کا حل بھی \vec{H} ایک سفر کرنے والی موج ہے جو سمتیے \vec{E} کے حل سے ملتی جلتی (similar) ہے۔ یہ بات عیاں ہے کہ یہ ممکن نہیں ہے کہ ایسا برقی خلل پر جس کا کوئی مقناطیسی خلل نہ ہو اور اس لیے مکس ویل مساوات کی رو سے ایک برقی جز اور ایک مقناطیسی جز رکھتی ہے جو ایک ساتھ سفر کرتے ہیں۔ ایک جز دوسرے جز کے بغیر حاصل کرنے کا مطلب اس بات کے مماثل (Analogous) ہوتا کہ ایک ایسی پانی کی موج حاصل کی جائے جس میں بغیر نقل مکان کے حرکت موجود ہو یا بغیر حرکت کے نقل مکان واقع ہو۔ حالانکہ \vec{E} اور \vec{H} کے لیے علاحدہ مساواتیں ہیں۔ یہ ایسی مقداروں کی نمائندگی کرتی ہیں۔ جن کو طبیعی طور پر الگ سا کیا جاسکتا۔ خلاء میں برقی مقناطیسی موجوں کی رفتار ہے $C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ جہاں μ_0 اور ϵ_0 ابعادی مستقلات ہیں جن کو برقی سکونی کے ساتھ ساتھ مقناطیسی قوتوں کی پیمائش کے ذریعہ محسوب کیا جاسکتا ہے۔ 1865ء میں مکس ویل نے ایک قوت کو دوسرے کے ساتھ توازن میں لاتے ہوئے یہ معلوم کیا کہ 'C' کی عددی قیمت تقریباً 3×10^8 ہے۔ یعنی برقی مقناطیسی امواج رفتار 'C' سے سفر کرتی ہیں جہاں $C = 3 \times 10^8 \text{ m/sec}$ تقریباً 25 سال بعد برقی مقناطیسی امواج کے طبعی وجود کو ہرٹز (Hertz) نے ثابت (Prove) کیا۔

16.6 حل شدہ مثالیں (Solved Problems)

حل شدہ مثال 1.

$$1 \text{ mm} = \rho \text{ کی گہرائی} = \rho \text{ کی تعداد معلوم کیجیے۔ (چاندی کی } \sigma = \frac{3.0 \text{ ms}}{m})$$

حل: ہم جانتے ہیں کے $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}}$ یا

$$\delta^2 = \frac{2}{2\pi\sigma\mu f} \quad \text{یا} \quad f = \frac{1}{\pi\sigma\mu\delta^2}$$

اور $\sigma = 3 \times 10^6 \text{ S/m}$, $\delta = 10^{-3} \text{ m}$

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$$

$$f = \frac{1}{12\pi^2} 10^7 = 84.4 \text{ Hz}$$

حل شدہ مثال 2.

ایک موجی رفتار کی تعدد 1.6 MHz ہے تب جلدی گہرائی (δ) کو معلوم کیجیے۔

(ایلو مینیم $38.2 \mu\text{S/m}$ اور $\mu_r = 1$)

حل: پنیٹریشن گہرائی

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}}$$

($\because \omega = 2\pi f$) $\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \sigma \mu}}$

ہم کو حل میں دیا گیا ہے کی

$$f = 1.6 \times 10^6 \text{ Hz}, \sigma = 38.3 \times 10^6 \text{ S/m}$$

$$\mu_r = 1 \text{ also } \mu = \mu_0 \mu_r = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$$

$$\delta = [\pi \times 1.6 \times 10^6 \times 38.2 \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7}]^{-1/2}$$

$$\delta = 6.44 \times 10^{-5} \text{ m (or) } 64.4 \mu\text{m}$$

$$\vartheta = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \left[\frac{2}{\sigma/\epsilon\omega} \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2\omega}{\sigma\mu}}$$

$$\text{یا } \vartheta = \omega\delta = 2\pi f \cdot \delta$$

$$= 2 \times \pi \times 1.6 \times 10^6 \times 6.44 \times 10^{-5} \vartheta \Rightarrow 64.7 \text{ m/s}$$

16.7 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- برقی اور مقناطیسی میدانوں کے لیے مقناطیسی مساوات میں سمتیے خلاء میں تناہی رفتار سے سفر کرنے والی موج کے حیظوں کو ظاہر کرتے ہیں۔ ان امواج کے لیے کسی واسطے کی ضرورت نہیں ہوتی۔ یہ امواج عرضی نوعیت کی ہوتی ہیں اور توانائی کی ایک جگہ دوسری جگہ اشاعت عمل میں لاتے ہیں۔
- پائنگنگ ویکٹر توانائی کے بہاؤ کو ظاہر کرتا ہے۔ $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$

$$\vec{P} = \frac{1}{2\mu} (\vec{E}_m \times \vec{B}_m)$$

16.8 کلیدی الفاظ (Keywords)

- موصلیت (Conductivity): کسی موصل کے مادہ کی موصلیت سے مراد اس کے مادہ سے برق رو کے گزرنے کی صلاحیت۔
- طول موج (Wavelength): یکساں ہیئت میں واقع واسطہ کے دو متعلقہ ذرات کا درمیانی فاصلہ۔
- غیر موصلیت (Non-conductivity): کسی موصل کے مادہ کی موصلیت سے مراد اس کے مادہ سے برقی رو نہیں گزرنے کی صلاحیت۔
- عرضی موجیں (Transverse wave): اگر واسطہ میں ذرات کی ارتعاش کی سمت موجوں کی اشاعت کے سمت کے عمود وار ہو۔

16.9 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

16.9.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. پوائنٹنگ ویکٹر \vec{P} = -----
2. جلدی کی گہرائی (Skin Depth) سے کیا مراد ہے۔
3. پوائنٹنگ ویکٹر سے کیا مراد ہے۔
4. اچھے موصل کے لیے تعدد ----- قیمت ہوتی ہے۔
5. موصلیت واسطہ میں ----- کی قیمت ہوتی ہے۔
6. سفر موجیں کیا ہے۔
7. خلا میں رو کی رفتار C = ----- ہے۔
8. موصلیت کی مختاری (Permittivity) کے لیے اظہار کرتے ہیں۔
 - (a) $C = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$
 - (b) $C = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$
 - (c) $C = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}}$
 - (d) $C = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}$
9. خلا میں رو کی رفتار کی قیمت ----- ہوتی ہے۔
 - (a) ایک غیر موصلیت
 - (b) موصلیت سے زیادہ
 - (c) موصلیت سے کم
 - (d) اجتماعی مختاری (Complex Permittivity)

16.9.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. پائننگ ویکٹر کیا ہے؟
2. سفر کرنے والی موجیں کیا ہیں۔
3. خلا میں سفر کرنے والی موجیں کی خصوصیات بیان کریں۔
4. پائننگ ویکٹر کیا ہے؟ اس کے خصوصیات بیان کریں۔

16.9.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. برقی مقناطیسی امواج میں توانائی کثافت کو بیان کریں اور پوائنٹنگ ویکٹر سے اس کا کیا تعلق ہے؟
2. پائننگ ویکٹر کیا ہے؟ اور $\vec{E} \times \vec{H} = \vec{P}$ کو اغاض کریں۔
3. پائننگ ویکٹر کیا ہے؟ مکس ویل مساواتیں کے مدد سے پائننگ ویکٹر کو اخذ کریں۔

16.9.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. پینٹریشن کی گہرائی $\rho = 2.5 \text{ mm}$ کی تعداد کو معلوم کیجیے۔ (تا $\sigma = 3.5 \text{ ms/m}$)
2. موجی رفتار کی تعداد 5 MHz سے مستر کر رہی ہے تب جلدی گہرائی (δ) کو معلوم کیجیے۔ (چاندی کی $\sigma = 42.3 \text{ ms/m}$ اور $\mu_r = 1$)

16.10 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Bleaney, B I, and B Bleaney. Electricity and Magnetism. Oxford: Oxford University Press, 2013.
2. Duffin, W J. Electricity and Magnetism. Cottingham: W.J. Duffin, 2001.
3. Gaur, R.K. & Gupta, S.L. Engineering Physics. Dhanpat Rai Publication.
4. Peck, Edson R. Electricity and Magnetism. , 2013.
5. Plonsey, R. & Collin, R.E. Principles and Application of Electromagnetic Field. Tata Mc Graw Hill Publication. New Delhi.
6. Purcell, Edward M, and David J. Morin. Electricity and Magnetism. , 2013.
7. Resnic, R. & Halliday, D. Physics Part-I & Part-II. Wiley Eastern Pvt. Ltd. New Delhi.
8. Schuh, Mari C. Magnetism. Minneapolis, MN: Bellwether Media, 2008.

اکائی 17- برقی مقناطیسی موجیں

(Electromagnetic Waves)

اکائی کے اجزا

تمہید	17.0
مقاصد	17.1
برقی مقناطیسی موجیں	17.2
برقی مقناطیسی موجوں کی خصوصیات	17.2.1
موصل واسطہ میں برقی مقناطیسی موجی مساوات	17.3
خلا میں ہموار مستوی برقی مقناطیسی موجوں کی لیے مکس ویل کی مساواتیں	17.4
برقی مقناطیسی موجوں کی عرضی فطرت	17.5
مستوی موج تقطیب شدہ برقی مقناطیسی موج	17.6
حل شدہ مثالیں	17.7
اکتسابی نتائج	17.8
کلیدی الفاظ	17.9
نمونہ امتحانی سوالات	17.10
معروضی جوابات کے حامل سوالات	17.10.1
مختصر جوابات کے حامل سوالات	17.10.2
طویل جوابات کے حامل سوالات	17.10.3
حل شدہ جوابات کے حامل سوالات	17.10.4
مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں	17.11

17.0 تمہید (Introduction)

میکس ویل کے دور میں مرئی روشنی (نظر آنے والی روشنی)، زیر سرخ (انفراریڈ) اور بالائے بنفشی روشنی کی شعاعوں کو ہی صرف برقی مقناطیسی موجوں کے طور پر جانا جاتا تھا۔ بعد ازاں ریڈیو موجیں، ٹی وی موجیں، مائیکرو موجیں، لاشعاعیں، گاما شعاعیں، کائناتی شعاعیں (کاسمک شعاعوں) کی بھی برقی مقناطیسی موجوں کے طور پر شناخت کی گئی۔ تمام برقی مقناطیسی موجوں کی رفتار خلا میں اتنی ہی ہوتی ہے جتنی روشنی کی رفتار ہوتی ہے جو 3×10^8 میٹر فی سکند ہوتی ہے۔

17.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی ہم

- i. برقی مقناطیسی موجیں کے مظہر کو سمجھ جائیں گیں۔
- ii. برقی مقناطیسی موجوں کی خصوصیات بیان کریں گیں۔
- iii. موصل واسطہ میں برقی مقناطیسی موجی مساواتیں کے مظہر کو سمجھ جائیں گیں۔
- iv. برقی مقناطیسی موجوں کی عرضی فطرت کو سمجھ جائیں گیں۔
- v. مستوی موج تقطیب شدہ برقی مقناطیسی موج کو سمجھ جائیں گیں۔
- vi. خلا میں ہموار مستوی برقی مقناطیسی موجوں کی لیے مکس ویل کی مساواتیں کو حاصل کریں گیں اور اس سے متعلق سوالات کے جوابات حل کر سکیں گیں۔

17.2 برقی مقناطیسی موجیں (Electromagnetic Waves)

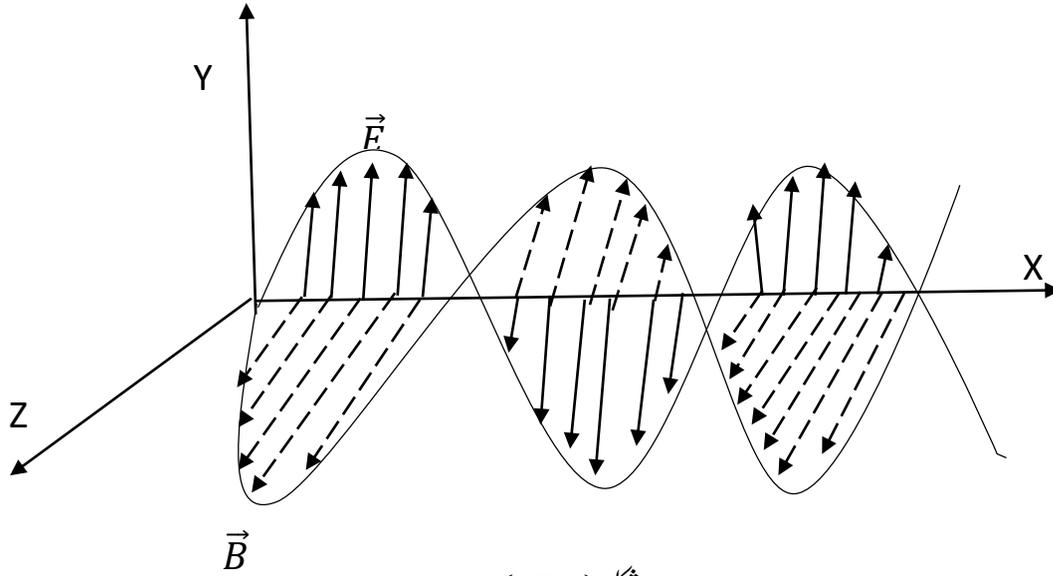
مکس ویل کے دور میں مرئی روشنی (نظر آنے والی روشنی)، زیر سرخ (انفراریڈ) اور بالائے بنفشی روشنی کی شعاعوں کو ہی صرف برقی مقناطیسی موجوں کے طور پر جانا جاتا تھا۔ بعد ازاں ریڈیو موجیں، ٹی وی موجیں، مائیکرو موجیں، لاشعاعیں، گاما شعاعیں، کائناتی شعاعیں (کاسمک شعاعوں) کی بھی برقی مقناطیسی موجوں کے طور پر شناخت کی گئی۔ تمام برقی مقناطیسی موجوں کی رفتار خلا میں اتنی ہی ہوتی ہے جتنی روشنی کی رفتار ہوتی ہے جو 3×10^8 میٹر فی سکند ہوتی ہے۔

فیراڈے کا کلیہ بتاتا ہے کہ مقناطیسی میدان میں تبدیلی کرنے سے برقی میدان پیدا ہوتا ہے۔ اور ایمپیر۔ میکسویل کے کلیہ سے پتہ چلتا ہے کہ بدلتا ہوا برقی میدان مقناطیسی میدان کو جنم دیتا ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ جب برقی یا مقناطیسی میدان وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے تو دوسرا میدان ظاہر ہوتا ہے۔ اس طرح برقی مقناطیسی خلل برقی اور مقناطیسی میدان تبدیل ہونے کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے۔ لہذا برقی اور مقناطیسی میدان تبدیل ہونے کی وجہ سے برقی مقناطیسی خلل پیدا ہوتا ہے۔ یہ خلل برقی مقناطیسی موجوں کی شکل میں آگے بڑھتا ہے۔ اس طرح برقی مقناطیسی موجوں کی اشاعت ہوتی ہے۔

مکشفہ (کنڈینسر) کی پلیٹوں کے درمیان مقناطیسی میدان ہوتا ہے مقناطیسی میدان کے وجود کو پلیٹوں کی درمیان میں قطب نما کی سوئی کے انحراف کے ذریعہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔ پلیٹوں کے درمیان قطب نما رکھنے پر اس کی سوئی منحرف ہوتی ہے۔ مکشفہ (کنڈینسر) کی دو پلیٹوں کے درمیان یہ مقناطیسی میدان دراصل کچھ برقی رو کے بہاؤ کی وجہ سے ہوتا ہے۔ مکس ویل نے اس برقی رو کو (Displacement Current) نقل رو کا نام دیا۔ مکشفہ (کنڈینسر) کی دو پلیٹوں کے درمیان برقی میدان میں تبدیلی ہونے کی وجہ سے (Displacement Current) نقل رو وجود میں آتی ہے۔ اس نقل رو کے سبب مقناطیسی میدان بنتا ہے جس وجہ سے قطب نما کی سوئی منحرف ہوتی ہے۔

ایصالی رو (Conduction Current) برقی بار کی حرکت کی وجہ سے مقناطیسی میدان پیدا کرتی ہے۔ جب کہ نقل رو برقی میدان کی تبدیلی کی شرح (برقی میدان میں تبدیلی فی اکائی وقت) کی وجہ سے مقناطیسی میدان پیدا کرتی ہے۔ لہذا پلیٹوں کے درمیان کی جگہ میں برقی اور مقناطیسی میدان دونوں موجود ہوتے ہیں۔

یہاں برقی میدان (\vec{E}) اور مقناطیسی میدان (\vec{B}) جو وقت کے لحاظ سے تبدیل ہوتے رہتے ہیں ایک دوسرے کے لیے عمودوار ہوتے ہیں یہ دو باہم مل کر برقی مقناطیسی موج بناتی ہیں۔



17.2.1 برقی مقناطیسی موجوں کی خصوصیات (Characteristics of Electromagnetic Waves)

1. برقی مقناطیسی موجیں اس وقت پیدا ہوتی ہیں جب بھی برقی بار کو اسرع (Accelerated) کیا جاتا ہے۔
2. برقی مقناطیسی موجوں کی اشاعت برقی میدان اور مقناطیسی میدان کی شکل میں ہوتی ہیں جو باہم تبدیل ہوتے رہتے ہیں۔ برقی مقناطیسی موجوں کی فطرت عرضی ہوتی ہیں۔
3. برقی مقناطیسی موجوں کی اشاعت کے لیے واسطہ کی ضرورت نہیں ہوتی ہے۔ یعنی وہ خلاء میں بھی سفر کر سکتی ہیں۔

4. برقی مقناطیسی موجوں کی ترسیل یا انجذاب منعکس، منعطف، یا جزوی طور پر منعکس یا جزوی طور پر منعطف ہو کر ہو سکتا ہے جو سطح کی نوعیت اور موج کے تعدد پر منحصر ہوتا ہے۔

5. برقی مقناطیسی موجیں C رفتار سے خلا میں سفر کرتی ہیں۔ جو $C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

جہاں واسطہ کی مطلق (Permeability) اجازیت (مقناطیسی میدان) μ اور مطلق (Permittivity) اجازیت (برقی میدان) ϵ ہے۔

6. برقی مقناطیسی موجوں کی توانائی برقی اور مقناطیسی سمتیوں کے درمیان یکساں طور پر تقسیم ہوتی ہے۔

7. کراس پروڈکٹ $(\vec{E} \times \vec{B})$ (ضرب خارجی) ہمیشہ برقی مقناطیسی موجوں کے اشاعت کی سمت ظاہر کرتی ہے۔

8. برقی مقناطیسی موجیں معیار حرکت رکھتی ہیں۔ لہذا وہ سطح وقوع پر دباؤ عائد کر سکتی ہیں۔

9. برقی مقناطیسی موجیں توانائی کو ایک خطے سے دوسرے خطے میں منتقل کرنے کے قابل ہوتے ہیں۔ توانائی کے

بہاؤ کی شرح فی اکائی رقبہ یا جو پوائنٹنگ سمتیہ کی طرف سے دی گئی ہے۔ وہ یہ ہے۔ $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times$

$$\vec{B}) = \vec{E} \times \vec{H}$$

جہاں خلا یا خالی جگہ کی اجازیت μ_0 ہے۔

10. برقی اور مقناطیسی میدان کی حیثہ کا تناسب ہمیشہ مستقل رہتا ہے اور یہ ریاضیاتی طور پر برقی مقناطیسی

$$C = \frac{E}{B}$$

17.3 موصل واسطہ میں برقی مقناطیسی موجی مساوات

(Electromagnetic wave equation in a conducting medium)

فرض کرو کہ ایک موصل مادہ ہے جس کی موصلیت سکما σ جس کی (Permeability) اجازیت (مقناطیسی میدان) μ

اور (Permittivity) اجازیت (برقی میدان) ϵ ہے۔ یہ مادہ برقی بار کہ مبدا سے علحدہ ہے۔ لہذا اس کے بار کی کثافت $\rho = 0$

ہوگی۔ اس حالت میں مکس ویل کی 4 مساواتیں ہوں گی۔

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \text{ or } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (17.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (17.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (17.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \left(\vec{J} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu \left(\sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (17.4)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

برقی میدان \vec{E} کے لیے مساوات (17.3) اور (17.4) سے \vec{B} کو حذف کرتے ہوئے مساوات (17.3) کا انفرج (Curl) لینے پر

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{B})}{\partial t} \quad (17.5)$$

مساوات (17.4) اور (17.5) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \frac{\partial}{\partial t} [\mu\sigma \vec{E} + \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}] \quad (17.6)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (17.7)$$

ہمیں معلوم ہے کہ $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

ہمیں معلوم ہے کہ $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{E}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = 0 - \vec{\nabla}^2 \vec{E} \quad (17.8)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla}^2 \vec{E} \quad (17.9)$$

مساوات (17.7) اور (17.9) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (17.10)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (17.11)$$

یہ برقی میدان \vec{E} کے لیے عام موجی مساوات ہے۔ اگر واسطہ غیر موصل ہے تب سگما $\sigma = 0$ صفر ہوگا۔ تب مساوات ہوگی۔

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (17.12)$$

مساوات (17.9) اور (17.11) سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ وہ اصطلاح ہے جس نے برقی رو کو بہنے کی اجازت دی ہے۔

اسی طرح مقناطیسی میدان \vec{B} کے لیے مساوات (17.3) اور (17.5) سے \vec{E} کو حذف کرتے ہوئے مساوات (17.3) کا انفرج (Curl) لینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \times \left(\mu\sigma \vec{E} + \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (\nabla \times \vec{B}) &= \mu\sigma(\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= \mu\sigma \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) + \mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= -\mu\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}\end{aligned}\quad (17.13)$$

ٹرپل ویکٹر لگانے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= 0 - \vec{\nabla}^2 \vec{B} \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= -\vec{\nabla}^2 \vec{B}\end{aligned}\quad (17.14)$$

مساوات (17.13) اور (17.14) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{B} = -\mu\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}\quad (17.15)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \mu\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}\quad (17.16)$$

مساوات (17.16) مقناطیسی میدان کی سمتیہ کے لیے عمومی موجی مساوات ہے اگر واسطہ غیر موصل ہو تب سگمہ صفر کے برابر ہوگا $\sigma = 0$ تب ہمارے پاس مساوات ہوگی۔

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}\quad (17.17)$$

مساوات (17.16) اور (17.17) سے یہ واضح ہے کہ $\mu\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ یہ وہ اصطلاح ہے جو کرنٹ کو بہنے کی اجازت دیتی ہے۔

17.4 خلا میں ہموار مستوی برقی مقناطیسی موجوں کی لیے مکس ویل کی مساواتیں

(Maxwell Equations for Uniform Plane Electromagnetic Waves in Free Space)

مکس ویل کی مساواتیں برائے خلا یا خالی جگہ جو برقی بار سے مستثنیٰ $\rho = 0$ ہیں جو غیر موصل واسطہ $\sigma = 0$ کے لیے جس کی تناسلی اجازیت (Permeability) μ اور (Permittivity) اجازیت (برقی میدان) ε ہے کو سمتیہ شکل میں اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \text{ or } \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (iE_x + jE_y + kE_z) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \text{ or } \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (iB_x + jB_y + kB_z) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ or } \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{bmatrix} = -\left(i \frac{\partial B_x}{\partial x} + j \frac{\partial B_y}{\partial y} + k \frac{\partial B_z}{\partial z} \right)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ or } \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix} = \mu_0 \epsilon_0 \left(i \frac{\partial E_x}{\partial x} + j \frac{\partial E_y}{\partial y} + k \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)$$

مندرجہ بالا مساوات کو اجزائی شکل میں دوبارہ اسطرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (17.18)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (17.19)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \quad (17.20a)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (17.21a)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (17.22a)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (17.23b)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (17.24b)$$

$$\frac{\partial z}{\partial B_y} - \frac{\partial x}{\partial B_x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (17.25b)$$

آئیے ہم مستوی موجوں کے نظام پر غور کرتے ہیں اور فرض کرتے ہیں کہ یہ موجوں کی اشاعت مثبت X-محور کی سمت میں ہیں۔ تب ایسی صورت میں سمتیہ برقی \vec{E} اور مقناطیسی \vec{B} میدان Y اور Z-محوروں کی سمت سے آزاد ہوگا اور یہ صرف X اور t کا تفاعل ہوگا۔ ایسی موج کو ہموار مستوی موج کہتے ہیں۔

کیوں کہ برقی \vec{E} اور مقناطیسی \vec{B} میدان دونوں Y اور Z-محوروں کی سمت سے آزاد ہوں گیں۔ اس لیے انکا جزوی مشتق y اور z کے لحاظ سے صفر ہوگا۔

$$\frac{\partial E}{\partial y} = \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial z} = 0$$

$$E = E_x^i + E_y^j + E_z^k$$

$$B = B_x^i + B_y^j + B_z^k$$

$$\therefore \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 ; \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 ; \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0 ; \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

کیوں کہ $\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 ; \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$ ہے اس تناظر مساوات (17.18) میں موجود میکس ویل نسبت اسطرح ہوگی۔ $\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$ اسی طرح $\frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$ ہوں گیں۔

مساوات (17.20) اور (17.21) کے اجزاء ہو گئیں۔

$$-\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$$

مندرجہ بالا تعلق سے ہم لکھ سکتے ہیں کہ برقی میدان یا مقناطیسی میدان کا X -جز زماں و مکاں کے لحاظ سے تبدیل نہیں ہوتا ہے بلکہ E_x اور B_x مستقل رہتے ہیں۔

ارتعاش کی نوعیت پر غور کرنے پر ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ E_x اور B_x مستقل رہتے ہیں اور موج کی اشاعت کا اس پر کوئی

اثر نہیں پڑے گا۔ لہذا ان کو صفر تصور کیا جاسکتا ہے یعنی $0 = B_x = E_x$

مساوات (17.21) 3، (17.20) سے (17.24)، (17.23)

$$-\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad \text{یا} \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (17.26)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (17.27)$$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad \text{یا} \quad \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (17.28)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (17.29)$$

مندرجہ بالا چار مساواتیں (17.26) سے تک (17.29) ہموار مستوی کے لیے موجی مساواتیں کھلاتی ہیں۔

17.5 برقی مقناطیسی موجوں کی عرضی فطرت (Transverse Nature of EM Waves)

X -محور کی سمت میں موج کی اشاعت ہو رہی ہے اور $0 = B_x = E_x$ کے برابر ہے دوسرے لفظوں میں برقی

مقناطیسی موج میں طولی اجزاء نہیں ہیں۔ مزید مقناطیسی یا برقی میدانوں میں تغیر صرف ایک سمت میں ہوتا ہے جو X -محور کو

عمودوار ہے۔ مساوات (17.26)، (17.27)، (17.28) اور (17.29) سے اشاعت کی سمت ہم دیکھتے ہیں کہ نہ ہی وقتی مشتق اور نہ ہی X-سمت میں مشتق معدوم ہوتا ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ ان موجوں میں عرضی فطرت ہوتی ہے۔

ثبوت: مساوات (17.26) کو مساوات (17.27) سے تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\frac{\partial E_z}{\partial x}}{\frac{\partial E_y}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial B_y}{\partial t}}{-\frac{\partial B_z}{\partial t}} \text{ or } \frac{\partial E_z}{\partial E_y} = -\frac{\partial B_y}{\partial B_z}$$

$$\text{or } \frac{E_z}{E_y} = -\frac{B_y}{B_z} \text{ or } E_z B_z = -B_y E_y$$

$$E_z B_z + B_y E_y = 0 \quad (17.30)$$

جہاں $\vec{E} \cdot \vec{B} = EB \cos \theta$ جہاں θ برقی میدان کا سمتیہ \vec{E} اور مقناطیسی میدان کے سمتیہ \vec{B} کا درمیانی زاویہ ہے۔

$$\therefore (i E_x + j E_y + k E_z)(i B_x + j B_y + k B_z) = EB \cos \theta$$

$$B_x E_x + B_y E_y + B_z E_z = EB \cos \theta$$

$$\text{مگر } E_x B_x = 0 \text{ یا } B_x = 0 \text{ اور } E_x = 0$$

$$E_y B_y + B_z E_z = EB \cos \theta$$

مساوات ایک کے لحاظ سے اس طرح ہوگی۔

$$EB \cos \theta = 0$$

$$\cos \theta = 0$$

کیونکہ $H \neq 0$ اور $E \neq 0$

∴ لہذا $\theta = \frac{\pi}{2}$ ریڈین ہوگا۔ چنانچہ \vec{B} اور \vec{E} ایک دوسرے کے علی القوائم یا زاویہ قائمہ پر ہیں۔

17.6 مستوی موج تقطیب شدہ برقی مقناطیسی موج

(Plane Wave Polarized Electromagnetic Wave)

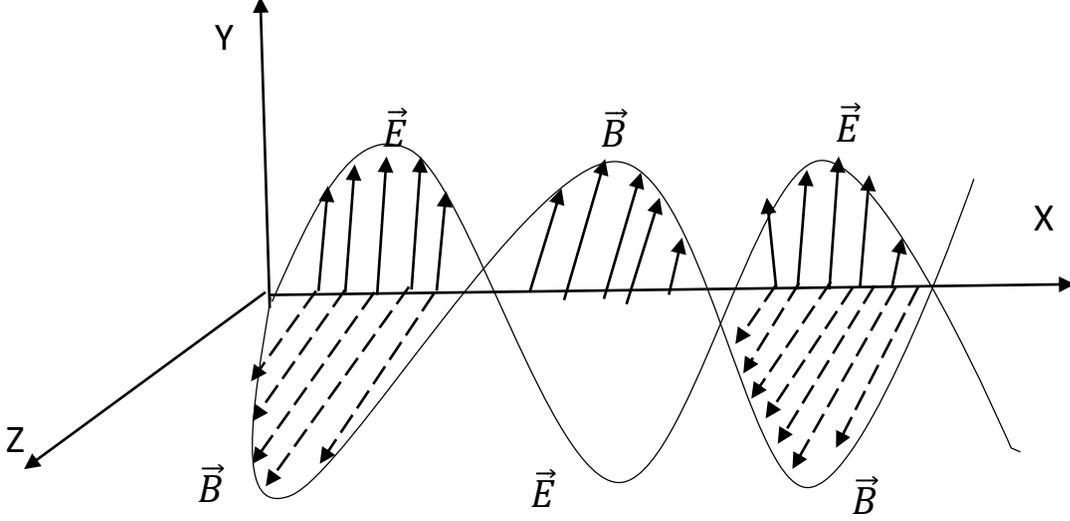
شکل (17.2) میں برقی اجزا اور مقناطیسی اجزا باہم ایک دوسرے کے عمودوار ہیں اور سمت اشاعت کے بھی عمودوار ہیں لہذا برقی مقناطیسی موج عرضی طبع یا فطرت رکھتی ہے۔

جب برقی اور مقناطیسی میدان کا تغیر صرف ایک ہی مستوی تک محدود رہتا ہے تب ایسی برقی مقناطیسی موج کو مستوی تقطیب شدہ موج (Plane Polarized Wave) کہتے ہیں۔ میکان کی طور پر عرضی فطرت رکھنے والی موجیں ہی تقطیب شدہ موج ہو سکتی ہے۔ تمام برقی مقناطیسی موجیں عرضی فطرت رکھتی ہیں اس لیے یہ تقطیب شدہ ہو سکتی ہیں۔

برقی مقناطیسی موجیں تقطیب شدہ خصوصیت کو ظاہر کرتی ہیں جو عرضی موج ہونے کی علامت ہے روشنی جو کہ برقی مقناطیسی

موج پر مشتمل ہوتی ہے۔ روشنی کی صورت میں اس میں آسانی سے تقطیبی خصوصیت کو ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

مثال کے طور پر ہموار مستوی موج جو واسطے میں X -محور کی ساتھ سفر کر رہی ہے اس کی اجازیت μ_0 ہے اور ϵ_0 (Permittivity) اور $\vec{J} = 0$ ہے جہاں پر سمتیہ \vec{E} اور \vec{B} جو Y, Z مستوی پر موجود ہے اگر $E_y = E_z = 0$ تب ہم اس موج کے بارے میں کہہ سکتے ہیں کہ یہ موج تقطیب شدہ ہے اسی طرح Y -محور کی سمت میں تقطیب کو بتانے کے لیے E_y موج Y -محور کی سمت میں $E_y = 0$ اور مقناطیسی سمتی میدان \vec{B} Z -محور کی سمت میں $B_z = 0$ ہوگی۔



شکل (17.2)

مساوات (17.26) اور (17.29) میں $E_y = B_z = 0$ درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (17.31)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (17.32)$$

مساوات (17.31) کا $\frac{d}{dx}$ اور مساوات (17.32) کا $\frac{d}{dt}$ لینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 B_y}{\partial x \partial t} \quad (17.33)$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x \partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \quad (17.34)$$

مساوات (17.33) اور (17.34) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \quad (17.35)$$

کے لے موجی مساوات کھلاتی ہے۔ E_z یہ مساوات ایسی موج کو بتلاتی ہے جو برقی بار نہ رکھنے والے غیر موصل واسطے کے لیے

اسی طرح مساوات (17.31) کا $\frac{d}{dt}$ اور مساوات (17.32) کا $\frac{d}{dx}$ لینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \quad (17.36)$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial t} \quad (17.37)$$

(17.36) اور (17.37) مساوات سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \quad (17.38)$$

یہ مستوی تقطیب شدہ برقی مقناطیسی موج B_y کی موجی مساوات ہے۔

17.7 حل شدہ مثالیں (Solved Problems)

حل شدہ مثال 1

ایک سطح برقی مقناطیسی موج جس کا تعدد 25mHz ہے۔ X-سمت میں آزاد فضا میں سفر کرتی ہے۔ وقت اور فضا کے ایک خاص نقطے پر

$$\vec{E} = 6.3j \text{ V/m} \text{ اس نقطے پر } \vec{B} \text{ کیا ہے؟}$$

$$\text{حل: } B = \frac{E}{c} = \frac{6.3 \text{ v/m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 2.1 \times 10^{-8} T$$

17.8 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- فرض کرو کہ ایک موصل مادہ ہے جس کی موصلیت سگما σ جس کی (Permeability) اجازیت (مقناطیسی میدان) μ اور (Permittivity) اجازیت (برقی میدان) ϵ ہے۔ یہ مادہ برقی بار کہ مبدا سے علحدہ ہے۔ لہذا اس کے بار کی کثافت $\rho = 0$ ہوگی۔ اس حالت میں میکس ویل کی 4 مساواتیں ہوں گی۔

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \text{ or } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \left(\vec{J} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu \left(\sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

- جب برقی اور مقناطیسی میدان کا تغیر صرف ایک ہی مستوی تک محدود رہتا ہے تب ایسی برقی مقناطیسی موج کو مستوی تقطیب شدہ موج (Plane Polarized Wave) کہتے ہیں۔ میکاگی طور پر عرضی فطرت رکھنے والی موجیں ہی تقطیب شدہ موج

- ہو سکتی ہے۔ تمام برقی مقناطیسی موجیں عرضی فطرت رکھتی ہیں اس لیے یہ تقطیب شدہ ہو سکتی ہیں۔
- برقی مقناطیسی موجوں کی اشاعت برقی میدان اور مقناطیسی میدان کی شکل میں ہوتی ہیں جو باہم تبدیل ہوتے رہتے ہیں۔
 - برقی مقناطیسی موجوں کی فطرت عرضی ہوتی ہیں۔
 - برقی مقناطیسی موجوں کی اشاعت کے لیے واسطہ کی ضرورت نہیں ہوتی ہے۔ یعنی وہ خلاء میں بھی سفر کر سکتی ہیں۔
 - برقی مقناطیسی موجوں کی ترسیل یا انجذاب منعکس، منعطف، یا جزوی طور پر منعکس یا جزوی طور پر منعطف ہو کر ہو سکتا ہے جو سطح کی نوعیت اور موج کے تعدد پر منحصر ہوتا ہے۔
 - برقی مقناطیسی موجیں C رفتار سے خلا میں سفر کرتی ہیں۔ جو $C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$
 - اور واسطہ کے مادہ میں رفتار ہوگی۔ $v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$
- جہاں واسطہ کی مطلق (Permeability) اجازیت (مقناطیسی میدان) μ اور مطلق (Permittivity) ϵ ہے۔

- کراس پروڈکٹ $(\vec{E} \times \vec{B})$ (ضرب خارجی) ہمیشہ برقی مقناطیسی موجوں کے اشاعت کی سمت ظاہر کرتی ہے۔
- برقی مقناطیسی موجیں معیار حرکت رکھتی ہیں۔ لہذا وہ سطح وقوع پر دباؤ عائد کر سکتی ہیں۔
- برقی اور مقناطیسی میدان کی حیثیت کا تناسب ہمیشہ مستقل رہتا ہے اور یہ ریاضیاتی طور پر برقی مقناطیسی موجوں کی رفتار کے برابر ہوتا ہے۔ $C = \frac{E}{B}$

17.9 کلیدی الفاظ (Keywords)

- موجیں (Waves): یہ نمونے جو حقیقی طبعی منتقلی یا مجموعی طور پر مادے کیے بہاؤ کے بغیر حرکت کرتے ہیں۔
- حیثیت ارتعاش (Amplitude): موج کا حیثیت کے مقامات توازن سے اعظم ترین نقل کی عددی قدر ہے۔
- مستوی تقطیب شدہ موج: جب برقی اور مقناطیسی میدان کا تغیر صرف ایک ہی مستوی تک محدود رہتا ہے تب ایسی برقی مقناطیسی موج کو مستوی تقطیب شدہ موج (Plane Polarized Wave) کہتے ہیں۔

17.10 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

17.10.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. برقی رو سے کیا مراد ہے؟
 2. برقی مقناطیسی موجیں ----- سے خلا میں بھی سفر کرتی ہیں۔
- (a) $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ (b) $3 \times 10^8 \text{ cm/sec}$

1000m/sec(c) ان میں سے کوئی بھی نہیں۔

3. مستوی تقطیب شدہ موج سے کیا مراد ہے۔
4. برقی مقناطیسی موجیں کی دو خصوصیات بیان کریں۔
5. برقی مقناطیسی موجیں تعریف کریں۔
6. نقل مکانی رو سے کیا مراد ہے۔
7. برقی مقناطیسی موجیں کی واسطہ کے مادہ میں رفتار $V = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ ۔

$\sqrt{\mu\epsilon}$ (a) $\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ (b) $\sqrt{\mu/\epsilon}$ (c) ان میں سے کوئی بھی نہیں

8. برقی مقناطیسی موج کو جب آزاد فضا میں رکھا جاتا ہے تب برقی اور مقناطیسی میدانوں کے حیثہ ارتعاشوں میں کیا رشتہ ہوگا۔
9. لاشعاعوں کا اوسط موجی طول کتنا ہوتا ہے۔

17.10.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

6. موصل واسطے میں برقی مقناطیسی موجوں کے لیے میکس ویل کی مساواتوں کو بیان کیجیے؟
7. واسطے میں برقی مقناطیسی موجوں کے لیے موجی مساواتوں کو اخذ کیجیے۔؟
8. خلا میں ہموار مستوی برقی مقناطیسی موجوں کے لیے میکس ویل کی مساواتوں کو حاصل کیجیے؟
9. ہموار مستوی برقی مقناطیسی موج کی تقطیب کا کیا مطلب ہے؟
10. برقی مقناطیسی موجیں عرضی فطرت و طبع رکھتی ہیں بیان کیجیے؟
11. برقی مقناطیسی موجوں کے مبدا پر گفتگو کیجیے؟
12. خلا میں یا خالی جگہ میں موجود برقی مقناطیسی موجوں کی خصوصیات کو لکھیے؟
13. برقی مقناطیسی موجوں کے کوئی چھ (6) خصوصیات لکھئے۔

17.10.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

4. موصل واسطے میں برقی مقناطیسی موجوں کے لیے میکس ویل کی مساواتوں کو بیان کیجیے؟۔ واسطے میں برقی مقناطیسی موجوں کے لیے موجی مساواتوں کو اخذ کیجیے۔؟
5. خلا میں ہموار مستوی برقی مقناطیسی موجوں کے لیے میکس ویل کی مساواتوں کو حاصل کیجیے؟۔ ہموار مستوی برقی مقناطیسی موج کی تقطیب کا کیا مطلب ہے؟
6. خلا میں موجود مستوی ترغیب شدہ برقی مقناطیسی موج جس کی μ اور ϵ کی تناہی قدریں ہیں ان کے لیے موجی مساوات کو اخذ کیجیے؟

7. برقی مقناطیسی موجوں کے مبدا پر گفتگو کیجیے؟۔ برقی مقناطیسی موجیں عرضی فطرت و طبع رکھتی ہیں بیان کیجیے؟
8. خلا میں یا خالی جگہ میں موجود برقی مقناطیسی موجوں کی خصوصیات کو لکھیے؟

17.10.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. ایک مسطح برقی مقناطیسی موج جس کا تعدد 15mHz ہے۔ X-سمت میں آزاد فضا میں سفر کرتی ہے۔ وقت اور فضا کے ایک خاص نقطے پر $E = 6.3j V/m$ اس نقطے پر \vec{B} کیا ہے؟

17.11 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Bennet, G A. G. Electricity and Modern Physics. London: English Language Book Society & Edward Arnold, 1983.
2. Duffin, W J. Electricity and Magnetism. Cottingham: W.J. Duffin, 2001.
3. Gaur, R.K. & Gupta, S.L. Engineering Physics. Dhanpat Rai Publication.
4. Kurrelmeyer, Bernhard, and Walter H. Mais. Electricity and Magnetism. Princeton, N.J: Van Nostrand, 1967.
5. Peck, Edson R. Electricity and Magnetism. , 2013.
6. Plonsey.R&Collin.R.E.Principles and Application of Electromagnetic Field. Tata Mc Graw Hill Publication. New Delhi.
7. Purcell, Edward M, and David J. Morin. Electricity and Magnetism. , 2013.
8. Resnic.R&Halliday.D.Physics Part-I&Part-II.Wiley Eastern Pvt.Ltd.New Delhi.
9. Resnick, Robert, David Halliday, and Kenneth S. Krane. Physics. New York: Wiley, 2002.
10. Schuh, Mari C. Magnetism. Minneapolis, MN: Bellwether Media, 2008.

اکائی 18 - تقطیب

(Polarization)

	اکائی کے اجزا
تمہید	18.0
مقاصد	18.1
تقطیب	18.2
منقطب شعاع	18.2.1
غیر منقطب شعاع	18.2.2
دائروی منقطب	18.2.3
ناقصی منقطب	18.2.4
خطی منقطب شعاع	18.2.5
تقطیب کے اطلاق	18.2.6
بروسٹر کا کلیہ	18.3
مالس کا کلیہ	18.4
تقطیب کے طریقے	18.5
انعکاس کے ذریعہ تقطیب	18.5.1
انعطاف کے ذریعہ تقطیب	18.5.2
دوہرے انعطاف کے ذریعہ تقطیب	18.5.3
نکول پرزم	18.5.3.1
مقطب	18.6
حل شدہ مثالیں	18.7
اکتسابی نتائج	18.8

کلیدی الفاظ	18.9
نمونہ امتحانی سوالات	18.10
معروضی جوابات کے حامل سوالات	18.10.1
مختصر جوابات کے حامل سوالات	18.10.2
طویل جوابات کے حامل سوالات	18.10.3
حل شدہ جوابات کے حامل سوالات	18.10.4
مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں	18.11

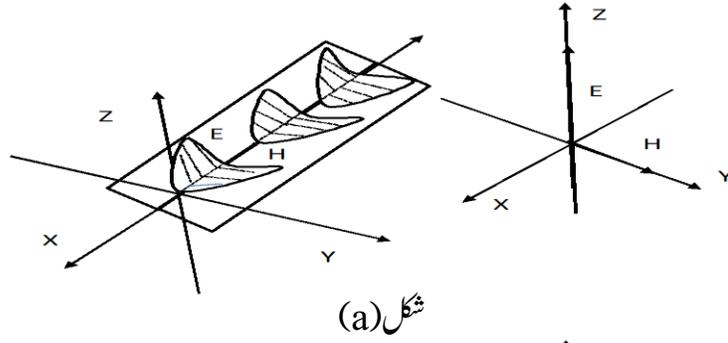
18.0 تمہید (Introduction)

شکل (18.1) میں برقی مقناطیسی لہر کا سادہ ترین نقشہ ہے جس میں ہر فرشت (wave front) مستوی میں جب کہ کسی ایک خاص نقطہ پر جس سے لہری سلسلہ (Wave Series) گزرتا ہے برقی اور مقناطیسی شدت (Intensity) مستقیم خطوط پر اتھرا کرتی ہیں جو آپس میں ایک دوسرے کے اور اشاعت کی سمت کے عمودی ہیں۔ اس طرح کے لہری سلسلہ کے جو X-سمت کی طرف بڑھ رہا ہے ظاہر کر کے کئی روائی (Conventional) طریقے شکل (18.1) میں دکھائے گئے ہیں۔ x-y اور x-z مستویوں میں لہروں کے ذریعہ شکل (18.1a) میں Z اور Y سمتوں E اور H ویکٹروں سے شکل (18.1b) میں صرف E ویکٹر سے شکل (18.1c) میں یہاں H ویکٹر قارئین کے قیاس کے لیے چھوڑ دیا گیا ہے۔ ایک دیگر رواج جو ہم اکثر استعمال کریں گے شکل (18.1d) میں دکھایا گیا ہے۔ اس میں دو ہر اتبر دو مخالف سمتوں میں E کی دو برابر اعلیٰ ترین (Maximum) قدروں کو ظاہر کرتا ہے۔

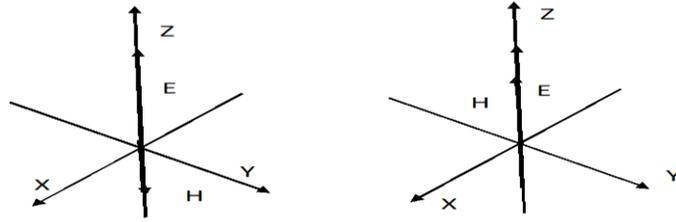
شکل (18.2) میں مظہر ہر خطی تقطیب شدہ (Linearly Polarized) کہلاتی ہے جس کا مطلب یہ ہے کہ کسی خاص نقطہ پر ویکٹر E یا H کا سر ایک خط پر اتھرا کرتا ہے۔ چونکہ شکل (18.2a) میں ہر ایک سائن لہر (Sine Waves) ایک مستقری میں واقع ہوتی ہے اس لیے لہر کو مستوی تقطیب شدہ (Plane Polarized) بھی کہتے ہیں۔ بعد میں اس باب میں دوسرے زیادہ پیچیدہ (Complicated) مثال پر بحث کی جائیگی۔

نظریہ (Theory) اور تجربہ (Experiment) دونوں ظاہر کرتے ہیں کہ ایک سادہ ریڈیو یا رڈار اینٹینا (Radar Antenna) ایک اتھرازی دو قطبہ خطی تقطیب شدہ ہوتی ہیں اور ان کا برقی ویکٹر دو قطبہ سے مسطح ہوتا ہے (Dipole Oscillating) روشنی کے ماخذ (Source) سے کرنیں، اغلباً ماخذ کے مالیکول (Molecules of the Source) میں شروع ہوتی ہیں اور اگر یہ مالیکول اسی طرح اشعاع (Radiation) کرتے ہیں جس طرح کہ ایک محدود جسامت (Finite size) کا دو قطبہ (Dipole) کرتا ہے تو کسی بھی ایک مالیکول سے چلنے والی کرنیں بھی خطی تقطیب شدہ ہوں گی۔ درحقیقت ایک واحد مالیکول کو دوسروں

سے علاحدہ کرنا اور اس سے خارج ہر سلسلہ کا مطالعہ کرنا ناممکن ہے۔



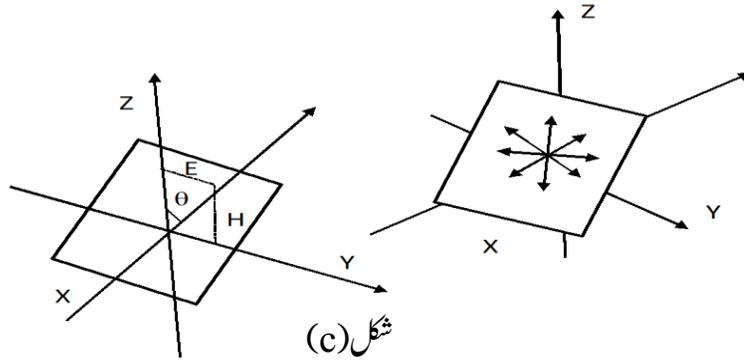
شکل (a)



شکل (b)

شکل (18.1)

روشنی کے ہر ماخذ میں مالیکولوں کی بہت بڑی تعداد ہوتی ہے جو سب ممکن سمتیوں میں رخ رکھتے ہیں۔ تب اس طرح کے ماخذ سے روشنی کی لہروں کی شعاع جو x سمت پر داہنی طرف شکل (18.2) میں سفر کر رہی ہے لہروں کی ایک آمیزش (Mixture) ہونی چاہئے جن میں سے کچھ میں E کا رخ شکل (18.2c) کی مانند ہے جب کہ دیگر لہروں میں ویکٹر (اگر x سمتیہ سطر کر رہی ہے تو اُسے ہمیشہ yz مستوی میں واقع ہونا چاہیے) z سمت سے زاویہ θ بناتا ہے جیسا کہ شکل (18.2c) میں ہے۔



شکل (c)

شکل (18.2)

چوں کہ زاویہ سمت θ (azimuth angle) کی سب قدریں برابر کا احتمال رکھتی ہیں لہذا E ویکٹر اس اشاعت کی سمت کے گرد تناسب کے ساتھ (Symmetrically) ترتیب شدہ ہوں گے جیسا کہ شکل (18.2b) میں ہے۔ اس طرح کی حالت

درحقیقت موجود پائی جاتی ہے اور اس لیے اس قسم کی روشنی غیر تقطیب شدہ (Polarized) یا قدرتی روشنی کہلاتی ہے۔

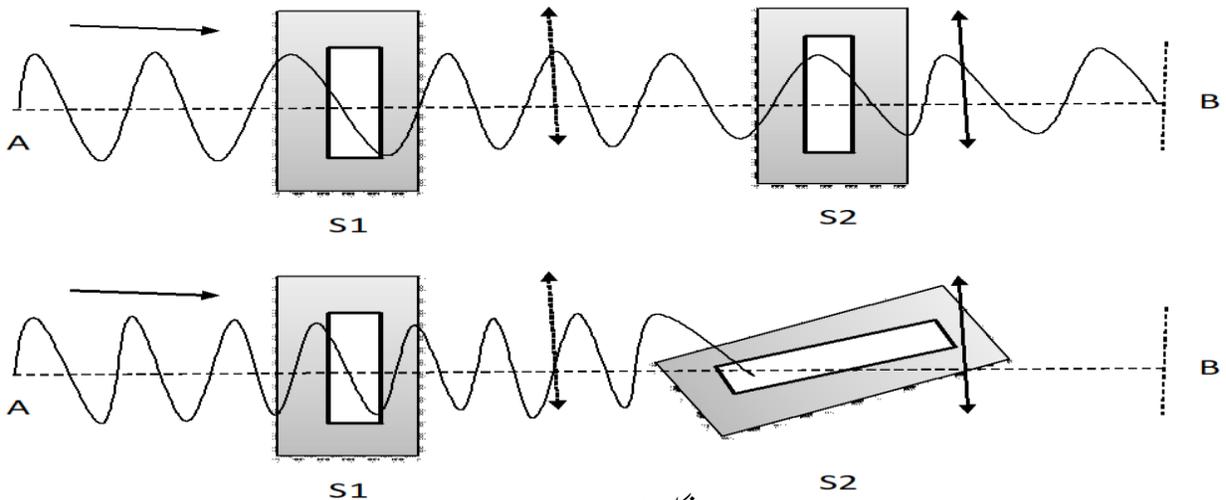
18.1 مقاصد (Objectives)

تداخل، انکسار اور تقطیب نامی کچھ ایسے نور کے واقعات ہیں جن میں نور کی موجی خصوصیت بہت اہم ہوتی ہے۔ ان واقعات یا ان تجربات کو بندسی نوریات کے اصول کے ذریعہ سمجھایا نہیں جاسکتا۔ اس اکائی میں انعکاس (Reflection) انعطاف (Refraction) پر بنی نور کی تقطیب (Polarization) کے مظہر کو سمجھایا گیا ہے۔ اس اکائی میں ہم۔

1. تقطیب نما (Polarized) کو استعمال کرتے ہوئے غیر مقطب (Unpolarised) نور کو مستوی مقطب (plane polarized) نور میں تبدیل کرنا اور اس کے مظہر کو سمجھایا گیا ہے۔
2. مال س کے کلیہ کی مدد سے تقطیب شدہ نور کی حدت کو محسوب کریں گے۔
3. دوہرے انعطاف کے مظہر کو سمجھایا گیا ہے۔
4. معمولی اور غیر معمولی شعاعوں کے انعطاف نما کو سمجھایا گیا ہے۔
5. نکول منشور کی ساخت اور اس کے کام کرنے کے طریقہ کو محسوب کریں گے۔

18.2 تقطیب (Polarization)

تداخل اور انکسار کے واقعات سے نور کی موجی ماہیت ثابت ہوگی مگر یہ ظاہر نہیں ہوتا کہ یہ موجیں طولی ہوتی ہیں یا عرضی۔ کیوں کہ نور کی شعاعیں برقی مقناطیسی موجیں ہوتی ہیں اور برقی مقناطیسی موجوں میں برقی میدان \vec{E} اور مقناطیسی میدان \vec{H} کے سمتیے ایک دوسرے کے عموداً ہوتے ہوئے موج کی سمت اشاعت کے بھی عموداً ہوتے ہیں۔ اس لیے یہ کہا جاسکتا ہے کہ نور کی شعاعیں عرضی ہوتی ہیں۔



شکل (18.3)

تقطیب دراصل عرضی موجوں کی خاصیت ہوتی ہے جس کی بناء پر اس موج کے ارتعاشات ایک سطح میں مقید رہتے ہیں۔ تقطیب کے تصور کو سمجھنے کے لیے ہم سب سے پہلے ایک میکائی عرضی موج پر غور کریں گے جو ایک افقی ڈوری میں آگے بڑھ رہی ہے۔ اس موج کے لیے واسطہ ڈوری ہے اور اس کے ذرات عمودی سمت میں مرتعش ہیں۔

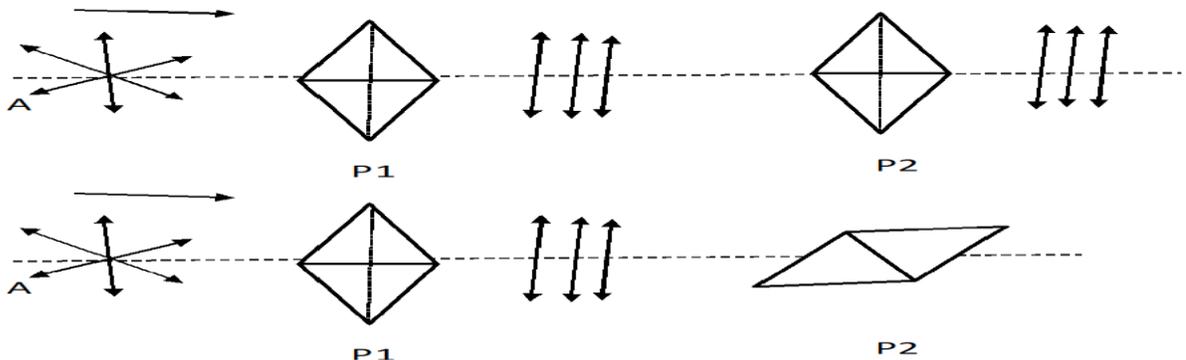
فرض کیجیے کہ اس ڈوری کو دو کارڈ بورڈ کے جھری (سلٹ) S_1 اور S_2 میں کٹے ہوئے عمودی شکاف سے گزارا جائے جیسا کہ شکل (18.3) میں دکھایا گیا ہے۔ اگر اس دو کارڈ بورڈ میں دوسری کارڈ بورڈ کی جھری S_2 کے شکاف کو 90° پر گھما کر افقاً کر دیا جائے تو ڈوری کے موجی ارتعاشات اس کارڈ بورڈ کے جھری S_2 پر آکر رک جاتے ہیں جیسا کہ شکل (18.3) میں دکھایا گیا ہے۔

افقی ڈوری میں عرضی ارتعاشات کو بھی افقاً کیا جاسکتا ہے۔ جس کی وجہ سے ڈوری میں موج افقی سطح میں آگے بڑھتی ہے۔ اگر ایسی ڈوری کو کارڈ بورڈ والے دو شکاف S_1 اور S_2 کے جھری سے گزارا جائے تو موجی ارتعاشات اس کارڈ بورڈوں سے اسی وقت گزر سکتے ہیں جب کہ یہ دو شکاف S_1 اور S_2 جھری بھی افقاً ہو۔ اگر اس شکاف کو S_2 کے جھری کو 90° پر گھما کر عموداً رکھا جائے تو موجی S_1 شکاف سے گزرتے ہوئے S_2 جھری کے شکاف پر رک جاتی ہیں۔

اگر ایک ہی عرضی موج کو ایک کے بعد دیگرے شکافوں سے گزارنا ہو تو ان شکافوں کو ایک دوسرے کے متوازی رکھنا ضروری ہوتا ہے۔ اگر ان شکافوں کے درمیان زاویے کو بڑھایا جائے تو موج کا گزر کم ہونے لگتا ہے۔ اگر اس زاویے کو 90° کیا جائے تو موج مکمل طور پر رک جاتی ہے۔ یہ تجربات صرف عرضی موجوں کے لیے ممکن ہیں۔ طولی موج کے لیے تقطیب کا تصور بے معنی ہوتا ہے۔
تقطیب کی خصوصیات:

18.2.1 منقطب شعاع (Polarized ray)

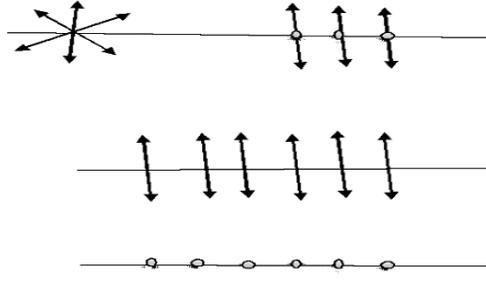
شکل (18.4) پر غور کیجیے جس میں ایک موج x -محور کی سمت میں آگے بڑھ رہی ہے۔ یہ ایک برقی مقناطیسی موج ہے اور اس کا برقی سمتیہ \vec{E} ہمیشہ y کی سمت میں بڑھتا ہے اور گھومتا ہے یہ موج اس طرح آگے بڑھتی ہے کہ اس کا برقی سمتیہ ہمیشہ x - y سطح میں رہتا ہے۔ یہ منقطب شعاع (Polarized ray) کہلاتی ہے۔



شکل (18.4)

x-y سطح اس کی سطح تقطیب ہوئی اور یہی سطح ارتعاش بھی کہلاتی ہے۔ عام طور پر جب کسی مبداء سے نور کی شعاعیں خارج ہوتی ہیں تو اس کے ہر سالے سے شعاعوں کا اخراج ہوتا ہے۔ ان سب شعاعوں میں برق سمتیے کے تمام مختلف سمتوں میں ہوا کرتے ہیں۔ ان تمام شعاعوں کو جب مجموعی طور پر حاصل کیا جاتا ہے تو ان میں ان کے برقی سمتیے ہر سمت میں پائے جاتے ہیں۔

18.2.2 غیر منقطب شعاع (Un Polarized ray)



شکل (18.5)

شکل (18.5) میں ایک شعاع کو دکھایا گیا ہے جو اس مغلے انتصاباً نکل کر باہر آرہی ہے اور مختلف سمتوں میں تیر کے نشانات ان کے برقی سمتیوں کو ظاہر کرتے ہیں۔ اس مجموعی شعاع کو غیر منقطب شعاع (polarized ray) کہتے ہیں۔

18.2.3 دائروی منقطب (Circularly polarized)

برقی میدان کا سمتیہ (اس کی وجہ سے مقناطیسی میدان کا سمتیہ بھی) اگر کچھ اس طرح حرکت کرے کہ اس کا سرا (Tip) اشعاع کی سمت کے اطراف ایک مستقل زاویٰ رفتار سے گردش کرتے ہوئے ایک دائرہ کو تعبیر کرے تو ہمیں دائروی منقطب (Circularly Polarized) نور حاصل ہوتی ہے۔

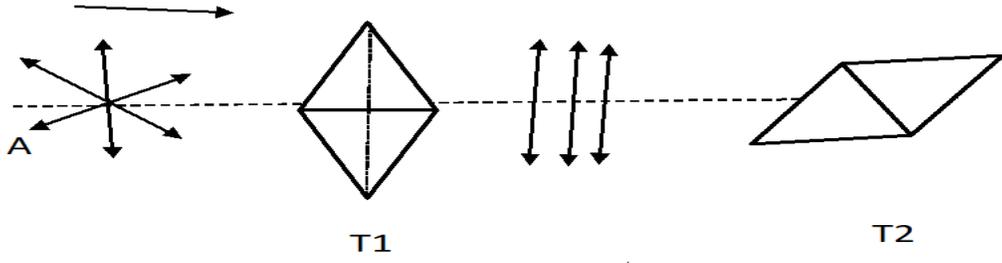
18.2.4 ناقصی منقطب (Elliptically polarized)

اگر برقی میدان کے سمتیہ کا سرا (اس کی وجہ سے مقناطیسی میدان کا سمتیہ بھی) اشعاع کی سمت کے گرد ایک مستقل زاویٰ رفتار سے گھومتے ہوئے ایک ناقصی (Ellipse) بناتا ہے تو ہمیں ناقصی منقطب (Elliptically Polarized) نور حاصل ہوتی ہے۔

18.2.5 خطی منقطب شعاع (Linear Polarized ray)

شعاع کی اشاعت کے دوران اگر برقی سمتیہ \vec{E} ہمیشہ ایک مخصوص سمت میں مرتعش ہوتا ہے تو ایسی مخصوصی سمت میں مرتعش ہوتا ہے تو ایسی شعاع خطی منقطب شعاع (Linear Polarized ray) کہلاتی ہے۔

ایک غیر منقطب شعاع سے خطی منقطب شعاع حاصل کی جاسکتی ہے۔ اس کے لیے غیر منقطب شعاع میں موجود تمام سمتوں والے برقی سمتیوں کو روک کر صرف ایک مخصوص سمت والے برقی سمتیے کو آگے بڑھایا جاتا ہے۔ اس کام کے لیے ٹارمالیں کی تختی کو استعمال کی جاتی ہے۔



شکل (18.6)

شکل (18.6) میں ایک غیر منقطب شعاع مبداء سے نکل کر فارمالین کی تختی T پر واقع ہوتی ہے۔ ٹارمالین کی دونوں تختیاں T₁ اور T₂ کی سطحیں شعاع پر انصافاً رکھی گئی ہیں۔ چنانچہ غیر منقطب شعاع کے تمام برقی سمتیے اس پہلی تختی T₁ پر واقع ہوتی ہیں۔ ان سمتیوں میں صرف ایک ہی سمتیے کے لیے یہ تختی شغاف ہوتی ہے اور دوسرے تمام سمتیوں کو یہ روک دیتی ہے۔ اس تختی سے گزر کر آگے بڑھنے والی شعاع خطی منقطب شعاع ہوتی ہے۔ اس خطی منقطب شعاع کی حدت I غیر منقطب شعاع وقوع کی حدت I₀ کے مقابلے کم ہوتی ہے۔

اگر تختی T₂ کے محور کی سمت وقوع پر شعاع کے 'E' سمتیے کے متوازی ہو تو شعاع مکمل طور پر تختی سے گزر کر مشاہد کی آنکھ پر پڑتی ہے اور روشنی کی حدت انتہائی دکھائی دیتی ہے۔ اگر سمت تختی T₂ کے محور کے عموداً واقع ہو تو شعاع کامل طور پر رک جاتی ہے اور مشاہد کوئی روشنی محسوس نہیں کرتا۔

اگر ٹارمالین کی دو تختیوں کے درمیان زاویہ θ ہو اور I₀ حدت والی غیر منقطب شعاع ان دونوں سے گزرنے کے بعد اس کی حدت I رہ جاتی ہے۔

$$I = I_0 \cos^2 \theta$$

یہ مالس کا کلیہ (Malus law) کہلاتا ہے۔

جب ٹارمالین کی دو تختیوں کے محور ایک دوسرے کے متوازی $\theta = 0$ یا $\theta = 180^\circ$ ہو تو شعاعوں کی اعظم ترین حدت ان سے گزرتی ہے۔

اگر یہ دونوں محور ایک دوسرے کے عموداً $\theta = 90^\circ$ یا $\theta = 270^\circ$ ہو تو شعاعیں بالکل رک جاتی ہے۔

18.2.6 تقطیب کے اطلاق:

1. مائع اور قلموں کی نوری فعالیت (Optical activity) کی تخمین کی جاتی ہے۔
2. خلوی ترشوں (Nucleic acids) کی مرغولہ دار ساخت کا مطالعہ کیا جاتا ہے۔
3. سالمات کی ساخت اور جسمات کے مطالعے کے لیے ان سے منتشر شدہ شعاعوں کی تقطیب کا مشاہدہ کیا جاتا ہے۔
4. کمپیوٹر ٹیلی ویژن، سیل فون وغیرہ کا مائعاتی قلمی پیشنگر (Liquid Crystal Display) پر بننے والی شکلیں شعاعوں کی

تقطیب کی وجہ سے ہوتی ہیں۔

18.3 بروسٹر کا کلیہ (Brewster's Law)

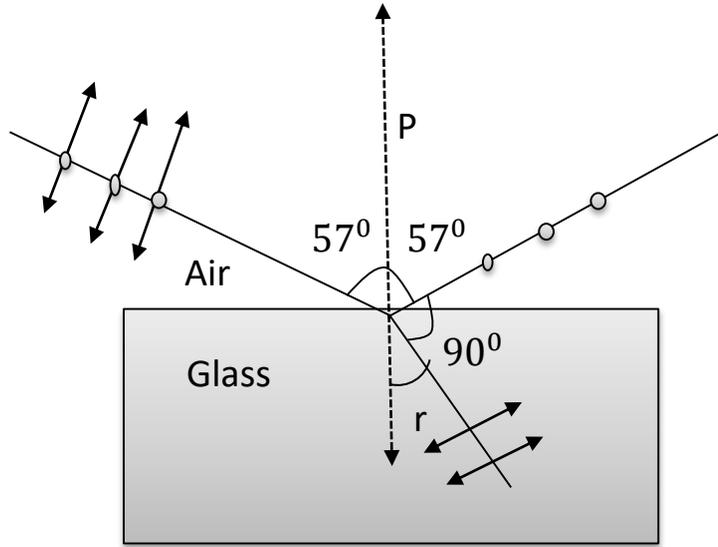
بروسٹر (Brewster) نامی سائنسدان نے بنایا کہ کسی مخصوص زاویہ وقوع کی قیمت پر شعاع منعکس سو فیصد افقی اور شعاع منعطف سو فیصد عمودی منقطب ہو جاتی ہے۔ یہ اُس وقت ہوتا ہے جب کہ یہ دونوں شعاعیں ایک دوسرے سے 90° کا زاویہ بنا کر آگے بڑھ رہی ہوں۔ اگر خلا میں گزرنے والی ایک غیر منقطب شعاع انعطاف نما والے واسطے پر $i\rho$ زاویہ وقوع سے واقع ہوتی ہے اور اس کی وجہ سے شعاع منعکس اور شعاع منعطف ایک دوسرے سے 90° کا زاویہ بنا کر آگے بڑھتی ہوں تو

$$\mu = \tan i\rho$$

جہاں $\mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}$ واسطہ 1 کے لحاظ سے واسطہ 2 کا انعطاف نما ہے۔ یہ مساوات کو بروسٹر کا کلیہ (Brewster's) کہا جاتا ہے۔

انعکاس اور انعطاف کے درمیان زاویہ:

شکل (18.7) میں ایک غیر منقطب شعاع جو نقطہ A اور B تک پہنچتی ہے۔ یہ شعاع منعکس ہو کر BC کے راستے پر چلتی ہے اور منعطف ہو کر BD کے راستے پر چلتی ہے۔ یہ شعاع ایک مخصوص زاویہ وقوع 57° پر صرف وہاں منعکس ہوتے ہیں جن کو نقاط کے ذریعہ دکھایا گیا ہے۔ جب کہ دوسرا جز مکمل طور پر منعطف (Refract) ہو جاتا ہے۔



شکل (18.7)

بروسٹر کا کلیہ کو استعمال کرنے پر

$$\mu = \tan P$$

$$(18.1)$$

اسنیل سے کے کلیہ کی رو سے

$$\mu = \frac{\sin P}{\sin i} \quad (18.2)$$

مساوات (18.1) اور (18.2) سے

$$\tan P = \frac{\sin P}{\sin i} \quad (18.3)$$

$$\frac{\sin P}{\cos P} = \frac{\sin P}{\sin i} \quad (18.4)$$

$$(\because i = r) \quad \sin i = \sin P \quad (18.5)$$

$$\sin r = \sin(90^\circ - P) \quad (18.6)$$

$$r = 90^\circ - P \quad (18.7)$$

$$r + P = 90^\circ \quad (18.8)$$

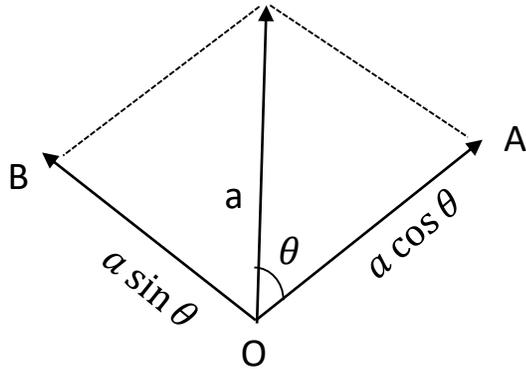
بروسٹر (Brewster) نے یہ معلوم کیا کہ تقطیب کے زاویہ 57° پر شکل (18.7) منعکس شدہ اور خارج شدہ شعاعیں ایک دوسرے پر علی القوائم واقع ہوتی ہیں۔

$$r + P = 90^\circ \quad \text{یعنی}$$

18.4 مالس کا کلیہ (Law of Malus)

ایک تجزیہ گر (Analyzer) کو نور کو سمت اشاعت کے گرد گھمایا جائے تو اس سے خارج ہونے والے نور کی حدت کس طرح متاثر ہوتی ہے۔

دو تقطیب نما کے درمیان زاویہ θ کے لیے اگر تجزیہ گر پر پڑنے والے مستوی مقطب نور کا حیثہ ارتعاش a ہو تو خارج ہونے والے نور کا حیثہ ارتعاش $a \cos \theta$ ہوگا۔



شکل (18.8)

شکل (18.8) میں نور کی حدت اس کے حیثہ ارتعاش کے مربع کے تناسب ہوتی ہے۔

$$\text{Intensity} \propto (\text{amplitude})^2$$

$$I_{\theta} = (a \cos \theta)^2 = a^2 \cos^2 \theta$$

I خارج ہونے والے نور کی اعظم ترین حدت ہے۔

$$I = a^2$$

$$I_{\theta} = I \cos^2 \theta$$

$$I_{\theta} \propto \cos^2 \theta$$

جہاں θ تجزیہ گراور تقطیب گر کے درمیان تقطیبی سمتوں کا زاویہ ہے۔

$$\therefore \cos \theta^0 = 1 \quad I_{\theta} = I(1) \text{ ہو تو } \theta = 0^0 \quad \text{Case 1}$$

$$I_{\theta} = I$$

دو تقطیب نما کے درمیان زاویہ صفر ہوتا ہے تو نور کی حدت اعظم ترین ہوتی ہے۔

$$\therefore \cos 90^0 = 0 \quad I_{\theta} = 0 \text{ ہو تو } \theta = 90^0 \quad \text{Case 2}$$

دو تقطیب نما کے درمیان زاویہ 90^0 ہوتا ہے تو نور کی حدت صفر ہو جاتی ہے۔

18.5 تقطیب کے طریقے (Types of Polarization)

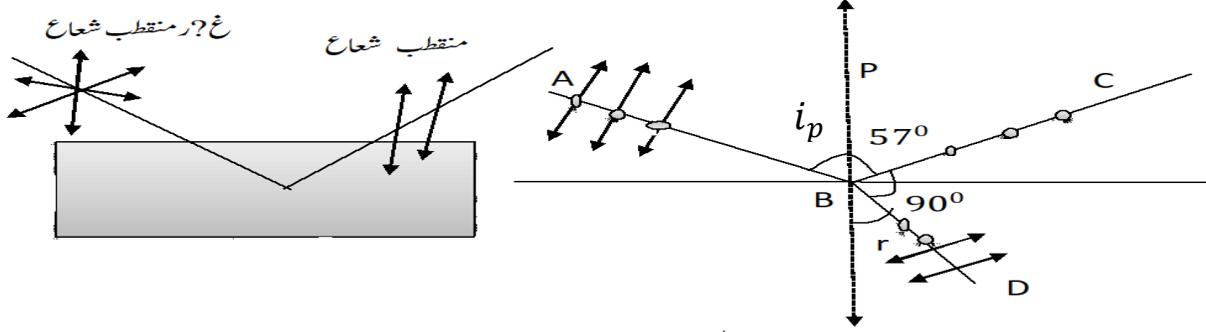
تقطیب

1. انعکاس کے ذریعہ تقطیب (Polarization by Reflection)
2. انعطاف کے ذریعہ تقطیب (Polarization by Refraction)
3. دوہرے انعطاف کے ذریعہ تقطیب (Polarization by Double Refraction)
4. روشنی کا بکھرنے کے ذریعہ تقطیب (Polarization by Scattering of light)
5. منتخب جذب کے ذریعہ تقطیب (Polarization by Selective absorption)

18.5.1 انعکاس کے ذریعہ تقطیب (Polarization by Reflection)

فرانسیسی ماہر طبیعیات مالس (Malus) نے سب سے پہلے یہ مشاہدہ کیا کہ جب غیر منقطب شعاع کسی سطح سے منعکس ہوتی ہے تو منعکس شدہ شعاع جزوی یا مکمل طور پر منقطب ہو جاتی ہے۔ کیوں کہ غیر منقطب شعاع دراصل ان تمام منقطب شعاعوں کا مجموعہ ہوتی ہے جس میں برقی سمتیہ \vec{E} سمت اشاعت کے انتصابی قرص ہر ممکنہ قطری پر پائے جاتے ہیں۔ چنانچہ جب کوئی غیر منقطب شعاع آگے بڑھتی ہے تو اس شعاع سے منسوب تمام برقی سمتیوں کو اجزائیں تحلیل کر کے صرف دو عمودی سمتیے تصور کیے جاسکتے ہیں۔ یعنی اگر غیر منقطب شعاع Z سمت میں بڑھ رہی ہے تو اس کے تمام برقی سمتیے xy سطح میں ہوں گے اور ان کو یہ کہا جاسکتا ہے کہ یہ دو سمتیوں کا مجموعہ جو x اور y سمتوں میں ہیں۔ شکل (18.9) (a) میں ایک غیر منقطب شعاع دکھائی گئی ہے اور اس کے انتصابی قرص میں برقی سمتیے \vec{E} تیروں کے ذریعہ دکھائے گئے ہیں۔

انعکاس کے بعد اس شعاع کے تمام تر تحلیل ہو جاتے ہیں اور ایک تیر باقی رہتا ہے جو سطح انعکاس کے انتصاباً ہوتا ہے۔ عموماً جب کسی غیر منقطب شعاع کو شکل سے ظاہر کرنا ہو تو شعاع پر ترتیب وار نقطے اور دوہرے رخ والے تیر اتارے جاتے ہیں۔



شکل (18.9)

شکل (18.9) میں ایک غیر منقطب شعاع کو دکھایا گیا ہے جو نقطہ A اور B تک پہنچتی ہے۔ کیوں کہ یہ شعاع غیر منقطب ہے اس لیے اس پر دوہرا تیر اور نقاط دکھائے گئے ہیں۔ یہ شعاع منعکس ہو کر BC کے راستے پر چلتی ہے اور منقطب ہو کر BD کے راستے پر چلتی ہے۔ شعاع منعکس BC میں برقی سمتیے سطح انعکاس (یعنی کاغذ کی سطح) کے انتصاباً ہوتے ہیں۔ اس لیے ان کو نقاط سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اسی طرح شعاع منقطب BD میں برقی سمتیے سطح انعکاس میں ہوتے ہیں۔ اس لیے ان کو دوہرے تیروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ عموماً شعاع منعکس اور شعاع منقطب مکمل طور پر منقطب نہیں ہوا کرتیں۔ شعاع منعکس تقریباً افقی منقطب ہوتی ہے اور اس میں چھوٹا سا حصہ عمودی منقطب شعاع کا ہوتا ہے۔ اسی طرح شعاع منقطب تقریباً عمودی منقطب ہوتی ہے اور اس میں چھوٹا سا حصہ افقی منقطب شعاع کا ہوتا ہے۔

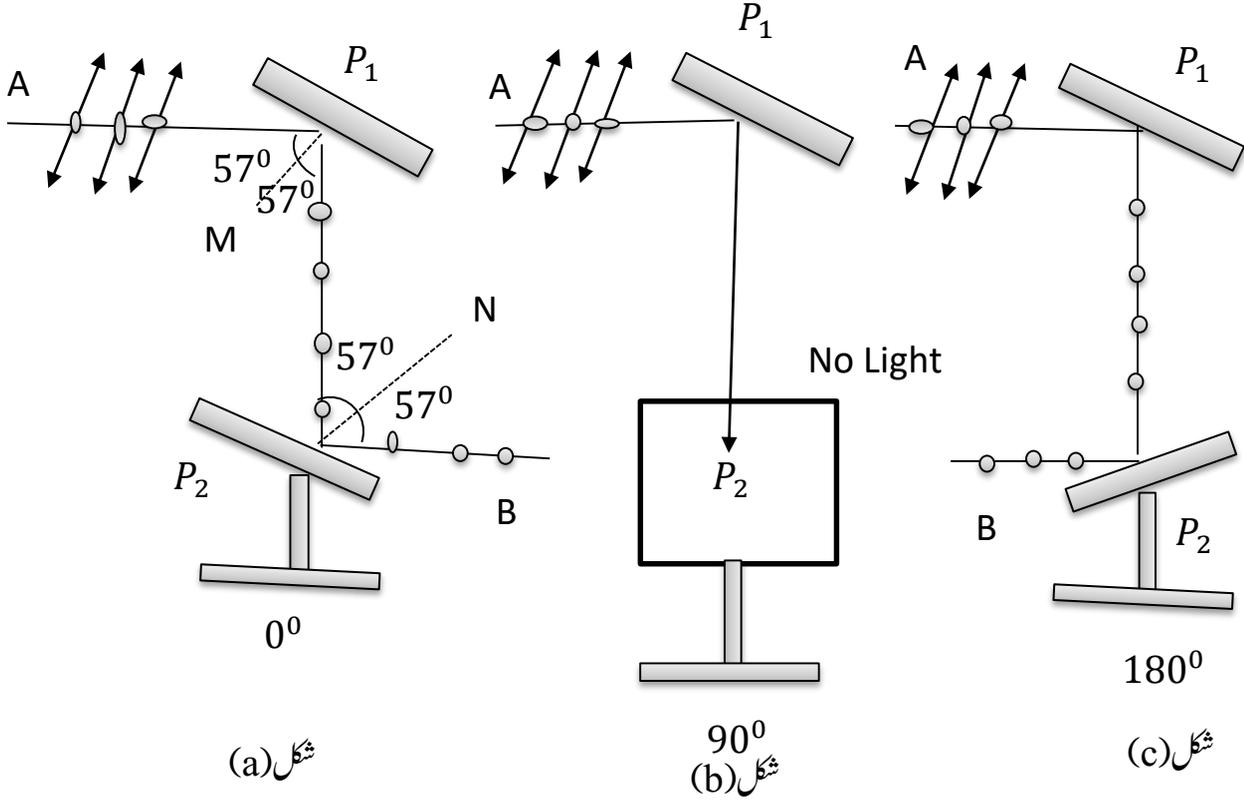
بائیوسٹس پولار سکوپ:

فرانسیسی ماہر طبیعیات مالس (Mauls) نے یہ دریافت کیا کہ جب ایک غیر منقطب نور کسی شفاف شیشے کی سطح پر تقریباً 57° کا زاویہ بناتے ہوئے واقع ہوتا ہے تو اس سطح سے منعکس ہونے والا نور مستوی منقطب ہوتا ہے۔ اس تجربہ کی ترتیب کو شکل (18.10) میں دکھایا گیا ہے جو مالس کی دریافت کی وضاحت کرتی ہے۔

بائیوسٹس پالور سکوپ کے تجربی ترتیب میں P_1 اور P_2 دو شیشے کے پلیٹ ہوتے ہیں۔ شیشے کے دوسرے پلیٹ P_2 کو ایک پائیدان پر اس طرح نصب کیا جاتا ہے کہ اس کو P_1 اور P_2 کے اطراف گھمایا جاسکتے ہیں۔

شکل (18.10a) (a) میں یہ دکھایا گیا ہے کہ ایک غیر منقطب نور کی شعاع A کو پہلے شیشے کے پلیٹ P_1 کی سطح پر واقع ہو رہی ہے۔ پھر یہ نور دوسرے شیشے کے پلیٹ P_2 سے اسی زاویہ پر منعکس ہوتا ہے۔ P_1 اور P_2 پلیٹ ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔ اب ہم پائیدان کو آہستہ سے گردش دے کر P_2 کو محور P_1 اور P_2 کے گرد گھماتے ہیں۔ P_2 پلیٹ سے منعکس ہونے والے نور کی حدت میں کمی واقع ہوتی ہے اور 90° کے زاویہ پر مکمل طور پر غائب ہو جاتی ہے۔

شکل (18.10b) میں پائیدان کو آہستہ سے گھمانے سے P_2 پلیٹ پر منعکس ہونے والی شعاع B ظاہر ہوتی ہے۔
 اسی طرح شکل (18.10c) میں دکھایا گیا ہے کہ پائیدان کو گھمانے سے منعکس ہونے والی شعاع 180° کے زاویہ پر اعظم ترین ہوتی ہے۔ اس کے بعد مزید گھمانے سے نور کی حدت 270° پر صفر ہو جاتی ہے اور 360° کے زاویہ پر اعظم ترین ہو جاتی ہے۔ اس ایک مکمل گردش کے دوران دونوں پلیٹوں پر نورہ زاویہ وقوع 57° رہتا ہے۔



شکل (18.10)

اگر زاویہ وقوع 57° سے مختلف ہو تو نور کی حدت ہر مرتبہ 90° پر پہلے کی طرح اپنی اعظم اور اقل قیمتوں سے گزرے گی مگر اقل ترین حدت صفر تک نہیں پہنچے گی۔ بالفاظ دیگر اس صورت میں منعکس ہونے والی شعاع B ہمیشہ موجود پائی جائے گی۔
 مذکورہ بالا تجربے کو انعکاس میں واقع ہونے والی تبدیلیوں کا جائزہ لیتے ہوئے مزید واضح کیا جاسکتا ہے۔ شکل (18.10) میں ایک شیشے کی سطح پر نور کی ایک غیر مقطب شعاع کے انعکاس کو دکھایا گیا ہے۔ اس سے پہلے بنایا جا چکا ہے کہ واقع ہونے والی نور کی شعاع کے برقی سمتیے کو اس کے دو اجزائیں تحلیل (Resolve) کیا جاسکتا ہے۔ شکل میں نقاط (Dots) ایسے ارتعاشوں کو ظاہر کرتے ہیں جو کاغذ کی سطح سے انتصابی سمت میں واقع ہیں اور تیر کے نشان ان ارتعاشوں کو ظاہر کرنے ہیں جو شکل کو سطح میں واقع ہیں۔ عام طور پر ان دونوں اجزاء کے جیٹھ ارتعاش مساوی ہوتے ہیں۔

اس تجربات کے ذریعہ یہ پتہ چلا ہے کہ ایک مخصوص زاویہ وقوع OP پر صرف وہ ارتعاش منعکس ہوتے ہیں جن کو نقاط کے ذریعہ دکھایا گیا ہے۔ جب کہ دوسرا جز مکمل طور پر منعطف (Refract) ہو جاتا ہے۔ ظاہر ہے کہ منعکس شدہ شعاع کی حدت کم ہوگی۔ یہ شعاع

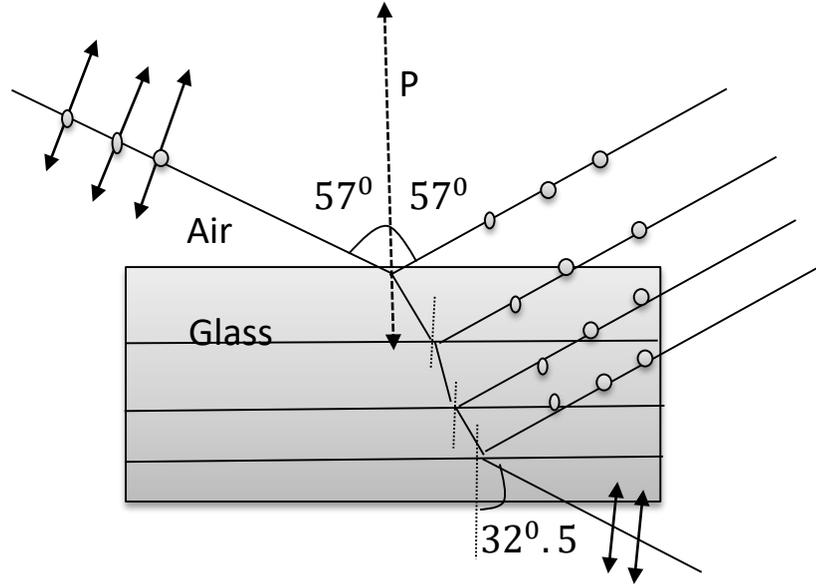
مستوی مقطب ہوتی ہے اور یہ زاویہ وقوع θ_p تقطیب کا زاویہ کہلاتا ہے۔

18.5.2 انعطاف کے ذریعہ تقطیب (Polarization by Refraction)

انعطاف کے ذریعہ تقطیب:

جب غیر منقطب شعاع شیشے کی تختی سے منعطف ہوتی ہے تو منعطف شدہ شعاع میں عمودی منقطب حصہ زیادہ ہوتا ہے اور تھوڑا سا حصہ افقی منقطب شعاع کا ہوتا ہے۔

منعکس شدہ مستوی مقطب شعاع کی حدت کو شیشے کے مزید پلیٹوں کے استعمال سے بڑھایا جاسکتا ہے جیسا کہ شکل (18.11) میں بنایا گیا ہے۔ اس شعاع کو جب بار بار شیشے کی تختیوں سے منعطف کیا جاتا ہے تو یہ شعاع تقریباً مکمل طور پر عمودی منعطف ہو جاتی ہے۔ اس کے لیے شیشے کی متوازی تختیوں کو استعمال کیا جائے گا۔ کیوں کہ درکار زاویہ وقوع 57° ہے اس لیے شعاع وقوع اور تختیوں کی سطح کے درمیان زاویہ 32.9° بنایا جاتا ہے۔



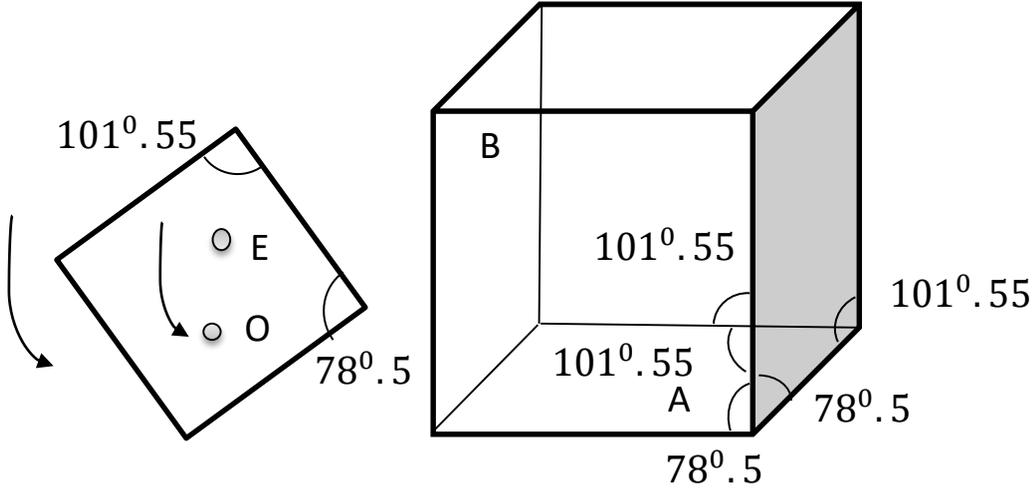
شکل (18.11)

جب غیر منقطب شعاع شیشے کی پہلی تختی پر واقع ہوتی ہے تو اس کا کچھ حصہ منعطف اور کچھ حصہ منعکس ہو جاتا ہے۔ منعطف شدہ شعاع کا بیشتر حصہ عمودی منقطب ہوتا ہے۔ اس کو مکمل طور پر عمودی منقطب کرنے کے لیے بار بار شیشے کی تختیوں سے گزارا جاتا ہے۔ بالآخر یہ شعاع مکمل طور پر منقطب ہو جاتی ہے۔ اس شعاع کو شکل (18.11) میں دوہرے تیروں کے ساتھ دکھایا گیا ہے۔

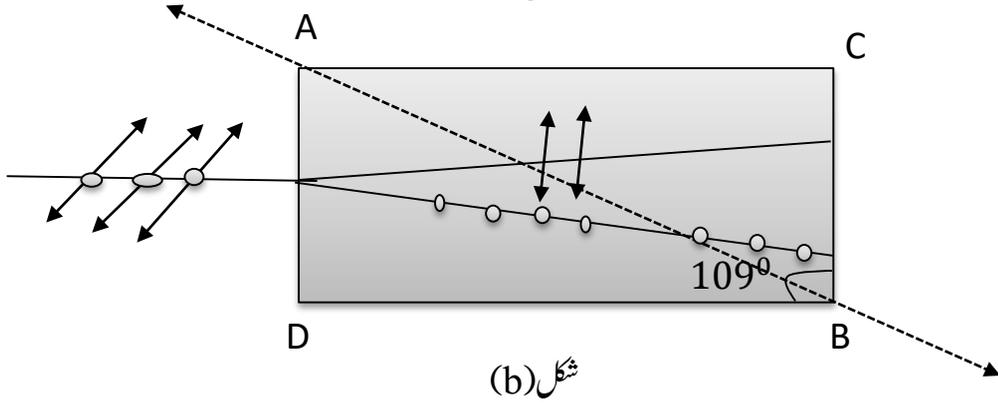
کیلسائیٹ کر سٹل (قلم) (Geometry of Calcite Crystal)

شکل (18.12) دراصل کیلسائیٹ کر سٹل (قلم) کا ایک خاکہ ہے۔ کیلسائیٹ ($CaCO_3$) کو انس لینڈ اسپار (Iceland Spar) بھی کہا جاتا ہے۔ یہاں کر سٹل کے ہر کونے A اور B پر تین سطحوں کے تقاطع سے بننے والے زاویے یکساں ہوتے ہیں یعنی ہر زاویہ

101.55° کا ہوتا ہے جیسی شکل (18.12) میں دکھایا گیا ہے۔



شکل (a)



شکل (b)

شکل (18.12)

ایک خط جو A یا B پر اس طرح کھینچا گیا ہے کہ وہ تینوں منقطع کناروں سے مساوی زاویے بناتا ہے، وہ کر سٹل کا مناظری محور ہوتا ہے۔ معمولی اور غیر معمولی شعاعوں کے ارتعاشوں کی سمتیوں کو اب مناظری محور کے لحاظ سے متعین کیا جاسکتا ہے۔

کر سٹل کا مناظری محور (Optical axis)

کیلسائیٹ کر سٹل میں دوہرا انعطاف سوائے ایک سمت کے باقی تمام سمتوں میں دیکھا جاسکتا ہے۔ اس ایک مخصوصی سمت کو اس کر سٹل کا مناظری محور (Optic Axis) کہا جاتا ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکالا جاسکتا ہے کہ اس سمت میں نور کی دونوں شعاعوں کی رفتاریں یکساں ہوتی ہیں۔

تراش اصلی (Principal Section): کیلسائیٹ کے کر سٹل میں ایک مستوی تراش کو دکھاتی ہے۔ اس تراش میں مناظر ہی محور واقع

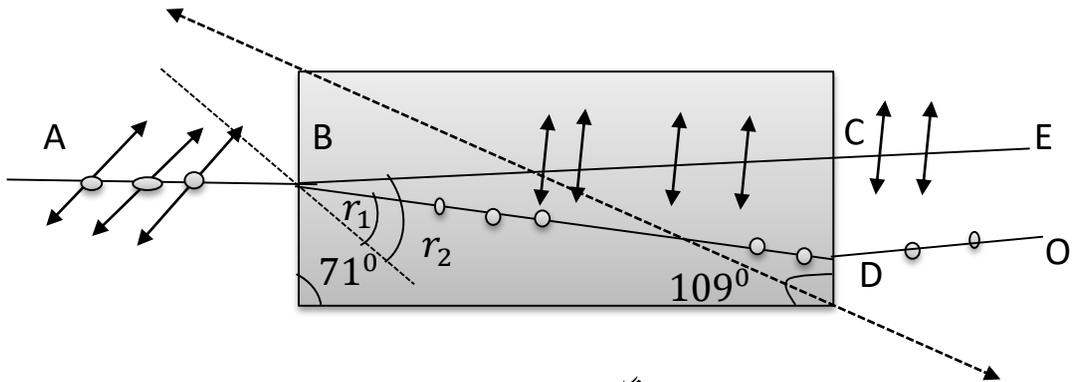
ہے اور یہ تراش کر سٹل کے مقابل رخوں پر عمود اور ہے اس تراش کو اصلی (Principal Section) کہا جاتا ہے۔
 شکل (18.12) کیلکسٹ کے کر سٹل میں ایک مستوی تراش (Plane Section) کو دکھاتی ہے۔ اس تراش میں مناظری
 محور واقع ہے اور یہ تراش کر سٹل کے مقابل رخوں پر عمود اور ہے۔ غیر مقطب نور کی ایک باریک شعاع جو اس مستوی تراش، تراش
 اصلی (Principal Section) میں سے گزرتی ہے، دو شعاعوں میں بٹ جاتی ہے اور کر سٹل سے دو متوازی شعاعوں کی شکل میں باہر
 نکلتی ہے۔ ان میں ہر شعاع خطی مقطب (Linearly Polarized) ہوتی ہے۔ معمولی شعاع میں سمت ارتعاش تراش اصلی کی مستوی
 کے علی القوائم ہوتی ہے۔ غیر معمولی شعاع کی ارتعاش سمت یا تراش اصلی کی مستوی کے متوازی پھر اسی میں واقع ہوتی ہے۔

18.5.3 دوہرے انطاف کے ذریعہ تقطیب (Polarization by Double Refraction)

ایسا مادہ جس کی طبعی خصوصیات ہر سمت میں یکساں ہوتی ہیں غیر طرئی مادہ (Isotropic Material) کہلاتا ہے اور اگر کسی
 مادے کی طبعی خصوصیات کسی مخصوص سمت میں مختلف پائی جاتی ہو تو اس کو ایک رخی مادہ (Anisotropic Material) کہا جاتا ہے۔
 شیشہ ایک غیر طرئی مادہ ہے کیوں کہ اس کی طبعی خصوصیات (یعنی روشنی کی رفتار) ہر سمت میں یکساں رہتی ہے اور شیشے میں موجود
 کسی نقطی مبداء سے نکلنے والے موجی محاذ سب ہم مرکز اور کروی شکل کے ہوتے ہیں۔ لیکن کوارٹز یا کلسٹ اور گارے کا شیشہ یہ سب ایک
 رخی مادے کی مثالیں ہیں کیوں کہ ان کی طبعی خصوصیات ہر سمت میں یکساں نہیں ہوتی۔ ایسے واسطے میں موجود کسی نقطی مبداء سے نکلنے والے
 موجی محاذ ہم مرکز مگر بیضوی ہوتے ہیں کیوں کہ ان کی طبعی خصوصیات ایک مخصوص سمت میں مختلف پائی جاتی ہیں۔ لیکن اس سمت کے انتصابی
 سطح کی تمام سمتوں میں یکساں پائی جاتی ہے۔ اس مخصوص سمت کو ایک رخی مادے کا محور کہا جاتا ہے۔

دوہرے انطاف:

کیلکسٹ کو ارتز یا گارے کے شیشے کے کندے میں جب غیر منقطب شعاع داخل ہوتی ہے تو یہ دو حصوں میں تقسیم ہو جاتی ہے۔ شعاعی تقسیم
 کا یہ واقع دوہرے انطاف کہلاتا ہے۔ اس طرح کے واسطے کی طبعی خصوصیات ہر سمت میں یکساں نہیں ہوتیں۔



شکل (18.13)

انطاف نما کی بھی دو قسمیں ہوتی ہیں۔ ایک معمولی (Ordinary) اور دوسرے غیر معمولی (Extra Ordinary) اس
 مناسبت سے ایک شعاع وقوع کے لیے دو منطف شدہ شعاعیں بنتی ہیں۔ جس شکل (18.13) میں دکھایا گیا ہے کہ کیلکسٹ کی ایک کر سٹل

کے کسی ایک رخ پر نور کی ایک باریک شعاع عمود وار واقع ہو رہی ہے۔ اس کر سٹل سے نکلنے والے نور کے راستے میں رکھے ہوئے ایک پردے پر دو نقاط (O اور E) دیکھے جاسکتے ہیں۔ اب اگر نور کی شعاع کے متوازی سمت میں کر سٹل کو گھمایا جائے تو نقطہ 'O' اپنی جگہ ساکن رہتا ہے جب کہ دوسرا نقطہ E محور کے گرد قموٹا ہے۔ اس طرح ایک واحد سماع واقع دو مختلف شعاعوں کو وجود میں لاتی ہے۔ ان میں ایک شعاع 'O' ایسی شعاع کو ظاہر کرتی ہے جو کسی مادے نئے جیسے شیشے سے معمول مطابق گزر جاتی ہے۔ یہ شعاع جو انعطاف کے عام کلیات کی پابندی کرتی ہے معمولی شعاع (Ordinary ray) کہلاتی ہے۔ جب کہ دوسری شعاع E غیر معمولی شعاع (Extra ordinary) کہلاتی ہے۔

معمولی شعاع اسنیل (Snell) کے کلیہ کی پابندی ہوتی ہے۔ یعنی

$$\mu_0 = \frac{\sin i}{\sin r}$$

شعاع غیر معمولی کے لیے μ کی قیمت زاویہ وقوع پر منحصر ہوتی ہے۔

$$\mu_e = \frac{\sin i}{\sin r}$$

جہاں $i = \text{زاویہ وقوع}$ اور $r = \text{زاویہ انعطاف}$ ہے۔

شعاع 'O' کے لیے استقلال نسبت (Constancy of Ratio) یہ ظاہر کرتا ہے کہ ایک واسطے میں نور کی رفتار تمام سمتوں میں یکساں ہوتی ہے۔ اس کے برعکس شعاع E کے لیے اس نسبت کا عدم استقلال یہ بتانا ہے کہ اس کر سٹل میں نور کے اس جز (E) کی رفتار مختلف سمتوں میں مختلف ہوتی ہے۔ اس طرح دوسری مثال پر غور کریں۔ کیا لسانیٹ کا شیشہ کو کاغذ پر بنے ہوئے کسی نشان پر رکھ کر دیکھا جائے تو اس شیشے میں سے اس کے دو نشانات دکھائی دیتے ہیں۔ ان میں سے ایک نشان معمولی شعاع 'O' کی وجہ سے اور دوسرا انسان غیر معمولی شعاع 'E' کی وجہ سے بنتا ہے۔ اگر شیشے کو کاغذ پر رکھ کر گھمایا جائے تو محسوس ہوگا کہ عکس ٹھہرا ہوا ہے اور دوسرا اس کے اطراف گھوم رہا ہے۔ اگر دو ہم تال شعاعیں منقطب ہوں تو بھی تداخل واقع ہوگا مگر ان منقطب شعاعوں کی سطح تقطیب ایک دوسرے کے متوازی ہونا ضروری ہے۔ اگر منقطب شعاعوں کی سطح تقطیب ایک دوسرے کے عموداً ہوں تو ان کے درمیان تداخل ممکن نہیں۔ خواہ یہ شعاعیں ہم تال بھی ہو۔ تاہم ضرورت کے مطابق کسی بھی خطی منقطب شعاع کی سطح تقطیب کو بدلا جاسکتا ہے۔ مثلاً اگر کوئی افقی منقطب شعاع کسی سطح تقطیب تو افق کے بجائے کسی دوسرے زاویے پر موڑ دیا جاسکتا ہے۔ ایسا کرنے کے لیے اس شعاع تو بھری فعال مائع (Optically active liquid) سے گزارنا ہوگا۔

شکل (18.13) میں ایک کیا لسانیٹ (Calcite) کا منشور دکھایا گیا ہے۔ کیوں کہ یہ ایک رخی مادے سے بنا ہے لہذا دوہرے انطاف کا مظاہرہ کر سکتا ہے۔ AB ایک غیر منقطب شعاع وقوع سے اس مادے کی انعطاف نما کی دو مختلف قیمتوں کی وجہ سے زاویہ انعطاف کی بھی دو قیمتوں ہوتی ہیں اور یہ شعاع دو حصوں میں بٹ جاتی ہے۔ معمولی شعاع (O-ray) زاویہ انعطاف r_1 بناتی ہوئی BD کے راستے پر اور غیر معمولی شعاع (e-ray) زاویہ انعطاف r_2 بناتی ہوئی BC کے راستے پر آگے بڑھتی ہیں۔

معمولی شعاع 'O' ہر سمت میں یکساں رفتار سے آگے بڑھتی ہے اور ان تمام موجوں کے لیے انعطاف نما کی قیمت بھی یکساں یعنی ملا رہتی ہے۔ ان شعاعوں کے لیے موجی محاذ کروئی ہوتے ہیں اور شعاعیں اسنیل کے کلیہ کی پابندی کرتے ہیں۔

$$\mu_0 = \frac{\sin i}{\sin r_1}$$

غیر معمولی (e-ray) ایک مخصوص سمت میں معمولی شعاع کی رفتار سے آگے بڑھتی ہے۔ یہ سمت اس ایک رنجی مادے کے محور پر ہوتی ہے اور اس محور کے انتصابی سطح کی تمام سمتوں میں یہ غیر معمولی شعاع یکساں مگر مختلف رفتار سے آگے بڑھتی ہے۔ اس لیے غیر معمولی شعاع کے موجی محاذ بیضوی ہوتے ہیں۔ یہ شعاعیں اسنیل کے کلیے کی پابندی نہیں کرتی ہیں۔

$$\mu_r = \frac{\sin i}{\sin r_2}$$

کرشل اشیا میں دوہرے انعطاف کے مظہر کو دیکھا جاسکتا ہے۔ ان کرشل اشیا کو دو قسموں میں بتایا جاسکتا ہے۔

(1) یک محوری (Uniaxial) (2) دو محوری (Biaxial)

(1) یک محوری (Uniaxial): یک محوری کرشلوں میں صرف ایک سمت ہوتی ہے۔

مثال: کیلسائیٹ، کوارٹز (Quartz)، ٹورملین (Tourmaline)، اپٹائٹ (Apatite) سوڈے کا نائٹریٹ، سوریکس (Sorax) (2) دو محوری (Bi-axial): دو محوری کرشلوں میں دو سمتیں ہوتی ہیں جن میں 'O' اور 'E' شعاعیں ایک ہی رفتار سے گزرتی ہیں۔

مثلاً: ابرق (Mica)، سیلینائیٹ (Selenite)، ٹوپاز (Topaz)، اور اکونائٹ (Agaonite)

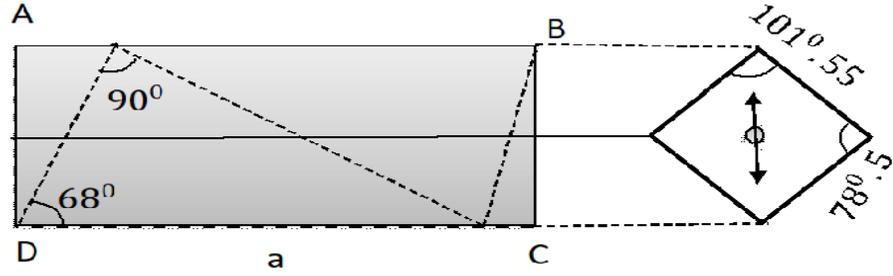
18.5.3.1 نکول پریزم (Nicolprism)

اصول: ایک دوہرے انعطافی کرشل میں معمولی اور غیر معمولی لہریں، باہمی عمودی سمتوں میں خطی تقطیب شدہ ہوتی ہیں اور معمولی لہر میں برقی ویکٹر نوری محور کے ساتھ زاویہ قائمہ بناتا ہے۔ لہذا اگر ہم کسی ذریعہ سے ایک لہر کو دوسری سے علاحدہ کر سکیں تو ایک دوہرے انعطافی کرشل ایک تقطیب کار (Polarizer) کی طرح استعمال کیا جاسکتا ہے۔ اسے بہت سے طریقے ہیں جن سے یہ علیحدگی حاصل کی جاسکتی ہے۔ ان دو اجزاء کو علاحدہ کرنے کا ایک طریقہ نکول پریزم (Nicolprism) یا اس کی کوئی ترمیم ہے۔

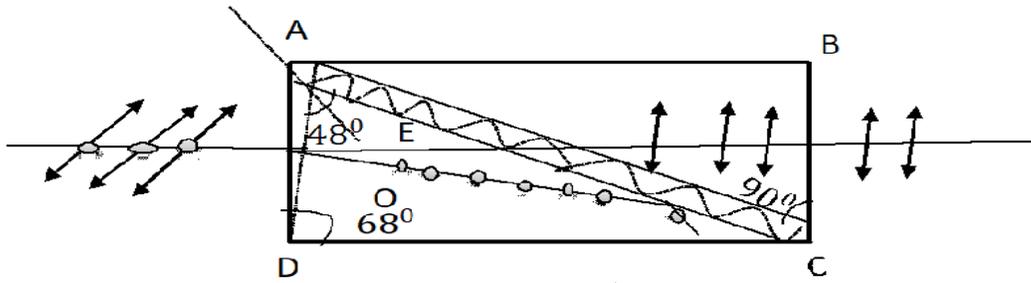
Construction: کیلسائیٹ کی کرشل کو ایک اور شکل میں ڈھال کر اسے تقطیب گریا تجزیہ گر کے طور پر استعمال کیا جاسکتا ہے۔ اس کے لیے مستقلہ مقطب شعاعوں میں سے ایک کو زائل کر دیا جاتا ہے۔ اس طریقہ کار کو شکل (18.14) میں دکھایا گیا ہے۔ اس کے سروں کے رخنوں کو اس طرح تراشا جاتا ہے کہ تراش اصلی میں زاویہ 71° سے گھٹ کر 68° ہو جائے۔ اس کے بعد کرشل کو وتر AC کے ساتھ تراش اصلی کی سطح سے عمود وار دو نصف حصوں میں کاٹا جاتا ہے۔ اب ان دو نصف حصوں کو شفاف کیناڈا بالسم (Canada Balsam) (سمٹ) سے جوڑ دیا جاتا ہے۔ اس طرح تیار کیا ہوا مناظری آلہ کو منشور (Nicol prism) کہلاتا ہے۔

کیلسائیٹ کے لیے معمولی شعاع کا انعطاف نما 1.66 ہے اور کیناڈا بالسم کے لیے 1.55 ہے۔ کیناڈا بالسم کی سطح پر معمولی شعاع کا زاویہ وقوع زاویہ فاصل (Cartical Angle) سے بڑا ہوتا ہے۔ چنانچہ یہ شعاع کلی داخل انعکاس کے تحت منعکس ہو جاتی ہے۔ کیلسائیٹ میں غیر معمولی شعاع کا انعطاف شعاع کی گزرنے کی سمت پر منحصر ہوتا ہے۔ نکول منشور میں ممکنہ سمتوں کے لیے E شعاع کا انعطاف نما تقریباً 1.49 ہوتا ہے۔ لہذا یہ شعاع کیناڈا بالسم میں سے گزر جاتی ہے اور منشور سے اس طرح خارج ہوتی ہے جیسا کہ

شکل (18.14) میں دکھایا گیا ہے۔



شکل (a)



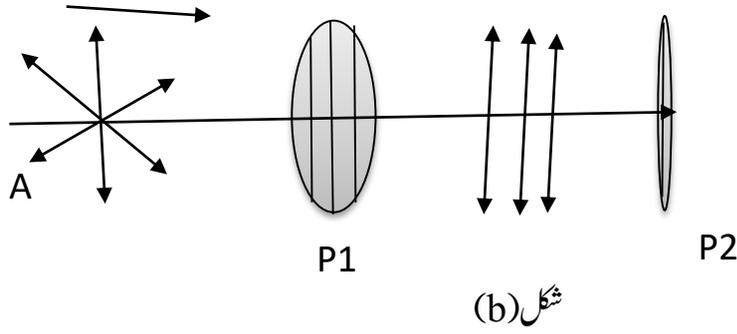
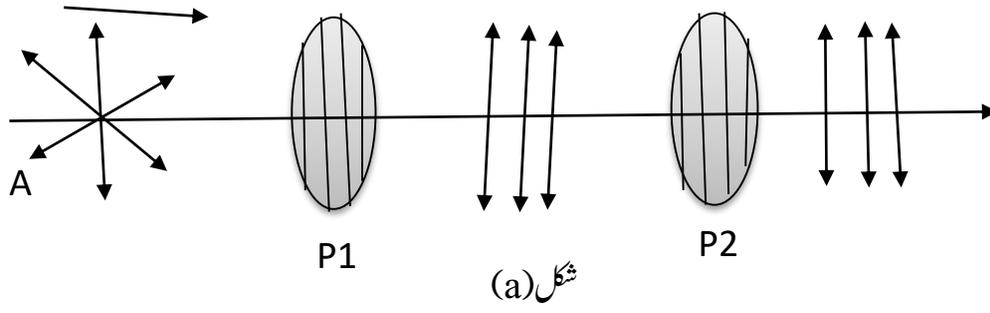
شکل (b)

شکل (18.14)

مناظری آلات میں نکول منشور کو تجزیہ گر اور تقطیب گر کے طور پر استعمال کیا جاتا ہے۔ اس منشور سے گزرنے والا نور اس کے اختتامی رخ (End face) کے چھوٹے وتر کے متوازی سمت میں ارتعاش کرنا ہے۔
Action: اس طرح جب نکول منشور پر غیر مقطب نور واقع ہوتا ہے تو اس سے مستوی مقطب نور پیدا ہوتا ہے۔ جس کی سمت منشور کے اختتامی رخ کے چھوٹے وتر کے متوازی ہوتی ہے۔ نکول منشور کی اس خصوصیت کو خطی مقطب نور کے حصول کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ یہ منشور اپنے چھوٹے وتر کے متوازی سمت میں ارتعاش کرنے والے مستوی مقطب نور کو اپنے اندر سے گزرنے دیتا ہے اور اپنے اختتامی رخ کے چھوٹے وتر سے عمودی سمت میں ارتعاش کرنے والے خطی مقطب نور کو مکمل طور پر کاٹ دیتا ہے۔ اس کی یہ خصوصیت تقطیب شدہ نور کے تجزیے کے لیے استعمال کی جاتی ہے۔

18.6 مقطب (Polaroid's)

ٹارمالین ایک قدرتی تقطیب گر (Polarizer) ہے اگر اس کے محور کے عموداً کوئی منقطب شعاع اس پر واضح ہو تو یہ شعاع معمولی اور غیر معمولی شعاعوں میں منقسم ہو جاتی ہے۔ معمولی شعاع اس ٹارمالین کی تختی میں جذب ہو جاتی ہے اور غیر معمولی شعاع باہر نکل جاتی ہے۔ اس واقعہ کو (Dichasium) کہتے ہیں۔



شکل (18.15)

مصنوعی طور پر بنائے گئے تقطیب گر مقطب کہلاتے ہیں۔ یہ نامیاتی قلموں سے بنی ہوئی تختی نما شغاف پرت ہوتی ہے۔ جو عموماً (Polyrryl alcohol) کے طویل سالماتی رنجیر پر مشتمل ہوتی ہے۔ یہ تمام سالمات ایک دوسرے کے متوازی ہو کر ایک مخصوص سمت کو محور بناتے ہیں۔ یہ ایک رنجی مادے کا بھری محور بنتا ہے۔

مقطب کے استعمالات:

- ان کو دھوپ کے شیشوں کی طرح بکثرت استعمال کیا جاتا ہے۔
- مقطب کی تختیاں (Polaroid films) تھری ڈی فلم بینی میں استعمال ہوتی ہیں۔
- تجربات میں ان کو تقطیب گراور تشریح گر کی طرح استعمال کیے جاتے ہیں۔
- جزیے کے لیے استعمال کی جاتی ہے۔

18.7 حل شدہ مثالیں (Solved Problems)

حل شدہ مثال 1

ایک غیر منقبط شعاع ایک بعد دیگرے گزرتی ہے۔ یہ تقطیب گراور تشریح گر کی طرح عمل کرتی ہیں۔ اگر ان کے محور ایک دوسرے پر 30° کا زاویہ بناتے ہوں تو بتائیے کہ شعاع وقوع کی حدت کا کتنا حصہ ان سے منتقل ہوتا ہے۔

$$\text{حل: دیا گیا ہے کہ } \theta = 30^\circ \text{ لہذا } \cos^2 30^\circ = \frac{3}{4}$$

کیوں کہ جب غیر منقبط شعاع تقطیب گر پر واقع ہوتی ہے تو اس کی صرف نصف حدت آگے بڑھتی ہے۔ اس لیے

$$I = I_0 \cos^2 30^\circ$$

$$I = \frac{I_m}{2} \times \frac{3}{4}$$

$$I = \frac{3}{8} \times I_m$$

حل شدہ مثال 2

دو تقطیب گراہک دوسرے کے متوازی کھلے ہوئے ہیں جن کے محور ایک دوسرے پر 34° کا زاویہ بناتے ہیں۔ پہلے تقطیب گراہک پر ایک مستوی منقرب شعاع اس طرح واقع ہوتی ہے کہ اس کی سطح محور سے 17° کا زاویہ بناتی ہے۔ دونوں تقطیب گروہ سے باہر نکلنے والی شعاع میں حدت شعاع وقوع کی حدت کا کتنا گھٹ جائے گا۔

حل: فرض کیجیے کہ شعاع وقوع کی حدت I_0 تقطیب گروہ سے باہر نکلنے والی شعاع حدت I_1 دوسرے تقطیب گروہ سے نکلنے والی شعاع حدت I_2 ہے۔

کیوں کہ شعاع وقوع کی سطح تقطیب اور تقطیب گروہ کے محور میں 17° کا زاویہ ہے اس لیے

$$I_0 = I_1 \cos^2 17^\circ$$

کیوں کہ وہ تقطیب گروہ کے محوروں کے درمیان 34° کا زاویہ ہے اس لیے

$$I_2 = I_1 \cos^2 34^\circ$$

$$I_2 = I_0 \cos^2 17^\circ \cdot \cos^2 34^\circ$$

$$I_2 = I_0 (0.956)^2 \cdot (0.829)^2$$

$$I_2 = 0.628 I_0$$

یعنی نور کی حدت میں 37.2% کی آئے گی۔

18.8 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- نور کی تقطیب اس کے عرضی موج کے ہونے کی تصدیق کرتی ہے۔ کسی شعاع میں اگر برقی سمتیہ صرف ایک سطح میں مرتب ہوتا ہے تو یہ شعاع منقرب شعاع کہلاتی ہے۔ قدرتی غیر منقرب ہوتی ہے۔ کیوں کہ اس کے برقی سمتیہ تمام سمتیوں میں مرتب ہوتے ہیں۔
- غیر منقرب شعاع جب منعکس ہوتی ہے تو منعکس شدہ شعاع کچھ حد تک افقی منقرب ہو جاتی ہے۔ اگر ایسے انعکاس میں زاویہ وقوع کو اتنا رکھا جائے کہ شعاع منعکس اور شعاع منعطف ایک دوسرے کے عموداً ہوں تب یہ دونوں شعاعیں ترتیب وار مکمل افقی منقرب اور مکمل عمودی منقرب ہو جائیں گی۔ ایسی مکمل تقطیب کے لیے درکار زاویہ وقوع کو بیر پولیستر (Brewster's) کا زاویہ کہا جاتا ہے۔ اس زاویے کا ماس (Tanged) دو واسطوں کے انعطاف ناکسی نسبت کے مساوی ہوتا ہے۔
- کیا لاسیٹ، ٹارمالین، گار او غیرہ کی قلمیں قدرتی تقطیب گر کی مثالیں ہیں جن میں سے غیر منقرب شعاعوں کو گزارنے پر منقرب ہو جاتی ہیں۔ ان میں دوہر انعطاف بھی واقع ہوتا ہے۔ یعنی ان شیاؤں میں جب نور کی شعاع داخل ہوتی ہے تو یہ معمولی شعاع اور غیر

معمولی شعاع میں تقسیم ہو جاتی ہے معمولی شعاع اسنیل کے کلیے کی پابند ہوتی ہے۔ مگر غیر معمولی اشعاع نہیں ہوتی۔ جب کوئی شعاع تقطیب گر سے گزرتی ہے تو اس کی حدت نصف ہو جاتی ہے اور اگر کوئی شعاع دو ایسے تقطیب گروں سے گزرتی ہو جس کے محور کچھ زاویہ θ بناتے ہوں تو اس شعاع کی حدت $I = I_0 \cos^2 \theta$ ہو جاتی ہے۔

- جب کیلسائیٹ کر سٹل کی سطح پر عام نور کی ایک شعاعی پنسل واقع ہوتی ہے تو وہ دو شعاعوں میں بٹ جاتی ہے اور کر سٹل سے یہ دو شعاعیں خارج ہوتی ہیں۔ ان میں ایک کو معمولی 'O' اور دوسری تو غیر معمولی 'E' شعاع کہا جاتا ہے۔ 'O' شعاع اسنیل کے کلیے کی پابندی کرتی ہے جب کہ E شعاع ایسا نہیں کرتی۔ کیلسائیٹ کی طرح کی قلموں میں عام کا دو شعاعوں میں ہٹ جانا، دوہرا انعطاف کہلاتا ہے۔
- کسی کر سٹل میں شعاع 'E' کی رفتار کا انحصار اس سمت پر ہوتا ہے جس میں وہ سفر کر رہی ہے۔ مناظری محور پر 'O' اور 'E' شعاعوں کی رفتاریں مساوی ہوتی ہیں۔
- ایک محوری کر سٹل میں 'O' اور 'E' شعاعوں کی رفتاریں صرف ایک ہی سمت میں مساوی ہوتی ہیں۔ لیکن دو محوری کر سٹلوں میں ایسی دو سمتیں ہوتی ہیں۔

18.9 کلیدی الفاظ (Keywords)

خطی منقطب شعاع: کس شعاع میں اگر برقی سمتیہ صرف ایک سطح میں مرتعش ہوتا ہے۔
غیر منقطب: برقی سمتیہ تمام سمتوں میں مرتعش ہوتے ہیں۔

18.10 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

18.10.1 18.10.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. موج کا برقی سمتیہ ہمیشہ xy سطح میں رہتا ہے۔۔۔ شعاع کہلاتی ہے۔
(a) منقطب (b) غیر منقطب (c) خطی منقطب (d) None
2. موج کا برقی سمتیہ ہمیشہ مختلف سمتوں میں رہتا ہے۔۔۔ شعاع کہلاتی ہے۔
(a) منقطب (b) غیر منقطب (c) خطی منقطب (d) None
3. موج کا برقی سمتیہ ہمیشہ ایک مخصوص سمت میں رہتا ہے۔۔۔ شعاع کہلاتی ہے۔
(a) منقطب (b) غیر منقطب (c) خطی منقطب (d) None
4. ماس کا کلیہ قوت $I = I_0 \cos^2 \theta$
(a) $I_0 \cos^2 \theta$ (b) $I_0 \cos \theta$ (c) $I_0 \sin \theta$ (d) $I_0 \sin^2 \theta$

5. شیشے کے لیے جہاں انعطاف نما 1.5 ہوتا ہے بریوسیسٹر کا زاویہ --- ہوتا ہے۔
- 90°(a) 60°(b) 270° (c) 57° (d)
6. مقطب سے کیا مراد ہے۔
7. ایک کرسٹل کا مناظری محور کس کو کہتے ہیں۔
8. ایک محوری (Uniaxial) اور دو محور (Biaxial) کرسٹلوں میں کیا فرق ہوتا ہے۔
9. معمولی شعاع (O-ray) سے کیا مراد ہے۔
10. غیر معمولی شعاع (E-ray) سے کیا مراد ہے۔
11. معمولی (Ordinary) اور غیر معمولی (Extraordinary) شعاعوں میں کیا فرق ہوتا ہے۔

18.10.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. دوہرے انعطاف کو سمجھائے۔
2. تقطیب نور کے اطلاقات کیا ہیں۔
3. مالس (Mauls) کے کلیہ کو بیان کیجیے اور اس کی وضاحت بھی کیجیے۔
4. نکول منشور پر ایک نوٹ لکھیے۔
5. مقطب نور سے کیا مراد ہے۔ اس کے اطلاقات کیا ہیں۔
6. انعطاف کے ذریعہ تقطیب کو سمجھائے۔
7. انکاس کے ذریعہ کس طرح مستوی منقطب شعاع حاصل کی جاتی ہے۔ سمجھائیے۔

18.10.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. انکاس اور انعطاف کے ذریعہ کس طرح غیر منقطب شعاع کو مستوی منقطب بنایا جاسکتا ہے۔
2. انکاس کے ذریعہ غیر مقطب نور سے مستوی مقطب نور کے حصول کے تجربی طریقہ کو بیان کیجیے۔
3. دوہرے انعطاف کو سمجھائیے۔ اور نکول منشور کس طرح تیار کیا جاتا ہے۔ سمجھائیے۔

18.10.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. ایک واسطے کا زاویائی فاصلہ 45° ہے۔ اس کے لیے بریوسیسٹر کا زاویہ کتنا ہوگا۔
2. ایک مستوی شیشے کی سطح پر غیر منقطب شعاع 58° کا زاویہ بتاتے ہوئے واقع ہوتی ہے اور منعکس شدہ شعاع مکمل طور پر منقطب ہو جاتی ہے۔ (a) شعاع منعکس کے لیے زاویہ انعطاف کتنا ہوگا (b) شیشے کا انعطاف نما کتنا ہوگا۔
3. اگر ایک ایسے شیشے کے پلیٹ کو تقطیب گر (Polarizer) کے طور پر استعمال کیا جائے جس کا انعطاف نما 1.55 ہے تو اس کا

زاویہ انعطاف معلوم کیجیے۔

4. ایک غیر منقرب شعاع 1.4 انعطاف نما والے مائع کی سطح پر اس طرح واقع ہوتی ہے کہ منعطف شدہ موج مکمل منقرب ہو جاتی ہے۔ زاویہ انعطاف معلوم کیجیے۔

18.11 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Aziz, W A, and Mashood Ahmad. Millenium Science Dictionary, Physics - Chemistry & Mathematics, English - English - Urdu. Mumbai: Saifee Book Agency, 2003.
2. Bleaney, B I, and B Bleaney. Electricity and Magnetism. Oxford: Oxford University Press, 2013.
3. Duffin, W J. Electricity and Magnetism. Cottingham: W.J. Duffin, 2001.
4. Gaur, R.K. & Gupta, S.L. Engineering Physics. Dhanpat Rai Publication.
5. Kurrelmeyer, Bernhard, and Walter H. Mais. Electricity and Magnetism. Princeton, N.J: Van Nostrand, 1967.
6. Peck, Edson R. Electricity and Magnetism. , 2013.
7. Plonsey, R. & Collin, R.E. Principles and Application of Electromagnetic Field. Tata Mc Graw Hill Publication. New Delhi.
8. Purcell, Edward M, and David J. Morin. Electricity and Magnetism. , 2013.
9. Resnic, R. & Halliday, D. Physics Part-I & Part-II. Wiley Eastern Pvt. Ltd. New Delhi.
10. Resnick, Robert, David Halliday, and Kenneth S. Krane. Physics. New York: Wiley, 2002.
11. Schuh, Mari C. Magnetism. Minneapolis, MN: Bellwether Media, 2008.

MAULANA AZAD NATIONAL URDU UNIVERSITY

B.Sc. (M.P.C / M.P.CS) II Semester Examination

(Physics)

برقی اور مقناطیسیت (BSPH201CCT) (Electricity and Magnetism)

کل نمبرات: 70 Total Marks

وقت: 3 گھنٹے Time 3 Hours

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے۔ حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارہ ہے۔ تمام حصوں سے سوالات کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. حصہ اول میں 10 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات / خالی جگہ پر کرنا / مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لئے 1 نمبر مختص ہے۔
(10x01=10 Marks)

2. حصہ دوم آٹھ سوالات پر مبنی ہیں، اور اس میں طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دو سو (200) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لئے 6 نمبرات مختص ہیں۔
(05x06=30 Marks)

3. حصہ سوم میں پانچ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو (500) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لئے 10 نمبرات مختص ہیں۔
(03x10= 30Marks)

(حصہ اول)

1. سوال نمبر

- i. ایک میزانی میدان (Scalar field) کا گراڈ (Gradient) _____ ہوتا ہے۔
- ii. گاؤس ڈائیورجنس تھیورم (Guass's Divergence Theorem) کا استعمال _____ کے لیے ہوتا ہے۔
- iii. تھیورم (Stoke's Theorem) کو بیان کریں۔
- iv. الیکٹرک فلکس (electric flux) کی تعریف کریں۔
- v. برقی میدان اور برقی قوہ کے درمیان رشتہ کے لیے ضابطہ لکھیں۔
- vi. ڈائی مقناطیسی مادے، پیرامقناطیسی مادوں سے کیسے الگ ہیں۔ لکھیے۔
- vii. فیرو مقناطیسی مادوں کی مثالیں لکھیے۔
- viii. ایک Solenoid کی ذاتی امالیت معلوم کیجئے جبکہ اس کی لمبائی 5 میٹر، رقبہ $0.01m^2$ اور ٹرنس 100 ہوں۔
- ix. ایک ذوب برقی واسطہ (Dielectric Medium) میں برقی مقناطیسی موجوں کی رفتار _____ ہے۔

x .x برقی مقناطیسی موجوں (E M Waves) کی تقطیب (Polarization) سے کیا مراد ہے۔

(حصہ دوم)

2. خطی، رفتی اور حجمی تکملات سے کیا مراد ہے۔ گاؤس ڈائیورجنس تھیورم کو بیان کریں۔
3. برقی قوتہ (Electrical Potential) کی تعریف کریں۔ اور برقی میدان میں ایک نقطہ کے لیے برقی قوتہ معلوم کیجئے۔
4. گاؤس تھیورم کو ڈیفریئنشل فارم (Differential Form) میں اخذ کریں۔
5. برقی ڈائپول سے کیا مراد ہے۔ برقی ڈائپول کی وجہ سے برقی قوتہ کے لیے ضابطہ اخذ کریں۔
6. برقی رو سے لیز ایک خطی ویر کی وجہ سے مقناطیسی میدان کے لیے ضابطہ اخذ کریں۔
7. مقناطیسی میدان میں محفوظ توانائی کے لیے ضابطہ اخذ کیجئے۔
8. پوائنٹنگ ویکٹر (Pointing Vector) کے لئے ضابطہ اخذ کیجئے۔
9. خلاء میں برقی مقناطیسی موجوں کے لیے مساوات کو اخذ کریں۔

حصہ سوم

10. ایک برقائے ہوئے کرہ (sphere) کی وجہ سے وہ نقطہ پر برقی میدان کی حدت (Electric Field) کے ضابطے اخذ کریں جو کرہ کی سطح پر کرہ سے باہر اور کرہ کے اندر ہو۔
11. مکشفہ اور اس کی گنجائش کی تعریف کیجئے۔ ایک مکشفہ میں محفوظ توانائی کے لیے ضابطہ اخذ کریں۔
12. برقی سکونیات میں تقطیب اور ڈسپلیمینٹ منٹ منٹ ویکٹر پر ایک نوٹ لکھیئے۔
13. برقی مقناطیسی امالیہ (EM Induction) سے کیا مراد ہے۔ کوئی دو تجربات سے تفصیلاً سمجھائیں۔
14. ثابت کریں کہ میکس ویل نے ایمپیر لاء کیسے تبدیل کیا اور نقل مکانی برقی رو (Displacement Current) کی اہمیت کو سمجھائیں۔



BSPH250CCP

لیب مینول
(Lab Manual)

اکائی 19۔ ملٹی میٹر

(Multimeter)

اکائی کے اجزا

تمہید	19.0
مقصد	19.1
آلات	19.2
تشریح آلات	19.2.1
نظریہ	19.3
طریقہ عمل	19.4
مشاہدہ اور تحسیب	19.5
احتیاطی تدابیر	19.6
روزمرہ زندگی میں اس تجربے کی اہمیت	19.7
تجربی نتائج	19.8
کلیدی الفاظ	19.9

19.0 تمہید (Introduction)

ملٹی میٹر ایک الیکٹرانک ڈیوائس ہے جو AC اور DC دو لٹیج، AC اور DC رو اور مزاحمت جیسے مختلف پیمائش کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ اسے ہی ملٹی میٹر کہتے ہیں۔ کیوں کہ یہ ایک وولٹ میٹر، ایم میٹر اور اوہم میٹر سے جوڑا جاتا ہے اور یہ ملٹی میٹر کو ڈائیڈ ٹیسٹ، ٹرانسجیسٹریٹیسٹ، TLG ٹیسٹ میں بھی استعمال کرتے ہیں۔

اس تجربے کو مکمل کرنے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ ملٹی میٹر کے ذریعہ مزاحمت، AC اور DC دو لٹیج، DC رو کی تخمینہ کر سکیں۔

19.1 مقصد (Objectives)

ملٹی میٹر کو استعمال کرتے ہوئے

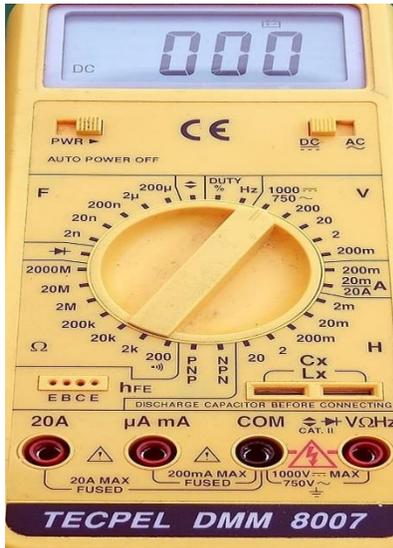
- i. مزاحمت (Resistance) کی تخمینہ کریں۔
- ii. AC اور ڈی سی وولٹیج کی تخمینہ کریں۔
- iii. DC برقی رو کی تخمینہ کریں، اور
- iv. ڈائیڈ کو تصدیق کریں۔

19.2 آلات (Apparatus)

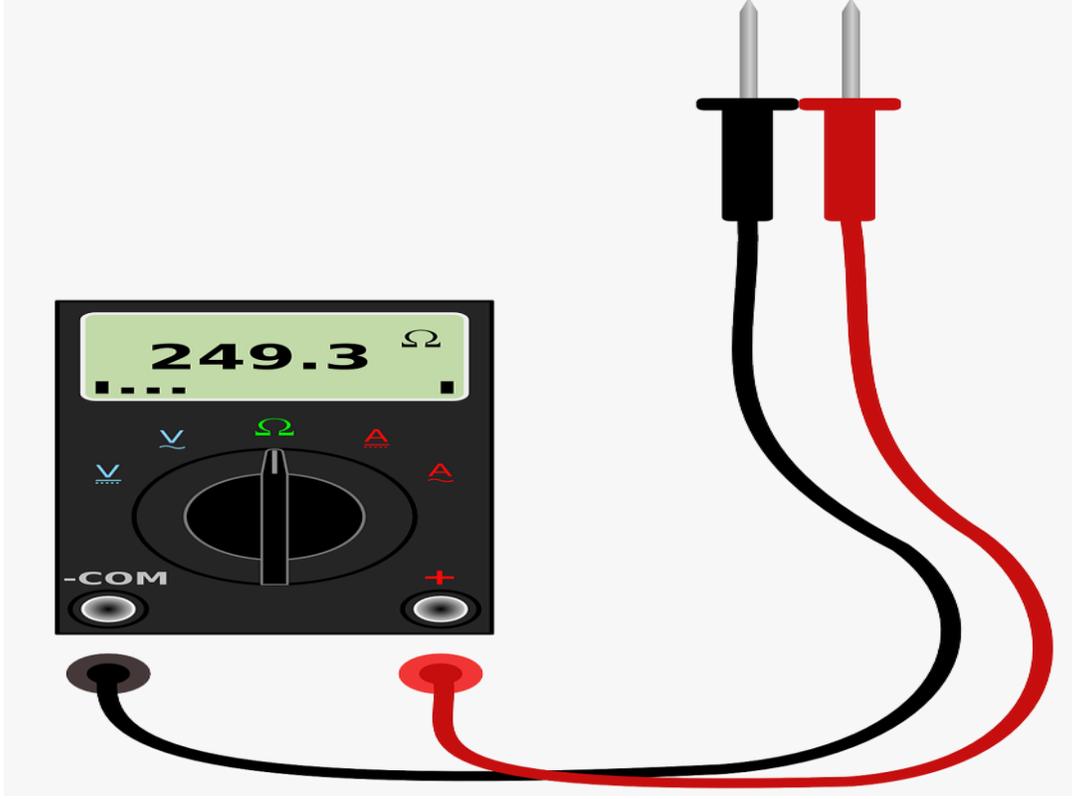
ملٹی میٹر،
AC کا مبداء (Source)،
مزاحمت،
ڈائیڈ

19.2.1 تشریح آلات (Apparatus Explanation)

ملٹی میٹر ایک الیکٹرانک ڈیوائس ہے جو AC اور DC وولٹیج، AC اور DC رو اور مزاحمت جیسے مختلف پیمائش کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ اسے ہی ملٹی میٹر کہتے ہیں۔ کیوں کہ یہ ایک وولٹ میٹر، ایم میٹر اور اوہم میٹر سے جوڑا جاتا ہے اور یہ ملٹی میٹر کو ڈائیڈ ٹیسٹ، ٹرانزجسٹر ٹیسٹ، TLG ٹیسٹ میں بھی استعمال کرتے ہے۔



شکل (19.1)



شکل (19.2)

ملٹی میٹر کے تین حصے ہوتے ہیں۔

1. ڈسپلے (Display)
2. سلیکشن نوب (Selection Knob)
3. پورٹس (Ports)

ڈسپلے: اس میں عام طور پر چار ڈیٹ ہوتے ہیں اور منفی علامت (Negative sign) ظاہر کرنے کی قابلیت ہوتی ہے۔

سلیکشن نوب: اس کے ذریعہ رو (mA)، وولٹیج (V) اور مزاحمت (Ω) کو معلوم کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔

پورٹس: 10A ایک خاص پورٹ ہے جو رو (200mA سے زیادہ) معلوم کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ Ω، V، mA پورٹ رو، وولٹیج (V) اور مزاحمت (Ω) کو معلوم کیا جاتا ہے۔

ملٹی میٹر کے اگلے حصے میں دو پروبس (Probes) میں تحقیقات پلگ ہوتے ہیں۔ ایک پلگ 'Com' کو ظاہر کرتا ہے۔ com کا معنی Common یہ ہمیشہ گرائونڈ یا کسی سرکیٹ سے جڑتے ہے۔ Com تحقیقات طور پر block ہوتا ہے لیکن رنگ کے علاوہ Block پروب اور Red پروب میں کوئی فرق نہیں ہے۔

ان پلگ جیک: Block لیڈ کو ہمیشہ Com ٹرمینل میں اور Red لیڈ کو 10A میں پلگ کیجیے۔ جیک کو (300mA سے زیادہ) پلگ کو دی

جاتی ہے جب زیادہ برقی رو کی پیمائش کر سکتے ہے۔ اگر جیک کو (300mA سے کم) پلگ دی جاتی ہے تب 300mA سے کم برقی رو کو معلوم کرنے میں استعمال کرتے ہے۔

رینج فلٹنگ: پہلی بار میٹر کو آن کیا جائے جب آؤریج کو فکس کریں اور وو لٹیج V کو (AC, DC, AAC, ADC) بیچ حد میں طے کیا جائے۔

19.3 نظریہ (Theory)

ملٹی میٹر کے تین حصے ہوتے ہے۔

1. ڈسپلے (Display)
2. سلیکشن نوب (Selection Knob)
3. پورٹس (Ports)

ڈسپلے: اس میں عام طور پر چار ڈیٹ ہوتے ہیں اور منفی علامت (Negative sign) ظاہر کرنے کی قابلیت ہوتی ہے۔
سلیکشن نوب: اس کے ذریعہ رو (mA)، وو لٹیج (V) اور مزاحمت (Ω) کو معلوم کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔

پورٹس: 10A ایک خاص پورٹ ہے جو رو (200mA سے زیادہ) معلوم کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ Ω , V, mA پورٹ رو، وو لٹیج (V) اور مزاحمت (Ω) کو معلوم کیا جاتا ہے۔

19.4 طریقہ عمل (Procedure)

1. مزاحمت کی تخمین:

i. مثبت (Red) (positive) ٹیسٹ لیڈ کو V/mA جیک ساکٹ سے اور منفی کو (سیاہ) 'Com' جیک ساکٹ کی طرف جوڑ دیا جائے۔

ii. سیلکٹر کو اوہم (Ω) پر لٹیسٹ کریں۔

iii. مزاحمت کی تخمین کرنے کے لیے مبداء کو بند کریں۔

iv. پیمائش سے پہلے تمام کنٹیکٹ کو ڈس چارج کر دیا جائے۔

v. مزاحمت کی پیمائش کرنے کے لیے سرکیوٹ کو ٹیسٹ لیڈ سے جوڑ دیا جائے۔

vi. مزاحمت کی قیمت ڈیجیٹل ڈسپلے پر ظاہر ہوتی ہے۔ اس کو مشاہدہ نوٹ کیا جائے۔

2. وو لٹیج کی تخمین:

i. مثبت Red ٹیسٹ لیڈ کو V/mA جیک ساکٹ سے اور منفی کو Com جیک ساکٹ کی طرف جوڑ دیا جائے۔

- .ii سیلکٹر کو وولٹیج V (mv, ac, dc.....) پر لیسٹ کیا جائے۔
- .iii پیمائش کرنے والی سرکیوٹ پر پور سپلی کو ٹرن آن کریں۔
- .iv وولٹیج کی قیمت ڈیجیٹل ڈسپلے پر ظاہر ہوتی ہے اس کو نوٹ کیا جائے۔

3. رو کی تخمین:

- .i ٹیسٹ لیڈ کو mA/V مثبت red پر اور منفی (سیاہ) Com لیڈ سے جوڑ دیا جائے۔
- .ii سیلکٹر کو (A/mA/A μ) پر لیسٹ کریں۔
- .iii پیمائش کرنے والی سرکیوٹ کو کھلا (open) اور سلسلہ میں جوڑ دیجیے۔
- .iv آپ پور سپلی کو ٹرن آن کریں۔
- .v رو کی قیمت ڈیجیٹل ڈسپلے میں ظاہر ہوتی ہے اس کو مشاہدہ نوٹ کیا جائے۔

4. ڈائیڈ کی تخمین:

- .i مثبت red ٹیسٹ لیڈ mA/V جیک ساکٹ سے اور منفی (سیاہ) Com جیک ساکٹ کی طرف جوڑ دیا جائے۔
- .ii سیلکٹر کو \rightarrow کی پوزیشن پر لیسٹ کریں۔
- .iii پیمائش کرنے والی سرکٹ پر پور کو ٹرن آن کریں۔
- .iv اس کی قیمت ڈیجیٹل ڈسپلے پر ظاہر ہوتی ہے۔ اس کو مشاہدہ نوٹ کیا جائے۔

19.5 مشاہدہ اور تحسیب (Observations and Analysis)

مزاحمت کی تخمین:

جدول (5.1)

Difference $R - R_M$	Multimeter Reading R_M	Resistance R as indicated in Resistance box	SI.No

دولٹچ کی تخمین:

جدول (5.2)

Multimeter Reading for Voltage	Resistance R in Circuit	SI.No

روکی تخمین:

جدول (5.3)

Multimeter Reading for Voltage	Resistance R in the circuit	SI.No

ڈایڈو کی تخمین:

جدول (5.4)

Multimeter Reading for Diode	Resistance R in the Circuit	SI.No

19.6 احتیاطی تدابیر (Precautions)

- اگر میٹر یا ٹیسٹ لیڈ خراب ہوئے دکھائی دیں تو میٹر کو کبھی بھی استعمال نہ کریں۔
- جب پور کا استعمال ہوتا ہے تو کبھی بھی سرکٹ میں مزاحمت کی پیمائش نہ کریں۔
- 10A یا 300mA روکی جانچ ٹیسٹ کی لیٹران پٹ میں پلگ ہو تو کبھی بھی وہ لیٹج مبرا کے پرس کو جانچ نہ کریں۔
- مطلوبہ پیمائش کے لیے ٹیسٹ لیڈ اور روٹری سوئچ صحیح پوزیشن میں رہیں۔
- آپ ایک عمدہ اور تازہ دو لیٹج کے منبع کو استعمال کریں۔ جب اس کو دور میں جوڑا جائے تو یہ بننے نہ لگے۔
- تجربے میں استعمال کیے جانے والے مزاحم اور مزاحمت کے ڈبے عمدہ کوالٹی کے ہونے چاہئیں۔
- دور کے جوڑ صحیح طور پر جوڑیں۔ کوئی جوڑ ڈھیلا نہ رہنے پائے۔

19.7 روزمرہ زندگی میں اس تجربے کی اہمیت

(Significant of Experiment in Domestic Life)

- اس تجربے کے ذریعے کسی بھی سرکیوٹ کے مزاحمت، رو، اور دو لیٹج کی قیمت آپ تخمین کر سکتے ہیں۔
- اس میٹر کے ذریعے ڈیڈ ٹیسٹ، TLG ٹیسٹ کی تخمین بھی کر سکتے ہیں۔

19.8 تجربی نتائج (Experimental Results)

نتائج:

R(Resistance) = Ohm

AC اور ڈی سی دو لیٹج

V_{AC} = Volt

V_{DC} = Volt

DC برقی رواور

I_{DC} = Amp

ڈیڈ ٹو تصدیق =

19.9 کلیدی الفاظ (Key Words)

- **وولٹ (Volt):** ایک وولٹ برقی قوت کی وہ مقدار ہے جہاں پر 1 کولم برقی بار کو لتناہی سے یہاں لانے کے لیے ایک جول کا کام واقع ہوتا ہو۔
 - **ایمپیر (Ampere):** کسی موصل سے گزرنے والی برقی رو ایک ایمپیر اس وقت کہلاتی ہے۔ جب کہ ایک سکند کے عرصہ میں اس موصل میں اس موصل کی کسی بھی عرضی تراشی رقبے سے ایک کولم برقی بار گزرے۔
 - **مزاحمت گر (Resistor):** مزاحمت گر (Resistor) ایک ایسا آلہ ہے جو برقی رو کی مخالفت کرتا ہے۔
-

اپنی معلومات کی جانچ کیجیے (Check your Information Questions)

1. دو لیٹج کی اکائی کیا ہے۔
2. ملٹی میٹر کو بیان کرو۔
3. مزاحمت کو بیان کرو۔
4. رو کی SI اکائی کیا ہے۔
5. ملٹی میٹر میں کتنے حصہ ہے بیان کرو۔

اکائی 20۔ آر سی سرکیوٹ ہم سلسلہ کی خصوصیات

(Characteristics of a Series R.C Circuit)

اکائی کے اجزا

تمہید	20.0
مقصد	20.1
آلات	20.2
تشریح آلات	20.2.1
نظریہ	20.3
طریقہ عمل	20.4
مشاہدہ اور تحسیب	20.5
احتیاطی تدابیر	20.6
روزمرہ زندگی میں اس تجربے کی اہمیت	20.7
تجربی نتائج	20.8
کلیدی الفاظ	20.9

20.0 تمہید (Introduction)

آر سی سرکیوٹ ہم سلسلہ کو R اور C کو اہترازیہ کے ساتھ ہم سلسلہ میں جوڑ دیا جائے آر سی سرکیوٹ ہم سلسلہ دور کھیتے ہے۔

20.1 مقصد (Objectives)

- آر سی سرکیوٹ ہم سلسلہ کی خصوصیات کا مطالعہ کرنا۔
- چار جنگ وو لٹیج کے ذریعہ آر سی وو لٹیج وقت مستقل کی پیمائش کریں۔
 - ڈس چارجنگ وو لٹیج کے ذریعہ آر سی وو لٹیج وقت مستقل کی تخمین کریں۔

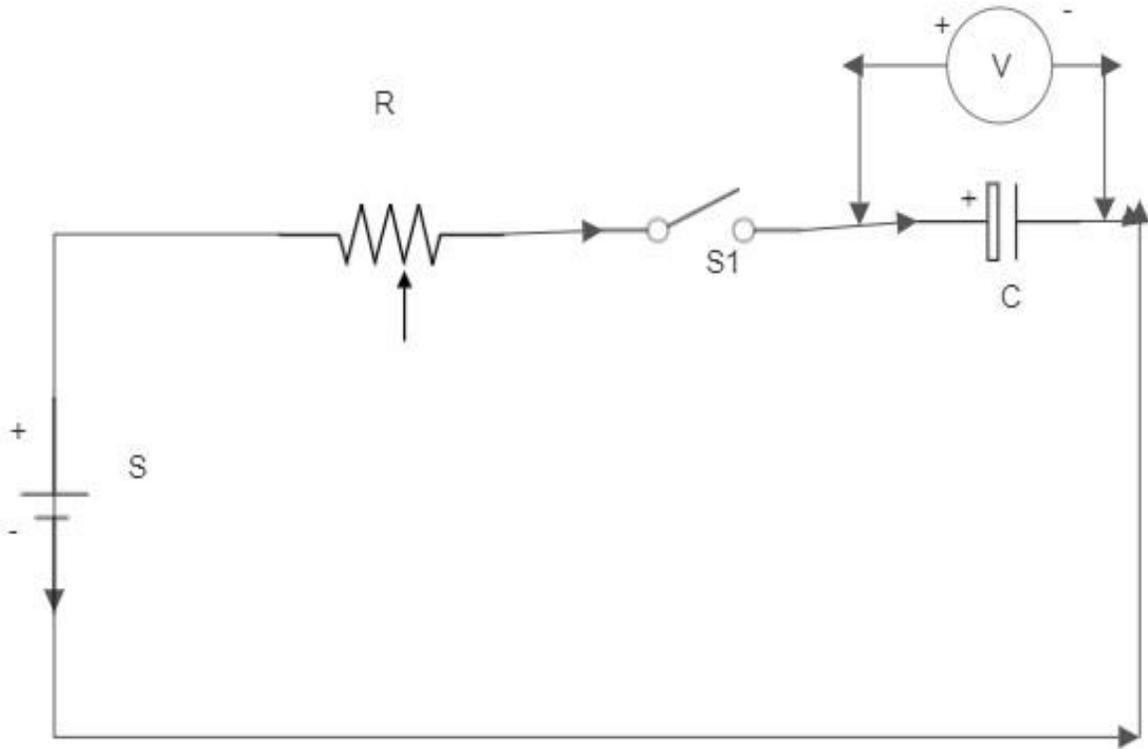
20.2 آلات (Apparatus)

پاور سپلائی (Power Supply)،	مزاحمت (Resistance)،
مکثف (Capacitor)،	ولٹ میٹر (Volt Meter)،
اسٹاپ واچ (Stop Watch)،	کمیوٹوٹر (Commutator)
کاربن کے مزاحم (Carbon resistors)	ولٹ کی بیٹری (Volt Battery)،
ڈاٹ کنجی (key)،	

20.2.1 تشریح آلات (Apparatus Explanation)

ہم سلسلہ آر سی دور (Series RC Circuit)

R اور C کو اتھرازیہ کے ساتھ ہم سلسلہ جوڑ دیا جاتا ہے جیسا کہ شکل (20.1) میں دکھایا گیا ہے۔



شکل (20.1): RC ہم سلسلہ دور کا خاکہ

مزاحمت (R): دوسروں والی مزاحمت میں برقی توانائی یا مقناطیسی توانائی محفوظ نہیں رہ سکتی۔ ایک مزاحمت میں برقی رو اور اس پر عائد کردہ اے

سی ولٹیج ہم بیت نہیں ہوتے۔

مشقف (C): دوسروں والا مشقف اپنے اندر برقی توانائی محفوظ کر سکتا ہے جب ولٹیج عائد کیا جاتا ہے تو چارجنگ کے عمل کی وجہ سے مشقف کی دو دھاتی تختیوں کے درمیان الیکٹران کی دوبارہ تقسیم عمل میں آتی ہے۔ یہ چارجنگ کا عمل اس وقت تک چارج رہتا ہے جب تک کہ مشقف پر عائد کردہ ولٹیج مبداء (Source) کے ولٹیج کے برابر نہ ہو جائے۔ مشقف سے اس کا اظہار ہوتا ہے کہ مشقف کے اندر توانائی کو محفوظ کیا جاسکتا ہے۔ ایک مشقف اے سی ولٹیج کے مبداء کے پہلے نصف سائیکل کے دوران اس سے برقی توانائی حاصل کر کے اسے ذخیرہ کرتا ہے اور دوسرے نصف سائیکل میں اس توانائی کو اے سی ولٹیج کے مبداء کو واپس کرتا ہے۔ اگر مشقف کی برقی مشقف (C) ہو تو اس میں محفوظ توانائی $\frac{1}{2} CV^2$ کے مساوی ہوتی ہے۔

20.3 نظریہ (Theory)

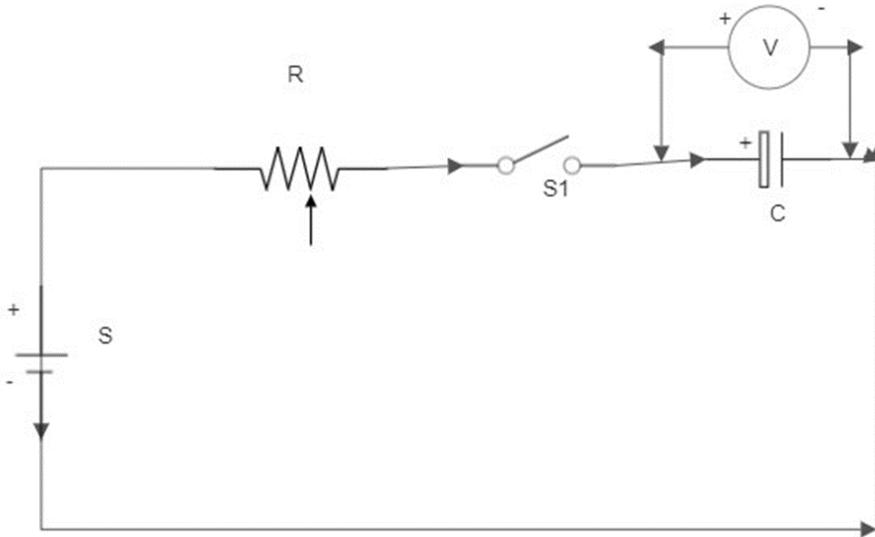
ہم سلسلہ آر سی دور (Series RC Circuit):

مشقف کے دوران چارجنگ ولٹیج $V = V_0 (1 - e^{-t/RC})$ دیا جاتا ہے اور مشقف پر ڈی سی چارجنگ ولٹیج $V = V_0 e^{-t/RC}$ ہوتا ہے۔

یہاں پر $t = RC$ وقت مستقل

R مزاحمت، C مشقف

R اور C کو اتھرازیہ کے ساتھ ہم سلسلہ جوڑ دیا جاتا ہے جیسا کہ شکل (20.2) میں دکھایا گیا ہے۔



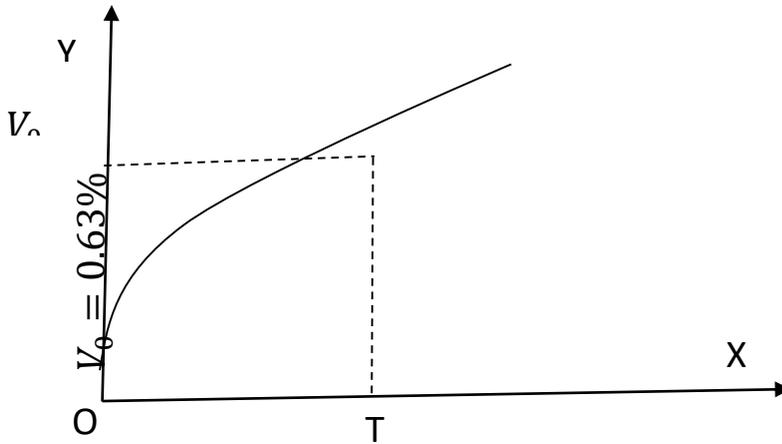
شکل (20.2) RC ہم سلسلہ دور کا خاکہ

20.4 طریقہ عمل (Procedure)

1. R اور C کو اتھرازیہ کے ساتھ ہم سلسلہ میں جوڑ دیا جائے جیسا کہ شکل (20.1) میں دکھایا گیا ہے۔
2. وو لٹیج کو مکشفہ کے درمیان جوڑ دیا جائے۔
3. مکشفہ کے دوران وو لٹیج کو چارجنگ اور ڈس چارجنگ کے ساتھ معلوم کریں گے۔

I. چارجنگ کے تور پر وو لٹیج کی جانچ

- i. پاور سپلائی کو اس طرح ترتیب دیجیے کہ وقت کے ساتھ مکشفہ میں تبدیلی رہے۔
- ii. پاور سپلائی کے ذریعہ مکشفہ میں برقی رو کو آعمید کریں کی مکشفہ چارجنگ ہو۔
- iii. چارجنگ کو (برقی رو) تبدیلی کرنے پر وقت کے ساتھ ساتھ مکشفہ کی درمیانی وو لٹیج میں تبدیلی کو ظاہر کریں۔
- iv. ہر 5sec وقت کے لیے اسٹاپ واچ کی مدد سے وو لٹیج کو نوٹ کی جائے۔
- v. اس وو لٹیج کو مشاہدات جدول (20.1) میں درج کیجیے۔
- vi. گراف: وقت (T) کو محور X پر اور وو لٹیج (V) کو محور Y پر لے کر ان کے مابین ایک گراف کھینچیے۔ گراف کے ذریعہ RC وقت مستقل (RC Time Constant) کی قیمت کو معلوم کریں اور اس کی قیمت نظریاتی قیمت کے برابر یعنی 63% ہوتی ہے۔

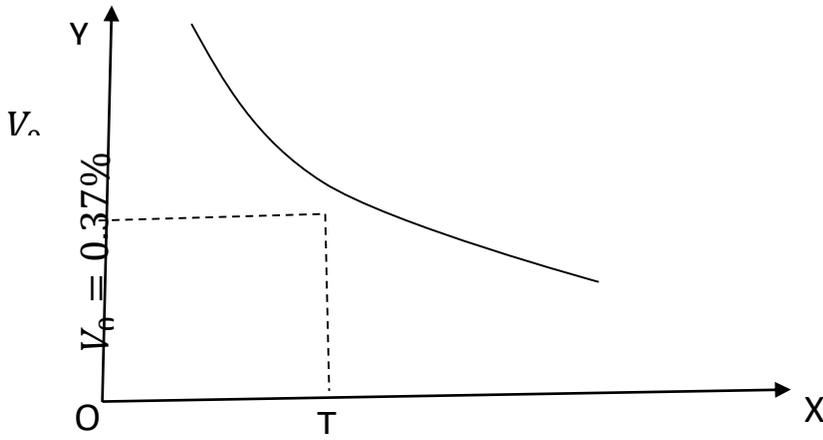


شکل (20.3) چارجنگ کے تور پر وقت t، وو لٹیج کا خاکہ

II. ڈس چارجنگ کے تور پر وو لٹیج کی جانچ:

- i. پاور سپلائی کو ڈس کنیکٹ کر دیجیے تاکہ وقت کے ساتھ مکشفہ میں تبدیلی رہے۔

- .ii ڈس چارجنگ کے دوران وقت کے ساتھ ساتھ مکشفہ کے درمیان وولٹیج کی تبدیلی کو ظاہر کریں۔
- .iii ہر 5sec وقت کے لیے اسٹاپ واچ کی مدد سے وولٹیج کو نوٹ کی جائے۔
- .iv اس وولٹیج کو مشاہدات جدول (20.2) میں درج کیجیے۔
- .v گراف: وقت (T) کو محور X پر اور وولٹیج (V) کو محور Y پر لیے کر ان کے مابین ایک گراف کھینچیے۔ گراف کے ذریعہ RC وقت مستقل (RC Time Constant) کی قیمت کو معلوم کریں اور اس کی قیمت نظریاتی قیمت کے برابر یعنی 37% ہوتی ہے۔



شکل (20.4) ڈس چارجنگ کے تور پر وقت۔ وولٹیج کا خاکہ

20.5 مشاہدہ اور تحسیب (Observations and Analysis)

جدول: وقت اور وولٹیج کا گراف (Voltage Versus Time Graph)

.I چارجنگ کے تور پر وولٹیج کی جانچ:

جدول (20.1)

Capacitance, C	Resistance, R Ohm	Charging	Average
C_1			
C_1			
C_1			

C_1			
C_2			
$C_{eq} = Series$			

.II ڈس چارجنگ کے تو پر وو لیٹیج کی جانچ:

جدول (20.2)

Capacitance C	Resistance R Ohm	Discharging	Average
C_1			
C_2			
$C_{eq} = Series$			

جدول(20.3)

	C_1	C_2	$C_{eq} = Series$
Experimental			

Theoretical			
-------------	--	--	--

20.6 احتیاطی تدابیر (Precautions)

- وو لٹیج کی پیمائش نہایت درستگی سے کرنا چاہئے۔
- گرتی ہوئی وقت کے دوران مشاہدات وو لٹیج کو نوٹ کرنا چاہئے۔
- آپ ایک عمدہ اور تازہ وو لٹیج کے منبع کو استعمال کریں۔ جب اس کو دور میں جوڑا جائے تو یہ بننے نہ لگے۔
- تجربے میں استعمال کیے جانے والے مزاحمت اور مزاحمت کے ڈبے عمدہ کوالٹی کے ہونے چاہئیں۔
- دور کے جوڑ صحیح طور پر جوڑیں۔ کوئی جوڑ ڈھیلا نہ رہنے پائے۔

20.7 روزمرہ زندگی میں اس تجربے کی اہمیت

(Significant of Experiment in Domestic Life)

- اس تجربے کو فوٹو فلٹیش مکشفہ میں فوٹو گرافک کیمروں کے فلٹیش گین میں استعمال کیا جاتا ہے۔
- RC ہم سلسلہ سرکیوٹ کو ڈیکریٹو بلب میں استعمال کیا جاتا ہے۔
- مکشفہ کے دو قسم کو بھی فلٹیش اور تبدیلی ایکٹرانک آلات میں استعمال کر سکتے ہیں۔

20.8 تجربی نتائج (Experimental Results)

نتائج:

i. چارجنگ وو لٹیج کے ذریعہ آر سی وو لٹیج

$$V = V_0 (1 - e^{-t/RC})$$

V = Volts

ii. ڈس چارجنگ وو لٹیج کے ذریعہ آر سی وو لٹیج

$$V = V_0 e^{-t/RC}$$

V=.....Volts

20.9 کلیدی الفاظ (Key Words)

- ہم سلسلہ مکشفے: مکشفوں کو ہم سلسلہ میں جوڑنے کے لیے۔
- Farad:Farad ایک بہت بڑی اکائی ہے۔ یہ برقی گنجائش کی SI اکائی ہے۔
- مکشفے (Capacitor): دو موصل برق کے پرزے جو ایک غیر موصل کے ذریعہ ایک دوسرے سے جدا ہوئے ہو، برقی مکشفے کہلاتے ہیں۔

اپنی معلومات کی جانچ کیجیے (Check your Information Questions)

1. وقت مستقل (Time Constant) کو بیان کرو۔
2. چارج کی وضاحت کرو۔
3. چارج کی SI اور CGS اکائی کیا ہیں۔
4. مزاحمت کی SI اکائی کیا ہے۔
5. اوہم کلیہ کو بیان کرو۔
6. سرکیوٹ میں سلسلہ اور متوازی رابطے کیا ہیں۔
7. مکشفے کی اکائی کیا ہے۔
8. Pico Faraday کو μF میں تبدیل کرو۔
9. RC سرکیوٹ کے مستقل کے تعین کے لیے فارمولا لکھیں۔

اکائی 21۔ ہم سلسلہ یل سی آر گملى دور

(LCR Series Resonance Circuit)

اکائی کے اجزا

تمهید	21.0
مقصد	21.1
آلات	21.2
تشریح آلات	21.2.1
نظریہ	21.3
طریقہ عمل	21.4
مشاہدہ اور تحسب	21.5
احتیاطی تدابیر	21.6
روزمرہ زندگی میں اس تجربے کی اہمیت	21.7
تجربی نتائج	21.8
کلیدی الفاظ	21.9

21.0 تمهید (Introduction)

ہم سلسلہ یل سی آر دور میں C, L اور R کو اہترازیہ کے ساتھ ہم سلسلہ جوڑ دیا جاتا ہے تو ہم سلسلہ یل سی آر دور کہتے ہے۔

21.1 مقصد (Objectives)

ہم سلسلہ یل سی آر دور کے تعدد کے تاثر (Response) کا مطالعہ کرنا اور اس کے کیفی جز (Quality Factor) کی

قیمتوں کو محسوب کرنا۔

i. تعداد اور گملى دور سے گزرنے والی برقی دور کے درمیاں ترسیم کھینچنا۔

ii. گملى تعدد کی تخمین کرنا۔

- iii. ان کے کیفی جز (Quality Factor) کو محسوب کرنا۔
 iv. یہ ثابت کرنا کہ گملی تعدد کا انحصار صرف L اور C کی قیمتوں پر ہوتا ہے۔
 v. یہ ثابت کرنا کہ گملی تعدد پر احالیات اور گنجائش کی متعاملتیں (Reactance) ماوی ہوتی ہیں۔

21.2 آلات (Apparatus)

(10HZ to, 1 MHz) کا ہتر از یہ،
 $L=6.85\text{mH}$ کی احالیات،
 $C=8.55\text{kpf}$ اور $C=377\text{Pf}$ کے مکشفے،
 $10\ \Omega$ اور $100\ \Omega$ کی مزاحمتیں،
 $0-50\text{DC}$ ما نیکرو و ایم پیما B_2 DC راست گر،

21.2.1 تشریح آلات (Apparatus Explanation)

مزاحمت (R): دوسروں والی مزاحمت میں برقی توانائی یا مقناطیسی توانائی محفوظ نہیں رہ سکتی۔ ایک مزاحمت میں برقی رو اور اس پر عائد کردہ اے سی دو لٹیج ہم ہیئت نہیں ہوتے۔

مکشفے (C): دوسروں والا مکشفے اپنے اندر برقی توانائی محفوظ کر سکتا ہے جب دو لٹیج عائد کیا جاتا ہے تو چارجنگ کے عمل کی وجہ سے مکشفے کی دودھاتی تختیوں کے درمیان الکٹران کی دوبارہ تقسیم عمل میں آتی ہے۔ یہ چارجنگ کا عمل اس وقت تک جاری رہتا ہے جب تک کہ مکشفے پر عائد کردہ دو لٹیج مبداء کے دو لٹیج کے برابر نہ ہو جائے۔ گنجائش سے اس کا اظہار ہوتا ہے کہ مکشفے کے اندر توانائی کو محفوظ کیا جاسکتا ہے۔ اگر چیکہ ایک مکشفے سے گزرنے والی برقی رو اور اس پر عائد کردہ دو لٹیج کے تعدد ایک ہی ہوتے ہیں لیکن باعتبار ہیئت، برقی رو دو لٹیج سے بقدر 90 آگے رہتی ہے۔ مکشفے پر عائد کردہ دو لٹیج V_C اور اس سے گزرنے والی برقی رو I_C کے درمیان جو نسبت ہوتی ہے وہ مکشفے کی متعاملت X_C کہلاتی ہے یہ مکشفے کی متعاملت مکشفے کی گنجائش (C) اور اس پر عائد کردہ دو لٹیج کے تعدد (f) کے ساتھ معکوس مناسب رکھتی ہے اس طرح کم گنجائش والا ایک مکشفے اس سے بننے والی رو کے لیے زیادہ مزاحمت کا ہوتا ہے۔ اس طرح سے جیسے جیسے تعدد میں کمی ہوتی جاتی ہے تو مکشفے کی متعاملت میں اضافہ ہوتا جاتا ہے۔ اور دور سے گزرنے والی رو کے لیے مزاحمت میں اضافہ ہو جاتا ہے۔ ایک مکشفے سے ڈی سی (DC) برقی رو نہیں گزرتی۔

ایک مکشفے اے سی (AC) دو لٹیج کے مبداء کے پہلے نصف سائیکل کے دوران اس سے برقی توانائی حاصل کر کے اسے ذخیرہ کرتا ہے اور دوسرے نصف سائیکل میں اس توانائی کو اے سی (AC) دو لٹیج کے مبداء کو واپس کرتا ہے اگر مکشفے کی برقی گنجائش (C) ہو تو اس میں محفوظ توانائی $\frac{1}{2} CV^2$ کے مساوی ہوتی ہے۔

احالیات (L): دوسروں والی احالیات اپنے مقناطیسی میدان میں برقی توانائی کا ذخیرہ کرتا ہے۔ تانبے کے بنا کیے ہوئے (enameled) تار کو

ایک غیر موصل شے پر لچھوں کی شکل میں لپیٹ کر امالی لچھا تیار کیا جاتا ہے۔۔ امالی لچھے سے گزرنے والی رو میں جب تغیرات ہوتے ہیں اس سے متعلقہ مقناطیسی میدان میں بھی تبدیلیاں واقع ہوتی ہیں۔ ایک امالی لچھا اے سی میں دو لٹیج کے پہلے نصف سائیکل کے دوران توانائی کو ذخیرہ کر لیتا ہے اور دوسرے نصف سائیکل کے دوران اسے اے سی دو لٹیج کے مبداء کو واپس کرنا ہے۔ اگر لچھے کی امالیت (L) ہو تو اس میں ذخیرہ ہونے والی توانائی کے $\frac{1}{2} Li^2$ کے مساوی ہوتی ہے۔

امالیت متبادل برقی رو کے بہاؤ کے لیے مزاحمت پیش کرتی ہے۔ اس کو امالی متعالمیت (Reactance Inductive) (X_L) کہتے ہیں۔ یہ متعالمیت (X_L) امالیت کی قیمت (L) اور عائد کردہ اے سی دو لٹیج کے تعداد (f) کے ساتھ تناسب رکھتی ہے ($X_L = 2\pi fL$) جیسے جیسے امالیت کی متعالمیت میں اضافہ ہوتا جاتا ہے برقی رو میں کمی ہوتی جاتی ہے۔ عائد کردہ دو لٹیج کے تعداد میں اضافے کے ساتھ لچھے کی امالی متعالمیت میں بھی اضافہ ہوتا ہے۔

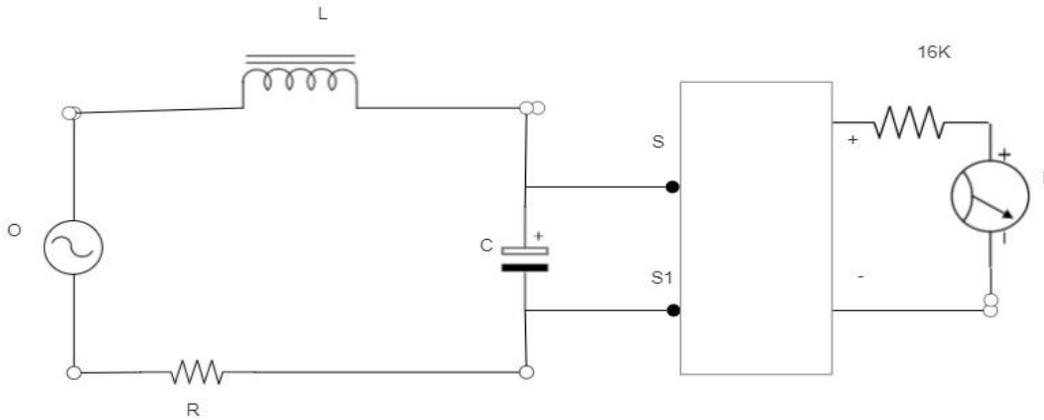
اگرچہ برقی رو اور دو لٹیج کے تعداد مساوی ہوتے ہیں لیکن برقی رو ہیت میں دو لٹیج سے بقدر 90° کے پیچھے رہتی ہے۔

یل سی آر سرکٹ میں گمگی: مکشے کی متعالمیت اور امالی لچھے کی متعالمیت ایک دوسرے کی مخالف سمت میں عمل کرتے ہیں۔ تعدادوں پر مکشے کی متعالمیت زیادہ اور امالی لچھے کی کی متعالمیت کی قیمت کم رہتی ہے۔ عائد کردہ دو لٹیج کے تعداد میں اضافے سے مکشے کی گنجائش کی وجہ سے اس کی متعالمیت میں کمی ہو جاتی ہے اور امالی لچھے کی امالیت کی وجہ سے اس کی متعالمیت میں اضافہ ہو جاتا ہے۔ ایک خاص تعداد پر گنجائش کی وجہ سے مکشے کی متعالمیت (X_C) اور امالی لچھے کی وجہ سے اس کی متعالمیت (X_L) گمگی تعداد (f_0) (Resonance Frequency) کہلاتا ہے۔ اس گمگی تعداد کی قیمت کا انحصار صرف (L) اور (C) اور اس کو فارمولے $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ سے حاصل کیا جاتا ہے جہاں (L) فیراڈ میں اور f_0 کو ہرٹز میں ظاہر کیا جاتا ہے۔

ایک دور میں (L) اور (C) کو ہم سلسلہ جوڑا جاسکتا ہے۔

ہم سلسلہ یل سی آر دور میں گمگی (Resonance In Series LCR Circuit)

R، C، L اور R کو اتھرازیہ کے ساتھ ہم سلسلہ جوڑ دیا جاتا ہے جیسا کہ شکل (21.1) میں دکھایا گیا ہے۔

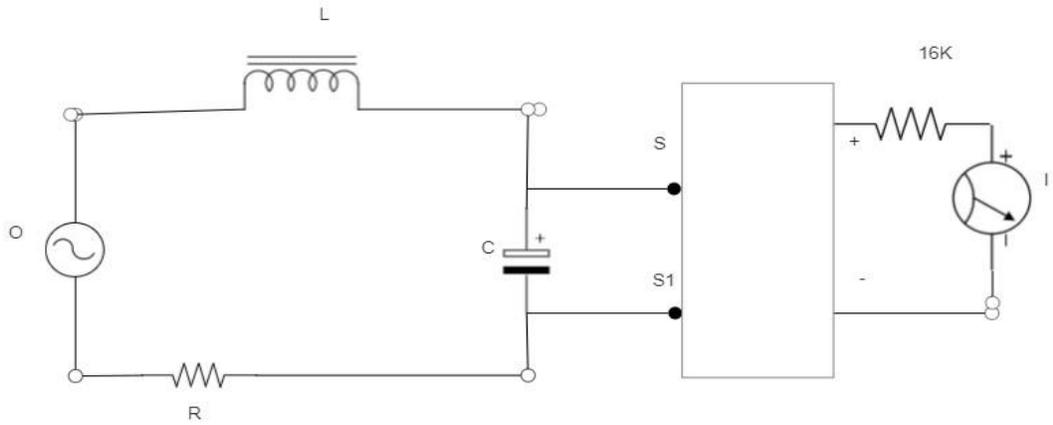


شکل (21.1)

ہم سلسلہ یل سی آردور میں گمک (Resonance In Series LCR Circuit)

C, L اور R کن اہترازیہ کے ساتھ ہم سلسلہ جوڑ دیا جاتا ہے جیسا کہ شکل (21.2) میں دکھایا گیا ہے۔ ایک ہم سلسلہ گمکی دور میں گمکی تعدد پر گنجائش کی وجہ سے متعاملیت اور امالی لچھے کی متعاملیت باہم مخالفت ہوتے ہیں جس کی وجہ سے دور میں برقی رو کا انحصار صرف مزاحمت (R) کی قیمت پر ہوتا ہے برقی رو اور ولٹیج ایک ہی ہیت میں رہتے ہیں اگر مزاحمت کم ہو تو برقی رو کی قیمت زیادہ ہوتی ہے۔

اگر عائد کردہ ولٹیج کا تعدد اور دور کا طبعی تعدد آپس میں مساوی ہو جائیں تو گمک واقع ہوتی ہے اور برقی رو اعظم ترین ہو جاتی ہے۔ امالی لچھے کے گرد کے ولٹیج اور عائد کردہ ولٹیج کے مابین پائی جانے والی نسبت $\left(\frac{X_L}{R}\right)$ یا گنجائش کے گرد کے ولٹیج اور عائد کردہ ولٹیج کے مابین پائی جانے والی نسبت $\left(\frac{X_C}{R}\right)$ دور کا تکبری جز (Magnification Factor) یا کیفی جز (Quality Factor) Q کہلاتا ہے۔ اگر کیفی جز زیادہ ہو تو دور کی مزاحمت کم ہو جاتی ہے اور توانائی کے نقصانات بھی کم ہو جاتے ہیں اور گمک تیز (Sharp) ہو جاتی ہے جیسا کہ شکل (21.3) میں دکھایا گیا ہے تعددوں f_1 اور f_2 پر برقی رو کی قیمت گمک کے وقت کی برقی رو کی قیمت کا 70.7% ہوتی ہے۔ ان دونوں تعددوں کے فرق $(f_2 - f_1)$ کو پٹی کی چوڑائی (band width) کہتے ہیں تنگ چوڑائی والی پٹی کے لیے ہم آہنگی (Tuning) حساس رہتی ہے کیفی جز (Q) کی تحسیب ضابطے $\frac{f_0}{f_2 - f_1}$ سے کی جاتی ہے۔



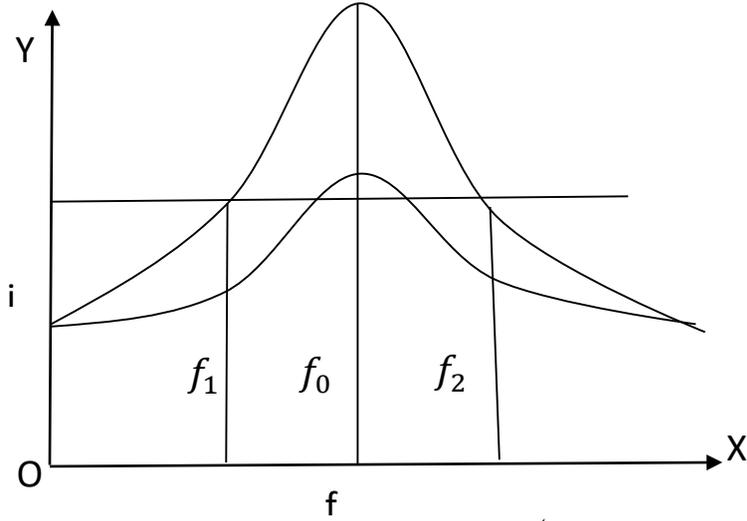
LCR ہم سلسلہ گمکی دور کا خاکہ (21.2)

O- اہتراز گر L- امالی لچھا C- مکشفہ

R- مزاحمت B- برج راست گر- مائیکرو ایم میٹر

ہم سلسلہ یل سی آردور کو استعمال کرتے ہوئے مختلف تعددوں والی امواج آمیزوں کے منجملہ صرف ان موجوں کو علاحدہ کیا جاسکتا ہے یا قبول کیا جاسکتا ہے جن کے تعدد گمکی تعدد کے مساوی ہوں اس لیے ہم سلسلہ یل سی آردور کو قبول کنندہ دور (Acceptor) بھی کہتے

ہیں۔ ان ادوار میں برقی رواد اعظم ترین ہوتی ہے۔ میل سی آردوار کو ریڈیو کے ہوائیہ (aerial) کے ساتھ بطور ہم آہنگی ادوار (Tuning Circuit) کے استعمال کیا جاتا ہے۔



شکل (21.3) ہم سلسلہ میل سی آردور میں تعدد کا تاثر

f_0 - گمکی تعدد $L=6.85$ ملی ہنری

$R=10\Omega$ اور $C=8.55$ پف

$2R = 100\Omega$

21.4 طریقہ عمل (Procedure)

ہم سلسلہ میل سی آردور:

1. مناسب قیمتوں والے امالی لچھے، مکشے اور مزاحمت کا انتخاب کیجیے یعنی $R=10\Omega$ اور $C=8.55$ کپف، $L=6.8$ ملی ہنری
2. R اور C, L کو اتھراز گر کے ساتھ ہم سلسلہ جوڑ دیجیے اور اتھراز گر کے سوئچ کو ایسا ترتیب دیجیے کہ وہ (Sine) موجیں پیدا کرے۔
3. مکشے کے سروں کو برج راست گر کے ان پٹ سروہ سے جوڑ دیجیے اور اس کے آؤٹ پٹ سروں کو ڈی سی (DC) مائیکرو ایم پیما اور 16Ω کی مزاحمت کے ساتھ ہم سلسلہ جوڑ دیجیے۔
4. 10KHZ تعدد کے ریخ کا انتخاب کیجیے۔ نفیس ترتیب دینے والے ناب (knob fine adjustment) کو اس طرح مرتب کیجیے کہ بالکل 10KHZ کی (Sine) موجیں پیدا ہو جائے۔
5. تعدد میں 10KHZ سے 30KHZ تک 1KHZ کے وقفہ سے اضافہ کیجیے کے اضافے سے سرکٹ کی برقی رو میں بھی اضافہ ہوتا ہے جس سے مائیکرو ایم پیما میں انصراف اس کے پیمانے کے باہر چلا جاسکتا ہے۔

6. اس وقت اهتزاز گر کے دو لٹیج میں کمی کیجیے جو کہ اهتزاز گر کے قوہ پیمائے کی جاسکتی ہے یہ کمی اس وقت تک کی جانی چاہیے جب تک کہ مائیکرو ایم پیما میں انصراف $45\mu A$ نہ ہو جائے۔ ہر مشاہدہ کے وقت اس عمل کو دہراتے رہیے تاکہ مائیکرو ایم پیما کی ریڈنگ اسکیل کے اندر ہی رہے۔

7. اهتزاز گر کے تعدد کو $10KHZ$ پر ترتیب دیجیے اور مائیکرو ایم پیما کے مشاہدات نوٹ کیجیے اور انہیں ذیل میں دیے گئے جدول میں درج کیجیے۔

8. تعدد کو ایک KHZ کے وقفے سے بڑھاتے جائیے اور متعلقہ برقی رو کو نوٹ کرتے جائیے۔ ان مشاہدات کو جدول (21.1) میں درج کیجیے۔ ابتدا میں اضافے کے ساتھ برقی رو کی ریڈنگ میں اضافہ ہوتے جاتا ہے اور وہ ایک اعظم ترین قیمت تک پہنچ جاتی ہے۔ تعدد کو مزید بڑھائیں تو برقی رو کی ریڈنگ میں کمی ہوتے جاتی ہے اور رفتہ رفتہ صفر تک پہنچ جاتی ہے۔

9. جدول (21.1) کے مشاہدات کو استعمال کرتے ہوئے تعدد کو x - محور اور برقی رو کو y - محور پر لے کر ایک ترسیم کھینچیے۔ یہ ترسیم شکل (21.3) کے مماثل ہوگی۔ اعظم ترین برقی رو کے تناظر کا تعدد ہم سلسلہ یل سی آر گمگی تعدد (f_0) ہوتا ہے۔

10. y - محور کے ساتھ اعظم ترین برقی رو کے 0.707 گنا پر واقع نقطہ سے x - محور کے متوازی ایک خط کھینچیے جو شکل (21.3) منحنی کو دو مقامات پر قطع کرتا ہے۔ پہلے نقطہ نقطہ کے تناظر کا تعدد (f_1) گمگی تعدد سے کم اور دوسرے نقطہ تقاطع کے تناظر کا تعدد (f_2) گمگی تعدد سے زیادہ ہوتا ہے۔ ان دونوں تعددوں کا فرق معلوم کیجیے۔ اور ضابطہ $Q = \frac{f_0}{f_2 - f_1}$ استعمال کرتے ہوئے دور کے کیفی جز کو محسوب کیجیے۔

11. اهتزاز گر کے دو لٹیج L اور C کی قیمتیں تبدیل کیے بغیر اور 10 کی مزاحمت کو 100 کی مزاحمت سے بدل کر تجربے کو دہرائیے۔ ہر تعدد پر برقی رو کی ریڈنگ نوٹ کیجیے اور انہیں جدول (21.1) میں درج کیجیے۔ ان مشاہدات کے لیے ایک ترسیم کھینچیے ایک چھوٹی منحنی جیسا کہ شکل (21.3) میں دکھایا گیا ہے حاصل ہوتی ہے اس منحنی کے لے گمگی تعدد کو نوٹ کیجیے اور دیکھیں کہ دونوں منحنیوں کے لیے یہ ایک ہی ہے۔

12. گمگی تعدد پر امالی لچھے کی متعاملیت ضابطہ $X_L = 2\pi f_0 C$ سے اور کشفہ کی متعاملیت کو ضابطہ $X_C = \frac{1}{2\pi f_0 C}$ سے معلوم کیجیے۔ دونوں قیمتیں ایک ہی ہوں گی۔

13. ضابطہ $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ کو استعمال کرتے ہوئے گمگی تعدد کو محسوب کیجیے۔ گمگی تعدد کی محسوب قیمت اور گراف سے تخمینہ قیمت مساوی ہوں گی۔

21.5 مشاہدہ اور تحسیب (Observations and Analysis)

جدول (21.1)

C=8.55kpf, L=6.85mH امالیت

R=100ohms برقی رو $\mu A(i)$ میں	R=10 Ohms برقی رو $\mu A(i)$ میں	تعدد (f) KHZ میں	سلسلہ نشان
		10	1
		11	2
		.	3
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
		30	30

21.6 احتیاطی تدابیر (Precautions)

- امالیت کی قیمت (L) ہنر میں برقی گنجائش کی قیمت (C) فیراڈس میں LCR کے ذریعہ بالکل صحیح طور پر پیمائش کرنا چاہئے صرف ایسی ہی صورت میں f_0 کی تجربی قیمتیں ایک دوسرے سے منطبق ہوں گی۔

- اہتزاز گر کے آؤٹ پٹ وولٹیج کو بتدریج بڑھایا جائے ورنہ مائیکرو ایمپیاز زیادہ برقی رو کے پھینکنے سے خراب ہو جائے گا۔
- ہم نوازی میل سی آردو میں مبدائی مزاحمت کو زیادہ رکھنا چاہیے اس لیے اہتزاز گر کے ساتھ 200 تا 600 اوہم کی مزاحمت کو ہم سلسلہ جوڑا جانا چاہیے۔
- آپ ایک عمدہ اور تازہ دوولٹیج کے منبع کو استعمال کریں۔ جب اس کو دور میں جوڑا جائے تو یہ بننے نہ لگے۔
- تجربے میں استعمال کیے جانے والے مزاحم اور مزاحمت کے ڈبے عمدہ کوالٹی کے ہونے چاہئیں۔
- دور کے جوڑے صحیح طور پر جوڑیں۔ کوئی جوڑ ڈھیلا نہ رہنے پائے۔

21.7 روزمرہ زندگی میں اس تجربے کی اہمیت

(Significant of Experiment in Domestic Life)

- ہم سلسلہ LCR سرکٹ ریڈیو میں ہم آہنگی (Tuning) کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ یہ سرکٹ صرف مطلوبہ ریڈیو نشریات کو حاصل کرتا ہے بلکہ کمزور سگنلوں کی تکبیر بھی کرتا ہے۔
- ہم سلسلہ سرکٹس کو بطور فلٹر استعمال کیا جاتا ہے۔

21.8 تجربی نتائج (Experimental Results)

نتائج:

i. گلی تعداد کی تخمین

$$X_L = 2\pi f_0 C = \dots \dots \dots mH$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi f_0 C} = \dots \dots \dots Pf$$

ii. ان کے کیفی جز: $Q = \frac{f_0}{f_2 - f_1}$ (Quality factor)

$$Q = \dots \dots \dots$$

21.9 کلیدی الفاظ (Key Words)

- مزاحمت (Resistance): جس سے برقی رو کے گزرنے پر مزاحمت پیدا ہوتی ہے۔ اسے موصل کی مزاحمت کہتے ہیں۔
- مکشفے (Capacitor): دو موصل برق کے پرزے جو ایک غیر موصل کے ذریعہ ایک دوسرے سے جدا ہوئے ہو، برقی مکشفے کہلاتے ہیں۔

- ہم سلسلہ مکشفے: مکشفوں کو ہم سلسلہ میں جوڑنے کے لیے
- مکشفی اثر (X_C): مکشفے میں سے اعظم ترین برقی رو یا چوٹی والی برقی ہے۔
- امالی اثر [X_L] [Inductive reactance]: تب ہم یہ دیکھیں گے کہ L متبادل برقی رو میں امالہ کی مزاحمت ہے جسے امالی اثر کہتے ہیں۔

اپنی معلومات کی جانچ کیجیے (Check your Information Questions)

1. مزاحمت کیا ہوتی ہے۔
2. مکشفہ کیا ہوتا ہے۔
3. امالی لچھا کیا ہوتا ہے۔
4. کیا ایک مزاحمت برقی توانائی کا ذخیرہ کر سکتی ہے۔
5. دور کے کس جز میں برقی رو کی ہیئت دو لٹیج سے آگے رہتی ہے۔
6. ہم سلسلہ یل سی آر سرکٹ میں کون سی مقدار میں آپس میں مساوی لیکن مخالف ہوتی ہیں۔
7. ہم سلسلہ یل سی آر سرکٹ میں برقی رو اور ہیئت کا تفاوت کتنا ہوتا ہے۔
8. ہم سلسلہ یل سی آر سرکٹ میں برقی رو اعظم ترین کیوں ہوتی ہے۔
9. ہم سلسلہ یل سی آر سرکٹ میں پیٹی کی چوڑائی کی تخمین کس طرح کی جاتی ہے۔
10. ہم سلسلہ یل سی آر سرکٹ کے استعمالات کیا ہوتے ہیں۔
11. ہم سلسلہ یل سی آر سرکٹ میں مقاومت کی کیا قیمتیں ہوتی ہیں۔
12. فلٹرس کیا ہوتے ہیں۔

اکائی 22۔ ہم متوازی میل سی آر گمکی دور

(LCR Parallel Resonance Circuits)

اکائی کے اجزا

تمہید	22.0
مقصد	22.1
آلات	22.2
تشریح آلات	22.2.1
نظریہ	22.3
طریقہ عمل	22.4
مشاہدہ اور تحسیب	22.5
احتیاطی تدابیر	22.6
روزمرہ زندگی میں اس تجربے کی اہمیت	22.7
تجربی نتائج	22.8
کلیدی الفاظ	22.9

22.0 تمہید (Introduction)

ہم متوازی میل سی آر دور میں C, L اور R کو اہترازیہ کے ساتھ ہم متوازی جوڑ دیا جاتا ہے تو ہم متوازی میل سی آر دور کہتے ہیں۔

22.1 مقصد (Objectives)

ہم متوازی میل سی آر دور کے تعدد کے تاثر (response) کا مطالعہ کرنا اور اس کے کیفی جز (Quality Factor) کی قیمتوں

کو محسوب کرنا۔

i. تعدد اور گمکی دور سے گزرنے والے برقی رو کے درمیان ترسیم کھینچنا۔

ii. گمکی تعدد کی تخمین کرنا۔

- iii. ان کے کیفی جز (Quality factor) کو محسوب کرنا۔
 iv. یہ ثابت کرنا کہ گمگی تعدد کا انحصار صرف L اور C کی قیمتوں پر ہوتا ہے۔
 v. یہ ثابت کرنا کہ گمگی تعدد پر امالیت اور گنجائش کی متعاملتیں (Reactance) مساوی ہوتی ہیں۔

22.2 آلات (Apparatus)

10 Hz to, 1 MHz) کا ہتزاز یہ

L=6.85mH کی امالیت

C= 8.55kpf اور C= 377 Pf کے مکشفے

10 Ω اور 100Ω کی 1W کی مزاحمتیں۔

22.2.1 تشریح آلات (Apparatus Explanation)

مزاحمت (R): دوسروں والی مزاحمت میں برقی توانائی یا مقناطیسی توانائی محفوظ نہیں رہ سکتی۔ ایک مزاحمت میں برقی رو اور اس پر عائد کردہ الے سی دو لٹیج ہم ہیبت نہیں ہوتے۔

مکشفے (C): دوسروں والا مکشفے اپنے اندر برقی توانائی محفوظ کر سکتا ہے جب وو لٹیج عائد کیا جاتا ہے تو چارجنگ کے عمل کی وجہ سے مکشفے کی دو دھاتی تختیوں کے درمیان الکٹران کی دوبارہ تقسیم عمل میں آتی ہے۔ یہ چارجنگ کا عمل اس وقت تک جاری رہتا ہے جب تک کہ مکشفے پر عائد کردہ وو لٹیج مبداء کے وو لٹیج کے برابر نہ ہو جائے۔ گنجائش سے اس کا اظہار ہوتا ہے کہ مکشفے کے اندر توانائی کو محفوظ کیا جاسکتا ہے۔ اگرچیکہ ایک مکشفے سے گزرنے والی برقی رو اور اس پر عائد کردہ وو لٹیج کے تعدد ایک ہی ہوتے ہیں لیکن باعتبار ہیبت، برقی رو وو لٹیج سے بقدر 90 آگے رہتی ہے۔ مکشفے پر عائد کردہ وو لٹیج V_C اور اس سے گزرنے والی برقی رو I_C کے درمیان جو نسبت ہوتی ہے وہ مکشفے کی متعاملت X_C کہلاتی ہے یہ مکشفے کی متعاملت مکشفے کی گنجائش (C) اور اس پر عائد کردہ وو لٹیج کے تعدد (f) کے ساتھ معکوس مناسب رکھتی ہے اس طرح کم گنجائش والا ایک مکشفے اس سے بننے والی رو کے لیے زیادہ مزاحمت کا ہوتا ہے۔ اس طرح سے جیسے جیسے تعدد میں کمی ہوتی جاتی ہے تو مکشفے کی متعاملت میں اضافہ ہوتا جاتا ہے۔ اور دور سے گزرنے والی رو کے لیے مزاحمت میں اضافہ ہو جاتا ہے۔ ایک مکشفے سے ڈی سی (DC) برقی رو نہیں گزرتی۔

ایک مکشفے اے سی (AC) دو لٹیج کے مبداء کے پہلے نصف سائیکل کے دوران اس سے برقی توانائی حاصل کر کے اسے ذخیرہ کرتا ہے اور دوسرے نصف سائیکل میں اس توانائی کو اے سی (AC) دو لٹیج کے مبداء کو واپس کرتا ہے اگر مکشفے کی برقی گنجائش (C) ہو تو اس میں محفوظ توانائی $\frac{1}{2} CV^2$ کے مساوی ہوتی ہے۔

امالیت (L): دوسروں والی امالیت اپنے مقناطیسی میدان میں برقی توانائی کا ذخیرہ کرتا ہے۔ تانبے کے بنا کیے ہوئے (enameled) تار کو ایک غیر موصل شے پر لچھوں کی شکل میں لپیٹ کر امالی لچھاتیار کیا جاتا ہے۔۔ امالی لچھے سے گزرنے والی رو میں جب تغیرات ہوتے ہیں

اس سے متعلقہ مقناطیسی میدان میں بھی تبدیلیاں واقع ہوتی ہیں۔ ایک امالی لچھائے سی میں دو لٹیج کے پہلے نصف سائیکل کے دوران توانائی کو ذخیرہ کر لیتا ہے اور دوسرے نصف سائیکل کے دوران اسے اے سی دو لٹیج کے مبداء کو واپس کرنا ہے۔ اگر لچھے کی امالیت (L) ہو تو اس میں ذخیرہ ہونے والی توانائی کے $\frac{1}{2} Li^2$ کے مساوی ہوتی ہے۔

امالیت متبادل برقی رو کے بہاؤ کے لیے مزاحمت پیش کرتی ہے۔ اس کو امالی متعاملیت (Reactance Inductive) (X_L) کہتے ہیں۔ یہ متعاملیت (X_L) امالیت کی قیمت (L) اور عائد کردہ اے سی دو لٹیج کے تعداد (f) کے ساتھ تناسب رکھتی ہے ($X_L = 2\pi fL$) جیسے جیسے امالیت کی متعاملیت میں اضافہ ہوتا جاتا ہے برقی رو میں کمی ہوتی جاتی ہے۔ عائد کردہ دو لٹیج کے تعداد میں اضافے کے ساتھ لچھے کی امالی متعاملیت میں بھی اضافہ ہوتا ہے۔

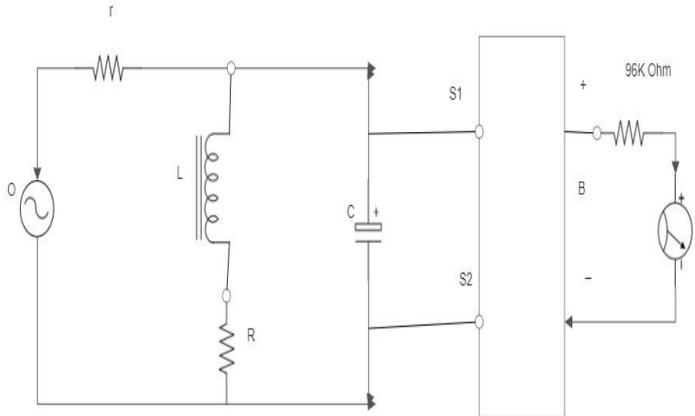
اگرچہ برقی رو اور دو لٹیج کے تعداد مساوی ہوتے ہیں لیکن برقی رو ہیئت میں دو لٹیج سے بقدر 90° کے پیچھے رہتی ہے۔

یل سی آر سرکٹ میں گنگی:

مکشفے کی متعاملیت اور امالی لچھے کی متعاملیت ایک دوسرے کی مخالف سمت میں عمل کرتے ہیں۔ تعدادوں پر مکشفے کی متعاملیت زیادہ اور امالی لچھے کی متعاملیت کی قیمت کم رہتی ہے۔ عائد کردہ دو لٹیج کے تعداد میں اضافے سے مکشفے کی گنجائش کی وجہ سے اس کی متعاملیت میں کمی ہو جاتی ہے اور امالی لچھے کی امالیت کی وجہ سے اس کی متعاملیت میں اضافہ ہو جاتا ہے۔ ایک خاص تعداد پر گنجائش کی وجہ سے مکشفے کی متعاملیت (X_C) اور امالی لچھے کی وجہ سے اس کی متعاملیت (X_L) گنگی تعداد (f_0) (Resonance Frequency) کہلاتا ہے۔ اس گنگی تعداد کی قیمت کا انحصار صرف (L) اور (C) اور اس کو فارمولے $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ سے حاصل کیا جاتا ہے جہاں (L) فیراڈ میں اور f_0 کو ہرٹز میں ظاہر کیا جاتا ہے۔

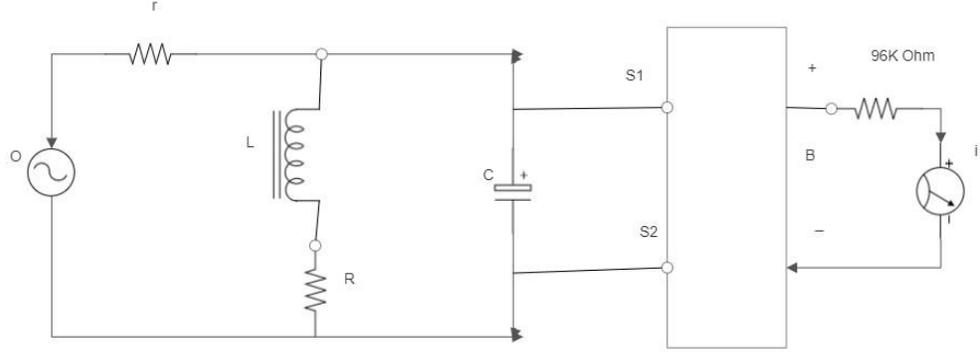
ایک دور میں (L) اور (C) کو ہم متوازی جوڑا جاسکتا ہے۔

ہم متوازی یل سی آر دور میں گنگ (Resonance in LCR Circuit)



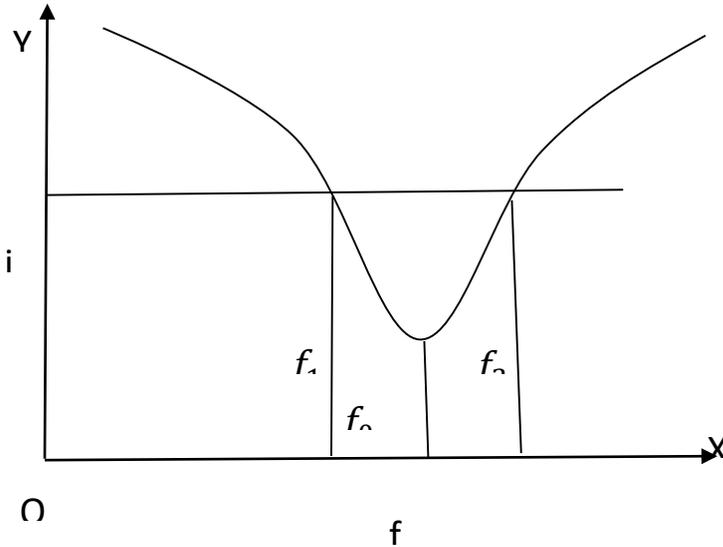
شکل (22.1)

ہم متوازی یل سی آردور میں گمک (Resonance in LCR Circuit)



شکل (22.2)

اس دور میں امانی لچھے اور مکشف C کو اہتر از گر کے متوازی جوڑا جاتا ہے جیسا کہ شکل (22.2) میں دکھایا گیا ہے۔ جب (L) اور (C) کو ہم متوازی جوڑ دیا جاتا ہے تو بلحاظ عائد کردہ اے سی AC وولٹیج کے امانی لچھے میں برقی رو کی ہیئت بقدر 90° اس سے پیچھے رہتی ہے اور مکشف میں برقی رو کی ہیئت تعد 90° آگے رہتی ہے لہذا ان دونوں برقی روؤں میں تفاوت ہیئت 180° ہوتا ہے اور وہ ایک دوسرے کی مخالفت بھی کرتے ہیں۔ اگرچیکہ امانی لچھے اور مکشف سے زیادہ بڑی روئیں گزرتی ہیں لیکن دور کی اصلی رو بہت کم رہتی ہے اور یہ مزاحمت R سے گزرنے والی برقی رو کے مساوی ہوتی ہے جیسا کہ شکل (22.2) میں دکھایا گیا ہے گمکی تعد پر برقی رو اقل ترین رہتی ہے۔



شکل (22.3) ہم متوازی یل سی آردور میں تعد دکاتا اثر

ہم متوازی یل سی آر کی گمک کے برقی دور کا خاکہ

L=امانی لچھا, R=مزاحمت, C=مکشف, O=اہتر از گر V=بڑی مزاحمت, B=برج راست گر

$$Pf \ 377=C \quad , \ mHz6.85=L$$

$$2R=100\Omega \quad , \ 1-R=10.\Omega \quad f_0 \text{ گمگی تعدد}$$

ہم متوازی میل سی آردور میں متعاملیت زیادہ ہوتی ہے اور برقی رو کم اس لیے اس دور کو مسترد دور (Rejecter circuit) کہا جاتا ہے۔ ان ادوار کو بطور فلٹر ادوار اور اہترازی ادوار استعمال کیا جاتا ہے۔ متوازی ادوار کے لیے کیفی جز کی پیمائش اسی طرح کی جاتی ہے جیسا کہ ہم سلسلہ میل سی آردوار کے لیے کی جاتی ہے۔

22.4 طریقہ عمل (Procedure)

1. امالیت گنجائش اور مزاحمت کی مناسب قیمتوں کا انتخاب کیجیے۔ $R=10\Omega$ اور $C=377Pf$ $L=6.85mH$
2. امالی لچھے، مکشے اور مزاحمت کو اہتراز گر کے ساتھ متوازی شکل (22.1) کے مطابق جوڑ دیجیے۔
3. $X100KHZ$ تعدد کے ریٹنگ کا انتخاب کیجیے۔ اہتراز گراؤٹ پٹ (output) دو لیٹج کو السا ہی ترتیب دیجیے جیسا کہ ہم سلسلہ دور کی صورت میں سمجھایا گیا ہے تاکہ تعدد کی $100KHZ$ سے $500KHZ$ تبدیلی کے دوران برقی رو کی ریڈنگ ہمیشہ مائیکرو ایم پیما کے اسکیل کے اندر ہی رہے۔ (یعنی $45\mu A$)
4. تعدد کو $10KHZ$ کے وقفہ سے $100KHZ$ سے $500KHZ$ تک بڑھاتے جائیے اور تعدد کی ہر تبدیلی کے لیے رو کی قیمت نوٹ کیجیے اور مشاہدات کو جدول (22.1) میں درج کیجیے۔
5. ابتدا تعدد میں جب اضافہ ہوتا ہے تو برقی رو میں کمی ہوتی جاتی ہے اور یہ ایک اقل ترین قیمت تک پہنچ جاتی ہے تعدد کے مزید اضافے سے برقی رو کی ریڈنگ بھی اقل ترین قیمت سے بڑھتی جاتی ہے۔
6. تعدد کو X ۔ محور اور برقی رو کو Y ۔ محور پر لیتے ہوئے جدول (22.3) کے مشاہدات کے مابین ایک ترسیم کھینچیے یہ ترسیم شکل (4.2) کے مماثل ہوتی ہے۔ برقی رو کے اقل ترین قیمت کے متناظر تعدد کو نوٹ کیجیے۔ یہ تعدد گمگی تعدد f_0 کہلاتا ہے۔
a. ضابطے $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ سے گمگی تعدد کی تحسب کیجیے۔
L۔ ہرلیس اور C۔ فیراڈ کی پیمائش میں کیجیے۔
 f_0 کی یہ دونوں قیمتیں آپس میں مساوی ہونی چاہیے۔
7. برقی رو کی اقل ترین قیمت $\frac{1}{0.707}$ گنا قیمت کو محسوب کیجیے محور Y پر اس قیمت والے محدودے محور X کے متوازی ایک خط کھینچیے یہ خط منحنی کو دو نقاط پر قطع کرتا ہے پہلے نقطہ تقاطع کا متناظر تعدد f_1 گمگی تعدد سے کم اور دوسرے نقطہ تقاطع کا متناظر تعدد f_2 گمگی تعدد سے زیادہ ہوتا ہے۔
ضابطے $Q = \frac{f_0}{f_2 - f_1}$ کو استعمال کرتے ہوئے دو کے کیفی جز (Q) کی قیمت محسوب کیجیے۔

8. گمکی تعدد پر ضابطے $X_L = 2\pi f_0 C$ سے امالی لچھے کی متعاملیت اور ضابطے $X_C = \frac{1}{2\pi f_0 C}$ سے مکشفے کی متعاملیت کو محسوب کیجیے۔ یہ دونوں قیمتیں مساوی ہوتی ہیں۔

9. برقی گنجائش، امالیت، اہتراز گر کا آؤٹ پٹ و ولٹیج تبدیل کے بغیر 10Ω کی مزاحمت کے بجائے 100Ω کی مزاحمت استعمال کرتے ہوئے تجربے کو دہرائیے۔ کھنچی گئی ترسیم سے گمکی تعدد کی قیمت معلوم کیجیے گمکی تعداد ان ہر دو صورتوں میں مساوی رہے گا۔

22.5 مشاہدہ اور تحسیب (Observations and Analysis)

جدول (22.1)

$C=377\text{Pf}$ برقی گنجائش، $L=6.85\text{mH}$ امالیت

R=100Ohms برقی رو، i_o , μA میں	R=10 Ohms برقی رو، i_o , μA میں	تعدد (f) KHZ میں	سلسلہ نشان
		100	1
		110	2
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
		500	41

22.6 احتیاطی تدابیر (Precautions)

- امالیت کی قیمت (L) ہنریس میں برقی گنجائش کی قیمت (C) فیراڈس میں LCR کے ذریعہ بالکل صحیح طور پر پیمائش کرنا چاہئے صرف ایسی ہی صورت میں f_0 کی تجربی قیمتیں ایک دوسرے سے منطبق ہوں گی۔
- اہتزاز گر کے آڈٹ پٹ وولٹیج کو بتدریج بڑھایا جائے ورنہ مائیکرو ایم پیما زیادہ برقی رو کے پہنچنے سے خراب ہو جائے گا۔
- ہم متوازی میل سی آر دور میں مبداء کی مزاحمت کو زیادہ رکھنا چاہیے اس لیے اہتزاز گر کے ساتھ 200 تا 600 اوہم کی مزاحمت کو ہم سلسلہ جوڑا جانا چاہیے۔
- آپ ایک عمدہ اور تازہ وولٹیج کے منبع کو استعمال کریں۔ جب اس کو دور میں جوڑا جائے تو یہ بہنے نہ لگے۔
- تجربے میں استعمال کیے جانے والے مزاحم اور مزاحمت کے ڈبے عمدہ کوالٹی کے ہونے چاہئیں۔
- دور کے جوڑ صحیح طور پر جوڑیں۔ کوئی جوڑ ڈھیلا نہ رہنے پائے۔

22.7 روزمرہ زندگی میں اس تجربے کی اہمیت

(Significant of Experiment in Domestic Life)

- ہم متوازی LCR سرکٹ، ایک اہتزاز گر میں بطور ٹینک سرکٹ میں استعمال کیا جاتا ہے۔
- ہم متوازی سرکٹس کو بطور فلٹر میں استعمال کیا جاتا ہے۔

22.8 تجربی نتائج (Experimental Results)

نتائج:

.iii گلی تعداد کی تخمین

$$X_L = 2\pi f_0 C = \dots \dots \dots mH$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi f_0 C} = \dots \dots \dots Pf$$

.iv ان کے کیفی جز: $Q = \frac{f_0}{f_2 - f_1}$ (Quality factor)

Q=.....

22.9 کلیدی الفاظ (Key Words)

- گمک والی تعداد (Z): اس تعداد پر LCR گھیرے کا انسداد عقل ترین ہو گا جو R کے مساوی ہو۔ اس تعداد پر برقی رو کی قیمت LCR گھیرے میں اعظم ترین ہوگی۔ اس تعداد کو گمک والی تعداد کہتے ہیں۔

- F_0 : گمگ کی تعدد $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ گمگ پر LCR هم سلسله دور میں برقی روا عظم تری ہوتی ہے۔
- متوازی مکشفے: مکشفوں کو متوازی میں جوڑنے کے لیے

اپنی معلومات کی جانچ کیجیے (Check your Information Questions)

1. کیا ایک مکشفہ برقی توانائی کا ذخیرہ کر سکتا ہے۔
2. ہم متوازی LCR سرکٹ کے اطلاقات (Applications) کیا ہیں۔
3. کیا ہم متوازی LCR سرکٹ میں برقی روا عظم ترین ہوتی ہے۔
4. ایک دور کے کیفی جز (Quality factor) سے کیا مراد ہے۔
5. (a) مکشفے (b) امالی لچھے میں ذخیرہ کردہ توانائی کی مقدر کتنی ہونی چاہئے۔

اکائی 23۔ نٹ ورک کے مسئلوں کی تصدیق

(Verification of Network Theorems)

اکائی کے اجزا

تمہید	23.0
مقصد	23.1
آلات	23.2
تشریح آلات	23.2.1
نظریہ	23.3
طریقہ عمل	23.4
مشاہدہ اور تحسیب	23.5
احتیاطی تدابیر	23.6
روزمرہ زندگی میں اس تجربے کی اہمیت	23.7
تجربی نتائج	23.8
کلیدی الفاظ	23.9

23.0 تمہید (Introduction)

تھیوریمز اور نارٹن کے مسئلوں کو کسی بھی پیچیدہ نٹ ورک (Network) کے متبادل دور کو حاصل کرنے کے لیے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ تھیوریمز کا مسئلہ یہ بیان کرتا ہے کہ مزاحمتوں (Resistors) اور بیٹریوں پر کوئی بھی نٹ ورک جو دو برآمدی سرے رکھتا ہے کے ایک ایسے مساوی ولٹیج کے منبع V_{Th} کے طور پر گھٹایا جاسکتا ہے جو ایک مساوی مزاحمت R_{Th} دور میں ہم سلسلہ رکھتا ہے۔ مساوی، برآمدی سروں پر ولٹیج کے مساوی ہوتا ہے جب کہ لوڈ (Load) کی رو صفر ہوتی ہے۔ مساوی مزاحمت برآمدی سروں پر مزاحمت کے مساوی ہوتی ہے جب کہ بیٹریاں صفر مزاحمت سے بدل دی گئی ہوں۔

23.1 مقصد (Objectives)

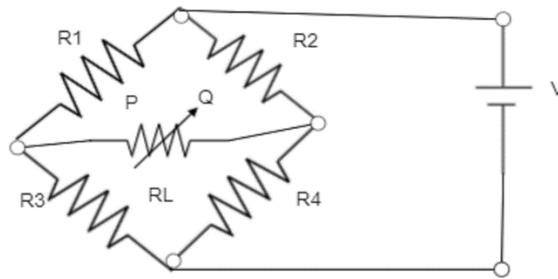
- آپ کو اس سے واقف کرانا ہے کہ ایسے پیچیدہ الیکٹرانک ادوار کو کس طرح آسان شکل میں پیش کریں جن کی وولٹیج-رو (Voltage-Current) کی خصوصیات ایسی ہی ہوتی ہیں جیسی کہ اصل دور کی۔
- i. اس تجربے میں تھیونین اور نارٹن کے مسئلوں کو استعمال کرتے ہوئے ایک متبادل نٹ ورک (Equivalent Network) کے ذریعہ پیچیدہ الیکٹرانک جال کا تجزیہ کریں۔
- ii. اس تجربے میں تھیونین اور نارٹن کے مسئلوں کو استعمال کرتے ہوئے ایک متبادل نٹ ورک (Equivalent Network) کے ذریعہ پیچیدہ الیکٹرانک جال کا تجزیہ کریں۔

23.2 آلات (Apparatus)

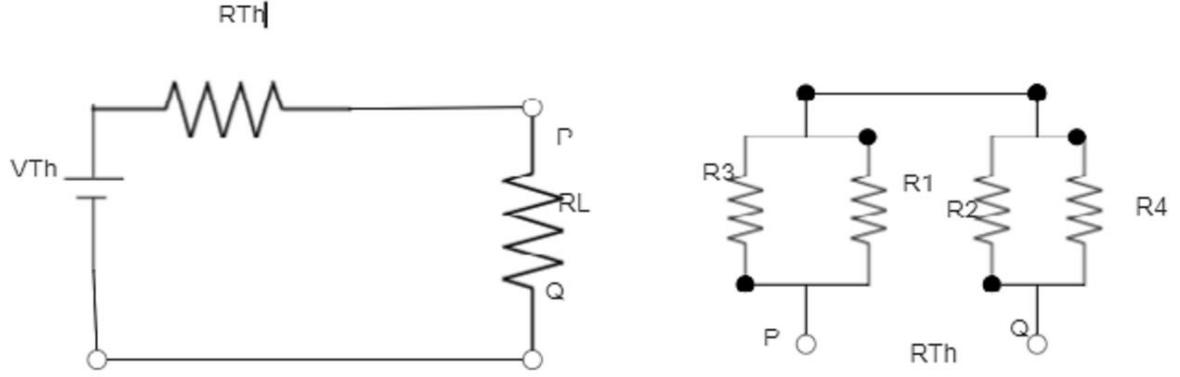
- کاربن کے مزاحمت (Carbon Resistors) ڈاٹ کنجی،
کثیر پیم (Multi meter)،
مزاحمت کا ڈبہ،
1.5 ولٹ کی بیٹری،

23.2.1 تشریح آلات (Apparatus Explanation)

تھیونین اور نارٹن کے مسئلوں کو کسی بھی پیچیدہ نٹ ورک (Network) کے متبادل دور کو حاصل کرنے کے لیے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ تھیونین کا مسئلہ یہ بیان کرتا ہے کہ مزاحمتوں (Resistors) اور بیٹریوں پر کوئی بھی نٹ ورک جو دو برآمدی سرے رکھتا ہے کے ایک ایسے مساوی وولٹیج کے منبع V_{TH} کے طور پر گھٹایا جاسکتا ہے جو ایک مساوی مزاحمت R_{TH} دور میں ہم سلسلہ رکھتا ہے۔ مساوی برآمدی سروں پر وولٹیج کے مساوی ہوتا ہے جب کہ لوڈ (Load) کی رو صفر ہوتی ہے۔ مساوی مزاحمت برآمدی سروں پر مزاحمت کے مساوی ہوتی ہے جب کہ بیٹریاں صفر مزاحمت سے بدل دی گئی ہوں۔ مثال کے طور پر بموجب شکل (23.1) وہیٹ اسٹون کے پل کے نٹ ورک (Wheatstone bridge Network) پر غور کیجیے (23.2) میں اس کا متبادل تھیونین کا دور بتایا گیا ہے۔



شکل (23.1) وہیٹ اسٹون کے پل کا نٹ ورک



شکل (23.2) وہیٹ اسٹون کے پل کے لیے تھیوینن کا متبادل دور

23.3 نظریہ (Theory)

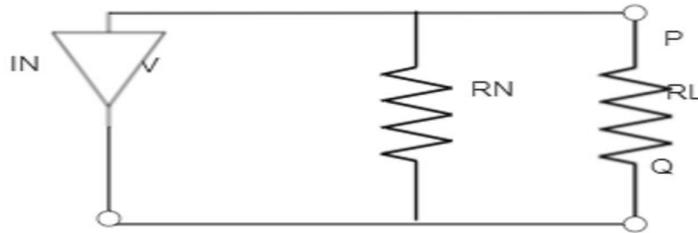
مساوی مزاحمت R_{Th} اس طرح بتایا جاتا ہے۔

$$R_{Th} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} R_3 + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} R_4 \quad (23.1)$$

برآمدی سروں پر کھلے دور کا ولٹیج P اور Q کے درمیان تفاوت قوہ ہے۔ R_4 کے گرد IR کی گراوٹ کو R_3 کے گرد IR کی گراوٹ میں سے تفریق کر کے اس تفاوت قوہ کو حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$V_{Th} = \frac{V}{R_1 + R_3} \cdot R_3 + \frac{V}{R_2 + R_4} \cdot R_4 \quad (23.2)$$

اسی وہیٹ اسٹون کے پل کے نٹ ورک کا تجزیہ نارٹن کے مسئلہ کو بھی استعمال کر کے کیا جاسکتا ہے۔ نارٹن کا مسئلہ بیان کرتا ہے کہ بیائریوں اور مزاحمتوں کے کسی بھی نٹ ورک جس میں دو برآمدی سرے سے ہوں رو کے منبع I_N اور مساوی مزاحمت R_N کے ایک متوازی ترکیب (Combination) سے بدلا جاسکتا ہے۔ رو کا منبع I_N قصر دور (Short Circuit) ہے یعنی لوڈ (Load) کی رو ہے جب کہ لوڈ کی مزاحمت صفر ہو۔ وہیٹ اسٹون کے پل کے نٹ ورک کے متبادل نارٹن کے دور میں مساوی مزاحمت $R_N = R_{Th}$ کو شکل (23.3) میں دکھایا گیا ہے۔



شکل (23.3) وہیٹ اسٹون کے پل کے لیے نارٹن کا متبادل دور

نارٹن کی متبادل رو

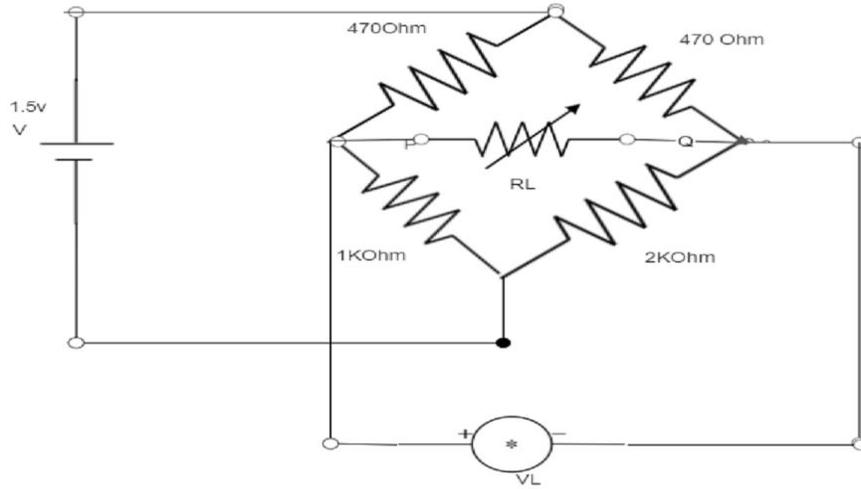
$$I_N = \frac{V_{Th}}{R_{Th}} \quad (23.3)$$

جہاں $V_{Th} = R_n$ ہے۔

23.4 طریقہ عمل (Procedure)

i. تھیوریم کے مسئلے کی جانچ:

پل کے دور کو بموجب شکل (23.4) جوڑیئے۔ ایک مزاحمتی ڈبے کو لوڈ مزاحمت R_L کے طور پر جوڑیئے۔ آپ شکل (23.4) میں دکھائی گئی قیمتوں والے مزاحمت استعمال کر سکتے ہیں یا R_1, R_2, R_3, R_4 کے لیے دستیاب کوئی بھی مزاحمت کام میں لاسکتے ہیں۔ اب آپ R_L کے گرد و لٹیج V_L کی پیمائش کیجیے اور ڈاٹا (23.1) کی جدول میں جدول بندی کیجیے۔



شکل (23.4) تھیوریم کے مسئلے کی جانچ کے لیے دور

K-ڈاٹ کنجی V_L ملی روپیا (Millimeter)

R_L کو X - محور پر اور V_L کو Y - محور پر لیتے ہوئے V_L ہم قابل R_L کی ایک ترسیم بنائیے۔ جب R_L لامتناہی قیمت کی طرف

بڑھتا ہے تو V_L کی قیمت V_{Th} حاصل ہوتی ہے۔ اس قیمت کو ترسیم سے معلوم کیجیے۔ مساوات (23.2) کو بھی استعمال کر کے V_{Th} کو محسوب کیجیے ان دونوں قیمتوں کا تقابل کیجیے۔ آپ ایک ملی ایم پیما (Mille ammeter) کے استعمال سے P اور Q کے درمیان دو لٹیج کی پیمائش کر کے اور R_L کو غیر مربوط کر کے V_{Th} کی راست طور پر قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔ اب ان قیمتوں کا تقابل کیا ظاہر کرتا ہے؟ آئیے نتائج کا تجزیہ کیجیے۔

نتائج:

$$(V_{Th})_{\text{ترسیم}} = (V_{Th})_{\text{graph}} =$$

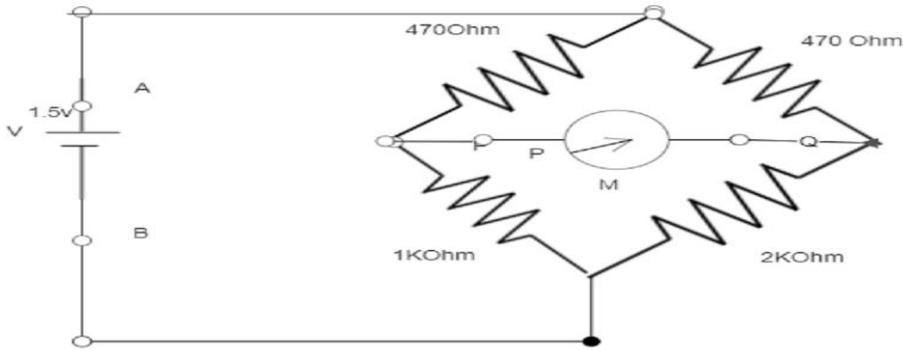
$$(V_{Th})_{\text{cal}} = \text{تھیب}$$

$$(V_{Th})_{\text{direct}} = \text{راست}$$

تجزیہ:

.ii نارٹن کے مسئلے کی جانچ:

پل کے دور سے R_L کو منقطع کر دیجیے اور بموجب شکل (23.5) جب $R=0$ ہو تو قصر دور (Short Circuit) کی رو کی پیمائش کیجیے۔ اس قیمت سے I_N حاصل ہوگا۔ I_N کی پیمائش کے دوران رو کے ریٹج میں ملی ایم پیما کو استعمال کیجیے۔



شکل (23.5) نارٹن کے مسئلے کی جانچ کے لیے دور K- ڈاٹ کنجی۔ M ملی ایم پیما

P اور Q کے درمیان سے ایم پیما (ملی ایم پیما) کو ہٹا دیجیے۔ بیٹری کو منقطع کر دیجیے اور (AB) کو قصر دور کرتے ہوئے A اور B کو تار کے ایک چھوٹے ٹکڑے سے جوڑیے۔ تب مزاحمت کے ریٹج میں کثیر پیما (Multi meter) استعمال کرتے ہوئے P اور Q کے درمیان مزاحمت کی پیمائش کیجیے۔ یہ مزاحمت $R_N = R_{Th}$ کے مساوی ہوتی ہے۔

$$(23.3) \text{ مساوات یعنی } I_N = \frac{V_{Th}}{V_N} \text{ کو استعمال کرتے ہوئے } I_N, R_{Th} \text{ کو محسوب کیجیے۔}$$

اس قیمت کا تقابل تجربی طور پر حاصل ہونے والی قیمت سے کیجیے اور اس کا تجزیہ کیجیے۔

نتیجہ:

$$(I_N)_{\text{exp}} = \text{تجربی}$$

$$(I_N)_{\text{cal}} = \text{تھیبی}$$

تجزیہ:

23.5 مشاہدہ اور تخصیب (Observations and Analysis)

جدول (23.1)

V_L (V)	R_L (Ω)	سلسلہ نشان

23.6 احتیاطی تدابیر (Precautions)

- آپ ایک عمدہ اور تازہ دو لٹیج کے منبع کو استعمال کریں۔ جب اس کو دور میں جوڑا جائے تو یہ بہنے نہ لگے۔
 - تجربے میں استعمال کیے جانے والے مزاحمت اور مزاحمت کے ڈبے عمدہ کوالٹی کے ہونے چاہئیں۔
 - دور کے جوڑ صحیح طور پر جوڑیں۔ کوئی جوڑ ڈھیلا نہ رہنے پائے۔
-

23.7 روزمرہ زندگی میں اس تجربے کی اہمیت

(Significant of Experiment in Domestic Life)

- i. تھیویمن اور نارٹن کے مسئلوں کو استعمال کر کے برقی انجینئرنگ (Engineering) اور الیکٹرانیاٹ کے کئی ایک پیچیدہ نٹ ورک (Network) کا تجزیہ کیا جاسکتا ہے۔
 - ii. نٹ ورک کے ان دو آسان مسئلوں کی مدد سے پیچیدہ ادوار کے نٹ ورک کے جال میں ہر ایک نٹ ورک کی کارکردگی کو علیحدہ سے سمجھنے میں آسانی ہوتی ہے۔
-

23.8 تجربی نتائج (Experimental Results)

نتائج:

$$(V_{Th})_{\text{ترسیم}} = (V_{Th})_{\text{graph}} = (V_{Th})_{\text{cal}} = \text{تخمین}$$
$$(V_{Th})_{\text{direct}} = \text{راست}$$

تجزیہ:

نتائج:

$$(I_N)_{\text{تجربی}} = (I_N)_{\text{cal}} = \text{تخمین}$$

تجزیہ:

23.9 کلیدی الفاظ (Key Words)

- کلیہ اوم (Ohm's Law): جارج سمین اوم نے کلیہ اوم بیان کیا۔ طبعی حالات (جیسے ابعاد تپش اور میکا نیکی بگاڑ وغیرہ) مستقل ہوں تب کسی موصل میں برقی رو کی حدت اس کے سروں پر عائد کردہ تفاوت قوہ کے راست تناسب ہوتی ہے۔ یعنی $i \propto V$
- اوم (Ohm): کسی موصل کی مزاحمت ایک اوم (1Ω) اس وقت کہلاتی ہے جب کہ اس میں سے گزرنے والی برقی رو ایک امپیر ہو جب کہ اس کے کناروں پر ایک وولٹ تفاوت قوہ عائد کی جائے۔
- مزاحمت (Resistance): کسی موصل کی مزاحمت کو اس کے سروں پر عائد کیا گیا تفاوت قوہ 'V' اور اس میں سے گزرنے والی برقی رو (i) کی نسبت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اپنی معلومات کی جانچ کیجیے (Check your Information Questions)

1. نارٹن کی روح کی پیمائش میں جو ایم پیما آپ نے استعمال کیا ہے وہ بھی مزاحمت رکھتا ہے جس کو نظر انداز نہیں کیا جاسکتا۔ تو کیا آپ بالکل درست نتائج حاصل کر سکتے ہیں؟
2. دو پیچیدہ نٹ ورک میں ایک خلا کردہ نیوں (Vacuum Tubes) پر اور دو سٹرانسٹر (Transistors) پر مشتمل ہے۔ آپ تھیویمن کے مسئلے کا اطلاق کس نٹ ورک پر کریں گے؟ اور نارٹن کے مسئلے کو کس نٹ ورک کے ضمن میں استعمال میں لائیں گے؟ اس کی وضاحت کیجیے۔
3. ایک سمعی سگنل جزیٹر (Audio Signal Generator) رو کا ایک منبع ہے یا دو لیٹج کا؟

اکائی 24- سپرپوزیشن اور اعظم ترین پاور ٹرانسفر مسئلہ کی تصدیق

(Verification of Superposition and Maximum Power Transfer Theorem)

اکائی کے اجزا

تمہید	24.0
مقصد	24.1
آلات	24.2
تشریح آلات	24.2.1
نظریہ	24.3
طریقہ عمل	24.4
مشاہدہ اور تحسیب	24.5
احتیاطی تدابیر	24.6
روزمرہ زندگی میں اس تجربے کی اہمیت	24.7
تجربی نتائج	24.8
کلیدی الفاظ	24.9

24.0 تمہید (Introduction)

ایک برقی نٹ ورک کی تشریح بہ آسانی کی جاسکتی ہے اگر اس نٹ ورک کو ہم سلسلہ یا ہم متوازی میں تبدیل کر دیا جائے لیکن بعض نٹ ورک کو ہم سلسلہ یا ہم متوازی ترتیب میں تبدیل نہیں کیا جاسکتا اس موقع پر اس پیچیدہ نٹ ورک کی تشریح سپرپوزیشن کے ذریعے کی جاتی ہے۔ ایک خطی سرکیٹ میں جو ایک سے زائد آزاد توانائی کے ذرائعوں پر مشتمل ہو تمامی رد عمل (دولٹیج یا کرنٹ) سرکیٹ کے کس شاخ میں ہو تو وہ دو ذرائعوں کو حرکت میں رکھتے ہوئے ہر ایک آزادانہ طور پر حرکت کرنے والے ذرائعوں کے سفجملہ ایک رد عمل کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔

24.1 مقصد (Objectives)

- i. سپر پوزیشن نظریہ کے ذریعہ سرکیوٹ میں کرنٹ کی تخمین کرنا۔
- ii. اعظم ترین پاور ٹرانسفر مر کی تصدیق کیجیے۔

24.2 آلات (Apparatus)

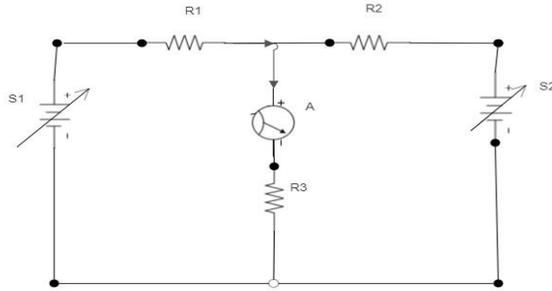
کاربن کی مختلف مزاحمتیں،	دو لٹیچ، ہلٹی میٹر،
جوڑنے والے تار،	پلگ چابی،
1.5V کامبداء،	ڈاٹ کنجی،
	مزاحمت کاڈبہ،

24.2.1 تشریح آلات (Apparatus Explanation)

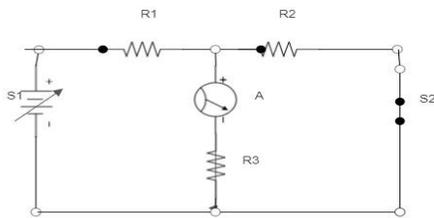
ایک برقی نٹ ورک کی تشریح بہ آسانی کی جاسکتی ہے اگر اس نٹ ورک کو ہم سلسلہ یا ہم متوازی میں تبدیل کر دیا جائے لیکن بعض نٹ ورک کو ہم سلسلہ یا ہم متوازی ترتیب میں تبدیل نہیں کیا جاسکتا اس موقع پر اس پیچہ نٹ ورک کی تشریح سپر پوزیشن کے ذریعے کی جاتی ہے۔

I. سپر پوزیشن کا اصول:

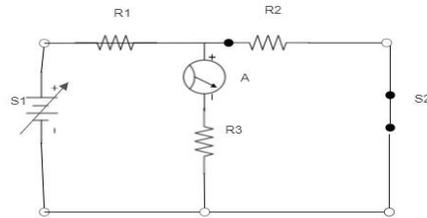
ایک خطی سرکیوٹ میں جو ایک سے زائد آزاد توانائی کے ذرائعوں پر مشتمل ہو تمامی رد عمل (دو لٹیچ یا کرنٹ) سرکیوٹ کے کس شاخ میں ہو تو وہ دو ذرائعوں کو حرکت میں رکھتے ہوئے ہر ایک آزادانہ طور پر حرکت کرنے والے ذرائعوں کے سفجملہ ایک رد عمل کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔



شکل (24.1)



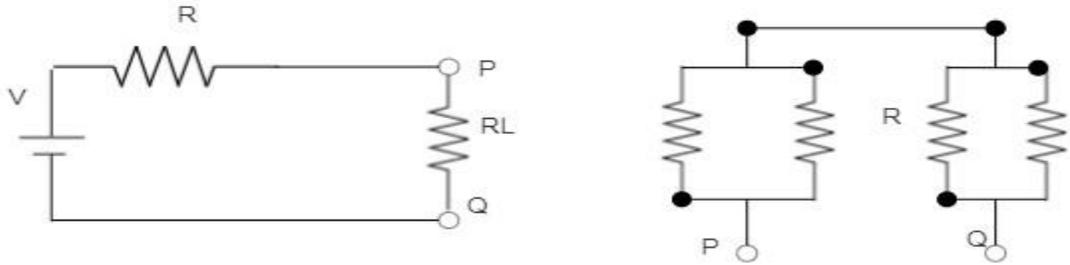
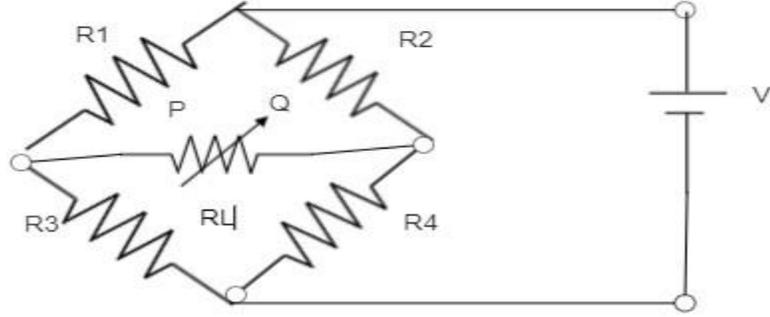
شکل (24.2)



شکل (24.3)

II. اعظم ترین پاور ٹرانسفر مسئلہ:

برقی سرکیٹ مثلاً ریڈیو ٹرانسمیٹر یا فوٹو گراف افزوں گر میں یہ ضروری ہے کہ سرکیٹ سے برقی پاور کی اعظم ترین مقدار لوڈ مزاحمت کو جو کہ antenna یا لاؤڈ اسپیکر ہوتا ہے ایصال کی جائے اعظم ترین پاور ٹرانسفر کیلئے کے بموجب ایک مبداء کا لوڈ کو ایصال کیا ہو پاور اعظم ترین ہوتا ہے جب کہ لوڈ مزاحمت مساوی ہو مبداء کی داخلی مزاحمت (Internal Resistance) کے اس کیلئے کی تصدیق کے لیے ویٹ اسٹون بیل کے نٹ ورک پر غور کیجیے جیسا کہ شکل (24.4) میں دکھایا گیا ہے۔



شکل (24.4)

24.3 نظریہ (Theory)

اعظم ترین پاور ٹرانسفر مسئلہ:

اعظم ترین پاور ٹرانسفر مسئلہ کے تصدیق کے لیے سرکیٹ لوڈ R_L کو ایصال کیا جانے والا پاور مساوی ہوگا۔

$$P = I^2 R_L$$

$$\left(\because I = \frac{V}{R + R_L} \right) \quad P = \left(\frac{V}{R + R_L} \right)^2 \cdot R_L = \frac{V^2}{R_L \left(1 + \frac{R}{R_L} \right)^2}$$

یہ مساوات کی رو سے لوڈ کو ایصال کیا جانے والا پاور صفر ہوگا اگر لوڈ مزاحمت کی قیمت کم ہو یا قیمت زیادہ ہو لہذا لوڈ مزاحمت کی قیمت

واجبی ہونی چاہئے۔ تاکہ پاور اعظم ترین ہو۔ فرض کرو کہ یہ پاور P_L ہے۔ تب

$$\begin{aligned} \frac{dP_L}{dR_L} = 0 &\Rightarrow \frac{dP_L}{dR_L} = \frac{d}{dR_L} \left[V^2 R_L^{-1} \left(1 + \frac{R}{R_L} \right)^{-2} \right] = 0 \\ &= \frac{d}{dR_L} \left[V^2 R_L^{-1} \left(1 + \frac{R}{R_L} \right)^{-2} \right] = 0 \\ &= V^2 \left[\left(1 + \frac{R}{R_L} \right)^{-2} (-1) R_L^{-2} + R_L^{-1} (-2) \left(1 + \frac{R}{R_L} \right)^{-3} \left(\frac{-R}{R_L^2} \right) \right] = 0 \\ &\frac{2R}{R_L^3} \frac{1}{\left(1 + \frac{R}{R_L} \right)^3} - \frac{1}{R_L^2 \left(1 + \frac{R}{R_L} \right)^2} = 0 \\ &\frac{2R}{R_L \left(1 + \frac{R}{R_L} \right)^{-1}} = 0 \\ &\frac{2R}{R_L \left(1 + \frac{R}{R_L} \right)} = 1 \Rightarrow \frac{2R}{R_L} = 1 + \frac{R}{R_L} \\ &1 + \frac{R}{R_L} = 1 \Rightarrow R = R_L \end{aligned}$$

یہ مساوات سے یہ ظاہر کرتی ہے کہ لوڈ کو ایصال کردہ پاور اس وقت اعظم ترین ہوتا ہے جب کہ لوڈ مزاحمت مساوی ہوتی ہے نٹ ورک کے داخلی مزاحمت کے جب لوڈ مزاحمت داخلی مزاحمت کے مساوی ہوتی ہے تب یہ کہا جاتا ہے کہ لوڈ سرکٹ سے ملاپ (Match) کرتا ہے۔

24.4 طریقہ عمل (Procedure)

I. سپر پوزیشن نظریہ:

1. سرکیٹ کو شکل (24.2) کے مطابق جوڑ دیجیے۔
2. مبداء کو آید کرتے ہوئے پلگ (Plug) چابی کو بند کیجیے۔
3. S_1 اور S_2 مبداء کے دو لٹیچ کو خاص طور پر سیٹ کریں۔
4. ایم میٹر کی رڈینگ کو نوٹ کرتے ہوئے (D) کی پیمائش کیجیے۔
5. S_2 مبداء کو ڈس کنکٹ کریں اور S_1 (Source) مبداء کو سرکیٹ میں آید کرتے ہوئے ایم میٹر کی رڈینگ کے ذریعہ I'

کو معلوم کیجیے۔

6. اسی طور پر S_1 کو ڈس کنیکٹ کریں اور S_2 مبداء کو سرکیوٹ میں آید کرتے ہوئے ایم میٹر کی رڈینگ کے ذریعے I'' کو نوٹ کریں۔

7. I' ، I'' قیمتیں کے ذریعہ کو سپر پوزیشن نظریہ کو معلوم کریں۔

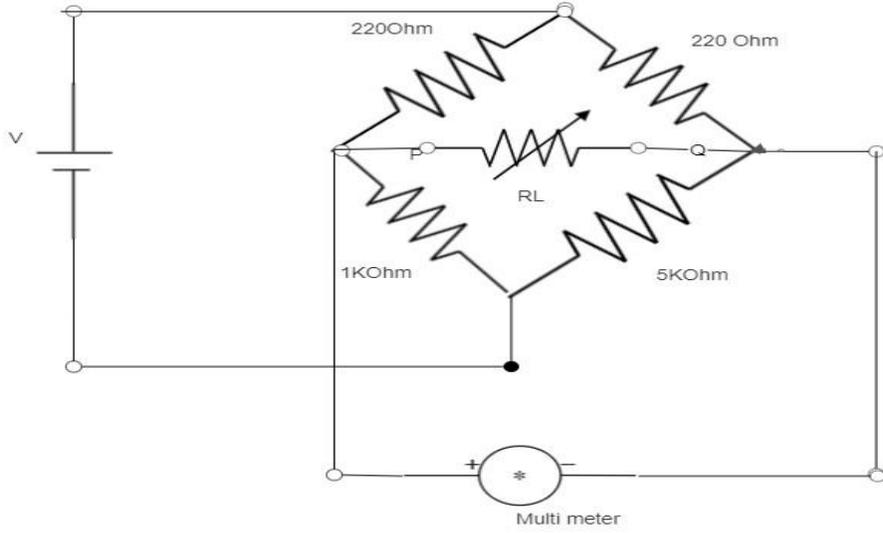
$$I = I' + I'' \quad .8$$

9. اس نتائج کو جدول (24.1) میں درج کیجیے۔

10. اس طرح مختلف دو لیٹج پر تجربہ کو دہریئے۔

II. اعظم ترین پاور ٹرانسفر مسئلہ کی تصدیق:

برج سرکیوٹ کو شکل (24.5) کے مطابق جوڑ دیجیے۔



شکل (24.5) اعظم ترین پاور ٹرانسفر مسئلہ کی تصدیق کے لیے سرکیوٹ

نقاط P اور Q کے درمیان صندوقچہ مزاحمت کو جوڑ دیجیے اور لوڈ مزاحمت R_L پر مختلف مزاحمت R_L کی قیمت کے لیے ملٹی میٹر کے ذریعہ دو لیٹج کی پیمائش کیجیے نتائج کو جدول (24.2) میں درج کیجیے۔

R_L اور P کے درمیان ایک ترسم کھینچیے۔

ترسم کے ذریعے P کی اعظم ترین قیمت پر R_L کی قیمت معلوم کیجیے جو کہ R_L, P_{max} ہوگا۔ برج نیٹ ورک جو پاور ایصال کر رہا ہے اس کی داخلی مزاحمت مساوات کے ذریعہ معلوم کر سکتے ہیں۔

$$R = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}$$

24.5 مشاہدہ اور تحسیب (Observations and Analysis)

1. سپرپوزیشن نظریہ:

جدول (24.1)

شمارہ سلسلہ	ووٹیج		I کی قیمت (amps)	S ₁ اور S ₂ مبداء عید پر کی قیمت (amps)	S ₂ کی عید پر I' کی قیمت (amps)
	S ₂	S ₁			

2. اعظم ترین پاور ٹرانسفر مسئلہ کی تصدیق:

جدول (24.2)

نشان سلسلہ	R _L Ohm	V _L Volts	$I = \frac{V_L}{R_L}$ Amp	$P = I^2 R_L$
1				
2				
3				

--	--	--	--	--

24.6 احتیاطی تدابیر (Precautions)

- برقی رویا دو لٹیج کی ملٹی میٹر کے ذریعے پیمائش کرتے وقت برقی روادرو لٹیج کی قیمت نوٹ کیجیے۔
- جو مبداء دو لٹیج آپ استعمال کر رہے ہیں وہ اچھی حالت میں ہونا چاہئے۔
- تمام جوڑا اچھی طرح لگائیے جوڑ ڈھیلا نہ رہنے پائے۔
- آپ ایک عمدہ اور تازہ دو لٹیج کے منبع کو استعمال کریں۔ جب اس کو دور میں جوڑا جائے تو یہ بننے نہ لگے۔
- تجربے میں استعمال کیے جانے والے مزاحمت اور مزاحمت کے ڈبے عمدہ کوالٹی کے ہونے چاہئیں۔
- دور کے جوڑ صحیح طور پر جوڑیں۔ کوئی جوڑ ڈھیلا نہ رہنے پائے۔

24.7 روزمرہ زندگی میں اس تجربے کی اہمیت

(Significant of Experiment in Domestic Life)

- الیکٹرانکس آلات کی عمدہ کارکردگی کے لیے مقاومت کی (Matching) ایک اہم مسئلہ ہے۔ اعظم ترین پاور ٹرانسفر مسئلہ کے بموجب داخلی مزاحمت اور لوڈ مزاحمت کو آپس میں مساوی رکھتے ہوئے مقاومت کی میاچنگ بہ آسانی حاصل کی جاسکتی ہے۔
- اس تجربے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ سپر پوزیشن نظریہ کو استعمال کرتے ہوئے روکی تصدیق کر سکیں۔

24.8 تجربی نتائج (Experimental Results)

نتائج:

i. سپر پوزیشن نظریہ کے ذریعہ سرکیوٹ میں کرنٹ کی تخمین

$$I = \dots \text{Amp}$$

ii. اعظم ترین پاور ٹرانسفر مر کی تصدیق

$$P = \dots \text{Watts}$$

- اعظم ترین روکی قیمت (Maximum Value of Current): کسی متبادل رو میں گزرنے والی برقی رو کی سب سے اعظم ترین قیمت جو ایک لمحے کیلئے رہتی ہے۔
- اوسط قیمت (Average Value): یہ کسی نقطہ سے نصف دور کے دوران سے گزرنے والے برقی بار کی Sine موج کے تمام قیمتوں کا اوسط ہے۔
- جذر اوسط مربع قیمت (rms Value): یہ ایک مکمل دور کی تمام لحقاتی قیمتوں کے مربعوں کے اوسط کا جذر ال مربع ہوتی ہے۔

اپنی معلومات کی جانچ کیجیے (Check your Information Questions)

1. ایک لوڈ پاور کے ایصال کے لیے ایک جنریٹر کی اعظم ترین کارکردگی (Maximum) کیا ہے۔
2. برج سرکٹ میں آپ مبداء و لٹیج کے لیے 1.5V برقی خانہ استعمال کرتے ہیں۔
3. سرکٹ کے دوسرے اجزاء پر اس مبداء کی داخلی مزاحمت کا کیا اثر ہوتا ہے۔

MAULANA AZAD NATIONAL URDU UNIVERSITY

B.Sc. (Physics) II Semester Examination

Practical Model Paper

Paper: BSPH250CCP

کل نمبرات: 50 Total Marks

وقت: 3 گھنٹے Time 3 Hours

1. ملٹی میٹر کا استعمال کرتے ہوئے۔ (a)۔ مزاحمت (b)۔ ڈائیوڈ کی تصدیق کریں۔
2. ملٹی میٹر کی مدد سے۔ (a)۔ AC اور DC دو لٹیج (b)۔ DC برقی رو کی تصدیق کریں۔
3. RC سرکیوٹ ہم سلسلہ میں جوڑ کر چارجنگ و لٹیج کے ذریعہ آرسی و لٹیج اور وقت مستقل کی پیمائش کیجئے۔
4. RC سرکیوٹ ہم سلسلہ میں جوڑ کر ڈس چارجنگ و لٹیج کے ذریعہ آرسی و لٹیج اور وقت مستقل کی تخمین کریں۔
5. سلسلہ یل سی آردور کے تعدد کے تاثر (Response) کا مطالعہ کریں اور اس کے کیفی جز: (Quality Factor) 'Q' کی قیمتوں کو محسوب کریں۔
6. ہم سلسلہ یل سی آردور کی مدد سے تعدد اور گمگی دور سے گزرنے والی برقی دور کے درمیان ترسیم کھینچئے۔ اور گمگی تعدد کی تخمین کریں۔ ان کے کیفی جز کو محسوب کیجئے۔
7. ہم متوازی یل سی آردور کے تعدد کے تاثر (Response) کا مطالعہ کریں اور اس کے کیفی جز: (Quality Factor) 'Q' کی قیمتوں کو محسوب کیجئے۔
8. ہم متوازی یل سی آردور کے مدد سے کیفی جز: (Quality Factor) کو معلوم کیجئے۔
9. تھیونین کے مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے ایک تبادول نیٹ ورک (Equivalent Network) کے ذریعہ کسی پیچیدہ الکٹراننی جال کا تجزیہ کیجئے۔
10. نارٹن کے مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے ایک تبادول نیٹ ورک (Equivalent Network) کے ذریعہ کسی پیچیدہ الکٹراننی جال کا تجزیہ کیجئے۔
11. سپریوزیشن نظریہ کو استعمال کرتے ہوئے رو کی تصدیق کریں۔
12. اعظم ترین پاور ٹرانسفر مر کی تصدیق کیجئے۔

☆☆☆