BSMM201CCT

تفرقی مساوات

(Differential Equations)

مع

لیب مینول

(Lab Manual)

بیچلر آف سائنس (بی۔ایس سی۔)

(دوسرا سمسٹر)

نظامت فاصلاتی تعلیم

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

حیدرآباد-32، تلنگانہ-بھارت

Course-Bachelor of Science (B.Sc.)
ISBN: 978-93-93722-19-5
Edition: March, 2022

ناشر	:	رجسٹرار، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد
اشاعت	:	مارچ، 2022
قیمت	:	345 روپے
تعداد	:	600 کاپیاں
کمپوزنگ	:	ڈاکٹر کاشف خان، نظامت فاصلاتی تعلیم، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد
ترتیب وتزئین	:	ڈاکٹر محمد اکمل خان / ڈاکٹر کاشف خان ، نظامت فاصلاتی تعلیم، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد
سرورق	:	ڈاکٹر محمد اکمل خان، نظامت فاصلاتی تعلیم، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد
مطبع	:	پرنٹ ٹائم اینڈ بزنس انٹرپرائزس، حیدرآباد

Differential Equations

Editor
Dr. Khaja Moinuddin
Asst. Professor (Mathematics), School of Sciences, MANUU

On behalf of the Registrar, Published by:

Directorate of Distance Education

Maulana Azad National Urdu University
Gachibowli, Hyderabad-500032 (TS), Bharat
Director: dir.dde@manuu.edu.in *Publication :* ddepublication@manuu.edu.in
Phone number: 040-23008314 Website: manuu.edu.in

مجلس ادارت

(Editorial Board)

نظامت فاصلاتی تعلیم
مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی
حیدرآباد-32، تلنگانہ-بھارت

کورس کو آرڈی نیٹر

ڈاکٹر خواجہ معین الدین

اسسٹنٹ پروفیسر، شعبہ ریاضی

اسکول برائے سائنسی علوم، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد

مصنفین	اکائی نمبر
• ڈاکٹر خواجہ معین الدین، اسسٹنٹ پروفیسر، شعبہ ریاضی، مانو، حیدرآباد	اکائی 1 تا 4
• ڈاکٹر کاشف خان، نظامت فاصلاتی تعلیم، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد	اکائی 5 تا 16

لیب مینول

• ڈاکٹر خواجہ معین الدین، اسسٹنٹ پروفیسر، شعبہ ریاضی، مانو، حیدرآباد	اکائی 17 تا 20
• ڈاکٹر کاشف خان، نظامت فاصلاتی تعلیم، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد	اکائی 21 تا 24

پروف ریڈرس:

اول	:	ڈاکٹر کاشف خان
دوم	:	ڈاکٹر محمد اکمل خان
فائنل	:	ڈاکٹر خواجہ معین الدین

فہرست

بلاک IV

لیب مینول **281**

بلاک V

بلاک VI

پیغام

مولانا آزاد نیشنل اُردو یونیورسٹی 1998 میں وطنِ عزیز کی پارلیمنٹ کے ایکٹ کے تحت قائم کی گئی۔ اس کے چار نکاتی مینڈیٹس یہ ہیں۔ (1) اردو زبان کی ترویج و ترقی (2) اردو میڈیم میں پیشہ ورانہ اور تکنیکی تعلیم کی فراہمی (3) روایتی اور فاصلاتی تدریس سے تعلیم کی فراہمی اور (4) تعلیم نسواں پر خصوصی توجہ۔ یہ وہ بنیادی نکات ہیں جو اِس مرکزی یونیورسٹی کو دیگر مرکزی جامعات سے منفرد اور ممتاز بناتے ہیں۔ قومی تعلیمی پالیسی 2020 میں بھی مادری اور علاقائی زبانوں میں تعلیم کی فراہمی پر کافی زور دیا گیا ہے۔

اُردو کے ذریعے علوم کو فروغ دینے کا واحد مقصد و منشا اُردو داں طبقے تک عصری علوم کو پہنچانا ہے۔ ایک طویل عرصے سے اُردو کا دامن علمی مواد سے لگ بھگ خالی رہا ہے۔ کسی بھی کتب خانے یا کتب فروش کی الماریوں کا سرسری جائزہ اس بات کی تصدیق کر دیتا ہے کہ اُردو زبان سمٹ کر چند ''ادبی'' اصناف تک محدود رہ گئی ہے۔ یہی کیفیت اکثر رسائل و اخبارات میں دیکھنے کو ملتی ہے۔ اردو میں دستیاب تحریریں قاری کو کبھی عشق و محبت کی پُر پیچ راہوں کی سیر کراتی ہیں تو کبھی جذباتیت سے پُر سیاسی مسائل میں اُلجھاتی ہیں، کبھی مسلکی اور فکری پس منظر میں مذاہب کی توضیح کرتی ہیں تو کبھی شکوہ و شکایت سے ذہن کو گراں بار کرتی ہیں۔ تاہم اُردو قاری اور اُردو سماج دورِ حاضر کے اہم ترین علمی موضوعات سے نابلد ہیں۔ چاہے یہ خود ان کی صحت و بقا سے متعلق ہوں یا معاشی اور تجارتی نظام سے، یا مشینی آلات ہوں یا ان کے گرد و پیش ماحول کے مسائل ہوں، عوامی سطح پر اِن شعبہ جات سے متعلق اردو میں مواد کی عدم دستیابی نے عصری علوم کے تئیں ایک عدم دلچسپی کی فضا پیدا کر دی ہے۔ یہی وہ مبارزات (Challenges) ہیں جن سے اُردو یونیورسٹی کو نبرد آزما ہونا ہے۔ نصابی مواد کی صورت حال بھی کچھ مختلف نہیں ہے۔ اِسکولی سطح پر اُردو کتب کی عدم دستیابی کے چرچے ہر تعلیمی سال کے شروع میں زیرِ بحث آتے ہیں۔ چوں کہ اُردو یونیورسٹی کا ذریعہ تعلیم اُردو ہے اور اس میں عصری علوم کے تقریباً سبھی اہم شعبہ جات کے کورسز موجود ہیں لہٰذا اِن تمام علوم کے لیے نصابی کتابوں کی تیاری اِس یونیورسٹی کی اہم ترین ذمہ داری ہے۔ انہیں مقاصد کے حصول کے لیے اردو یونیورسٹی کا آغاز فاصلاتی تعلیم سے 1998 میں ہوا تھا۔

مجھے اِس بات کی بے حد خوشی ہے کہ اس کے ذمہ داران بشمول اساتذہ کرام کی انتھک محنت اور ماہرین علم کے بھرپور تعاون کی بنا پر کتب کی اشاعت کا سلسلہ بڑے پیمانے پر شروع ہو گیا ہے۔ فاصلاتی تعلیم کے طلباء کے لیے کم سے کم وقت میں خود اکتسابی مواد اور خود اکتسابی کتب کی اشاعت کا کام عمل میں آگیا ہے۔ پہلے سمسٹر کی کتب شائع ہو کر طلباء و طالبات تک پہنچ چکی ہیں۔ دوسرے سمسٹر کی کتابیں بھی جلد طلباء تک پہنچیں گی۔ مجھے یقین ہے کہ اس سے ہم ایک بڑی اردو آبادی کی ضروریات کو پورا کر سکیں گے اور اِس یونیورسٹی کے وجود اور اِس میں اپنی موجودگی کا حق ادا کر سکیں گے۔

پروفیسر سید عین الحسن

وائس چانسلر

پیغام

فاصلاتی طریقۂ تعلیم پوری دنیا میں ایک انتہائی کارگر اور مفید طریقۂ تعلیم کی حیثیت سے تسلیم کیا جاچکا ہے اور اس طریقۂ تعلیم سے بڑی تعداد میں لوگ مستفید ہورہے ہیں۔ مولانا آزاد نیشنل اُردو یونیورسٹی نے بھی اپنے قیام کے ابتدائی دنوں ہی سے اردو آبادی کی تعلیمی صورت حال کو محسوس کرتے ہوئے اِس طرزِ تعلیم کو اختیار کیا۔ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کا آغاز 1998 میں نظامتِ فاصلاتی تعلیم اور ٹرانسلیشن ڈویژن سے ہوا اوراس کے بعد 2004 میں باقاعدہ روایتی طرز تعلیم کا آغاز ہوا اور بعد ازاں متعدد روایتی تدریس کے شعبہ جات قائم کیے گئے۔ نو قائم کردہ شعبہ جات اور ٹرانسلیشن ڈِویژن میں تقرریاں عمل میں آئیں۔ اس وقت کے اربابِ مجاز کے بھرپور تعاون سے مناسب تعداد میں خود مطالعاتی مواد تحریر و ترجمے کے ذریعے تیار کرائے گئے۔

گزشتہ کئی برسوں سے یو.جی.سی۔ڈی ای بیUGC-DEB اس بات پر زور دیتا رہا ہے کہ فاصلاتی نظامِ تعلیم کے نصابات اور نظامات کو روایتی نظامِ تعلیم کے نصابات اور نظامات سے کماحقہ ہم آہنگ کرکے نظامتِ فاصلاتی تعلیم کے طلبا کے معیار کو بلند کیا جائے۔ چوں کہ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی فاصلاتی اور روایتی طرزِ تعلیم کی جامعہ ہے، لہٰذا اس مقصد کے حصول کے لیے یو.جی.سی۔ڈی ای بی کے رہنمایانہ اصولوں کے مطابق نظامتِ فاصلاتی تعلیم اور روایتی نظامِ تعلیم کے نصابات کو ہم آہنگ اور معیار بلند کرکے خود اکتسابی موادSLM از سرِ نو بالترتیب یو.جی اور پی.جی طلبا کے لیے چھ بلاک چوبیس اکائیوں اور چار بلاک سولہ اکائیوں پر مشتمل نئے طرز کی ساخت پر تیار کرائے جارہے ہیں۔

نظامتِ فاصلاتی تعلیم یو.جی، پی.جی، بی.ایڈ، ڈپلوما اور سرٹیفکیٹ کورسز پر مشتمل جملہ پندرہ کورسز چلارہا ہے۔ بہت جلد تکنیکی ہنر پر مبنی کورسز بھی شروع کیے جائیں گے۔ متعلمین کی سہولت کے لیے 9 علاقائی مراکز بنگلورو، بھوپال، دربھنگہ، دہلی، کولکاتا، ممبئی، پٹنہ، رانچی اور سری نگر اور 5 ذیلی علاقائی مراکز حیدرآباد، لکھنؤ، جموں، نوح اور امراوتی کا ایک بہت بڑا نیٹ ورک تیار کیا ہے۔ ان مراکز کے تحت سرِدست 155 متعلم امدادی مراکز(Learner Support Centres) کام کررہے ہیں، جو طلبا کو تعلیمی اور انتظامی مدد فراہم کرتے ہیں۔ نظامت فاصلاتی تعلیم نے اپنی تعلیمی اور انتظامی سرگرمیوں میں آئی سی ٹی کا استعمال شروع کردیا ہے، نیز اپنے تمام پروگراموں میں داخلے صرف آن لائن طریقے ہی سے دے رہا ہے۔

نظامتِ فاصلاتی تعلیم کی ویب سائٹ پر متعلمین کو خود اکتسابی مواد کی سافٹ کاپیاں بھی فراہم کی جارہی ہیں، نیز جلد ہی آڈیو۔ویڈیو ریکارڈنگ کا لِنک بھی ویب سائٹ پر فراہم کیا جائے گا۔ اس کے علاوہ متعلمین کے درمیان رابطے کے لیے ایس ایم ایس کی سہولت فراہم کی جارہی ہے، جس کے ذریعے متعلمین کو پروگرام کے مختلف پہلوئوں جیسے کورس کے رجسٹریشن، مفوضات، کونسلنگ، امتحانات وغیرہ کے بارے میں مطلع کیا جاتا ہے۔

امید ہے کہ ملک کی تعلیمی اور معاشی حیثیت سے پچھڑی اردو آبادی کو مرکزی دھارے میں لانے میں نظامتِ فاصلاتی تعلیم کا بھی نمایاں رول ہو گا۔

پروفیسر محمد رضاالله خان

ڈائرکٹر، نظامت فاصلاتی تعلیم

کورس کا تعارف

زیر نظر کتاب تفرقی مساوات کے موضوعات سے متعلق ہے اور یہ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کے بی۔ ایس سی۔ کورس کے سال اول کے دوسرے سمسٹر کے نصاب پر مشتمل ہے۔ اس کتاب میں تفرقی مساوات کے بنیادی طریقہ کار کا تعارف، نظریات اور ان کے اطلاقات کو شامل کیا گیا ہے۔ تفرقی مساوات کی درجہ بندی دو اہم حصوں پر مشتمل ہے۔ اس میں پہلا معمولی تفرقی مساواتیں (Ordinary Differential Equations) اور دوسرا جزوی تفرقی مساواتیں (Partial Differential Equations)۔ اس کتاب کو سمجھنے کے لیے علم احصا کی بنیادی معلومات کا ہونا لازمی ہے۔ اس کتاب کی نمایاں خصوصیت یہ ہے کہ اس میں مواد کو سہل طریقے سے آسان زبان میں مثالوں کے ساتھ سمجھایا گیا ہے تاکہ طلبا اپنے مضمون کو از خود سمجھ سکیں۔ کتاب کو دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ جس میں پہلا حصہ نظریات (تھیوری) پر مبنی ہے اور دوسرا حصہ پریکٹکل (تجربوں) پر منحصر ہے۔

پہلا حصہ سولہ (16) اکائیوں اور 4 بلاک پر مشتمل ہے۔ پہلے بلاک میں تفرقی مساواتوں کی تشکیل، پہلے رتبے اور پہلے درجے کی تفرقی مساواتیں، ٹھیک تفرقی مساواتیں اور پہلے رتبے اور پہلے درجے کی خطی تفرقی مساواتیں شامل ہیں۔

دوسرے بلاک میں "پہلے رتبے اور اعلی درجے کی تفرقی مساواتیں" شامل کی گئی ہیں جس میں x, p اور y کے لیے حل کی جانے والی مساواتوں کا احاطہ کیا گیا ہے۔ اس کے علاوہ "لگرانج اور کلیرو کی مساواتیں" اور آخر میں "پہلے رتبے کی تفرقی مساواتوں کے اطلاقات عمودی ٹراجکٹری" کو بھی اس بلاک میں شامل کیا گیا ہے۔

طلبا کی تفہیم کو مد نظر رکھتے ہوئے تیسرے بلاک میں "مستقل ضریب کے متجانس اور غیر متجانس خطی تفرقی مساوات کو مثالوں کے ساتھ سمجھایا گیا ہے۔ "متغیر ضریب اور پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقوں سے تفرقی مساوات کا حل پیش کیا گیا ہے۔

چوتھے بلاک میں "جزوی تفرقی مساواتوں کی تشکیل"، "لگرانج اور چارپٹس" کے طریقے سے ان کے حل کو پیش کیا گیا ہے۔

طلبا کی مسئلہ حل صلاحیت کو بہتر بنانے کے لیے اکائی 17 سے اکائی 24 تک تجرباتی حصے (Practical Manual) کو شامل کیا گیا ہے جس میں علم احصا کے مسائل اور ان کے حل کو تلاش کرنے کے طریقے پیش کیے گئے ہیں۔

اس کتاب کی تدوین میں مصنفین، مترجمین، تدریسی و غیر تدریسی و انتظامی عملے کے تعاون کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ کتاب کو معیاری اور قابل عمل و فہم بنانے کی ہر ممکن کوشش کی گئی ہے، تاہم کوئی بھی کوشش اپنے آپ میں مکمل نہیں ہوتی۔ اس ضمن میں اساتذہ کرام، ماہرین، طلبا کی آرا و مشوروں کا خیر مقدم کیا جائے گا۔

ڈاکٹر خواجہ معین الدین

کورس کو آرڈی نیٹر

تفرقی مساوات

(Differential Equations)

اکائی 1۔ تفرقی مساوات کی تشکیل

(Formation of Differential Equations)

اکائی کے اجزا

1.0 تمہید(Introduction)

اگر $y = f(x)$ کوئی دیا گیا تفاعل ہے تب اس کا مشتق(Derivative) $\frac{dy}{dx}$ تبدیلی کی شرح کو ظاہر کرتا ہے(متغیر y کی تابع x) تفرقی مساوات کا نام خود اس بات کا غماز ہے کہ یہ وہ مساوات ہے جس میں نامعلوم مقدار y اور x کے مشتقات متغیر کے ذریعے جوڑے گئے ہیں۔

تفرقی مساوات دو قسم کے ہیں:

(i) معمولی تفرقی مساوات(Ordinary Differential Equations) یا (ODE)

(ii) جزوی تفرقی مساوات(Partial Differential Equations) یا (PDE)

وہ مساوات جس میں نامعلوم تفاعل (Unknown Function) اور اس کے معمولی مشتقات (Ordinary Derivatives) شامل ہوں، معمولی تفرقی مساوات کہلاتی ہے۔ وہ مساوات جس میں نامعلوم تفاعل اور اس کے جزوی مشتقات(Partial Derivatives)شامل ہوں، جزوی تفرقی مساوات کہلاتی ہے۔

1.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کو مکمل کرنے پر آپ اس قابل ہو جایں گے کہ

- تفرقی مساوات کے رتبے(Order)اور درجے(Degree)سے واقف ہو سکیں۔
- خطی اور غیر خطی تفرقی مساواتوں میں فرق کر سکیں۔
- دیے گیے تفاعل سے اختیاری مستقلات(Arbitrary Constants)کو ساقط کر کے اس کی تفرقی مساوات حاصل کر سکیں۔

1.2 تفرقی مساوات اس کا رتبہ اور درجہ(Differential Equation and its Order and Degree)

تفرقی مساوات(Differential Equation): تفرقی مساوات وہ مساوات ہے جس میں کسی تابع متغیر کے مشتقات موجود ہوں۔ جیسے کہ:

$$\frac{dy}{dx} + 2x = 0 \qquad ......(1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 7\frac{dy}{dx} + 9y = 0 \qquad ......(2)$$

$$\sqrt{\frac{dy}{dx}} = 2x - \frac{dy}{dx} \qquad ......(3)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4\left(\frac{dy}{dx}\right) + 4x \qquad ......(4)$$

$$3y = 2x\frac{dy}{dx} + \frac{1}{{dy}/{dx}} \qquad ......(5)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2z \qquad ......(6)$$

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6z \qquad ......(7)$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^7 + 2y = e^x \qquad ......(8)$$

مندرجہ بالا مساوات میں(1) تا(5)اور(8) معمولی تفرقی مساوات(ODE) کہلاتی ہیں۔چوں کہ ان میں ایک تابع متغیر"y" اور ایک غیر تابع متغیر"x" موجود ہیں۔جب کہ(6)اور(7) جزوی تفرقی مساوات(PDE) کہلاتی ہیں،چوں کہ اس میں ایک تابع متغیر اور دو غیر تابع متغیرات موجود ہیں۔

نوٹ: مساوات $F\left(x, y, y', y'', \ldots \ldots .\, y^{(n)}\right) = 0$ ایک nرتبے والی معمولی تفرقی مساوات کو ظاہر کرتا ہے۔ تفرقی مساوات کے درجے اور رتبے کے بارے میں آگے بحث کی جائے گی۔اس طرح کی تفرقی مساوات بہت زیادہ استعمال میں آتی ہیں اور بہت سے شعبے ہیں جن میں ان مساوات کا استعمال کیا جاتا ہے۔ خصوصاً وہ تمام مسائل جن میں کوئی چیز وقت کے مطابق گھٹتی یا بڑھتی ہے اسے ہم تفرق کے ذریعے ظاہر کرتے ہیں۔مثلاً $\frac{ds}{dt}$ جہاں s فاصلہ اور t وقت ہے تب $\frac{ds}{dt}$ رفتار (Velocity)کو اور $\frac{d^2s}{dt^2}$ اسراع(Acceleration) کو ظاہر کرتا ہے۔ چنانچہ مختلف طبقات کے مسائل تفرقی مساوات میں ظاہر کر کے اور ان کے حل سے بہت سی نامعلوم چیزوں کو معلوم کیا جا سکتا ہے۔ ریاضیاتی نمونہ سازی(Mathematical Modeling)ریاضی کی وہ شاخ ہے جو آج بہت سے طبعی نظاموں کو ریاضی کے مسائل میں تبدیل کر کے انہیں پھر حل کر کے مطلوبہ خصوصیات کا مطالعہ کیا جاتا ہے۔ان ماڈلس میں تفرقی مساوات کا بہت بڑا کردار استعمال میں آتا ہے۔

تفرقی مساوات کا رتبہ(Order of Differential Equation):

تفرقی مساوات کا رتبہ اس کے اعظم ترین مشتق(Highest Derivative)کا رتبہ ہوتا ہے جو اس میں شامل ہو۔

مثلاً: $\frac{dy}{dx} + 5y = 0$ کا رتبہ(Order)ایک ہے

$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{5dy}{dx} + 6y = e^{2x}$ کا رتبہ 2 ہے اور

$\frac{d^3y}{dx^3} - 2x\frac{d^2y}{dx^2} + 7y = 0$ کا رتبہ 3 ہے۔

تفرقی مساوات کا درجہ(Degree of Differential Equation):

تفرقی مساوات کے اعظم ترین مشتق کی قوت اس مساوات کا درجہ کہلاتی ہے۔مثلاً $\frac{dy}{dx} + 2x = 0$ کا درجہ 1 ہے اور $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 7y = 0$ کا درجہ 3 ہے چوں کہ اعظم ترین مشتق $\frac{d^2y}{dx^2}$ کی قوت 3 ہے۔

مثال 1۔ $\frac{d^2y}{dx^2} = \left[4 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right]^{3/2}$ کا رتبہ اور درجہ معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} = \left[4 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right]^{3/2}$ ہے۔ $3/2$ قوت کو صحیح بنانے پر حاصل ہو گا۔ یعنی دونوں جانب مربع لینے پر حاصل ہے

$$\left[4 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right]^3 = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^9 + 48\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 12\left(\frac{dy}{dx}\right)^6 + 64 = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

اور اس مساوات میں اعظم ترین مشتق $\frac{d^2y}{dx^2}$ ہے جس کی قوت 2 ہے اس لیے تفرقی مساوات کا درجہ 2 اور رتبہ بھی 2 ہے۔

خطی اور غیر خطی تفرقی مساواتیں (Linear and Non−Linear Differential Equations):

تفرقی مساوات خطی کہلاتی ہے، اگر تابع متغیر (Dependent Variable) اور ہر ایک شامل مشتق صرف پہلے درجے کا ہو اور تابع متغیر اور مشتقات کے حاصل ضرب شامل نہ ہوں۔ وہ مساوات جو خطی نہ ہو غیر خطی تفرقی مساوات کہلاتی ہے۔ مثلاً مساوات $\frac{dy}{dx} + y = x^2$ اور $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + y = e^x$ خطی تفرقی مساواتیں ہیں اور $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 5y = \cos x$ غیر خطی ہے۔

1.3 تفرقی مساواتوں کی تشکیل (Formation of Differential Equations)

ہم جانتے ہیں کہ کس طرح ایک طبعی صورت حال کو متناظر ایک تفرقی مساوات میں ظاہر کیا جاتا ہے۔ چند مثالیں:

1۔ آبادی کا مسئلہ وقت کے اعتبار سے بڑھتا ہے یا نمو کا مسئلہ (Growth Problem) جیسے جراثیم کی پیداوار تابکار عنصر کا انحطاط وغیرہ کو ہم مندرجہ ذیل تفرقی مساواتوں میں ظاہر کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ $x(t)$ افزائش ہے، وقت t پر اور یہ شرح افزائش $\frac{d}{dt}\left(x(t)\right)$ کے متناسب ہوتی ہے یعنی:

$$\frac{d\left(x(t)\right)}{dt} \propto x(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\left(x(t)\right)}{dt} = kx(t)$$

جہاں k تناسب کا مستقل (Constant) ہے جو اضافہ (Growth) کی صورت میں مثبت اور انحطاط کی صورت (Decay) میں منفی ہو گا۔ چنانچہ $\frac{dx}{dt} = kx$ ایک پہلے درجے اور پہلے رتبے کی تفرقی مساوات ہے۔ جہاں x ایک t کے تابع متغیر ہے۔

منحنیوں کے خاندان(Family of Curves):

$y = mx + c$ خطوط مستقیم کا نظام ہے جہاں m ڈھال(Slope) ہے اور c مقطوعہ(Intercept) ہے۔

$$y = mx + c \qquad ......(1)$$

مساوات(1) کو اگر بہ لحاظ x تفرق کریں تو ہمیں $\frac{dy}{dx} = m$ حاصل ہو گا۔

$$\Rightarrow \qquad y = \frac{dy}{dx}x + c$$

$$\Rightarrow \qquad x\frac{dy}{dx} - y + c = 0$$

دیے ہوئے نظام کے خاندان کی تفرقی مساوات ہے۔

ذیل میں ہم کسی دی ہوئی منحنی کے خاندان کے لیے تفرقی مساوات تشکیل دینے کا قاعدہ درج کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ $F(x, y, c_1, c_2, \dots \dots \dots, c_n) = 0$ ایک منحنی کے خاندان کو ظاہر کرتا ہے جہاں $c_1, c_2, \dots \dots, c_n$، n اختیاری مستقلات ہیں۔

$$F(x, y, c_1, c_2, \dots \dots \dots, c_n) = 0 \qquad ......(1)$$

مساوات(1) کو n مرتبہ تفرق کرنے پر حاصل ہے

$$F'(x, y, y', c_1, c_2, \dots \dots \dots, c_n) = 0 \qquad ......(2)$$

$$F''(x, y, y', y'', c_1, c_2, \dots \dots \dots, c_n) = 0 \qquad ......(3)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$F^{(n)}(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}, c_1, c_2, \dots \dots \dots, c_n) = 0 \qquad ......(n+1)$$

مندرجہ بالا حاصل $n + 1$ مساوات میں سے n اختیاری مستقلات کو ساقط کرنے سے n رتبے والا تفرقی مساوات حاصل ہو گا۔ اس طرح ہم ایک تفرقی مساوات کی تشکیل کر سکتے ہیں۔

مثال 1۔ منحنی $y^2 = 4ax$ سے تفرقی مساوات تشکیل کرو۔

حل: دی گئی مساوات ہے

$$y^2 = 4ax \qquad ......(1)$$

جہاں a اختیاری مستقل(Arbitrary Constant) ہے۔

دونوں جانب بہ لحاظ x تفرق کرنے پر حاصل ہے

$$2y\ \frac{dy}{dx} = 4a$$

$$\Longrightarrow \qquad y\ \frac{dy}{dx} = 2a$$

$$\Longrightarrow \qquad a = \frac{y}{2}\frac{dy}{dx} \qquad ......(2)$$

(1)اور(2)سے 'a'کو ساقط کرنے سے یعنی 'a' کی قدر مساوات(1)میں درج کرنے سے $y^2 = 4\left(\frac{y}{2}\frac{dy}{dx}\right)x$حاصل ہو گا۔

$$y = 2x\frac{dy}{dx}$$

یا$2x\frac{dy}{dx} - y = 0$ دی گئی منحنیوں کے خاندان کی تفرقی مساوات کو تعبیر کرتا ہے۔

مثال2۔ منحنیوں $y = ae^{2x} + be^{-2x}$ کی تفرقی مساوات معلوم کرو۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ

$$y = ae^{2x} + be^{-2x} \qquad ......(1)$$

مساوات(1) کو دونوں جانب بہ لحاظ x دوبار تفرق کرنے پر حاصل ہے

$$y' = 2ae^{2x} - 2be^{-2x}$$

اور

$$\begin{aligned} y'' &= 4ae^{2x} + 4be^{-2x} \\ &= 4(ae^{2x} + be^{-2x}) \end{aligned}$$

مساوات(1)کا استعمال کرنے پر $y'' = 4y$ حاصل ہے۔

اس طرح $y'' - 4y = 0$ دی گئی مساوات کی تفرقی مساوات ہے۔

متبادل طریقہ(Alternate Method)

دی گئی مساوات ہے

$$y = ae^{2x} + be^{-2x} \qquad ......(1)$$

مساوات(1)سے حاصل شدہ مساواتیں ہیں

$$y' = 2ae^{2x} - 2be^{-2x} \qquad ......(2)$$

اور

$$y'' = 4ae^{2x} + 4be^{-2x} \qquad ......(3)$$

مساوات(1)،(2)اور(3)سے a اور b کو ساقط کرنے سے حاصل ہو گا

$$\begin{vmatrix} y & e^{2x} & e^{-2x} \\ y' & 2e^{2x} & -2e^{-2x} \\ y'' & 4e^{2x} & 4e^{-2x} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad e^{2x}\begin{vmatrix} y & 1 & e^{-2x} \\ y' & 2 & -2e^{-2x} \\ y'' & 4 & 4e^{-2x} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad e^{2x}.\, e^{-2x}\begin{vmatrix} y & 1 & 1 \\ y' & 2 & -2 \\ y'' & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad y(8+8) - y'(4-4) + y''(-2-2) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad 16y - 4y'' = 0$$

اس طرح $y'' - 4y = 0$ دیے گیے خاندانوں کی تفرقی مساوات ہے۔

مثال 3۔ نصف قطر 'a' والے دائروں $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ سے **متعلق** تفرقی مساوات **معلوم** کرو۔ یہاں h اور k مستقلات ہیں جن کو ساقط کرنا ہے۔

حل: دی گئی مساوات ہے

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2 \qquad \text{......(1)}$$

دو بار مساوات (1) کو تفرق کرنے پر حاصل ہے

$$2(x-h) + 2(y-k)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad (x-h) + (y-k)\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{......(2)}$$

$$\Rightarrow \qquad 1 + (y-k)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \qquad \text{......(3)}$$

$$\Rightarrow \qquad (y-k) = -\frac{\left(1+\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

مساوات (2) سے

$$(x-h) = -(y-k)\frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{\left(1+\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \times \frac{dy}{dx}$$

مساوات (1) سے

$$\Rightarrow \qquad \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}+\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}=a^2$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1\right\}=a^2$$

اس طرح جو تفرقی مساوات ہمیں چاہیے وہ ہے

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2=a^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

مثال4۔ مستقلات A اور B کو ساقط کر کے دی گئی مساوات $y=e^x(A\,cos\,x+B\sin x)$ سے تفرقی مساوات تشکیل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$y=e^x(A\,cos\,x+B\sin x) \qquad ......(1)$$

چوں کہ دو مستقلات ہیں مساوات(1) کو دو بار تفرق کریں۔

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx}=e^x\{A(-sinx)+B\cos x\}+(A\,cos\,x+B\sin x)e^x$$

$$\frac{dy}{dx}=e^x(-Asinx+Bcosx)+y \qquad ......(2)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=e^x(-Acosx-Bsinx)+(-Asinx+Bcosx)e^x+\frac{dy}{dx}$$

مساوات(2) سے

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-e^x(Acosx+Bsinx)+\left(\frac{dy}{dx}-y\right)+\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=-y+\frac{dy}{dx}-y+\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} - 2y$$

اس طرح مساوات(1) کی تفرقی مساوات $\frac{d^2x}{dx^2} = 2\left(\frac{dy}{dx} - y\right)$ ہے۔

مثال5۔ منحنیوں کے خاندان $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2+\lambda} = 1$ سے اختیاری مستقل λ کو ساقط کر کے تفرقی مساوات حاصل کرو۔

حل: دیے گیے منحنیوں کے خاندان کی مساوات ہے

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2+\lambda} = 1 \qquad \text{......(1)}$$

مساوات(1) کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر حاصل ہے

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y^{dy}/_{dx}}{a^2+\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x}{a^2} + \frac{y^{dy}/_{dx}}{a^2+\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{y\left(\frac{dy}{dx}\right)}{a^2+\lambda} = -\frac{x}{a^2}$$

دونوں جانب y سے ضرب دینے پر

$$\frac{y^2}{a^2+\lambda} = \frac{-xy}{a^2\left(\frac{dy}{dx}\right)} \qquad \text{......(2)}$$

مساوات(2) کی قدر مساوات(1) میں درج کرنے پر

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(-xy)}{a^2\left(\frac{dy}{dx}\right)} = 1$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{a^2}\left[x^2\frac{dy}{dx} - xy\right] = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad x^2\frac{dy}{dx} - xy = a^2\frac{dy}{dx}$$

$$\Longrightarrow \qquad (x^2 - a^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0$$

جو کہ مساوات(1) کی تفرقی مساوات ہے۔

مثال6۔ مساوات $y = ae^x + be^{2x} + ce^{3x}$ (جہاں a, b, c اختیاری مستقلات ہیں) کی تفرقی مساوات حاصل کرو۔

حل: دی گئی مساوات ہے

$$y = ae^x + be^{2x} + ce^{3x} \qquad ......(1)$$

$$\Longrightarrow \qquad y' = ae^x + b2e^{2x} + c3e^{3x}$$

$$\Longrightarrow \qquad y' = [ae^x + be^{2x} + ce^{3x}] + be^{2x} + 2ce^{3x}$$

$$\Longrightarrow \qquad y' = y + be^{2x} + 2ce^{2x}$$

$$\Longrightarrow \qquad y' - y = be^{2x} + 2ce^{3x} \qquad ......(2)$$

$$\Longrightarrow \qquad y'' - y' = 2be^{2x} + 6ce^{3x}$$

$$= 2[be^{2x} + 2ce^{3x}] + 2ce^{3x}$$

$$y'' - y' = 2(y' - y) + 2ce^{3x} \qquad ......(3)$$

مساوات(2) کی مدد سے

$$y'' - 3y' + 2y = 2ce^{3x} \qquad ......(4)$$

$$\Longrightarrow \quad y''' - 3y'' + 2y' = 6ce^{3x} = 3(2ce^{3x})$$

مساوات(3) سے $2ce^{3x}$ کی قدر درج کرنے پر

$$y''' - 3y'' + 2y' = 3(y'' - 3y' + 2y)$$

$$\Longrightarrow \qquad y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$

اس طرح مساوات(1) کی تفرقی مساوات ہے۔

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = 0$$

1.4 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم جان چکے ہیں کہ کسی تفرقی مساوات کا رتبہ اس کے اعظم ترین مشتق کا رتبہ ہوتا ہے اور کسی تفرقی مساوات کا درجہ اس میں شامل اعظم ترین مشتق کی قوت ہے۔ جب n اختیاری مستقلات والا کوئی تفاعل دیا جائے تو ہم اسے n دفعہ تفرق کرتے ہیں تاکہ n زائد مساواتیں حاصل ہوں جن میں n اختیاری مستقلات شامل ہوں ان $n + 1$ مساواتوں سے n اختیاری مستقلات کو ساقط کرکے n رتبہ والا تفرقی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

1.5 کلیدی الفاظ (Keywords)

اختیاری مستقل، مشتق، اعظم ترین مشتق، درجہ، رتبہ

1.6 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

1.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. تفرقی مساوات $(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x^2$ کا رتبہ اور درجہ ہے

A. 1،1 B. 1,2 C. 2,1 D. ان میں سے کوئی نہیں

2. مساوات $y = x\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ کا رتبہ.................. ہے۔

A. 2 B. 3 C. 1 D. 4

3. تفرقی مساوات جس کا رتبہ 2 اور درجہ 3 ہو اس کے حل میں کتنے اختیاری مستقلات ہوں گے؟

A. 2 B. 1 C. 3 D. 4

4. تفرقی مساوات جس کا حل $y = A\cos\left(\frac{n}{x} + \alpha\right)$ ہے........................ ہوگی، یہاں α اور A اختیاری مستقلات ہیں۔

A. $x^3y'' + n^2y = 0$ B. $x^4y'' + n^2y = 0$

C. $x^4y'' - n^2y = 0$ D. ان میں سے کوئی نہیں

5. دائروں کے خاندان جن کے مراکز(0,0) پر ہیں کی تفرقی مساوات ہے

A. $x - yy' = 0$ B. $y + xy' = 0$

C. $x + yy' = 0$ D. ان میں سے کوئی نہیں

1.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

ذیل کے مساواتوں سے اختیاری مستقلات کو ساقط کرتے ہوئے تفرقی مساواتیں حاصل کرو:

1. $x^2 + y^2 - 2cy - c^2 = 0$
2. $y = ae^{bx}$
3. $y = ax + bx^2$
4. $y = ax^2 + be^{-x}$
5. $y = asin(mx + b)$
6. $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$

1.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات(Long Answer Type Questions)

1. خطوں کے خاندان $y = mx + \frac{a}{m}$ جہاں m پیرامیٹر ہے، کی تفرقی مساوات معلوم کرو۔
2. ثابت کرو $Ax^2 + By^2 = 1$، جہاں A اور B اختیاری مستقلات ہیں، کی تفرقی مساوات $x[yy'' + (y')^2] = yy'$ ہوگی۔

جوابات:

1.6.1 معروضی سوالات کے جوابات

1. A
2. C

3. A

4. B

5. C

1.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $(x^2 - 2y^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4xy\frac{dy}{dx} - x^2 = 0$

2. $yy_2 - {y_1}^2 = 0$

3. $x^2y_2 - 2xy_1 + 2y = 0$

4. $(x^2 + 2x)\frac{d^2y}{dx^2} + (x^2 - 2)\frac{dy}{dx} - 2(x+1)y = 0$

5. $\frac{d^2y}{dx^2} + m^2y = 0$

6. $y_3[1 + {y_1}^2] = 3y_1(y_2)^2$

1.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} + a = 0$

1.7 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for further Readings)

---

1. Text Book of Differential Equations, Khalil Ahmad, Real World Education Publishers, New Delhi
2. Ordinary and Partial Differential Equations- Rai Singhania, S. Chand & Co., New Delhi
3. A Text Book of B.Sc. (Mathematics), Volume –I , V. Venkateshwara Rao and others, S. Chand & Company

اکائی 2۔ پہلے رتبے اور پہلے درجے کی تفرقی مساواتیں

(Differential Equations of First Order and First Degree)

اکائی کے اجزا

2.0 تمہید (Introduction)

پہلے رتبے اور پہلے درجے کی تفرقی مساواتوں کی عام شکل ہے۔

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad \text{.........(1)}$$

جس میں سے ہم y کے لیے حل کرتے ہیں۔اس اکائی میں ہم مساوات (1) کے حل کے تین طریقے سیکھیں گے۔

1. متغیر جداپذیر (Variables Separable) کا طریقہ
2. متجانس تفرقی مساواتیں (Homogeneous differential Equations)
3. غیر متجانس تحویل پذیر مساواتیں (Non-Homogeneous differential equations reducible to homogeneous equations)

2.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے کے بعد آپ مختلف قسم کی پہلے رتبے اور پہلے درجے کی تفرقی مساواتوں سے واقف ہو جائیں گے جن کے حل کے تین طریقوں (متغیر جداپذیر، متجانس تفرقی مساواتیں اور غیر متجانس تحویل پذیر مساوات) سے آگاہ ہو کر ان کا استعمال کر سکیں گے۔

2.2 متغیر جداپزیر کا طریقہ (Method of Variables Separable)

اگر تفرقی مساوات (Differential Equation) $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ کو $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$ یا $\frac{dy}{dx} = f(x).\,g(y)$ سے ظاہر کر سکیں، جہاں $f(x)$ اور $g(x)$ مسلسل تفاعلات (Continuous Functions) ہوں، تو یہ طریقہ متغیر جداپزیر (Variables Separable) کہلاتا ہے۔

طریقہ: دی گئی مساوات $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ کو $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$ میں بدل لیں۔

پھر $f(x)dx = g(y)dy$ کو دونوں جانب تکمل کر کے ہم مساوات کا حل درجہ ذیل شکل میں حاصل کر لیتے ہیں

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy + C$$

جہاں C تکملی مستقل ہے۔

مثال 1۔ مساوات $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ کا حل حاصل کرو۔

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}$$

متغیر جداپزیر کرنے پر

$$\frac{dy}{1 + y^2} = \frac{dx}{1 + x^2}$$

دونوں جانب تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \tan^{-1} y = \tan^{-1} x + \mathrm{c}$$

مستقل c کو $\tan^{-1} c$ لینے پر

$$\tan^{-1} y - \tan^{-1} x = \tan^{-1} c$$

$$\Rightarrow \qquad \tan^{-1}\left(\frac{y-x}{1+yx}\right) = \tan^{-1} c$$

$$\Rightarrow \qquad y - x = c(1+yx)$$

اس طرح $y - x = c(1+yx)$ دی گئی مساوات کا حل ہو گا۔

مثال2۔ حل کرو: $\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$$

متغیر جدا پزیر کرنے پر

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = c$$

$$\Rightarrow \qquad \sin^{-1} y + \sin^{-1} x = \mathrm{c}$$

اس طرح $\sin^{-1} y + \sin^{-1} x = \mathrm{c}$ دی گئی مساوات کا حل ہو گا۔

مثال3۔ مساوات $\frac{dy}{dx} = \frac{x(2\log x+1)}{\sin y + y\cos y}$ کا حل حاصل کرو۔

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(2\log x + 1)}{\sin y + y\cos y}$$

متغیر جدا پزیر کرنے پر حاصل ہے

$$(\sin y + y\cos y)dy = x(2\log x + 1)dx$$

دونوں جانب تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$\int (\sin y + y\cos y)dy = \int (2x\log x + x)dx$$

$$\Rightarrow \quad \int \sin y\, dy + \int y\cos y\, dy = 2\int x\log x\, dx + \int x dx$$

$$\Rightarrow -\cos y + y\sin y - \int \sin y\, dy = 2\left[\log x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \left(\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\right)dx\right] + \frac{x^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow \qquad -\cos y + y\sin y + \cos y = 2\left[\frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{2}\int x dx\right] + \frac{x^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow \qquad y\sin y = 2\left[\frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)\right] + \frac{x^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow \qquad y\sin y = x^2\log x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow \qquad y\sin y = x^2\log x + c$$

اس طرح $y\sin y = x^2\log x + c$ دی گئی مساوات کا حل ہو گا۔

مثال4۔ حل کرو: $\frac{dy}{dx} = (4x + y + 1)^2$

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$\frac{dy}{dx} = (4x + y + 1)^2 \qquad ....(1)$$

فرض کرو کہ $z = 4x + y + 1$ ہے۔اس لیے

$$\frac{dz}{dx} = 4 + \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 4$$

مساوات (1) سے

$$\frac{dz}{dx} - 4 = z^2$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dz}{dx} = z^2 + 4$$

متغیر جدا کرنے پر حاصل ہے

$$\frac{dz}{z^2 + 4} = dx$$

دونوں جانب تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$\int \frac{dz}{z^2 + 4} = \int dx$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{z}{2} = x + \frac{c}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \tan^{-1}\frac{z}{2} = 2x + c$$

اس طرح $\tan^{-1}\left(\frac{4x+y+1}{2}\right) = 2x + c$ یا $(4x + y + 1) = 2\tan(2x + c)$ دی گئی مساوات کا حل ہو گا۔

مثال5۔ تفرقی مساوات $(xy^2 + x)dx + (yx^2 + y)dy = 0$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$(xy^2 + x)dx + (yx^2 + y)dy = 0$$

$$\Rightarrow \qquad x(y^2 + 1)dx + y(x^2 + 1)dy = 0 \qquad ....(1)$$

متغیر جدا کرنے پر حاصل ہو گا

$$\frac{xdx}{x^2+1}+\frac{ydy}{y^2+1}=0$$

دونوں جانب تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$\int\frac{xdx}{x^2+1}+\int\frac{ydy}{y^2+1}=\mathrm{c}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{2ydy}{y^2+1}=\mathrm{c}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\log(x^2+1)+\frac{1}{2}\log(y^2+1)=c$$

$$\Rightarrow\quad \log\{(x^2+1)(y^2+1)\}=2c=\log k\ \ (\text{فرض کرو})$$

$$\Rightarrow\quad (x^2+1)(y^2+1)=k$$

اس طرح $(x^2+1)(y^2+1)=k$ دی گئی تفرقی مساوات کا حل ہے۔

مثال6۔ تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx}=e^{x-y}+x^2e^{-y}$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$\frac{dy}{dx}=e^{x-y}+x^2e^{-y} \qquad ....(1)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=(e^x+x^2)e^{-y}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dy}{e^{-y}}=(e^x+x^2)dx$$

$$\Rightarrow\quad e^ydy=(e^x+x^2)dx$$

دونوں جانب تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$\int e^ydy=\int(e^x+x^2)dx$$

$$\Rightarrow\quad e^y=e^x+\frac{x^3}{3}+c$$

اس طرح $e^y=e^x+\frac{x^3}{3}+c$ دی گئی مساوات کا حل ہو گا۔

2.3 متجانس تفرقی مساواتیں (Homogeneous Differential Equations)

تعریف: ایک تفاعل $f(x,y)$ درجہ n کا متجانس تفاعل کہلاتا ہے اگر کسی بھی λ کے لیے $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$ ہو۔ مثلاً

$f(x,y)=y^2+xy$ دو درجہ والا متجانس تفاعل ہے اس لیے کہ

$$\begin{aligned}f(\lambda x,\lambda y)&=(\lambda y)^2+(\lambda x)(\lambda y)\\&=\lambda^2y^2+\lambda^2xy\\&=\lambda^2(y^2+xy)\\&=\lambda^2f(x,y)\end{aligned}$$

اسی طرح $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{xy}$ درجہ صفر والا متجانس تفاعل ہے چوں کہ

$$\begin{aligned} f(\lambda x,\lambda y) &= \frac{(\lambda x)^2+(\lambda y)^2}{(\lambda x)(\lambda y)} \\ &= \frac{\lambda^2x^2+\lambda^2y^2}{\lambda^2xy} \\ &= \lambda^0\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) \\ &= \lambda^0 f(x,y) \end{aligned}$$

متجانس تفرقی مساواتیں(Homogeneous Differential Equations)**:** تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ متجانس تفرقی مساوات کہلاتی ہے اگر $f(x,y)$ صفر درجہ کا متجانس تفاعل ہو۔ مثلاً $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-y^2}{xy}$

متجانس تفرقی مساوات کے حل کا طریقہ:

دی گئی مساوات ہے

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \qquad \text{..............(1)}$$

اگر $f(x,y)$ صفر درجہ والا متجانس تفاعل ہو، تب فرض کرو $y=vx$ اور $\frac{dy}{dx}=\phi\left(\frac{y}{x}\right)$ اس سے ہمیں $\frac{dy}{dx}=\phi(v)=v+x\frac{dv}{dx}$ حاصل ہو گا۔ تب،

$$x\frac{dv}{dx}=\phi(v)-v$$

متغیر جدا کرنے پر

$$\frac{dv}{\phi(v)-v}=\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \qquad \int\frac{dv}{\phi(v)-v}+C=\int\frac{dx}{x}$$

متجانس مساوات $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ کا حل ہو گا۔

نوٹ: اگر متجانس مساوات $\frac{dx}{dy}=\psi\left(\frac{x}{y}\right)$ کے شکل کی ہو تب $x=vy$ لے کر اس تفرقی مساوات کا حل معلوم کریں۔

مثال 1۔ حل کرو: $x^2ydx-(x^3+y^3)dy=0$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$x^2ydx-(x^3+y^3)dy=0$$

$$x^2ydx=(x^3+y^3)dy$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{x^2y}{x^3+y^3} \qquad \text{..............(1)}$$

چوں کہ $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^3+y^3}$ اور

$$f(kx,ky)=\frac{(kx)^2(ky)}{(kx)^3+(ky)^3}$$

$$= \frac{k^3(x^2y)}{k^3(x^3+y^3)}$$
$$= \frac{x^2y}{x^3+y^3}$$

اس لیے دی گئی تفرقی مساوات متجانس ہے اور اس کا حل معلوم کرنے کے لیے فرض کرو $y = vx$ درج کرنا ہو گا اور اس سے ہمیں حاصل ہو گا $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

مساوات (1) سے حاصل ہے

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^2(vx)}{x^3+(vx)^3}$$
$$= \frac{x^3(v)}{x^3(1+v^3)} = \frac{v}{1+v^3}$$
$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v^3} - v = \frac{-v^4}{1+v^3}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1+v^3}{v^4}dv = -\frac{dx}{x}$$
$$\Rightarrow \quad v^{-4}dv + \frac{1}{v}dv = -\frac{dx}{x}$$
$$\Rightarrow \quad \int v^{-4}dv + \int \frac{1}{v}dv = -\int \frac{dx}{x}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{v^{-3}}{-3} + \log v = -\log x + c$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{3v^3} + \log v + \log x = c$$

$v = \frac{y}{x}$ درج کرنے پر

$$-\frac{1}{3\left(\frac{y}{x}\right)^3} + \log\left(\frac{y}{x}\right) + \log x = c$$
$$\Rightarrow \quad -\frac{x^3}{3y^3} + \log y - \log x + \log x = c$$
$$\Rightarrow \quad \log y - \frac{x^3}{3y^3} = c$$

جو کہ مساوات (1) کا حل ہے۔

مثال2۔ $x\frac{dy}{dx} = y + xe^{\frac{y}{x}}$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$x\frac{dy}{dx} = y + xe^{\frac{y}{x}} \qquad \text{...............(1)}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y+xe^{\frac{y}{x}}}{x} = f(x,y)$$

$$\Rightarrow \qquad f(kx, ky) = \frac{ky + kxe^{\frac{ky}{kx}}}{kx}$$
$$= f(x, y)$$

اس لیے دی گئی تفرقی مساوات متجانس ہے اور اس کا حل معلوم کرنے کے لیے فرض کرو $y = vx$ درج کرنے پر اور اس سے ہمیں حاصل ہو گا $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

مساوات(1) سے حاصل ہے

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{vx + xe^{\frac{vx}{x}}}{x}$$
$$\Rightarrow \qquad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x(v + e^v)}{x} = v + e^v$$
$$\Rightarrow \qquad x\frac{dv}{dx} = e^v$$

متغیر جدا کرنے پر

$$e^{-v}dv = \frac{dx}{x}$$
$$\Rightarrow \qquad \int e^{-v}dv = \int \frac{dx}{x}$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{e^{-v}}{-1} = \log x + \log c$$
$$\Rightarrow \qquad e^{-v} = -\log cx = \log\left(\frac{1}{cx}\right)$$

$v = \frac{y}{x}$ درج کرنے پر

$$e^{\left(-\frac{y}{x}\right)} = \log\left(\frac{1}{cx}\right)$$

جو کہ مساوات(1) کا حل ہے۔

مثال3۔ مساوات $(x + y)dy = (x - y)dx$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(x + y)dy = (x - y)dx$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y} = f(x, y) \qquad ....(1)$$

جو ایک متجانس تفرقی مساوات ہے۔ تب فرض کرو کہ $y = vx$ جس سے ہمیں حاصل ہو گا $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

اب مساوات(1) سے حاصل ہے

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x - vx}{x + vx}$$
$$= \frac{x(1 - v)}{x(1 + v)} = \frac{1 - v}{1 + v}$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v}{1+v} - v = \frac{1-v-v-v^2}{1+v}$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{1-2v-v^2}{1+v}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1+v}{1-2v-v^2}dv = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{-2}\left(\frac{-2-2v}{1-2v-v^2}\right)dv = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{-2}\int\left(\frac{-2-2v}{1-2v-v^2}\right)dv = \int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{-2}\log(1-2v-v^2) = \log x + \log c$$

$$\Rightarrow \quad \log(1-2v-v^2) = -2\log cx$$

$$\Rightarrow \quad \log(1-2v-v^2) = \log\frac{1}{(cx)^2}$$

$$\Rightarrow \quad 1-2v-v^2 = \frac{1}{(cx)^2}$$

$v = \frac{y}{x}$ درج کرنے پر

$$1-2\left(\frac{y}{x}\right)-\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{1}{(cx)^2}$$

$$\Rightarrow \quad x^2-2xy-y^2 = \frac{1}{c^2} = k$$

اس طرح مساوات(1) کا حل $x^2-2xy-y^2 = k$ ہو گا۔

مثال4۔ مساوات $(x^2+y^2)dx - 2xydy = 0$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(x^2+y^2)dx - 2xydy = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x^2+y^2)dx = 2xydy$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy} \qquad \text{...............}(1)$$

یہ ایک متجانس تفرقی مساوات ہے۔ تب فرض کرو کہ $y = vx$ جس سے ہمیں حاصل ہو گا $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

مساوات (1) سے حاصل ہے

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^2+(vx)^2}{2x(vx)}$$

$$= \frac{x^2(1+v^2)}{2x^2v} = \frac{1+v^2}{2v}$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2v} - v = \frac{1-v^2}{2v}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2v}{1-v^2}dv = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \int\frac{-2v}{1-v^2}dv = -\int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \log(1-v^2) = -\log x + \log c$$
$$\Rightarrow \quad \log(1-v^2) = \log\frac{c}{x}$$
$$\Rightarrow \quad 1 - v^2 = \frac{c}{x}$$

$v = \frac{y}{x}$ درج کرنے پر

$$1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{c}{x}$$
$$\Rightarrow \quad x^2 - y^2 = cx$$

اس طرح مساوات(1) کا حل $x^2 - y^2 = cx$ ہو گا۔

مثال5۔ مساوات $(x^3 - 2y^3)dx + 3xy^2dy = 0$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(x^3 - 2y^3)dx + 3xy^2dy = 0$$
$$\Rightarrow \quad (x^3 - 2y^3)dx = -3xy^2dy$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^3 - 2y^3}{3xy^2} \quad \text{...............(1)}$$

یہ ایک متجانس تفرقی مساوات ہے۔اب مان لو کہ $y = vx$ جس سے ہمیں حاصل ہو گا $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

اب مساوات (1) سے

$$v + x\frac{dv}{dx} = -\frac{x^3 - 2(vx)^3}{3x(vx)^2}$$
$$= -\frac{x^3(1-2v^3)}{3x^3v^2} = -\left(\frac{1-2v^3}{3v^2}\right)$$
$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{2v^3-1}{3v^2} - v = \frac{2v^3 - 1 - 3v^3}{3v^2}$$
$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{-1-v^3}{3v^2}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{3v^2}{1+v^3}dv = -\frac{dx}{x}$$
$$\Rightarrow \quad \int\frac{3v^2}{1+v^3}dv = -\int\frac{dx}{x}$$
$$\Rightarrow \quad \log(1+v^3) = -\log x + \log c$$
$$\Rightarrow \quad \log(1+v^3) = \log\frac{c}{x}$$
$$\Rightarrow \quad 1 + v^3 = \frac{c}{x}$$

$v = \frac{y}{x}$ درج کرنے پر

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = \frac{c}{x}$$
$$\Rightarrow \quad x^3 + y^3 = cx^2$$

اس طرح مساوات (1) کا حل $x^3 + y^3 = cx^2$ ہو گا۔

مثال6۔ مساوات $(x^2+xy+y^2)dx = x^2dy$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(x^2+xy+y^2)dx = x^2dy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2} \qquad \text{..............}(1)$$

یہ ایک متجانس تفرقی مساوات ہے۔تب فرض کرو کہ $y = vx$ جس سے ہمیں حاصل ہو گا $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

اب مساوات(1) سے حاصل ہے

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^2 + x(vx) + (vx)^2}{x^2}$$

$$= \frac{x^2(1+v+v^2)}{x^2} = 1 + v + v^2$$

$$\Rightarrow \qquad x\frac{dv}{dx} = 1 + v + v^2 - v = 1 + v^2$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dv}{1+v^2} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{dv}{1+v^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \qquad \tan^{-1} v = \log x + \log c = \log cx$$

$v = \frac{y}{x}$ درج کرنے پر

$$\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \log cx$$

اس طرح مساوات (1) کا حل $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \log cx$ ہو گا۔

2.3.1 غیر متجانس مساواتیں جو متجانس مساواتوں میں تحویل پذیر ہوں

(Non-Homogeneous Differential Equations Reducible to Homogeneous Equations)

اگر مساوات $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ ذیل شکل کی ہو

$$(a_2x + b_2y + c_2)\frac{dy}{dx} = (a_1x + b_1y + c_1) \qquad \text{..............}(1)$$

جہاں a_1, b_1, c_1 اور a_2, b_2, c_2 مستقلات ہیں،جب کہ $a_2x + b_2y + c_2 \neq 0$ متجانس میں تحویل پزیر ہے اگر $c_1 = c_2 = 0$

مساوات (1) کو ہم درجہ ذیل شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2} \qquad \text{..............}(2)$$

فرض کرو کہ h, k دو مستقلات اس طرح وجود رکھتے ہیں کہ $x = X + h$، $y = Y + k$ اور

$$a_1h + b_1k + c_1 = 0$$

$$a_2h + b_2k + c_2 = 0$$

تب $dx = dX$ اور $dy = dY$ ہیں۔

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$$

اور مساوات(2) ہو گی

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a_1(X+h) + b_1(Y+k) + c_1}{a_2(X+h) + b_2(Y+k) + c_2}$$

چوں کہ $a_1h + b_1k + c_1 = a_2h + b_2k + c_2 = 0$ اس لیے

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y} \qquad \text{...............(3)}$$

اور مساوات(3) متجانس ہے جس کا ہم حل معلوم کرسکتے ہیں۔ آخر میں X اور Y کی قدر درج کرنے پر ہمیں مساوات(1) کا حل حاصل ہو گا۔

مثال1۔ مساوات $(2x + y - 3)\frac{dy}{dx} = x + 2y - 3$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(2x + y - 3)\frac{dy}{dx} = x + 2y - 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y - 3}{2x + y - 3} \qquad \text{...............(1)}$$

مساوات(1) ایک غیر متجانس تفرقی مساوات ہے۔ اب فرض کرو کہ $x = X + h$، $y = Y + k$ جہاں h, k دو مستقلات اس طرح وجود رکھتے ہیں کہ

$$h + 2k - 3 = 0 \qquad \text{...............(2)}$$

$$2h + k - 3 = 0 \qquad \text{...............(3)}$$

مساوات (2) اور(3) کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $k = 1, h = 1$

اگر ہم $y = Y + 1, x = X + 1$ لیتے ہیں تب مساوات(1)

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X + 2Y}{2X + Y} \qquad \text{...............(4)}$$

میں تبدیل ہو جاتی ہے۔

یہ ایک متجانس تفرقی مساوات ہے۔اب اگر $Y = VX$ ہو،تب $\frac{dY}{dX} = V + X\frac{dV}{dX}$

اب مساوات(4) سے

$$V + X\frac{dV}{dX} = \frac{X + 2VX}{2X + VX}$$

$$= \frac{X(1 + 2V)}{X(2 + V)} = \frac{1 + 2V}{2 + V}$$

$$\Rightarrow \qquad X\frac{dV}{dX} = \frac{1 + 2V}{2 + V} - V = \frac{1 - V^2}{2 + V}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{2 + V}{1 - V^2}dV = \frac{dX}{X}$$

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{2 + V}{1 - V^2}dV = \int \frac{dX}{X}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{2}{1-V^2}dV + \frac{1}{-2}\int \frac{-2V}{1-V^2}dV = \int \frac{dX}{X}$$

$$\Rightarrow \quad 2 \times \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+V}{1-V}\right) - \frac{1}{2}\log(1-V^2) = \log X + \log C$$

$$\Rightarrow \quad 2\log\left(\frac{1+V}{1-V}\right) - \log(1-V^2) = 2\log CX$$

$$\Rightarrow \quad \log\left\{\frac{(1+V)^2}{(1-V)^2} \times \frac{1}{(1-V^2)}\right\} = \log(CX)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1+V}{(1-V)^3} = (CX)^2$$

$V = \frac{Y}{X}$ درج کرنے پر

$$\frac{1+\frac{Y}{X}}{\left(1-\frac{Y}{X}\right)^3} = (CX)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{X+Y}{(X-Y)^3} \cdot X^2 = (CX)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{X+Y}{(X-Y)^3} = C^2 = k$$

اب ہم $Y = y - 1, X = x - 1$ درج کرتے ہیں

$$\Rightarrow \quad \frac{x-1+y-1}{(x-1-y+1)^3} = k$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+y-2}{(x-y)^3} = k$$

اس طرح مساوات(1) کا حل $x + y - 2 = k(x-y)^3$ ہو گا۔

مثال2۔ مساوات $(4x + 3y + 1)dx + (3x + 2y + 1)dy = 0$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(4x + 3y + 1)dx + (3x + 2y + 1)dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x+3y+1}{3x+2y+1} \qquad \text{.............(1)}$$

یہ مساوات غیر متجانس تفرقی مساوات ہے۔اب فرض کرو کہ $x = X + h$ ، $y = Y + k$ جہاں h, k دو ایسے اعداد ہیں کہ

$$4h + 3k + 1 = 0 \qquad \text{.............(2)}$$

$$3h + 2k + 1 = 0 \qquad \text{.............(3)}$$

مساوات (2) اور(3) کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہو تا ہے$k = 1, h = -1$

اگر ہم $y = Y + 1, x = X - 1$ لیتے ہیں تب مساوات(1)

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{4X+3Y}{3X+2Y} \qquad \text{.............(4)}$$

میں تبدیل ہو جاتی ہے۔ یہ ایک متجانس تفرقی مساوات ہے۔اب فرض کرو کہ $Y = VX$ ہے،تب $\frac{dY}{dX} = V + X\frac{dV}{dX}$

اب مساوات(4) سے

$$V+X\frac{dV}{dX}=-\frac{4X+3VX}{3X+2VX}$$
$$=-\frac{X(4+3V)}{X(3+2V)}=-\frac{4+3V}{3+2V}$$
$$\Rightarrow \quad X\frac{dV}{dX}=-\frac{4+3V}{3+2V}-V=-\frac{4+6V+2V^2}{3+2V}$$
$$\Rightarrow \frac{3+2V}{-2(2+3V+V^2)}dV=\frac{dX}{X}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{3+2V}{(2+3V+V^2)}dV=\frac{-2}{X}dX$$
$$\Rightarrow \int\frac{3+2V}{(2+3V+V^2)}dV=-2\int\frac{dX}{X}$$
$$\Rightarrow \quad \log(2+3V+V^2)=-2\log X+\log c$$
$$\Rightarrow \log(2+3V+V^2)X^2=\log c$$
$$\Rightarrow \quad (2+3V+V^2)X^2=c$$

$V=\frac{Y}{X}$ درج کرنے پر

$$\left(2+\frac{3Y}{X}+\frac{Y^2}{X^2}\right)X^2=c$$
$$\Rightarrow \quad 2X^2+3XY+Y^2=c$$

اب ہم $Y=y-1, X=x+1$ درج کرتے ہیں

$$\Rightarrow \; 2(x+1)^2+3(x+1)(y-1)+(y-1)^2=c$$

اس طرح مساوات(1) کا حل $2(x+1)^2+3(x+1)(y-1)+(y-1)^2=c$ ہو گا۔

مثال3۔ مساوات $(x+2y-1)dx-(2x+4y+2)dy=0$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(x+2y-1)dx-(2x+4y+2)dy=0$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+2y-1}{2(x+2y)+2} \qquad \text{..............(1)}$$

اب فرض کرو کہ $v=x+2y$ ہے، تب

$$\frac{dv}{dx}=1+2\frac{dy}{dx}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}-1\right)$$

اب مساوات(1) سے

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}-1\right)=\frac{v-1}{2v+2}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx}-1=\frac{v-1}{v+1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = \frac{v-1}{v+1} + 1 = \frac{2v}{v+1}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{v+1}{2v} dv = dx$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{v}\right) dv = dx$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int \left(1 + \frac{1}{v}\right) dv = \int dx$$
$$\Rightarrow \quad \mathrm{v} + \log v = 2x + c$$

$V = x + 2y$ درج کرنے پر

$$x + 2y + \log(x + 2y) = 2x + c$$
$$\Rightarrow \log(x + 2y) + (2y - x) = c$$

اس طرح مساوات (1) کا حل $\log(x + 2y) + (2y - x) = c$ ہوگا۔

2.4 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم یہ دیکھ چکے ہیں کہ اگر مساوات $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ذیل شکل $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ میں ہو تو ہم اس کا حل متغیر جداپزیر کے طریقہ سے حاصل کرتے ہیں۔ اگر x, y میں کوئی تفاعل $f(x, y)$ متجانس ہو تب ہم $y = vx$ کی مدد سے دی گئی تفرقی مساوات کو متغیر جداپزیر بنا کر حل کرتے ہیں اور غیر متجانس مساواتوں کو متجانس بنا کر ان کا حل حاصل کر لیتے ہیں۔

2.5 کلیدی الفاظ (Keywords)

متجانس تفاعل، متجانس تفرقی مساوات، غیر متجانس تفرقی مساوات، متغیر جداپزیر

2.6 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

2.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. تفرقی مساوات $y\frac{dy}{dx} = xe^{x^2+y^2}$ کا حل ہے

A. $e^{x^2} + e^{y^2} = C$ B. $e^{-x^2} + e^{y^2} = C$

C. $e^{x^2} + e^{-y^2} = C$ D. ان میں سے کوئی نہیں

2. تفرقی مساوات $log\frac{dy}{dx} = ax + b$ کا حل .... ہے۔

3. مساوات $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{2x}$ کا حل ہے

A. $x = C(x-y)^2$ B. $(x-y)x = C$

C. $y = C(x-y)^2$ D. ان میں سے کوئی نہیں

2.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. متغیر جدا پزیر طریقہ سے مساوات $y^2 \cos\sqrt{x}\, dx - 2\sqrt{x}e^{\frac{1}{y}}dy = 0$ کا حل معلوم کرو۔

2. درجہ ذیل مساواتوں کو حل کرو:

(i) $y^2 + x^2\frac{dy}{dx} = xy\frac{dy}{dx}$

(ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan\left(\frac{y}{x}\right)$

(iii) $(x^2 - 3xy)dy = (xy - 2y^2)dx$

3. ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو:

(i) $(e^y + 1)\cos x\, dx + e^y \sin x\, dy = 0$

(ii) $(x+y)^2\frac{dy}{dx} = a^2$

(iii) $dy = tan^2(x+y)dx$

(iv) $\frac{dy}{dx} = \cos(x+y) + \sin(x+y)$

(v) $\frac{dy}{dx} = e^{x+y} + x^2 e^{x^3+y}$

(vi) $(e^x + 1)ydy + (y+1)dx = 0$

(vii) $\frac{dy}{dx} = xy + x + y + 1$

2.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. حل کرو:

(i) $(x - y - 2)dx + (x - 2y - 3)dy = 0$

(ii) $(x + 2y + 3)dx - (3x + 2y + 1)dy = 0$

(iii) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{2x+2y+3}$

جوابات:

2.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $\sin\sqrt{x} + e^{\frac{1}{y}} = C$

2. $\left(\frac{y}{x}\right) - \log\left(\frac{y}{x}\right) = \log x + C \quad (i)$

$\sin\left(\frac{y}{x}\right) = Cx \quad (ii)$

$x^2 = Cy^3 e^{\frac{x}{y}} \quad (iii)$

3.

(i) $(e^y + 1)\sin x = C$

(ii) $y = a\tan^{-1}\frac{(x+y)}{a} + C$

(iii) $\sin(2x + 2y) = 2x - 2y + C$

(iv) $\log\left\{1 + \tan\frac{(x+y)}{2}\right\} = x + C$

$e^x + e^{-y} + \frac{x^3}{3} = C$ (v)

$y - \log(1 + e^{-x}) - \log(y + 1) = C$ (vi)

$C(y + 1) = e^{\left(\frac{x^2}{2}+x\right)}$ (vii)

2.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

$x^2 - 2y^2 - 2x4y - 2 = C\left(\frac{x-y\sqrt{2}-\sqrt{2}-1}{x+y\sqrt{2}+\sqrt{2}-1}\right)^{1/\sqrt{2}}$ (i)

$(2y - x + 5)^4 = C^3(x + y + 1)$ (ii)

$x + y + \frac{4}{3} = Ce^{3(x-2y)}$ (iii)

2.7 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Text Book of Differential Equations, Khalil Ahmad, Real World Education Publishers, New Delhi
2. Ordinary and Partial Differential Equations- Rai Singhania, S.Chand & Co., New Delhi
3. A Text Book of B.Sc. (Mathematics), Volume –I , V. Venkateshwara Rao and others, S. Chand & Company

اکائی 3۔ ٹھیک تفرقی مساواتیں

(Exact Differential Equations)

اکائی کے اجزا

3.0 تمہید(Introduction)

ذیل کی مساواتوں کو غور سے دیکھیے:

$$xdy + ydx = 0 \qquad ....(1)$$

$$\frac{ydx-xdy}{y^2} = 0 \qquad ....(2)$$

مساوات(1) کا حل ہے

$$xy = c \qquad ....(3)$$

اور مساوات (2) کا حل ہے

$$\frac{x}{y} = c \qquad ....(4)$$

مساوات(3) کے سیدھے تفرق سے تفرقی مساوات(1) حاصل ہوتی ہے۔ جیسا کہ

$$d(xy) = d(c)$$

$$\Rightarrow \qquad xdy + ydx = 0$$

اور $d\left(\frac{x}{y}\right) = d(c)$ سے $\frac{ydx-xdy}{y^2} = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ ایسی مساواتیں جو کسی تفاعل $f(x,y) = c$ کے سیدھے تفرق سے حاصل ہوتی ہیں ٹھیک تفرقی مساواتیں(Exact Differential Equations) کہلاتی ہیں۔

3.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ

- ٹھیک تفرقی مساوات کا حل حاصل کر سکیں۔
- متکمل جز ضربی(Integrating Factor) معلوم کر کے غیر ٹھیک مساوات کو ٹھیک مساوات میں تبدیل کر کے اس کا حل معلوم کرنے کا طریقہ سیکھ سکیں۔

3.2 ٹھیک تفرقی مساواتیں(Exact Differential Equations)

تعریف: اگر M اور N، x, y کے دو تفاعلات ہوں تو مساوات $Mdx + Ndy = 0$ ٹھیک مساوات یا ٹھیک تفرقی مساوات کہلاتی ہے اگر ایک ایسا تفاعل $f(x,y)$ وجود رکھتا ہو کہ

$$d[f(x,y)] = Mdx + Ndy$$

مثلاً مساوات $y^2dx + 2xydy = 0$ ٹھیک مساوات ہے اس لیے کہ $d(xy^2) = y^2dx + 2xydy$ ہے۔ عملاً $f(x,y)$ کو اس قدر معلوم کرنا آسان نہیں ہوتا ہے۔

3.2.1 ٹھیک تفرقی مساواتوں کے لیے ضروری اور کافی شرط

(Necessary and Sufficient Condition for Exact Differential Equations)

پہلے رتبے اور پہلے درجے کی تفرقی مساوات $Mdx + Ndy = 0$ کے ٹھیک ہونے کی ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}}$ ہو۔

ثبوت:

ضروری شرط(Necessary Condition): فرض کرو کہ مساوات

$$Mdx + Ndy = 0 \qquad \text{..............(1)}$$

ٹھیک مساوات ہے، ہمیں ثابت کرنا ہے کہ

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \text{..............(2)}$$

ہو گا۔ ٹھیک تفرقی مساوات کی تعریف سے ظاہر ہوتا ہے کہ ایک ایسا تفاعل $f(x, y)$ وجود رکھتا ہو کہ

$$d[f(x,y)] = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}}dy = Mdx + Ndy \qquad \text{..............(3)}$$

جہاں

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \qquad \text{..............(4)}$$

اور

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N \qquad \text{..............(5)}$$

مساوات(4) کو بہ لحاظ y تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{y}\partial x}$$

اور مساوات(5) کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

چوں کہ $\frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{y}\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ ہوتا ہے، اس لیے

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

اس لیے تفرقی مساوات $Mdx + Ndy = 0$ کے ٹھیک ہونے کی ضروری شرط یہ ہے کہ $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}}$ ہو۔

کافی شرط(Sufficient Condition): فرض کرو کہ شرط $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}}$ صحیح ہے۔

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ تفرقی مساوات $Mdx + Ndy = 0$ ٹھیک ہے۔ اس کے لیے ہمیں ایک ایسا تفاعل $f(x, y)$ تلاش کرنا ہے کہ $d[f(x,y)] = Mdx + Ndy$ ہو۔

فرض کرو کہ $U = \int Mdx$ جس میں دورانِ تکمل مستقل مانا گیا ہے، تب

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int Mdx\right) = \frac{\partial U}{\partial x}$$

چوں کہ $\frac{\partial}{\partial x}(\int Mdx) = M$،اس لیے

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial^2 U}{\partial \mathrm{y} \partial x}$$

چوں کہ $\frac{\partial^2 U}{\partial \mathrm{y} \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ اور $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}}$ ہے،اس لیے

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

تکمل بہ لحاظ x کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$N = \frac{\partial U}{\partial y} + \phi(y)$$

جہاں $\phi(y)$ مستقل ہے۔اب

$$\begin{aligned} Mdx + Ndy &= \frac{\partial U}{\partial x}dx + \left\{\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{y}} + \phi(y)\right\}dy \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{y}}dy\right) + \phi(y)dy \\ &= dU + \phi(y)dy \\ &= d\left(U + \int \phi(y)dy\right) \end{aligned}$$

جوایک کامل تفرق(Total Differentiation) ہے۔اس طرح $Mdx + Ndy = 0$ ایک ٹھیک تفرقی مساوات ہے۔

ٹھیک تفرقی مساوات کے حل کا عملی قاعدہ:

I. دی گئی مساوات کو $Mdx + Ndy = 0$ کی شکل میں لکھ کر M اور N معلوم کریں۔

II. اگر $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ہو تب تفرقی مساوات ٹھیک ہے۔

III. متغیر y کو مستقل مان کر M کو بہ لحاظ x تکمل کریں۔

IV. متغیر x کو مستقل مان کر N کو بہ لحاظ y تکمل کریں اور ان ارقام کو چھوڑدو جو M کو بہ لحاظ x تکمل کرنے پر حاصل ہوں۔

تیسرے اور چوتھے مرحلے سے حاصل شدہ ارقام کو جمع کرکے ایک اختیاری مستقل کے برابر کرو۔یہی ٹھیک مساوات کا حل ہو گا۔

مثال1۔ حل کرو: $(ax + hy + g)dx + (hx + by + f)dy = 0$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(ax + hy + g)dx + (hx + by + f)dy = 0$$

اس مساوات کا تقابل $Mdx + Ndy = 0$ سے کرنے پر

$$M = ax + hy + g$$

اور

$$N = hx + by + f$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial M}{\partial \mathrm{y}} = h, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = h$$

اس لیے

$$\frac{\partial M}{\partial \mathrm{y}}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

اس لیے دی گئی مساوات ٹھیک ہے۔ ٹھیک مساوات کا حل درجہ ذیل طریقہ سے نکالا جاتا ہے

$$\int Mdx=\int(ax+hy+g)dx=a\frac{x^2}{2}+hyx+gx$$

$$\int Ndy=\int(hx+by+f)dy=hyx+b\frac{y^2}{2}+fy$$

چوں کہ hyx دونوں تکملات میں موجود ہے اس لیے اس کو چھوڑنے پر دی گئی مساوات کا حل ہو گا

$$a\frac{x^2}{2}+hyx+gx+b\frac{y^2}{2}+fy=c$$

$$ax^2+2hyx+2gx+by^2+2fy=2c=k$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $ax^2+2hyx+2gx+by^2+2fy=k$ ہو گا۔

مثال2۔ حل کرو: $(e^y+1)\cos x\,dx+e^y\sin x\,dy=0$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(e^y+1)\cos x\,dx+e^y\sin x\,dy=0$$

اس مساوات کا تقابل $Mdx+Ndy=0$ سے کرنے پر

$$M=(e^y+1)\cos x$$

اور

$$N=e^y\sin x$$

$$\Rightarrow\qquad \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}}=e^y\cos x,\quad \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}=e^y\cos x$$

اس لیے

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

اس لیے دی گئی مساوات ٹھیک ہے۔ ٹھیک مساوات کا حل درجہ ذیل طریقہ سے نکالا جاتا ہے

$$\int Mdx=\int(e^y+1)\cos x\,dx=(e^y+1)\sin x$$

$$\int Ndy=\int e^y\sin x\,dy=e^y\sin x$$

چوں کہ $e^y\sin x$ دونوں تکملات میں موجود ہے اس لیے اس کو چھوڑنے پر دی گئی مساوات کا حل ہو گا

$$e^y\sin x+\sin x=c$$

$$(e^y+1)\sin x=c$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $(e^y+1)\sin x=c$ ہو گا۔

مثال3۔ حل کرو: $(x^2-ay)dx=(ax-y^2)dy$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(x^2 - ay)dx - (ax - y^2)dy = 0$$

اس مساوات کا تقابل $Mdx + Ndy = 0$ سے کرنے پر

$$M = x^2 - ay$$

اور

$$N = -ax + y^2$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial M}{\partial \mathrm{y}} = -a, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -a$$

اس لیے

$$\frac{\partial M}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

اس لیے دی گئی مساوات ٹھیک تفرقی مساوات ہے۔اس کا حل ہو گا

$$\int Mdx = \int (x^2 - ay)dx = \frac{x^3}{3} - axy$$

$$\int Ndy = \int (-ax + y^2)dy = -axy + \frac{y^3}{3}$$

چوں کہ $-axy$ دونوں تکملات میں موجود ہے اس لیے اس کو چھوڑنے پر دی گئی مساوات کا حل ہو گا

$$\frac{x^3}{3} - axy + \frac{y^3}{3} = c$$

$$x^3 - 3axy + y^3 = 3c = k$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $x^3 - 3axy + y^3 = k$ ہو گا۔

مثال4۔ حل کرو: $(xy\cos xy + \sin xy)dx + x^2 \cos xy\, dy = 0$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(xy\cos xy + \sin xy)dx + x^2 \cos xy\, dy = 0$$

اس مساوات کا تقابل $Mdx + Ndy = 0$ سے کرنے پر

$$M = xy\cos xy + \sin xy$$

اور

$$N = x^2 \cos xy$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial M}{\partial \mathrm{y}} = 2x\cos xy - x^2 y \sin xy$$

اور

$$\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} = 2x\cos xy - x^2 y \sin xy$$

اس لیے

$$\frac{\partial M}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

اس لیے دی گئی مساوات ٹھیک ہے۔اس کا حل ہو گا

$$\int Mdx = \int (xy\cos xy + \sin xy)dx$$
$$= xy\frac{\sin xy}{y} - \int 1\cdot y\frac{\sin xy}{y}dx - \frac{\cos xy}{y}$$
$$= x\sin xy - \int \sin xy\, dx - \frac{\cos xy}{y}$$
$$= x\sin xy + \frac{\cos xy}{y} - \frac{\cos xy}{y}$$
$$= x\sin xy$$

اور

$$\int Ndy = \int x^2\cos xy\, dy$$
$$= x^2\frac{\sin xy}{x}$$
$$= x\sin xy$$

چوں کہ $x\sin xy$ دونوں تکملات میں موجود ہے۔ اس لیے اس کو چھوڑنے پر دی گئی مساوات کا حل ہو گا

$$x\sin xy = c$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $x\sin xy = c$ ہو گا۔

مثال5۔ حل کرو: $(x^4 - 2xy^2 + y^4)dx + (4xy^3 - 2x^2y - \sin y)dy = 0$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(x^4 - 2xy^2 + y^4)dx + (4xy^3 - 2x^2y - \sin y)dy = 0$$

اس مساوات کا تقابل $Mdx + Ndy = 0$ سے کرنے پر

$$M = x^4 - 2xy^2 + y^4$$

اور

$$N = 4xy^3 - 2x^2y - \sin y$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial M}{\partial \mathrm{y}} = -4xy + 4y^3, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -4xy + 4y^3$$

اس لیے

$$\frac{\partial M}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

اس لیے دی گئی مساوات ٹھیک تفرقی مساوات ہے۔ اس کا حل ہو گا

$$\int Mdx = \int (x^4 - 2xy^2 + y^4)dx$$
$$= \frac{x^5}{5} - \frac{2x^2y^2}{2} + xy^4$$
$$= \frac{x^5}{5} - x^2y^2 + xy^4$$

اور

$$\int Ndy = \int (4xy^3 - 2x^2y - \sin y)dy$$
$$= \frac{4xy^4}{4} - \frac{2x^2y^2}{2} + \cos y$$
$$= xy^4 - x^2y^2 + \cos y$$

چونکہ $xy^4 - x^2y^2$ دونوں تکملات میں موجود ہے اس لیے اس کو چھوڑنے پر دی گئی مساوات کا حل ہو گا

$$\frac{x^5}{5} + xy^4 - x^2y^2 + \cos y = c$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $\frac{x^5}{5} + xy^4 - x^2y^2 + \cos y = c$ ہو گا۔

3.2.2 متکمل اجزا ضربی (Integrating Factors)

1. مساواتیں جو ٹھیک نہ ہوں لیکن ٹھیک بنائی جاسکتی ہوں

(Non Exact Differential Equations which can be Reduced to Exact)

فرض کرو کہ

$$Mdx + Ndy = 0 \qquad \text{.............(1)}$$

ٹھیک مساوات نہیں ہے اور ایک تفاعل $f(x, y) \neq 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ اگر مساوات (1) کو $f(x, y)$ سے ضرب دیا جائے تو محصلہ مساوات $f(x, y)[Mdx + Ndy] = 0$ ٹھیک ہو جاتی ہے۔ ایسے تفاعل $f(x, y)$ کو دی ہوئی مساوات (1) کا متکمل اجزا ضربی کہتے ہیں۔

2. تنقیدی جائزہ سے معلوم کیے گیے متکمل اجزا ضربی (Integrating Factors Determine by Inspection)

ذیل کے ٹھیک مشتقات (Exact Differentials) کو یاد رکھیں:

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2} \qquad \text{(i)}$$
$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2} \qquad \text{(ii)}$$
$$d\left(\log\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{xy} \qquad \text{(iii)}$$
$$d\left(\log\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{xy} \qquad \text{(iv)}$$
$$d(xy) = xdy + ydx \qquad \text{(v)}$$
$$d\left(\tan^{-1}\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} \qquad \text{(vi)}$$
$$d\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \qquad \text{(vii)}$$
$$d\left(\frac{1}{xy}\right) = \frac{xdy + ydx}{x^2y^2} \qquad \text{(viii)}$$
$$d\left(\frac{x^2}{y^2}\right) = \frac{2xy^2dx - 2yx^2dy}{y^4} \qquad \text{(ix)}$$
$$d\left(\frac{y^2}{x^2}\right) = \frac{2yx^2dy - 2xy^2dx}{x^4} \qquad \text{(x)}$$

مثال 1۔ حل کرو: $xdy - ydx + 2x^3dx = 0$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$xdy - ydx + 2x^3dx = 0$$

یہ مساوات غیر ٹھیک(Non Exact)مساوات ہے، لیکن اس مساوات کو x^2 سے تقسیم دینے پر

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} + 2xdx = 0$$

$$\Rightarrow \quad d\left(\frac{y}{x}\right) + 2xdx = 0$$

$$\Rightarrow \quad \int \left[d\left(\frac{y}{x}\right) + 2xdx\right] = c$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{x} + 2\frac{x^2}{2} = c$$

$$\Rightarrow \quad y + x^3 = cx$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $y + x^3 = cx$ ہو گا۔

مثال2۔ مساوات $(x^2 + y^2 + x)dx - (2x^2 + 2y^2 - y)dy = 0$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(x^2 + y^2 + x)dx - (2x^2 + 2y^2 - y)dy = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x^2 + y^2)dx - (2x^2 + 2y^2)dy + xdx + ydy = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x^2 + y^2)(dx - 2dy) + xdx + ydy = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2(dx - 2dy) + \frac{2xdx + 2ydy}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2dx - 4dy + d[\log(x^2 + y^2)] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \int [2dx - 4dy] + \int d[\log(x^2 + y^2)] = c$$

$$\Rightarrow \quad 2x - 4y + \log(x^2 + y^2) = c$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $2x - 4y + \log(x^2 + y^2) = c$ ہو گا۔

3. غیر ٹھیک مساوات کو ٹھیک بنانے کے لیے چند قوانین اور متکمل اجزا ضربی معلوم کرنے کے طریقے

(Some Rules to find Integrating Factors of Non Exact Equations to make it Exact)

پہلا قائدہ: اگر $Mdx + Ndy = 0$ غیر ٹھیک ہے، $Mx + Ny \neq 0$ اور مساوات متجانس(Homogeneous)ہو تب $\frac{1}{Mx+Ny}$ مساوات کا متکمل جز ضربی ہو گا۔ اس لیے ٹھیک مساوات درجہ ذیل ہو گی جس کا حل حاصل کیا جاسکتا ہے

$$\frac{1}{Mx + Ny}\left[Mdx + Ndy\right] = 0$$

دوسرا قائدہ: اگر مساوات $Mdx + Ndy = 0$ ٹھیک نہ ہو اور اس کی شکل $f(xy)ydx + g(xy)xdy = 0$ کی ہو، تب $\frac{1}{Mx-Ny}$ مساوات $Mdx + Ndy = 0$ کا متکمل جز ضربی ہے اور اس طرح ٹھیک مساوات ہو گی

$$\frac{1}{Mx - Ny}\left[Mdx + Ndy\right] = 0, \left(Mx - Ny \neq 0\right)$$

تیسرا قائدہ: اگر مساوات $Mdx + Ndy = 0$ ٹھیک نہ ہو اور $f(x) = \frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right]$ ہو تب $e^{\int f(x)dx}$ مساوات $Mdx + Ndy = 0$ کا متکمل جز ضربی ہے اور اس طرح ٹھیک مساوات درجہ ذیل ہو گی جس کا حل حاصل کیا جا سکتا ہے

$$e^{\int f(x)dx}\left[Mdx + Ndy\right] = 0$$

چوتھا قائدہ: اگر $g(y) = \frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right]$ ہو تب $e^{\int g(y)dy}$ مساوات $Mdx + Ndy = 0$ کا متکمل جز ضربی اور اس طرح ٹھیک مساوات درجہ ذیل ہو گی جس کا حل حاصل کیا جا سکتا ہے

$$e^{\int g(y)dy}\left[Mdx + Ndy\right] = 0$$

پہلے قائدے کے چند مسائل:

مثال 1۔ حل کرو: $(x^2y - 2xy^2)dx - (x^3 - 3x^2y)dy = 0$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(x^2y - 2xy^2)dx - (x^3 - 3x^2y)dy = 0$$

اس مساوات کا تقابل $Mdx + Ndy = 0$ سے کرنے پر

$$M = x^2y - 2xy^2$$

اور

$$N = 3x^2y - x^3$$

یہاں M اور N متجانس ہیں۔ اور

$$\begin{aligned} Mx + Ny &= (x^2y - 2xy^2)x + (3x^2y - x^3)y \\ &= x^3y - 2x^2y^2 + 3x^2y^2 - x^3y \\ &= x^2y^2 \neq 0 \end{aligned}$$

$\frac{1}{x^2y^2}$ دی گئی مساوات کا متکمل جز ضربی ہے۔ اس لیے ٹھیک مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{1}{x^2y^2}\left[(x^2y - 2xy^2)dx - (x^3 - 3x^2y)dy\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{y} - \frac{2}{x}\right)dx - \left(\frac{x}{y^2} - \frac{3}{y}\right)dy = 0$$

اس مساوات کا حل دی گئی مساوات کے حل کے برابر ہو گا۔ اب اس مساوات کا تقابل $M'dx + N'dy = 0$ سے کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$M' = \frac{1}{y} - \frac{2}{x}, \qquad N' = \frac{3}{y} - \frac{x}{y^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial M'}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}, \qquad \frac{\partial N'}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}$$

اس لیے

$$\frac{\partial M'}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial N'}{\partial x}$$

اس لیے دی گئی مساوات ٹھیک تفرقی مساوات ہے۔اس کا حل درجہ ذیل طریقہ سے نکالا جاتا ہے

$$\int \left(\frac{1}{y} - \frac{2}{x}\right) dx + \int \left(\frac{3}{y}\right) dy = c$$

$$\frac{x}{y} - 2\log x + 3\log y = c$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $\frac{x}{y} + \log\left(\frac{y^3}{x^2}\right) = c$ ہو گا۔

مثال2۔ حل کرو: $x^2ydx - (x^3 + y^3)dy = 0$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$x^2ydx - (x^3 + y^3)dy = 0$$

اس مساوات کا تقابل $Mdx + Ndy = 0$ سے کرنے پر

$$M = x^2y$$

اور

$$N = -(x^3 + y^3)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial M}{\partial \mathrm{y}} = x^2, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -3x^2$$

اس لیے

$$\frac{\partial M}{\partial \mathrm{y}} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

اس لیے دی گئی مساوات ٹھیک مساوات نہیں ہے۔اب

$$\begin{aligned} Mx + Ny &= x^3y - (x^3 + y^3)y \\ &= x^3y - x^3y - y^4 \\ &= -y^4 \neq 0 \end{aligned}$$

$\frac{1}{-y^4}$ دی گئی مساوات کا مُتکمل جز ضربی ہے۔اس لیے ٹھیک مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{1}{-y^4}[x^2ydx - (x^3 + y^3)dy] = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \left[\frac{x^2}{-y^3}dx + \left(\frac{x^3}{y^4} + \frac{1}{y}\right)dy\right] = 0$$

اس کا حل درجہ ذیل طریقہ سے نکالا جاتا ہے جو کہ دی گئی مساوات کے حل کے برابر ہو گا

$$\int \left(\frac{x^2}{-y^3}\right) dx + \int \left(\frac{1}{y}\right) dy = c$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x^3}{-3y^3} + \log y = c = \log k$$

$$\Rightarrow \qquad \log\frac{y}{k} = \frac{x^3}{3y^3}$$

$$\Rightarrow \qquad y = ke^{\frac{x^3}{3y^3}}$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $y = ke^{\frac{x^3}{3y^3}}$ ہو گا۔

مثال3۔ حل کرو: $xydx - (x^2 + 2y^2)dy = 0$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$xydx - (x^2 + 2y^2)dy = 0$$

اس مساوات کا تقابل $Mdx + Ndy = 0$ سے کرنے پر

$$M = xy$$

اور

$$N = -(x^2 + 2y^2)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial M}{\partial \mathrm{y}} = x, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -2x$$

اس لیے

$$\frac{\partial M}{\partial \mathrm{y}} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

اس لیے دی گئی مساوات ٹھیک مساوات نہیں ہے اور N،M متجانس ہیں۔اس لیے

$$\begin{aligned} Mx + Ny &= x^2y - (x^2 + 2y^2)y \\ &= x^2y - x^2y - 2y^3 \\ &= -2y^3 \neq 0 \end{aligned}$$

$\frac{1}{-2y^3}$ دی گئی مساوات کا متکمل جز ضربی ہے۔اس لیے ٹھیک مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{1}{-2y^3}[xydx - (x^2 + 2y^2)dy] = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{-x}{2y^2}dx + \left(\frac{x^2}{2y^3} + \frac{1}{y}\right)dy = 0$$

اس مساوات کا حل دی گئی مساوات کے حل کے برابر ہو گا۔اس لیے اس مساوات کا حل ہے

$$\int \left(\frac{-x}{2y^2}\right)dx + \int \left(\frac{1}{y}\right)dy = c$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{-x^2}{4y^2} + \log y = c = \log k$$

$$\Rightarrow \qquad \log\frac{y}{k} = \frac{x^2}{4y^2}$$

$$\Rightarrow \qquad y = ke^{\frac{x^2}{4y^2}}$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $y = ke^{\frac{x^2}{4y^2}}$ ہو گا۔

دوسرے قائدے کے چند مسائل:

مثال1۔ مساوات $y(xy + 2x^2y^2)dx + x(xy - x^2y^2)dy = 0$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$y(xy+2x^2y^2)dx+x(xy-x^2y^2)dy=0 \qquad ....(1)$$

اس مساوات کا تقابل $Mdx+Ndy=0$ سے کرنے پر

$$M=y(xy+2x^2y^2)$$

اور

$$N=x(xy-x^2y^2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y}=2xy+6x^2y^2, \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=2xy-3x^2y^2$$

اس لیے

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

اس لیے دی گئی مساوات ٹھیک مساوات نہیں ہے اور اس کی شکل $yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$ کی ہے اور

$$\begin{aligned} Mx-Ny &= y(xy+2x^2y^2)x-x(xy-x^2y^2)y \\ &= x^2y^2+2x^3y^3-x^2y^2+x^3y^3 \\ &= 3x^3y^3\neq 0 \end{aligned}$$

$\frac{1}{3x^3y^3}$ دی گئی مساوات کا متکمل جز ضربی ہے۔ اس لیے ٹھیک مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{1}{3x^3y^3}\left[y(xy+2x^2y^2)dx+x(xy-x^2y^2)dy\right]=0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{xy^2+2x^2y^3}{3x^3y^3}\right)dx+\left(\frac{x^2y-x^3y^2}{3x^3y^3}\right)dy=0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{3x^2y}+\frac{2}{3x}\right)dx+\left(\frac{1}{3xy^2}-\frac{1}{3y}\right)dy=0$$

اس مساوات کا حل دی گئی مساوات کے حل کے برابر ہو گا۔ اس لیے اس مساوات کا حل ہے

$$\int\left(\frac{1}{3x^2y}+\frac{2}{3x}\right)dx-\int\left(\frac{1}{3y}\right)dy=c$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{3xy}+\frac{2}{3}\log x-\frac{1}{3}\log y=c$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{xy}+\log x^2-\log y=3c=k$$

$$\Rightarrow \quad \log\left(\frac{x^2}{y}\right)-\frac{1}{xy}=k$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $\log\left(\frac{x^2}{y}\right)-\frac{1}{xy}=k$ ہو گا۔

مثال 2۔ مساوات $y(1-xy)dx+x(1+xy)dy=0$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$y(1-xy)dx+x(1+xy)dy=0 \qquad ....(1)$$

اس مساوات کا تقابل $Mdx + Ndy = 0$ سے کرنے پر

$$M = y(1 - xy), N = x(1 + xy)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = 1 - 2xy, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 + 2xy$$

اس لیے

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

اس لیے دی گئی مساوات ٹھیک مساوات نہیں ہے اور اس کی شکل $yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$ ہے اور

$$\begin{aligned} Mx - Ny &= y(1 - xy)x - x(1 + xy)y \\ &= xy - x^2y^2 - xy - x^2y^2 \\ &= -2x^2y^2 \neq 0 \end{aligned}$$

$\frac{1}{-2x^2y^2}$ دی گئی مساوات کا متکمل جز ضربی ہے۔ اس لیے ٹھیک مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{1}{-2x^2y^2}[y(1 - xy)dx + x(1 + xy)dy] = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\frac{y - xy^2}{-2x^2y^2}\right)dx + \left(\frac{x + x^2y}{-2x^2y^2}\right)dy = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \left(-\frac{1}{2x^2y} + \frac{1}{2x}\right)dx + \left(-\frac{1}{2xy^2} - \frac{1}{2y}\right)dy = 0$$

اس مساوات کا حل دی گئی مساوات کے حل کے برابر ہو گا۔ اس لیے اس مساوات کا حل ہے

$$\int\left(-\frac{1}{2x^2y} + \frac{1}{2x}\right)dx - \int\left(\frac{1}{2y}\right)dy = c$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2xy} + \frac{1}{2}\log x - \frac{1}{2}\log y = c$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{xy} + \log x - \log y = 2c = k$$

$$\Rightarrow \qquad \log\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{xy} = k$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $\log\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{xy} = k$ ہو گا۔

<u>تیسرے اور چوتھے قائدے کے چند مسائل:-</u>

مثال 1۔ مساوات $(y + y^2)dx + xydy = 0$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(y + y^2)dx + xydy = 0 \qquad \text{..........(1)}$$

اس مساوات کا تقابل $Mdx + Ndy = 0$ سے کرنے پر

$$M = y + y^2, \qquad N = xy$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial M}{\partial \text{y}} = 1 + 2y, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = y$$

اس لیے

$$\frac{\partial M}{\partial \text{y}} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

اس لیے دی گئی مساوات ٹھیک مساوات نہیں ہے اور

$$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial \text{y}}\right] = \frac{1}{y(1+y)}(y - 1 - 2y)$$
$$= -\frac{1}{y(1+y)}(1+y)$$
$$= -\frac{1}{y} = g(y)$$

اس لیے $\frac{1}{y} = e^{-\log y} = e^{\int\left(-\frac{1}{y}\right)dy} = e^{\int g(y)dy}$ دی گئی مساوات کا متکمل جز ضربی ہے۔ اب مساوات (1) کو $\frac{1}{y}$ سے ضرب دینے پر

$$\frac{1}{y}[(y + y^2)dx + xydy] = 0$$
$$\Rightarrow \qquad (1 + y)dx + xdy = 0$$

ٹھیک مساوات ہے۔

اس مساوات کا حل دی گئی مساوات کے حل کے برابر ہو گا۔ اس لیے اس مساوات کا حل ہے

$$dx + ydx + xdy = 0$$
$$\Rightarrow \qquad dx + d(xy) = 0$$
$$\Rightarrow \qquad d(x + xy) = 0$$
$$\Rightarrow \qquad x + xy = c$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $x + xy = C$ ہو گا۔

مثال2۔ مساوات $y(x + y)dx + x(x + 3y + 2)dy = 0$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$y(x + y + 1)dx + x(x + 3y + 2)dy = 0 \qquad \text{..........(1)}$$

اس مساوات کا تقابل $Mdx + Ndy = 0$ سے کرنے پر

$$M = y(x + y + 1), N = x(x + 3y + 2)$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial M}{\partial \text{y}} = x + 2y + 1, \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 3y + 2$$

اس لیے

$$\frac{\partial M}{\partial \text{y}} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

اس لیے دی گئی مساوات ٹھیک مساوات نہیں ہے اور

$$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right]=\frac{1}{y(x+y+1)}(2x+3y+2-x-2y-1)$$
$$=\frac{1}{y(x+y+1)}(x+y+1)$$
$$=\frac{1}{y}=g(y)$$

اس لیے $e^{\int g(y)dy}=e^{\int\left(\frac{1}{y}\right)dy}=e^{\log y}=y$ دی گئی مساوات کا متکمل جز ضربی ہے۔اب مساوات(1) کو y سے ضرب دینے پر

$$y[y(x+y+1)dx+x(x+3y+2)dy]=0$$
$$\Rightarrow\qquad y^2(x+y+1)dx+xy(x+3y+2)dy=0$$

ٹھیک مساوات ہے۔اس مساوات کا تقابل $M'dx+N'dy=0$ سے کرنے پر

$$M'=y^2(x+y+1)=y^2x+y^3+y^2,$$
$$N'=xy(x+3y+2)=x^2y+3xy^2+2xy$$

اس لیے مساوات کا حل ہے

$$\int M'dx+\int\left(N' \text{ کے، بغیر } x \text{ کے ارکان}\right)dy=c$$
$$\Rightarrow\qquad \int(y^2x+y^3+y^2)dx+\int 0dy=c$$
$$\Rightarrow\qquad \frac{y^2x^2}{2}+xy^3+xy^2=c$$
$$\Rightarrow\qquad y^2x^2+2xy^3+2xy^2=2c=k$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $y^2x^2+2xy^3+2xy^2=k$ ہو گا۔

مثال3۔ مساوات $\left(y+\frac{y^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)dx+\frac{1}{4}(x+xy^2)dy=0$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$\left(y+\frac{y^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)dx+\frac{1}{4}(x+xy^2)dy=0 \qquad ....(1)$$

اس مساوات کا تقابل $Mdx+Ndy=0$ سے کرنے پر

$$M=y+\frac{y^3}{3}+\frac{x^2}{2},N=\frac{1}{4}(x+xy^2)$$
$$\Rightarrow\qquad \frac{\partial M}{\partial y}=1+y^2,\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{1}{4}(1+y^2)$$

اس لیے

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

اس لیے دی گئی مساوات ٹھیک مساوات نہیں ہے اور

$$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\frac{4}{x+xy^2}\left(1+y^2-\frac{1}{4}(1+y^2)\right)$$

$$= \frac{4}{x(1+y^2)} \times \frac{3}{4}(1+y^2)$$
$$= \frac{3}{x} = f(x)$$

اس لیے $x^3 = e^{3\log x} = e^{\int\left(\frac{3}{x}\right)dx} = e^{\int f(x)dx}$ دی گئی مساوات کا متمّمل جز ضربی ہے۔ اب مساوات (1) کو x^3 سے ضرب دینے پر

$$x^3\left[\left(y + \frac{y^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)dx + \frac{1}{4}(x + xy^2)dy\right] = 0$$
$$\Rightarrow \quad \left(x^3y + \frac{x^3y^3}{3} + \frac{x^5}{2}\right)dx + \frac{1}{4}x^4(1+y^2)dy = 0$$

اب یہ ایک ٹھیک تفرقی مساوات ہے۔اس مساوات کا تقابل $M'dx + N'dy = 0$ سے کرنے پر

$$M' = x^3y + \frac{x^3y^3}{3} + \frac{x^5}{2},$$
$$N' = \frac{1}{4}x^4(1+y^2)$$

اس لیے مساوات کا حل ہے

$$\int M'dx + \int \left(N' \text{ کے، بغیر } x \text{ کے ارکان}\right)dy = C$$
$$\Rightarrow \quad \int\left(x^3y + \frac{x^3y^3}{3} + \frac{x^5}{2}\right)dx + \int(0)dy = c$$
$$\Rightarrow \quad \frac{yx^4}{4} + \frac{x^4y^3}{4\times 3} + \frac{x^6}{6\times 2} = c$$
$$\Rightarrow \quad 3yx^4 + x^4y^3 + x^6 = 12c = k$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $3yx^4 + x^4y^3 + x^6 = k$ ہے۔

مثال4۔ مساوات $(2y^3 + 2)dx + 3xy^2dy = 0$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(2y^3 + 2)dx + 3xy^2dy = 0 \qquad \text{.........}(1)$$

اس مساوات کا تقابل $Mdx + Ndy = 0$ سے کرنے پر

$$M = 2y^3 + 2, N = 3xy^2$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 6y^2, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 3y^2$$

اس لیے

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

اس لیے دی گئی مساوات ٹھیک مساوات نہیں ہے اور

$$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\frac{1}{3xy^2}(6y^2-3y^2)$$
$$=\frac{1}{3xy^2}\times 3y^2$$
$$=\frac{1}{x}=f(x)$$

اس لیے $x = e^{\log x} = e^{\int\left(\frac{1}{x}\right)dx} = e^{\int f(x)dx}$ دی گئی مساوات کا متکمل جز ضربی ہے۔اب مساوات (1) کو x سے ضرب دینے پر

$$x[(2y^3+2)dx+3xy^2dy]=0$$
$$\Rightarrow \qquad (2xy^3+2x)dx+3x^2y^2dy=0$$

اب یہ ایک ٹھیک تفرقی مساوات ہے۔اس مساوات کا تقابل $M'dx + N'dy = 0$ سے کرنے پر

$$M' = 2xy^3+2x,$$
$$N' = 3x^2y^2$$

اس لیے مساوات کا حل ہے

$$\int M'dx+\int\left(N' \text{ کے، بغیر } x \text{ کے ارکان}\right)dy=c$$
$$\Rightarrow \qquad \int(2xy^3+2x)dx+\int(0)dy=c$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{2x^2y^3}{2}+2\times\frac{x^2}{2}=c$$
$$\Rightarrow \qquad x^2y^3+x^2=c$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $x^2y^3 + x^2 = c$ ہے۔

3.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

1. مساوات $Mdx + Ndy = 0$ ٹھیک مساوات کہلاتی ہے اگر $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ ہو اور اس کا حل درجہ ذیل ہے

$$\int Mdx+\int\left(N - x \text{ کے ارقام}\right)dy=C$$

2. اگر مساوات $Mdx + Ndy = 0$ ٹھیک مساوات نہ ہو، تب اس مساوات کو حل کرنے کے لیے چار قائدے دیے گئے ہیں جس کی مدد سے مساوات کو ٹھیک مساوات میں تبدیل کرکے اس کا حل معلوم کرسکتے ہیں۔

3.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

ٹھیک مساوات، غیر ٹھیک مساوات، متجانس تفاعل، متکمل جز ضربی

3.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

3.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. مساوات $\frac{dy}{dx} + \frac{ax+hy+g}{hx+by+f} = 0$ ہے

A. متجانس B. متغیر جدا پزیر C. ٹھیک D. ان میں سے کوئی نہیں

2. ذیل میں سے کون ٹھیک مساوات ہے

A. $2xydx + (x^2 + y^2)dy = 0$ B. $(y \sin 2x)dx - (cos^2x + y^2)dy = 0$

C. $(a^2 - 2xy - y^2)dx - (x - y)^2dy = 0$ D. ان میں سے کوئی نہیں

3. اگر $Mdx + Ndy = 0$ متجانس مساوات ہے اور $Mx + Ny = 0$ تب اس مساوات کا I.F. ہے

A. $Mx + Ny$ B. $Mx - Ny$ C. $\frac{1}{Mx+Ny}$ D. $\frac{1}{Mx-Ny}$

3.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

ذیل کی مساواتوں کو حل کریں:

1. $y \sin 2x\, dx - (y^2 + cos^2x)dy = 0$
2. $\left(1 + e^{x/y}\right)dx + e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$
3. $(x^2 - 2xy - y^2)dx - (x + y)^2dy = 0$
4. $(r + \sin\theta - \cos\theta)dr + r(\sin\theta + \cos\theta)d\theta = 0$
5. $(xe^{xy} + 2y)\frac{dy}{dx} + ye^{xy} = 0$

3.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

ثابت کرو کہ ذیل کی مساواتیں ٹھیک مساواتیں ہیں۔ اگر ٹھیک ہیں تو ان کا حل دریافت کرو:

1. $(x^2 - 4xy - 2y^2)dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)dy = 0$
2. $(x^2 + y^2)(xdx + ydy) = a^2(xdy - ydx) = 0$
3. $[\cos x \tan y + \cos(x + y)]dx + [\sin x\, sec^2y + \cos(x + y)]dy = 0$

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:

4. $y - x\frac{dy}{dx} = x + y\frac{dy}{dx}$
5. $(3xy^2 - y^3)dx - (2x^2y - xy^2)dy = 0$
6. $y^2dx + (x^2 - xy - y^2)dy = 0$

ذیل کی مساواتوں کا حل معلوم کرو:

7. $(x^3y^3 + x^2y^2 + xy + 1)ydx + (x^3y^3 - x^2y^2 - xy + 1)xdy = 0$
8. $(x^4y^4 + x^2y^2 + xy)ydx + (x^4y^4 - x^2y^2 + xy)xdy = 0$

ذیل کی مساواتوں کے حل معلوم کرو:

9. $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0$

10. $(x^3 - 2y^2)dx + 2xydy = 0$

11. $(2x^2y - 3y^2)dx + (2x^3 - 12xy + \log y)dy = 0$

12. $(3x^2y^4 + 2xy)dx + (2x^3y^3 - x^2)dy = 0$

13. مساوات $\left(xy^2 - e^{\frac{1}{x^3}}\right) dx - x^2ydy = 0$ کا حل دریافت کرو۔

14. مساوات $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$ کو حل کرو۔

جوابات:

3.5.2 مختصر سوالات کے جوابات

1. $3y\cos 2x + 2y^3 = c$

2. $x + ye^{\left(\frac{x}{y}\right)} = c$

3. $x^3 - 3x^2y - 3y^2x - y^3 = c$

4. $r^2 + 2r(\sin\theta - \cos\theta)d\theta = c$

5. $e^{xy} + y^2 = c$

3.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $x^3 - 6x^2y - 6y^2x + y^3 = c$

2. $x^2 + y^2 + 2a^2\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) = 2c$

3. $\sin x \tan y + \sin(x + y) = c$

4. $\log\sqrt{x^2 + y^2} - \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) = c$

5. $\log\left(\frac{x^3}{y^2}\right) + \frac{y}{x} = c$

6. $y^2(x - y) = c^2(x + y)$

7. $xy - \frac{1}{xy} - \log y^2 = 2c$

8. $\frac{x^2y^2}{2} - \frac{1}{xy} + \log\left(\frac{x}{y}\right) = c$

9. $(x^2 + y^2)e^x = c$

10. $x^3 + y^2 = cx^2$

11. $6x^3y^3 - 27xy^4 + 3y^3\log y = c$

12. $x^3y^3 + x^2 = cy$

$2e^{\frac{1}{x^3}} - 3\frac{y^2}{x^2} = c$ .13

$x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} = c$ .14

3.6 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں(Suggested Books for further Readings)

1. Text Book of Differential Equations, Khalil Ahmad, Real World Education Publishers, New Delhi
2. Ordinary and Partial Differential Equations- Rai Singhania, S.Chand & Co., New Delhi
3. A Text Book of B.Sc. (Mathematics), Volume –I , V. Venkateshwara Rao and others, S. Chand & Company

اکائی 4۔ پہلے رتبے اور پہلے درجے کی خطی تفرقی مساواتیں

(Linear Differential Equations of First Order and First Degree)

اکائی کے اجزا

4.0 تمہید(Introduction)

خطی مساواتیں(Linear Equations) بہت ہی خاص شکل کی مساواتیں ہیں اور متناظر حل کرنے کے طریقے مختلف تکنیکوں پر مشتمل ہیں۔ پہلے رتبے اور پہلے درجے کی خطی تفرقی مساوات کی شکل $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ ہے اور تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$ کو برنولی مساوات(Bernoulli's Equation) کہتے ہیں۔ جس کو ہم خطی بنا کر حل کریں گے۔

4.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ مختلف قسم کی پہلے رتبے اور پہلے درجے کی خطی تفرقی مساواتوں سے واقف ہو جایں گے اور ان کا حل حاصل کر سکیں گے نیز برنولی مساوات کے حل کے طریقے سے بھی واقف ہو جایں گے۔ اس اکائی میں ہم خطی تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ کو ٹھیک مساوات کی مدد سے حل کرکے اس کے استعمال سے برنولی کی مساوات $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$ کے حل کے طریقے کو بیان کریں گے۔

4.2 پہلے رتبے اور پہلے درجے کی خطی تفرقی مساواتیں

(Linear Differential Equations of First Order and First Degree)

پہلے رتبے اور پہلے درجے کی خطی تفرقی مساواتوں کی معیاری شکل

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \qquad \text{.............(1)}$$

ہے، جہاں P اور Q کوئی دو مستقلات یا x کے مسلسل تفاعل ہیں۔

نظریہ: اگر P اور Q کسی وقفہ I پر x کے تفرق پزیر تفاعلات ہوں، تب مساوات(1) کا عام حل(General Solution)

$$ye^{\int Pdx} = \int \left[Qe^{\int Pdx}\right]dx + C$$

ہو گا۔

ثبوت: دی گئی مساوات ہے

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \qquad \text{.............(1)}$$

جہاں P اور Q کوئی دو x کے تفاعلات ہیں۔ مساوات(1) کو $Mdx + Ndy = 0$ کی شکل میں لکھنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$(Py - Q)dx + dy = 0 \qquad \text{.............(2)}$$

یہاں $M = Py - Q$ اور $N = 1$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = P, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

اس لیے مساوات (2) ٹھیک مساوات نہیں ہے، لیکن

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=1(P-0)=P=f(x)$$

اس لیے مساوات (2) کا متکمل جزو ضربی (Integrating Factor) $I.F.=e^{\int Pdx}$ ہے۔ مساوات (1) کو $e^{\int Pdx}$ سے ضرب دینے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$e^{\int Pdx}\frac{dy}{dx}+Pe^{\int Pdx}\cdot y=Qe^{\int Pdx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(ye^{\int Pdx}\right)=Qe^{\int Pdx}$$

$$\Rightarrow \quad \int\frac{d}{dx}\left(ye^{\int Pdx}\right)dx=\int\left[Qe^{\int Pdx}\right]dx$$

$$ye^{\int Pdx}=\int\left[Qe^{\int Pdx}\right]dx+C$$

اس طرح مساوات (1) کا حل $ye^{\int Pdx}=\int\left[Qe^{\int Pdx}\right]dx+C$ ہے، جہاں C ایک مستقل ہے۔

مثال 1۔ حل کرو: $(x^2+1)\frac{dy}{dx}+4xy=\frac{1}{x^2+1}$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx}+4xy=\frac{1}{x^2+1}$$

اس مساوات کو $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ کی شکل میں لانے پر

$$\frac{dy}{dx}+\left(\frac{4x}{x^2+1}\right)y=\frac{1}{(x^2+1)^2} \qquad \text{..........(1)}$$

یہاں $P=\frac{4x}{x^2+1}$ اور $Q=\frac{1}{(x^2+1)^2}$ ہیں۔

چوں کہ مساوات (1) ایک خطی تفرقی مساوات ہے اس لیے اس کا حل ہے

$$ye^{\int Pdx}=\int\left[Qe^{\int Pdx}\right]dx+c$$

جہاں c ایک مستقل ہے۔ اس کے لیے ہم پہلے $e^{\int Pdx}$ حاصل کریں گے۔ اس لیے

$$\int Pdx=\int\left(\frac{4x}{x^2+1}\right)dx$$
$$=2\int\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$$
$$=2\log(x^2+1)$$
$$=\log(x^2+1)^2$$

اس لیے

$$e^{\int Pdx}=e^{\log(x^2+1)^2}=(x^2+1)^2$$

اس طرح مساوات (1) کا حل ہو گا

$$y(x^2+1)^2 = \int \left[\frac{1}{(x^2+1)^2} \times (x^2+1)^2\right] dx + c$$
$$= \int 1\, dx + c$$
$$= x + c$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $y(x^2+1)^2 = x + c$ ہے۔

مثال2۔ حل کرو: $x\frac{dy}{dx} + 2y - x^2 \log x = 0$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$x\frac{dy}{dx} + 2y - x^2 \log x = 0$$

اس مساوات کو $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ کی شکل میں لانے پر

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2}{x}\right) y = x \log x \qquad \text{.............(1)}$$

یہاں $P = \frac{2}{x}$ اور $Q = x \log x$ ہیں۔

چوں کہ مساوات (1) ایک خطی تفرقی مساوات ہے اس لیے اس کا حل ہے

$$ye^{\int P dx} = \int \left[Qe^{\int P dx}\right] dx + c$$

جہاں c ایک مستقل ہے۔ اس کے لیے ہم پہلے $e^{\int P dx}$ حاصل کریں گے۔ اس لیے

$$\int P dx = \int \left(\frac{2}{x}\right) dx$$
$$= 2\log x$$
$$= \log x^2$$

اس لیے

$$e^{\int P dx} = e^{\log x^2} = x^2$$

اس طرح مساوات (1) کا حل ہو گا

$$yx^2 = \int [x \log x] x^2\, dx + c$$
$$= \int x^3 \log x\, dx + c$$
$$= \log x \int x^3\, dx - \int \left[\frac{d}{dx}(\log x) \int x^3\, dx\right] dx + c$$
$$= \frac{x^4}{4}\log x - \int \left[\frac{1}{x} \times \frac{x^4}{4}\right] dx + c$$
$$= \frac{x^4}{4}\log x - \frac{1}{4}\int x^3\, dx + c$$
$$= \frac{x^4}{4}\log x - \frac{x^4}{16} + c$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $x^2y = \frac{x^4}{4}\log x - \frac{x^4}{16} + c$ ہے۔

تبصرہ(Remark) : بعض اوقات خطی تفرقی مساوات کی شکل $\frac{dx}{dy} + P_1x = Q_1$ ہوتی ہے، جہاں P_1 اور Q_1 کوئی دو y کے تفاعلات ہیں۔

اب اس مساوات کا حل ذیل کی طرح ہو گا

$$xe^{\int P_1dy} = \int \left[Q_1e^{\int P_1dy}\right]dy + C$$

مثال3۔ مساوات $(x + 2y^3)\frac{dy}{dx} = y$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(x + 2y^3)\frac{dy}{dx} = y$$

اس مساوات کو خطی تفرقی مساوات کی معیاری شکل میں بدلنے پر

$$\frac{dx}{dy} + \left(-\frac{1}{y}\right)x = 2y^2 \qquad \text{............(1)}$$

یہاں $P_1 = -\frac{1}{y}$ اور $Q_1 = 2y^2$ ہیں۔

اس کا حل ہے

$$xe^{\int P_1dy} = \int \left[Q_1e^{\int P_1dy}\right]dy + c$$

جہاں c ایک مستقل ہے۔ اس کے لیے ہم پہلے $e^{\int P_1dy}$ حاصل کریں گے۔ اس لیے

$$\int P_1dy = \int \left(-\frac{1}{y}\right)dy$$
$$= -\log y$$
$$= \log\left(\frac{1}{y}\right)$$

اس لیے

$$e^{\int P_1dy} = e^{\log\left(\frac{1}{y}\right)} = \frac{1}{y}$$

اس طرح مساوات(1) کا حل ہو گا

$$x\frac{1}{y} = \int \left[2y^2 \times \frac{1}{y}\right]dy + c$$
$$= \int 2y\,dy + c$$
$$= y^2 + c$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $x = y^3 + cy$ ہے۔

مثال4۔ مساوات $(1 + y^2)dx = (\tan^{-1} y - x)dy$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(1+y^2)dx = (\tan^{-1} y - x)dy$$

اس مساوات کو خطی تفرقی مساوات کی معیاری شکل میں بدلنے پر

$$\frac{dx}{dy} + \left(\frac{1}{1+y^2}\right)x = \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2} \qquad \text{............(1)}$$

یہاں $P_1 = \frac{1}{1+y^2}$ اور $Q_{1_{,}} = \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2}$ ہیں۔

اس کا حل ہے

$$xe^{\int P_1 dy} = \int \left[Q_{1_{,}} e^{\int P_1 dy}\right] dy + c$$

جہاں c ایک مستقل ہے۔ اس کے لیے ہم پہلے $e^{\int P_1 dy}$ حاصل کریں گے۔ اس لیے

$$\int P_1 dy = \int \left(\frac{1}{1+y^2}\right) dy$$
$$= \tan^{-1} y$$

اس لیے

$$e^{\int P_1 dy} = e^{\tan^{-1} y}$$

اس طرح مساوات(1) کا حل ہو گا

$$xe^{\tan^{-1} y} = \int \left[\frac{\tan^{-1} y}{1+y^2} \times e^{\tan^{-1} y}\right] dy + c$$

فرض کرو کہ $z = \tan^{-1} y \Rightarrow dz = \frac{1}{1+y^2} dy$

$$xe^{\tan^{-1} y} = \int ze^z\, dz + c$$
$$= (z-1)e^z + C$$
$$= (\tan^{-1} y - 1)e^{\tan^{-1} y} + c$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $x = (\tan^{-1} y - 1) + Ce^{\tan^{-1} y}$ ہے۔

مثال5۔ منحنی کی مساوات معلوم کرو جس کی تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} + 2y\tan x = \sin x$ ہے، جب کہ دیا گیا ہے کہ $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$\frac{dy}{dx} + (2\tan x)y = \sin x \qquad \text{............(1)}$$

یہاں $P = 2\tan x$ اور $Q = \sin x$ ہیں۔

چوں کہ مساوات (1) ایک خطی تفرقی مساوات ہے اس لیے اس کا حل ہے

$$ye^{\int Pdx} = \int \left[Qe^{\int Pdx}\right] dx + c$$

جہاں c ایک مستقل ہے۔ اس کے لیے ہم پہلے $e^{\int Pdx}$ حاصل کریں گے۔ اس لیے

$$\int Pdx = \int (2\tan x)dx$$
$$= 2\log\sec x$$

$$= \log(\sec^2 x)$$

اس لیے

$$e^{\int Pdx} = e^{\log(\sec^2 x)} = \sec^2 x$$

اس طرح مساوات(1)کا حل ہو گا

$$y\sec^2 x = \int [\sin x \cdot \sec^2 x]\, dx + c$$
$$= \int [\sec x \cdot \tan x]\, dx + c$$
$$= \sec x + c$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $y\sec^2 x = \sec x + c$ ہے۔

دیا گیا ہے $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ اس لیے

$$(0)\sec^2\frac{\pi}{3} = \sec\frac{\pi}{3} + c$$
$$0 = 2 + c \Rightarrow c = -2$$

اس طرح $y\sec^2 x = \sec x - 2$ اس منحنی کی مساوات ہے جس کی تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} + 2y\tan x = \sin x$ ہے۔

4.2.1 تحویل پزیر خطی تفرقی مساواتیں (Equations Reducible to Linear Differential Equations)

تعریف: وہ مساوات جو درجہ ذیل شکل میں ہو

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n \qquad \text{............(1)}$$

جہاں P اور Q حقیقی اعداد یا x کے تفاعل ہیں برنولی تفرقی مساوات کہلاتی ہے۔

اس کو حل کرنے کے لیے مساوات(1) کو خطی مساوات بنانے کے لیے y^{-n} سے مساوات(1) کو ضرب دیتے ہیں۔ اس لیے

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + Py^{1-n} = Q \qquad \text{............(2)}$$

فرض کرو کہ $y^{1-n} = z$ تب

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$
$$y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-n)}\frac{dz}{dx}$$

مساوات(2) سے

$$\frac{1}{(1-n)}\frac{dz}{dx} + Pz = Q$$
$$\frac{dz}{dx} + (1-n)Pz = (1-n)Q$$
$$\frac{dz}{dx} + P'z = Q' \qquad \text{............(3)}$$

جہاں $Q' = (1-n)Q$ اور $P' = (1-n)P$ ہیں۔ مساوات(3) خطی ہے جس کا حل حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال1۔ حل کرو: $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x}\right) y = x^2 y^6$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x}\right) y = x^2 y^6 \qquad ....(1)$$

y^{-6} سے مساوات(1) کو ضرب دینے پر

$$y^{-6} \frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x}\right) y^{-5} = x^2 \qquad ....(2)$$

فرض کرو کہ $y^{-5} = z$ تب

$$-5y^{-6} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$
$$y^{-6} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{-5} \frac{dz}{dx}$$

مساوات(2) سے

$$\frac{1}{-5} \frac{dz}{dx} + \left(\frac{1}{x}\right) z = x^2$$
$$\frac{dz}{dx} - \left(\frac{5}{x}\right) z = -5x^2 \qquad ....(3)$$

یہاں $P = -\frac{5}{x}$ اور $Q = -5x^2$ ہیں۔

چوں کہ مساوات (3) ایک خطی تفرقی مساوات ہے اس لیے اس کا حل ہے

$$ze^{\int Pdx} = \int \left[Qe^{\int Pdx}\right] dx + c$$

جہاں c ایک مستقل ہے۔اس لیے

$$\int Pdx = -5 \int \left(\frac{1}{x}\right) dx$$
$$= -5 \log x$$
$$= \log x^{-5}$$

اس لیے

$$e^{\int Pdx} = e^{\log x^{-5}} = x^{-5}$$

اس طرح مساوات(1) کا حل ہو گا

$$zx^{-5} = \int [-5x^2 \cdot x^{-5}]\, dx + c$$
$$= -5 \int x^{-3}\, dx + c$$
$$= -5\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right) + c$$
$$zx^{-5} = \frac{5}{2x^2} + c$$
$$\Rightarrow \qquad z = \frac{5}{2}x^3 + cx^5$$

$$\Rightarrow \qquad y^{-5} = \frac{5}{2}x^3 + cx^5$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $y^{-5} = \frac{5}{2}x^3 + cx^5$ ہے۔

مثال2۔ حل کرو: $x\frac{dy}{dx} + y = y^2 \log x$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$x\frac{dy}{dx} + y = y^2 \log x$$

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x}\right)y = \left(\frac{\log x}{x}\right)y^2 \qquad \text{............(1)}$$

y^{-2} سے مساوات (1) کو ضرب دینے پر

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x}\right)y^{-1} = \left(\frac{\log x}{x}\right) \qquad \text{............(2)}$$

فرض کرو کہ $y^{-1} = z$ تب

$$-y^{-2}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} = -\frac{dz}{dx}$$

مساوات (2) سے

$$-\frac{dz}{dx} + \left(\frac{1}{x}\right)z = x^2$$

$$\frac{dz}{dx} - \left(\frac{1}{x}\right)z = \left(-\frac{\log x}{x}\right) \qquad \text{............(3)}$$

یہاں $P = -\frac{1}{x}$ اور $Q = -\frac{\log x}{x}$ ہیں۔

چوں کہ مساوات (3) ایک خطی تفرقی مساوات ہے اس لیے اس کا حل ہے

$$ze^{\int P dx} = \int \left[Qe^{\int P dx}\right] dx + c$$

جہاں c ایک مستقل ہے۔ اس لیے

$$\int P dx = -\int \left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$= -\log x$$

$$= \log x^{-1}$$

اس لیے

$$e^{\int P dx} = e^{\log x^{-1}} = \frac{1}{x}$$

اس طرح مساوات (1) کا حل ہو گا

$$z\frac{1}{x} = \int \left[-\frac{\log x}{x}\cdot\frac{1}{x}\right] dx + c$$

$$= -\int \frac{\log x}{x^2}dx + c$$
$$= -\log x \int \frac{1}{x^2}dx + \int \left[\frac{d}{dx}(\log x)\int \frac{1}{x^2}dx\right]dx + C$$
$$z\frac{1}{x} = \frac{1}{x}\log x + \int \left[\frac{d}{dx}(\log x)\int \frac{1}{x^2}dx\right]dx + c$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{z}{x} = \frac{1}{x}\log x + \int \left[\frac{1}{x}\times\frac{-1}{x}\right]dx + c$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{z}{x} = \frac{1}{x}\log x - \int \frac{1}{x^2}dx + c$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{xy} = \frac{1}{x}\log x + \frac{1}{x} + C$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $\frac{1}{y} = \log x + cx + 1$ ہے۔

مثال3۔ حل کرو: $\frac{dy}{dx} - xy = -e^{-x^2}y^3$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$\frac{dy}{dx} - xy = -e^{-x^2}y^3 \qquad ....(1)$$

y^3 سے مساوات(1) کو تقسیم دینے پر

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} - xy^{-2} = -e^{-x^2} \qquad ....(2)$$

فرض کرو کہ $y^{-2} = z$ تب

$$-2y^{-3}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$
$$y^{-3}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{-2}\frac{dz}{dx}$$

مساوات (2) سے

$$-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx} - xz = -e^{-x^2}$$
$$\frac{dz}{dx} + 2xz = 2e^{-x^2} \qquad ....(3)$$

یہاں $P = 2x$ اور $Q = 2e^{-x^2}$ ہیں۔

چوں کہ مساوات (3) ایک خطی تفرقی مساوات ہے اس لیے اس کا حل ہے

$$ze^{\int Pdx} = \int \left[Qe^{\int Pdx}\right]dx + c$$

جہاں c ایک مستقل ہے۔اس لیے

$$\int Pdx = \int 2xdx$$
$$= x^2$$

اس لیے

$$e^{\int Pdx} = e^{x^2}$$

اس طرح مساوات(1)کا حل ہو گا

$$ze^{x^2} = \int \left[2e^{-x^2} \cdot e^{x^2}\right] dx + c$$
$$= 2\int 1\, dx + c$$
$$= 2x + c$$
$$ze^{x^2} = 2x + c$$
$$\Rightarrow \qquad z = e^{-x^2}(2x + c)$$
$$\Rightarrow \qquad y^{-2} = e^{-x^2}(2x + c)$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $y^{-2} = e^{-x^2}(2x + c)$ ہے۔

مثال4۔ حل کرو: $\frac{dy}{dx} = 2y\tan x + y^2tan^2x$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$\frac{dy}{dx} = 2y\tan x + y^2tan^2x$$
$$\frac{dy}{dx} - (2\tan x)y = (tan^2x)y^2 \qquad \text{............}(1)$$

y^2 سے مساوات(1)کو تقسیم دینے پر

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} - (2\tan x)y^{-1} = tan^2x \qquad \text{............}(2)$$

فرض کرو کہ $-y^{-1} = z$ تب

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

مساوات(2)سے

$$\frac{dz}{dx} + (2\tan x)z = tan^2x$$
$$\frac{dz}{dx} + 2xz = 2e^{-x^2} \qquad \text{............}(3)$$

یہاں $P = 2\tan x$ اور $Q = tan^2x$ ہیں۔

چوں کہ مساوات (3) ایک خطی تفرقی مساوات ہے اس لیے اس کا حل ہے

$$ze^{\int Pdx} = \int \left[Qe^{\int Pdx}\right] dx + c$$

جہاں c ایک مستقل ہے۔اس لیے

$$\int Pdx = \int 2\tan x\, dx$$
$$= \log sec^2x$$

اس لیے

$$e^{\int Pdx} = e^{\log sec^2x} = sec^2x$$

اس طرح مساوات(1) کا حل ہو گا

$$z\, sec^2 x = \int [tan^2 x \cdot sec^2 x]\, dx + c$$

اگر $\tan x = t$ ہو، تب $dt = sec^2 x dx$ اس لیے

$$z\, sec^2 x = \int t^2\, dt + c$$

$$= \frac{t^3}{3} + c$$

$$\Rightarrow \qquad z\, sec^2 x = \frac{tan^3 x}{3} + c$$

$$\Rightarrow \qquad -\frac{sec^2 x}{y} = \frac{tan^3 x}{3} + c$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $\frac{sec^2 x}{-y} = \frac{tan^3 x}{3} + c$ ہے۔

مثال5۔ حل کرو: $x\frac{dy}{dx} + y\log y = xye^x$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$x\frac{dy}{dx} + y\log y = xye^x$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x}\right)\log y = e^x \qquad \text{............}(1)$$

فرض کرو کہ $u = \log y$ تب

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

مساوات (1) سے

$$\frac{du}{dx} + \left(\frac{1}{x}\right)u = e^x \qquad \text{............}(2)$$

یہاں $P = \frac{1}{x}$ اور $Q = e^x$ ہیں۔

چوں کہ مساوات (2) ایک خطی تفرقی مساوات ہے اس لیے اس کا حل ہے

$$ue^{\int Pdx} = \int \left[Qe^{\int Pdx}\right] dx + c$$

جہاں c ایک مستقل ہے۔ اس لیے

$$\int Pdx = \int \frac{1}{x} dx$$

$$= \log x$$

اس لیے

$$e^{\int Pdx} = e^{\log x} = x$$

اس طرح دی گئی مساوات کا حل ہو گا

$$ux = \int [xe^x]\, dx + c$$
$$= (x-1)e^x + c$$
$$\Rightarrow \qquad x \log y = (x-1)e^x + c$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $x \log y = (x-1)e^x + c$ ہے۔

مثال6۔ مساوات $\frac{dy}{dx} + y \cot x = y^2 sin^2 x\, cos^2 x$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$\frac{dy}{dx} + y \cot x = y^2 sin^2 x\, cos^2 x$$
$$\Rightarrow \qquad y^{-2} \frac{dy}{dx} + y^{-1} \cot x = sin^2 x\, cos^2 x \qquad \text{............}(1)$$

فرض کرو کہ $u = y^{-1}$ تب

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} = -\frac{du}{dx}$$

مساوات(1)سے

$$-\frac{du}{dx} + u \cot x = sin^2 x\, cos^2 x$$
$$\frac{du}{dx} - u \cot x = -sin^2 x\, cos^2 x \qquad \text{............}(2)$$

یہاں $P = -\cot x$ اور $Q = -sin^2 x\, cos^2 x$ ہیں۔

چوں کہ مساوات (2) ایک خطی تفرقی مساوات ہے اس لیے اس کا حل ہے

$$ue^{\int P dx} = \int \left[Qe^{\int P dx}\right] dx + c$$

جہاں c ایک مستقل ہے۔اس لیے

$$\int P dx = -\int \cot x\, dx$$
$$= -\log \sin x$$

اس لیے

$$e^{\int P dx} = e^{-\log \sin x} = \frac{1}{\sin x}$$

اس طرح دی گئی مساوات کا حل ہو گا

$$u \frac{1}{\sin x} = \int \left[-sin^2 x\, cos^2 x \left(\frac{1}{\sin x}\right)\right] dx + c$$
$$= \int [\, cos^2 x(-\sin x)]\, dx + c$$

اگر $\cos x = t$ ہو،تب $dt = -\sin x\, dx$ اس لیے

$$u \frac{1}{\sin x} = \int [\, t^2]\, dt + c$$

$$\frac{1}{y\sin x} = \frac{t^3}{3} + c$$
$$\frac{1}{y\sin x} = \frac{cos^3 x}{3} + c$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $\frac{1}{y\sin x} = \frac{cos^3 x}{3} + c$ ہے۔

مثال7۔ مساوات $\frac{dy}{dx} + x\sin 2y = x^3\ cos^2 y$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$\frac{dy}{dx} + x\sin 2y = x^3\ cos^2 y$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{cos^2 y}\frac{dy}{dx} + x\left(\frac{2\sin y\cos y}{cos^2 y}\right) = x^3$$
$$\Rightarrow \qquad sec^2 y\frac{dy}{dx} + 2x(\tan y) = x^3 \qquad \text{............(1)}$$

فرض کرو کہ $u = \tan y$ تب

$$sec^2 y\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

مساوات(1) سے

$$\frac{du}{dx} + 2xu = x^3 \qquad \text{............(2)}$$

یہاں $P = 2x$ اور $Q = x^3$ ہیں۔

چوں کہ مساوات (2) ایک خطی تفرقی مساوات ہے اس لیے اس کا حل ہے

$$ue^{\int Pdx} = \int\left[Qe^{\int Pdx}\right]dx + c$$

جہاں c ایک مستقل ہے۔اس لیے

$$e^{\int Pdx} = e^{\int 2xdx} = e^{x^2}$$

اس طرح دی گئی مساوات کا حل ہو گا

$$ue^{x^2} = \int\left[x^3\left(e^{x^2}\right)\right]dx + c$$

اگر $x^2 = t$ ہو، تب $dt = 2xdx$ اس لیے

$$ue^{x^2} = \frac{1}{2}\int\left[te^t\right]dt + c$$
$$\Rightarrow \qquad e^{x^2}\tan y = \frac{1}{2}(t-1)e^t + c$$
$$\Rightarrow \qquad 2e^{x^2}\tan y = (x^2-1)e^{x^2} + c$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $2e^{x^2}\tan y = (x^2-1)e^{x^2} + c$ ہے۔

4.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} + Py = Q$، جہاں P اور Q کوئی دو مستقلات یا x کے مسلسل تفاعلات ہیں، پہلے رتبے اور پہلے درجے کی خطی تفرقی مساوات کہلاتی ہے اور اس کا عام حل (General Solution) $ye^{\int Pdx} = \int\left[Qe^{\int Pdx}\right]dx + C$ ہو گا۔ نیز $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$ برنولی کی مساوات کہلاتی ہے جس کا حل اس مساوات کو خطی بنا کر حاصل کرتے ہیں۔

4.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

خطی تفرقی مساوات، مسلسل تفاعل، برنولی کی مساوات

4.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

4.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. مساوات $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$ کا I.F. ہے

A. x B. $\frac{1}{x}$ C. $\frac{-1}{x}$ D. ان میں سے کوئی نہیں

2. مساوات $x^2\frac{dy}{dx} + y = 1$ کا عام حل ہے

A. $y = 1 + ce^{\frac{1}{x}}$ B. $y = 1 + ce^x$ C. $y = ce^x$ D. ان میں سے کوئی نہیں

3. مساوات $(1 - x^2)\frac{dy}{dx} + xy = cx$ کا I.F. ہے

A. $\frac{1}{x^2-1}$ B. $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ C. $\frac{1}{1-x^2}$ D. ان میں سے کوئی نہیں

4.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

حل کرو:

1. $(1 + x)\frac{dy}{dx} - xy = 1 - x$
2. $(1 - x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = x\sqrt{1 - x^2}$
3. $x^2\frac{dy}{dx} + (x - 2)y = x^2e^{\frac{-2}{x}}$
4. $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x + \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x^2}$
5. $x\log x\frac{dy}{dx} + y = 2\log x$
6. تفرقی مساوات $(1 - x^2)\frac{dy}{dx} + xy = ax$ کو حل کرو۔

4.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. حل کرو: $\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x}y = \frac{1}{x^2}$، جب کہ دیا گیا ہے $x = 1$ کے لیے $y = 2$ ہو گا۔

2. حل کرو: $\frac{dy}{dx} = 1 - x(y-x) - x^3(y-x)^3$

3. مساوات $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x \cos x - \sin y \cos x}{\cos y}$ کا حل معلوم کرو۔

4. حل کرو: $\frac{dy}{dx} + xy = y^2 e^{\frac{x^2}{2}} \log x$

5. حل کرو: $\frac{dy}{dx} + y\cos x = y^n \sin 2x$

جاوابات:

4.5.1 معروضی سوالات کے جوابات

.1 B .2 A .3 D

4.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $(1+x)y = x + ce^x$
2. $y = \sqrt{1-x^2} + c(1-x^2)$
3. $xye^{\frac{2}{x}} = \frac{x^2}{2} + c$
4. $\frac{y}{x^2} = \log x + \frac{1}{2}\cos\frac{1}{x^2} + c$
5. $y\log x = (\log x)^2 + c$
6. $y = ax + cx\sqrt{1-x^2}$

4.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $2x^3 y = x^2 + 3$
2. $\frac{1}{(y-x)^2} + (1+x^2) = ce^{x^2}$
3. $e^{\sin x}\sin y = e^{\sin x}(\sin x - 1) + c$
4. $e^{\frac{-x^2}{2}} = xy(1-\log x) + cy$
5. $(1-n)y^{1-n} = 2[(1-n)\sin x - 1] + c(1-n)e^{(n-1)\sin x}$

4.6 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Text Book of Differential Equations, Khalil Ahmad, Real World Education Publishers, New Delhi
2. Ordinary and Partial Differential Equations- Rai Singhania, S.Chand & Company, New Delhi
3. A Text Book of B.Sc. (Mathematics), Volume –I , V. Venkateshwara Rao and others, S. Chand & Company New Delhi

اکائی 5۔ پہلے رتبے اور اعلی درجے کی تفرقی مساواتیں
(p کے لیے حل کی جانے والی مساواتیں)

(Differential Equations of First Order and Higher Degree: Solvable for p)

اکائی کے اجزا

5.0 تمہید(Introduction)

پہلے رتبے اور اعلی درجہ کی عام تفرقی مساوات درجہ ذیل شکل میں لکھی جاسکتی ہے

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + f_1(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + f_2(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \cdots + f_{n-1}(x,y)\frac{dy}{dx} + f_n(x,y) = 0$$

ان مساواتوں کا حل آسانی کے ساتھ محسوب ہو جایے،اس کے لیے ہم $\frac{dy}{dx}$ کو p سے ظاہر کریں گے۔

تمام تفرقی مساواتوں کو ان کی عام شکل میں حل کرنا آسان نہیں ہوتا ہے۔ان میں سے کچھ مساواتوں کو p کے لیے حل کیا جاتا ہے اور پھر دی گئی مساوات کو دو یا زیادہ مساواتوں کی مدد سے تعبیر کرتے ہیں جن میں ہر ایک مساوات کا رتبہ ایک ہوتا ہے۔ ان سبھی مساواتوں کو حل کرنے کے بعد دی ہوئی تفرقی مساوات کا حل معلوم کر لیتے ہیں۔

5.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے کے بعد آپ ان تفرقی مساوات کی معلومات حاصل کریں گے جو p کے لیے آسانی کے ساتھ حل ہو سکتی ہیں اور پھر ان کا حل حاصل کرنا بھی سیکھ جائیں گے۔

5.2 p کے لیے حل کی جانے والی مساوات(Equations Solvable for p)

پہلے رتبے اور 'n' درجہ کی تفرقی مساوات کو درجہ ذیل شکل میں لکھا جاتا ہے۔

$$p^n + f_1(x,y)p^{n-1} + f_2(x,y)p^{n-2} + \cdots + f_{n-1}(x,y)p + f_n(x,y) = 0 \qquad .....(1)$$

ہم اس مساوات کو p کے لیے حل کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ مساوات (1) سے درجہ ذیل طریقے سے اجزا ضربی معلوم کئے گیے ہیں۔

$$\big(p - \varphi_1(x,y)\big)\big(p - \varphi_2(x,y)\big) \cdots \big(p - \varphi_n(x,y)\big) = 0 \qquad .....(2)$$

مساوات(2) کے ہر ایک جز ضربی(Factor) کو صفر کے برابر رکھتے ہیں۔ہم دیکھتے ہیں کہ یہ سبھی مساواتیں پہلے رتبے اور پہلے درجے کی تفرقی مساواتیں ہیں جن کو ہم پہلے بلاک میں دیے گئے طریقوں سے حل کر سکتے ہیں۔مان لیجیے کہ ان کا حل درجہ ذیل ہے:

$$F_1(x,y,c_1) = 0, F_2(x,y,c_2) = 0, \cdots, F_n(x,y,c_n) = 0 \qquad .....(3)$$

اس لیے مساوات (1) کے حل کو درجہ ذیل طریقے سے لکھا جاسکتا ہے۔

$$F_1(x,y,c_1)\cdot F_2(x,y,c_2) \cdots F_n(x,y,c_n) = 0 \qquad .....(4)$$

تبصرہ(Remark): چوں کہ مساوات (3) کے ذریعے سے حاصل کیا گیا ہر ایک خاص حل(Particular Solution) مساوات (4) کے ذریعے سے تمام c کی مناسب قیمت رکھ کر بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔اس لیے $c_1, c_2, \ldots, c_n$ کی جگہ ایک اختیاری مستقل c رکھنے پر حاصل حل پر کوئی فرق نہیں پڑے گا۔

اب ہم کچھ مثالوں کے ذریعے سے پورے طریقے کو سمجھیں گے۔

مثال1۔ مساوات $p^2 - 5p + 6 = 0$ کو حل کیجیے۔

حل۔ دی گئی مساوات کو درج ذیل شکل میں بدلنے پر

$$(p-3)(p-2) = 0$$

یہ اس وقت ممکن ہے جب کہ

$p - 3 = 0$ یا $p - 2 = 0$

اب اگر $p - 3 = 0$ ہو تو

$$\frac{dy}{dx} = 3$$
$$dy = 3dx$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y = 3x + c_1$$

اسی طرح دوسرے جز $p - 2 = 0$ سے حاصل ہوتا ہے

$$dy = 2dx$$

اس مساوات کا تکمل کرنے پر

$$y = 2x + c_2$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل ہو گا

$$(y - 3x - c_1)(y - 2x - c_2) = 0$$

مثال2۔ مساوات $p^2 - 9p + 18 = 0$ کو حل کیجیے۔

حل۔ دی گئی مساوات کو درج ذیل شکل میں بدلنے پر

$$(p-6)(p-3) = 0$$

یہ اس وقت ممکن ہے جب کہ

$p - 3 = 0$ یا $p - 6 = 0$

اب اگر $p - 3 = 0$ ہو تو

$$\frac{dy}{dx} = 3$$

یا

$$dy = 3dx$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y = 3x + c_1$$

اسی طرح دوسرے جز $p - 6 = 0$ سے ہمیں حاصل ہو گا

$$dy = 6dx$$

اس مساوات کا تکمل کرنے پر

$$y = 6x + c_2$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل ہو گا

$$(y-3x-c_1)(y-6x-c_2)=0$$

مثال3۔ مساوات $xp^2+(y-1-x^2)p-x(y-1)=0$ کو حل کیجیے۔

حل۔ دی گئی مساوات کو درج ذیل شکل میں بدلنے پر

$$(xp+y-1)(p-x)=0$$

یہ اس وقت ممکن ہے جب کہ

$p-x=0$ یا $xp+y-1=0$

اب اگر $p-x=0$ ہو تو

$$\frac{dy}{dx}=x$$

یا

$$dy=xdx$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہو تا ہے

$$2y-x^2-c_1=0$$

اسی طرح دوسرے جز $xp+y-1=0$ سے

$$\frac{dy}{y-1}=-\frac{dx}{x}$$

اس مساوات کا تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$\log(y-1)=-\log x+\log c_2$$
$$\Rightarrow \quad \log(y-1)+\log x=\log c_2$$
$$\Rightarrow \quad \log\{x(y-1)\}=\log c_2$$
$$\Rightarrow \quad x(y-1)=c_2$$
$$\Rightarrow \quad xy-x-c_2=0$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل ہو گا

$$(2y-x^2-c_1)(xy-x-c_2)=0$$

مثال4۔ مساوات $4y^2p^2+2xy(3x+1)p+3x^3=0$ کو حل کیجیے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$4y^2p^2+2xy(3x+1)p+3x^3=0$$
$$\Rightarrow \quad 4y^2p^2+2pxy+6px^2y+3x^3=0$$
$$\Rightarrow \quad 2py(2py+x)+3x^2(2py+x)=0$$
$$\Rightarrow \quad (2py+x)(2py+3x^2)=0$$

اب

$2py+x=0$ یا $2py+3x^2=0$

اب اگر $2py+3x^2=0$ ہو تو

$$2y\frac{dy}{dx} + 3x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad 2ydy + 3x^2dx = 0$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y^2 + x^3 - c_1 = 0$$

اسی طرح دوسرے جز $2py + x = 0$ سے ہمیں حاصل ہو گا

$$2ydy + xdx = 0$$

اس مساوات کا تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$2y^2 + x^2 - c_2 = 0$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $(y^2 + x^3 - c_1)(2y^2 + x^2 - c_2) = 0$ ہے۔

مثال5۔ مساوات $x^2p^2 - xyp - y^2 = 0$ کو حل کیجیے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$x^2p^2 - xyp - y^2 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad p = \frac{xy \pm \sqrt{x^2y^2 + 4x^2y^2}}{2x^2}$$

$$\Rightarrow \qquad p = \frac{xy \pm xy\sqrt{5}}{2x^2}$$

$$\Rightarrow \qquad p = \frac{xy\left(1 \pm \sqrt{5}\right)}{2x^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\frac{\left(1 \pm \sqrt{5}\right)}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad 2\frac{dy}{y} = \left(1 \pm \sqrt{5}\right)\frac{dx}{x}$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2\log y = \left(1 \pm \sqrt{5}\right)\log x + \log c$$

$$\Rightarrow \qquad \log y^2 = \log cx^{\left(1 \pm \sqrt{5}\right)}$$

$$\Rightarrow \qquad y^2 = cx^{\left(1 \pm \sqrt{5}\right)}$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $y^2 = cx^{\left(1 \pm \sqrt{5}\right)}$ ہو گا۔

مثال6۔ مساوات $x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3xy\frac{dy}{dx} + 2y^2 = 0$ کو حل کیجیے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3xy\frac{dy}{dx} + 2y^2 = 0$$

دی گئی مساوات میں $\frac{dy}{dx} = p$ رکھنے پر درجہ ذیل شکل حاصل ہوتی ہے

$$x^2p^2 + 3xyp + 2y^2 = 0$$

یا

$$(xp + y)(xp + 2y) = 0$$

یہ اس وقت ممکن ہے جب کہ

$xp + y = 0$ یا $xp + 2y = 0$

اب اگر $xp + 2y = 0$ ہو، تب

$$x\frac{dy}{dx} = -2y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} + 2\frac{dx}{x} = 0$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\log y + 2\log x = \log c_1$$

$$\Rightarrow \quad x^2 y = c_1$$

$$\Rightarrow \quad x^2 y - c_1 = 0$$

اسی طرح دوسرے جز $xp + y = 0$ سے

$$x\frac{dy}{dx} = y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0$$

اس مساوات کا تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$\log y + \log x = \log c_2$$

$$\Rightarrow \quad \log xy = \log c_2$$

$$\Rightarrow \quad xy = c_2$$

$$\Rightarrow \quad xy - c_2 = 0$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $(x^2y - c_1)(xy - c_2) = 0$ ہے۔

مثال 7۔ مساوات $p^2 + xp + py + xy = 0$ کو حل کیجیے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$p^2 + xp + py + xy = 0$$

$$\Rightarrow \quad (p + x)(p + y) = 0$$

یہ تبھی ممکن ہے جب کہ

$p + x = 0$ یا $p + y = 0$

اب اگر $p + x = 0$ ہو، تب

$$\frac{dy}{dx} + x = 0$$

$$\Rightarrow \quad dy + xdx = 0$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2y + x^2 - c_1 = 0$$

اسی طرح دوسرے جز $p + y = 0$ سے

$$\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} + dx = 0$$

اس کا تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\log y + x - c_2 = 0$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $(2y + x^2 - c_1)(\log y + x - c_2) = 0$ ہے۔

مثال8۔ مساوات $p^2 + 2xp - 3x^2 = 0$ کو حل کیجیے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$p^2 + 2xp - 3x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (p - x)(p + 3x) = 0$$

اب

$$p - x = 0 \text{ یا } p + 3x = 0$$

اب اگر $p - x = 0$ ہو، تب

$$\frac{dy}{dx} - x = 0$$

$$\Rightarrow \quad dy - xdx = 0$$

تکمل کرنے پر

$$2y - x^2 - c_1 = 0$$

اسی طرح دوسرے جز $p + 3x = 0$ سے

$$\frac{dy}{dx} + 3x = 0$$

$$\Rightarrow \quad dy + 3xdx = 0$$

اس مساوات کا تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2y + 3x^2 - c_2 = 0$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $(2y - x^2 - c_1)(2y + 3x^2 - c_2) = 0$ ہے۔

مثال9۔ مساوات $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x - y)\frac{dy}{dx} - x = 0$ کو حل کیجیے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x - y)\frac{dy}{dx} - x = 0$$

دی گئی مساوات میں $\frac{dy}{dx} = p$ رکھنے پر درجہ ذیل شکل حاصل ہوتی ہے

$$yp^2 + (x - y)p - x = 0$$

یا

$$(yp + x)(p - 1) = 0$$

یہ اس وقت ممکن ہے جب کہ

$$yp + x = 0 \text{ یا } p - 1 = 0$$

اب اگر $yp + x = 0$ ہو تو

$$y\frac{dy}{dx} + x = 0$$

$$\Rightarrow \qquad ydy + xdx = 0$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y^2 + x^2 = c_1$$

اسی طرح دوسرے جز $p - 1 = 0$ سے

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\Rightarrow \qquad dy = dx$$

اس کا تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y = x + c_2$$

$$\Rightarrow \qquad x - y + c_2 = 0$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $(y^2 + x^2 - c_1)(x - y + c_2) = 0$ ہو گا۔

مثال10۔ مساوات $xyp^2 + (x + y)p + 1 = 0$ کو حل کیجیے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$xyp^2 + (x + y)p + 1 = 0$$

یا

$$(xp + 1)(yp + 1) = 0$$

یہ اس وقت ممکن ہے جب کہ

$$xp + 1 = 0 \text{ یا } yp + 1 = 0$$

اب اگر

$$xp + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad x\frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad dy + \frac{dx}{x} = 0$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y + \log x - c_1 = 0$$

اسی طرح دوسرے جز $yp + 1 = 0$ سے

$$y\frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad ydy + dx = 0$$

اس کا تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y^2 + 2x - c_2 = 0$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل ہوگا

$$(y + \log x - c_1)(y^2 + 2x - c_2) = 0$$

مثال 11۔ مساوات $p^2 - 2xp - 8x^2 = 0$ کو حل کیجیے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$p^2 - 2xp - 8x^2 = 0$$

یا

$$(p - 4x)(p + 2x) = 0$$

یہ اس وقت ممکن ہے جب کہ

$$p - 4x = 0 \text{ یا } p + 2x = 0$$

اب اگر $p + 2x = 0$ ہو تو

$$\frac{dy}{dx} + 2x = 0$$

$$\Rightarrow \quad dy + 2xdx = 0$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y + x^2 - c_1 = 0$$

اسی طرح دوسرے جز $p - 4x = 0$ سے

$$\frac{dy}{dx} - 4x = 0$$

$$\Rightarrow \quad dy - 4xdx = 0$$

اس کا تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y - 2x^2 - c_2 = 0$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $(y + x^2 - c_1)(y - 2x^2 - c_2) = 0$ ہوگا

مثال 12۔ مساوات $x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\frac{dy}{dx} - x^2y^2 - x^4 + y^2 = 0$ کو حل کیجیے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\frac{dy}{dx} - x^2y^2 - x^4 + y^2 = 0$$

اس مساوات میں $\frac{dy}{dx} = p$ رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x^2p^2 - 2xyp - x^2y^2 - x^4 + y^2 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad p = \frac{2xy \pm \sqrt{4x^2y^2 - 4x^2(-x^2y^2 - x^4 + y^2)}}{2x^2}$$

$$= \frac{2xy \pm \sqrt{4x^2\{y^2 - (-x^2y^2 - x^4 + y^2)\}}}{2x^2}$$

$$= \frac{2xy \pm \sqrt{4x^2(x^2y^2 + x^4)}}{2x^2}$$

$$= \frac{2xy \pm 2x^2\sqrt{x^2 + y^2}}{2x^2}$$

$$\Rightarrow \qquad p = \frac{y \pm x\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y \pm x\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

یہ ایک متجانس تفرقی مساوات (Homogenous Differential Equation) ہے۔ اس لیے یہاں $y = vx$ اور $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{vx \pm x\sqrt{x^2 + v^2x^2}}{x}$$

$$\Rightarrow \qquad v + x\frac{dv}{dx} = v \pm x\sqrt{1 + v^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dv}{dx} = \pm\sqrt{1 + v^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = \pm dx$$

اب اگر

$$\frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = dx$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$sinh^{-1} v = x + c_1$$

$v = \frac{y}{x}$ رکھنے پر

$$sinh^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = x + c_1$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{y}{x} = \sinh(x + c_1)$$

$$\Rightarrow \; y - x\sinh(x + c_1) = 0$$

اوراسی طرح اگر

$$\frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = -dx$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$sinh^{-1} v + c_2 = -x$$

$v = \frac{y}{x}$ رکھنے پر

$$sinh^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = -(x + c_2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{x} = \sinh\{-(x + c_2)\} = -\sinh(x + c_2)$$

$$\Rightarrow \quad y + x\sinh(x + c_2) = 0$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل ہے

$$[y - x\sinh(x + c_1)][y + x\sinh(x + c_2)] = 0$$

مثال13۔ مساوات $p^2 + (2y\cot x)p - y^2 = 0$ کو حل کیجیے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$p^2 + (2y\cot x)p - y^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{-2y\cot x \pm \sqrt{4y^2cot^2x + 4y^2}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad p = -y\cot x \pm y\sqrt{cot^2x + 1}$$

$$\Rightarrow \quad p = -y\cot x \pm y\,\mathrm{cosec}\,x$$

یا

$$p + y\cot x = \pm y\,\mathrm{cosec}\,x$$

اس لیے

$$(p + y\cot x - y\,\mathrm{cosec}\,x)(p + y\cot x + y\,\mathrm{cosec}\,x) = 0$$

یہ اس وقت ممکن ہے جب کہ

$p + y\cot x - y\,\mathrm{cosec}\,x = 0$ یا $p + y\cot x + y\,\mathrm{cosec}\,x = 0$

اب اگر $p + y\cot x - y\,\mathrm{cosec}\,x = 0$ ہو تو

$$\frac{dy}{dx} + y(\cot x - \mathrm{cosec}\,x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} + (\cot x - \mathrm{cosec}\,x)dx = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -(\cot x - \mathrm{cosec}\,x)dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \left(\frac{1 - \cos x}{\sin x}\right)dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \tan\frac{x}{2}dx$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\log y = 2\log\sec\left(\frac{x}{2}\right) + \log c_1$$

$$\Rightarrow \quad \log y = \log c_1\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y = c_1 \sec^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y - c_1 \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

اسی طرح دوسرے جز $p + y\cot x + y \operatorname{cosec} x = 0$ سے

$$\frac{dy}{dx} + y(\cot x + \operatorname{cosec} x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\cot\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\log y = -2\log\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \log c_2$$

$$= \log \operatorname{cosec}^2\left(\frac{x}{2}\right) + \log c_2$$

$$\Rightarrow \quad \log y = \log c_2 \operatorname{cosec}^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y = c_2 \operatorname{cosec}^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y - c_2 \operatorname{cosec}^2\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $\left(y - c_1\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(y - c_2\operatorname{cosec}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 0$ ہو گا۔

مثال14۔ مساوات $x^2p^2 - 2xyp + 2y^2 - x^2 = 0$ کو حل کیجیے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$x^2p^2 - 2xyp + 2y^2 - x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{2xy \pm \sqrt{4x^2y^2 - 4x^2(2y^2 - x^2)}}{2x^2}$$

$$= \frac{2xy \pm 2x\sqrt{y^2 - 2y^2 + x^2}}{2x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y \pm \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$$

جو کہ ایک متجانس تفرقی مساوات (Homogenous Differential Equation) ہے۔ اس طرح کی مساوات کو حل کرنے کے لیے $y = vx$ اور $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ رکھتے ہیں

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{vx \pm \sqrt{x^2 - v^2x^2}}{x}$$

$$\Rightarrow \quad v + x\frac{dv}{dx} = v \pm \sqrt{1 - v^2}$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \pm\sqrt{1 - v^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} = \pm\frac{dx}{x}$$

اب اگر

$$\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{dx}{x}$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\sin^{-1} v = \log x - \log c_1$$

$$\Rightarrow \quad \sin^{-1} v = \log \frac{x}{c_1}$$

$$\Rightarrow \quad x = c_1 e^{\sin^{-1} v}$$

$v = \frac{y}{x}$ رکھنے پر

$$x = c_1 e^{\sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$$

جو کہ دی گئی مساوات کا حل ہے۔

مثال15۔ مساوات $p^2 + yp - x(x+y) = 0$ کو حل کیجیے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$p^2 + yp - x(x+y) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (p^2 - x^2) + y(p - x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (p-x)(p+x) + y(p-x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (p-x)(p+x+y) = 0$$

اب

$p - x = 0$ یا $p + x + y = 0$

اب اگر $p - x = 0$ ہو تو

$$\frac{dy}{dx} - x = 0$$

$$\Rightarrow \quad dy - xdx = 0$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2y - x^2 - c_1 = 0$$

اسی طرح دوسرے جز $p + x + y = 0$ سے

$$\frac{dy}{dx} + y = -x$$

جو کہ ایک خطی تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ ہے۔اس لیے اب ہم اس مساوات کے لیے متکمل جز ضربی(Integrating Factor) کو درجہ ذیل طریقہ سے حاصل کریں گے

$$I.F. = e^{\int dx} = e^x$$

اب خطی تفرقی مساوات کا حل ہو گا

$$y(I.F.) = \int (I.F.)Q\, dx + c_2$$

اس لیے

$$ye^x = \int e^x(-x)\,dx + c_2$$

$$\Rightarrow \quad ye^x = e^x(1-x) + c_2$$

$$\Rightarrow \quad y - (1-x) - c_2e^{-x} = 0$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $(2y - x^2 - c_1)(y + x - 1 + c_2e^{-x}) = 0$ ہے۔

5.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے ان تفرقی مساوات کے بارے میں پڑھا جو p کے لیے آسانی سے حل کی جا سکتی ہیں۔ اس کے بعد ہم نے ان مساوات کو حل کرنے کا طریقہ سیکھا۔

5.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

رتبہ، درجہ، متجانس تفرقی مساوات، خطی تفرقی مساوات، جز ضربی

5.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

5.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. مساوات $p^2 - 5p + 6 = 0$ کو جز ضربی میں تحویل کریے۔
2. مساوات $p^2 - 3p + 2 = 0$ کو جز ضربی میں تحویل کریے۔
3. مساوات $p^3 - 6p^2 + 11p - 6 = 0$ کو جز ضربی میں تحویل کریے۔
4. مساوات $2p^2 + p - 1 = 0$ کو جز ضربی میں تحویل کریے۔

5.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. مساوات $p^2 + (2y\cot x)p - y^2 = 0$ کو حل کریے۔
2. مساوات $x^2p^3 + yp^2 + x^2y^2p^2 + y^3p = 0$ کا حل معلوم کریے۔
3. مساوات $x + yp^2 = p + xyp$ کا حل محسوب کریے۔
4. مساوات $xp^2 + (y - x)p - y = 0$ کا حل معلوم کریے۔
5. مساوات $x^2p^2 + xyp - 6y^2 = 0$ کو حل کریے۔

5.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. مساوات $p^2 + (2\cosh x)p + 1 = 0$ کو حل کریے۔

2. مساوات $xyp^2-(x^2-y^2)p-xy=0$ کو حل کریے۔

3. مساوات $p^3+2xp^2-y^2p^2-2xy^2p=0$ کو حل کریے۔

4. مساوات $p^2+(x-e^x)p-xe^x=0$ کو حل کریے۔

5. مساوات $xyp^2+(x^2+xy+y^2)p+x^2+xy=0$ کو حل کریے۔

جوابات

5.5.1 معروضی سوالات کے جوابات

1. $(p-2)(p-3)=0$
2. $(p-1)(p-2)=0$
3. $(p-1)(p-2)(p-3)=0$
4. $(p+1)\left(p-\frac{1}{2}\right)=0$

5.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $y(1\pm\cos x)=C$
2. $(y-c)(xy+cy)\left(y-ce^{\frac{1}{x}}\right)=0$
3. $(2y-x^2-c)(2x-y^2-c)=0$
4. $(y-x+c)(xy+c)=0$
5. $(y-cx^2)(yx^3-c)=0$

5.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $(y-e^x-c)(y+e^{-x}-c)=0$
2. $(y^2-x^2-c)(xy-c)=0$
3. $(y-c)(y+x^2-c)(xy+cy+1)=0$
4. $(y-e^x+c)\left(y+\frac{x^2}{2}+c\right)=0$
5. $(2xy+x^2-c)(x^2+y^2-c)=0$

5.6 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Differential Calculus, K. Ahmad, Real World Education Publishers, New Delhi
2. Ordinary and Partial Differential Equations, Rai Singhania, S. Chand & Co., New Delhi

اکائی 6۔ پہلے رتبے اور اعلیٰ درجے کی تفرقی مساواتیں
(x اور y کے لیے حل کی جانے والی مساواتیں)

(First Order and Higher Degree Differential Equations: Solvable for x and y)

اکائی کے اجزا

6.0 تمہید(Introduction)

اس اکائی میں ہم پہلے رتبے اور اعلی درجہ کی تفرقی مساوات کے بارے میں پڑھیں گے۔ ان مساوات کو درجہ ذیل حصوں میں تقسیم کرتے ہیں:

- x کے لیے حل کی جانے والی تفرقی مساوات
- y کے لیے حل کی جانے والی تفرقی مساوات
- مساوات جن میں x موجود نہ ہو
- مساوات جن میں y موجود نہ ہو
- مساوات جو x اور y میں متجانس ہو

6.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کو پڑھنے کے بعد طالب علم اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- x کے لیے حل کی جانے والی تفرقی مساوات کو حل کر سکیں
- y کے لیے حل کی جانے والی تفرقی مساوات کو حل کر سکیں
- ان مساوات کو جن میں x موجود نہ ہو، حل کر سکیں
- ان مساوات کو جن میں y موجود نہ ہو، حل کر سکیں
- مساوات جو x اور y میں متجانس ہو، کو حل کر سکیں

6.2 x کے لیے حل کی جانے والی تفرقی مساوات(Differential Equations Solvable for x)

اگر کوئی مساوات x کے لیے حل ہو سکتی ہو، تب اسے درجہ ذیل شکل میں تبدیل کیا جا سکتا ہے

$$x = f(y, p) \qquad ......(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ y تفرق کرنے پر

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy} = \varphi\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right)$$

یہ مساوات دو متغیروں p اور y میں ایک تفرقی مساوات ہے۔ فرض کرو کہ اس مساوات کا ممکنہ حل

$$F(y, p, c) = 0 \qquad ......(2)$$

ہے۔

مساوات (1) اور (2) سے p کو ہٹا کر ضروری حل حاصل کیا جا سکتا ہے۔

نوٹ:

1. یہ طریقہ ان تفرقی مساواتوں کے لیے ہی مفید ہے جن میں y پوری طرح سے موجود نہ ہو۔
2. اگر مساوات (1) اور (2) سے p کو آسانی کے ساتھ ہٹانا ممکن نہ ہو تب ضروری حل x اور y کو p کی رکن میں ظاہر کر کے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

اب کچھ مثالوں کے ذریعہ سے ہم اوپر دیے گیے طریقہ کو سمجھیں گے۔

مثال 1۔ مساوات $x = y + p^2$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$x = y + p^2$$

اس مساوات کو بہ لحاظ y تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$\frac{1}{p} = 1 + 2p\frac{dp}{dy}$$

$$\Rightarrow \qquad dy = \frac{2p^2}{1-p}dp$$

$$\Rightarrow \qquad dy = -2\left(1 + p + \frac{1}{p-1}\right)dp$$

اس مساوات کو دونوں طرف تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y = -2\left[p + \frac{p^2}{2} + \log(p-1)\right] + c \qquad \text{......(1)}$$

جہاں c ایک تکملی مستقل ہے۔

y کی اس قیمت کو دی گئی مساوات میں رکھنے پر

$$x = -2\left[p + \frac{p^2}{2} + \log(p-1)\right] + c + p^2 \qquad \text{......(2)}$$

مساوات (1) اور (2) دونوں سے ضروری حل حاصل ہوتا ہے۔

مثال 2۔ مساوات $x = py + ap^2$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$x = py + ap^2$$

اس مساوات کو بہ لحاظ y تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{\mathrm{p}} = p + y\frac{dp}{dy} + 2ap\frac{dp}{dy}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{\mathrm{p}} - p = (y + 2ap)\frac{dp}{dy}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1-p^2}{\mathrm{p}} = (y + 2ap)\frac{dp}{dy}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{p}{1-p^2} = \left(\frac{1}{y+2ap}\right)\frac{dy}{dp}$$

یا

$$\frac{dy}{dp} = \frac{py+2ap^2}{1-p^2} = \left(\frac{p}{1-p^2}\right)\mathrm{y} + \frac{2ap^2}{1-p^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dp} - \left(\frac{p}{1-p^2}\right)\mathrm{y} = \frac{2ap^2}{1-p^2}$$

جو کہ ایک خطی تفرقی مساوات ہے۔اس لیے

$$I.F. = e^{-\int\left(\frac{p}{1-p^2}\right)dp}$$

اب پہلے ہم $\int \left(\frac{p}{1-p^2}\right) dp$ کی قیمت حاصل کریں گے۔

مان لو کہ $1-p^2 = m$ تب $-2pdp = dm$ اس لیے

$$\int \left(\frac{p}{1-p^2}\right) dp = -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{\mathrm{m}}\right) dm$$

$$= -\frac{1}{2}\log m$$

اس لیے

$$\int \left(\frac{p}{1-p^2}\right) dp = -\log(1-p^2)^{\frac{1}{2}}$$

اب

$$I.F. = e^{-\int\left(\frac{p}{1-p^2}\right)dp} = e^{\log(1-p^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow \qquad I.F. = (1-p^2)^{\frac{1}{2}}$$

اس لیے مندرجہ بالا حاصل کردہ خطی تفرقی مساوات کا حل ہو گا

$$y(1-p^2)^{\frac{1}{2}} = \int (1-p^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2ap^2}{1-p^2}\right) dp + c$$

$$\Rightarrow \quad y(1-p^2)^{\frac{1}{2}} = \int \frac{2ap^2}{(1-p^2)^{\frac{1}{2}}} dp + c$$

$$= 2a\int \frac{1-(1-p^2)}{(1-p^2)^{\frac{1}{2}}} dp + c$$

$$= 2a\int \left[\frac{1}{\sqrt{1-p^2}} - \frac{(1-p^2)}{\sqrt{1-p^2}}\right] dp + c$$

$$= 2a\int \left[\frac{1}{\sqrt{1-p^2}} - \sqrt{1-p^2}\right] dp + c$$

$$= 2a\left[\sin^{-1}\mathrm{p} - \left\{\frac{p}{2}\sqrt{1-p^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\mathrm{p}\right\}\right] + c$$

جہاں c ایک تکملی مستقل ہے۔

$$\Rightarrow \qquad y\sqrt{1-p^2} = a\sin^{-1}p - ap\sqrt{1-p^2} + c$$

اس لیے

$$y = \frac{a\sin^{-1}p + c}{\sqrt{1-p^2}} - ap \qquad .....(1)$$

دی گئی مساوات میں y کی یہ قیمت رکھنے پر

$$x = p\left[\frac{a\sin^{-1}p + c}{\sqrt{1-p^2}} - ap\right] + ap^2$$

$$\Rightarrow \qquad x = \frac{p}{\sqrt{1-p^2}}(a\sin^{-1}p + c) \qquad .....(2)$$

جہاں c ایک تکملی مستقل ہے۔

مساوات (1) اور (2) سے دی گئی مساوات کا عام حل حاصل ہو گا۔

6.3 y کے لیے حل کی جانے والی تفرقی مساوات (Differential Equations Solvable for y)

اگر کوئی تفرقی مساوات y کے لیے آسانی کے ساتھ حل کی جا سکتی ہو، تب اسے درجہ ذیل شکل میں تبدیل کیا جا سکتا ہے

$$y = f(x,p) \qquad ......(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} = \varphi\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right)$$

یہ مساوات دو متغیروں p اور x میں ایک تفرقی مساوات ہے۔ فرض کرو کہ اس کا ممکنہ حل

$$F(x,p,c) = 0 \qquad ......(2)$$

ہے۔

اب مساوات (1) اور (2) سے p کو حزف کر کے ہمیں دی گئی مساوات کا عام حل حاصل ہو جایے گا۔

نوٹ:

1. یہ طریقہ خاص طور پر ان تفرقی مساواتوں کے لیے مفید ہے جن میں x پوری طرح سے موجود نہ ہو۔
2. اگر مساوات (1) اور (2) سے p کو ہٹانا ممکن نہ ہو تو ضروری حل x اور y کو p کی رکن میں ظاہر کر کے حاصل کر سکتے ہیں۔

اب کچھ مثالوں سے ہم اوپر دیے گیے طریقہ کو سمجھتے ہیں۔

مثال 1۔ مساوات $y = -px + x^4p^2$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$y = -px + x^4p^2$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dy}{dx} = p = -p - x\frac{dp}{dx} + 2x^4 p\frac{dp}{dx} + 4x^3p^2$$
$$-2p - x\frac{dp}{dx} + 2x^4 p\frac{dp}{dx} + 4x^3p^2 = 0$$
$$-\left(2p + x\frac{dp}{dx}\right) + 2x^3p\left(2p + x\frac{dp}{dx}\right) = 0$$
$$(2x^3p - 1)\left(2p + x\frac{dp}{dx}\right) = 0$$

اب

$$2p + x\frac{dp}{dx} = 0$$
$$\Rightarrow \quad 2\frac{dx}{x} + \frac{dp}{p} = 0$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2\,log\,x + log\,p = log\,c$$
$$\Rightarrow \quad px^2 = c$$
$$\Rightarrow \quad p = \frac{c}{x^2}$$

p کی یہ قیمت دی گئی مساوات میں رکھنے پر

$$y = -\left(\frac{c}{x^2}\right)x + x^4\left(\frac{c}{x^2}\right)^2$$
$$\Rightarrow \quad y = c^2 - \left(\frac{c}{x}\right)$$

جو کہ دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

مثال2۔ مساوات $y = x + p^2$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$y = x + p^2$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$p = 1 + 2p\frac{dp}{dx}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{p-1}{2p} = \frac{dp}{dx}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{2p}{p-1}dp = dx$$
$$\Rightarrow \quad \left(2 + \frac{2}{p-1}\right)dp = dx$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2p + 2\,log(p-1) + c = x$$

x کی یہ قیمت دی گئی مساوات میں رکھنے پر

$$y = 2p + 2\,log(p-1) + c + p^2$$
$$\Rightarrow \qquad y = p^2 + 2p + 2\,log(p-1) + c$$

اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل $x = 2p + 2\,log(p-1) + c,\ y = p^2 + 2p + 2\,log(p-1) + c$ ہے۔

مثال3۔ مساوات $y = p\sin p + \cos p$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$y = p\sin p + \cos p$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$p = p\cos p\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx}\sin p - \sin p\frac{dp}{dx}$$
$$\Rightarrow \qquad 1 = \cos p\frac{dp}{dx}$$
$$\Rightarrow \qquad dx = \cos p\, dp$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x = \sin p + c$$

اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل $x = \sin p + c,\ y = p\sin p + \cos p$ ہے۔

مثال4۔ مساوات $y = A + Bp + Cp^2$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$y = A + Bp + Cp^2$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$p = B\frac{dp}{dx} + 2Cp\frac{dp}{dx}$$
$$\Rightarrow \qquad p = (B + 2Cp)\frac{dp}{dx}$$
$$\Rightarrow \qquad dx = \frac{(B + 2Cp)}{p}dp$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x = B\log p + 2Cp + c$$

اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل $x = B\log p + 2Cp + c,\ y = A + Bp + Cp^2$ ہے۔

مثال5۔ مساوات $y = p\tan p + log\cos p$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$y = p\tan p + log\cos p$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$p = p\,sec^2 p \frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx} tan\, p - \frac{\sin p}{\cos p}\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad p = p\,sec^2 p \frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad dx = sec^2 p\, dp$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x = tan\, p + c$$

اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل $x = tan\, p + c,\ y = p\tan p + log\cos p$ ہے۔

مثال6۔ مساوات $y = (1+p)x + p^2$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$y = (1+p)x + p^2$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$p = 1 + p + x\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad 0 = 1 + (x + 2p)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{dp} + x = -2p$$

جو کہ ایک خطی تفرقی مساوات ہے۔اس لیے

$$I.F. = e^{\int dp} = e^p$$

اب اوپر حاصل کردہ خطی تفرقی مساوات کا حل ہو گا

$$x(e^p) = \int e^p(-2p)\,dp + c$$

$$\Rightarrow \qquad x(e^p) = 2e^p(1-p) + c$$

$$x = 2(1-p) + ce^{-p} \qquad ......(1)$$

جہاں c ایک تکملی مستقل ہے۔

x کی اس قیمت کو دی گئی مساوات میں رکھنے پر

$$y = (1+p)(2(1-p) + ce^{-p}) + p^2$$

$$y = c(1+p)e^{-p} + 2 - p^2 \qquad ......(2)$$

مساوات(1) اور(2) دونوں مل کر ضروری عام حل دیتے ہیں۔

6.4 مساوات جن میں x موجود نہ ہو (Equations not Containing x)

اگر کسی تفرقی مساوات میں x موجود نہ ہوتب فرض کرو کہ وہ درجہ ذیل شکل میں ہو گی

$$\varphi(y, p) = 0$$

اگر یہ مساوات y کے لیے حل کی جاسکتی ہو تب وہ درجہ ذیل شکل میں تبدیل کی جاسکتی ہے

$$y = \phi(p)$$

اس طرح کی مساوات کو پچھلے حصہ میں ذکر کیے گیے طریقہ سے حل کرتے ہیں۔ لیکن اگر اس طرح حل کرنا ممکن نہ ہو تب اس مساوات کو درجہ ذیل شکل میں تبدیل کر کے حل کرتے ہیں

$$p = f(y)$$

اس مساوات کو تکمل کرنے پر ہمیں ضروری عام حل حاصل ہو جاتا ہے۔

اب ہم کچھ مثالوں کے ذریعہ اوپر بتایے گیے طریقہ کو سمجھیں گے۔

مثال1۔ مساوات $y = 2p + 3p^2$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$y = 2p + 3p^2$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$p = 2\frac{dp}{dx} + 6p\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad p = (2 + 6p)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad dx = \frac{(2 + 6p)}{p}dp$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x = 2\log p + 6p + c$$

اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل $x = 2\log p + 6p + c,\ y = 2p + 3p^2$ ہے۔

مثال2۔ مساوات $y = p - \log(p^2 - 1)$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$y = p - \log(p^2 - 1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$p = \frac{dp}{dx} - \frac{2p\frac{dp}{dx}}{p^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \qquad p = \left(1 - \frac{2p}{p^2 - 1}\right)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad dx = \left(\frac{1}{p} - \frac{2}{p^2 - 1}\right)dp$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x = \log p + \log\left(\frac{p + 1}{p - 1}\right) + c$$

اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل $x = \log p + \log\left(\frac{p+1}{p-1}\right) + c,\ \ y = p - \log(p^2 - 1)$ ہے۔

6.5 مساوات جن میں y موجود نہ ہو (Equations not Containing y)

اگر کسی تفرقی مساوات میں y موجود نہ ہو تب فرض کرو کہ وہ درجہ ذیل شکل کی ہو گی

$$\varphi(x,p) = 0$$

اگر یہ مساوات x کے لیے حل کی جا سکتی ہو تب وہ درجہ ذیل شکل میں تبدیل کی جا سکتی ہے

$$x = \phi(p)$$

اس طرح کی مساوات کو پچھلے حصہ میں ذکر کیے گیے طریقہ سے حل کرتے ہیں۔ لیکن اگر اس طرح حل کرنا ممکن نہ ہو تب اس مساوات کو درجہ ذیل شکل میں تبدیل کر کے حل کرتے ہیں

$$p = f(x)$$

اس مساوات کو تکمل کرنے پر ہمیں ضروری عام حل حاصل ہو جاتا ہے۔

اب ہم ایک مثال سے اوپر بتایے گیے طریقہ کو سمجھیں گے۔

مثال 1۔ مساوات $x(1 + p^2) = 1$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات کو ہم درجہ ذیل شکل میں لکھ سکتے ہیں

$$x = \frac{1}{1 + p^2}$$

اس مساوات کو بہ لحاظ y تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{p} = -\frac{2p}{(1 + p^2)^2} \times \frac{dp}{dy}$$

$$\Rightarrow \qquad dy = -\frac{2p^2}{(1 + p^2)^2}\,dp$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y = c - \int \frac{2p^2}{(1 + p^2)^2}\,dp$$

مان لو کہ $p = tan\,t$، تب $dp = sec^2\,t\,dt$، اس لیے

$$y = c - \int \frac{2tan^2 t}{(1 + tan^2 t)^2} sec^2\,t\,dt$$

$$= c - 2\int \frac{tan^2 t}{(sec^2\,t)^2} sec^2\,t\,dt$$

$$= c - 2\int \frac{tan^2 t}{sec^2\,t}\,dt$$

$$= c - \int 2sin^2 t\,dt$$

$$= c - \int (1 - \cos 2t)\, dt$$

$$\Rightarrow \qquad y = c - t + \frac{\sin 2t}{2}$$

اور پھر $t = \tan^{-1} p$ رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y = c - \tan^{-1} p + \frac{p}{1 + p^2}$$

دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل $x = \frac{1}{1+p^2}, y = c - \tan^{-1} p + \frac{p}{1+p^2}$ ہے۔

6.6 مساوات جو x اور y میں متجانس ہو (Equations Homogeneous in x and y)

اگر کسی تفرقی مساوات میں x اور y متجانس ہوں، تب فرض کرو کہ دی گئی مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\varphi\left(\frac{y}{x}, p\right) = 0$$

اب اگر یہ مساوات p کے لیے حل کی جاسکتی ہو تب اسے درجہ ذیل شکل میں تبدیل کیا جاسکتا ہے

$$p = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

اس طرح کی مساوات کو آسانی کے ساتھ تکمل کر کے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اور اگر یہ مساوات $\frac{y}{x}$ کے لیے حل کی جاسکتی ہو تب اسے درجہ ذیل شکل میں تبدیل کیا جاسکتا ہے

$$y = xf(p)$$

اس مساوات کو حل کرنے کے لیے سب سے پہلے اس کو بہ لحاظ x تفرق کرتے ہیں۔ اس لیے

$$p = xf'(p)\frac{dp}{dx} + f(p)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{p - f(p)}{xf'(p)} = \frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{x} = \frac{f'(p)}{p - f(p)}\, dp$$

اب اس مساوات کو تکمل کرنے پر دی گئی مساوات کا حل حاصل ہو جاتا ہے۔

اب ہم ایک مثال سے اوپر بتایے گیے طریقہ کو سمجھیں گے۔

مثال 1۔ مساوات $xyp^2 + p(3x^2 - 2y^2) - 6xy = 0$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$xyp^2 + p(3x^2 - 2y^2) - 6xy = 0$$

$$\Rightarrow \qquad xp(yp + 3x) - 2y(yp + 3x) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad (xp - 2y)(yp + 3x) = 0$$

اب اگر

$$yp + 3x = 0$$
$$p = \frac{dy}{dx} = -3\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$\Rightarrow \qquad ydy + 3xdx = 0$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{y^2}{2} + 3\frac{x^2}{2} = \frac{A}{2}$$
$$\Rightarrow \qquad y^2 + 3x^2 = A$$

اسی طرح

$$xp - 2y = 0$$
$$\Rightarrow \qquad p = \frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = 2\left(\frac{dx}{x}\right)$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\log y = 2\log x + \log B$$
$$\Rightarrow \qquad y = Bx^2$$

دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل $(y - Bx^2)(y^2 + 3x^2 - A) = 0$ ہے۔

6.7 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں طالب علم نے درجہ ذیل صورتوں والی تفرقی مساوات کو حل کرنا سیکھا:

- x کے لیے حل کی جانے والی تفرقی مساوات
- y کے لیے حل کی جانے والی تفرقی مساوات
- وہ تفرقی مساوات جن میں x موجود نہ ہو
- وہ تفرقی مساوات جن میں x موجود نہ ہو
- وہ تفرقی مساوات جو x اور y میں ہومتجانس ہوں

6.8 کلیدی الفاظ (Keywords)

رطبہ، درجہ، تکملی مستقل، متجانس تفرقی مساوات

6.9 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

6.9.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. تفرقی مساوات $x = a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{dy}{dx}$ کا رطبہ ہے

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

2. تفرقی مساوات $y = x^4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx}$ کا درجہ ہے

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

3. تفرقی مساوات $y = p\tan p + \log\cos p$ کا رطبہ اور درجہ ہے

(a) 0, 0 (b) 1, 1 (c) 2, 2 (d) ان میں سے کوئی نہیں

6.9.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

درجہ ذیل تفرقی مساوات کو حل کریے:

1. $y = \sin p - p\cos p$
2. $y = \frac{xp^2+9x^2}{3p}$
3. $y = ap^2 + bp^3$
4. $p^3 + p = e^y$
5. $y = 3px + 4p^2$
6. $y = \frac{x}{p} - Ap$
7. $y = p\log p$
8. $y = xp^2 + p$
9. $p^2 - 1 = e^{p-y}$
10. $y = p(1 + p\cos p)$

6.9.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

درجہ ذیل تفرقی مساوات کو حل کریے:

1. $y^2\log y = xyp + p^2, y > 0$
2. $xp^3 - p^2 - 1 = 0$
3. $y = 3px + x^2p^2$
4. $p^3 + x = p(y + 3)$

جوابات:

6.9.1 معروضی سوالات کے جوابات

1. b
2. c

3. b

6.9.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $cos\left[\left\{\sqrt{1-c^2+2cx-x^2}-y\right\}/(c-x)\right]=(c-x)$
2. $3cy=c^2x^3+9$
3. $x=2ap+\frac{3}{2}bp^2, y=ap^2+bp^3$
4. $x=2tan^{-1}p-\frac{1}{p}, y=\log(p^3+p)$
5. $x=-\frac{8}{5}p+cp^{-3/2}, y=3cp^{-1/2}-\frac{4}{5}p^2$
6. $x=\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}(c+Asin^{-1}p), y=\frac{1}{\sqrt{1-p^2}}(c+Asin^{-1}p)-Ap$
7. $x=\frac{1}{2}(\log p+1)^2+c, y=p\log p$
8. $x=(p-1)^{-1}(\log p-p+c), y=xp^2+p$
9. $x=\log\frac{p+1}{p-1}+\log p+c, y=p-\log(p^2-1)$
10. $x=\log p+\sin p+p\cos p+c, y=p+p^2\cos p$

6.9.3 طویل جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $\log y=cx+c^2$
2. $x=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^3}, y=\frac{2}{3p^2}-\log p+c$
3. $y^3=3cx+c^2$
4. $p^3-p(y+3)+x=0, y(1-p^2)^{1/2}+(1-p^2)^{3/2}=c$

6.10 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Text Book of Differential Equations, Khalil Ahmad, Real World Education Publishers, New Delhi
2. Ordinary and Partial Differential Equations- Rai Singhania, S.Chand & Co., New Delhi

اکائی 7۔ پہلے رتبے اور اعلیٰ درجے کی تفرقی مساواتیں
(لگرانج اور کلیرو کی مساواتیں)

(Differential Equations of First Order and Higher Degree: Lagrange and Clairaut's Equations)

اکائی کے اجزا

7.0 تمہید(Introduction)

پچھلی اکائی کے نصاب میں ہم پہلے رتبے اور اعلیٰ درجہ کی تفرقی مساوات(Differential Equations) میں p کے لیے، x کے لیے اور y کے لیے حل کی جانے والی تفرقی مساواتوں کی جانکاری حاصل کر چکے ہیں۔اس اکائی میں ہم دو خاص شکل کی تفرقی مساواتوں جو کہ لگرانج اور کلیرو کے نام سے متعارف ہیں، کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے اور پھر ان کا حل حاصل کرنے کے طریقوں کو بھی سمجھیں گے۔

7.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ دی گئی لگرانج اور کلیرو کی تفرقی مساوات کو پہچان کر اس کا حل حاصل کر سکیں۔ نیز ایسی مساوات جو کلیرو کی شکل میں تبدیل کی جاسکتی ہیں ان کا حل بھی حاصل کر سکیں گے۔

7.2 لگرانج کی مساوات(Lagrange's Equation)

تعریف: وہ تفرقی مساوات جسے درجہ ذیل شکل میں لکھا جاسکتا ہو

$$y = x\varphi(p) + \psi(p) \qquad .....(1)$$

لگرانج مساوات کہلاتی ہے۔

اس مساوات کو حل کرنے کے لیے بہ لحاظ x تفرق کرتے ہیں۔ جس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dy}{dx} = p = x\frac{d}{dp}\varphi(p)\frac{dp}{dx} + \varphi(p) + \frac{d}{dp}\psi(p)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad p - \varphi(p) = \left[x\frac{d}{dp}\varphi(p) + \frac{d}{dp}\psi(p)\right]\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dp}{dx} = \frac{p - \varphi(p)}{x\frac{d}{dp}\varphi(p) + \frac{d}{dp}\psi(p)}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{dp} = \frac{x\frac{d}{dp}\varphi(p) + \frac{d}{dp}\psi(p)}{p - \varphi(p)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dp} - \frac{x\frac{d}{dp}\varphi(p)}{p - \varphi(p)} = \frac{\frac{d}{dp}\psi(p)}{p - \varphi(p)}$$

یہ ایک خطی تفرقی مساوات ہے۔اس کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x = f(p, c)$$

اس لیے مساوات(1) کا عام حل پیرامٹرک شکل میں درجہ ذیل ہو گا

$$x = f(p, c), y = f(p, c)\varphi(p) + \psi(p)$$

جہاں p ایک پیرامیٹر ہے۔

مثالیں۔ درجہ ذیل مساواتوں کو حل کیجیے:

a) $y = xp^2 - \frac{1}{p}$

b) $y = axp + bp^3$

c) $y = xp^2 + p^4$

d) $y = 2xp + p^n$

حل۔

a) دی گئی مساوات ہے

$$y = xp^2 - \frac{1}{p} \qquad .....(1)$$

یہ لگرانج مساوات ہے۔

اس مساوات کو حل کرنے کے لیے بہ لحاظ x تفرق کرتے ہیں۔ جس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dy}{dx} = p = x\frac{d}{dp}(p^2)\frac{dp}{dx} + p^2 - \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\right)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad p - p^2 = 2px\frac{dp}{dx} - \left(\frac{-1}{p^2}\right)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad p - p^2 = \left(2px + \frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{p - p^2}{2px + \frac{1}{p^2}} = \frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{dp} = \frac{2p^3x + 1}{p^3(1-p)}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{dp} = \frac{2x}{(1-p)} + \frac{1}{p^3(1-p)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dp} - \frac{2x}{(1-p)} = \frac{1}{p^3(1-p)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dp} + \frac{2x}{(p-1)} = \frac{1}{p^3(1-p)}$$

جو کہ ایک خطی تفرقی مساوات ہے۔ اس کا حل حاصل کرنے کے لیے ہم تکملی جزو I.F.(Integrating Factor) حاصل کرتے ہیں، تب ہم دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل طریقہ سے حاصل کریں گے

$$x(I.F.) = \int Q(I.F.)\,dp + c$$

جہاں $P = \frac{2}{(p-1)}$ اور $Q = \frac{1}{p^3(1-p)}$ ہے۔

اس لیے

$$I.F. = e^{\int P dp} = e^{\int\left(\frac{2}{(p-1)}\right)dp} = e^{\log(p-1)^2} = (p-1)^2$$

اب دی گئی مساوات کا حل ہو گا

$$x(p-1)^2 = \int \left\{\frac{1}{p^3(1-p)} \times (p-1)^2\right\} dp + c$$

$$\Rightarrow \qquad x(p-1)^2 = \int \left\{\frac{p-1}{-p^3}\right\} dp + c$$

$$\Rightarrow \qquad x(p-1)^2 = \int \left\{\frac{1}{-p^2} + \frac{1}{p^3}\right\} dp + c$$

$$\Rightarrow \qquad x(p-1)^2 = \frac{1}{p} - \frac{1}{2p^2} + c$$

$$\Rightarrow \qquad x = \frac{1}{(p-1)^2}\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{2p^2} + c\right\}$$

مساوات (1) سے

$$y = \frac{p^2}{(p-1)^2}\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{2p^2} + c\right\} - \frac{1}{p}$$

اس لیے دی گئی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$x = \frac{1}{(p-1)^2}\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{2p^2} + c\right\}، y = \frac{p^2}{(p-1)^2}\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{2p^2} + c\right\} - \frac{1}{p}$$

b) دی گئی مساوات ہے

$$y = axp + bp^3 \qquad .....(1)$$

یہ لگرانج مساوات ہے۔

مساوات(1) کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہو تا ہے

$$\frac{dy}{dx} = p = a\left(x\frac{dp}{dx}\right) + ap + b(3p^2)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad p - ap = (ax + 3bp^2)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dp}{dx} = \frac{p - ap}{ax + 3bp^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{dp} = \frac{ax + 3bp^2}{p - ap}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{dp} = \frac{ax}{p(1-a)} + \frac{3bp}{(1-a)}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{dp} - \frac{ax}{p(1-a)} = \frac{3bp}{(1-a)}$$

جو کہ ایک خطی تفرقی مساوات ہے، جہاں $P = -\frac{a}{p(1-a)}$ اور $Q = \frac{3bp}{(1-a)}$ ہے۔ اب ہم دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل طریقہ سے حاصل کریں گے

$$x(I.F.) = \int Q(I.F.)\, dp + c$$

اس کے لیے سب سے پہلے ہم $I.F.$ معلوم کریں گے جو اس طرح ہو گا

$$I.F. = e^{\int P dp} = e^{\int\left(\frac{-a}{p(1-a)}\right)dp} = e^{\log(p)^{\frac{-a}{(1-a)}}} = (p)^{\frac{a}{(a-1)}}$$

اب دی گئی مساوات کا حل ہو گا

$$x(p)^{\frac{a}{a-1}} = \int\left\{\frac{3bp}{1-a} \times (p)^{\frac{a}{a-1}}\right\}dp + c$$

$$\Rightarrow \quad x(p)^{\frac{a}{a-1}} = \frac{3b}{1-a}\int (p)^{\left(\frac{a}{a-1}+1\right)}dp + c$$

$$\Rightarrow \quad x(p)^{\frac{a}{a-1}} = \frac{3b}{1-a}\left[\frac{(p)^{\left(\frac{a}{a-1}+2\right)}}{\frac{a}{a-1}+2}\right] + c$$

$$\Rightarrow \quad x(p)^{\frac{a}{a-1}} = \left(\frac{3b}{2-3a}\right)(p)^{\left(\frac{a}{a-1}+2\right)} + c$$

$$\Rightarrow \quad x = \left(\frac{3b}{2-3a}\right)(p)^{\left(\frac{a}{a-1}-\frac{a}{a-1}+2\right)} + c(p)^{\left(\frac{-a}{a-1}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad x = \left(\frac{3b}{2-3a}\right)p^2 + c(p)^{\frac{a}{1-a}}$$

مساوات (1) سے

$$y = ap\left\{\frac{3bp^2}{2-3a} + c(p)^{\frac{a}{1-a}}\right\} + bp^3$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{3abp^3}{2-3a} + ac(p)^{\frac{1}{1-a}} + bp^3$$

اس لیے دی گئی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$x = \frac{3bp^2}{2-3a} + c(p)^{\frac{a}{1-a}}, y = \frac{3abp^3}{2-3a} + ac(p)^{\frac{1}{1-a}} + bp^3$$

c) دی گئی مساوات ہے

$$y = xp^2 + p^4 \qquad .....(1)$$

یہ لگرانج مساوات ہے۔

اس مساوات کو حل کرنے کے لیے بہ لحاظ x تفرق کرتے ہیں۔ جس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dy}{dx} = p = 2px\frac{dp}{dx} + p^2 + 4p^3\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad p - p^2 = (2px + 4p^3)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{p-p^2}{2px+4p^3} = \frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dp} = \frac{p(2x+4p^2)}{p(1-p)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dp} = \frac{2x}{(1-p)} + \frac{4p^2}{(1-p)}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{dp} + \frac{2x}{(p-1)} = \frac{4p^2}{(1-p)}$$

جو کہ ایک خطی تفرقی مساوات ہے، جہاں $P = \frac{2}{(p-1)}$ اور $Q = \frac{4p^2}{(1-p)}$ ہے۔ اب ہم دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل طریقہ سے حاصل کریں گے

$$x(I.F.) = \int Q(I.F.)\,dp + c$$

اس کے لیے سب سے پہلے ہم $I.F.$ معلوم کریں گے جو درجہ ذیل طریقہ سے حاصل ہو گا

$$I.F. = e^{\int P dp} = e^{\int\left(\frac{2}{p-1}\right)dp} = e^{\log(p-1)^2} = (p-1)^2$$

اب دی گئی مساوات کا حل ہو گا

$$x(p-1)^2 = \int \frac{4p^2}{1-p} \times (p-1)^2\,dp + c$$

$$\Rightarrow \qquad x(p-1)^2 = -\int 4p^2(p-1)\,dp + c$$

$$\Rightarrow \qquad x(p-1)^2 = \int 4(p^2 - p^3)\,dp + c$$

$$\Rightarrow \qquad x(p-1)^2 = 4\left(\frac{p^3}{3} - \frac{p^4}{4}\right) + c$$

$$\Rightarrow \qquad x = \frac{1}{(p-1)^2}\left\{4\left(\frac{p^3}{3} - \frac{p^4}{4}\right) + c\right\}$$

مساوات (1) سے

$$y = \left[\frac{1}{(p-1)^2}\left\{4\left(\frac{p^3}{3} - \frac{p^4}{4}\right) + c\right\}\right]p^2 + p^4$$

اس لیے دی گئی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$x = \frac{1}{(p-1)^2}\left\{4\left(\frac{p^3}{3} - \frac{p^4}{4}\right) + c\right\},$$

اور
$$y = \left[\frac{1}{(p-1)^2}\left\{4\left(\frac{p^3}{3} - \frac{p^4}{4}\right) + c\right\}\right]p^2 + p^4$$

d) دی گئی مساوات ہے

$$y = 2xp + p^n \qquad .....(1)$$

یہ لگرانج مساوات ہے۔

اس مساوات کو حل کرنے کے لیے اس کو بہ لحاظ x تفرق کرتے ہیں۔ جس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dy}{dx} = p = 2x\frac{dp}{dx} + 2p + np^{n-1}\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad -p = (2x + np^{n-1})\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dp}{dx} = \frac{-p}{2x + np^{n-1}}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{dp}=\frac{2x+np^{n-1}}{-p}$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{dp}=-\frac{2x}{p}-np^{n-2}$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{dp}+\frac{2x}{p}=-np^{n-2}$$

جو کہ ایک خطی تفرقی مساوات ہے، جہاں $P=\frac{2}{p}$ اور $Q=-np^{n-2}$ ہے۔ اب ہم دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل طریقہ سے حاصل کریں گے

$$x(I.F.)=\int Q(I.F.)\,dp+c$$

اس کے لیے سب سے پہلے ہم $I.F.$ معلوم کریں گے جو درجہ ذیل طریقہ سے حاصل ہو گا

$$I.F.=e^{\int P dp}=e^{\int\left(\frac{2}{p}\right)dp}=e^{\log p^2}=p^2$$

اب دی گئی مساوات کا حل ہو گا

$$xp^2=\int(-np^{n-2})\times p^2\,dp+c$$
$$\Rightarrow \qquad xp^2=-\int(np^n)\,dp+c$$
$$\Rightarrow \qquad xp^2=-\frac{np^{n+1}}{n+1}+c$$
$$\Rightarrow \qquad x=-\frac{np^{n-1}}{n+1}+cp^{-2}$$

مساوات (1) سے

$$y=2p\left(-\frac{np^{n-1}}{n+1}+cp^{-2}\right)+p^n$$
$$\Rightarrow \qquad y=\left(-\frac{2np^n}{n+1}+2cp^{-1}\right)+p^n$$

اس لیے دی گئی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$x=-\frac{np^{n-1}}{n+1}+cp^{-2},\ y=\left(-\frac{2np^n}{n+1}+2cp^{-1}\right)+p^n$$

7.3 کلیر و کی مساوات (Clairaut's Equation)

وہ تفرقی مساوات جسے درجہ ذیل شکل میں لکھا جا سکتا ہو

$$y=xp+\varphi(p) \qquad .....(1)$$

کلیر و کی مساوات کہلاتی ہے۔

اس مساوات کو حل کرنے کے لیے بہ لحاظ x تفرق کرتے ہیں۔ جس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dy}{dx} = p = x\frac{dp}{dx} + p + \frac{d}{dp}\varphi(p)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad \left[x + \frac{d}{dp}\varphi(p)\right]\frac{dp}{dx} = 0$$

اب

$$\frac{dp}{dx} = 0, \quad \left[x + \frac{d}{dp}\varphi(p)\right] = 0$$

یہاں جز $x + \frac{d}{dp}\varphi(p)$ میں $\frac{dp}{dx}$ نہیں ہے اس لیے

$$\frac{dp}{dx} = 0$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$p = c$$

جہاں c ایک اختیاری مستقل ہے۔

p کی یہ قیمت مساوات (1) میں رکھنے پر

$$y = xc + \varphi(c)$$

جو کہ کلیرو کی مساوات کا عام حل ہے۔

اس سے یہ بات پتہ چلتی ہے کہ کلیرو کی مساوات کا حل حاصل کرنے کے لیے دی گئی مسات میں p کی جگہ c رکھنے پر مطلوبہ عام حل حاصل ہو جاتا ہے۔

مثالیں۔ درجہ ذیل مساواتوں کو حل کریے:

a) $y = xp + \log p$

b) $y = xp + \frac{a}{2p}$

c) $y = xp + (1 + p^2)^{3/2}$

d) $y = xp + p^2$

e) $y = xp + \sin^{-1} p$

f) $yp = 1 - p + xp^2$

g) $p = \cos px \cos y + \sin px \sin y$

$yp = a + xp^2$ (h

$(y - px)(p - 1) = p$ (i

حل۔

a) دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$y = xp + \log p \qquad .....(1)$$

یہ مساوات کلیرو کی مساوات ہے۔اس کا عام حل حاصل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں p کی جگہ c رکھتے ہیں،اس لیے

$$y = xc + \log c$$

دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

b) دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$y = xp + \frac{a}{2p} \qquad .....(1)$$

یہ مساوات کلیرو کی مساوات ہے۔اس کا عام حل حاصل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں p کی جگہ c رکھتے ہیں،اس لیے

$$y = xc + \frac{a}{2c}$$

دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

c) دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$y = xp + (1 + p^2)^{3/2} \qquad .....(1)$$

یہ مساوات کلیرو کی مساوات ہے۔اس کا عام حل حاصل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں p کی جگہ c رکھتے ہیں،اس لیے

$$y = xc + (1 + c^2)^{3/2}$$

دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

d) دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$y = xp + p^2 \qquad .....(1)$$

یہ مساوات کلیرو کی مساوات ہے۔اس کا عام حل حاصل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں p کی جگہ c رکھتے ہیں،اس لیے

$$y = xc + c^2$$

دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

e) دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$y = xp + \sin^{-1} p \qquad .....(1)$$

یہ مساوات کلیرو کی مساوات ہے۔اس کا عام حل حاصل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں p کی جگہ c رکھتے ہیں،اس لیے

$$y = xc + \sin^{-1} c$$

دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

f) دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$yp = 1 - p + xp^2$$
$$y = xp + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \qquad .....(1)$$

یہ مساوات کلیرو کی مساوات ہے۔ اس کا عام حل حاصل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں p کی جگہ c رکھتے ہیں، اس لیے

$$y = xc + \left(1 - \frac{1}{c}\right)$$

دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

g) دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$p = \cos px \cos y + \sin px \sin y$$
$$\Rightarrow \quad p = \cos(px - y)$$
$$\Rightarrow \quad xp - y = \cos^{-1} p$$

اس لیے

$$y = xp - \cos^{-1} p \qquad .....(1)$$

یہ مساوات کلیرو کی مساوات ہے۔ اس کا عام حل حاصل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں p کی جگہ c رکھتے ہیں، اس لیے

$$y = xc - \cos^{-1} c$$

دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

h) دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$yp = a + xp^2$$
$$\Rightarrow \quad y = xp + \frac{a}{p} \qquad .....(1)$$

یہ مساوات کلیرو کی مساوات ہے۔ اس کا عام حل حاصل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں p کی جگہ c رکھتے ہیں، اس لیے

$$y = xc + \frac{a}{c}$$

دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

i) دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$(y - px)(p - 1) = p$$
$$\Rightarrow \quad y - px = \frac{p}{p - 1}$$
$$\Rightarrow \quad y = xp + \frac{p}{p-1} \qquad .....(1)$$

یہ مساوات کلیرو کی مساوات ہے۔ اس کا عام حل حاصل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں p کی جگہ c رکھتے ہیں، اس لیے

$$y = xc + \frac{c}{c - 1}$$

دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

7.3.1 کلیرو کی شکل میں تبدیل کی جانے والی مساواتیں (Equations Reducible to Clairaut's form)

اب ہم ان مساوات کے بارے میں جانکاری حاصل کریں گے جو کلیرو کی مساوات کی شکل میں نہیں ہوتی ہیں لیکن کچھ مناسب متبادل کا استعمال کر کے ان مساوات کو کلیرو کی مساوات میں تبدیل کر سکتے ہیں۔ کس تفرقی مساوات میں کیا متبادل رکھا جایے اور کونسا نہیں اس کے لیے کوئی عام طریقہ موجود نہیں ہے۔ پھر بھی کچھ متبادل ایسے ہیں جن کو زیادہ تر مساوات میں استعمال کر کے ہم دی گئی تفرقی مساوات کو کلیرو کی مساوات میں بدل سکتے ہیں اور پھر پہلے بتایے طریقہ سے عام حل حاصل کر سکتے ہیں۔ ان متبادل کو ہم مثالوں کی مدد سے سمجھیں گے۔

مثالیں۔ درجہ ذیل مساوات کو حل کریے:

a) $(py + x)(xp - y) = h^2 p$

b) $xy(y - xp) = x + yp$

c) $y = 2xp + ayp^2$

d) $y - 2xp + yp^2 = 0$

e) $e^{4x}p + e^{2y}p^2 - e^{4x} = 0$

f) $p^2 \cos^2 y + p \sin x \cos x \cos y - \sin y \cos^2 x = 0$

حل۔

a) دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$(py + x)(xp - y) = h^2 p \qquad .....(1)$$

فرض کرو کہ

$$y^2 = v \Rightarrow 2ydy = dv$$

اور

$$x^2 = u \Rightarrow 2xdx = du$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{2ydy}{2xdx} = \frac{dv}{du}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{y}{x}p = \frac{dv}{du}$$

$$\Rightarrow \qquad p = \sqrt{\frac{u}{v}} \times \frac{dv}{du}$$

اب مساوات (1) سے

$$\left(\sqrt{\frac{u}{v}} \times \frac{dv}{du}\sqrt{v} + \sqrt{u}\right)\left(\sqrt{u}\sqrt{\frac{u}{v}} \times \frac{dv}{du} - \sqrt{v}\right) = h^2\sqrt{\frac{u}{v}} \times \frac{dv}{du}$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{u}\left(\frac{dv}{du} + 1\right)\frac{1}{\sqrt{v}}\left(u \times \frac{dv}{du} - v\right) = h^2\sqrt{\frac{u}{v}} \times \frac{dv}{du}$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\frac{dv}{du} + 1\right)\left(u\frac{dv}{du} - v\right) = h^2\frac{dv}{du}$$

$$\Rightarrow \qquad u\frac{dv}{du} - v = \frac{h^2 \frac{dv}{du}}{\left(\frac{dv}{du} + 1\right)}$$

$$\Rightarrow \qquad v = u\frac{dv}{du} - \frac{h^2 \frac{dv}{du}}{\left(\frac{dv}{du} + 1\right)}$$

جو کہ کلیرو کی مساوات ہے۔اس کا عام حل حاصل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں $\frac{dv}{du}$ کی جگہ c رکھتے ہیں، اس لیے

$$v = uc - \frac{h^2 c}{(c+1)}$$

$x^2 = u$ اور $y^2 = v$ رکھنے پر

$$y^2 = x^2 c - \frac{h^2 c}{(c+1)}$$

جو کہ دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

b) دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$xy(y - xp) = x + yp \qquad .....(1)$$

فرض کرو کہ

$$y^2 = v \Rightarrow 2ydy = dv$$

اور

$$x^2 = u \Rightarrow 2xdx = du$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{2ydy}{2xdx} = \frac{dv}{du}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{y}{x}p = \frac{dv}{du}$$

$$\Rightarrow \qquad p = \sqrt{\frac{u}{v}} \times \frac{dv}{du}$$

اب مساوات (1) میں یہ متبادل رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\sqrt{uv}\left(\sqrt{v} - \sqrt{\frac{u}{v}} \times \frac{dv}{du} \times \sqrt{u}\right) = \left(\sqrt{u} + \sqrt{v} \times \sqrt{\frac{u}{v}} \times \frac{dv}{du}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\sqrt{uv}}{\sqrt{v}}\left(v - u\frac{dv}{du}\right) = \sqrt{u}\left(1 + \frac{dv}{du}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad v - u\frac{dv}{du} = 1 + \frac{dv}{du}$$

$$\Rightarrow \qquad v = u\frac{dv}{du} + \left(1 + \frac{dv}{du}\right)$$

جو کہ کلیرو کی مساوات ہے۔اس کا عام حل حاصل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں $\frac{dv}{du}$ کی جگہ c رکھتے ہیں، اس لیے

$$v = uc + (1 + c)$$

$x^2 = u$ اور $y^2 = v$ رکھنے پر

$$y^2 = x^2c + (1 + c)$$

جو کہ دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

c) دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$y = 2xp + ayp^2 \qquad .....(1)$$

فرض کرو کہ

$$y^2 = v$$

$$\Rightarrow \qquad 2y\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad 2p = \frac{1}{\sqrt{v}} \times \frac{dv}{dx}$$

مساوات (1) میں یہ متبادل رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\sqrt{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{v}} \times \frac{dv}{dx}\right)x + a\sqrt{v} \times \frac{1}{4v} \times \left(\frac{dv}{dx}\right)^2$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{v} = \frac{1}{\sqrt{v}}\left[\left(\frac{dv}{dx}\right)x + \frac{a}{4} \times \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \qquad v = \left(\frac{dv}{dx}\right)x + \frac{a}{4} \times \left(\frac{dv}{dx}\right)^2$$

جو کہ کلیر و کی مساوات ہے۔اس کا عام حل حاصل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں $\frac{dv}{dx}$ کی جگہ c رکھتے ہیں، اس لیے

$$v = xc + \frac{a}{4}c^2$$

$y^2 = v$ رکھنے پر

$$y^2 = xc + \frac{a}{4}c^2$$

جو کہ دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

d) دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$y - 2xp + yp^2 = 0 \qquad .....(1)$$

فرض کرو کہ

$$y^2 = v$$

$$\Rightarrow \qquad 2y\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad 2p = \frac{1}{\sqrt{v}} \times \frac{dv}{dx}$$

مساوات (1) میں یہ متبادل رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\sqrt{v} - \left(\frac{1}{\sqrt{v}} \times \frac{dv}{dx}\right)x + \sqrt{v} \times \frac{1}{4v} \times \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{v} = \frac{1}{\sqrt{v}}\left[\left(\frac{dv}{dx}\right)x - \frac{1}{4}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \qquad v = \left(\frac{dv}{dx}\right)x - \frac{1}{4}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2$$

جو کہ کلیر و کی مساوات ہے۔اس کا عام حل حاصل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں $\frac{dv}{dx}$ کی جگہ c رکھتے ہیں،اس لیے

$$v = xc - \frac{1}{4}c^2$$

$y^2 = v$ رکھنے پر

$$y^2 = xc - \frac{1}{4}c^2$$

جو کہ دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

e) دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$e^{4x}p + e^{2y}p^2 - e^{4x} = 0 \qquad .....(1)$$

فرض کرو کہ

$$e^{2y} = v \Rightarrow 2e^{2y}dy = dv$$

اور

$$e^{2x} = u \Rightarrow 2e^{2x}dx = du$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{2e^{2y}dy}{2e^{2x}dx} = \frac{dv}{du}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{e^{2y}}{e^{2x}}p = \frac{dv}{du}$$

$$\Rightarrow \qquad p = \frac{e^{2x}}{e^{2y}} \times \frac{dv}{du}$$

$$\Rightarrow \qquad p = \frac{u}{v} \times \frac{dv}{du}$$

مساوات (1) میں یہ متبادل رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$u^2\left(\frac{u}{v} \times \frac{dv}{du}\right) + v\left(\frac{u}{v} \times \frac{dv}{du}\right)^2 - u^2 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad u^2\left(\frac{u}{v} \times \frac{dv}{du} - 1\right) + v\left(\frac{u}{v} \times \frac{dv}{du}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{u^2}{v}\left\{u\frac{dv}{du} - v + \left(\frac{dv}{du}\right)^2\right\} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad v = u\frac{dv}{du} + \left(\frac{dv}{du}\right)^2$$

جو کہ کلیر و کی مساوات ہے۔اس کا عام حل حاصل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں $\frac{dv}{du}$ کی جگہ c رکھتے ہیں،اس لیے

$$v = uc + c^2$$

$e^{2y} = v, e^{2x} = u$ رکھنے پر

$$e^{2y} = e^{2x}c + c^2$$

جو کہ دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

f) دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$p^2\cos^2 y + p\sin x\cos x\cos y - \sin y\cos^2 x = 0 \qquad .....(1)$$

فرض کرو کہ

$$\sin y = v \Rightarrow \cos y\, dy = dv$$

اور

$$\sin x = u \Rightarrow \cos x\, dx = du$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\cos y\, dy}{\cos x\, dx} = \frac{dv}{du}$$

$$\Rightarrow \qquad p = \frac{\cos x}{\cos y}\frac{dv}{du}$$

$$\Rightarrow \qquad p = \sqrt{\frac{1-\sin^2 x}{1-\sin^2 y}} \times \frac{dv}{du}$$

$$\Rightarrow \qquad p = \sqrt{\frac{1-\mathrm{u}^2}{1-\mathrm{v}^2}} \times \frac{dv}{du}$$

مساوات (1) میں یہ متبادل رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1-u^2}{1-v^2} \times \left(\frac{dv}{du}\right)^2 (1-v^2) + \sqrt{\frac{1-u^2}{1-v^2}} \times \frac{dv}{du} u\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2} - v(1-u^2) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad (1-u^2)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + u(1-u^2)\frac{dv}{du} - v(1-u^2) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + u\frac{dv}{du} - v = 0$$

$$\Rightarrow \qquad v = u\frac{dv}{du} + \left(\frac{dv}{du}\right)^2$$

جو کہ کلیرو کی مساوات ہے۔ اس کا عام حل حاصل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں $\frac{dv}{du}$ کی جگہ c رکھتے ہیں، اس لیے

$$v = uc + c^2$$

$\sin y = v, \sin x = u$ رکھنے پر

$$\sin y = c\sin x + c^2$$

جو کہ دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

7.4 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- اس اکائی میں ہم نے دیکھا کہ لگرانج تفرقی مساوات

$$y = x\varphi(p) + \psi(p)$$

کو حل کرنے کے لیے سب سے پہلے اس کو بہ لحاظ x تفرق کرتے ہیں۔ جس سے ہمیں ایک خطی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ جس کو حل کرنے پر ہمیں درجہ ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے

$$x = f(p, c)$$

اب x کی یہ قیمت لگرانج کی مساوات میں رکھنے پر ہمیں لگرانج مساوات کا عام حل درجہ ذیل شکل میں حاصل ہوتا ہے

$$x = f(p, c)، y = f(p, c)\varphi(p) + \psi(p)$$

- کلیرو کی مساوات کو درجہ ذیل شکل میں لکھا جاتا ہے۔

$$y = xp + \varphi(p)$$

اس مساوات کا عام حل حاصل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں p کی جگہ c رکھتے ہیں۔ اس لیے دی گئی مساوات کا عام حل درجہ ذیل شکل کا ہوگا

$$y = xc + \varphi(c)$$

- کچھ تفرقی مساواتوں کو جو کلیرو کی شکل میں نہیں ہیں، کسی مناسب متبادل کی مدد سے کلیرو کی مساوات میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔

7.5 کلیدی الفاظ (Keywords)

کلیرو کی مساوات، خطی تفرقی مساوات، لگرانج مساوات، تکملی جزو

7.6 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

7.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. $e^p = px - y$
2. $y = px + a(1 - p)$
3. $xp - y + p^3 = 0$
4. $y = xp + \frac{1}{p}$
5. $p = \tan(px - y)$
6. $y = xp + \log p$
7. $y = xp + \cos^{-1} p$
8. $\frac{y}{x} = p + \frac{\sin^{-1} p}{x}$
9. $y = xp + \varphi(p)$ کو لگرانج مساوات کہتے ہیں (صحیح/غلط)
10. $y = xp + \varphi(p)$ کا عام حل حاصل کرنے کے لیے ہم اس مساوات میں p کی جگہ c رکھتے ہیں۔ (صحیح/غلط)

7.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

درجہ ذیل تفرقی مساوات کو مناسب متبادل کا استعمال کر کے کلیرو کی مساوات میں تبدیل کریے اور پھر اس کا عام حل حاصل کریے:

.1 $xy(y-px)=x+py$

.2 $x^3p+yp^2-x^2y=0$

.3 $(px^2+y^2)(px+y)=(p+1)^2$

7.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

درجہ ذیل لگرانج کی مساوات کا عام حل حاصل کریے:

.1 $y=2px-p^2$

.2 $y=xp^2+p$

.3 $y=2px+\log p$

.4 $y=3px+4p^2$

جوابات:

7.6.1 معروضی سوالات کے جوابات

.1 $y=cx-e^c$

.2 $y=cx+ac(1-c)$

.3 $y=xc+c^3$

.4 $y=xc+\frac{1}{c}$

.5 $y=cx-\tan^{-1}c$

.6 $y=xc+\log c$

.7 $y=xc+\cos^{-1}c$

.8 $y=xc+\sin^{-1}c$

.9 غلط

.10 صحیح

7.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

.1 $y^2=cx^2+(1+c)$

.2 $y^2=cx^2+c^2$

.3 $c^2(x+y)=1+c(xy+1)$

7.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

.1 $x=\frac{2}{3}p+\frac{c}{p^2}, y=\frac{p^2}{3}+\frac{2c}{p}$

.2 $x=\frac{\log p-p+c}{(p-1)^2}+\frac{c}{p^2}, y=xp^2+p$

$x = \frac{c}{p^2} - \frac{1}{p}, y = \log p + \frac{2c}{p} - 2$ .3

$x = -\frac{8}{5}p + \frac{c}{p^{3/2}}, y = \frac{3c}{p^{1/2}} - \frac{4p^2}{5}$ .4

7.7 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Text Book of Differential Equations, Khalil Ahmad, Real World Education Publishers, New Delhi
2. Ordinary and Partial Differential Equations- Rai Singhania, S.Chand & Co., New Delhi

اکائی 8۔ پہلے رتبے کی تفرقی مساواتوں کے اطلاقات: عمودی ٹراجکٹری

(Applications of First Order Differential Equations: Orthogonal Trajectory)

اکائی کے اجزا

8.0 تمہید(Introduction)

گزشتہ اکائیوں میں ہم تفرقی مساوات کی تشکیل اور ان کے حل حاصل کرنے کے تریقوں کے بارے میں تفصیلی معلومات حاصل کر چکے ہیں۔ اس اکائی میں ہم کچھ مسائل کے بارے میں گفتگو کریں گے جن کا تعلق پہلے رتبے اور پہلے درجے کی تفرقی مساوات سے ہے۔ کسی مسلہ کے دیے ہوے اعداد سے پہلے ہم تفرقی مساوات کی تشکیل کریں گے اور پھر کسی مناسب طریقہ سے اس کا حل حاصل کریں گے۔ آخر میں عمودی ٹراجکٹری(Orthogonal Trajectory) اور اوبلک ٹراجکٹری کے بارے میں بحث کریں گے۔

8.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مطالعے کے بعد آپ پہلے رتبے کی تفرقی مساوات کے اطلاقات سے واقف ہو جائیں گے نیز عمودی ٹراجکٹری(Orthogonal Trajectory)اور اوبلک ٹراجکٹری کی تفصیلی جانکاری اور کسی منحنی کے لیے ان کو حاصل کرنا بھی سیکھیں گے۔

8.2 اطلاقات(Applications)

طبعی اطلاقات:

فرض کرو کہ ایک ذرہ کسی سیدھی لکیر OX کے ایک نقطہ O سے X کی طرف چل رہا ہے، تب اس ذرہ کی کسی وقت t پر رفتار(Speed) درجہ ذیل ہو گی

$$v = \frac{dx}{dt}$$

اور اس ذرہ کا اسراع(Acceleration)

$$a = \frac{dv}{dt}$$

ہو گا۔

اب اگر یہ ذرہ کسی منحنی پر گردش کر رہا ہو، تب ذرہ کی رفتار

$$v = \frac{ds}{dt}$$

اور اس ذرہ کا اسراع(Acceleration)

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

ہو گا۔

یہاں پر یہ بات ذہن میں رکھنی ہے کہ رفتار اور اسراع کو منفی (-) یا مثبت (+) نشان کے ساتھ دکھایا جاتا ہے جب کہ اس ذرہ کی رفتار گھٹ رہی ہے یا بڑھ رہی ہے اور اسراع گھٹ رہا ہے یا بڑھ رہا ہے۔

کسی آبادی کے اضافہ کی شرح آبادی کے متناسب ہوتی ہے۔ کسی بیکٹریا(Bacteria) کی آبادی کے اضافہ کی شرح $\frac{dx}{dt}$ بیکٹریا کی آبادی x کے

متناسب ہو گی، جہاں $x = x(t)$ بیکٹریا کی وقت 't' پر تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔ اس لیے

$$\frac{dx}{dt} \propto x$$

یا

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

جہاں k تناسب کا مثبت $(+)$ مستقل ہے۔

کسی خاص ریڈیو ایکٹو (Radioactive) مادہ کی کشی کی شرح موجودہ مقدار کے متناسب ہوتی ہے۔ اگر کسی ریڈیو ایکٹو مادہ کی مقدار 'm' ہو کسی وقت 't' پر تب اس مادہ کی شرح درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{dm}{dt} \propto m$$

یا

$$\frac{dm}{dt} = km$$

جہاں k تناسب کا منفی $(-)$ مستقل ہے۔

ٹھنڈک کے لیے نیوٹن کا قانون:

اس قانون کے مطابق، ٹھنڈی ہو رہی کسی جسم (Body) میں درجہ حرارت میں بدلاؤ کی شرح جسم کے درجہ حرارت T اور اس کے چاروں طرف کے ماحول کے درجہ حرارت T_0 کے درمیانی فرق کے متناسب ہوتا ہے۔ اس لیے

$$\frac{dT}{dt} \propto (T - T_0), \qquad T - T_0 > 0$$

یا

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0)$$

جہاں k تناسب کا مثبت $(+)$ مستقل ہے۔ یہاں جسم (Body) میں درجہ حرارت میں بدلاؤ کی شرح $\frac{dT}{dt}$ کو منفی اس لیے لیا گیا ہے کہ ٹھنڈی ہو رہی بوڈی کے درجہ حرارت میں لگاتار کمی ہو رہی ہے۔

مثال 1۔ کسی ملک کی آبادی 50 سال میں دوگنی ہو جاتی ہے۔ کتنے سال میں اس ملک کی آبادی تین گنا ہو جائیگی؟

حل۔ فرض کرو کہ ملک کی آبادی 't' سال میں x ہے۔ جب $t = 0$، تب ملک کی آبادی x_0 ہے۔ تب ہم جانتے ہیں کہ

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

جہاں k تناسب کا مستقل ہے۔ اب

$$\frac{dx}{x} = kdt$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$log\, x = kt + log\, c$$

$$\Rightarrow \quad \log\frac{x}{c} = kt$$

$$\Rightarrow \quad x = ce^{kt}$$

$t = 0$ پر $x = x_0$، تب

$$x_0 = c$$

اس لیے

$$x = x_0 e^{kt}$$

اور $\mathrm{t} = 50$ پر $x = 2x_0$، تب

$$2x_0 = x_0 e^{50k}$$

$$\Rightarrow \quad \log 2 = 50k$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{1}{50}\log 2$$

فرض کرو کہ T سال میں آبادی تین گنا ہو جائیگی، تب

$$3x_0 = x_0 e^{\left(\frac{1}{50}\log 2\right)T}$$

$$\Rightarrow \quad \log 3 = \left(\frac{1}{50}\log 2\right)T$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{50\log 3}{\log 2}$$

8.3 عمودی ٹراجکٹری (Orthogonal Trajectory)

وہ منحنی جو کسی منحنیات کے خاندان کے کسی رکن کو کسی دیے گیے قانون کے مطابق کاٹتا ہے، اس منحنیات کے خاندان کی ٹراجکٹری کہلاتی ہے۔ کوئی ٹراجکٹری عمودی ہوگی اگر یہ منحنیات کے خاندان کے ہر ایک رکن کو 90° پر کاٹے۔

ایک خط جو کسی ہم مرکزی (Concentric) دائرے کے مشترکہ مرکز سے ہو کر گزرتی ہے، وہ دائروں کے خاندان کے ہر ایک رکن کو 90° پر کاٹتی ہے۔ اس لیے اس خط کو ہم مرکزی حلقوں کے خاندان کی ٹراجکٹری کہتے ہیں۔ اس طرح کے لامحدود خطوط ہوتے ہیں۔ کسی منحنیات کے خاندان کی عمودی ٹراجکٹری خود ایک خاندان کو تشکیل دیتی ہے۔ اب ہم عمودی ٹراجکٹری کی تفرقی مساوات حاصل کریں گے جس کو حل کرکے عمودی ٹراجکٹری حاصل ہو جائیگی۔

8.3.1 جب مساوات کارتیزی شکل میں ہو (When Equations in Cartesian Form)

فرض کیجیے کہ منحنیات کے خاندان کی مساوات درجہ ذیل ہے

$$\varphi(x, y, a) = 0 \qquad \text{..............(1)}$$

جہاں a ایک پیرامیٹر ہے اور فرض کرو کہ اس خاندان کی تفرقی مساوات درجہ ذیل ہے

$$\psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad \text{..............(2)}$$

فرض کرو کہ خاندان کے کسی منحنی C کے کسی نقطہ $P(x,y)$ پر ایک عمودی ٹراجکٹری T کاٹتی ہے۔ نقطہ $P(x,y)$ ٹراجکٹری پر ہے۔ نقطہ $P(x,y)$ پر C کا جھکاؤ $\frac{dy}{dx}$ اور $P(x,y)$ پر ٹراجکٹری T کا جھکاؤ $\frac{dY}{dX}$ ہو گا۔ چوں کہ C اور T ایک دوسرے کو 90° پر کاٹتے ہیں، اس لیے

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{dX}{dY}$$

اب x کی جگہ X، y کی جگہ Y اور $\frac{dy}{dx}$ کی جگہ $-\frac{dX}{dY}$ مساوات (2) میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$\psi\left(X, Y, -\frac{dX}{dY}\right) = 0$$

(x,y) کو (X,Y) کی جگہ رکھنے پر دی گئی منحنی کے خاندان کے لیے عمودی ٹراجکٹری حاصل ہو گی جو کہ درجہ ذیل ہے

$$\psi\left(x, y, -\frac{dx}{dy}\right) = 0$$

ذہن نشین رکھیں کہ کسی منحنیات کے خاندان کی عمودی ٹراجکٹری حاصل کرنے کے لیے اس خاندان کی دی گئی تفرقی مساوات میں $\frac{dy}{dx}$ کی جگہ $-\frac{dx}{dy}$ رکھتے ہیں۔

مثال 1۔ دائروں کے خاندان $x^2 + y^2 = r^2$ کے لیے عمودی ٹراجکٹری حاصل کریے۔

حل۔ دی گئی ہم مرکزی دائرے کی مساوات ہے

$$x^2 + y^2 = r^2$$

جہاں r ایک پیرامیٹر ہے۔

اوپر دی گئی مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کے لیے تفرقی مساوات ہے۔ عمودی ٹراجکٹری حاصل کرنے کے لیے اس مساوات میں $\frac{dy}{dx}$ کی جگہ $-\frac{dx}{dy}$ رکھتے ہیں

$$-\frac{dx}{dy} = \frac{-x}{y}$$

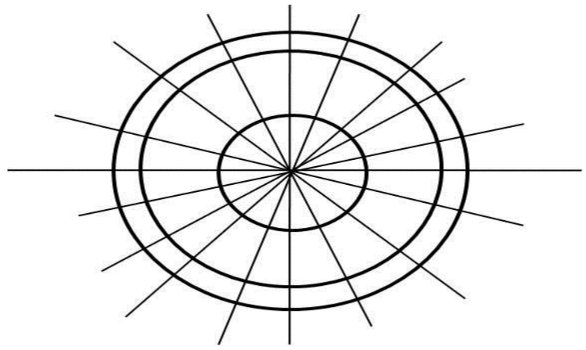
$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\log y = \log x + \log c$$

$$\Rightarrow \qquad y = cx$$

جو کہ ان خطوط کے خاندان کی نمائندگی کرتی ہے جو مبدا $(0،0)$ سے ہو کر گزرتی ہیں۔



شکل 8.3.1.1

مثال2۔ منحنیات کے خاندان $xy = c^2$، جہاں c ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری حاصل کریے۔

حل۔ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات ہے

$$xy = c^2$$

اوپر دی گئی مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y + x\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کے لیے تفرقی مساوات ہے۔ اس مساوات میں $\frac{dy}{dx}$ کی جگہ $-\frac{dx}{dy}$ رکھنے پر

$$-\frac{dx}{dy} = \frac{-y}{x}$$

$$\Rightarrow \qquad ydy - xdx = 0$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad y^2 - x^2 = a^2$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات کے لیے عمودی ٹراجکٹری ہے۔

مثال3۔ ثابت کرو کہ مکافی (پیرابولہ) کا نظام $y^2 = 4a(x + a)$ خود عمودی ہے، جہاں a ایک پیرامیٹر ہے۔

حل۔ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات ہے

$$y^2 = 4a(x + a) \qquad \text{..............}(1)$$

مساوات (1) کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2y\frac{dy}{dx} = 4a$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y} \qquad \text{..............}(2)$$

مساوات (1) اور (2) سے a کا اخراج کرنے پر

$$y^2 = 2y\frac{dy}{dx}\left(x + \frac{y}{2}\frac{dy}{dx}\right)$$

$$y = 2x\frac{dy}{dx} + y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \qquad \text{.............}(3)$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کے لیے تفرقی مساوات ہے۔اس مساوات میں $\frac{dy}{dx}$ کی جگہ $-\frac{dx}{dy}$ رکھنے پر

$$y = 2x\left(-\frac{dx}{dy}\right) + y\left(-\frac{dx}{dy}\right)^2$$

$$\Rightarrow \qquad y = -\frac{2x}{\frac{dy}{dx}} + \frac{y}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \qquad y = 2x\frac{dy}{dx} + y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کی تفرقی مساوات کی طرح ہی ہے۔اس لیے دیے گیے مکافی کا نظام خود عمودی ہے۔

مثال4۔ منحنیات کے خاندان $ax^2 + y^2 = 1$ کے لیے عمودی ٹراجکٹری حاصل کریے۔

حل۔ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات ہے

$$ax^2 + y^2 = 1$$

جہاں a ایک پیرامیٹر ہے۔

اس مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2ax + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$a = \frac{-y}{x}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

a کی یہ قیمت دی گئی مساوات میں رکھنے پر

$$\left\{\frac{-y}{x}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}x^2 + y^2 = 1$$

$$\Rightarrow \qquad y^2 = 1 + xy\frac{dy}{dx}$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کے لیے تفرقی مساوات ہے۔اس مساوات میں $\frac{dy}{dx}$ کی جگہ $-\frac{dx}{dy}$ رکھنے پر

$$y^2 = 1 + xy\left(-\frac{dx}{dy}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad xy\left(\frac{dx}{dy}\right) = 1 - y^2$$

$$\Rightarrow \qquad xdx = \left(\frac{1}{y} - y\right)dy$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \log c = \log y$$

$$\Rightarrow \qquad \log\frac{y}{c} = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad y = ce^{\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)}$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات کے لیے عمودی ٹراجکٹری ہے۔

مثال5۔ ثابت کرو کہ $x^2 + y^2 + 2gx + 1 = 0$ کی عمودی ٹراجکٹری $x^2 + y^2 + 2fy - 1 = 0$ ہے۔

حل۔ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات ہے

$$x^2 + y^2 + 2gx + 1 = 0$$

جہاں g ایک پیرامیٹر ہے۔

اس مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} + 2g = 0$$

$$\Rightarrow \qquad g = -\left(x + y\frac{dy}{dx}\right)$$

g کی یہ قیمت دی گئی مساوات میں رکھنے پر

$$x^2 + y^2 - 2\left(x + y\frac{dy}{dx}\right)x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad -x^2 + y^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کے لیے تفرقی مساوات ہے۔اس مساوات میں $\frac{dy}{dx}$ کی جگہ $-\frac{dx}{dy}$ رکھنے پر

$$-x^2 + y^2 - 2xy\left(-\frac{dx}{dy}\right) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{-x^2}{y} + y - 2x\left(-\frac{dx}{dy}\right) + \frac{1}{y} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad 2x\frac{dx}{dy} = \frac{x^2}{y} - \left(y + \frac{1}{y}\right)$$

فرض کرو کہ $x^2 = m$،تب $2x\frac{dx}{dy} = \frac{dm}{dy}$ اس لیے

$$\frac{dm}{dy} - \frac{m}{y} = -\left(y + \frac{1}{y}\right)$$

جو کہ ایک خطی تفرقی مساوات ہے۔اس لیے

$$I.F. = e^{-\int \frac{1}{y}dy} = e^{-\log y} = \frac{1}{y}$$

اس لیے خطی تفرقی مساوات کا حل ہوگا

$$m\frac{1}{y} = -\int \frac{1}{y}\left(y + \frac{1}{y}\right) + c$$

$$= -\int \left(1 + \frac{1}{y^2}\right) + c$$

$$= -y + \frac{1}{y} + c$$

اب $x^2 = m$ رکھنے پر

$$\frac{x^2}{y} = -y + \frac{1}{y} + c$$

یہاں $-c = 2f$ رکھنے پر حاصل ہوتا ہے

$$x^2 + y^2 + 2fy - 1 = 0$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات کے لیے عمودی ٹراجکٹری ہے۔اس سے ثابت ہوتا ہے کہ $x^2 + y^2 + 2gx + 1 = 0$ کی عمودی ٹراجکٹری $x^2 + y^2 + 2fy - 1 = 0$ ہے۔

مثال6۔ منحنیات کے خاندان $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2+\lambda} = 1$ جہاں λ ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری حاصل کریے۔

حل۔ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات ہے

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 + \lambda} = 1$$

من درجہ بالا مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y\frac{dy}{dx}}{a^2 + \lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad a^2 + \lambda = \frac{-a^2y}{x}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$a^2 + \lambda$ کی یہ قیمت دی گئی مساوات میں رکھنے پر

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{-a^2y}{x}\left(\frac{dy}{dx}\right)} = 1$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{xy}{a^2}\left(\frac{dx}{dy}\right) = 1$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کے لیے تفرقی مساوات ہے۔

اس مساوات میں $\frac{dy}{dx}$ کی جگہ $-\frac{dx}{dy}$ رکھنے پر ضروری عمودی ٹراجکٹری حاصل ہو جاتی ہے۔

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{xy}{a^2}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \qquad xy\left(\frac{dy}{dx}\right) = a^2 - x^2$$

$$\Rightarrow \qquad ydy = \left(\frac{a^2}{x} - x\right)dx$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = a^2 \log x + \frac{c}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad x^2 + y^2 - 2a^2 \log x = c$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات کے لیے عمودی ٹراجکٹری ہے۔

مثال 7۔ منحنیات کے خاندان $y = ax^3$ جہاں a ایک اختیاری مستقل ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری حاصل کریے۔

حل۔ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات ہے

$$y = ax^3$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر

$$\frac{dy}{dx} = 3ax^2$$

$$\Rightarrow \qquad a = \frac{1}{3x^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

a کی یہ قیمت دی گئی مساوات میں رکھنے پر

$$y = \frac{1}{3x^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)x^3$$

$$\Rightarrow \qquad 3y = x\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کے لیے تفرقی مساوات ہے۔ عمودی ٹراجکٹری حاصل کرنے کے لیے اس مساوات میں $\frac{dy}{dx}$ کی جگہ $-\frac{dx}{dy}$ رکھتے ہیں، اس لیے

$$3y = x\left(-\frac{dx}{dy}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad 3ydy + xdx = 0$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{3y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = \frac{c}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad x^2 + 3y^2 = c$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات کے لیے عمودی ٹراجکٹری ہے۔

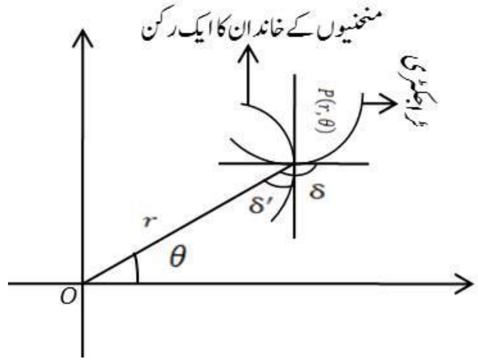
8.3.2 جب مساوات قطبی شکل میں ہو (When Equations in Polar Form)

فرض کرو کہ منحنیات کے خاندان کی مساوات درجہ ذیل ہے

$$\varphi(r, \theta, a) = 0 \qquad \text{..............(1)}$$

جہاں a ایک پیرامیٹر ہے اور فرض کرو کہ اس خاندان کی تفرقی مساوات درجہ ذیل ہے

$$\psi\left(r, \theta, \frac{dr}{d\theta}\right) = 0 \qquad \text{..............(2)}$$



شکل 8.3.2.1

فرض کرو کہ خاندان کے کسی منحنی C کے کسی نقطہ $P(r,\theta)$ پر اسی خاندان کی ایک عمودی ٹراجکٹری T کاٹتی ہے۔ اگر P ٹراجکٹری پر مان لیا جایے، تب اس نقطہ کو $P(\rho,\alpha)$ سے ظاہر کرتے ہیں ۔ مان لو کہ δ اور δ' منحنی C اور ٹراجکٹری T کے نقطہ P پر مماس (Tangents) کے زاویے (Angles) ہیں جو کہ برداری نصف قطر (Radius Vector) OP سے بنایے گیے ہیں۔ تب

$$\tan\delta = r\frac{d\theta}{dr} \quad \text{اور} \quad \tan\delta' = \rho\frac{d\alpha}{d\rho}$$

اب چوں کہ C اور T ایک دوسرے کو 90° پر کاٹتے ہیں، اس لیے

$$|\delta-\delta'| = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \delta = \delta' + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\delta = \tan\left(\delta' + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \tan\delta = -\cot\delta'$$

$$\Rightarrow \quad \tan\delta\tan\delta' = -1$$

$$\Rightarrow \quad \left(r\frac{d\theta}{dr}\right)\left(\rho\frac{d\alpha}{d\rho}\right) = -1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\theta}{dr} = \frac{-1}{r\rho\frac{d\alpha}{d\rho}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{d\theta} = -r\rho\frac{d\alpha}{d\rho}$$

نقطہ P پر $r=\rho$ اور $\theta=\alpha$، اس لیے

$$\frac{dr}{d\theta} = -\rho^2\frac{d\alpha}{d\rho}$$

اب مساوات (2) سے

$$\psi\left(\rho,\alpha,-\rho^2\frac{d\alpha}{d\rho}\right) = 0$$

(ρ,α) کو (r,θ) سے بدل کر ہمیں ضروری عمودی ٹراجکٹری کی تفرقی مساوات حاصل ہو جاتی ہے، جو کہ درجہ ذیل ہو گی

$$\psi\left(r,\theta,-r^2\frac{d\theta}{dr}\right) = 0$$

ذہن نشین رکھیں کہ کسی منحنیات کے خاندان کی تفرقی مساوات میں $\frac{dr}{d\theta}$ کی جگہ $-r^2\frac{d\theta}{dr}$ رکھ کر اس منحنیات کے خاندان کی عمودی ٹراجکٹری حاصل ہو جاتی ہے۔ اس طرح حاصل تفرقی مساوات کو حل کرنے پر عمودی ٹراجکٹری کے خاندان کی مساوات حاصل ہو جاتی ہے۔

مثال 1۔ منحنیات کے خاندان $r = a\theta$، جہاں a ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری حاصل کریے۔

حل۔ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات ہے

$$r = a\theta$$

اس مساوات کو بہ لحاظ θ تفرق کرنے پر

$$\frac{dr}{d\theta} = a$$

a کی یہ قیمت دی گئی مساوات میں رکھنے پر

$$r = \theta\frac{dr}{d\theta}$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کے لیے تفرقی مساوات ہے۔ عمودی ٹراجکٹری کی تفرقی مساوات حاصل کرنے کے لیے اس مساوات میں $\frac{dr}{d\theta}$ کی جگہ $-r^2\frac{d\theta}{dr}$ رکھتے ہیں، اس لیے

$$r = \theta\left(-r^2\frac{d\theta}{dr}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dr}{r} = -\theta d\theta$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\log r = -\frac{\theta^2}{2} + \log c$$

$$\Rightarrow \qquad \log\frac{r}{c} = -\frac{\theta^2}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad r = ce^{-\frac{\theta^2}{2}}$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات کے لیے عمودی ٹراجکٹری ہے۔

مثال 2۔ منحنیات کے خاندان $r = a(1+\cos\theta)$ جہاں a ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری حاصل کریے۔

حل۔ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات ہے

$$r = a(1+\cos\theta)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ θ تفرق کرنے پر

$$\frac{dr}{d\theta} = -a\sin\theta$$

$$\Rightarrow \qquad a = -\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)$$

a کی یہ قیمت دی گئی مساوات میں رکھنے پر

$$\Rightarrow \qquad r = -\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)(1+\cos\theta)$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کے لیے تفرقی مساوات ہے۔ عمودی ٹراجکٹری کی تفرقی مساوات حاصل کرنے کے لیے اس مساوات میں $\frac{dr}{d\theta}$ کی جگہ $-r^2\frac{d\theta}{dr}$ رکھتے ہیں، اس لیے

$$r = -\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\left(-r^2\frac{d\theta}{dr}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dr}{r} = (\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)d\theta$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\log|r| = \log|\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta| + \log|\sin\theta| + \log c$$

$$\Rightarrow \qquad \log|r| = \log|c\sin\theta\,(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)|$$

$$\Rightarrow \qquad r = c\sin\theta\,(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)$$

$$\Rightarrow \qquad r = c(1-\cos\theta)$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات کے لیے عمودی ٹراجکٹری ہے۔

مثال 3۔ منحنیات کے خاندان $r^n\sin n\theta = a^n$ جہاں a ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری حاصل کریے۔

حل۔ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات ہے

$$r^n\sin n\theta = a^n$$

$$n\log r + \log\sin n\theta = n\log a$$

اس مساوات کو بہ لحاظ θ تفرق کرنے پر

$$\frac{n}{r}\frac{dr}{d\theta} + \frac{1}{\sin n\theta}\times n\cos n\theta = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} + \cot n\theta = 0$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کے لیے تفرقی مساوات ہے۔ عمودی ٹراجکٹری کی تفرقی مساوات حاصل کرنے کے لیے اس مساوات میں $\frac{dr}{d\theta}$ کی جگہ $-r^2\frac{d\theta}{dr}$ رکھتے ہیں، اس لیے

$$\frac{1}{r}\left(-r^2\frac{d\theta}{dr}\right) + \cot n\theta = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dr}{r} + \tan n\theta\, d\theta = 0$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\log|r| = \frac{1}{n}\log|\sec n\theta| + \log c$$

$$\Rightarrow \qquad n\log|r| = \log|\sec n\theta| + n\log c$$

$$\Rightarrow \qquad r^n = c^n\sec n\theta$$

$$\Rightarrow \qquad r^n\cos n\theta = c^n$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات کے لیے عمودی ٹراجکٹری ہے۔

مثال 4۔ منحنیات کے خاندان $r\theta = a$ جہاں a ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری حاصل کریے۔

حل۔ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات ہے

$$r\theta = a$$

اس مساوات کو بہ لحاظ θ تفرق کرنے پر

$$\theta\,\frac{dr}{d\theta} + r = 0$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کے لیے تفرقی مساوات ہے۔ عمودی ٹراجکٹری کی تفرقی مساوات حاصل کرنے کے لیے اس مساوات میں $\frac{dr}{d\theta}$ کی جگہ $-r^2\,\frac{d\theta}{dr}$ رکھتے ہیں، اس لیے

$$\theta\,\left(-r^2\,\frac{d\theta}{dr}\right) + r = 0$$

$$\Rightarrow \qquad 1 - r\theta\,\frac{d\theta}{dr} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dr}{r} = \theta d\theta$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\log|r| = \frac{\theta^2}{2} + \log c$$

$$\Rightarrow \qquad \log\frac{r}{c} = \frac{\theta^2}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad r = ce^{\frac{\theta^2}{2}}$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات کے لیے عمودی ٹراجکٹری ہے۔

8.4 اوبلک ٹراجکٹری (Oblique Trajectory)

تعریف: اگر کوئی منحنی کسی دیے گیے منحنیات کے خاندان کے ہر ایک رکن کو جھکاؤ $\alpha \neq 90^\circ$ پر کاٹتا ہے، تب اس کو اوبلک ٹراجکٹری کہتے ہیں۔

نوٹ: کسی منحنیات کے خاندان کی تفرقی مساوات میں $\frac{dy}{dx}$ کی جگہ $\frac{p+\tan\alpha}{1-p\tan\alpha}$ رکھنے پر اس خاندان کی اوبلک ٹراجکٹری حاصل ہو جاتی ہے، جہاں $p = \frac{dy}{dx}$ اور α وہ جھکاؤ ہے جو اوبلک ٹراجکٹری، منحنیات کے خاندان کے ہر ایک رکن کو کاٹ کر بناتی ہے۔

مثال 1۔ دائروں کے خاندان $x^2 + y^2 = r^2$ کو 30° کے جھکاؤ پر کاٹنے والی اوبلک ٹراجکٹری کی مساوات حاصل کریے۔

حل۔ دی گئی دائروں کے خاندان کی مساوات ہے

$$x^2 + y^2 = r^2$$

جہاں r ایک پیرامیٹر ہے۔

من درجہ بالا مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کے لیے تفرقی مساوات ہے۔ اوبلک ٹراجکٹری حاصل کرنے کے لیے اس مساوات میں $\frac{dy}{dx}$ کی جگہ $\frac{p+\tan\alpha}{1-p\tan\alpha}$ رکھتے ہیں، یہاں $\alpha = 30^\circ$ ہے۔ اس لیے

$$\frac{p+\tan 30^\circ}{1-p\tan 30^\circ} = \frac{-x}{y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{p+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{p}{\sqrt{3}}} = \frac{-x}{y}$$

$$\Rightarrow \quad y\left(\sqrt{3}p+1\right) + x\left(\sqrt{3}-p\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\sqrt{3}y - x\right)p + \sqrt{3}x + y = 0$$

$$\Rightarrow \quad p = -\frac{\sqrt{3}x+y}{\sqrt{3}y-x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{3}+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}\sqrt{3}}$$

جو ایک متجانس خطی تفرقی مساوات ہے۔ اب فرض کرو کہ $y = xv$، تب $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ اس لیے

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{\sqrt{3}+\frac{xv}{x}}{1-\frac{xv}{x}\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{\sqrt{3}+v}{1-\sqrt{3}v} - v$$

$$= \frac{\sqrt{3}+v-v+\sqrt{3}v^2}{1-\sqrt{3}v}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(1+v^2)}{1-\sqrt{3}v}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3}\frac{dx}{x} = \frac{1-\sqrt{3}v}{1+v^2}dv$$

$$= \frac{1}{1+v^2}dv - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2v}{1+v^2}\right)dv$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{1+v^2}\right)dv - \frac{1}{2}\left(\frac{2v}{1+v^2}\right)dv$$

$$\Rightarrow \quad 2\frac{dx}{x} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{1+v^2}\right)dv - \left(\frac{2v}{1+v^2}\right)dv$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2\log x = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1} v - \log(1+v^2) + \log c$$

$$\Rightarrow \quad \log\frac{x^2(1+v^2)}{c} = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1} v$$

$$\Rightarrow \qquad x^2(1+v^2) = ce^{\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1} v}$$

v کی جگہ $\frac{y}{x}$ رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x^2\left\{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right\} = ce^{\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$\Rightarrow \qquad x^2+y^2 = ce^{\frac{2}{\sqrt{3}}tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$$

جو کہ دیے گیے دائروں کے خاندان کی ضروری اوبلک ٹراجکٹری ہے۔

8.5 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے پڑھا:

- فرض کرو کہ ایک ذرہ کسی سیدھی لکیر OX کے ایک نقطہ O سے X کی طرف چل رہا ہے، تب اس ذرہ کی کسی وقت t پر رفتار (Speed) اور اس ذرہ کا اسراع (Acceleration) بالطرتیب $v = \frac{dx}{dt}$ اور $a = \frac{dv}{dt}$ ہو گا۔ اور اگر یہ ذرہ کسی منحنی پر گردش کر رہا ہو، تب ذرہ کی رفتار $v = \frac{ds}{dt}$ اور اس ذرہ کا اسراع (Acceleration) $a = \frac{d^2s}{dt^2}$ ہو گا۔
- کسی آبادی کے اضافہ کی شرح آبادی کے متناسب ہوتی ہے۔
- کسی خاص تابکار (Radioactive) مادہ کی کشی کی شرح موجودہ مقدار کے متناسب ہوتی ہے۔
- ٹھنڈی ہو رہی کسی بوڈی میں درجہ حرارت میں بدلاؤ کی شرح بوڈی کے درجہ حرارت T اور اس کے چاروں طرف کے ماحول کے درجہ حرارت T_0 کے درمیانی فرق کے متناسب ہوتا ہے۔ اس لیے
$$\frac{dT}{dt} = -k(T-T_0)$$
جہاں k تناسب کا مثبت (+) مستقل ہے۔
- وہ منحنی جو کسی منحنیات کے خاندان کے کسی رکن کو کسی دیے گیے قانون کے مطابق کاٹتا ہے، اس منحنیات کے خاندان کی ٹراجکٹری کہلاتی ہے۔
- کوئی ٹراجکٹری عمودی ہو گی اگر یہ منحنیات کے خاندان کے ہر ایک رکن کو 90° پر کاٹے۔ کسی منحنیات کے خاندان کی عمودی ٹراجکٹری حاصل کرنے کے لیے اس خاندان کی دی گئی تفرقی مساوات میں $\frac{dy}{dx}$ کی جگہ $-\frac{dx}{dy}$ رکھتے ہیں۔
- اگر منحنی پولر شکل میں ہو تب اس منحنیات کے خاندان کی تفرقی مساوات میں $\frac{dr}{d\theta}$ کی جگہ $-r^2\frac{d\theta}{dr}$ رکھ کر اس منحنی کی قطبی شکل میں عمودی ٹراجکٹری حاصل ہو جاتی ہے۔
- اگر کوئی منحنی کسی دیے گیے منحنیات کے خاندان کے ہر ایک رکن کو جھکاؤ $\alpha \neq 90^\circ$ پر کاٹتا ہے، تب اس کو اوبلک ٹراجکٹری کہتے ہیں۔ کسی منحنیات کے خاندان کی تفرقی مساوات میں $\frac{dy}{dx}$ کی جگہ $\frac{p+\tan\alpha}{1-p\tan\alpha}$ رکھنے پر اس خاندان کی اوبلک ٹراجکٹری حاصل ہو جاتی ہے۔

8.6 کلیدی الفاظ(Keywords)

منحنیات کے خاندان، عمودی ٹراجکٹری، اوبلک ٹراجکٹری، قطبی شکل، متجانس

8.7 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

8.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. کسی خاص ریڈیو ایکٹو(Radioactive) مادہ کی کشی کی شرح موجودہ مقدار کے متناسب ہوتی ہے۔ (T/F)
2. کسی بیکٹریا(Bacteria) کی آبادی کے اضافہ کی شرح $\frac{dx}{dt}$ بیکٹریا کی آبادی x کے غیر متناسب ہوگی، جہاں $x = x(t)$ بیکٹریا کی وقت 't' پر تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔ (T/F)
3. کسی منحنیات کے خاندان کی عمودی ٹراجکٹری حاصل کرنے کے لیے اس خاندان کی دی گئی تفرقی مساوات میں $\frac{dy}{dx}$ کی جگہ $\frac{dx}{dy}$ رکھتے ہیں۔ (T/F)
4. فرض کرو کہ کوئی منحنی پولر شکل میں ہے، تب اس منحنیات کے خاندان کی تفرقی مساوات میں $\frac{dr}{d\theta}$ کی جگہ $-r^2\frac{d\theta}{dr}$ رکھ کر اس منحنی کی پولر شکل میں عمودی ٹراجکٹری حاصل ہو جاتی ہے۔ (T/F)
5. کسی منحنیات کے خاندان کی تفرقی مساوات میں $\frac{dy}{dx}$ کی جگہ $\frac{p+\tan\alpha}{1-p\tan\alpha}$ رکھنے پر اس خاندان کی اوبلک ٹراجکٹری حاصل ہو جاتی ہے۔ (T/F)
6. ٹھنڈک کا نیوٹن کا قانون کیا ہے؟
7. اوبلک ٹراجکٹری کیا ہے؟
8. ٹراجکٹری کی تعریف کریے۔
9. عمودی ٹراجکٹری کی تعریف کریے۔

8.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

1. منحنیات کے خاندان $r = a(1-\cos\theta)$ جہاں a ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری محسوب کریے۔
2. منحنیات کے خاندان $r = e^{a\theta}$ جہاں a ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری معلوم کرو۔
3. منحنیات کے خاندان $r = a + \sin 5\theta$ جہاں a ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری حاصل کرو۔
4. منحنیات کے خاندان $r = a(\sec\theta + \tan\theta)$ جہاں a ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری معلوم کرو۔
5. منحنیات کے خاندان $r = 2a/(1+\cos\theta)$ جہاں a ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری محسوب کریے۔
6. منحنیات کے خاندان $r^n = a^n \sin n\theta$ جہاں a ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری حاصل کرو۔

8.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. منحنیات کے خاندان $x^2 + y^2 + 2gx + a = 0$ جہاں g ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری حاصل کریے۔
2. منحنیات کے خاندان $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ جہاں a ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری محسوب کریے۔
3. منحنیات کے خاندان $x^2 = cy$ جہاں c ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری معلوم کریے۔
4. منحنیات کے خاندان $\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1$ جہاں λ ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری معلوم کریے۔
5. منحنیات کے خاندان $x^3 = cy^2$ جہاں c ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری حاصل کریے۔

جوابات:

8.7.1 معروضی سوالات کے جوابات

1. (T)
2. (F)
3. (F)
4. (T)
5. (T)

8.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $r = c(1 + \cos\theta)$
2. $(\log r)^2 + \theta^2 = b^2$
3. $ce^{\frac{25}{r}} = \sec 5\theta + \tan 5\theta$
4. $r = ce^{-\sin\theta}$
5. $r = \frac{2c}{(1-\cos\theta)}$
6. $r^n = b^n \cos n\theta$

8.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $x^2 + y^2 + 2\mu y - c = 0$
2. $y^{4/3} - x^{4/3} = b^{4/3}$
3. $x^2 + 2y^2 = b^2$
4. $\left(x + y\frac{dy}{dx}\right)\left(x - y\frac{dx}{dy}\right) = a^2 - b^2$
5. $x^2 + 2y^2 = b^2$

8.8 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Text Book of Differential Equations, Khalil Ahmad, Real World Education Publishers, New Delhi
2. Ordinary and Partial Differential Equations- Rai Singhania, S.Chand & Co., New Delhi
3. A Text Book of B.Sc. (Mathematics), Volume –I , V. Venkateshwara Rao and others, S. Chand & Company

اکائی 9۔ مستقل ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساواتیں

(Homogeneous Linear Differential Equations with Constant Coefficients)

اکائی کے اجزا

9.0 تمہید (Introduction)

گزشتہ اکائی میں ہم نے پہلے رتبے اور پہلے درجے کی مساواتوں کے اطلاقات کے بارے میں پڑھا خاص طور پر عمودی ٹراجیکٹری کو حاصل کرنا سیکھا۔ اس اکائی میں ہم مستقل ضریب کی اعلی رتبہ کی متجانس تفرقی مساوات اور اس کی معاون (Auxiliary) مساوات کی مدد سے اتمامی تفاعل کو حاصل کرنے کے مختلف طریقوں پر بحث کریں گے۔

9.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ متجانس تفرقی مساوات کی بنیادی معلومات حاصل کریں گے اور پھر معاون مساوات کی مدد سے اتمامی تفاعلات کو حاصل کرکے دی گئی متجانس تفرقی مساوات کا حل معلوم کریں گے۔

9.2 مستقل ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساواتیں

(Homogeneous Linear Differential Equations with Constant Coefficients)

n رتبہ کی خطی تفرقی مساوات درجہ ذیل شکل کی ہوتی ہے

$$\frac{d^ny}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+P_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+P_{n-1}\frac{dy}{dx}+P_ny=Q \qquad \text{.........}(1)$$

جہاں $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}, P_n$ یا تو x کے تفاعلات ہیں یا مستقلات (Constants) ہیں اور ان میں y اور اس کے مشتقات موجود نہیں ہوتے ہیں۔ اگر $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}, P_n$ مستقلات ہوں اور x کا تفاعل Q ہو تب، مساوات (1) کو مستقل ضریب کے ساتھ خطی تفرقی مساوات کہتے ہیں۔

اب اگر $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ مستقلات ہوں اور Q یا تو مستقل ہو یا x کا تفاعل ہو تب، مساوات (1) سے

$$\frac{d^ny}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_ny=Q$$

اگر $\frac{d}{dx}=D, \frac{d^2}{dx^2}=D^2, \frac{d^3}{dx^3}=D^3, \cdots, \frac{d^n}{dx^n}=D^n$، تب

$$D^ny+a_1D^{n-1}y+a_2D^{n-2}y+\cdots+a_{n-1}Dy+a_ny=Q$$
$$(D^n+a_1D^{n-1}+a_2D^{n-2}+\cdots+a_{n-1}D+a_n)y=Q$$

اس مساوات کو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں

$$f(D)y=Q \qquad \text{.........}(2)$$

جہاں $f(D)=D^n+a_1D^{n-1}+a_2D^{n-2}+\cdots+a_{n-1}D+a_n$ ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر کسی تفرقی مساوات کا رتبہ n ہے، تب اس کے عام حل (General Solution) میں n اختیاری مستقلات ہوں گے۔ اگر کسی حل میں اختیاری مستقلات موجود نہ ہوں تب اس حل کو خاص تکملہ (Particular Integral) کہتے ہیں۔ اگر مساوات (2) میں $Q=0$، تب مساوات

$$f(D)y = 0 \qquad \text{.........(3)}$$

متجانس تفرقی مساوات کہلاتی ہے۔

9.2.1 کچھ بنیادی قضیے (Some Basic Theorems)

I. اگر $y = v$ مساوات $f(D)y = Q$ کا خاص تکملہ ہو اور $y = u$ جس میں n غیر تابع اختیاری مستقلات ہیں، مساوات $f(D)y = 0$ کا عام حل ہو، تب $y = u + v$ مساوات $f(D)y = Q$ کا عام حل ہو گا۔

ثبوت: چوں کہ $y = v$ مساوات (2) کا خاص تکملہ (Particular Integral) ہے اور $y = u$ مساوات (3) کا عام حل ہے، اس لیے

$$f(D)v = Q$$

اور

$$f(D)u = 0$$

اس لیے

$$f(D)(u + v) = f(D)u + f(D)v = 0 + Q = Q$$

اس لیے مساوات $f(D)y = Q$ کا حل $y = u + v$ ہے۔ لیکن اس حل میں n غیر تابع اختیاری مستقل ہیں۔ اس لیے یہ مساوات $f(D)y = Q$ کا عام حل $y = u + v$ ہو گا۔ مساوات $f(D)y = 0$ کے عام حل کو مساوات $f(D)y = Q$ کا اتمامی تفاعل (Complementary Function) کہتے ہیں۔ اس طرح کسی خطی تفرقی مساوات کے لیے عام حل درجہ ذیل طریقے سے حاصل کرتے ہیں

$$y = C.F. + P.I.$$

II. اگر $f(D)y = 0$ کا ایک حل $y = y_1$ ہے، تب $y = cy_1$ بھی اس کا ایک حل ہو گا، جہاں c ایک اختیاری مستقل ہے۔

ثبوت: فرض کرو $f(D)y = 0$ کا ایک حل $y = y_1$ ہے، تب

$$f(D)y_1 = 0$$

اب

$$f(D)cy_1 = cf(D)y_1 = 0$$

اس لیے $y = cy_1$ مساوات $f(D)y = 0$ کا بھی حل ہو گا۔

III. اگر $y = y_1, y = y_2, \cdots, y = y_n$ مساوات $f(D)y = 0$ کے n غیر تابع حل ہیں، تب

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$$

بھی اس کا ایک حل ہو گا، جہاں $c_1, c_2, \cdots, c_n$ اختیاری مستقلات ہیں۔

ثبوت: فرض کرو $y = y_1, y = y_2, \cdots, y = y_n$ مساوات $f(D)y = 0$ کے n غیر تابع حل ہیں، تب

$$f(D)y_1 = 0, f(D)y_2 = 0, \cdots, f(D)y_n = 0 \qquad \text{.........(1)}$$

اب

$$f(D)(c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n) = f(D)c_1y_1 + f(D)c_2y_2 + \cdots + f(D)c_ny_n$$

$$= c_1 f(D)y_1 + c_2 f(D)y_2 + \cdots + c_n f(D)y_n$$

مساوات(1)کا استعمال کرنے پر

$$f(D)(c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n) = 0$$

اس لیے $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$ مساوات $f(D)y = 0$ کا ایک حل ہے۔

9.2.2 اتمامی تفاعلات(Complementary Functions)

فرض کرو کہ

$$f(D)y = 0 \qquad \text{.........(1)}$$

ہے اور فرض کرو کہ $m_1, m_2, \cdots, m_n$ درجہ ذیل مساوات جسے معاون(Auxiliary)مساوات کہتے ہیں، کے روٹس(Roots)ہیں

$$f(m) = 0 \qquad \text{.........(2)}$$

تب، مساوات(1)کو درجہ ذیل شکل میں لکھ سکتے ہیں

$$(D - m_1)(D - m_2)\cdots(D - m_n)y = 0 \qquad \text{.........(3)}$$

اس مساوات کی خطی مساوات درجہ ذیل ہیں

$$(D - m_1)\mathrm{y} = 0, (D - m_2)\mathrm{y} = 0, \cdots, (D - m_n)\mathrm{y} = 0 \qquad \text{.........(4)}$$

جن کے حل مساوات(3)کے حل ہوں گے اور پھر مساوات(1) کے بھی حل ہوں گے۔ اب مان لو کہ مساوات

$$(D - m_k)\mathrm{y} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{d}{dx} - m_k\right)\mathrm{y} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} - m_k y = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = m_k dx$$

تکمل کرنے پر ہمیں خاص حل حاصل ہوتا ہے

$$y = e^{m_k x}$$

اس لیے مساوات (4)کے خاص حل $y_1 = e^{m_1 x}, y_2 = e^{m_2 x}, \cdots, y_n = e^{m_n x}$ جو کہ مساوات (1)کے بھی ہوں گے۔ اس سے درجہ ذیل تین صورتیں ضاہر ہوتی ہیں:

1. **جب معاون مساوات کے سبھی روٹس مختلف ہوں:**

اس صورت میں فرض کرو کہ $m_1 \neq m_2, \neq \cdots \neq m_n$ حاصل کردہ معاون مساوات کے روٹس ہیں، تب $e^{m_1 x}, e^{m_2 x}, \ldots, e^{m_n x}$ خطی طور پر غیر تابع ہیں۔ اس لیے مساوات(1)کا عام حل ہوگا

$$y = C.F. = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \cdots + c_n e^{m_n x} \qquad \text{.........(5)}$$

2. **جب معاون مساوات کے کچھ روٹس مساوی ہوں:**

اس صورت میں فرض کرو کہ معاون مساوات کے n روٹس میں سے k روٹس مساوی ہیں $m = m_1 = m_2 = \cdots = m_k$

تب مساوات(1) کا عام حل ہو گا

$$\begin{aligned} y = C.F. &= c_1 e^{mx} + c_2 e^{mx} + \cdots + c_k e^{mx} + c_{k+1} e^{m_{k+1}x} + \cdots + c_n e^{m_n x} \\ &= (c_1 + c_2 + \cdots + c_k) e^{mx} + c_{k+1} e^{m_{k+1}x} + \cdots + c_n e^{m_n x} \\ &= C e^{mx} + c_{k+1} e^{m_{k+1}x} + \cdots + c_n e^{m_n x}, \end{aligned}$$

جہاں $c_1 + c_2 + \cdots + c_k = C$

اس طرح اس حل میں $n - k + 1$ اختیاری مستقلات ہیں۔

چوں کہ معاون مساوات کے پہلے k روٹس مساوی ہیں اس لیے مساوات(1) کو درجہ ذیل طریقہ سے لکھ سکتے ہیں

$$(D - m)^r (D - m_{k+1}) \cdots (D - m_n) y = 0$$

اس لیے اب ہم درجہ ذیل مساوات کا عام حل حاصل کرتے ہیں

$$(D - m)^r y = 0 \qquad \text{.........(6)}$$

اب فرض کرو کہ $y = ve^{mx}$،تب

$$\begin{aligned} (D - m)y &= (D - m) v e^{mx} \\ &= D(ve^{mx}) - mve^{mx} \\ &= vme^{mx} + e^{mx} D(v) - mve^{mx} \\ &= e^{mx} D(v) \end{aligned}$$

$(D - m)$ کی مدد سے دونوں طرف آپریٹ کرنے پر

$$\begin{aligned} (D - m)^2 y &= (D - m) e^{mx} D(v) \\ &= D\{e^{mx} D(v)\} - me^{mx} D(v) \\ &= me^{mx} D(v) + e^{mx} D^2(v) - me^{mx} D(v) \\ &= e^{mx} D^2(v) \end{aligned}$$

یہ طریقہ k مرتبہ دہرانے پر

$$(D - m)^k y = e^{mx} D^k(v)$$

اس لیے مساوات(6) سے

$$e^{mx} D^k(v) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad D^k(v) = 0$$

اس مساوات کے خطی طور پر غیر تابع خاص حل درجہ ذیل ہوں گے

$$v = 1, v = x, v = x^2, \cdots, v = x^{k-1}$$

اس لیے عام حل ہو گا $v = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_k x^{k-1}$ اور پھر مساوات(6) کا حل ہو گا

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_k x^{k-1}) e^{mx}$$

اس لیے جب معاون مساوات کے n روٹس میں سے k روٹس $m = m_1 = m_2 = \cdots = m_k$ ہوں،تب

$$C.F. = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_k x^{k-1}) e^{mx} + c_{k+1} e^{m_{k+1}x} + \cdots + c_n e^{m_n x}$$

3. جب معاون مساوات کے روٹس ملتف اعداد (Complex Numbers) ہوں:

اس صورت میں فرض کرو کہ $m_1 = \alpha + i\beta$ اور $m_2 = \alpha - i\beta$ حاصل کردہ معاون مساوات کے روٹس ہیں، تب

$$C.F. = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$$

$$= c_1 e^{(\alpha x+i\beta x)} + c_2 e^{(\alpha x-i\beta x)}$$

$$= c_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + c_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x}$$

$$= e^{\alpha x}\left(c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x}\right)$$

$$= e^{\alpha x}\{(c_1 \cos\beta x + c_1 i \sin\beta x) + (c_2 \cos\beta x - c_2 i \sin\beta x)\}$$

$$= e^{\alpha x}\{(c_1 + c_2)\cos\beta x + (c_1 - c_2) i \sin\beta x\}$$

$$= e^{\alpha x}\{A\cos\beta x + B\sin\beta x\}$$

جہاں A اور B نئے اختیاری مستقل ہیں۔

<u>اتمامی تفاعل (C. F.) حاصل کرنے کا طریقہ:</u>

(i) سب سے پہلے دی گئی مساوات کو درجہ ذیل شکل میں لکھیں

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \cdots + a_{n-1} D + a_n) y = 0$$

(ii) اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل طریقہ سے لکھیں

$$m^n + a_1 m^{n-1} + a_2 m^{n-2} + \cdots + a_{n-1} m + a_n = 0$$

(iii) اس مساوات کو m کے لیے حل کریں

(iv) اب اوپر بتایے طریقوں میں سے مناسب طریقہ سے $C.F.$ حاصل کریں۔

مثال 1۔ مساوات $(D^2 + 2D - 15)y = 0$ کو حل کریں۔

حل۔ دی گئی مساوات مستقل ضریب کے ساتھ دوسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات ہے۔ اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$m^2 + 2m - 15 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m-3)(m+5) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = 3, -5$$

چوں کہ روٹس الگ الگ ہیں اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$y = C.F. = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-5x}$$

مثال 2۔ مساوات $(D^3 - 6D^2 + 11D - 6)y = 0$ کو حل کریں۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(D^3 - 6D^2 + 11D - 6)y = 0$$

یہ مساوات مستقل ضریب کے ساتھ تیسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات ہے۔ اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$m^3 - 6m^2 + 11m - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad m^2(m-1) - 5m(m-1) + 6(m-1) = 0$$
$$\Rightarrow \qquad (m-1)(m^2 - 5m + 6) = 0$$
$$\Rightarrow \qquad (m-1)(m-2)(m-3) = 0$$
$$\Rightarrow \qquad m = 1, 2, 3$$

چوں کہ روٹس الگ الگ ہیں اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$y = C.F. = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$$

مثال 3۔ مساوات $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 12x = 0$ کا حل معلوم کریں، دیا گیا ہے کہ $t = 0$ پر $x = 3$ اور $\frac{dx}{dt} = 5$ ہے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 12x = 0$$

سب سے پہلے دی گئی مساوات کو درجہ ذیل شکل میں لکھتے ہیں

$$(D^2 - D - 12)x = 0$$

یہ مساوات مستقل ضریب کے ساتھ دوسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات ہے۔اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$m^2 - m - 12 = 0$$
$$\Rightarrow \qquad (m-4)(m+3) = 0$$
$$\Rightarrow \qquad m = 4, -3$$

چوں کہ روٹس الگ الگ ہیں اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$x = C.F. = c_1e^{4t} + c_2e^{-3t} \qquad \text{.........(1)}$$

$t = 0$ پر $x = 3$ اور $\frac{dx}{dt} = 5$ ہیں، تب

$$3 = c_1e^0 + c_2e^0$$
$$c_1 + c_2 = 3 \qquad \text{.........(2)}$$

مساوات (1) کو بہ لحاظ t تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dx}{dt} = 4c_1e^{4t} - 3c_2e^{-3t}$$

اور جب $t = 0$ تب $\frac{dx}{dt} = 5$ اس لیے

$$4c_1 - 3c_2 = 5 \qquad \text{.........(3)}$$

مساوات (2) اور (3) کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$c_1 = 2, c_2 = 1$$

اس لیے ضروری خاص حل ہو گا

$$x = 2e^{4t} + e^{-3t}$$

مثال 4۔ مساوات $\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$ کو حل کریں، دیا گیا ہے کہ $t = 0$ پر $x = 0$ اور $\frac{dx}{dt} = 0$ ہو گا۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

سب سے پہلے دی گئی مساوات کو درجہ ذیل شکل میں لکھتے ہیں

$$(D^2 - 3D + 2)x = 0$$

یہ مساوات مستقل ضریب کے ساتھ دوسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات ہے۔اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل کی ہو گی

$$m^2 - 3m + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m-2)(m-1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = 1, 2$$

چوں کہ روٹس الگ الگ ہیں اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$x = C.F. = c_1e^t + c_2e^{2t} \qquad \text{.........(1)}$$

$t = 0$ کے لیے $x = 0$ اور $\frac{dx}{dt} = 0$ ہیں، اس لیے

$$0 = c_1e^0 + c_2e^0$$

$$c_1 + c_2 = 0 \qquad \text{.........(2)}$$

اب مساوات (1) کو بہ لحاظ t تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dx}{dt} = c_1e^t + 2c_2e^{2t}$$

اور جب $t = 0$ تب $\frac{dx}{dt} = 0$ اس لیے

$$c_1 + 2c_2 = 0 \qquad \text{.........(3)}$$

مساوات (2) اور (3) کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$c_1 = 0, c_2 = 0$$

اس لیے ضروری خاص حل ہو گا

$$x = 0$$

مثال 5۔ مساوات $(D^2 - 2D + 5)y = 0$ کا حل معلوم کریں۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(D^2 - 2D + 5)y = 0$$

یہ مساوات مستقل ضریب کے ساتھ دوسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات ہے۔اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$m^2 - 2m + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad m = 1 \pm 2i$$

چوں کہ روٹس ملتف اعداد (Complex Numbers) ہیں اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$y = C.F. = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

مثال 6۔ مساوات $(D^3 - 2D^2 + 4D - 8)y = 0$ کو حل کریے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(D^3 - 2D^2 + 4D - 8)y = 0$$

یہ مساوات مستقل ضریب کے ساتھ تیسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات ہے۔اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل کی ہو گی

$$m^3 - 2m^2 + 4m - 8 = 0$$
$$\Rightarrow \quad m^2(m-2) + 4(m-2) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m-2)(m^2+4) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = 2, \pm 2i$$

چوں کہ روٹس الگ الگ اور ملتف اعداد ہیں اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$y = C.F. = c_1e^{2x} + e^{0\cdot x}(c_2\cos 2x + c_3\sin 2x)$$
$$y = c_1e^{2x} + c_2\cos 2x + c_3\sin 2x$$

مثال7۔ مساوات $(D^3 - 5D^2 + 7D - 3)y = 0$ کو حل کریے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(D^3 - 5D^2 + 7D - 3)y = 0$$

یہ مساوات مستقل ضریب کے ساتھ تیسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات ہے۔اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل کی ہو گی

$$m^3 - 5m^2 + 7m - 3 = 0$$
$$\Rightarrow \quad m^2(m-1) - 4m(m-1) + 3(m-1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m-1)(m^2 - 4m + 3) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m-1)(m-1)(m-3) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = 1, 1, 3$$

چوں کہ روٹس الگ الگ ہیں اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$y = C.F. = (c_1 + c_2x)e^x + c_3e^{3x}$$

مثال8۔ مساوات $(D^3 + 3D^2 + 3D + 1)y = 0$ کو حل کریں۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(D^3 + 3D^2 + 3D + 1)y = 0$$

یہ مساوات مستقل ضریب کے ساتھ تیسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات ہے۔اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل کی ہو گی

$$m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad m^2(m+1) + 2m(m+1) + (m+1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m+1)(m^2 + 2m + 1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m+1)(m+1)(m+1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = -1, -1, -1$$

اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$y = C.F. = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{-x}$$

مثال9۔ مساوات $(D^4 + 8D^2 + 16)y = 0$ کو حل کریں۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(D^4 + 8D^2 + 16)y = 0$$

یہ مساوات مستقل ضریب کے ساتھ چوتھے رتبے کی خطی تفرقی مساوات ہے۔اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل کی ہو گی

$$m^4 + 8m^2 + 16 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m^2+4)^2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = \pm 2i, \pm 2i$$

چوں کہ روٹس ملتف اعداد ہیں اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$y = C.F. = (c_1 + c_2x)\cos 2x + (c_3 + c_4x)\sin 2x$$

مثال10۔ مساوات $(D^3 - 3D - 2)y = 0$ کا حل معلوم کریں۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(D^3 - 3D - 2)y = 0$$

یہ مساوات مستقل ضریب کے ساتھ تیسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات ہے۔اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل کی ہو گی

$$m^3 - 3m - 2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad m^2(m+1) - m(m+1) - 2(m+1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m+1)(m^2 - m - 2) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m+1)(m+1)(m-2) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = -1, -1, 2$$

اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$y = C.F. = (c_1 + c_2x)e^{-x} + c_3e^{2x}$$

مثال 11۔ مساوات $(D^3 + D^2 + 4D + 4)y = 0$ کا حل معلوم کرو، جب کہ دیا گیا ہے کہ $x = 0$ پر $y = 0$، $\frac{dy}{dx} = -1$ اور $\frac{d^2y}{dx^2} = 5$ ہے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(D^3 + D^2 + 4D + 4)y = 0$$

یہ مساوات مستقل ضریب کے ساتھ تیسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات ہے۔اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل کی ہو گی

$$m^3 + m^2 + 4m + 4 = 0$$
$$\Rightarrow \quad m^2(m+1) + 4(m+1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m+1)(m^2+4) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = -1, \pm 2i$$

چوں کہ روٹس مختلف اور ملتف اعداد ہیں اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$y = C.F. = c_1e^{-x} + e^{0\cdot x}(c_2\cos 2x + c_3\sin 2x)$$
$$y = c_1e^{-x} + c_2\cos 2x + c_3\sin 2x \qquad ....(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر

$$\frac{dy}{dx} = -c_1e^{-x} - 2c_2\sin 2x + 2c_3\cos 2x \qquad ....(2)$$

دوسری مرتبہ تفرق کرنے پر

$$\frac{d^2y}{dx^2} = c_1e^{-x} - 4c_2\cos 2x - 4c_3\sin 2x \qquad ....(3)$$

اب دیا ہے $x = 0$ پر $y = 0$ اس لیے

$$c_1 + c_2 = 0 \qquad ....(4)$$

$x = 0$ پر $\frac{dy}{dx} = -1$

$$-c_1 + 2c_3 = -1 \qquad ....(5)$$

$x = 0$ پر $\frac{d^2y}{dx^2} = 5$

$$c_1 - 4c_2 = 5 \qquad ....(6)$$

مساوات (4)،(5)اور (6) کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہے

$$c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 0$$

اس لیے دی گئی مساوات کا خاص حل ہو گا

$$y = e^{-x} - \cos 2x$$

مثال12۔ مساوات $\frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} - 6x = 0$ کو حل کریں۔

حل۔ دی گئی مساوات کو درجہ ذیل شکل میں لکھنے پر

$$(D^3 + 2D^2 - 5D - 6)x = 0$$

یہ مساوات مستقل ضریب کے ساتھ تیسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات ہے۔اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل کی ہو گی

$$m^3 + 2m^2 - 5m - 6 = 0$$
$$\Rightarrow \quad m^2(m+1) + m(m+1) - 6(m+1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m+1)(m^2 + m - 6) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m+1)(m+3)(m-2) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = -3, -1, 2$$

چوں کہ روٹس الگ الگ ہیں اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$x = c_1e^{-3t} + c_2e^{-t} + c_3e^{2t}$$

مثال13۔ مساوات $\frac{d^3x}{dt^3} - 3\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + 3x = 0$ کو حل کریے۔

حل۔ دی گئی مساوات کو درجہ ذیل شکل میں لکھنے پر

$$(D^3 - 3D^2 - D + 3)x = 0$$

یہ مساوات مستقل ضریب کے ساتھ تیسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات ہے۔اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل کی ہو گی

$$m^3 - 3m^2 - m + 3 = 0$$
$$\Rightarrow \quad m^2(m+1) - 4m(m+1) + 3(m+1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m+1)(m^2 - 4m + 3) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m+1)(m-3)(m-1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = 1, -1, 3$$

چوں کہ روٹس الگ الگ ہیں اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$x = c_1e^{t} + c_2e^{-t} + c_3e^{3t}$$

مثال14۔ حل کرو: $\frac{d^4x}{dt^4} + 2\frac{d^3x}{dt^3} - 3\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0$

حل۔ دی گئی مساوات کو درجہ ذیل شکل میں لکھنے پر

$$(D^4 + 2D^3 - 3D^2 - 4D + 4)x = 0$$

یہ مساوات مستقل ضریب کے ساتھ چوتھے رتبے کی خطی تفرقی مساوات ہے۔اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل کی ہو گی

$$m^4 + 2m^3 - 3m^2 - 4m + 4 = 0$$
$$\Rightarrow \quad m^3(m-1) + 3m^2(m-1) - 4(m-1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m-1)(m^3 + 3m^2 - 4) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m-1)\{m^2(m-1) + 4m(m-1) + 4(m-1)\} = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m-1)(m-1)\{m^2 + 4m + 4\} = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m-1)^2(m+2)^2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = 1, 1, -2, -2$$

اب دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$x = (c_1 + c_2x)e^t + (c_3 + c_4x)e^{-2t}$$

مثال15۔ مساوات $\frac{d^4x}{dt^4} + a^4x = 0$ کو حل کریں۔

حل۔ دی گئی مساوات کو درجہ ذیل شکل میں لکھنے پر

$$(D^4 + a^4)x = 0$$

یہ مساوات مستقل ضریب کے ساتھ چوتھے رتبے کی خطی تفرقی مساوات ہے۔اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل کی ہو گی

$$m^4 + a^4 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m^2 + a^2)^2 - 2m^2a^2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m^2 + a^2)^2 - \left(\sqrt{2}ma\right)^2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad \left(m^2 + a^2 - \sqrt{2}ma\right)\left(m^2 + a^2 + \sqrt{2}ma\right) = 0$$

اس لیے

$$m^2 + a^2 - \sqrt{2}ma = 0, m^2 + a^2 + \sqrt{2}ma = 0$$

اب

$$m^2 + a^2 - \sqrt{2}ma = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = \frac{\sqrt{2}a \pm \sqrt{2a^2 - 4a^2}}{2}$$
$$\Rightarrow \quad m = \frac{a}{\sqrt{2}} \pm \frac{ai}{\sqrt{2}}$$

اسی طرح

$$m^2 + a^2 + \sqrt{2}ma = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = \frac{-\sqrt{2}a \pm \sqrt{2a^2 - 4a^2}}{2}$$
$$\Rightarrow \quad m = \frac{-a}{\sqrt{2}} \pm \frac{ai}{\sqrt{2}}$$

اب دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$x = e^{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)t}\left\{c_1\cos\left(\frac{a}{\sqrt{2}}t\right) + c_2\sin\left(\frac{a}{\sqrt{2}}t\right)\right\} + e^{\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)t}\left\{c_3\cos\left(\frac{a}{\sqrt{2}}t\right) + c_4\sin\left(\frac{a}{\sqrt{2}}t\right)\right\}$$

9.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے متجانس تفرقی مساوات کی بنیادی جانکاری حاصل کی اور اس کا عام حل حاصل کرنا سیکھا نیز اس سے خاص حل کس طرح نکالا جاتا ہے یہ بھی سیکھا۔

9.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

متجانس تفرقی مساوات، خطی تفرقی مساوات ،اتمامی تفاعل، معاون مساوات

9.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

9.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. فرض کرو کہ $f(D)y = 0$ مستقل ضریب کے ساتھ متجانس تفرقی مساوات ہے۔اگر $m_1 \neq m_2$ حاصل کردہ معاون مساوات کے دو روٹس ہوں، تب مساوات کا عام حل ہو گا $y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}$ (T/F)
2. فرض کرو کہ $f(D)y = 0$ مستقل ضریب کے ساتھ متجانس تفرقی مساوات ہے۔ فرض کرو کہ $m_1 = \alpha + i\beta$ اور $m_2 = \alpha - i\beta$ حاصل کردہ معاون مساوات کے روٹس ہیں، تب $C.F. = e^{-\alpha x}\{A\cos\beta x + B\sin\beta x\}$ ہو گا۔ (T/F)
3. مساوات $\frac{d^3x}{dt^3} + 3\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + x = 0$ کی معاون مساوات لکھو۔
4. مساوات $\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 6x = 0$ کی اتمامی تفاعل معلوم کریں۔

9.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. حل کرو: $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$
2. مساوات $\frac{d^3x}{dt^3} - 3\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} = 0$ کو حل کریں۔
3. مساوات $\frac{d^3x}{dt^3} + 6\frac{d^2x}{dt^2} + 11\frac{dx}{dt} + 6x = 0$ کا حل معلوم کریں۔
4. مساوات $\frac{d^3x}{dt^3} - 3\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + 3x = 0$ کا حل حاصل کریں۔
5. مساوات $\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} = 0$ کو حل کریں۔
6. مساوات $\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 9x = 0$ کو حل کریں۔

7. مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 10y = 0$ کو حل کریں۔

9.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. مساوات $3\frac{d^3x}{dt^3} + 5\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} = 0$ کو حل کریں۔
2. مساوات $\frac{d^3x}{dt^3} + 3\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + x = 0$ کا حل محسوب کریں۔
3. مساوات $\frac{d^4x}{dt^4} + 8\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0$ کا حل معلوم کریں۔
4. مساوات $\frac{d^4y}{dx^4} - 6\frac{d^3y}{dx^3} + 12\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} = 0$ کو حل کریں۔
5. مساوات $\left(\frac{d^2y}{dx^2} + 1\right)^3\left(\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 1\right) = 0$ کو حل کریں۔
6. حل کرو: $\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 9\frac{dy}{dx} + 13y = 0$
7. مساوات $\left(\frac{d^2y}{dx^2} + 1\right)^2 = 0$ کا حل حاصل کریں۔
8. مساوات $\frac{d^3y}{dx^3} + 16\frac{dy}{dx} = 0$ کا حل معلوم کریں۔
9. رتبہ n کی متجانس تفرقی مساوات $f(D)y = 0$ کا حل حاصل کرنے کی سبھی صورتوں پر بحث کریں۔
10. اگر $y = y_1, y = y_2, \cdots, y = y_n$ مساوات $f(D)y = 0$ کے n غیر تابع حل ہیں، تب ثابت کرو کہ

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$$

بھی اس کا ایک حل ہو گا، جہاں $c_1, c_2, \cdots, c_n$ اختیاری مستقل ہیں۔

11. اگر متجانس تفرقی مساوات کے r روٹس برابر ہوں، تب اس کا حل کس طرح حاصل کیا جاتا ہے؟

جوابات:

9.5.1 معروضی سوالات کے جوابات

1. (T)
2. (F)
3. $m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = 0$
4. $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x}$

9.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $x = c_1e^{-2t} + c_2e^{-t}$
2. $x = c_1 + c_2e^{t} + c_3e^{2t}$
3. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + c_3e^{-3x}$

4. $x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} + c_3 e^{3t}$

5. $y = c_1 e^{-x} + c_2 + c_3 e^{3x}$

6. $y = (c_1 + c_2 x) e^{3x}$

7. $y = e^{x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$

9.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $x = c_1 + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{\frac{1}{3}t}$

2. $x = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2) e^{-t}$

3. $x = (c_1 + c_2 t)\cos 2t + (c_3 + c_4 t)\sin 2t$

4. $y = c_1 + (c_2 + c_3 t + c_4 t^2) e^{2x}$

5. $y = e^{-\frac{x}{2}}\left[(c_1 + c_2 x)\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + (c_3 + c_4 x)\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right]$

$$+(c_5 + c_6 x + c_7 x^2)\cos x + (c_8 + c_9 x + c_{10} x^2)\sin x$$

6. $y = c_1 e^{-x} + e^{2x}(c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x)$

7. $y = (c_1 + c_2 x)\cos x + (c_3 + c_4 x)\sin x$

8. $y = c_1 + c_2 \cos 4x + c_3 \sin 4x$

9.6 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Text Book of Differential Equations, Khalil Ahmad, Real World Education Publishers, New Delhi
2. Ordinary and Partial Differential Equations- Rai Singhania, S.Chand & Co., New Delhi
3. A Text Book of B.Sc. (Mathematics), Volume –I , V. Venkateshwara Rao and others, S. Chand & Company

اکائی 10۔ مستقل ضریب کی غیر متجانس خطی تفرقی مساواتوں کے خاص تکملے

$$\begin{pmatrix}\text{Particular Integrals of Non} - \text{Homogeneous Linear}\\ \text{Differential Equations with Constant Coefficients}\end{pmatrix}$$

اکائی کے اجزا

10.0 تمہید (Introduction)

فرض کرو کہ x کا ایک تفاعل $\frac{1}{f(D)}Q$ ہے۔اس پر جب $f(D)$ کی مدد سے عمل کرایا جاتا ہے تو نتیجہ Q حاصل ہوتا ہے۔ چوں کہ $y = \frac{1}{f(D)}Q$ غیر متجانس تفرقی مساوات (Non Homogeneous Differential Equation) $f(D)y = Q$ کو مطمئن کرتی ہے ، اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\frac{1}{f(D)}Q$ غیر متجانس تفرقی مساوات $f(D)y = Q$ کا ایک خاص حل ہے۔اب ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$f(D)\left(\frac{1}{f(D)}Q\right) = Q$$

جس سے ظاہر ہوتا ہے کہ عامل $\frac{1}{f(D)}$ عامل $f(D)$ کا معکوس (Inverse) ہے۔

نوٹ:

$D\left(\frac{1}{D}Q\right) = Q$ یا $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{D}Q\right) = Q$ اس لیے $\frac{1}{D}Q = \int Q\,dx$

10.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ کو خاص تکملے کی بنیادی جانکاری حاصل ہو جائیگی نیز اس کو حاصل کرنے کی مختلف صورتوں کو سمجھتے ہوئے دی گئی غیر متجانس تفرقی مساوات کا حل حاصل کر سکیں گے۔

10.2 مستقل ضریب کی غیر متجانس تفرقی مساواتوں کے خاص تکملے

(Particular Integrals of Non Homogeneous Differential Equations with Constant Coefficients)

خاص تکملے کی درجہ ذیل دو صورتیں ہیں جن پر ہم بحث کریں گے۔

1. خاص تکملہ $\left(\frac{1}{D-m}Q\right)$ حاصل کرنا
2. $f(D)y = Q$ کا خاص تکملہ $\frac{1}{f(D)}Q$ حاصل کرنا

10.2.1 خاص تکملہ $\left(\frac{1}{D-m}Q\right)$ حاصل کرنا (Determining the Particular Integral $\frac{1}{D-m}Q$)

فرض کرو کہ $\frac{1}{D-m}Q = u$، تب

$$(D-m)u = (D-m)\left(\frac{1}{D-m}Q\right) = Q$$

$$\Rightarrow \quad \frac{du}{dx} - mu = Q$$

جو کہ پہلے رتبے کی خطی تفرقی مساوات ہے جس کا حل درجہ ذیل ہے

$$ue^{-mx} = \int Q\,e^{-mx}dx$$

$$\Rightarrow \quad u = e^{mx}\int Q\,e^{-mx}dx$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{D-m}Q = e^{mx}\int Q\, e^{-mx}dx$$

10.2.2 $f(D)y = Q$ کا خاص تکملہ (Particular Integral of $f(D)y = Q$)

اس کو حاصل کرنے کے دو طریقے ہیں۔

پہلا طریقہ:

فرض کرو کہ $f(D) = (D-m_1)(D-m_2)\cdots(D-m_n)$

تب

$$\frac{1}{f(D)}Q = \frac{1}{(D-m_1)(D-m_2)\cdots(D-m_n)}Q$$
$$= \frac{1}{(D-m_1)(D-m_2)\cdots(D-m_{n-1})}\left(e^{m_n x}\int Qe^{-m_n x}\,dx\right)$$

اسی طرز پر آگے بڑھنے پر ضروری خاص تکملہ حاصل ہو جاتا ہے۔

دوسرا طریقہ:

$$\frac{1}{f(D)}Q = \frac{1}{(D-m_1)(D-m_2)\cdots(D-m_n)}Q$$

جزوی کسروں (Partial Fractions) کی مدد سے

$$\frac{1}{f(D)}Q = \left\{\frac{A_1}{(D-m_1)} + \frac{A_2}{(D-m_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(D-m_n)}\right\}Q$$
$$= A_1e^{m_1x}\int Qe^{-m_1x}\,dx + A_2e^{m_2x}\int Qe^{-m_2x}\,dx + \cdots + A_ne^{m_nx}\int Qe^{-m_nx}\,dx$$

جو کہ ضروری خاص تکملہ ہے۔

مثال 1۔ مساوات $\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} + 6x = e^{4t}$ کو حل کرو۔

حل۔ اس مساوات کو ہم درجہ ذیل طریقہ سے بھی لکھ سکتے ہیں

$$(\mathrm{D}^2 - 5\mathrm{D} + 6)x = e^{4t}$$

یہاں $f(D) = \mathrm{D}^2 - 5\mathrm{D} + 6$ اور $Q = e^{4t}$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات (Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہے

$$m^2 - 5m + 6 = 0$$
$$\Rightarrow \qquad (m-2)(m-3) = 0$$
$$\Rightarrow \qquad m = 2, 3$$

اس لیے دی گئی مساوات $(\mathrm{D}^2 - 5\mathrm{D} + 6)x = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل (Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = c_1e^{2t} + c_2e^{3t}$$

اب ہم خاص تکملہ حاصل کریں گے۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$P.I. = \frac{1}{f(D)}Q$$

$$= \frac{1}{D^2 - 5D + 6} e^{4t}$$
$$= \frac{1}{(D-2)(D-3)} e^{4t}$$
ہم جانتے ہیں کہ $\frac{1}{D-m} Q = e^{mt} \int Q\, e^{-mt} dt$ اس لیے
$$P.I. = \frac{1}{(D-2)} \left\{ e^{3t} \int e^{4t}\, e^{-3t} dt \right\}$$
$$= \frac{1}{(D-2)} \left\{ e^{3t} \int e^{t}\, dt \right\}$$
$$= \frac{1}{(D-2)} \{ e^{3t} e^{t} \}$$
$$= \frac{1}{(D-2)} e^{4t}$$
$$= e^{2t} \int e^{4t}\, e^{-2t} dt$$
$$= e^{2t} \int e^{2t}\, dt$$
$$\Rightarrow \qquad P.I. = \frac{1}{2} e^{4t}$$
اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ طریقہ سے حاصل ہو گا
$$x = C.F. + P.I.$$
$$= c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + \frac{1}{2} e^{4t}$$
مثال2۔ مساوات $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x = 2t$ کو حل کریں۔

حل۔ اس مساوات کو ہم درجہ ذیل طریقہ سے بھی لکھ سکتے ہیں
$$(D^2 + D - 2)x = 2t$$
یہاں $f(D) = D^2 + D - 2$ اور $Q = 2t$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات(Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی
$$m^2 + m - 2 = 0$$
$$\Rightarrow \qquad (m+2)(m-1) = 0$$
$$\Rightarrow \qquad m = 1, -2$$
اس لیے دی گئی مساوات $(D^2 + D - 2)x = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل(Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا
$$C.F. = c_1 e^{t} + c_2 e^{-2t}$$
اب ہم خاص تکملہ حاصل کریں گے۔ ہم جانتے ہیں کہ
$$P.I. = \frac{1}{f(D)} Q$$
$$= \frac{1}{D^2 + D - 2} e^{4t}$$

$$= \frac{1}{(D+2)(D-1)} e^{4t}$$

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{1}{D-m} Q = e^{mt} \int Q\, e^{-mt} dt$ اس لیے

$$P.I. = \frac{1}{(D+2)} \left\{ e^{t} \int 2te^{-t}\, dt \right\}$$

$$= \frac{1}{(D+2)} 2e^{t} \left\{ -te^{-t} - \int (-1.\, e^{-t})\, dt \right\}$$

$$= \frac{1}{(D+2)} 2e^{t} (-te^{-t} - e^{-t})$$

$$= -\frac{1}{(D+2)} 2(t+1)$$

$$= -2e^{-2t} \int (t+1)\, e^{2t} dt$$

$$= -2e^{-2t} \left\{ (t+1) \frac{e^{2t}}{2} - \int \frac{e^{2t}}{2} dt \right\}$$

$$= -2e^{-2t} \left\{ (t+1) \frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{2t}}{4} \right\}$$

$$= -2e^{-2t} \frac{e^{2t}}{2} \left\{ (t+1) - \frac{1}{2} \right\}$$

$$\Rightarrow \qquad P.I. = -\left(t + \frac{1}{2} \right)$$

اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل ہو گا

$$x = C.F. + P.I.$$

$$= c_1 e^{t} + c_2 e^{-2t} - \left(t + \frac{1}{2} \right)$$

مثال 3۔ مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sec x$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ اس مساوات کو ہم درجہ ذیل طریقہ سے بھی لکھ سکتے ہیں

$$(\mathrm{D}^2 + 1)y = \sec x$$

یہاں $f(D) = \mathrm{D}^2 + 1$ اور $Q = \sec x$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات (Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$m^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad m = \pm i$$

اس لیے دی گئی مساوات $(\mathrm{D}^2 + 1)y = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل (Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

اب ہم خاص تکملہ حاصل کریں گے۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$P.I. = \frac{1}{f(D)} Q$$

$$= \frac{1}{D^2+1}\sec x$$
$$= \frac{1}{(D+i)(D-i)}\sec x$$
$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(D-i)} - \frac{1}{(D+i)}\right]\sec x$$
$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(D-i)}\sec x - \frac{1}{(D+i)}\sec x\right]$$

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{1}{D-m}Q = e^{mt}\int Q\, e^{-mt}dt$ اس لیے

$$P.I. = \frac{1}{2i}\left[e^{ix}\int \sec x\left(e^{-ix}\right)dx - e^{-ix}\int \sec x\left(e^{ix}\right)dx\right]$$
$$= \frac{1}{2i}\left[e^{ix}\int \frac{(\cos x - i\sin x)}{\cos x}dx - e^{-ix}\int \frac{(\cos x + i\sin x)}{\cos x}dx\right]$$
$$= \frac{1}{2i}\left[e^{ix}\int (1 - i\tan x)\,dx - e^{-ix}\int (1 + i\tan x)\,dx\right]$$
$$= \frac{1}{2i}\left[e^{ix}(x + i\log\cos x) - e^{-ix}(x - i\log\cos x)\right]$$
$$= \frac{1}{2i}\left[x\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) + i\log\cos x\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right]$$
$$= x\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) + \log\cos x\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)$$
$$\Rightarrow P.I. = x\sin x + \cos x\log\cos x$$

اس لیے عام حل ہو گا

$$y = C.F. + P.I.$$
$$= c_1\cos x + c_2\sin x + x\sin x + \cos x\log\cos x$$

مثال4۔ مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ اس مساوات کو درجہ ذیل طریقہ سے لکھتے ہیں

$$(D^2 - 2D + 1)y = e^x$$

یہاں $f(D) = D^2 - 2D + 1$ اور $Q = e^x$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات(Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$m^2 - 2m + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m-1)(m-1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = 1, 1$$

اس لیے دی گئی مساوات $(D^2 - 2D + 1)y = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل(Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = (c_1 + c_2x)e^x$$

اب ہم خاص تکملہ حاصل کریں گے۔ہم جانتے ہیں کہ

$$P.I. = \frac{1}{f(D)}Q$$

$$= \frac{1}{D^2 - 2D + 1} e^x$$
$$= \frac{1}{(D-1)(D-1)} e^x$$

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{1}{D-m} Q = e^{mx} \int Q\, e^{-mx} dx$ اس لیے

$$P.I. = \frac{1}{(D-1)} \left\{ e^x \int e^x e^{-x} dx \right\}$$
$$= \frac{1}{(D-1)} \left\{ e^x \int 1\, dx \right\}$$
$$= \frac{1}{(D-1)} x e^x$$
$$= e^x \int x e^x e^{-x} dx$$
$$= e^x \int x\, dx$$
$$\Rightarrow \qquad P.I. = \frac{x^2}{2} e^x$$

اس لیے عام حل ہو گا

$$y = C.F. + P.I.$$
$$= (c_1 + c_2 x) e^x + \frac{x^2}{2} e^x$$

10.2.2.1 $f(D)y = e^{ax}$ کا خاص تکملہ (Particular Integral of $f(D)y = e^{ax}$)

1. جب $f(a) \neq 0$

متواتر تفرق (Successive Differentiation) کی مدد سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$De^{ax} = ae^{ax}$$
$$D^2 e^{ax} = D(De^{ax}) = D(ae^{ax}) = a^2 e^{ax}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$D^n e^{ax} = a^n e^{ax}$$

اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ

$$f(D) e^{ax} = f(a) e^{ax}$$

عامل $\frac{1}{f(D)}$ کی مدد سے دونوں طرف عمل کرنے پر

$$\frac{1}{f(D)} \{ f(D) e^{ax} \} = \frac{1}{f(D)} \{ f(a) e^{ax} \}$$
$$\Rightarrow \qquad e^{ax} = \frac{1}{f(D)} \{ f(a) e^{ax} \}$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{1}{f(a)} e^{ax}$$

2. جب $f(a) = 0$

اگر $f(a) = 0$،تب $f(D)$ کا ایک جز ضربی $(D-a)$ ہو گا۔ فرض کرو کہ
$$f(D) = (D-a)^r \varphi(D)$$
جب کہ $\varphi(a) \neq 0$،تب
$$\frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{1}{(D-a)^r \varphi(D)} e^{ax}$$
$$= \frac{1}{(D-a)^r} \cdot \frac{1}{\varphi(a)} e^{ax}$$
$$= \frac{1}{\varphi(a)} \cdot \frac{x^r}{r!} e^{ax}$$
اس لیے جب $f(a) = 0$،تب $\frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{1}{\varphi(a)} \cdot \frac{x^r}{r!} e^{ax}$ ہو گا۔

اب ہم کچھ مثالوں کی مدد سے اوپر دیے گیے طریقہ کو سمجھتے ہیں۔

مثال 1۔ مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 2e^{4x}$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ اس مساوات کو ہم درجہ ذیل طریقہ سے بھی لکھ سکتے ہیں
$$(\mathrm{D}^2 - 6\mathrm{D} + 9)y = 2e^{4x}$$
$$\Rightarrow \quad (\mathrm{D}-3)^2 y = 2e^{4x}$$
یہاں $f(D) = (\mathrm{D}-3)^2$ اور $Q = 2e^{4x}$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات (Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی
$$(m-3)^2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = 3, 3$$
اس لیے دی گئی مساوات $(\mathrm{D}-3)^2 y = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل (Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا
$$C.F. = (c_1 + c_2 x)e^{3x}$$
اب ہم خاص تکملہ حاصل کریں گے۔ ہم جانتے ہیں کہ
$$P.I. = \frac{1}{f(D)} Q$$
$$= \frac{1}{(\mathrm{D}-3)^2} 2e^{4x}$$
ہم جانتے ہیں کہ جب $f(a) \neq 0$،تب $\frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{1}{f(a)} e^{ax}$، اس لیے
$$P.I. = \frac{1}{(4-3)^2} 2e^{4x}$$
$$\Rightarrow \quad P.I. = 2e^{4x}$$
اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ طریقہ سے حاصل ہو گا
$$x = C.F. + P.I.$$
$$= (c_1 + c_2 x)e^{3x} + 2e^{4x}$$

مثال2۔ مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{5x}$ کو حل کرو۔

حل۔ اس مساوات کو ہم درجہ ذیل طریقے سے بھی لکھ سکتے ہیں

$$(\mathrm{D}^2 - 3\mathrm{D} + 2)y = e^{5x}$$
$$\Rightarrow \quad (\mathrm{D} - 1)(\mathrm{D} - 2)y = e^{5x}$$

یہاں $f(D) = \mathrm{D}^2 - 3\mathrm{D} + 2$ اور $Q = e^{5x}$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات (Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$\Rightarrow \quad (m-1)(m-2) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = 1, 2$$

اس لیے دی گئی مساوات $(\mathrm{D}^2 - 3\mathrm{D} + 2)y = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل (Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = c_1e^x + c_2e^{2x}$$

اب ہم خاص تکملہ حاصل کریں گے۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$P.I. = \frac{1}{f(D)}Q$$
$$= \frac{1}{(\mathrm{D}-1)(\mathrm{D}-2)}e^{5x}$$

ہم جانتے ہیں کہ جب $f(a) \neq 0$، تب $\frac{1}{f(D)}e^{ax} = \frac{1}{f(a)}e^{ax}$، اس لیے

$$P.I. = \frac{1}{(5-1)(5-2)}e^{5x}$$
$$\Rightarrow \quad P.I. = \frac{1}{12}e^{5x}$$

اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ طریقہ سے حاصل ہو گا

$$y = C.F. + P.I.$$
$$= c_1e^x + c_2e^{2x} + \frac{1}{12}e^{5x}$$

مثال3۔ مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + a^2y = e^{ax}$ کو حل کریں۔

حل۔ اس مساوات کو ہم درجہ ذیل طریقہ سے بھی لکھ سکتے ہیں

$$(D^2 - 2aD + a^2)y = e^{ax}$$
$$\Rightarrow \quad (D-a)^2y = e^{ax}$$

یہاں $f(D) = (D-a)^2$ اور $Q = e^{ax}$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات (Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$\Rightarrow \quad (m-a)^2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = a, a$$

اس لیے دی گئی مساوات $(D-a)^2y = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل (Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = (c_1 + c_2x)e^{ax}$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$P.I. = \frac{1}{f(D)}Q$$
$$= \frac{1}{(D-a)^2}e^{ax}$$

ہم جانتے ہیں کہ جب $f(a) = 0$، تب $\frac{1}{f(D)}e^{ax} = \frac{1}{\varphi(a)} \cdot \frac{x^r}{r!}e^{ax}$، جب کہ $\varphi(a) \neq 0$ اس لیے

$$P.I. = \frac{x^2}{2!}e^{ax}$$
$$\Rightarrow \qquad P.I. = \frac{x^2}{2}e^{ax}$$

اس لیے عام حل ہو گا

$$y = C.F. + P.I.$$
$$= (c_1 + c_2x)e^{ax} + \frac{x^2}{2}e^{ax}$$

مثال4۔ مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = 2e^{3x}$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ اس مساوات کو ہم درجہ ذیل طریقہ سے بھی لکھ سکتے ہیں

$$(\mathrm{D}^2 - 4\mathrm{D} + 3)y = 2e^{3x}$$
$$\Rightarrow \qquad (\mathrm{D}-1)(\mathrm{D}-3)y = 2e^{3x}$$

یہاں $f(D) = \mathrm{D}^2 - 4\mathrm{D} + 3$ اور $Q = 2e^{3x}$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات (Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$(m-1)(m-3) = 0$$
$$\Rightarrow \qquad m = 1, 3$$

اس لیے دی گئی مساوات $(\mathrm{D}^2 - 4\mathrm{D} + 3)y = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل (Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = c_1e^x + c_2e^{3x}$$

اب ہم خاص تکملہ حاصل کریں گے۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$P.I. = \frac{1}{f(D)}Q$$
$$= \frac{1}{(\mathrm{D}-1)(\mathrm{D}-3)}2e^{3x}$$

چوں کہ $f(3) = 0$، اس لیے

$$P.I. = \frac{1}{(3-1)(\mathrm{D}-3)}2e^{3x}$$
$$= \frac{1}{(\mathrm{D}-3)^1}e^{3x}$$
$$= \frac{x^1}{1!}e^{3x} = xe^{3x}$$

اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل طریقہ سے حاصل ہو گا

$$y = C.F. + P.I.$$
$$= c_1e^x + c_2e^{3x} + xe^{3x}$$

مثال5۔ مساوات $\frac{d^4y}{dx^4} - 18\frac{d^2y}{dx^2} + 81y = 36e^{3x}$ کو حل کرو۔

حل۔ اس مساوات کو ہم درجہ ذیل طریقہ سے بھی لکھ سکتے ہیں

$$(\mathrm{D}^4 - 18\mathrm{D}^2 + 81)y = 36e^{3x}$$
$$\Rightarrow \quad (\mathrm{D}^2 - 9)(\mathrm{D}^2 - 9)y = 36e^{3x}$$

یہاں $f(D) = \mathrm{D}^4 - 18\mathrm{D}^2 + 81$ اور $Q = 36e^{3x}$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات(Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$(m^2 - 9)(m^2 - 9) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m^2 = 9, 9$$
$$\Rightarrow \quad m = \pm 3, \pm 3$$

اس لیے دی گئی مساوات $(\mathrm{D}^4 - 18\mathrm{D}^2 + 81)y = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل(Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = (c_1 + c_2x)e^{3x} + (c_3 + c_4x)e^{-3x}$$

اب ہم خاص تکملہ حاصل کریں گے۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$P.I. = \frac{1}{f(D)}Q$$
$$= \frac{1}{(\mathrm{D}^2 - 9)(\mathrm{D}^2 - 9)}36e^{3x}$$
$$= \frac{1}{(\mathrm{D} - 3)^2(\mathrm{D} + 3)^2}36e^{3x}$$

چوں کہ $f(3) = 0$، اس لیے

$$P.I. = \frac{1}{(\mathrm{D} - 3)^2(3 + 3)^2}36e^{3x}$$
$$= \frac{1}{(\mathrm{D} - 3)^2}e^{3x}$$
$$= \frac{x^2}{2!}e^{3x}$$

اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل طریقے سے حاصل ہو گا

$$y = C.F. + P.I.$$
$$= (c_1 + c_2x)e^{3x} + (c_3 + c_4x)e^{-3x} + \frac{x^2}{2!}e^{3x}$$

10.2.2.2 $f(D)y = \sin ax$ (یا $\cos ax$) کا خاص تکملہ

(Particular Integral of $f(D)y = \sin ax$ (یا $\cos ax$))

متواتر تفرق(Successive Differentiation) کی مدد سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$D\sin ax = a\cos ax$$
$$D^2\sin ax = D(D\sin ax) = D(a\cos ax) = -a^2\sin ax$$
$$D^3\sin ax = D(D^2\sin ax) = D(-a^2\sin ax) = -a^3\cos ax$$
$$D^4\sin ax = D(D^3\sin ax) = D(-a^3\cos ax) = a^4\sin ax$$
$$\dots\dots \qquad \dots\dots \qquad \dots\dots$$
$$\dots\dots \qquad \dots\dots \qquad \dots\dots$$
$$\dots\dots \qquad \dots\dots \qquad \dots\dots$$
$$D^n\sin ax = (-a^2)^n\sin ax$$

اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ اگر D کی صرف جفت قوت میں موجود ہوں تب اسے $\varphi(D^2)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ تب

$$\varphi(D^2)\sin ax = \varphi(-a^2)\sin ax$$

عامل $\frac{1}{\varphi(D^2)}$ کی مدد سے دونوں طرف عمل کرنے پر

$$\frac{1}{\varphi(D^2)}\{\varphi(D^2)\sin ax\} = \frac{1}{\varphi(D^2)}\{\varphi(-a^2)\sin ax\}$$
$$\Rightarrow \qquad \sin ax = \varphi(-a^2)\left\{\frac{1}{\varphi(D^2)}\sin ax\right\}$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{\varphi(D^2)}\sin ax = \frac{1}{\varphi(-a^2)}\sin ax$$

اسی طرح

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{\varphi(D^2)}\mathit{cos}\ ax = \frac{1}{\varphi(-a^2)}\cos ax$$

نوٹ: اگر $\varphi(-a^2) = 0$ اوپر دیا گیا طریقہ ناکام ہو جاتا ہے۔

اب ہم کچھ مثالوں کی مدد سے اوپر دیے گیے طریقہ کو سمجھتے ہیں۔

مثال1۔ مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \mathit{cos}\ 3x$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ اس مساوات کو ہم درجہ ذیل طریقے سے بھی لکھ سکتے ہیں

$$(\mathrm{D}^2 + 4)y = \mathit{cos}\ 3x$$

یہاں $f(D) = \mathrm{D}^2 + 4$ اور $Q = \mathit{cos}\ 3x$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات(Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$m^2 + 4 = 0$$
$$\Rightarrow \qquad m = \pm 2i$$

اس لیے دی گئی مساوات $(\mathrm{D}^2 + 4)y = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل(Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$P.I. = \frac{1}{f(D)}Q$$

$$= \frac{1}{D^2+4} \cos 3x$$

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{1}{\varphi(D^2)} \cos ax = \frac{1}{\varphi(-a^2)} \cos ax$ اس لیے

$$P.I. = \frac{1}{-9+4} \cos 3x$$

$$= \frac{1}{-5} \cos 3x$$

اس لیے عام حل ہو گا

$$y = C.F. + P.I.$$

$$= c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{5} \cos 3x$$

مثال2۔ مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sin 2x$ کو حل کرو۔

حل۔ اس مساوات کو ہم درجہ ذیل طریقے سے بھی لکھ سکتے ہیں

$$(D^2+1)y = \sin 2x$$

یہاں $f(D) = D^2 + 1$ اور $Q = \sin 2x$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات (Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$m^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = \pm i$$

اس لیے دی گئی مساوات $(D^2+1)y = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل (Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$P.I. = \frac{1}{f(D)} Q$$

$$= \frac{1}{D^2+1} \sin 2x$$

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{1}{\varphi(D^2)} \sin ax = \frac{1}{\varphi(-a^2)} \sin ax$ اس لیے

$$P.I. = \frac{1}{-4+1} \sin 2x$$

$$= \frac{1}{-3} \sin 2x$$

اس لیے عام حل ہو گا

$$y = C.F. + P.I.$$

$$= c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{3} \sin 2x$$

مثال3۔ مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^{2x} + 3 \sin x$ کو حل کریں۔

حل۔ اس مساوات کو ہم درجہ ذیل طریقے سے بھی لکھ سکتے ہیں

$$(\mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D} - 3)y = 2e^{2x} + 3\sin x$$
$$\Rightarrow \quad (\mathrm{D}+1)(\mathrm{D}-3)y = 2e^{2x} + 3\sin x$$

یہاں $f(D) = \mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D} - 3$ اور $Q = 2e^{2x} + 3\sin x$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات(Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$(m+1)(m-3) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = -1, 3$$

اس لیے دی گئی مساوات $(\mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D} - 3)y = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل(Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$$

اب ہم خاص تکملہ حاصل کریں گے۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$\begin{aligned}
P.I. &= \frac{1}{f(D)}Q \\
&= \frac{1}{\mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D} - 3}(2e^{2x} + 3\sin x) \\
&= \left(\frac{1}{\mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D} - 3}2e^{2x} + \frac{1}{\mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D} - 3}3\sin x\right) \\
&= \left(\frac{1}{2^2 - 2\times 2 - 3}2e^{2x} + \frac{1}{-(1)^2 - 2\mathrm{D} - 3}3\sin x\right) \\
&= \left(-\frac{2}{3}e^{2x} + \frac{1}{-2(\mathrm{D}+2)}3\sin x\right) \\
&= \left(-\frac{2}{3}e^{2x} - \frac{3}{2}\frac{(\mathrm{D}-2)}{(\mathrm{D}+2)(\mathrm{D}-2)}\sin x\right) \\
&= \left(-\frac{2}{3}e^{2x} - \frac{3}{2}\frac{(\mathrm{D}-2)}{(\mathrm{D}^2-4)}\sin x\right) \\
&= \left(-\frac{2}{3}e^{2x} - \frac{3}{2}\frac{(\mathrm{D}-2)}{(-(1)^2-4)}\sin x\right) \\
&= \left(-\frac{2}{3}e^{2x} + \frac{3}{10}(\mathrm{D}-2)\sin x\right) \\
&= -\frac{2}{3}e^{2x} + \frac{3}{10}\left(\frac{d}{dx}\sin x - 2\sin x\right) \\
&= -\frac{2}{3}e^{2x} + \frac{3}{10}(\cos x - 2\sin x)
\end{aligned}$$

اس لیے دی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل طریقے سے حاصل ہو گا

$$\begin{aligned}
y &= C.F. + P.I. \\
&= c_1e^{-x} + c_2e^{3x} - \frac{2}{3}e^{2x} + \frac{3}{10}(\cos x - 2\sin x)
\end{aligned}$$

10.2.2.3 $f(D)y = x^m$ کا خاص تکملہ (Particular Integral of $f(D)y = x^m$)

$\frac{1}{f(D)}x^m$ کو حاصل کرنے کے لیے درجہ ذیل طریقہ استعمال کرتے ہیں

I. ہم $f(D)$ میں سے سب سے کم درجہ کی رکن کو باہر لیتے ہیں تا کہ ڈنومنیٹر (Denominator) میں ذیل صورت بن جایے $[1+\varphi(D)]^n$ یا $[1-\varphi(D)]^n$، جہاں n ایک مثبت صحیح اعداد (Positive Integer) ہے۔

II. اب اس جز ضربی کو نیومریٹر (Numerator) میں لے جاتے ہیں جو کہ ذیل صورت میں ہو گا $[1+\varphi(D)]^{-n}$ یا $[1-\varphi(D)]^{-n}$

III. اب دو رکنی قضیہ (Binomial Theorem) کی مدد سے $[1\pm\varphi(D)]^{-n}$ کی توسیع کرتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

سوالوں کو آسانی کے ساتھ حل کرنے کے لیے کچھ ضابطے ذیل ہیں:

1. $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$
2. $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$
3. $(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots$
4. $(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$

چوں کہ x^m کے سبھی m سے زیادہ رتبہ کے مشتق صفر ہو جاتے ہیں، اس لیے $[1+\varphi(D)]^{-n}$ کو D^m تک ہی توسیع کرتے ہیں۔ کبھی کبھی $\frac{1}{f(D)}$ کو جزوی کسروں میں تبدیل کر خاص تکملہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس کے ہر ایک جز کو D کی گھٹتی ہوئی قوت میں توسیع کرنے کے بعد اوپر دیے گیے طریقہ کے مطابق خاص تکملہ حاصل کر لیتے ہیں۔

مثال 1۔ مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = x^2$ کو حل کرو۔

حل۔ اس مساوات کو ہم درجہ ذیل طریقے سے بھی لکھ سکتے ہیں

$$(\mathrm{D}^2-4)y = x^2$$

یہاں $f(D) = \mathrm{D}^2 - 4$ اور $Q = x^2$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات (Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$m^2 - 4 = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = \pm 2$$

اس لیے دی گئی مساوات $(\mathrm{D}^2-4)y = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل (Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = c_1e^{-2x} + c_2e^{2x}$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$P.I. = \frac{1}{f(D)}Q$$
$$= \frac{1}{\mathrm{D}^2-4}x^2$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{1}{\left(1-\frac{D^2}{4}\right)}x^2$$
$$= -\frac{1}{4}\left(1-\frac{D^2}{4}\right)^{-1}x^2$$

دور کنی قضیہ (Binomial Theorem) کی مدد سے ہمیں حاصل ہو گا

$$= -\frac{1}{4}\left\{1+\frac{D^2}{4}+\left(\frac{D^2}{4}\right)^2+\cdots\right\}x^2$$
$$= -\frac{1}{4}\left\{x^2+\frac{D^2x^2}{4}+\frac{D^4x^2}{16}+\cdots\right\}$$
$$= -\frac{1}{4}\left\{x^2+\frac{2}{4}+0+\cdots\right\}$$
$$= -\frac{1}{8}(2x^2+1)$$

اس لیے دی گئی مساوات کا عام حل ہو گا

$$y = C.F.+P.I.$$
$$= c_1e^{-2x}+c_2e^{2x}-\frac{1}{8}(2x^2+1)$$

مثال2۔ مساوات $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-2y = x+\sin x$ کا حل معلوم کریں۔

حل۔ اس مساوات کو ہم درجہ ذیل طریقے سے بھی لکھ سکتے ہیں

$$(D^2+D-2)y = x+\sin x$$

یہاں $f(D) = D^2+D-2$ اور $Q = x+\sin x$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات (Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$m^2+m-2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m+2)(m-1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = 1, -2$$

اس لیے دی گئی مساوات $(D^2+D-2)y = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل (Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = c_1e^x+c_2e^{-2x}$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$P.I. = \frac{1}{f(D)}Q$$
$$= \frac{1}{D^2+D-2}(x+\sin x)$$
$$= \frac{1}{D^2+D-2}x+\frac{1}{D^2+D-2}\sin x$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{D^2+D}{2}\right)}x+\frac{1}{-(1)^2+D-2}\sin x$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1-\frac{\mathrm{D}^2+\mathrm{D}}{2}\right)^{-1} x+\frac{1}{\mathrm{D}-3}\sin x$$
$$= -\frac{1}{2}\left\{1+\frac{\mathrm{D}^2+\mathrm{D}}{2}+\left(\frac{\mathrm{D}^2+\mathrm{D}}{2}\right)^2+\cdots\right\}x+\frac{\mathrm{D}+3}{(\mathrm{D}-3)(\mathrm{D}+3)}\sin x$$
$$= -\frac{1}{2}\left\{x+\frac{\mathrm{D}^2+\mathrm{D}}{2}x+\left(\frac{\mathrm{D}^2+\mathrm{D}}{2}\right)^2 x+\cdots\right\}+\frac{\mathrm{D}+3}{\mathrm{D}^2-9}\sin x$$
$$= -\frac{1}{2}\left(x+\frac{0+1}{2}+0+\cdots\right)+\frac{\mathrm{D}+3}{-(1)^2-9}\sin x$$
$$= -\frac{1}{4}(2x+1)-\frac{1}{10}(\mathrm{D}\sin x+3\sin x)$$
$$= -\frac{1}{4}(2x+1)-\frac{1}{10}(\cos x+3\sin x)$$

اس لیے دی گئی مساوات کا عام حل ہو گا

$$y = C.F.+P.I.$$
$$= c_1e^x+c_2e^{-2x}-\frac{1}{4}(2x+1)-\frac{1}{10}(\cos x+3\sin x)$$

مثال3۔ مساوات $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y = x^3+2x^2$ کو حل کرو۔

حل۔ اس مساوات کو ہم درجہ ذیل طریقے سے بھی لکھ سکتے ہیں

$$(\mathrm{D}^2+\mathrm{D}+1)y = x^3+2x^2$$

یہاں $f(D) = \mathrm{D}^2+\mathrm{D}+1$ اور $Q = x^3+2x^2$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات(Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$m^2+m+1 = 0$$
$$\Rightarrow \qquad m = \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}$$
$$= -\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

اس لیے دی گئی مساوات $(\mathrm{D}^2+\mathrm{D}+1)y = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل(Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$P.I. = \frac{1}{f(D)}Q$$
$$= \frac{1}{\mathrm{D}^2+\mathrm{D}+1}(x^3+2x^2)$$
$$= \frac{1}{(1+\mathrm{D}^2+\mathrm{D})}(x^3+2x^2)$$
$$= \{1+(\mathrm{D}^2+\mathrm{D})\}^{-1}(x^3+2x^2)$$

$$= [1 - (D^2 + D) + \{(D^2 + D)\}^2 - \{(D^2 + D)\}^3 + \cdots](x^3 + 2x^2)$$
$$= (1 - D^2 - D + D^4 + 2D^3 + D^2 - D^6 - D^3 - 3D^4 - 3D^5 + \cdots)(x^3 + 2x^2)$$
$$= \{x^3 + 2x^2 - D(x^3 + 2x^2) + D^3(x^3 + 2x^2)\}$$
$$= \{x^3 + 2x^2 - 3x^2 - 4x + (6 + 0)\}$$
$$= x^3 - x^2 - 4x + 6$$

اس لیے دی گئی مساوات کا عام حل ہو گا

$$y = C.F. + P.I.$$
$$= e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + x^3 - x^2 - 4x + 6$$

مثال4۔ مساوات $\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{d^2y}{dx^2} = 6$ کو حل کریں۔

حل۔ اس مساوات کو ہم درجہ ذیل طریقے سے بھی لکھ سکتے ہیں

$$(D^4 - D^2)y = 6$$

یہاں $f(D) = D^4 - D^2$ اور $Q = 6$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات (Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$m^4 - m^2 = 0$$
$$\Rightarrow \qquad m^2(m^2 - 1) = 0$$
$$\Rightarrow \qquad m = 0, 0, 1, -1$$

اس لیے دی گئی مساوات $(D^4 - D^2)y = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل (Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = (c_1 + c_2x)e^0 + (c_3e^x + c_4e^{-x})$$
$$= c_1 + c_2x + (c_3e^x + c_4e^{-x})$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$P.I. = \frac{1}{f(D)}Q$$
$$= \frac{1}{D^4 - D^2}6x^0$$
$$= \frac{6}{-D^2}\left(\frac{1}{1 - D^2}\right)x^0$$
$$= -\frac{6}{D^2}[1 - D^2]^{-1}x^0$$
$$= -\frac{6}{D^2}[1 + (D^2) + \cdots]x^0$$
$$= -\frac{6}{D^2}(x^0 - D^2x^0 + \cdots)$$
$$= -\frac{6}{D^2}(1 - 0 + \cdots)$$
$$= -\frac{6}{D}\int 1dx$$
$$= -6\int xdx$$

$$= -6\frac{x^2}{2}$$
$$= -3x^2$$

اس لیے دی گئی مساوات کا عام حل ہو گا

$$y = C.F. + P.I.$$
$$= c_1 + c_2x + (c_3e^x + c_4e^{-x}) - 3x^2$$

10.2.2.4 $f(D)y = e^{ax} \cdot V$ کا خاص تکملہ (Particular Integral of $f(D)y = e^{ax} \cdot V$)

فرض کرو کہ x کا کوئی تفاعل v ہے۔ متواتر تفرق (Successive Differentiation) کی مدد سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$D(e^{ax} \cdot v) = e^{ax} \cdot Dv + ae^{ax} \cdot v$$
$$= e^{ax}(D + a)v$$
$$D^2(e^{ax} \cdot v) = D\{e^{ax}(D + a)v\}$$
$$= e^{ax} \cdot D(D + a)v + ae^{ax}(D + a)v$$
$$= e^{ax}(D + a)^2v$$
$$D^3(e^{ax} \cdot v) = D\{e^{ax}(D + a)^2v\}$$
$$= e^{ax} \cdot D(D + a)^2v + ae^{ax}(D + a)^2v$$
$$= e^{ax}(D + a)^3v$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$D^n(e^{ax} \cdot v) = e^{ax}(D + a)^nv$$

اس سے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ

$$f(D)e^{ax} \cdot v = e^{ax} \cdot f(D + a)v \qquad \text{..........(1)}$$

فرض کرو کہ $f(D + a)v = V$ تب چوں کہ x کا تفاعل v ہے، تب V بھی x کا ایک تفاعل ہو گا۔ اس لیے

$$v = \frac{1}{f(D + a)}V$$

اس لیے، مساوات (1) سے

$$f(D)e^{ax}\frac{1}{f(D + a)}V = e^{ax} \cdot f(D + a)\frac{1}{f(D + a)}V = e^{ax} \cdot V$$

عامل $\frac{1}{f(D)}$ کی مدد سے دونوں طرف عمل کرنے پر

$$\frac{1}{f(D)}e^{ax} \cdot V = \frac{1}{f(D)}\left\{f(D)e^{ax}\frac{1}{f(D + a)}V\right\}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{f(D)}e^{ax} \cdot V = e^{ax}\frac{1}{f(D + a)}V$$

مثال 1۔ مساوات $(D - 2)^3y = x^2e^{2x}$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(D - 2)^3y = x^2e^{2x}$$

یہاں $f(D) = (D-2)^3$ اور $Q = x^2 e^{2x}$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات(Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$(m-2)^3 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad m = 2, 2, 2$$

اس لیے دی گئی مساوات $(D^2+4)y = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل(Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{2x}$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$P.I. = \frac{1}{f(D)} Q$$

$$= \frac{1}{(D-2)^3} x^2 e^{2x}$$

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{1}{f(D)} e^{ax} \cdot V = e^{ax} \frac{1}{f(D+a)} V$ اس لیے

$$= e^{2x} \frac{1}{(D+2-2)^3} x^2$$

$$= e^{2x} \frac{1}{D^3} x^2$$

$$= e^{2x} \int\int\int x^2\, dx$$

$$= e^{2x} \int\int \frac{x^3}{3} dx$$

$$= e^{2x} \int \frac{x^4}{12} dx$$

$$= e^{2x} \frac{x^5}{60}$$

اس لیے دی گئی مساوات کا عام حل ہو گا

$$y = C.F. + P.I.$$

$$= (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{2x} + \frac{1}{60} x^5 e^{2x}$$

مثال2۔ مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 5y = e^{2x} \sin x$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(D^2 - 2D + 5)y = e^{2x} \sin x$$

یہاں $f(D) = D^2 - 2D + 5$ اور $Q = e^{2x} \sin x$ اور $a = 2$ ہے۔

اس مساوات کے لیے معاون مساوات(Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$(m^2 - 2m + 5) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad m = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad m = 1 \pm 2i$$

اس لیے دی گئی مساوات $(D^2 - 2D + 5)y = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل (Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$P.I. = \frac{1}{f(D)}Q$$

$$= \frac{1}{D^2 - 2D + 5}e^{2x}\sin x$$

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{1}{f(D)}e^{ax} \cdot V = e^{ax}\frac{1}{f(D+a)}V$ اس لیے

$$P.I. = e^{2x}\frac{1}{(D+2)^2 - 2(D+2) + 5}\sin x$$

$$= e^{2x}\frac{1}{D^2 + 2D + 5}\sin x$$

D^2 کی جگہ $-(1)^2$ درج کرنے پر

$$= e^{2x}\frac{1}{-(1)^2 + 2D + 5}\sin x$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\frac{D-2}{(D+2)(D-2)}\sin x$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\frac{D-2}{(D^2-4)}\sin x$$

D^2 کی جگہ $-(1)^2$ درج کرنے پر

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\frac{D-2}{-(1)^2-4}\sin x$$

$$= -\frac{1}{10}e^{2x}(D\sin x - 2\sin x)$$

$$= -\frac{1}{10}e^{2x}(\cos x - 2\sin x)$$

اس لیے دی گئی مساوات کا عام حل ہو گا

$$y = C.F. + P.I.$$

$$= e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) - \frac{1}{10}e^{2x}(\cos x - 2\sin x)$$

مثال3۔ مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = x\sin x$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(D^2 + 2D + 1)y = x\sin x$$

یہاں $f(D) = D^2 + 2D + 1$ اور $Q = x\sin x$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات (Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$(m^2 + 2m + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad m = -1, -1$$

اس لیے دی گئی مساوات $(\mathrm{D}^2 + 2\mathrm{D} + 1)y = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل (Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = (c_1 + c_2 x)e^{-x}$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$P.I. = \frac{1}{f(D)} Q$$

$$= \frac{1}{\mathrm{D}^2 + 2\mathrm{D} + 1} x \sin x$$

$$= \text{کا خیالی حصہ } \frac{1}{(\mathrm{D}+1)^2} x e^{ix}$$

$$= \text{کا خیالی حصہ } e^{ix} \frac{1}{(\mathrm{D}+i+1)^2} x$$

$$= \text{کا خیالی حصہ } e^{ix} \left(\frac{1}{1+i}\right)^2 \left\{\frac{1}{\left(1+\frac{\mathrm{D}}{i+1}\right)^2}\right\} x$$

$$= \text{کا خیالی حصہ } e^{ix} \frac{1}{2i} \left(1+\frac{\mathrm{D}}{i+1}\right)^{-2} x$$

$$= \text{کا خیالی حصہ } e^{ix} \frac{i}{2i^2} \left(1 - \frac{2\mathrm{D}}{i+1} + \frac{3\mathrm{D}^2}{(i+1)^2} - \cdots\right) x$$

$$= \text{کا خیالی حصہ } e^{ix} \frac{-1}{2} i \left(x - \frac{2Dx}{i+1} + \frac{3D^2x}{(i+1)^2} - \cdots\right) \qquad [\because i^2 = -1]$$

$$= \text{کا خیالی حصہ } e^{ix} \frac{-1}{2} i \left(x - \frac{2}{i+1} + 0\right)$$

$$= \text{کا خیالی حصہ } e^{ix} \frac{-1}{2} i \left(x - \frac{2(1-i)}{1-i^2}\right)$$

$$= \text{کا خیالی حصہ } e^{ix} \frac{-1}{2} \{i(x-1) - 1\} \qquad [\because i^2 = -1]$$

$$= \text{کا خیالی حصہ } \frac{-1}{2} (\cos x + i \sin x)\{i(x-1) - 1\}$$

$$= \text{کا خیالی حصہ } \frac{-1}{2} [\{-\cos x - (x-1)\sin x\} + i\{(x-1)\cos x - \sin x\}]$$

$$= \frac{-1}{2} \{(x-1)\cos x - \sin x\}$$

$$= \frac{1}{2} \{(1-x)\cos x + \sin x\}$$

اس لیے دی گئی مساوات کا عام حل ہو گا

$$y = C.F. + P.I.$$

$$= (c_1 + c_2 x)e^{-x} + \frac{1}{2}\{(1-x)\cos x + \sin x\}$$

10.3 اکتسابی نتائج(Learning Outcomes)

کسی تفرقی مساوات $f(D)y = Q$ کا خاص تکملہ دو طریقوں سے حاصل کیا جاسکتا ہے:

1. فرض کرو کہ $f(D) = D - m$ تب خاص تکملہ $\frac{1}{D-m}Q = e^{mx}\int Qe^{-mx}\,dx$

2. فرض کرو کہ $f(D) = (D - m_1)(D - m_2)\cdots(D - m_n)$ تب خاص حل

$$\frac{1}{(D - m_1)(D - m_2)\cdots(D - m_n)}Q = \frac{1}{(D - m_1)(D - m_2)\cdots(D - m_{n-1})}e^{m_n x}\int Qe^{-m_n x}\,dx$$

اسی انداز میں آگے بڑھنے پر ضروری خاص تکملہ حاصل ہو جاتا ہے۔

اوپر دی گئی صورت میں ہم درجہ ذیل طریقہ سے بھی دی تفرقی مساوات کا خاص تکملہ حاصل کر سکتے ہیں

$$\frac{1}{(D - m_1)(D - m_2)\cdots(D - m_n)}Q = \left\{\frac{A_1}{D - m_1} + \frac{A_2}{D - m_2} + \cdots + \frac{A_n}{D - m_n}\right\}Q$$
$$= \left\{A_1 e^{m_1 x}\int Qe^{-m_1 x}\,dx + A_2 e^{m_2 x}\int Qe^{-m_2 x}\,dx + \cdots + A_n e^{m_n x}\int Qe^{-m_n x}\,dx\right\}$$

3. جب $Q = e^{ax}$ اور $f(a) \neq 0$، تب خاص حل

$$\frac{1}{f(D)}e^{ax} = \frac{1}{f(a)}e^{ax}$$

اگر $Q = e^{ax}$ اور $f(a) = 0$ ہے، تب $f(D)$ کا ایک جزو ضربی $D - a$ ہو گا، تب ہم مان لیتے ہیں کہ

$$f(D) = (D - a)^k \varphi(D)$$

جہاں $\varphi(a) \neq 0$، تب خاص حل

$$\frac{1}{f(D)}e^{ax} = \frac{1}{\varphi(a)}\cdot\frac{x^k}{k!}e^{ax}$$

4. جب $Q = \sin ax$، تب خاص حل

اگر D کی صرف جفت قوت $f(D)$ میں موجود ہوں تو اسے $\varphi(D^2)$ سے ظاہر کرتے ہیں تب

$$\frac{1}{\varphi(D^2)}\sin ax = \frac{1}{\varphi(-a^2)}\sin ax$$

اور اسی طرح

$$\frac{1}{\varphi(D^2)}\cos ax = \frac{1}{\varphi(-a^2)}\cos ax$$

5. جب $Q = e^{ax}\cdot V$، جب کہ x کا تفاعل V ہو

$$\frac{1}{f(D)}e^{ax}\cdot V = e^{ax}\frac{1}{f(D + a)}V$$

10.4 کلیدی الفاظ(Keywords)

خاص حل، اتمامی تفاعل، معاون مساوات، عامل، عمل

10.5 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

10.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = x \sin x$ کا معاون مساوات لکھو۔
2. مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cos 2x$ کے لیے اتمامی تفاعل لکھو۔
3. اگر کسی تفرقی مساوات کے سبھی روٹس الگ الگ ہوں تو ان کے لیے اتمامی تفاعل کا عام ضابطہ لکھو۔
4. اگر رتبہ تین کی تفرقی مساوات کے سبھی روٹس برابر ہوں تو ان کے لیے اتمامی تفاعل کا عام ضابطہ لکھو۔
5. اگر رتبہ دو کی تفرقی مساوات کے روٹس $\alpha \pm i\beta$ ہوں تو ان کے لیے اتمامی تفاعل کا عام ضابطہ لکھو۔

10.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

کسی مناسب طریقہ سے درجہ ذیل تفرقی مساوات کا حل معلوم کرو:

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cos 2x$
2. $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = \sec ax$
3. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \tan 2x$
4. $\frac{d^2y}{dx^2} - y = e^x$
5. $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = \sec 3x$
6. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sec^2 x$
7. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sin 2x$
8. $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} - 4y = 6e^x$
9. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^{2x}$
10. $\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx} + 1\right)\left(\frac{dy}{dx} - 1\right)^3 y = 12e^x$
11. $3\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 14y = e^{2x}$
12. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$
13. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 4y = 5e^x$

14. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 3e^x + \sin 2x$
15. $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - y = 25\cos 2x$
16. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = \sin 2x$
17. $\frac{d^4y}{dx^4} - y = 15\sin 2x$
18. $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = \cos 3x$
19. $\frac{d^2y}{dx^2} + 16y = 24\sin 4x$

10.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^x - 10\sin x$ کو حل کرو جب کہ دیا ہے $y(0) = 2$ اور $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 4$
2. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 13y = 5\sin 2x$ کو حل کرو جب کہ دیا ہے $y(0) = 1$ اور $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = -2$
3. $\frac{d^3y}{dx^3} + 8y = x^4 + 2x + 1$ کو حل کرو۔
4. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 6x$ کو حل کرو۔
5. $\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 2x^2$ کو حل کرو۔
6. $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = x$ کو حل کرو۔
7. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 2x$ کو حل کرو۔
8. $\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} = 1 + x^2$ کو حل کرو۔
9. $\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = e^{2x} + x^2 + x$ کو حل کرو۔
10. $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 2x^2 + 1$ کو حل کرو۔
11. $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 5x = 10$ کو حل کرو جب کہ دیا ہے $x(0) = 0$ اور $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = 0$
12. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{2x}\sin x$ کو حل کرو۔
13. $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$ کو حل کرو۔
14. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = x^3e^{2x}$ کو حل کرو۔
15. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = e^x$ کو حل کرو۔
16. $\frac{d^2y}{dx^2} - y = e^x\sin 3x$ کو حل کرو۔
17. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = x^2e^{3x}$ کو حل کرو۔
18. $\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + y = x^2e^{-x}$ کو حل کرو۔

19. $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 8xe^x$ کو حل کرو۔

20. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 4y = e^x \sin 2x$ کو حل کرو۔

21. $\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = xe^{-2x}$ کو حل کرو۔

22. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = e^x \cos 2x + \cos 3x$ کو حل کرو۔

23. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 4y = e^x \cos x$ کو حل کرو۔

24. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = x \sin x$ کو حل کرو۔

25. $\frac{d^3y}{dx^3} - 7\frac{dy}{dx} - 6y = e^{2x}(1 + x)$ کو حل کرو۔

26. $\frac{d^4y}{dx^4} - y = x^2 \sin x$ کو حل کرو۔

27. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 12y = e^{2x}(x - 1)$ کو حل کرو۔

28. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = x \cos 2x$ کو حل کرو۔

29. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 4y = e^x \sin x$ کو حل کرو۔

30. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = xe^x \sin x$ کو حل کرو۔

جوابات:

10.5.1 معروضی سوالات کے جوابات

1. $\mathrm{D}^2 + 2\mathrm{D} + 1 = 0$
2. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$
3. $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \cdots + c_n e^{m_n x}$
4. $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^{mx}$
5. $y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

10.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{3}\cos 2x$
2. $y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax + \frac{x}{a}\sin ax + \frac{1}{a^2}\cos ax \log(\cos ax)$
3. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x \log\left|\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|$
4. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x$
5. $y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{x}{3}\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x \log(\cos 3x)$
6. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \sin x \log\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - 1$

$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{3}\sin 2x$ .7

$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x} - e^{x}$ .8

$y = \left(c_1 + c_2 x + \frac{x^2}{2}\right) e^{2x}$ .9

$y = (c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 x)e^{2x} + (c_4 + c_5 x + c_6 x^2)e^{-x} + x^3 e^{x}$ .10

$y = c_1 e^{-\frac{7}{3}x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{13} x e^{2x}$ .11

$y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_1 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + e^{-x}$ .12

$y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{x} + x e^{x}$ .13

$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - e^{x}$ .14

$y = c_1 e^{3x} + (c_2 + c_3 x)e^{-x} - (2\sin 2x + \cos 2x)$ .15

$y = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + \frac{1}{8}\cos 2x$ .16

$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x + \sin 2x$ .17

$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{130}(7\cos 3x + 9\sin 3x)$ .18

$y = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x - 3x \cos 4x$ .19

10.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

$y = \frac{3}{2}e^{3x} + 2e^{-x} - \frac{1}{2}e^{x} + 2\sin x - \cos x$ .1

$y = \frac{1}{29}\left[e^{-2x}\left(37\cos 3x - \frac{2}{3}\sin 3x\right) + (9\sin 2x - 8\cos 2x)\right]$ .2

$y = c_1 e^{-2x} + e^{x}\left(c_2 \cos\sqrt{3}x + c_3 \sin\sqrt{3}x\right) + \frac{1}{8}(x^4 - x + 1)$ .3

$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} - \left(x + \frac{1}{6}\right)$ .4

$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x} + \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{7x}{2}$ .5

$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{6}\left(x + \frac{5}{6}\right)$ .6

$y = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + x - 1$ .7

$y = c_1 + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-2x} - \frac{1}{6}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{6} + \frac{25x}{18}\right)$ .8

$y = c_1 + (c_2 + c_3 x)e^{-x} + \frac{1}{18}e^{2x} + \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x$ .9

$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 4$ .10

$x = 1 + 2t - 3t^2 - e^{-3t}$ .11

$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{170}e^{2x}(7\cos x - 11\sin x)$ .12

$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} - x e^{x}$ .13

$$y = (c_1 + c_2x)e^{2x} + \frac{1}{20}x^5e^{2x} .14$$

$$y = c_1e^{-2x} + c_2e^x + \frac{1}{3}xe^x .15$$

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^x - \frac{1}{39}e^x(2\cos 3x + 3\sin 3x) .16$$

$$y = (c_1 + c_2x)e^x + \frac{1}{8}e^{3x}(2x^2 - 4x + 3) .17$$

$$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{-x} + \frac{1}{8}x^5e^{-x} .18$$

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^x + 2e^x(x^2 - x) .19$$

$$y = e^{-x}\left(c_1\cos\sqrt{3}x + c_2\sin\sqrt{3}x\right) + \frac{1}{73}e^x(3\sin 2x - 8\cos 2x) .20$$

$$y = c_1e^x + (c_2 + c_3x)e^{-2x} - \frac{1}{18}(x^3 + x^2)e^{-2x} .21$$

$$y = c_1e^{3x} + c_2e^x - \frac{1}{8}e^x(\cos 2x + \sin 2x) - \frac{1}{30}(\cos 3x + 2\sin 3x) .22$$

$$y = e^x\left(c_1\cos\sqrt{3}x + c_2\sin\sqrt{3}x\right) + \frac{1}{2}e^x\cos x .23$$

$$y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + \frac{1}{9}(3x\sin 2x - 2\cos x) .24$$

$$y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x} + c_3e^{3x} - \left(\frac{x}{12} + \frac{17}{144}\right)e^{2x} .25$$

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^x + c_3\cos x + c_4\sin x + \frac{1}{6}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{5x}{2}\right)\cos x - \frac{3}{8}x^2\sin x .26$$

$$y = c_1e^{-6x} + c_2e^{2x} + \frac{e^{2x}}{32}(2x^2 - 3) .27$$

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + \frac{x}{20}(3\sin 2x - \cos x) + \frac{1}{25}\left(3\cos 2x - \frac{7}{8}\sin 2x\right) .28$$

$$y = e^x\left(c_1\cos\sqrt{3}x + c_2\sin\sqrt{3}x\right) + \frac{1}{2}e^x\sin x .29$$

$$y = (c_1 + c_2x)e^{2x} - e^x(2\cos x + x\sin 2x) .30$$

10.6 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Text Book of Differential Equations, Khalil Ahmad, Real World Education Publishers, New Delhi
2. Ordinary and Partial Differential Equations- Rai Singhania, S.Chand & Co., New Delhi
3. A Text Book of B.Sc. (Mathematics), Volume –I , V. Venkateshwara Rao and others, S. Chand & Company

اکائی 11۔ متغیر ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساواتیں

(Homogeneous Linear Differential Equations with Variable Coefficients)

اکائی کے اجزا

11.0 تمہید (Introduction)

اس اکائی میں ہم متغیر ضریب کی متجانس تفرقی مساوات کو حل کرنے کے کچھ طریقوں کو سمجھیں گے۔ اس کے لیے ہم غیر تابع متغیر x کو دوسرے متغیر z کی رکن میں تبدیل کرتے ہیں۔ اس کے لیے مان لیتے ہیں کہ $x = e^z$ ، اور $\frac{d}{dz}$ کی جگہ D رکھیں، تب

$$\frac{dx}{dz} = e^z = x$$

$$Dy = \frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dz} = x\frac{dy}{dx}$$

اسی طرح

$$\begin{aligned}
D^2y &= \frac{d^2y}{dz^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)\frac{dx}{dz} \\
&= \left\{x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\right\}x \\
&= \left\{x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad x^2\frac{d^2y}{dx^2} &= D^2y - x\frac{dy}{dx} \\
&= D^2y - Dy \\
&= D(D-1)y
\end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned}
D^3y &= \frac{d^3y}{dz^3} = \frac{d}{dz}\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx}\right)\frac{dx}{dz} \\
&= \left\{x^2\frac{d^3y}{dx^3} + 2x\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\right\}x \\
&= \left\{x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 3x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad x^3\frac{d^3y}{dx^3} &= D^3y - 3x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} \\
&= D^3y - 3D(D-1)y - Dy \\
&= D^3y - 3D^2y + 2Dy \\
&= D(D^2 - 3D + 2)y \\
&= D(D-1)(D-2)y
\end{aligned}$$

اسی طرز پر آگے بڑھتے ہوئے، ہمیں درجہ ذیل مساوات حاصل ہو جاتی ہے

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n} = D(D-1)(D-2)\cdots(D-n+1)y$$

11.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ متغیر ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساوات کی معیاری شکل سے واقفیت کے ساتھ ان کا حل بھی حاصل کر سکیں۔

11.2 متغیر ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساواتیں

(Homogeneous Linear Differential Equations with Variable Coefficients)

تفرقی مساوات کی درجہ ذیل شکل

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + A_2 x^{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + A_{n-1} x \frac{dy}{dx} + A_n y = Q$$

متغیر ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساوات کہلاتی ہے، جہاں A_1، A_2، $\cdots$، A_n مستقلات ہیں اور x کا کوئی تفاعل Q ہے۔اس مساوات کا حل حاصل کرنے کے لیے $x = e^z$ رکھتے ہیں اور $x\frac{dy}{dx} = Dy, x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y, x^3 \frac{d^3y}{dx^3} = D(D-1)(D-2)y$ اور اسی طرح $x^n \frac{d^n y}{dx^n} = D(D-1)(D-2)\cdots(D-n+1)y$ کرنے پر مساوات مستقل ضریب کی خطی تفرقی مساوات میں بدل جاتی ہے جس کا حل گزشتہ اکائی میں بتایے گیے طریقوں سے حاصل کرسکتے ہیں۔

11.2.1 متغیر ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساوات کے حل کے عملی قاعدے

(Working Rules to Solve Homogeneous Linear Differential Equations with Variable Coefficients)

پہلی صورت: فرض کرو کہ

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + A_2 x^{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + A_{n-1} x \frac{dy}{dx} + A_n y = Q \qquad .....(1)$$

متغیر ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساوات ہے۔اس کا حل حاصل کرنے کے لیے درجہ ذیل اقدامات پر عمل کریں:

I. x کی جگہ e^z یا $\log x = z$ لیں اور $\frac{d}{dz} = D$

II. $x\frac{dy}{dx}$ کی جگہ Dy، $x^2\frac{d^2y}{dx^2}$ کی جگہ $D(D-1)y$ اور $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} = D(D-1)(D-2)y$ درج کریں اور اسی طرح آگے کے ارکان میں بھی بدلاؤ کریں۔ فرض کرو کہ اب مساوات درجہ ذیل شکل میں ہے

$$f(D)y = R \qquad .....(2)$$

جہاں R کسی متغیر z کا تفاعل ہے۔

III. گزشتہ اکائی کے طریقوں کی مدد سے اس مساوات کا حل حاصل کریں۔ فرض کرو کہ اس کا حل ہے

$$y = f(z) \qquad .....(3)$$

IV. مساوات(3) میں z کی جگہ $\log x$ درج کریں۔اب ہمیں حاصل ہو گا

$$y = F(\log x)$$

جو کہ دی گئی متجانس خطی تفرقی مساوات کا حل ہو گا۔

اب ہم کچھ مثالوں کی مدد سے اس طریقہ کو سمجھیں گے۔

مثال1۔ مساوات $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=\log x^2$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=\log x^2 \qquad \text{.....(1)}$$

سب سے پہلے ہم مساوات (1) کو مستقل ضریب کے ساتھ خطی تفرقی مساوات میں تبدیل کرتے ہیں۔ اس کے لیے دی گئی مساوات میں x کی جگہ e^z یا $\log x=z$ لیں اور $x\frac{dy}{dx}$ کی جگہ Dy اور $x^2\frac{d^2y}{dx^2}$ کی جگہ $D(D-1)y$ رکھتے ہیں۔ اس لیے

$$D(D-1)y-Dy+y=2z$$
$$(D^2-2D+1)y=2z \qquad \text{.....(2)}$$

اس مساوات کو حل کرتے ہیں۔ اس کے لیے معاون مساوات (Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$m^2-2m+1=0$$
$$\Rightarrow\qquad (m-1)(m-1)=0$$
$$\Rightarrow\qquad m=1,1$$

اس لیے اتمامی تفاعل (Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F.=(c_1+c_2z)e^z$$

اور خاص تکملہ (Particular Integral) ہو گا

$$\begin{aligned}P.I.&=\frac{1}{f(D)}R\\&=\frac{1}{(D^2-2D+1)}(2z)\\&=[1+(D^2-2D)]^{-1}(2z)\\&=[1-(D^2-2D)+(D^2-2D)^2-\cdots](2z)\\&=2[z-(D^2-2D)z+(D^2-2D)^2z-\cdots]\\&=2[z-(D^2z-2Dz)+0-\cdots]\\&=2[z-(0-2\times1)]\\&=2(z+2)\end{aligned}$$

اس لیے مساوات (2) کا عام حل ہو گا

$$\begin{aligned}y&=C.F.+P.I.\\&=(c_1+c_2z)e^z+2(z+2)\end{aligned}$$

اس طرح مساوات (1) کا عام حل حاصل کرنے کے لیے z کی جگہ $\log x$ رکھتے ہیں، تب ضروری حل ہو گا

$$\begin{aligned}y&=(c_1+c_2\log x)e^{\log x}+2(\log x+2)\\&=(c_1+c_2\log x)x+2(\log x+2)\end{aligned}$$

مثال2۔ حل کرو: $x^4\frac{d^3y}{dx^3}+2x^3\frac{d^2y}{dx^2}-x^2\frac{dy}{dx}+xy=1$

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$x^4\frac{d^3y}{dx^3}+2x^3\frac{d^2y}{dx^2}-x^2\frac{dy}{dx}+xy=1$$
$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}+2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{x} \qquad \text{.....(1)}$$

سب سے پہلے ہم مساوات (1) میں x کی جگہ e^z یا $(\log x = z)$ لیں اور $x\frac{dy}{dx}$ کی جگہ Dy، $x^2\frac{d^2y}{dx^2}$ کی جگہ $D(D-1)y$ اور $x^3\frac{d^3y}{dx^3}=D(D-1)(D-2)y$ رکھیں۔ اس طرح ہمیں حاصل ہو گا

$$D(D-1)(D-2)y+2D(D-1)y-Dy+y=e^{-z}$$
$$(D^3-D^2-D+1)y=e^{-z} \qquad \text{.....(2)}$$

اس مساوات کا حل حاصل کرتے ہیں۔ اس کے لیے معاون مساوات (Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$m^3-m^2-m+1=0$$
$$\Rightarrow \quad (m-1)^2(m+1)=0$$
$$\Rightarrow \quad m=1,1,-1$$

اس لیے اتمامی تفاعل (Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F.=(c_1+c_2z)e^z+c_3e^{-z}$$

اور خاص تکملہ (Particular Integral) ہو گا

$$\begin{aligned}P.I.&=\frac{1}{f(D)}R\\&=\frac{1}{(D-1)^2(D+1)}(e^{-z})\\&=\frac{1}{(-1-1)^2(D+1)}(e^{-z})\\&=\frac{1}{4(D+1)}(e^{-z})\\&=\frac{1}{4}e^{-z}\int e^ze^{-z}dz\\&=\frac{1}{4}e^{-z}\int(1)dz\\&=\frac{1}{4}ze^{-z}\end{aligned}$$

اس لیے مساوات (2) کا عام حل ہو گا

$$\begin{aligned}y&=C.F.+P.I.\\&=(c_1+c_2z)e^z+c_3e^{-z}+\frac{1}{4}ze^{-z}\\&=(c_1+c_2z)e^z+\left(c_3+\frac{1}{4}z\right)e^{-z}\end{aligned}$$

اب مساوات (1) کا عام حل حاصل کرنے کے لیے z کی جگہ $\log x$ درج کریں، اس طرح دی گئی مساوات کا حل ہو گا

$$\begin{aligned}y&=(c_1+c_2\log x)e^{\log x}+\left(c_3+\frac{1}{4}\log x\right)e^{-\log x}\\&=(c_1+c_2\log x)x+\left(c_3+\frac{1}{4}\log x\right)\frac{1}{x}\end{aligned}$$

مثال3۔ مساوات $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2y=x^2+\frac{1}{x}$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2y=x^2+\frac{1}{x} \qquad .....(1)$$

مساوات(1) کو مستقل ضریب کے ساتھ خطی تفرقی مساوات میں تبدیل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں x کی جگہ e^z یا $\log x=z$ رکھیں اور $x\frac{dy}{dx}$ کی جگہ Dy اور $x^2\frac{d^2y}{dx^2}$ کی جگہ $D(D-1)y$ رکھتے ہیں۔اس لیے

$$D(D-1)y-2y=e^{2z}+e^{-z}$$

یا

$$(D^2-D-2)y=e^{2z}+e^{-z} \qquad .....(2)$$

اب مساوات(2) کو حل کرتے ہیں۔اس کے لیے معاون مساوات(Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$m^2-m-2=0$$
$$\Rightarrow \quad (m-2)(m+1)=0$$
$$\Rightarrow \quad m=2,-1$$

اس لیے اتمامی تفاعل(Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F.=c_1e^{2z}+c_2e^{-z}$$

اور خاص تکملہ(Particular Integral) ہو گا

$$\begin{aligned}P.I.&=\frac{1}{f(D)}R\\&=\frac{1}{(D-2)(D+1)}(e^{2z}+e^{-z})\\&=\frac{1}{(D-2)(2+1)}e^{2z}+\frac{1}{(-1-2)(D+1)}e^{-z}\\&=\frac{1}{3(D-2)}e^{2z}-\frac{1}{3(D+1)}e^{-z}\\&=\frac{1}{3}\left[e^{2z}\int e^{-2z}e^{2z}dz-e^{-z}\int e^{z}e^{-z}dz\right]\\&=\frac{1}{3}\left[e^{2z}\int dz-e^{-z}\int dz\right]\\&=\frac{1}{3}[e^{2z}z-e^{-z}z]\\&=\frac{1}{3}z(e^{2z}-e^{-z})\end{aligned}$$

اس لیے مساوات(2) کا عام حل ہو گا

$$\begin{aligned}y&=C.F.+P.I.\\&=c_1e^{2z}+c_2e^{-z}+\frac{1}{3}z(e^{2z}-e^{-z})\end{aligned}$$

اب مساوات(1) کا عام حل حاصل کرنے کے لیے z کی جگہ $\log x$ رکھتے ہیں،اس لیے ضروری حل ہو گا

$$y = c_1x^2 + c_2\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{3}\log x\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)$$

مثال4۔ مساوات $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 5y = x^2\sin(\log x)$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 5y = x^2\sin(\log x) \qquad .....(1)$$

مساوات(1) کو مستقل ضریب کے ساتھ خطی تفرقی مساوات میں تبدیل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں x کی جگہ e^z یا $(\log x = z)$ رکھیں اور $x^2\frac{d^2y}{dx^2}$ کی جگہ $D(D-1)y$ رکھتے ہیں۔اس لیے

$$D(D-1)y - 3Dy + 5y = e^{2z}\sin z$$

یا

$$(D^2 - 4D + 5)y = e^{2z}\sin z \qquad .....(2)$$

اب مساوات(2) کو حل کرتے ہیں۔اس کے لیے معاون مساوات(Auxiliary Equation)درجہ ذیل ہو گی

$$m^2 - 4m + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m-5)(m+1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = 5, -1$$

اس لیے اتمامی تفاعل(Complementary Function)درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = c_1e^{5z} + c_2e^{-z}$$

اور خاص تکملہ(Particular Integral)ہو گا

$$\begin{aligned} P.I. &= \frac{1}{f(D)}R \\ &= \frac{1}{(D-5)(D+1)}(e^{2z}\sin z) \\ &= e^{2z}\frac{1}{(D+2-5)(D+2+1)}(\sin z) \\ &= e^{2z}\frac{1}{(D-3)(D+3)}(\sin z) \\ &= e^{2z}\frac{1}{D^2-9}(\sin z) \\ &= e^{2z}\frac{1}{-(1)^2-9}(\sin z) \\ &= -\frac{1}{10}e^{2z}\sin z \end{aligned}$$

اس لیے مساوات(2) کا عام حل ہو گا

$$\begin{aligned} y &= C.F. + P.I. \\ &= c_1e^{5z} + c_2e^{-z} - \frac{1}{10}e^{2z}\sin z \end{aligned}$$

اب مساوات(1) کا عام حل حاصل کرنے کے لیے z کی جگہ $\log x$ رکھتے ہیں،اس لیے ضروری حل ہو گا

$$y = c_1 x^5 + c_2\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{10}x^2 \sin(\log x)$$

دوسری صورت: فرض کرو کہ متجانس خطی تفرقی مساوات درجہ ذیل ہے

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + A_2 x^{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + A_{n-1}x\frac{dy}{dx} + A_n y = Q \qquad .....(1)$$

جہاں $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}, A_n$ مستقلات ہیں اور x کا کوئی تفاعل Q ہے۔ یہاں ہم عامل (Operator) $x\frac{d}{dx}$ کو $\mathcal{D}$ سے ظاہر کرتے ہیں اور اس لیے $x\frac{dy}{dx} = \mathcal{D}y,\ x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \mathcal{D}(\mathcal{D}-1)y,\ x^3\frac{d^3y}{dx^3} = \mathcal{D}(\mathcal{D}-1)(\mathcal{D}-2)y$ اور اسی طرح $x^n\frac{d^ny}{dx^n} =$ $\mathcal{D}(\mathcal{D}-1)(\mathcal{D}-2)\cdots(\mathcal{D}-n+1)y$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ اب مساوات (1) درجہ ذیل شکل میں ہو گی۔

$$f(\mathcal{D})y = Q \qquad .....(2)$$

اب مان لیتے ہیں کہ $y = Ax^m$ مساوات $f(\mathcal{D})y = 0$ کا ایک حل ہے۔ اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ

$$Ax^m f(m) = 0$$

اس لیے $y = Ax^m$ مساوات $f(\mathcal{D})y = 0$ کا حل تبھی ہو گا جب معاون مساوات

$$f(m) = 0 \qquad .....(3)$$

کا ایک روٹ m ہو۔

1. **جب معاون مساوات کے سبھی روٹس الگ الگ ہوں:**

اس صورت میں مان لیجیے کہ $m_1, m_2, \cdots, m_n$ معاون مساوات کے الگ الگ روٹس ہیں، تب

$$C.F. = A_1 x^{m_1} + A_2 x^{m_2} + \cdots + A_n x^{m_n}$$

2. **جب معاون مساوات کے k روٹس تکراری (Repeated) ہوں:**

مان لیجیے کہ معاون مساوات کے n روٹس میں سے k روٹس مساوی ہیں $m = m_1 = m_2 = \cdots = m_k$، تب

$$\begin{aligned} C.F. &= (c_1 + c_2\log x + c_3(\log x)^2 + \cdots + c_k(\log x)^{k-1})x^m + c_{k+1}e^{m_{k+1}x} + \cdots + c_n e^{m_n x} \\ &= (c_1 + c_2 + \cdots + c_k)e^{mx} + c_{k+1}e^{m_{k+1}x} + \cdots + c_n e^{m_n x} \end{aligned}$$

3. **جب معاون مساوات کے روٹس ملتف اعداد ہوں:**

اس صورت میں مان لیجیے کہ $m_1 = \alpha + i\beta$ اور $m_2 = \alpha - i\beta$ حاصل کردہ معاون مساوات کے روٹس ہیں، تب

$$C.F. = x^\alpha\{c_1\cos(\beta\log x) + c_2\sin(\beta\log x)\}$$

خاص تکملہ (Particular Integral):

مساوات (2) کے لیے خاص تکملہ ہے

$$P.I. = \frac{1}{f(\mathcal{D})}Q \qquad .....(4)$$

فرض کرو کہ

$$\frac{1}{\mathcal{D}-m}Q = v \qquad .....(5)$$

$$\Rightarrow \qquad (\mathcal{D}-m)v = Q$$

$$\Rightarrow \qquad x\frac{dv}{dx} - mv = Q$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{dv}{dx} - \frac{m}{x}v = \frac{Q}{x}$$

یہ پہلے رتبہ کی خطی تفرقی مساوات ہے جس کا حل ہے

$$vx^{-m} = \int \left(x^{-m} \cdot \frac{Q}{x}\right) dx$$
$$\Rightarrow \qquad v = x^m \int \left(x^{-m} \cdot \frac{Q}{x}\right) dx$$

مساوات (5) سے کی قیمت رکھنے پر $\frac{1}{\mathcal{D}-m}Q = x^m \int (x^{-m-1}Q)dx$

اب اگر مان لیا جایے کہ $f(\mathcal{D}) = (\mathcal{D}-m_1)(\mathcal{D}-m_2)\cdots(\mathcal{D}-m_n)$، تب

$$\frac{1}{f(\mathcal{D})}Q = \frac{1}{(\mathcal{D}-m_1)(\mathcal{D}-m_2)\cdots(\mathcal{D}-m_n)}Q$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{f(\mathcal{D})}Q = \left[\frac{C_1}{(\mathcal{D}-m_1)} + \frac{C_2}{(\mathcal{D}-m_2)} + \cdots + \frac{C_n}{(\mathcal{D}-m_n)}\right]Q$$
$$= \frac{C_1}{(\mathcal{D}-m_1)}Q + \frac{C_2}{(\mathcal{D}-m_2)}Q + \cdots \frac{C_n}{(\mathcal{D}-m_n)}Q$$
$$= C_1x^{m_1}\int (x^{-m_1-1}\cdot Q)dx + C_2x^{m_2}\int (x^{-m_2-1}\cdot Q)dx + \cdots$$
$$+C_nx^{m_n}\int (x^{-m_n-1}\cdot Q)dx$$

تبصرہ: اگر $Q = x^m$ ہو اور $f(m) \neq 0$، تب خاص تکملہ ہو گا

$$P.I. = \frac{1}{f(\mathcal{D})}x^m = \frac{1}{f(m)}x^m$$

اس مثلہ میں اگر $f(m) = 0$، تب

$$P.I. = \frac{1}{(\mathcal{D}-m)^n}x^m = \frac{(\log x)^n}{n!}x^m$$

آیے اب ہم کچھ مثالوں کو حل کریں۔

مثال 1۔ مساوات $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + y = (1-x)^2$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + y = (1-x)^2 \qquad .....(1)$$

مساوات (1) میں $x\frac{dy}{dx}$ کی جگہ $\mathcal{D}y$ رکھیں اور $x^2\frac{d^2y}{dx^2}$ کی جگہ $\mathcal{D}(\mathcal{D}-1)y$ رکھتے ہیں۔ اس لیے

$$\mathcal{D}(\mathcal{D}-1)y + 3\mathcal{D}y + y = x^2 - 2x + 1$$

یا

$$(\mathcal{D}^2 + 2\mathcal{D} + 1)y = x^2 - 2x + 1 \qquad .....(2)$$

اب مساوات (2) کو حل کرتے ہیں۔ اس کے لیے معاون مساوات (Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$m^2 + 2m + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m+1)(m+1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = -1, -1$$

اس لیے اتمامی تفاعل(Complementary Function)درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = (c_1 + c_2 \log x)x^{-1}$$

اور خاص تکملہ(Particular Integral)ہو گا

$$P.I. = \frac{1}{f(\boldsymbol{\mathcal{D}})}Q$$
$$= \frac{1}{\boldsymbol{\mathcal{D}}^2 + 2\boldsymbol{\mathcal{D}} + 1}(x^2 - 2x + 1)$$
$$= \frac{x^2}{2^2 + 2 \times 2 + 1} - 2\frac{x}{1^2 + 2 \times 1 + 1} + \frac{x^0}{0^2 + 2 \times 0 + 1}$$
$$= \frac{x^2}{9} - \frac{2x}{4} + 1$$
$$= \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$$

اس لیے مساوات(2) کا عام حل ہو گا

$$y = C.F. + P.I.$$
$$= (c_1 + c_2 \log x)x^{-1} + \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$$

مثال2۔ مساوات $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 4y = x^m$ کو حل کریں۔

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 4y = x^m \qquad .....(1)$$

مساوات(1)میں $x\frac{dy}{dx}$ کی جگہ $\boldsymbol{\mathcal{D}}y$ رکھیں اور $x^2\frac{d^2y}{dx^2}$ کی جگہ $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\mathcal{D}} - 1)y$ رکھتے ہیں۔اس لیے

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\mathcal{D}} - 1)y - 3\boldsymbol{\mathcal{D}}y + 4y = x^m$$

یا

$$(\boldsymbol{\mathcal{D}}^2 - 4\boldsymbol{\mathcal{D}} + 4)y = x^m \qquad .....(2)$$

اب مساوات(2)کو حل کرتے ہیں۔اس کے لیے معاون مساوات(Auxiliary Equation)درجہ ذیل ہو گی

$$m^2 - 4m + 4 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m-2)(m-2) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = 2, 2$$

اس لیے اتمامی تفاعل(Complementary Function)درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = (c_1 + c_2 \log x)x^2$$

اور خاص تکملہ(Particular Integral)ہو گا

$$P.I. = \frac{1}{f(\boldsymbol{\mathcal{D}})}Q$$

$$= \frac{1}{(\mathcal{D}-2)^2} x^m$$
$$= \frac{1}{(m-2)^2} x^m \qquad \left[\because \frac{1}{f(\mathcal{D})} x^m = \frac{1}{f(m)} x^m\right]$$

اس لیے مساوات(2) کا عام حل ہو گا

$$y = C.F. + P.I.$$
$$= (c_1 + c_2 \log x) x^{-1} + \frac{1}{(m-2)^2} x^m$$

مثال3۔ مساوات $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y = e^x$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y = e^x \qquad \text{.....(1)}$$

مساوات(1) میں $x \frac{dy}{dx}$ کی جگہ $\mathcal{D}y$ رکھیں اور $x^2 \frac{d^2y}{dx^2}$ کی جگہ $\mathcal{D}(\mathcal{D}-1)y$ رکھتے ہیں۔ اس لیے

$$\mathcal{D}(\mathcal{D}-1)y + 4\mathcal{D}y + 2y = e^x$$

یا

$$(\mathcal{D}^2 + 3\mathcal{D} + 2)y = e^x \qquad \text{.....(2)}$$

اب مساوات(2) کو حل کرتے ہیں۔ اس کے لیے معاون مساوات(Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$m^2 + 3m + 2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m+1)(m+2) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = -1, -2$$

اس لیے اتمامی تفاعل(Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2}$$

اور خاص تکملہ(Particular Integral) ہو گا

$$P.I. = \frac{1}{f(\mathcal{D})} Q$$
$$= \frac{1}{(\mathcal{D}+1)(\mathcal{D}+2)} e^x$$
$$= \left(\frac{1}{\mathcal{D}+1} - \frac{1}{\mathcal{D}+2}\right) e^x$$
$$= \frac{1}{\mathcal{D}+1} e^x - \frac{1}{\mathcal{D}+2} e^x$$
$$= x^{-1} \int x^{1-1} e^x \, dx - x^{-2} \int x^{2-1} e^x \, dx$$
$$= x^{-1} \int e^x \, dx - x^{-2} \int x e^x \, dx$$
$$= x^{-1} e^x - x^{-2}(x-1) e^x$$
$$= (x^{-1} - x^{-1} + x^{-2}) e^x$$
$$= x^{-2} e^x$$

اس لیے مساوات(2) کا عام حل ہو گا

$$\begin{aligned} y &= C.F. + P.I. \\ &= c_1x^{-1} + c_2x^{-2} + x^{-2}e^x \end{aligned}$$

مثال4۔ مساوات $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + y = (1-x)^{-2}$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + y = (1-x)^{-2} \qquad .....(1)$$

مساوات(1) میں $x\frac{dy}{dx}$ کی جگہ $\mathcal{D}y$ رکھیں اور $x^2\frac{d^2y}{dx^2}$ کی جگہ $\mathcal{D}(\mathcal{D}-1)y$ رکھتے ہیں۔ اس لیے

$$\mathcal{D}(\mathcal{D}-1)y + 3\mathcal{D}y + y = (1-x)^{-2}$$

یا

$$(\mathcal{D}^2 + 2\mathcal{D} + 1)y = (1-x)^{-2} \qquad .....(2)$$

اب مساوات(2) کو حل کرتے ہیں۔ اس کے لیے معاون مساوات(Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$\begin{aligned} & m^2 + 2m + 1 = 0 \\ \Rightarrow\quad & (m+1)(m+1) = 0 \\ \Rightarrow\quad & m = -1, -1 \end{aligned}$$

اس لیے اتمامی تفاعل(Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = (c_1 + c_2\log x)x^{-1}$$

اور خاص تکملہ(Particular Integral) ہو گا

$$\begin{aligned} P.I. &= \frac{1}{f(\mathcal{D})}Q \\ &= \frac{1}{(\mathcal{D}+1)(\mathcal{D}+1)}(1-x)^{-2} \\ &= \frac{1}{(\mathcal{D}+1)}x^{-1}\int x^{1-1}(1-x)^{-2}\,dx \\ &= \frac{1}{(\mathcal{D}+1)}\{x^{-1}(1-x)^{-1}\} \\ &= x^{-1}\int x^{1-1}\{x^{-1}(1-x)^{-1}\}dx \\ &= x^{-1}\int\{x^{-1}(1-x)^{-1}\}dx \\ &= x^{-1}\int\frac{1}{x(1-x)}\,dx \\ &= x^{-1}\int\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)dx \\ &= x^{-1}(\log|x| - \log|1-x|) \\ &= x^{-1}\log\left|\frac{x}{1-x}\right| \end{aligned}$$

اس لیے مساوات(2) کا عام حل ہو گا

$$y = C.F. + P.I.$$
$$= (c_1 + c_2 \log x)x^{-1} + x^{-1} \log\left|\frac{x}{1-x}\right|$$

11.2.2 متغیر ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساوات میں تحویل پزیر مساواتیں
(Equations Reducible to Homogeneous Linear Differential Equations with Variable Coefficients)

فرض کرو کہ کوئی مساوات درجہ ذیل شکل میں ہے

$$(a+bx)^n \frac{d^ny}{dx^n} + A_1(a+bx)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + A_2(a+bx)^{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + A_{n-1}(a+bx)\frac{dy}{dx} + A_ny = Q \qquad .....(1)$$

جہاں $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}, A_n$ مستقلات ہیں اور x کا کوئی تفاعل Q ہے۔

اس مساوات میں $a + bx$ کی جگہ z رکھنے پر اور اس سے $\frac{dz}{dx} = b$ اس لیے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = b\frac{dy}{dz}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dz}\left(b\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dz}\left(b^2\frac{dy}{dz}\right) = b^2\frac{d^2y}{dz^2}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

اور اسی طرح

$$\frac{d^ny}{dx^n} = b^n\frac{d^ny}{dz^n}$$

یہ سبھی قیمتیں مساوات(1) میں رکھنے پر

$$z^nb^n\frac{d^ny}{dz^n} + A_1z^{n-1}b^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}} + A_2z^{n-2}b^{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dz^{n-2}} + \cdots + A_{n-1}zb\frac{dy}{dz} + A_ny = \varphi(z)$$
$$\Rightarrow z^n\frac{d^ny}{dz^n} + A_1z^{n-1}\frac{b^{n-1}}{b^n}\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}} + A_2z^{n-2}\frac{b^{n-2}}{b^n}\frac{d^{n-2}y}{dz^{n-2}} + \cdots + A_{n-1}z\frac{b}{b^n}\frac{dy}{dz} + \frac{A_n}{b^n}y = F(z)$$
$$\Rightarrow \qquad z^n\frac{d^ny}{dz^n} + \frac{A_1}{b}z^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}} + \frac{A_2}{b^2}z^{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dz^{n-2}} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{b^{n-1}}z\frac{dy}{dz} + \frac{A_n}{b^n}y = F(z)$$

اس مساوات کا حل گزشتہ طریقوں سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال1۔ مساوات $(3x+2)^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3(3x+2)\frac{dy}{dx} - 36y = 3x^2 + 4x + 1$ کو حل کریں۔

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$(3x+2)^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3(3x+2)\frac{dy}{dx} - 36y = 3x^2 + 4x + 1 \qquad .....(1)$$

اس مساوات میں $3x + 2$ کی جگہ z رکھنے پر اور اس سے $\frac{dz}{dx} = 3$ اس لیے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = 3\frac{dy}{dz}$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dz}\left(b\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx} = 9\frac{d^2y}{dz^2}$$

مساوات(1) میں یہ قیمتیں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$9z^2\frac{d^2y}{dz^2}+3z\left(3\frac{dy}{dz}\right)-36y=3\left(\frac{z-2}{3}\right)^2+4\left(\frac{z-2}{3}\right)+1$$

$$\Rightarrow \qquad z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}-4y=\frac{1}{9}\left[\frac{3z^2-12z+12+12z-24+9}{9}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}-4y=\frac{1}{9}\left[\frac{3(z^2-1)}{9}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}-4y=\frac{1}{27}(z^2-1)$$

مساوات(1)میں $z\frac{dy}{dz}$ کی جگہ $\boldsymbol{\mathcal{D}}y$ رکھیں اور $z^2\frac{d^2y}{dz^2}$ کی جگہ $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\mathcal{D}}-1)y$ رکھتے ہیں۔اس لیے

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\mathcal{D}}-1)y+\boldsymbol{\mathcal{D}}y-4y=\frac{1}{27}(z^2-1)$$

یا

$$(\boldsymbol{\mathcal{D}}^2-4)y=\frac{1}{27}(z^2-1) \qquad .....(2)$$

اب مساوات(2) کو حل کرتے ہیں۔اس کے لیے معاون مساوات(Auxiliary Equation)درجہ ذیل ہو گی

$$m^2-4=0$$

$$\Rightarrow \qquad m=-2,2$$

اس لیے اتمامی تفاعل(Complementary Function)درجہ ذیل ہو گا

$$C.F.=c_1z^{-2}+c_2z^2$$

اور خاص تکملہ(Particular Integral)ہو گا

$$\begin{aligned}
P.I.&=\frac{1}{f(\boldsymbol{\mathcal{D}})}Q\\
&=\frac{1}{27}\left[\frac{1}{\boldsymbol{\mathcal{D}}^2-4}(z^2-1)\right]\\
&=\frac{1}{27}\left[\left(\frac{1}{\boldsymbol{\mathcal{D}}^2-4}z^2-\frac{1}{\boldsymbol{\mathcal{D}}^2-4}z^0\right)\right]\\
&=\frac{1}{27}\left[\left(\frac{1}{(\boldsymbol{\mathcal{D}}-2)(\boldsymbol{\mathcal{D}}+2)}z^2-\frac{1}{(0)^2-4}z^0\right)\right]\\
&=\frac{1}{27}\left[\left(\frac{1}{(\boldsymbol{\mathcal{D}}-2)}z^{-2}\int z^{2-1}z^2\,dz-\frac{1}{(0)^2-4}z^0\right)\right]\\
&=\frac{1}{27}\left[\left(\frac{1}{(\boldsymbol{\mathcal{D}}-2)}\frac{z^4}{4}+\frac{1}{4}\right)\right]\\
&=\frac{1}{108}\left(z^2\int z^{-2-1}z^2\,dz+1\right)\\
&=\frac{1}{108}\left(z^2\int z^{-1}\,dz+1\right)\\
P.I.&=\frac{1}{108}(z^2\log z+1)
\end{aligned}$$

اس لیے مساوات(2) کا عام حل ہو گا

$$y=C.F.+P.I.$$

$$= c_1 z^{-2} + c_2 z^2 + \frac{1}{108}(z^2 \log z + 1)$$

اس مساوات میں $z = 3x + 2$ رکھنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$y = c_1(3x+2)^{-2} + c_2(3x+2)^2 + \frac{1}{108}((3x+2)^2 \log|3x+2| + 1)$$

11.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر ہم نے متغیر ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساوات کی بنیادی جانکاری حاصل کی اور اس کو حل کرنے کے مختلف طریقوں کو باریکی سے سیکھا۔ اس علاوہ متغیر ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساوات میں تحویل پزیر مساواتوں کو پہچان کر ان کو متغیر ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساوات میں تبدیل کر کے ان کا حل حاصل کرنے پر مہارت حاصل کی۔

11.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

متجانس تفرقی مساوات، اتمامی تفاعل، معاون مساوات، مستقل ضریب، غیر متجانس تفرقی مساوات

11.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

11.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. متغیر ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساوات کی عام شکل لکھیے۔
2. مساوات $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{2}{x}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{3}{x^2}\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x^3}y = 0$ کو متجانس خطی تفرقی مساوات میں تبدیل کریے۔
3. مساوات $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - 4y = 0$ کو مستقل ضریب کی تفرقی مساوات میں تبدیل کرو۔
4. مساوات $x^3\frac{d^2y}{dx^2} + 3x^2\frac{dy}{dx} + xy = 0$ کے لیے معاون مساوات لکھیے ۔

11.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. مساوات $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + 6y = 0$ کو حل کریے۔
2. مساوات $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - 4y = 0$ کو حل کریے۔
3. مساوات $x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ کو حل کریے۔
4. حل کریے: $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

11.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. مساوات $x^3\frac{d^3y}{dx^3} - x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - 2y = x^3 + 3x$ کا حل معلوم کرو۔
2. مساوات $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 3y = x^2\log x$ کو حل کرو۔

3. مساوات $x^3\frac{d^3y}{dx^3}+2x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}-3y=x^2+x$ کو حل کرو۔

4. مساوات $\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{4}{x}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{5}{x^2}\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x^3}y=1$ کو حل کریں۔

5. مساوات $(1+x)^2\frac{d^2y}{dx^2}+(1+x)\frac{dy}{dx}+y=4\cos\{\log(1+x)\}$ کو حل کرو۔

6. مساوات $(5+2x)^2\frac{d^2y}{dx^2}-6(5+2x)\frac{dy}{dx}+8y=0$ کا حل معلوم کریں۔

7. مساوات $(2x-1)^3\frac{d^3y}{dx^3}+(2x-1)\frac{dy}{dx}-2y=0$ کو حل کرو۔

جوابات:

11.5.1 معروضی سوالات کے جوابات

1. $x^n\frac{d^ny}{dx^n}+A_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+A_2x^{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+A_{n-1}x\frac{dy}{dx}+A_ny=0$
2. $x^3\frac{d^3y}{dx^3}+2x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}-3y=0$
3. $(\boldsymbol{\mathcal{D}}^{\mathbf{2}}-4)y=0$
4. $m^{\mathbf{2}}+2m+1=0$

11.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $y=c_1x^2+c_2x^3$
2. $y=c_1x^2+c_2x^{-2}$
3. $y=c_1x+c_2\sin\left(\sqrt{3}\log x\right)+c_3\cos\left(\sqrt{3}\log x\right)$
4. $y=\sqrt{x}\left\{c_1\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right)+c_2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right)\right\}$

11.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $y=(c_1+c_2\log x)+c_3x^2+\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x(\log x)^2$
2. $y=c_1x^{-1}+c_2x^3-\frac{x^2}{9}(3\log x+2)$
3. $y=c_1x+c_2\cos\left(\sqrt{3}\log x\right)+c_3\sin\left(\sqrt{3}\log x\right)+\frac{x^2}{7}+\frac{x\log x}{4}$
4. $y=c_1x^2+x^{5/2}\left(c_2x^{\sqrt{21}/2}+c_3x^{-\sqrt{21}/2}\right)-\frac{x^3}{5}(3\log x+2)$
5. $y=c_1\cos\{\log(1+x)\}+c_2\sin\{\log(1+x)\}+2\log(1+x)\sin\{\log(1+x)\}$
6. $y=(5+2x)^2\left\{c_1(5+2x)^{\sqrt{2}}+c_2(5+2x)^{-\sqrt{2}}\right\}$
7. $y=(2x-1)\left\{c_1+c_2(2x-1)^{\frac{\sqrt{3}}{2}}+c_3(2x-1)^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right\}$

11.6 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Scope as in “Differential Equations and Their Applications” Zafar Ahsan, Prentice hall of India Private Limited, New Delhi
2. Text Book of Differential Equations, Khalil Ahmad, Real World Education Publishers, New Delhi
3. Ordinary and Partial Differential Equations- Rai Singhania, S.Chand & Co., New Delhi
4. A Text Book of B.Sc. (Mathematics), Volume –I , V. Venkateshwara Rao and others, S. Chand & Company

اکائی 12۔ متغیر ضریب کی اعلیٰ رتبے کی خطی تفرقی مساواتیں
(پیرامیٹرس کے تغیر کا طریقہ)
(Higher Order Linear Differential Equations with Variable Coefficients: Method of Variation of Parameters)

اکائی کے اجزا

12.0 تمہید(Introduction)

اس اکائی میں ہم خطی تفرقی مساوات کی درجہ ذیل شکل پر غور کریں گے

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R$$

جہاں x کے تفاعلات P، Q اور R ہیں۔ کسی خطی تفرقی مساوات کا مکمل حل حاصل کرنے کے طریقہ کو سمجھیں گے جب کہ اس مساوات کا اتمامی تفاعل معلوم ہو۔ یہاں ہم پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقہ سے پہلے اور دوسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات کو حل کرنا سیکھیں گے ۔

12.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے عبور پر آپ ذیل کی مساواتوں کو پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے کی مدد سے حل کر سکیں گے:

1. خطی تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ اور
2. دوسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R$

12.2 پیرامیٹرس کا تغیر(Variation of Parameters)

اب ہم کسی خطی تفرقی مساوات کے مکمل حل حاصل کرنے کے پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے کو سیکھ یں گے جب کہ اس مساوات کا اتمامی تفاعل معلوم ہے۔

1. خطی تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ کا حل:

مان لو کہ پہلے رتبے کی خطی تفرقی مساوات

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \qquad ......(1)$$

جہاں P اور Q مستقلات ہیں یا x کے تفاعلات ہیں۔ مان لو کہ $y = au$ مساوات

$$\frac{dy}{dx} + Py = 0 \qquad ......(2)$$

کا عام حل ہے، جہاں a ایک اختیاری مستقل ہے اور u تفاعل ہے x کا۔ مساوات (2) سے

$$\frac{du}{dx} + Pu = 0 \qquad ......(3)$$

مساوات (1) کا عام حل حاصل کرنے کے لیے مان لو کہ $y = bu$ اس کا عام حل ہے، یہاں b مستقل نہیں بلکہ یہ x کا ایک تفاعل ہے جسے اس طرح مانا جاتا ہے کہ مساوات (1) مطمئن ہو جایے۔ اب

$$y = bu \qquad ......(4)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dy}{dx} = b\frac{du}{dx} + \frac{db}{dx}u \qquad ......(5)$$

مساوات(1) میں مساوات(5) کی قدر درج کرنے پر حاصل ہو گا

$$b\frac{du}{dx}+\frac{db}{dx}u+Pbu=Q$$

$$\frac{db}{dx}u+b\left(\frac{du}{dx}+Pu\right)=Q \qquad ......(6)$$

مساوات(3)اور(6)سے

$$\frac{db}{dx}u+b(0)=Q$$

$$db=\left(\frac{Q}{u}\right)dx$$

$$b=\int\left(\frac{Q}{u}\right)dx+c$$

جہاں c ایک اختیای مستقل ہے۔ مساوات(4) میں یہ قیمت رکھنے پر

$$y=\left(\int\left(\frac{Q}{u}\right)dx+c\right)u$$

$$=u\int\left(\frac{Q}{u}\right)dx+cu$$

جیسا کہ ہم نے مانا تھا کہ مساوات (4) مساوات(1) کا عام حل ہے، اس لیے $y=u\int\left(\frac{Q}{u}\right)dx+cu$ مساوات $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ کے لیے عام حل ہے۔ اب ہم کچھ مثالوں کی مدد سے پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے کو سمجھتے ہیں۔

مثال 1۔ مساوات $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=-\frac{1}{x(1+x^2)}$ کو پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے سے حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=-\frac{1}{x(1+x^2)} \qquad ......(1)$$

یہاں $P=\frac{1}{x}$ اور $Q=-\frac{1}{x(1+x^2)}$ ہیں۔ سب سے پہلے ہم مساوات

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=0 \qquad ......(2)$$

کا عام حل حاصل کرتے ہیں۔ مساوات(2) سے

$$\frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=0$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$\log y+\log x=\log c$$

$$y=cx^{-1}$$

جہاں c ایک اختیاری مستقل ہے۔ اس لیے مان لو کہ

$$u=x^{-1}$$

اب دی گئی مساوات کا عام حل ہو گا

$$y=u\int\left(\frac{Q}{u}\right)dx+Bu$$

$$= x^{-1} \int \left(\frac{-\frac{1}{x(1+x^2)}}{x^{-1}} \right) dx + Bx^{-1}$$
$$= x^{-1} \left[B - \int \left(\frac{1}{1+x^2} \right) dx \right]$$
$$= x^{-1}[B - \tan^{-1} x]$$

جہاں B ایک اختیاری مستقل ہے۔اس لیے دی گئی مساوات کا عام حل $xy = B - \tan^{-1} x$ ہے۔

مثال2۔ مساوات $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \sin x$ کو پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے سے حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \sin x \qquad ......(1)$$

یہاں $P = \frac{2}{x}$ اور $Q = \sin x$ ہیں۔سب سے پہلے ہم مساوات

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 0 \qquad ......(2)$$

کا عام حل حاصل کرتے ہیں۔مساوات(2) ظاہر کرتا ہے

$$\frac{dy}{y} + 2\frac{dx}{x} = 0$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$log\, y + 2\, log\, x = log\, c$$
$$y = cx^{-2}$$

جہاں c ایک اختیاری مستقل ہے۔اس لیے مان لو کہ

$$u = x^{-2}$$

اب دی گئی مساوات کا عام حل ہو گا

$$y = u \int \left(\frac{Q}{u} \right) dx + Bu$$
$$= x^{-2} \int \left(\frac{\sin x}{x^{-2}} \right) dx + Bx^{-2}$$
$$= x^{-2} \left[B + \int x^2 \sin x\, dx \right]$$
$$\Rightarrow \qquad x^2 y = B + x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x) dx$$
$$= B - x^2 \cos x + 2 \int x \cos x\, dx$$
$$= B - x^2 \cos x + 2 \left\{ x \sin x - \int \sin x\, dx \right\}$$
$$= B - x^2 \cos x + 2\{x \sin x + \cos x\}$$

جہاں B ایک اختیاری مستقل ہے۔اس لیے دی گئی مساوات کا عام حل $x^2 y = B - x^2 \cos x + 2\{x \sin x + \cos x\}$ ہے۔

مثال3۔ مساوات $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{4x}{1+x^2} \right) y = \frac{1}{(1+x^2)^2}$ کو پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے سے حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$\frac{dy}{dx}+\left(\frac{4x}{1+x^2}\right)y=\frac{1}{(1+x^2)^2} \qquad ......(1)$$

یہاں $P=\frac{4x}{1+x^2}$ اور $Q=\frac{1}{(1+x^2)^2}$ ہیں۔ سب سے پہلے ہم مساوات

$$\frac{dy}{dx}+\left(\frac{4x}{1+x^2}\right)y=0 \qquad ......(2)$$

کا عام حل حاصل کرتے ہیں۔ مساوات (2) سے حاصل ہے

$$\frac{dy}{y}+2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)dx=0$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$log\, y+2\, log(1+x^2)=log\, c$$

$$\Rightarrow \quad log\, y=log\, c-log(1+x^2)^2$$

$$\Rightarrow \quad y=c(1+x^2)^{-2}$$

جہاں c ایک اختیاری مستقل ہے۔ اس لیے مان لو کہ

$$u=(1+x^2)^{-2}$$

اب دی گئی مساوات کا عام حل ہو گا

$$y=u\int\left(\frac{Q}{u}\right)dx+Bu$$

$$=(1+x^2)^{-2}\int\left(\frac{\frac{1}{(1+x^2)^2}}{(1+x^2)^{-2}}\right)dx$$

$$+B(1+x^2)^{-2}$$

$$=(1+x^2)^{-2}\left[B+\int(1)dx\right]$$

$$\Rightarrow \quad (1+x^2)^2y=B+x$$

جہاں B ایک اختیاری مستقل ہے۔ اس لیے دی گئی مساوات کا عام حل $(1+x^2)^2y=B+x$ ہے۔

2. دوسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات کا حل:

مان لو کہ دوسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=R \qquad ......(1)$$

جہاں P، Q اور R ، x کے تفاعلات ہیں۔ مان لو کہ $y=au+bv$ مساوات

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0 \qquad ......(2)$$

کا عام حل ہے، جہاں a اور b اختیاری مستقلات ہیں اور u، v تفاعلات ہیں x کے۔ اس کے علاوہ ہم مان لیتے ہیں کہ مساوات (1) کا مکمل حل

$$y=au+bv \qquad ......(3)$$

اس طرح سے ہے کہ اب a اور b مستقلات نہیں ہیں بلکہ ان کو x کے تفاعلات کے طور پر اس طرح سے منتخب کیا جاتا ہے کہ وہ مساوات(1) کو مطمئن کر سکیں۔

مساوات(3) کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{du}{dx} + \frac{da}{dx}u + b\frac{dv}{dx} + \frac{db}{dx}v$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = a\frac{du}{dx} + b\frac{dv}{dx} + \frac{da}{dx}u + \frac{db}{dx}v \qquad ......(4)$$

اب a اور b کو اس طرح سے منتخب کرتے ہیں کہ

$$\frac{da}{dx}u + \frac{db}{dx}v = 0 \qquad ......(5)$$

اب مساوات(4) ہو گی

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{du}{dx} + b\frac{dv}{dx}$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{da}{dx}\frac{du}{dx} + b\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{db}{dx}\frac{dv}{dx}$$

اب مساوات(1) میں y، $\frac{dy}{dx}$، $\frac{d^2y}{dx^2}$ کی قیمتیں درج کرنے پر

$$\left(a\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{da}{dx}\frac{du}{dx} + b\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{db}{dx}\frac{dv}{dx}\right) + P\left(a\frac{du}{dx} + b\frac{dv}{dx}\right) + Q(au + bv) = R$$

$$\Rightarrow \qquad a\left(\frac{d^2u}{dx^2} + P\frac{du}{dx} + Qu\right) + b\left(\frac{d^2v}{dx^2} + P\frac{dv}{dx} + Qv\right) + \left(\frac{da}{dx}\frac{du}{dx} + \frac{db}{dx}\frac{dv}{dx}\right) = R$$

چوں کہ u اور v مساوات(1) کے حل ہیں۔ اس لیے یہ اس کو مطمئن بھی کریں گے

$$\frac{d^2u}{dx^2} + P\frac{du}{dx} + Qu = 0$$

اور

$$\frac{d^2v}{dx^2} + P\frac{dv}{dx} + Qv = 0$$

اس لیے

$$\frac{da}{dx}\frac{du}{dx} + \frac{db}{dx}\frac{dv}{dx} = R \qquad ......(6)$$

مساوات(5) اور (6) سے

$$\frac{\frac{da}{dx}}{-v} = \frac{\frac{db}{dx}}{u} = \frac{R}{u\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dx}v}$$

اب

$$\frac{da}{dx} = \frac{-vR}{u\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dx}v} \qquad ......(7)$$

$$\frac{db}{dx} = \frac{uR}{u\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dx}v} \qquad ......(8)$$

مساوات(7)اور(8)کو تکمل کرنے پر ہم aاور b کی قیمتیں حاصل کر لیتے ہیں۔مان لو کہ $a = f(x) + A$ اور $b = g(x) + B$

اب مساوات (1)کا عام حل ہو گا

$$y = uf(x) + Au + vg(x) + Bv$$

اب ہم کچھ مثالوں کی مدد سے پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے کو سمجھتے ہیں۔

مثال1۔ مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} + y = x$ کو پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے سے حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = x \qquad ......(1)$$

سب سے پہلے ہم $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ کا حل حاصل کرتے ہیں۔اس کے لیے معاون مساوات ہو گی

$$m^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad m = \pm i$$

اس لیے $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ کا حل ہے

$$C.F. = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

اب مان لو کہ دی گئی مساوات کا مکمل حل $y = F\cos x + G\sin x$ ہے۔، جہاں Fاور G دو x کے تفاعلات ہیں۔اس لیے

$$y = F\cos x + G\sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = -F\sin x + \frac{dF}{dx}\cos x + G\cos x + \frac{dG}{dx}\sin x$$

Fاور G کو اس طرح منتخب کیا جاتا ہے کہ

$$\frac{dF}{dx}\cos x + \frac{dG}{dx}\sin x = 0 \qquad ......(2)$$

اس لیے

$$\frac{dy}{dx} = -F\sin x + G\cos x$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -F\cos x - \frac{dF}{dx}\sin x - G\sin x + \frac{dG}{dx}\cos x$$

مساوات(1) سے

$$-F\cos x - \frac{dF}{dx}\sin x - G\sin x + \frac{dG}{dx}\cos x + F\cos x + G\sin x = x$$

$$\Rightarrow \qquad -\frac{dF}{dx}\sin x + \frac{dG}{dx}\cos x = x \qquad ......(3)$$

مساوات (2)اور(3) سے

$$\frac{dF}{dx} = -x\sin x, \frac{dG}{dx} = x\cos x$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$F = -\int x \sin x \, dx + C \text{ اور } G = \int x \cos x \, dx + D$$

$$\Rightarrow \quad F = -[-x \cos x + \sin x] + C \text{ اور } G = [x \sin x + \cos x] + D$$

$$\Rightarrow \quad F = x \cos x - \sin x + C \text{ اور } G = x \sin x + \cos x + D$$

اب مساوات $y = F \cos x + G \sin x$ میں F اور G کی قیمتیں درج کرنے پر

$$\begin{aligned} y &= (x \cos x - \sin x + C) \cos x + (x \sin x + \cos x + D) \sin x \\ &= (x \cos^2 x - \sin x \cos x + C \cos x) + (x \sin^2 x + \sin x \cos x + D \sin x) \\ &= x(\cos^2 x + \sin^2 x) + C \cos x + D \sin x \\ &= x + C \cos x + D \sin x \end{aligned}$$

اس لیے دی گئی مساوات کا مکمل حل $y = x + C \cos x + D \sin x$ ہے۔

مثال2۔ مساوات $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = x^2 e^x$ کو پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے سے حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = x^2 e^x \qquad \text{......(1)}$$

سب سے پہلے ہم دی گئی مساوات میں سے متجانس تفرقی مساوات $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = 0$ کا حل حاصل کرتے ہیں۔

اس کے لیے $x = e^z$ اور $D = \frac{d}{dz}$ رکھتے ہیں، تب

$$\log x = z$$

تفرق کرنے پر

$$\frac{1}{x} = \frac{dz}{dx}$$

اب

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \left(\frac{1}{x}\right)$$

یا

$$x \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} = Dy$$

اس طرح

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= -\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right) \\ &= -\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x}\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx} \end{aligned}$$

$$= -\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{dy}{dz} + \left(\frac{1}{x}\frac{d^2y}{dz^2}\right)\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{x^2}\left[\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right]$$
$$\Rightarrow \qquad x^2\frac{d^2y}{dx^2} = [D^2y - Dy]$$
$$= D(D-1)y$$

اب دی گئی مساوات میں $x\frac{dy}{dx} = Dy$ اور $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y$ رکھتے ہیں۔ تب

$$D(D-1)y + Dy - y = 0$$
$$(D^2-1)y = 0$$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات ہے

$$m^2 - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \qquad m = \pm 1$$

اس لیے اتمامی تفاعل ہے

$$C.F. = C_1x + C_2\frac{1}{x}$$

اب مان لو کہ دی گئی مساوات کا مکمل حل $y = Fx + G\frac{1}{x}$ ہے۔، جہاں F اور G دو x کے تفاعلات ہیں۔ اس لیے

$$y = Fx + G\frac{1}{x}$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = F + x\frac{dF}{dx} - G\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\frac{dG}{dx}$$

F اور G کو اس طرح منتخب کیا جاتا ہے کہ

$$x\frac{dF}{dx} + \frac{1}{x}\frac{dG}{dx} = 0 \qquad ......(2)$$

اس لیے

$$\frac{dy}{dx} = F - G\frac{1}{x^2}$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dF}{dx} + 2G\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}\frac{dG}{dx}$$

مساوات (1) سے

$$\left(\frac{dF}{dx} + 2G\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}\frac{dG}{dx}\right) + \frac{1}{x}\left(F - G\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x^2}\left(Fx + G\frac{1}{x}\right) = e^x$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{dF}{dx} - \frac{1}{x^2}\frac{dG}{dx} = e^x \qquad ......(3)$$

مساوات (2) اور (3) سے

$$\frac{dF}{dx} = \frac{1}{2}e^x, \quad \frac{dG}{dx} = -\frac{1}{2}x^2e^x$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$F = \frac{1}{2}e^x + C \text{ اور } G = -\frac{1}{2}e^x(x^2 - 2x + 2) + D$$

اب مساوات $y = Fx + G\frac{1}{x}$ میں F اور G کی قیمتیں رکھنے پر حاصل ہے

$$y = \left(\frac{1}{2}e^x + C\right)x + \left(-\frac{1}{2}e^x(x^2 - 2x + 2) + D\right)\frac{1}{x}$$
$$= \frac{1}{2}xe^x + Cx - \frac{1}{2}e^x\left(x - 2 + \frac{2}{x}\right) + \frac{D}{x}$$
$$= Cx + \frac{D}{x} + e^x - \frac{e^x}{x}$$

اس لیے دی گئی مساوات کا مکمل حل $y = Cx + \frac{D}{x} + e^x - \frac{e^x}{x}$ ہے۔

مثال3۔ مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = e^x \sin x$ کو پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے سے حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = e^x \sin x \qquad ......(1)$$

سب سے پہلے ہم دی گئی مساوات میں سے مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = 0$ کا حل حاصل کرتے ہیں۔

اس مساوات کے لیے معاون مساوات ہے

$$m^2 - 2m = 0$$
$$m(m-2) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = 0, 2$$

اس لیے اتمامی تفاعل ہے

$$C.F. = C_1 + C_2e^{2x}$$

اب مان لو کہ دی گئی مساوات کا مکمل حل $y = F + Ge^{2x}$ ہے۔، جہاں F اور G دو x کے تفاعلات ہیں۔ اس لیے

$$y = F + Ge^{2x}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dF}{dx} + 2Ge^{2x} + e^{2x}\frac{dG}{dx}$$

F اور G کو اس طرح منتخب کیا جاتا ہے کہ

$$\frac{dF}{dx} + e^{2x}\frac{dG}{dx} = 0 \qquad ......(2)$$

اس لیے

$$\frac{dy}{dx} = 2Ge^{2x}$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4Ge^{2x} + 2e^{2x}\frac{dG}{dx}$$

مساوات(1) سے

$$\left(4Ge^{2x} + 2e^{2x}\frac{dG}{dx}\right) - 2(2Ge^{2x}) = e^x \sin x$$

$$\Rightarrow \qquad 2e^{2x}\frac{dG}{dx} = e^x \sin x$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dG}{dx} = \frac{1}{2}e^{-x}\sin x$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$G = \frac{1}{2}\int e^{-x}\sin x\, dx + C$$

ہم جانتے ہیں $\int e^{ax}\sin bx\, dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{(a)^2+(b)^2}$ اس لیے

$$G = \frac{1}{2}\frac{e^{-x}}{(-1)^2+(1)^2}(-\sin x - \cos x) + C$$

$$= -\frac{1}{4}e^{-x}(\sin x + \cos x) + C$$

$\frac{dG}{dx}$ کی قیمت مساوات $\frac{dF}{dx} + e^{2x}\frac{dG}{dx} = 0$ میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$\frac{dF}{dx} + e^{2x}\left(\frac{1}{2}e^{-x}\sin x\right) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dF}{dx} = -\frac{1}{2}e^x \sin x$$

تکمل کرنے پر

$$F = -\int \frac{1}{2}e^x \sin x\, dx + D$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{e^x}{(1)^2+(1)^2}(\sin x - \cos x) + D$$

$$\Rightarrow \qquad F = -\frac{1}{4}e^x(\sin x - \cos x) + D$$

اب مساوات $y = F + Ge^{2x}$ میں F اور G کی اوپر حاصل کی گئی قیمتیں رکھنے پر

$$y = -\frac{1}{4}e^x(\sin x - \cos x) + D + \left(-\frac{1}{4}e^{-x}(\sin x + \cos x) + C\right)e^{2x}$$

$$= -\frac{1}{4}e^x(\sin x - \cos x) + D - \frac{1}{4}e^x(\sin x + \cos x) + Ce^{2x}$$

$$= -\frac{1}{4}e^x\{2\sin x\} + D + Ce^{2x}$$

$$= -\frac{1}{2}e^x \sin x + Ce^{2x} + D$$

اس لیے دی گئی مساوات کا مکمل حل $y = -\frac{1}{2}e^x \sin x + Ce^{2x} + D$ ہے۔

مثال4۔ مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 1$ کو پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے سے حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 1 \qquad \text{......(1)}$$

سب سے پہلے ہم دی گئی مساوات میں سے مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ کا حل حاصل کرتے ہیں۔
اس مساوات کے لیے معاون مساوات ہے

$$\begin{aligned} & m^2 - 3m + 2 = 0 \\ \Rightarrow \quad & (m-1)(m-2) = 0 \\ \Rightarrow \quad & m = 1, 2 \end{aligned}$$

اس لیے اتمامی تفاعل ہے

$$C.F. = C_1e^x + C_2e^{2x}$$

اب مان لو کہ دی گئی مساوات کا مکمل حل $y = Fe^x + Ge^{2x}$ ہے، جہاں F اور G دو x کے تفاعلات ہیں۔ اس لیے

$$y = Fe^x + Ge^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = Fe^x + e^x\frac{dF}{dx} + 2Ge^{2x} + e^{2x}\frac{dG}{dx}$$

F اور G کو اس طرح منتخب کیا جاتا ہے کہ

$$e^x\frac{dF}{dx} + e^{2x}\frac{dG}{dx} = 0 \qquad \text{......(2)}$$

اس لیے

$$\frac{dy}{dx} = Fe^x + 2Ge^{2x}$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Fe^x + e^x\frac{dF}{dx} + 4Ge^{2x} + 2e^{2x}\frac{dG}{dx}$$

مساوات (1) سے

$$\left(Fe^x + e^x\frac{dF}{dx} + 4Ge^{2x} + 2e^{2x}\frac{dG}{dx}\right) - 3(Fe^x + 2Ge^{2x}) + 2(Fe^x + Ge^{2x}) = 1$$

$$\Rightarrow \quad e^x\frac{dF}{dx} + 2e^{2x}\frac{dG}{dx} = 1 \qquad \text{......(3)}$$

مساوات (2) اور (3) سے

$$\frac{dF}{dx} = -\frac{1}{e^x} = -e^{-x}, \quad \frac{dG}{dx} = \frac{1}{e^{2x}} = e^{-2x}$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$F = e^{-x} + C \text{ اور } G = -\frac{1}{2}e^{-2x} + D$$

اب مساوات $y = Fe^x + Ge^{2x}$ میں F اور G کی مندرجہ بالا حاصل کردہ قیمتیں درج کرنے پر

$$\begin{aligned} y &= e^x(e^{-x} + C) + \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + D\right)e^{2x} \\ &= (1 + Ce^x) + \left(-\frac{1}{2} + De^{2x}\right) \\ &= \frac{1}{2} + Ce^x + De^{2x} \end{aligned}$$

اس لیے دی گئی مساوات کا مکمل حل $y = \frac{1}{2} + Ce^{x} + De^{2x}$ ہے۔

12.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے سے پہلے اور دوسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات کو حل کرنا سیکھا۔

12.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

پیرامیٹرس کا تغیر، متجانس تفرقی مساوات، اتمامی تفاعل، معاون مساوات

12.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

12.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. پیرامیٹرس کے تغیر کا طریقہ کیا ہے؟
2. اتمامی تفاعل لکھو جب کہ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{cosec} x$

12.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

درجہ ذیل مساوات کا حل پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے کی مدد سے حاصل کریے:

1. $\frac{d^2y}{dx^2} - y = \frac{2}{1+e^x}$
2. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x(1+x)\frac{dy}{dx} + 2(1+x)y = x^3$
3. $(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = (1-x)^2$
4. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = \frac{e^x}{x^2}$
5. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = x$
6. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x$

12.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = \frac{e^x}{1+e^x}$ کو پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے کی مدد سے حل کریے جب کہ اس کے لیے اتمامی تفاعل $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$ ہے۔

2. مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 4\tan 2x$ کو پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے کی مدد سے حل کریں۔

جوابات:

12.5.1 معروضی سوالات کے جوابات

2. $C.F. = A\cos x + B\sin x$

12.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $y = Ae^x + Be^{-x} - 1 + e^x \log\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) - e^{-x}\log(1+e^x)$
2. $y = -\frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} + Ax + Bxe^{2x}$
3. $y = Ax + Be^x + (1 + x + x^2)$
4. $y = e^x(A + Bx) - e^x(1 + \log x)$
5. $y == A\cos x + B\sin x + x$
6. $y = e^x(A + Bx) + \frac{x^2e^x}{2}$

12.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + (e^x + e^{2x})\log(e^{-x} + 1) - 1$
2. $y = A\cos 2x + B\sin 2x - \cos 2x \log|\sec 2x + \tan 2x|$

12.6 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Text Book of Differential Equations, Khalil Ahmad, Real World Education Publishers, New Delhi
2. Ordinary and Partial Differential Equations- Rai Singhania, S.Chand & Co., New Delhi
3. A Text Book of B.Sc. (Mathematics), Volume –I , V. Venkateshwara Rao and others, S. Chand & Company

اکائی 13۔ جزوی تفرقی مساواتوں کی تشکیل-I

(Formation of Partial Differential Equations - I)

اکائی کے اجزا

13.0 تمہید (Introduction)

جزوی تفرقی مساواتوں کو مختلف اقسام کے مظاہر کی وضاحت کرنے کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے، جیسے آواز، حرارت، ڈفیوزن، الیکٹرو ڈائنامکس، الاسٹی سٹی اور کوانٹم میکانکس۔ اس لیے یہ ضروری ہو جاتا ہے کہ وہ تکنیک تیار کی جایے جس کی مدد سے جزوی تفرقی مساواتوں کی وسیع اقسام کا حل حاصل کیا جا سکے۔

13.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- جزوی تفرقی مساوات اور اس کی مختلف اقسام سے متاعرف ہو سکیں۔
- کسی دیے گئے ضابطے سے اختیاری مستقلات کو ساقط کر کے جزوی تفرقی مساواتوں کو تشکیل دے سکیں۔

13.2 جزوی تفرقی مساواتیں (Partial Differential Equations)

تعریف: وہ مساوات جس میں دو یا زیادہ غیر تابع (Independent) متغیرات (Variables) کے کسی تفاعل کے ایک یا زیادہ جزوی مشتقات (Derivatives) موجود ہوں، جزوی تفرقی مساوات کہلاتی ہے۔ درجہ ذیل جزوی تفرقی مساوات کی کچھ مثالیں دی گئی ہیں:

1. $$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=z+xy$$
2. $$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=2x\frac{\partial z}{\partial x}$$
3. $$z\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=x$$
4. $$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=xyz$$
5. $$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{1/2}$$
6. $$y\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\}=z\frac{\partial z}{\partial y}$$

13.2.1 جزوی تفرقی مساوات کا رتبہ اور درجہ (Order and Degree of Partial Differential Equations)

تعریف: کسی جزوی تفرقی مساوات میں موجود اعظم تریں جزوی مشتق کے رتبے کو اس جزوی تفرقی مساوات کا رتبہ کہتے ہیں۔ مثال کے لیے مساوات 1، 3، 4 اور 6 پہلے رتبے کی جزوی تفرقی مساوات ہیں، جب کہ مساوات 5 دوسرے رتبے کی اور مساوات 2 کا رتبہ تین ہے۔

تعریف: کسی جزوی تفرقی مساوات کو ریشن لائز (Rationalize) کرنے کے بعد اس میں موجود اعظم ترین رتبہ کے مشتق کی قوت (Power) کو اس جزوی تفرقی مساوات کا درجہ (Degree) کہتے ہیں۔ مثال کے لیے مساوات 1، 2، 3 اور 4 پہلے درجے کی جزوی تفرقی مساوات ہیں، جب کہ مساوات 5 اور 6 کا درجہ دو ہے۔

13.2.2 خطی اور غیر خطی جزوی تفرقی مساواتیں(linear & Nonlinear Partial Differential Equations)

تعریف: اگر کسی جزوی تفرقی مساوات میں موجود تابع متغیر (Dependent Variable) اور اس کے جزوی **مشتق** کا درجہ ایک ہو اور وہ ضرب کی شکل میں بھی موجود نہ ہوں، تب اس طرح کی مساوات کو خطی جزوی تفرقی مساوات کہتے ہیں۔ اگر جزوی تفرقی مساوات خطی نہ ہو تو اس مساوات کو غیر خطی جزوی تفرقی مساوات کہتے ہیں۔

مثال کے لیے مساوات 1 اور 4 خطی جزوی تفرقی مساوات ہیں، جب کہ مساوات 2، 3، 5 اور 6 غیر خطی جزوی تفرقی مساوات ہیں۔

نوٹ: اس اکائی میں ہم دو غیر تابع متغیرات x اور y کو تمام جگہ استعمال کریں گے اور z کو تابع متغیر کی طرح ہی استعمال کریں گے۔ کچھ علامتی اظہار درجہ ذیل ہیں جو اس اکائی میں استعمال ہوں گے:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}, r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\ , t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

اگر n غیر تابع متغیرات $x_1, x_2, \cdots, x_n$ کا کوئی انجان (Unknown) تفاعل جس کا تابع متغیر z ہو اس کے لیے درجہ ذیل علامتی اظہار استعمال ہوں گے:

$$p_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1}, p_2 = \frac{\partial z}{\partial x_2}, p_3 = \frac{\partial z}{\partial x_3}, \cdots, p_n = \frac{\partial z}{\partial x_n}$$

یا کچھ جگہ یہ علامتی اظہار بھی استعمال کیے جاتے ہیں

$$u_x = \frac{\partial z}{\partial x}, u_y = \frac{\partial z}{\partial y}, u_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

13.2.3 جزوی تفرقی مساواتوں کی درجہ بندی(Classification of Partial Differential Equations)

a) خطی جزوی تفرقی مساوات(Linear Partial Differential Equations): اگر کسی مساوات $\varphi(x, y, z, p, q) = 0$ میں p, q, z خطی ہوں تو اس مساوات کو خطی جزوی تفرقی مساوات کہتے ہیں۔ دوسرے الفاظ میں خطی جزوی تفرقی مساوات اس شکل میں ہوتی ہے

$$\eta(x, y)p + \zeta(x, y)q = \chi(x, y)z + \psi(x, y)$$

مثال کے لیے $yxp + y^2q = xyz + 2x^2$ اور $p + 3q = z + \cot(y - 3x)$ دونوں پہلے رتبے کی خطی جزوی تفرقی مساوات ہیں۔

b) نصف خطی جزوی تفرقی مساوات(Semi-Linear Partial Differential Equations): پہلے رتبے کی جزوی تفرقی مساوات $\varphi(x, y, z, p, q) = 0$ میں اگر p اور q خطی ہوں اور p اور q کے ضریب x اور y کے ہی تفاعل ہوں تو اس مساوات کو نصف خطی جزوی تفرقی مساوات کہتے ہیں۔ دوسرے الفاظ میں نصف خطی جزوی تفرقی مساوات اس شکل میں ہوتی ہے

$$\eta(x, y)p + \zeta(x, y)q = \chi(x, y, z)$$

مثال کے لیے $xp + yq = xyz$ اور $yp + xq = xyz^2(x + y)(x - y)$ دونوں پہلے رتبے کی نصف خطی جزوی تفرقی مساوات ہیں۔

c) قواصی خطی جزوی تفرقی مساوات(Quasi-Linear Partial Differential Equations): پہلے رتبے کی جزوی تفرقی مساوات $\varphi(x, y, z, p, q) = 0$ قواصی خطی جزوی تفرقی مساوات کہلاتی ہے اگر یہ p اور q میں خطی ہوں اور وہ اس شکل میں ہو

$$\eta(x, y, z)p + \zeta(x, y, z)q = \chi(x, y, z)$$

مثال کے لیے $xzp + yzq = xy$ اور $(x^2 - y^2 - z^2)p + 2xyq = 2xz$ دونوں پہلے رتبے کی قواصی- خطی جزوی تفرقی مساوات ہیں۔

d) غیر خطی جزوی تفرقی مساوات(Non-Linear Partial Differential Equations): پہلے رتبے کی جزوی تفرقی مساوات $\varphi(x, y, z, p, q) = 0$ غیر خطی جزوی تفرقی مساوات کہلاتی ہے اگر یہ p اور q میں خطی نہ ہو۔

مثال کے لیے $y^2p^2 + x^2q^2 = x^2y^2z^2$، $p + q = zpq$ اور $q = 3p^2$ سبھی پہلے رتبے کی غیر خطی جزوی تفرقی مساوات ہیں۔

13.2.4 جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل(Formation of Partial Differential Equations)

13.2.4.1 اختیاری مستقل کے اخراج سے تشکیل(Formation by Elimination of Arbitrary Constant)

فرض کرو کہ $\varphi(x, y, z, A, B) = 0$ کوئی مساوات ہے، جہاں A اور B اختیاری مستقلات ہیں۔ فرض کرو کہ z دو غیر تابع متغیرات x اور y کا ایک تفاعل ہے۔ اب

$$\varphi(x, y, z, A, B) = 0 \qquad .....(1)$$

مساوات (1) کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی طور پر(Partially) الگ الگ تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

یا

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + p\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \qquad ...(2a)$$

اور اسی طرح

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} + q\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \qquad ...(2b)$$

مساوات (1)اور(2a)،(2b) کی مدد سے اختیاری مستقلات A اور B کو ہٹا کر درجہ ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\phi(x, y, z, p, q) = 0 \qquad .....(3)$$

جو کہ پہلے رتبے کی جزوی تفرقی مساوات ہے۔

نوٹ: یہاں پر ہمارے سامنے درجہ ذیل تین صورتیں پیدا ہو سکتی ہیں:

I. جب کسی مساوات میں غیر تابع متغیر کی تعداد اختیاری مستقلات سے زیادہ ہوتی ہے تو ہمیں ایک سے زیادہ پہلے رتبے کی جزوی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہیں۔ مثال کے لیے اگر A کوئی اختیاری مستقل ہو اور

$$z = x + By \qquad .....(1)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = B$$

مساوات (1) میں B کی جگہ $\frac{\partial z}{\partial y}$ رکھنے پر

$$z = x + y\frac{\partial z}{\partial y}$$

مساوات $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$ اور $z = x + y\frac{\partial z}{\partial y}$ دی گئی مساوات کے لیے پہلے رتبے کی جزوی تفرقی مساواتیں ہیں۔

II. جب کسی مساوات میں غیر تابع متغیر کی تعداد اختیاری مستقل کی تعداد کے برابر ہوتی ہے تو ہمیں پہلے رتبے کی یکتا (Unique) جزوی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ مثال کے لیے اگر A اور B اختیاری مستقلات ہوں اور

$$z = Ax^3 + By^3 \qquad .....(1)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = 3Ax^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3By^2$$

$$\Rightarrow \qquad x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 3(Ax^3 + By^3) = 3z$$

اس لیے $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 3z$ دی گئی مساوات کے لیے یکتا جزوی تفرقی مساوات ہے۔

III. جب کسی مساوات میں غیر تابع متغیر کی تعداد اختیاری مستقلات کی تعداد سے کم ہوتی ہے تو ہمیں ایک سے زیادہ رتبہ کی جزوی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ مثال کے لیے اگر A، B اور C اختیاری مستقلات ہوں اور

$$z = Ax^2 + Bxy + Cy^2 \qquad .....(1)$$

اس مساوات کو دوبار بہ لحاظ x اور دوبار بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2Ax + By \qquad .....(2)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2A \qquad .....(3)$$

اور

$$\frac{\partial z}{\partial y} = Bx + 2Cy \qquad .....(4)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2C \qquad .....(5)$$

مساوات (2) کو بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = B \qquad .....(6)$$

مساوات (3)، (5) اور (6) سے

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2Ax^2 + 2Cy^2 + 2Bxy = 2z$$

اس طرح ہمیں دوسرے رتبے کی جزوی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

مثال1۔ ضابطہ $z = Ax + (2 - A)y + B$ سے اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کریے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$z = Ax + (2 - A)y + B \qquad .....(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A$$

اور

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2 - A$$

اس لیے

$$2 - \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2$$

اس طرح اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کرنے پر جزوی تفرقی مساوات $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial x}$ حاصل ہوتی ہے۔

مثال2۔ اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کر کے ضابطہ $Az = A^2x + y - B$ کے لیے جزوی تفرقی مساوات تشکیل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$Az = A^2x + y - B \qquad .....(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A$$

اور

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{A}$$

ان دونوں مساواتوں سے A کو ساقط کرنے پر

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 1$$

جو کہ دی گئی مساوات کے لیے پہلے رتبے اور پہلے درجے کی جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال3۔ ضابطہ $z = Ax + A^2y^2 + B$ سے اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کریے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$z = Ax + A^2y^2 + B \qquad .....(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A \qquad .....(2)$$

اور

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2A^2 y \qquad ....(3)$$

مساوات (2) سے A کی قیمت مساوات (3) میں درج کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 y$$

اس طرح اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کرنے پر جزوی تفرقی مساوات $\frac{\partial z}{\partial y} = 2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 y$ حاصل ہوتی ہے۔

مثال4۔ اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کر کے $z = Ax + By + A^3 + B^3$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل دیجیے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$z = Ax + By + A^3 + B^3 \qquad .....(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A$$

اور

$$\frac{\partial z}{\partial y} = B$$

ان مساواتوں سے A اور B کی یہ قیمتیں مساوات (1) میں درج کرنے پر

$$z = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^3 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^3$$

جو کہ دی گئی مساوات کے لیے پہلے رتبے اور پہلے درجے کی جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال5۔ اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کر کے $z^2 = Ax^3 + By^3 + AB$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$z^2 = Ax^3 + By^3 + AB \qquad .....(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$2z\,\frac{\partial z}{\partial x} = 3Ax^2 \Rightarrow A = \frac{2z}{3x^2}\frac{\partial z}{\partial x} \qquad .....(2)$$

اور

$$2z\frac{\partial z}{\partial y} = 3By^2 \Rightarrow B = \frac{2z}{3y^2}\frac{\partial z}{\partial y} \qquad ....(3)$$

A اور B کی قیمتیں مساوات (1) میں درج کرنے پر

$$\mathrm{z}^2 = x^3\left(\frac{2z}{3x^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + y^3\left(\frac{2z}{3y^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(\frac{2z}{3x^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{2z}{3y^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 9x^2y^2\mathrm{z}^2 = 6x^3y^2z\frac{\partial z}{\partial x} + 6x^2y^3z\frac{\partial z}{\partial y} + 4\mathrm{z}^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad 9x^2y^2z = 6x^3y^2\frac{\partial z}{\partial x} + 6x^2y^3z\frac{\partial z}{\partial y} + 4z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

جو کہ دی گئی مساوات کے لیے ضروری جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال6۔ مساوات $(x-A)^2 + (y-B)^2 + z^2 = r^2$ سے اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کریے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(x-A)^2 + (y-B)^2 + z^2 = r^2 \qquad .....(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$2(x-A) + 2z\,\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad (x-A) = -z\,\frac{\partial z}{\partial x}$$

اور

$$2(y-B) + 2z\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad (y-B) = -z\,\frac{\partial z}{\partial y}$$

$x-A$ اور $y-B$ کی یہ قیمتیں مساوات(1) میں درج کرنے پر

$$\left(-z\,\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(-z\,\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + z^2 = r^2$$

$$\Rightarrow \qquad z^2\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right\} = r^2$$

جو کہ اختیاری مستقلات h اور k کو ساقط کرنے پر حاصل جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال7۔ مساوات $z = (x^2+A)(y^2+B)$ سے اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کریے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$z = (x^2+A)(y^2+B) \qquad .....(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x(y^2+B)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2x}\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 + B$$

اور

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y(x^2+A)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2y}\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + A$$

x^2+A اور y^2+B کی یہ قیمتیں مساوات(1) میں درج کرنے پر

$$z = \left(\frac{1}{2y}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{2x}\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad 4xyz = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

اس طرح اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کرنے پر جزوی تفرقی مساوات $4xyz = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ حاصل ہوتی ہے۔

مثال 8۔ اختیاری مستقلات c اور p کو ساقط کر کے $z = ce^{pt}\sin px$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$z = ce^{pt}\sin px \qquad .....(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ t دو بار جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial x} = cpe^{pt}\cos px$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -cp^2e^{pt}\sin px$$

اور

$$\frac{\partial z}{\partial t} = cpe^{pt}\sin px$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = cp^2e^{pt}\sin px$$

اس طرح

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

جو کہ دی گئی مساوات کے لیے مطلوبہ جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال 9۔ اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کر کے $z = Ae^{-B^2t}\cos Bx$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$z = Ae^{-B^2t}\cos Bx \qquad .....(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ t دو بار جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -ABe^{-B^2t}\sin Bx$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -AB^2e^{-B^2t}\cos Bx$$

اور

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -AB^2e^{-B^2t}\cos Bx$$

اس طرح

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

جو کہ دی گئی مساوات کے لیے مطلوبہ جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال10۔ اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کر کے مساوات $e^{\left(\frac{1}{z-\frac{x^2}{y}}\right)} = \frac{Ax^2}{y^2} + \frac{B}{y}$ سے جزوی تفرقی مساوات حاصل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$e^{\left(\frac{1}{z-\frac{x^2}{y}}\right)} = \frac{Ax^2}{y^2} + \frac{B}{y} \qquad .....(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y دو بار جزوی تفرق کرنے پر

$$-e^{\left(\frac{1}{z-\frac{x^2}{y}}\right)} \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{2x}{y}\right)\left(\frac{1}{z-\frac{x^2}{y}}\right)^2 = 2A\left(\frac{x}{y^2}\right) \qquad .....(2)$$

اور

$$-e^{\left(\frac{1}{z-\frac{x^2}{y}}\right)} \left(\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{x^2}{y^2}\right)\left(\frac{1}{z-\frac{x^2}{y}}\right)^2 = -2A\left(\frac{x^2}{y^3}\right) - \frac{B}{y^2} \qquad .....(3)$$

مساوات(2) میں x سے اور مساوات (3) میں $2y$ سے ضرب دے کر ان کو جمع کرتے ہیں جس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$-e^{\left(\frac{1}{z-\frac{x^2}{y}}\right)} \left(\frac{1}{z-\frac{x^2}{y}}\right)^2 \left[x\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{2x}{y}\right) + 2y\left(\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{x^2}{y^2}\right)\right] = 2A\left(\frac{x^2}{y^2}\right) - 4A\left(\frac{x^2}{y^2}\right) - \frac{2B}{y}$$

$$\Rightarrow \qquad -e^{\left(\frac{1}{z-\frac{x^2}{y}}\right)} \left(\frac{1}{z-\frac{x^2}{y}}\right)^2 \left(x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -2\left(\frac{Ax^2}{y^2} + \frac{B}{y}\right)$$

مساوات(1) کی مدد سے

$$\left(\frac{1}{z-\frac{x^2}{y}}\right)^2 \left(x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 2$$

$$\Rightarrow \qquad \left(x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 2\left(z - \frac{x^2}{y}\right)^2$$

جو کہ دی گئی مساوات کے لیے مطلوبہ جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال11۔ اگر تمام قائم دائری مقروط(Right Circular Cones) کا سٹ جن کے محور (Axes)، z – محور پر واقع(Coincide) ہوں اور جس کا نصف عمودی زاویہ ϕ ، راس یا چوٹی(Vertex) $(0,0,a)$ ہے تو اس کے لیے جزوی تفرقی مساوات حاصل کریے۔

حل۔ تمام قائم دائری مقروط کا سٹ جن کا محور (Axis)، z – محور پر واقع ہوتا ہے اور جس کا نصف عمودی زاویہ ϕ اور جس کا راس یا چوٹی $(0,0,a)$ ہے، کی عام مساوات(General Equation) درجہ ذیل ہوتی ہے

$$x^2 + y^2 = (z-a)^2 tan^2\phi \qquad ......(1)$$

جہاں a اور ϕ اختیاری مستقلات ہیں۔

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y دوبار جزوی تفرق کرنے پر

$$2x = 2(z-a)\frac{\partial z}{\partial x} tan^2\phi$$

$$\Rightarrow \qquad x = (z-a)tan^2\phi\frac{\partial z}{\partial x} \qquad ......(2)$$

اور

$$2y = 2(z-a)\frac{\partial z}{\partial y}\tan^2\phi$$

$$\Rightarrow \qquad y = (z-a)\tan^2\phi\frac{\partial z}{\partial y} \qquad ......(3)$$

مساوات (2) کو مساوات (3) سے تقسیم دین پر

$$\frac{x}{\mathrm{y}} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}$$

$$\Rightarrow \qquad x\frac{\partial z}{\partial y} = y\frac{\partial z}{\partial x}$$

جو کہ دی گئی مساوات کے لیے مطلوبہ جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال12۔ مقروط $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gxz + 2hxy = 0$ کے لیے جزوی تفرقی مساوات حاصل کرو۔

حل۔ دی گئی مقروط کی عام مساوات ہے

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gxz + 2hxy = 0 \qquad ......(1)$$

اس کا راس یا چوٹی مبدا پر ہوتا ہے، جہاں h, g, f, c, b, a پیرامیٹرس ہیں۔

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2ax + 2cz\frac{\partial z}{\partial x} + 2fy\frac{\partial z}{\partial x} + 2gz + 2gx\frac{\partial z}{\partial x} + 2hy = 0$$

$$\Rightarrow \qquad ax + czp + fyp + gz + gxp + hy = 0 \qquad ......(2)$$

اور

$$2by + 2cz\frac{\partial z}{\partial y} + 2fy\frac{\partial z}{\partial y} + 2fz + 2gx\frac{\partial z}{\partial y} + 2hx = 0$$

$$\Rightarrow \quad by + czq + fyq + fz + gxq + hx = 0 \qquad ......(3)$$

مساوات (2) کو x سے اور مساوات (3) کو y سے ضرب دے کر جمع کرنے پر

$$(ax^2 + by^2 + fyz + gxz + 2hxy) + (gx + fy + cz)(px + qy) = 0$$

$$\Rightarrow \quad -(cz^2 + fyz + gxz) + (gx + fy + cz)(px + qy) = 0$$

$$\Rightarrow \quad -z(cz + fy + gx) + (gx + fy + cz)(px + qy) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (gx + fy + cz)(px + qy - z) = 0$$

$$\Rightarrow \quad px + qy - z = 0$$

جو کہ مقروط کے لیے مطلوبہ جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال13۔ ضابطہ $2z = \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2}$ سے اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کریے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$2z = \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} \qquad ......(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$2\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{A^2}$$

$$\Rightarrow \quad xp = \frac{x^2}{A^2} \qquad ......(2)$$

اور

$$2\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{B^2}$$

$$\Rightarrow \quad qy = \frac{y^2}{B^2} \qquad ......(3)$$

مساوات(1)، (2) اور(3)سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2z = px + qy$$

اس طرح اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کرنے پر جزوی تفرقی مساوات $2z = px + qy$ حاصل ہوتی ہے۔

مثال14۔ ضابطہ $2z = (Ax + y)^2 + 2B$ سے اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$2z = (Ax + y)^2 + 2B \qquad ......(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$2\frac{\partial z}{\partial x} = 2A(Ax + y)$$

$$\Rightarrow \quad p = A(Ax + y) \qquad ......(2)$$

اور

$$2\frac{\partial z}{\partial y} = 2(Ax + y)$$

$$\Rightarrow \qquad q = (Ax + y) \qquad ......(3)$$

مساوات (2) اور مساوات (3) سے

$$\frac{p}{q} = A$$

مساوات (3) میں A کی قدر درج کرنے پر

$$q = \frac{p}{q}x + y$$

$$\Rightarrow \qquad q^2 = px + qy$$

اس طرح اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کرنے پر جزوی تفرقی مساوات $q^2 = px + qy$ ہے۔

مثال 15۔ اختیاری مستقلات A، B اور C کو ساقط کر کے $z = A(x+y) + B(x-y) + ABt + \frac{1}{2}C$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$z = A(x+y) + B(x-y) + ABt + \frac{1}{2}C \qquad .....(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x، y اور بہ لحاظ t جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A + B$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = A - B$$

اور

$$\frac{\partial z}{\partial t} = AB$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$(A+B)^2 + (A-B)^2 = 4AB$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 4\frac{\partial z}{\partial t}$$

جو کہ دی گئی مساوات کے لیے مطلوبہ جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال 16۔ مساوات $\log(Az-1) = x + Ay + B^2$ سے اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کریے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$\log(Az-1) = x + Ay + B^2 \qquad .....(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{A\frac{\partial z}{\partial x}}{Az-1} = 1$$

$$\Rightarrow \qquad A = \frac{-1}{\frac{\partial z}{\partial x} - z}$$

اور

$$\frac{A\frac{\partial z}{\partial y}}{Az-1} = A$$

$$\Rightarrow \qquad A = \frac{1+\frac{\partial z}{\partial y}}{z}$$

اس لیے

$$\frac{-1}{\frac{\partial z}{\partial x} - z} = \frac{1+\frac{\partial z}{\partial y}}{z}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{-1}{\frac{\partial z}{\partial x} - z} = \frac{1+\frac{\partial z}{\partial y}}{z}$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x} - z\right)\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -z$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial z}{\partial x}\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right) - z - z\frac{\partial z}{\partial y} = -z$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial z}{\partial x}\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z\frac{\partial z}{\partial y}$$

مثال17۔ مبدا سے k دوری پر موجود تمام مستویوں(Planes) کے لیے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

حل۔ فرض کرو کہ مبدا سے مستقل(Constant) دوری k پر مستویوں (Planes) کی مساوات درجہ ذیل ہے

$$lx + my + nz = k \qquad .....(1)$$

اور مستوی پر عمودی سمتی کو سائنس(Direction Cosines) اس طرح سے ہیں کہ

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \qquad .....(2)$$

مساوات(1) کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$l + n\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad l = -n\frac{\partial z}{\partial x} \qquad .....(3)$$

اور

$$m + n\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad m = -n\frac{\partial z}{\partial y} \qquad .....(4)$$

مساوات(2) میں l اور m کی قیمتیں رکھنے پر

$$\left(-n\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(-n\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + n^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right\} n^2 = 1$$

$$\Rightarrow \qquad n = \left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right\}^{-1/2}$$

مساوات(3) اور مساوات(4) سے

$$l = -\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right\}^{-1/2} \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$m = -\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right\}^{-1/2} \frac{\partial z}{\partial y}$$

مساوات(1) میں l، m اور n کی قیمتیں درج کرنے پر

$$-\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right\}^{-1/2} \left(\frac{\partial z}{\partial x}x + \frac{\partial z}{\partial y}y - z\right) = k$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial z}{\partial x}x + \frac{\partial z}{\partial y}y - z = -k\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

جو کہ مبدا سے مستقل دوری پر موجود تمام مستویوں کے لیے جزوی تفرقی مساوات ہے۔

13.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی کے مطالعے کے بعد آپ نے جزوی تفرقی مساوات کی تعریف اور اس کی مختلف اقسام کی بنیادی جانکاری حاصل کی ہو گی اور کسی ضابطہ سے اختیاری مستقلات کو ساقط کر کے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرنا سیکھ لیا ہو گا۔

13.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

خطی، غیر خطی، جزوی تفرقی مساوات، نصف خطی تفرقی مساوات، قواصی خطی جزوی تفرقی مساوات

13.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

13.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. خطی اور غیر خطی جزوی تفرقی مساواتوں کی تعریف کرو۔
2. کسی جزوی تفرقی مساوات کے رتبے اور درجہ کی تعریف کرو۔
3. $yp + xq = \frac{x^2z^2}{y^2}$ نصف خطی جزوی تفرقی مساوات ہے۔ (T/F)
4. مساوات $f(x, y, z, p, q) = 0$ ایک .... جزوی تفرقی مساوات کہلاتی ہے اگر یہ p اور q میں خطی ہوں اور اس کی شکل $P(x, y, z)p + Q(x, y, z)q = R(x, y, z)$ ہو۔
5. $pq = z$ دونوں پہلے رتبے کی خطی جزوی تفرقی مساوات ہیں۔ (T/F)
6. مساوات $(x^2 - yz)p + (y^2 - zx)q = z^2 - xy$ پہلے رتبے کی قواصی- خطی جزوی تفرقی مساوات ہے۔ (T/F)
7. جب کسی مساوات میں غیر تابع متغیر کی تعداد اختیاری مستقل سے زیادہ ہوتی ہے تو ہمیں پہلے رتبے کی ایک جزوی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہیں۔ (T/F)
8. جب کسی مساوات میں غیر تابع متغیر کی تعداد اختیاری مستقل کی تعداد سے کم ہوتی ہے تو ہمیں ایک سے زیادہ رتبے کی جزوی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ (T/F)

13.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. اختیاری مستقلات a اور b کو ساقط کر کے $z = ax^3 + by^3$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔
2. اختیاری مستقلات a اور b کو ساقط کر کے $4z = \left(ax + \frac{y}{a} + b\right)^2$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔
3. اختیاری مستقلات a،b اور c کو ساقط کر کے $z = ax^2 + bxy + cy^2$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔
4. اختیاری مستقلات a اور b کو ساقط کر کے $ax^2 + by^2 + z^2 = 1$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔
5. ثابت کرو کہ $z = Ax + By + f(A, B)$ سے A, B کے لیے جزوی تفرقی مساوات $z = px + qy + f(p, q)$ ہے۔
6. اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کر کے $z = Axe^y + \frac{1}{2}A^2e^{2y} + B$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔
7. اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کر کے $z = Ax + By + A^2 + B^2$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل دیجیے۔
8. اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کر کے $z = (x - A)^2 + (y - B)^2$ سے جزوی تفرقی مساوات کو تشکیل دیجیے۔
9. ضابطہ $z = A(x + y) + B$ سے اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کریے۔
10. اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کر کے ضابطہ $z = Ax + By + AB$ کے لیے جزوی تفرقی مساوات تشکیل کرو۔
11. اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کر کے ضابطہ $z = (x + A)(y + B)$ کے لیے جزوی تفرقی مساوات تشکیل کرو۔
12. اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کر کے ضابطہ $z = (x^3 + A)(y^3 + B)$ کے لیے جزوی تفرقی مساوات تشکیل کرو۔

13.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات(Long Answer Type Questions)

1. ان تمام کرہوں(Spheres) کے لیے جزوی تفرقی مساوات حاصل کرو جن کا مرکز XY مستوی(Plane) پر ہو اور جس کا نصف قطر 4 ہو۔
2. x اور y محاور پر یکساں مقطوعہ (Intercept) بنانے والی مستوی کی جزوی تفرقی مساوات حاصل کریے۔
3. ان کرہوں کے خاندان کے لیے جزوی تفرقی مساوات حاصل کرو جس کا مرکز مستوی $x - y = 0$ پر ہو اور جس کا نصف قطر 7 ہو۔
4. z۔ محور پر مرکز والے تمام کرہوں کے لیے جزوی تفرقی مساوات حاصل کرو۔
5. اختیاری مستقلات b،a اور c کو ساقط کرکے $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

جوابات:

13.5.1 معروضی سوالات کے جوابات

3. T
4. قواصی خطی
5. F
6. T
7. F
8. T

13.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 3z$
2. $z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$
3. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2z$
4. $z\left(z - x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 1$
6. $\frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$
7. $z = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$
8. $4z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$

.9 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$

.10 $z = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$

.11 $z = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$

.12 $9x^2y^2z = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$

13.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

.1 $(x-y)^2(p^2+q^2+1) = 16(p-q)^2$

.2 $p - q = 0$

.3 $(x-y)^2(p^2+q^2+1) = 49(p-q)$

.4 $xq - yp = 0$

.5 اس کے تین ممکنہ حل $-z\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0$، $-z\frac{\partial z}{\partial y} + yz\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0$ اور $z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ ہیں۔

13.6 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Ordinary and Partial Differential Equations- Rai Singhania, S.Chand & Co., New Delhi

اکائی 14۔ جزوی تفرقی مساواتوں کی تشکیل-II

(Formation of Partial Differential Equations - II)

اکائی کے اجزا

14.0 تمہید (Introduction)

گزشتہ اکائی میں ہم نے جزوی تفرقی مساوات کی بنیادی معلومات حاصل کی اور پھر دیے گئے ضابطے سے اختیاری مستقلات کو ساقط کر کے اس کی تشکیل دینا سیکھا۔ اس اکائی میں ہم جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل اختیاری تفاعلات کے اخراج سے حاصل کرنا سیکھیں گے۔

14.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ جزوی تفرقی مساواتوں کی تشکیل اختیاری تفاعلات کو ساقط کر کے کر سکیں۔

14.2 جزوی تفرقی مساواتوں کی تشکیل (Formation of Partial Differential Equations)

14.2.1 اختیاری تفاعل کے اخراج سے جزوی تفرقی مساواتوں کی تشکیل

(Formation of Partial Differential Equations by Elimination of Arbitrary Function)

فرض کرو کہ $f(u,v) = 0$ کوئی مساوات ہے، جہاں u اور v غیر تابع متغیرات x، y اور z کے تفاعلات ہیں اور f ایک اختیاری تفاعل ہے۔ اب

$$f(u,v) = 0 \qquad .....(1)$$

مساوات (1) کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی طور پر (Partially) الگ الگ تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0 \qquad .....(2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0 \qquad .....(3)$$

مساوات (2) اور (3) سے $\frac{\partial f}{\partial u}$ اور $\frac{\partial f}{\partial v}$ کو ہٹانے پر

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}q\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}p\right)=0$$

$$p\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}\right)+q\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$Pp+Qq=R \qquad .....(4)$$

جہاں

$$P=\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$Q = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$R = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}$$

مساوات(4)پہلے رتبے کی جزوی تفرقی مساوات ہے۔

نوٹ: اگر کسی مساوات میں دو اختیاری تفاعلات موجود ہوں تو اس سے حاصل جزوی تفرقی مساوات کا رتبہ دو سے زیادہ ہو گا۔

اب ہم کچھ مثالوں سے اختیاری تفاعل کے اخراج سے جزوی تفرقی مساوات حاصل کرنا سمجھتے ہیں۔

مثال1۔ اختیاری تفاعل ϕ کو ساقط کر کے $z = e^{mt}\phi(t-x)$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$z = e^{mt}\phi(t-x) \qquad .....(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ t جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{mt}\frac{\partial}{\partial x}\{\phi(t-x)\} \times (-1)$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -e^{mt}\phi'(t-x) \qquad .....(2)$$

اور

$$\frac{\partial z}{\partial t} = me^{mt}\phi(t-x) + e^{mt}\frac{\partial}{\partial t}\phi(t-x)$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = me^{mt}\phi(t-x) + e^{mt}\phi'(t-x) \qquad .....(3)$$

مساوات(1)،(2) اور(3) سے

$$\frac{\partial z}{\partial t} = mz - \frac{\partial z}{\partial x}$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} = mz$$

جو کہ پہلے رتبے کی مطلوبہ جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال2۔ اختیاری تفاعلات ϕ اور ψ کو ساقط کر کے $z = \phi(x+iy) + \psi(x-iy)$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$z = \phi(x+iy) + \psi(x-iy) \qquad .....(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p = \phi'(x+iy) + \psi'(x-iy) \qquad .....(2)$$

اور

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q = i\phi'(x+iy) - i\psi'(x-iy) \qquad .....(3)$$

مساوات(2) کو بہ لحاظ x اور مساوات(3) کو بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \phi''(x+iy) + \psi''(x-iy) \qquad .....(4)$$

اور

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = i^2\phi''(x+iy) + i^2\psi''(x-iy)$$
$$= -\phi''(x+iy) - \psi''(x-iy)$$

مساوات(4) سے

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

اس لیے $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ دوسرے رتبے کی مطلوبہ جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال3۔ اختیاری تفاعل ϕ کو ساقط کر کے $z = \phi(x^2+y^2)$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$z = \phi(x^2+y^2) \qquad .....(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\{\phi(x^2+y^2)\} \times (2x)$$
$$\Rightarrow \quad p = 2x\phi'(x^2+y^2) \qquad .....(2)$$

اور

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\{\phi(x^2+y^2)\} \times (2y)$$
$$\Rightarrow \quad q = 2y\phi'(x^2+y^2) \qquad .....(3)$$

مساوات (2) اور(3) سے

$$\frac{p}{q} = \frac{x}{y}$$
$$\Rightarrow \quad py - qx = 0$$

جو کہ پہلے رتبے کی مطلوبہ جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال4۔ $z = (x+y)\phi(x^2-y^2)$ سے اختیاری تفاعل ϕ کو ساقط کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$z = (x+y)\phi(x^2-y^2) \qquad .....(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x+y)\frac{\partial}{\partial x}\{\phi(x^2-y^2)\} \times (2x) + \phi(x^2-y^2)$$

$$\Rightarrow \qquad p = 2x(x+y)\phi'(x^2-y^2) + \phi(x^2-y^2) \qquad .....(2)$$

اور

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x+y)\frac{\partial}{\partial y}\{\phi(x^2-y^2)\} \times (-2y) + \phi(x^2-y^2)$$

$$\Rightarrow \qquad q = -2y(x+y)\phi'(x^2-y^2) + \phi(x^2-y^2) \qquad .....(3)$$

مساوات (2) اور (3) سے

$$\begin{aligned} py + qx &= 2xy(x+y)\phi'(x^2-y^2) + y\phi(x^2-y^2) - 2xy(x+y) \times \\ &\quad \phi'(x^2-y^2) + x\phi(x^2-y^2) \\ &= (x+y)\phi(x^2-y^2) \end{aligned}$$

جو کہ پہلے رتبے کی مطلوبہ جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال5۔ اختیاری تفاعل ϕ کو ساقط کرکے $z = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$z = \phi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad .....(1)$$

من درجہ بالا مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\phi\left(\frac{y}{x}\right)\right\} \times \left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad p = -\frac{y}{x^2}\phi'\left(\frac{y}{x}\right) \qquad .....(2)$$

اور

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\phi\left(\frac{y}{x}\right)\right\} \times \left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad q = \frac{1}{x}\phi'\left(\frac{y}{x}\right) \qquad .....(3)$$

مساوات (2) اور (3) سے

$$\frac{p}{q} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{\frac{1}{x}} = -\frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \qquad px + qy = 0$$

جو کہ پہلے رتبے کی مطلوبہ جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال6۔ اختیاری تفاعل f کو ساقط کر کے $z = y^2 + 2f\left(\frac{1}{x} + \log y\right)$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$z = y^2 + 2f\left(\frac{1}{x} + \log y\right) \qquad .....(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{2f\left(\frac{1}{x} + \log y\right)\right\} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad p = -\frac{2}{x^2} f'\left(\frac{1}{x} + \log y\right)$$

$$\Rightarrow \qquad -px^2 = 2f'\left(\frac{1}{x} + \log y\right) \qquad .....(2)$$

اور

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + \frac{\partial}{\partial y}\left\{2f\left(\frac{1}{x} + \log y\right)\right\} \times \left(\frac{1}{y}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad q = 2y + \frac{2}{y} f'\left(\frac{1}{x} + \log y\right) \qquad .....(3)$$

مساوات (2) اور (3) سے

$$q = 2y - \frac{px^2}{y}$$

$$\Rightarrow \qquad px^2 + qy = 2y^2$$

جو کہ پہلے رتبے کی مطلوبہ جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال7۔ $lx + my + nz = f(x^2 + y^2 + z^2)$ سے اختیاری تفاعل f کو ہٹایئے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$lx + my + nz = f(x^2 + y^2 + z^2) \qquad .....(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$l + n\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\{f(x^2 + y^2 + z^2)\} \times \left(2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad l + np = 2(x + zp)f'(x^2 + y^2 + z^2) \qquad .....(2)$$

اور

$$m + n\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\{f(x^2 + y^2 + z^2)\} \times \left(2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad m + nq = 2(y + zq)f'(x^2 + y^2 + z^2) \qquad .....(3)$$

مساوات (2) اور (3) سے

$$\frac{l + np}{m + nq} = \frac{x + zp}{y + zq}$$

جو کہ پہلے رتبے کی مطلوبہ جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال8۔ $f(x + y + z, x^2 + y^2 - z^2) = 0$ سے اختیاری تفاعل f کو ساقط کریے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$f(x + y + z, x^2 + y^2 - z^2) = 0$$

فرض کرو کہ $u = x + y + z, v = x^2 + y^2 - z^2$ اس لیے

$$f(u, v) = 0 \qquad .....(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial u}(1 + p) + \frac{\partial f}{\partial v}(2x - 2pz) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad (1 + p)\frac{\partial f}{\partial u} + 2(x - pz)\frac{\partial f}{\partial v} = 0 \qquad .....(2)$$

اور

$$\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial u}(1 + q) + \frac{\partial f}{\partial v}(2y - 2zq) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad (1 + q)\frac{\partial f}{\partial u} + 2(y - zq)\frac{\partial f}{\partial v} = 0 \qquad .....(3)$$

مساوات (2) اور (3) سے

$$\frac{1 + p}{1 + q} = \frac{x - zp}{y - zq}$$

جو کہ پہلے رتبے کی مطلوبہ جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال9۔ $z = \phi(x\cos\alpha + y\sin\alpha - at) + \psi(x\cos\alpha + y\sin\alpha + at)$ سے اختیاری تفاعلات ϕ اور ψ کو ساقط کرکے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$z = \phi(x\cos\alpha + y\sin\alpha - at) + \psi(x\cos\alpha + y\sin\alpha + at) \qquad .....(1)$$

اس مساوات کو دو مرتبہ بہ لحاظ x, y اور بہ لحاظ t جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \phi'(x\cos\alpha + y\sin\alpha - at)\cos\alpha + \psi'(x\cos\alpha + y\sin\alpha + at)\cos\alpha$$

دوبارہ جزوی تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \phi''(x\cos\alpha + y\sin\alpha - at)\cos^2\alpha + \psi''(x\cos\alpha + y\sin\alpha + at)\cos^2\alpha \quad .....(2)$$

اور

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \phi'(x\cos\alpha + y\sin\alpha - at)\sin\alpha + \psi'(x\cos\alpha + y\sin\alpha + at)\sin\alpha$$

دوباراہ جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \phi''(x\cos\alpha + y\sin\alpha - at)\,sin^2\alpha + \psi''(x\cos\alpha + y\sin\alpha + at)\,sin^2\alpha \quad .....(3)$$

اور

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \phi'(x\cos\alpha + y\sin\alpha - at)(-a) + \psi'(x\cos\alpha + y\sin\alpha + at)a$$

دوبارہ جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \phi''(x\cos\alpha + y\sin\alpha - at)a^2 + \psi''(x\cos\alpha + y\sin\alpha + at)a^2 \qquad .....(4)$$

مساوات(2)،(3) اور(4) سے

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

اس لیے $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ دوسرے رتبے کی مطلوبہ جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال10۔ مساوات $vr = \phi(r - at) + \psi(r + at)$ سے اختیاری تفاعلات ϕ اور ψ کو ساقط کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$v = \frac{1}{r}[\phi(r-at)+\psi(r+at)] \qquad .....(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ r جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r}[\phi'(r-at)+\psi'(r+at)] - \frac{1}{r^2}[\phi(r-at)+\psi(r+at)] \qquad .....(2)$$

دوبارہ جزوی تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{r}[\phi''(r-at)+\psi''(r+at)] - \frac{1}{r^2}[\phi'(r-at)+\psi'(r+at)] - \frac{1}{r^2}[\phi'(r-at)+\psi'(r+at)] + \frac{2}{r^3}[\phi(r-at)+\psi(r+at)]$$

مساوات(1) سے

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{r}[\phi''(r-at)+\psi''(r+at)] - \frac{2}{r^2}[\phi'(r-at)+\psi'(r+at)] + \frac{2}{r^2}v \qquad .....(3)$$

اب مساوات (1) کو بہ لحاظ t جزوی تفرق کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{a}{r}[-\phi'(r-at)+\psi'(r+at)]$$

اسے دوبارہ جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{a^2}{r}[\phi''(r-at)+\psi''(r+at)] \qquad .....(4)$$

اب مساوات(3) اور(4) سے

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{2}{r}\times\frac{1}{r}[\phi'(r-at)+\psi'(r+at)] + \frac{2}{r^2}v$$

مساوات (2)سے

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{2}{r}\times\left\{\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}[\phi(r-at)+\psi(r+at)]\right\} + \frac{2}{r^2}v$$

مساوات (1)سے

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} &= \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{2}{r}\times\left\{\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\right\} + \frac{2}{r^2}v \\ &= \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2v}{r^2} + \frac{2}{r^2}v \\ &= \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\end{aligned}$$

اس لیے $\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r}$ دوسرے رتبے کی مطلوبہ جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال11۔ مساوات $z = \phi(x) + e^y\psi(x)$ سے اختیاری تفاعلات ϕ اور ψ کو ساقط کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$z = \phi(x) + e^y\psi(x) \qquad .....(1)$$

مساوات(1) کو بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^y\psi(x) \qquad .....(2)$$

دوبارہ جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^y\psi(x) \qquad .....(3)$$

مساوات(2) اور(3) سے

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

اس لیے $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ دوسرے رتبے کی مطلوبہ جزوی تفرقی مساوات ہے۔

14.3 اکتسابی نتائج(Learning Outcomes)

اس اکائی کو پڑھنے کے بعد آپ جزوی تفرقی مساوات سے اختیاری تفاعلات کو ساقط کر کے جزوی تفرقی مساوات کو تشکیل کرنا سیکھ گئے ہوں گے۔

14.4 کلیدی الفاظ(Keywords)

اختیاری تفاعل، ضابطہ

14.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

14.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. کسی ضابطے میں اگر دو اختیاری تفاعلات ہوں تب اس سے حاصل جزوی تفرقی مساوات کا رطبہ دو سے زیادہ ہو گا۔ (T/F)

2. ضابطہ $z = f(x^2 + y^2)$ کے لیے جزوی تفرقی مساوات $yp + xq = 0$ ہے۔ (T/F)

3. تفاعلات ϕ اور ψ کو ساقط کرکے $z = \phi(x + iy) + \psi(x - iy)$ سے پہلے رطبے کی جزوی تفرقی مساوات حاصل ہوگی۔ (T/F)

14.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. اختیاری تفاعل ϕ کو ساقط کرکے $z = e^y\phi(x + y)$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔
2. اختیاری تفاعل ϕ کو ساقط کرکے $z = e^{Ax+By}\phi(Ax - By)$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔
3. اختیاری تفاعل ϕ کو ساقط کرکے $z = \phi(x^2 - y^2)$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔
4. اختیاری تفاعل ϕ کو ساقط کرکے $z = xy + \phi(x^2 + y^2)$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

14.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. تفاعلات ϕ اور ψ کو ساقط کرکے $z = y\phi(x) + x\psi(y)$ سے جزوی تفرقی مساوات حاصل کرو۔
2. تفاعلات ϕ اور ψ کو ساقط کرکے $z = \phi(x) + \psi(y)$ سے جزوی تفرقی مساوات حاصل کرو۔

جوابات:

14.5.1 معروضی سوالات کے جوابات

1. T
2. F
3. F

14.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $\frac{\partial z}{\partial y} = z + \frac{\partial z}{\partial x}$
2. $B\frac{\partial z}{\partial x} + A\frac{\partial z}{\partial y} = 2ABz$
3. $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2$ .4

14.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

$xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z$ .1

$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ .2

14.6 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Ordinary and Partial Differential Equations- Rai Singhania, S.Chand & Co., New Delhi

اکائی 15۔ جزوی تفرقی مساواتوں کے حل (لگرانج کا طریقہ)

(Solution of Partial Differential Equations: Lagrange's Method)

اکائی کے اجزا

15.0 تمہید (Introduction)

پہلے رتبے کی جزوی تفرقی مساوات بہت سی عملی صورتحال میں واقع ہوتی ہیں جیسے براؤنین گردش (Brownian Motion)، ریڈیو ایکٹو تقسیم، مواصلاتی (Communication) نظام میں شور (Noise)، ٹیلی فون ٹریفک (Telephonic Traffic) وغیرہ۔ در حقیقت خطی جزوی تفرقی مساوات کے حل کی نوعیت کو سمجھ کر اعلی رتبہ کی جزوی تفرقی مساوات کا حل تلاش کرنے کے لیے ایک طریقہ کو شکل دینے کی ضرورت ہے۔ اس اکائی میں ہم لگرانج کی خطی جزوی تفرقی مساوات اور اس کا لگرانج کے طریقہ سے حل حاصل کرنا سیکھیں گے۔

15.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے کے بعد آپ:

1. لگرانج کی خطی تفرقی مساوات کی بنیادی جانکاری سے متاعرف ہو جائیں گے۔
2. لگرانج کے طریقے کی مدد سے خطی جزوی تفرقی مساواتوں کا حل حاصل کرنا سیکھ جائیں گے۔

15.2 لگرانج کی خطی جزوی تفرقی مسات (Lagrange's Linear Partial Differential Equations)

تعریف: جزوی تفرقی مساوات $Pp + Qq = R$ کو پہلے رتبے کی لگرانج کی خطی جزوی تفرقی مساوات کہتے ہیں، جہاں P، Q اور R متغیرات x، y، z کے تفاعلات ہیں۔

فرض کرو کہ $u = c$ لگرانج کی خطی جزوی تفرقی مساوات کا ایک حل ہے۔ اس لیے یہ مساوات

$$Pp + Qq = R \qquad .....(1)$$

کی تصدیق کریگا۔ اب مساوات $u = c$ کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

یا

$$\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \Rightarrow p = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial z}} \qquad .....(2)$$

اور

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

یا

$$\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \Rightarrow q = -\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial z}} \qquad .....(3)$$

مساوات (1) سے

$$P\left(-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial z}}\right)+Q\left(-\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial z}}\right)=R$$

$$\Rightarrow \qquad P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}=-R\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \qquad P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+R\frac{\partial u}{\partial z}=0 \qquad .....(4)$$

اب ہم کہہ سکتے ہیں کہ $u = c$ مساوات (1) اور مساوات (4) کی تصدیق کرتی ہے۔ اس لیے مساوات (4) کو مساوات (1) کے مساوی (Equivalent) لیا جا سکتا ہے۔

15.2.1 لگرانج کی خطی جزوی تفرقی مساوات کا حل

(Solution of Lagrange's Linear Partial Differential Equation)

قضیہ (Theorem):

ہم جانتے ہیں کہ لگرانج کی خطی تفرقی مساوات ہے

$$Pp+Qq=R \qquad .....(1)$$

فرض کرو کہ

$$\phi(u,v)=0 \qquad .....(2)$$

مساوات (1) کا حل ہے، جہاں ϕ ایک اختیاری تفاعل ہے۔ یہاں $u(x,y,z)=a$ اور $v(x,y,z)=b$ مساوات

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R} \qquad .....(3)$$

کے دو غیر تابع حل ہیں اور a، b دو اختیاری تفاعلات ہیں اور کم از کم ایک میں z ضرور ہو گا۔

ثبوت: مساوات (2) کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial\phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0$$

یا

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial\phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0 \qquad .....(4)$$

اور

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial\phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$$

یا

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial\phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0 \qquad .....(5)$$

مساوات (4) اور مساوات (5) سے $\frac{\partial\phi}{\partial u}$ اور $\frac{\partial\phi}{\partial v}$ کو ہٹانے پر

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} = R$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\Rightarrow \quad p\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}\right) + q\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0 \qquad .....(6)$$

اس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\phi(u, v) = 0$ مساوات(6) کا حل ہے۔اب $u(x, y, z) = a$ اور $v(x, y, z) = b$ کے مشتق لینے پر

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = 0 \qquad .....(7)$$

اور

$$\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz = 0 \qquad .....(8)$$

چوں کہ u, v دونوں غیر تابع تفاعلات ہیں،اس لیے

$$\frac{dx}{\frac{\partial u \partial v}{\partial y \partial z} - \frac{\partial u \partial v}{\partial z \partial y}} = \frac{dy}{\frac{\partial v \partial u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial u \partial v}{\partial x \partial z}} = \frac{dz}{\frac{\partial u \partial v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u \partial v}{\partial y \partial x}} \qquad .....(9)$$

مساوات(3)اور مساوات(9) سے

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}}{P} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}}{Q} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}}{R} = k$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y} = kP, \\ \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} = kQ, \\ \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = kR \end{cases}$$

یہ قیمتیں مساوات(6) میں درج کرنے پر

$$k(Pp + Qq) = kR$$

یا

$$Pp + Qq = R$$

اس لیےاگر u, v دونوں $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ کے غیر تابع حل ہوں تب $\phi(u, v) = 0$ مساوات $Pp + Qq = R$ کا حل ہے، جہاں ϕ ایک اختیاری تفاعل ہے۔

مساوات(3) کو مساوات (1) کے لیے لگرانج کی معاون (Auxiliary یا Subsidiary) مساوات کہتے ہیں۔

15.2.2 لگرانج کا $Pp + Qq = R$ کو حل کرنے کا طریقہ (Lagrange’s Method to Solve $Pp + Qq = R$)

I. دی گئی پہلے رتبے کی خطی جزوی تفرقی مساوات کو ذیل شکل میں تبدیل کرتے ہیں $Pp + Qq = R$

II. اس مساوات کے لیے لگرانج کی معاون مساوات لکھو جو کہ ذیل ہے $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$

III. معاون مساوات کو کسی مناسب طریقہ سے حل کریے۔مان لیجیے کہ $u(x,y,z) = a$ اور $v(x,y,z) = b$ اس مساوات کے دو غیر تابع حل ہیں۔

IV. مساوات $Pp + Qq = R$ کا عام حل درجہ ذیل میں سے کسی بھی شکل میں ہو سکتا ہے:

(i) $\phi(u, v) = 0$

(ii) $u = \phi(v)$

(iii) $v = \phi(u)$

جہاں ϕ ایک اختیاری تفاعل ہے۔

نوٹ: معاون مساوات میں اگر کہنی دو کسروں(Fractions) میں ایک متغیر نہ ہو یا وہ منسوق ہو جائے، تب ایک تکمل حاصل ہو تا ہے جس کو آسانی کے ساتھ حل کر سکتے ہیں۔اسی طرح دوسرے کسرے کے جوڑے کو لے کر ہم دیے گئے سوال کا حل نکال سکتے ہیں۔

مثال1۔ درجہ ذیل خطی جزوی تفرقی مساواتوں کو حل کریے:

(i) $\frac{y^2 zp}{x} + xzq = y^2$

(ii) $p + q = z$

(iii) $2p + 3q = 1$

(iv) $p\tan x + q\tan y = \tan z$

(v) $y^2 p - xyq + 2xy = xz$

(vi) $x^2 p + y^2 q = z^2$

(vii) $xp + yq = z$

(viii) $p + q = 1$

(ix) $xyp + y^2 q = xyz - 2x^2$

حل۔(i) دیا ہے

$$\frac{y^2 zp}{x} + xzq = y^2 \qquad .....(1)$$

مساوات (1) کی $Pp + Qq = R$ سے مشابہت کرنے پر ہمیں حاصل ہو تا ہے $p = \frac{y^2 z}{x}, Q = xz, R = y^2$

اس لیے دی گئی مساوات کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{dx}{\frac{y^2 z}{x}} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{y^2} \qquad .....(2)$$

اس مساوات کے پہلے دو کسرے لینے پر

$$\frac{dx}{\frac{y^2z}{x}} = \frac{dy}{xz}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{x^2}$$

$$\Rightarrow \qquad x^2dx - y^2dy = 0 \qquad .....(3)$$

مساوات(3) کو تکمل کرنے پر

$$\frac{x^3}{3} - \frac{y^3}{3} = a$$

$$\Rightarrow \qquad x^3 - y^3 = 3a = A\,(\text{فرض کرو}) \qquad .....(4)$$

جہاں A ایک اختیاری مستقل ہے۔ اب مساوات(2) کے پہلے اور آخری کسرے کو لینے پر

$$\frac{dx}{\frac{y^2z}{x}} = \frac{dz}{y^2}$$

$$\Rightarrow \qquad xdx - zdz = 0 \qquad .....(5)$$

مساوات(5) کو تکمل کرنے پر

$$\frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{2} = b$$

$$\Rightarrow \qquad x^2 - z^2 = 2b = B\,(\text{فرض کرو}) \qquad .....(6)$$

جہاں B ایک اختیاری مستقل ہے۔ اب مساوات(4) اور مساوات(6) سے مساوات(1) کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$\phi(x^3 - y^3, x^2 - z^2) = 0$$

جہاں ϕ ایک اختیاری تفاعل ہے۔

حل۔(ii) دیا ہے

$$p + q = z \qquad .....(1)$$

مساوات (1) کی $Pp + Qq = R$ سے مشابہت کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $p = 1, Q = 1, R = z$

اس لیے دی گئی مساوات کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{z} \qquad .....(2)$$

اس مساوات کے پہلے دو کسرے لینے پر

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1}$$

$$\Rightarrow \qquad dx - dy = 0 \qquad .....(3)$$

مساوات(3) کو تکمل کرنے پر

$$\Rightarrow \qquad x - y = A \qquad .....(4)$$

جہاں A ایک اختیاری مستقل ہے۔ اب مساوات(2) کے دوسرے اور آخری کسرے کو لینے پر

$$dy = \frac{dz}{z} \qquad .....(5)$$

مساوات(5) کو تکمل کرنے پر

$$y = \log z + \log B$$

$$\Rightarrow \qquad y = \log Bz$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{e^y}{z} = B \qquad .....(6)$$

جہاں B ایک اختیاری مستقل ہے۔ اب مساوات(4) اور مساوات(6) سے مساوات(1) کا عام حل درجہ ذیل ہوگا

$$\phi\left(x - y, \frac{e^y}{z}\right) = 0$$

جہاں ϕ ایک اختیاری تفاعل ہے۔

حل۔(iii) دیا ہے

$$2p + 3q = 1 \qquad .....(1)$$

مساوات (1) کی $Pp + Qq = R$ سے مشابہت کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $p = 2, Q = 3, R = 1$

اس لیے دی گئی مساوات کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل ہوگی

$$\frac{dx}{2} = \frac{dy}{3} = \frac{dz}{1} \qquad .....(2)$$

اس مساوات کے پہلے دو کسرے لینے پر

$$\frac{dx}{2} = \frac{dy}{3}$$

$$\Rightarrow \qquad 3dx - 2dy = 0 \qquad .....(3)$$

مساوات(3) کو تکمل کرنے پر

$$\Rightarrow \qquad 3x - 2y = A \qquad .....(4)$$

جہاں A ایک اختیاری مستقل ہے۔ اب مساوات(2) کے دوسرے اور آخری کسرے کو لینے پر

$$\frac{dy}{3} = \frac{dz}{1}$$

$$\Rightarrow \qquad dy - 3dz = 0 \qquad .....(5)$$

مساوات(5)کو تکمل کرنے پر

$$\Rightarrow \qquad y - 3z = B \qquad .....(6)$$

جہاں Bایک اختیاری مستقل ہے۔ اب مساوات(4) اور مساوات(6)سے مساوات(1)کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$\phi(3x - 2y, y - 3z) = 0$$

جہاں ϕایک اختیاری تفاعل ہے۔

حل۔(iv)دیا ہے

$$p \tan x + q \tan y = \tan z \qquad .....(1)$$

مساوات (1) کی$Pp + Qq = R$ سے مشابہت کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے$p = \tan x , Q = \tan y , R = \tan z$

اس لیے دی گئی مساوات کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{dx}{\tan x} = \frac{dy}{\tan y} = \frac{dz}{\tan z} \qquad .....(2)$$

اس مساوات کے پہلے دو کسرے لینے پر

$$\frac{dx}{\tan x} = \frac{dy}{\tan y}$$

$$\Rightarrow \qquad \cot x\, dx - \cot y\, dy = 0 \qquad .....(3)$$

مساوات(3)کو تکمل کرنے پر

$$\log \sin x - \log \sin y = \log A$$

$$\Rightarrow \qquad \log \frac{\sin x}{\sin y} = \log A$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\sin x}{\sin y} = A \qquad .....(4)$$

جہاں Aایک اختیاری مستقل ہے۔اب مساوات(2)کے دوسرے اور آخری کسرے کو لینے پر

$$\frac{dy}{\tan y} = \frac{dz}{\tan z}$$

$$\Rightarrow \qquad \cot y\, dy - \cot z\, dz = 0 \qquad .....(5)$$

مساوات(5)کو تکمل کرنے پر

$$\log \sin y - \log \sin z = \log B$$

$$\Rightarrow \qquad \log\frac{\sin y}{\sin z} = \log B$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\sin y}{\sin z} = B \qquad .....(6)$$

جہاں B ایک اختیاری مستقل ہے۔ اب مساوات(4) اور مساوات(6) سے مساوات(1) کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$\phi\left(\frac{\sin x}{\sin y}, \frac{\sin y}{\sin z}\right) = 0$$

جہاں ϕ ایک اختیاری تفاعل ہے۔

حل۔(v) دیا ہے $y^2p - xyq + 2xy = xz$ اس مساوات کو درجہ ذیل شکل میں لکھ سکتے ہیں

$$y^2p - xyq = x(z - 2y) \qquad .....(1)$$

مساوات (1) کی $Pp + Qq = R$ سے مشابہت کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $p = y^2, Q = -xy, R = x(z - 2y)$

اس لیے دی گئی مساوات کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{-xy} = \frac{dz}{x(z-2y)} \qquad .....(2)$$

اس مساوات کے پہلے اور دوسرے کسرے لینے پر

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{-xy}$$

$$\Rightarrow \qquad xdx + ydy = 0 \qquad .....(3)$$

مساوات(3) کو تکمل کرنے پر

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad x^2 + y^2 = a^2 = A$$

$$\Rightarrow \qquad x^2 + y^2 = A \qquad .....(4)$$

جہاں A ایک اختیاری مستقل ہے۔ اب مساوات(2) کے دوسرے اور آخری کسرے کو لینے پر

$$\frac{dy}{-xy} = \frac{dz}{x(z - 2y)}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dz}{dy} = -\frac{z}{y} + 2$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dz}{dy} + \frac{z}{y} = 2 \qquad .....(5)$$

یہ ایک خطی تفرقی مساوات ہے۔ اس لیے

$$I.F. = e^{\int \frac{1}{y} dy} = y$$

مساوات (5) کا حل درجہ ذیل ہو گا

$$z(y) = \int 2.y\, dy + B$$

$$\Rightarrow \qquad yz = 2\frac{y^2}{2} + B$$

$$\Rightarrow \qquad yz - y^2 = B \qquad .....(6)$$

جہاں Bایک اختیاری مستقل ہے۔ اب مساوات(4) اور مساوات(6)سے مساوات(1)کاعام حل درجہ ذیل ہو گا

$$\phi(x^2 + y^2, yz - y^2) = 0$$

جہاں ϕایک اختیاری تفاعل ہے۔

حل۔(vi)دیا ہے

$$x^2p + y^2q = z^2 \qquad .....(1)$$

مساوات (1) کی $Pp + Qq = R$ سے مشابہت کرنے پر ہمیں حاصل ہو تا ہے $p = x^2, Q = y^2, R = z^2$

اس لیے دی گئی مساوات کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{z^2} \qquad .....(2)$$

اس مساوات کے پہلے دو کسرے لینے پر

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} \qquad .....(3)$$

مساوات(3)کو تکمل کرنے پر

$$-\frac{1}{x} = -\frac{1}{y} + A$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x-y}{xy} = A \qquad .....(4)$$

جہاں Aایک اختیاری مستقل ہے۔اب مساوات(2)کے دوسرے اور آخری کسرے کو لینے پر

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{z^2} \qquad .....(5)$$

مساوات(5)کو تکمل کرنے پر

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{z} + B$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{y-z}{yz} = B \qquad .....(6)$$

جہاں Bایک اختیاری مستقل ہے۔ اب مساوات(4) اور مساوات(6)سے مساوات(1)کاعام حل درجہ ذیل ہو گا

$$\phi\left(\frac{x-y}{xy}, \frac{y-z}{yz}\right) = 0$$

جہاں ϕایک اختیاری تفاعل ہے۔

حل۔(vii)دیا ہے

$$xp + yq = z \qquad .....(1)$$

مساوات (1) کی مشابہت $Pp + Qq = R$ سے کرنے پر ہمیں حاصل ہو تا ہے $p = x, Q = y, R = z$

اس لیے دی گئی مساوات کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \qquad .....(2)$$

اس مساوات کے پہلے دو کسرے لینے پر

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \qquad .....(3)$$

مساوات(3) کو تکمل کرنے پر

$$\log x = \log y + \log A$$

$$\Rightarrow \qquad \log x - \log y = \log A$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x}{y} = A \qquad .....(4)$$

جہاں A ایک اختیاری مستقل ہے۔ اب مساوات(2) کے دوسرے اور آخری کسرے کو لینے پر

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \qquad .....(5)$$

مساوات(5) کو تکمل کرنے پر

$$\log y = \log z + \log B$$

$$\Rightarrow \qquad \log y - \log z = \log B$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{y}{z} = B \qquad .....(6)$$

جہاں B ایک اختیاری مستقل ہے۔ اب مساوات(4) اور مساوات(6) سے مساوات(1) کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$\phi\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) = 0$$

جہاں ϕ ایک اختیاری تفاعل ہے۔

حل۔(viii) دیا ہے

$$p + q = 1 \qquad .....(1)$$

مساوات (1) کی $Pp + Qq = R$ سے مشابہت کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $p = 1, Q = 1, R = 1$

اس لیے دی گئی مساوات کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{1} \qquad .....(2)$$

اس مساوات کے پہلے دو کسرے لینے پر

$$\Rightarrow \qquad dx - dy = 0 \qquad .....(3)$$

مساوات(3) کو تکمل کرنے پر

$$\Rightarrow \qquad x - y = A \qquad .....(4)$$

جہاں A ایک اختیاری مستقل ہے۔ اب مساوات(2) کے دوسرے اور آخری کسرے کو لینے پر

$$dy - dz = 0 \qquad .....(5)$$

مساوات(5) کو تکمل کرنے پر

$$\Rightarrow \qquad y - z = B \qquad .....(6)$$

جہاں B ایک اختیاری مستقل ہے۔ اب مساوات(4) اور مساوات(6) سے مساوات(1) کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$\phi(x - y, y - z) = 0$$

جہاں ϕ ایک اختیاری تفاعل ہے۔

حل۔(ix) دیا ہے

$$xyp + y^2q = xyz - 2x^2 \qquad .....(1)$$

مساوات (1) کی $Pp + Qq = R$ سے مشابہت کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $p = xy, Q = y^2, R = xyz - 2x^2$

اس لیے دی گئی مساوات کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{xyz-2x^2} \qquad .....(2)$$

اس مساوات کے پہلے دو کسرے لینے پر

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{y^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0 \qquad .....(3)$$

مساوات(3) کو تکمل کرنے پر

$$\log x - \log y = \log A$$

$$\Rightarrow \qquad \log\frac{x}{y} = \log A$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x}{y} = A \qquad .....(4)$$

جہاں A ایک اختیاری مستقل ہے۔اب مساوات(2) کے دوسرے اور آخری کسرے کو لینے پر

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{xyz - 2x^2}$$

مساوات(4) سے $x = Ay$ درج کرنے پر

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{Ay^2z - 2A^2y^2}$$

$$\Rightarrow \qquad Ady = \frac{dz}{z-2A} \qquad .....(5)$$

مساوات(5) کو تکمل کرنے پر

$$Ay = \log(z - 2A) + B$$

$$\Rightarrow \qquad x - \log\left(z - \frac{2x}{y}\right) = B \qquad .....(6)$$

جہاں B ایک اختیاری مستقل ہے۔ اب مساوات(4) اور مساوات(6) سے مساوات(1) کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$\phi\left(\frac{x}{y}, x - \log\left(z - \frac{2x}{y}\right)\right) = 0$$

جہاں ϕ ایک اختیاری تفاعل ہے۔

مثال2۔ مساوات $z(z^2 + xy)(px - qy) = x^4$ کو حل کریے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$z(z^2 + xy)(px - qy) = x^4$$

اس مساوات کو $Pp + Qq = R$ کی شکل میں بدل نے پر

$$pxz(z^2 + xy) - qyz(z^2 + xy) = x^4 \qquad .....(1)$$

مساوات (1) کی $Pp + Qq = R$ سے مشابہت کرنے پر ہمیں ملتا ہے $p = xz(z^2 + xy), Q = -yz(z^2 + xy), R = x^4$

اس لیے دی گئی مساوات کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{dx}{xz(z^2+xy)} = \frac{dy}{-yz(z^2+xy)} = \frac{dz}{x^4} \qquad .....(2)$$

اس مساوات کے پہلے دو کسرے لینے پر

$$\frac{dx}{xz(z^2 + xy)} = \frac{dy}{-yz(z^2 + xy)}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0 \qquad .....(3)$$

مساوات(3) کو تکمل کرنے پر

$$\log x + \log y = \log A$$

$$\Rightarrow \qquad \log xy = \log A$$

$$\Rightarrow \qquad xy = A \qquad .....(4)$$

جہاں A ایک اختیاری مستقل ہے۔ اب مساوات(2) کے پہلے اور آخری کسرے کو لینے پر

$$\frac{dx}{xz(z^2 + xy)} = \frac{dz}{x^4}$$

مساوات(4) سے $xy = A$ رکھنے پر

$$\frac{dx}{z(z^2 + A)} = \frac{dz}{x^3}$$

$$x^3 dx = z(z^2 + A)dz \qquad .....(5)$$

مساوات(5) کو تکمل کرنے پر

$$\frac{x^4}{4} = \frac{z^4}{4} + A\frac{z^2}{2} + \frac{B}{4}$$

یہاں $xy = A$ درج کرنے پر

$$\Rightarrow \qquad x^4 - z^4 - 2xyz^2 = B \qquad .....(6)$$

جہاں B ایک اختیاری مستقل ہے۔ اب مساوات(4) اور مساوات(6) سے مساوات(1) کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$\phi(xy, x^4 - z^4 - 2xyz^2) = 0$$

جہاں ϕ ایک اختیاری تفاعل ہے۔

15.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی کو پڑھنے کے بعد آپ لگرانج کی خطی جزوی تفرقی مساوات کی تعریف، اس کے لیے معاون مساوات حاصل کرنا اور پھر اس کا حل حاصل کرنا سیکھ گیے ہوں گے۔

15.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

لگرانج کی خطی جزوی تفرقی مساوات، معاون مساوات

15.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

15.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. لگرانج کی خطی جزوی تفرقی مساوات کی تعریف کرو۔
2. لگرانج کی خطی جزوی تفرقی مساوات کے لیے معاون مساوات کی تعریف کرو۔
3. $xzp + yzq = xy$ لگرانج کی خطی جزوی تفرقی مساوات نہیں ہے۔ (T/F)
4. مساوات $Pp + Qq = R$ ایک .... جزوی تفرقی مساوات کہلاتی ہے۔
5. لگرانج مساوات $p + q = \sin x$ کے لیے معاون مساوات.................... ہے۔

15.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

درجہ ذیل مساوات کو حل کرو:

1. $p + q = \sin x$
2. $yzp + zxq = xy$
3. $y^2p - xyq = x(z - 2y)$
4. $(y + zx)p - (x + yz)q = x^2 - y^2$
5. $y^2p^2 + x^2q^2 = x^2y^2z^2$

15.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

درجہ ذیل مساوات کو حل کرو:

1. $p + 3q = z + \cot(y - 3x)$
2. $p + 3q = 5z + \tan(y - 3x)$

.3 $p-2q=3x^2\sin(y+2x)$

.4 $(cy+bz)p+(az-cx)q=bx-ay$

.5 $(x^2-yz)p+(y^2-zx)q=z^2-xy$

جوابات:

15.5.1 معروضی سوالات کے جوابات

.3 F

.4 لگرانج کی خطی

.5 $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{\sin x}$

15.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

.1 $\phi(x-y, z+\cos x)=0$

.2 $\phi(x^2-y^2, x^2-z^2)=0$

.3 $\phi(x^2+y^2, y^2-yz)=0$

.4 $\phi(x^2+y^2-z^2, xy+z)=0$

.5 $\phi\left(x^3-y^3, y^3+\frac{3}{z}\right)=0$

15.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

.1 $x-\log|z+\cot(y-3x)|=\phi(y-3x)$

.2 $5x-\log|5z+\tan(y-3x)|=\phi(y-3x)$

.3 $x^3\sin(y+2x)-z=\phi(y+2x)$

.4 $\phi(x^2+y^2+z^2, ax+by+cz)=0$

.5 $\phi\left(\frac{x-y}{y-z}, \frac{y-z}{z-x}\right)=0$

15.6 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Ordinary and Partial Differential Equations- Rai Singhania, S.Chand & Co., New Delhi

اکائی 16۔ جزوی تفرقی مساواتوں کے حل (چارپٹ کا طریقہ)

(Solution of Partial Differential Equations: Charpit's Method)

اکائی کے اجزا

16.0 تمہید(Introduction)

کسی تفرقی مساوات کا حل متغیرات کے درمیان وہ رشتہ ہے جس کے ذریعے اور مساوات سے حاصل کردہ مشتق مطمئن ہو جاتا ہے۔

اب ہم پہلے رتبے کی غیر خطی جزوی تفرقی مساوات

$$\phi(x, y, z, a, b) = 0 \qquad .....(1)$$

کے حل حاصل کرنے پر روشنی ڈالیں گے۔ یہاں x،y،z متغیرات ہیں۔ ان میں x،y غیر تابع متغیرات اور z تابع متغیر ہے۔

مساوات(1) کو بہ لحاظ x اور پھر بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

یا

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} + p\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \qquad .....(2)$$

اور

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

یا

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} + q\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \qquad .....(3)$$

چوں کہ اختیاری مستقلات a اور b مساوات (1)،(2) اور (3) سے منسلک ہیں۔ اس لیے تینوں مساواتوں سے a اور b کو ہٹا کر ہمیں درجہ ذیل رشتہ حاصل ہوتا ہے

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \qquad .....(4)$$

جو کہ پہلے رتبے کی جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مساوات(4) کا وہ حل جس میں ممکنہ اختیاری مستقلات غیر تابع متغیرات کی تعداد کے برابر ہوں، مکمل حل (Complete Solution) کہلاتا ہے۔

اختیاری مستقلات کے لیے اگر خاص قیمتیں دی جائیں تب حاصل کردہ حل خاص حل (Particular Integral) کہلاتا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ ان تمام مختص(Coordinate) نقاط کا طریق(Locus) جن کے مختص p اور q کی قیمتوں کے ساتھ مساوات(4) کو مطمئن کرتے ہیں، سطحوں (Surfaces) کے لامحدود نظام کی نمائندگی کرتے ہیں۔ چوں کہ ان سطحوں میں سے کسی ایک کے ذریعے تمام سطحوں کے لفافوں(Envelope) کو اس کے ہر نقاط پر چھو لیا جاتا ہے، اس لیے لفافے میں موجود کسی بھی نقطے کے اس مقام پر لفافے سے متعلق p اور q کی قیمتوں کے ساتھ مساوات(4) کو مطمئن کریگی۔

اس سے یہ بات ظاہر ہوتی ہے کہ لفافے کی مساوات دی گئی مساوات (4) کا ایک حل ہے۔ اب مساوات (1) کو الگ الگ بہ لحاظ a اور b جزوی تفرق کرتے ہیں

$$\frac{\partial \phi}{\partial a}=0, \frac{\partial \phi}{\partial b}=0 \qquad .....(5)$$

مساوات (1) اور (5) سے a اور b کو ہٹا کر ہمیں x، y اور z میں ایک رشتہ حاصل ہوتا ہے جسے مساوات (4) کا نادر (Singular) حل کہتے ہیں۔ کسی جزوی تفرقی مساوات کا وہ حل جس میں ممکنہ اختیاری تفاعلات اعظم تعداد میں موجود ہوں، عام حل کہلاتا ہے۔

16.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے کے بعد آپ:

1. چارپٹ کی غیر خطی جزوی تفرقی مساوات کی بنیادی جانکاری سے متاعرف ہو جائیں گے۔
2. چارپٹ کے طریقے کی مدد سے غیر خطی جزوی تفرقی مساواتوں کا حل حاصل کرنا سیکھ جائیں گے۔

16.2 چارپٹ کا طریقہ (Charpit's Method)

16.2.1 پہلے رتبے کی جزوی تفرقی مساوات کا ہم آہنگ نظام

(Compatible System of First Order Partial Differential Equations)

پہلے رتبے کی دو جزوی تفرقی مساواتوں کو ہم آہنگ کہا جاتا ہے اگر ان کا مشترکہ حل وجود رکھتا ہو۔ دوسرے الفاظ میں درجہ ذیل جزوی تفرقی مساواتیں

$$f(x,y,z,p,q)=0 \qquad .....(1)$$

$$f_1(x,y,z,p,q)=0 \qquad .....(2)$$

ہم آہنگ ہوں گی اگر

$$\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(x,p)}+p\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(z,p)}+\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(y,q)}+q\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(z,q)}=0$$

یہ جزوی تفرقی مساواتوں کے نظام کے ہم آہنگ ہونے کی شرط ہے۔

نوٹ: (1) دو جزوی تفرقی مساواتیں $p=P(x,y)$ اور $q=Q(x,y)$ ہم آہنگ ہوں گی اگر اور صرف اگر $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

(2) اگر دو جزوی تفرقی مساواتوں کا نظام ہم آہنگ ہے تب ان کا ایک مشترکہ حل ہو گا۔

(3) ہم آہنگ نظام کا حل حاصل کرنے کے لیے p اور q کی قیمتیں درجہ ذیل مساوات میں رکھتے ہیں

$$dz=pdx+qdy$$

مثال 1۔ دکھاؤ کہ $xp-yq=x$ اور $x^2p+q=xz$ ہم آہنگ ہیں۔

حل۔ فرض کرو کہ

$$f=xp-yq-x=0 \qquad .....(1)$$

$$f_1 = x^2p + q - xz = 0 \qquad .....(2)$$

اب

$$\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(x,p)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial p} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p-1 & x \\ 2px - z & x^2 \end{vmatrix} = xz - x^2p - x^2,$$

$$\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(z,p)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial p} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x \\ -x & x^2 \end{vmatrix} = x^2,$$

$$\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(y,q)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial q} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial q} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -q & -y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -q,$$

$$\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(z,q)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial q} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial q} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -y \\ -x & 1 \end{vmatrix} = -xy$$

دیا گیا نظام ہم آہنگ ہو گا اگر

$$\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(x,p)} + p\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(z,p)} + \frac{\partial(f,f_1)}{\partial(y,q)} + q\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(z,q)} = 0$$

اس لیے

$$\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(x,p)} + p\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(z,p)} + \frac{\partial(f,f_1)}{\partial(y,q)} + q\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(z,q)} = xz - x^2p - x^2 + px^2 - q - qxy$$
$$= (xz - q) - x^2 - qxy$$

مساوات (2) سے

$$= x^2p - x^2 - qxy$$
$$= x(xp - x - qy)$$

مساوات (1) سے

$$\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(x,p)} + p\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(z,p)} + \frac{\partial(f,f_1)}{\partial(y,q)} + q\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(z,q)} = 0$$

اس لیے دی گئی جزوی تفرقی مساوات کا نظام ہم آہنگ ہے۔

مثال2۔ کیا جزوی تفرقی مساوات کا نظام $\frac{\partial z}{\partial y} = 9x + 11y - 2$ اور $\frac{\partial z}{\partial x} = 7x + 8y - 1$ ہم آہنگ ہے؟

حل۔ فرض کرو کہ

$$f = p - 7x - 8y + 1 = 0 \qquad .....(1)$$

$$f_1 = q - 9x - 11y + 2 = 0 \qquad .....(2)$$

اب

$$\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(x,p)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial p}\\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial p}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-7 & 1\\ -9 & 0\end{vmatrix}=9,$$

$$\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(z,p)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial p}\\ \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial p}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0,$$

$$\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(y,q)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial q}\\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial q}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-8 & 0\\ -11 & 1\end{vmatrix}=-8,$$

$$\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(z,q)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial q}\\ \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial q}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0$$

دیا گیا نظام ہم آہنگ ہو گا اگر

$$\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(x,p)}+p\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(z,p)}+\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(y,q)}+q\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(z,q)}=0$$

اس لیے

$$\begin{aligned}\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(x,p)}+p\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(z,p)}+\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(y,q)}+q\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(z,q)}&=9+0-8+0\\ &=1\neq 0\end{aligned}$$

اس لیے دی گئی جزوی تفرقی مساوات کا نظام ہم آہنگ نہیں ہے۔

مثال3۔ کیا جزوی تفرقی مساوات کا نظام $\frac{\partial z}{\partial x}=6x+3y$ اور $\frac{\partial z}{\partial y}=3x-4y$ ہم آہنگ ہے؟ اگر ہاں تو اس کے لیے حل محسوب کریے۔

حل۔ فرض کرو کہ

$$f=p-6x-3y=0 \qquad .....(1)$$

$$f_1=q-3x+4y=0 \qquad .....(2)$$

یہاں $P=6x+3y$ اور $Q=3x-4y$

ہم جانتے ہیں کہ دو جزوی تفرقی مساواتیں $p=P(x,y)$ اور $q=Q(x,y)$ ہم آہنگ ہوں گی اگر اور صرف اگر $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

اس لیے

$$\frac{\partial P}{\partial y}=3$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 3$$

اس لیے دی گئی جزوی تفرقی مساوات کا نظام ہم آہنگ ہے۔ اب دیے گئے نظام کا مشترکہ حل درجہ ذیل طریقہ سے حاصل کرتے ہیں

$$\begin{aligned} dz &= pdx + qdy \\ &= (6x + 3y)dx + (3x - 4y)dy \\ &= 6xdx + 3ydx + 3xdy - 4ydy \\ &= 6xdx - 4ydy + 3(ydx + 3xdy) \\ dz &= 6xdx - 4ydy + 3d(xy) \end{aligned}$$

تکمل کرنے پر

$$\begin{aligned} z &= 6\frac{x^2}{2} - 4\frac{y^2}{2} + 3xy + A \\ &= 3x^2 - 2y^2 + 3xy + A \end{aligned}$$

جہاں A ایک اختیاری مستقل ہے۔

16.2.2 چارپٹ کے طریقے سے غیر خطی جزوی تفرقی مساوات کا حل

(Solution of Non linear Partial Differential Equations by Charpit's Method)

ہم ایک عام طریقہ پر بحث کریں گے جو چارپٹ کے طریقہ کار کے نام سے جانا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ پہلے رتبے کی غیر خطی جزوی تفرقی مساوات ذیل ہے

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \qquad .....(1)$$

چارپٹ کے طریقہ کار میں بنیادی خیال پہلے رتبے کی ایک اور جزوی تفرقی مساوات کا تعارف ہے۔ یہ اس طرح ہو گی

$$f_1(x, y, z, p, q) = 0 \qquad .....(2)$$

مساوات(1)اور مساوات(2) کو p اور q کے لیے حل کرتے ہیں اور پھر ان کی قیمتیں درجہ ذیل مساوات میں درج کرتے ہیں

$$dz = p(x, y, z, a)dx + q(x, y, z, b)dy$$

اس مساوات کا حل، (اگر یہ وجود رکھتا ہو) ہی دی گئی مساوات کے لیے مطلوبہ مکمل حل ہو گا۔

فرض کرو کہ جزوی تفرقی مساوات کا نظام

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \qquad .....(1)$$

$$f_1(x, y, z, p, q) = 0 \qquad .....(2)$$

ہم آہنگ ہے۔ تب ہم جانتے ہیں دیا گیا نظام ہم آہنگ ہو گا اگر

$$\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(x,p)} + p\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(z,p)} + \frac{\partial(f,f_1)}{\partial(y,q)} + q\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(z,q)} = 0 \qquad .....(3)$$

اس لیے

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial p} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial p} \end{vmatrix} + p\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial p} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial p} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial q} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial q} \end{vmatrix} + q\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial q} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial q} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)+p\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f_1}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial q}-\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)+q\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f_1}{\partial q}-\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)=0$$

$$\Rightarrow \; -\left(\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)-p\left(\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{\partial f_1}{\partial z}+\left(\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial f_1}{\partial p}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial f_1}{\partial q}=0 \qquad .....(4)$$

یہ ایک خطی جزوی تفرقی مساوات ہے، جس کی مدد سے ہم f_1 کو حاصل کرسکتے ہیں۔ اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل ہوگی

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial p}}=\frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial q}}=\frac{dz}{p\frac{\partial f}{\partial p}+q\frac{\partial f}{\partial q}}=\frac{dp}{-\left(\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}\right)}=\frac{dq}{-\left(\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}\right)} \qquad .....(5)$$

اب درجہ ذیل مثالوں سے اوپر دیا گیا طرقہ سمجھتے ہیں:

مثال 1۔ مساوات $z^2 = pqxy$ کو حل کریے۔

حل۔ دیا ہے $z^2 = pqxy$

$$f = z^2 - pqxy = 0 \qquad .....(1)$$

مساوات (1) کو بہ لحاظ x جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -pqy$$

اسی طرح ہم حاصل کرسکتے ہیں

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -pqx,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z,$$
$$\frac{\partial f}{\partial p} = -qxy,$$

اور

$$\frac{\partial f}{\partial q} = -pxy$$

ہم جانتے ہیں کہ چارپٹ کی معاون مساوات درجہ ذیل ہوتی ہے

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial p}}=\frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial q}}=\frac{dz}{p\frac{\partial f}{\partial p}+q\frac{\partial f}{\partial q}}=\frac{dp}{-\left(\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}\right)}=\frac{dq}{-\left(\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}\right)}$$

اس لیے

$$\frac{dx}{-qxy}=\frac{dy}{-pxy}=\frac{dz}{p(-qxy)+q(-pxy)}=\frac{dp}{-(-pqy+2pz)}=\frac{dq}{-(-pqx+2qz)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{-qxy}=\frac{dy}{-pxy}=\frac{dz}{-2pqxy}=\frac{dp}{p(qy-2z)}=\frac{dq}{q(px-2z)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx/x}{-qy}=\frac{dy/y}{-px}=\frac{dp/p}{qy-2z}=\frac{dq/q}{px-2z}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}}{qy-px}=\frac{\frac{dp}{p}-\frac{dq}{q}}{qy-px}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=\frac{dp}{p}-\frac{dq}{q}$$

اس مساوات کو تکمل کرنے پر

$$-\log x+\log y=\log p-\log q+\log A$$

$$\Rightarrow \quad \log\frac{y}{x}=-\log\frac{q}{p}+\log A$$

$$\Rightarrow \quad \log\frac{y}{x}+\log\frac{q}{p}=\log A$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{x}\times\frac{q}{p}=A$$

$$\Rightarrow \quad q=\frac{Axp}{y}$$

مساوات(1)سے

$$z^2=p\left(\frac{Axp}{y}\right)xy$$

$$=Ap^2x^2$$

$$\Rightarrow \quad p^2=\frac{z^2}{Ax^2}$$

$$\Rightarrow \quad p=\frac{z}{x\sqrt{A}}$$

اس لیے

$$q=\frac{Ax}{y}\left(\frac{z}{x\sqrt{A}}\right)=\frac{\sqrt{A}z}{y}$$

pاورq کی قیمتیں مساوات $pdx+qdy=dz$ میں درج کرنے پر

$$\left(\frac{z}{x\sqrt{A}}\right)dx+\left(\frac{\sqrt{A}z}{y}\right)dy=dz$$

$$\left(\frac{dx}{x\sqrt{A}}\right)+\left(\frac{\sqrt{A}}{y}\right)dy=\frac{dz}{z}$$

تکمل کرنے پر

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\log x+\sqrt{A}\log y+\log B=\log z$$

$$z=Bx^{1/\sqrt{A}}y^{\sqrt{A}}$$

جو کہ دی گئی مساوات کے لیے مطلوبہ مکمل حل ہے۔

مثال2۔ مساوات $(p^2+q^2)y=qz$ کے لیے مکمل حل حاصل کریے۔

حل۔ فرض کرو کہ

$$f=(p^2+q^2)y-qz=0 \qquad .....(1)$$

مساوات (1) کو بہ لحاظ x جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0$$

اسی طرح ہم حاصل کر سکتے ہیں

$$\frac{\partial f}{\partial y} = p^2 + q^2,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = -q,$$
$$\frac{\partial f}{\partial p} = 2py,$$

اور

$$\frac{\partial f}{\partial q} = 2qy - z$$

ہم جانتے ہیں کہ چارپٹ کی معاون مساوات درجہ ذیل ہوتی ہے

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dp}{-\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \frac{dq}{-\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right)}$$

اس لیے

$$\frac{dx}{2py} = \frac{dy}{2qy - z} = \frac{dz}{p(2py) + q(2qy - z)} = \frac{dp}{-(0 - pq)} = \frac{dq}{-(p^2 + q^2 - q^2)}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{2py} = \frac{dy}{2qy - z} = \frac{dz}{2p^2y + 2q^2y - qz} = \frac{dp}{pq} = \frac{dq}{-p^2}$$

آخری دو کسرے لینے پر

$$\frac{dp}{pq} = \frac{dq}{-p^2}$$
$$\Rightarrow \quad pdp + qdq = 0$$

اس مساوات کو تکمل کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2} = \frac{A}{2}$$
$$\Rightarrow \quad p^2 + q^2 = A$$

مساوات (1) میں یہ قدر درج کرنے پر

$$Ay = qz$$
$$\Rightarrow \quad q = \frac{Ay}{z}$$

اس لیے

$$p = \sqrt{A - \left(\frac{Ay}{z}\right)^2}$$
$$\Rightarrow \quad p = \frac{1}{z}\sqrt{Az^2 - A^2y^2}$$

p اور q کی قیمتیں مساوات $pdx + qdy = dz$ میں درج کرنے پر

$$\frac{1}{z}\sqrt{Az^2 - A^2y^2}dx + \left(\frac{Ay}{z}\right)dy = dz$$
$$\Rightarrow \quad \sqrt{Az^2 - A^2y^2}dx + Aydy = zdz$$

$$\Rightarrow \qquad dx = \frac{zdz - Aydy}{\sqrt{Az^2 - A^2y^2}}$$

$$\Rightarrow \qquad dx = \frac{d(Az^2 - A^2y^2)^{1/2}}{A}$$

تکمل کرنے پر

$$x + B = \frac{(Az^2 - A^2y^2)^{1/2}}{A}$$

$$\Rightarrow \qquad (x + B)^2 = \frac{Az^2 - A^2y^2}{A^2}$$

$$\Rightarrow \qquad (x + B)^2 + y^2 = \frac{z^2}{A}$$

جو کہ دی گئی مساوات کے لیے مطلوبہ مکمل حل ہے۔

مثال3۔ مساوات $x^2p^2 + y^2q^2 - a = 0$ کے لیے مکمل حل حاصل کریے۔

حل۔ فرض کرو کہ

$$f = x^2p^2 + y^2q^2 - a = 0 \qquad .....(1)$$

مساوات (1) کو بہ لحاظ x جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xp^2$$

اسی طرح ہم حاصل کر سکتے ہیں

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2yq^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 2px^2,$$

اور

$$\frac{\partial f}{\partial q} = 2qy^2$$

ہم جانتے ہیں کہ چارپٹ کی معاون مساوات درجہ ذیل ہوتی ہے

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dp}{-\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \frac{dq}{-\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right)}$$

اس لیے

$$\frac{dx}{2px^2} = \frac{dy}{2qy^2} = \frac{dz}{p(2px^2) + q(2qy^2)} = \frac{dp}{-\left(2xp^2 + p(0)\right)} = \frac{dq}{-\left(2yq^2 + q(0)\right)}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{2px^2} = \frac{dy}{2qy^2} = \frac{dz}{2(x^2p^2 + y^2q^2)} = \frac{dp}{-2xp^2} = \frac{dq}{-2yq^2}$$

پہلا اور چوتھا کسرہ لینے پر

$$\frac{dx}{2px^2} = \frac{dp}{-2xp^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{x} + \frac{dp}{p} = 0$$

اس مساوات کو تکمل کرنے پر

$$\log x + \log p = \log A$$

$$\Rightarrow \qquad xp = A$$

مساوات (1) میں یہ قدر رکھنے پر

$$A^2 + y^2q^2 - a = 0$$

$$\Rightarrow \qquad q = \frac{\sqrt{a - A^2}}{y}$$

اس لیے

p اور q کی قیمتیں مساوات $pdx + qdy = dz$ میں رکھنے پر

$$A\frac{dx}{x} + \sqrt{a - A^2}\,\frac{dy}{y} = dz$$

تکمل کرنے پر

$$B + A\log x + \sqrt{a - A^2}\log y = z$$

$$\Rightarrow \qquad B + \log x^A + \log y^{\sqrt{a-A^2}} = z$$

$$\Rightarrow \qquad B + \log x^A y^{\sqrt{a-A^2}} = z$$

جو کہ دی گئی مساوات کے لیے مطلوبہ مکمل حل ہے۔

مثال4۔ مساوات $p^2 - q^2 = z$ کے لیے مکمل حل حاصل کریے۔

حل۔ فرض کرو کہ

$$f = p^2 - q^2 - z = 0 \qquad .....(1)$$

مساوات (1) کو بہ لحاظ x جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

اسی طرح ہم حاصل کر سکتے ہیں

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 2p,$$

اور

$$\frac{\partial f}{\partial q} = -2q$$

ہم جانتے ہیں کہ چارپٹ کی معاون مساوات درجہ ذیل ہوتی ہے

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dp}{-\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \frac{dq}{-\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right)}$$

اس لیے

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{-2q} = \frac{dz}{p(2p) + q(-2q)} = \frac{dp}{-\big(0 + p(-1)\big)} = \frac{dq}{-\big(0 + q(-1)\big)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{2p} = \frac{dy}{-2q} = \frac{dz}{2(p^2 - q^2)} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$$

آخری دو کسرے لینے پر

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$$

اس مساوات کو تکمل کرنے پر

$$\log p = \log q + \log A$$

$$\Rightarrow \quad p = Aq \qquad .....(2)$$

تیسرے اور چوتھے کسرے لینے پر

$$\frac{dz}{2(p^2 - q^2)} = \frac{dp}{p}$$

مساوات (1) سے

$$\frac{dz}{2z} = \frac{dp}{p}$$

تکمل کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\log z^{\frac{1}{2}} + \log B = \log p$$

$$\Rightarrow \quad \log Bz^{\frac{1}{2}} = \log p$$

$$\Rightarrow \quad p = Bz^{\frac{1}{2}}$$

اب مساوات(2) سے

$$q = \frac{p}{A} = \frac{Bz^{\frac{1}{2}}}{A}$$

فرض کرو کہ $\frac{B}{A} = C$ اس لیے

$$q = Cz^{\frac{1}{2}}$$

p اور q کی قیمتیں مساوات $pdx + qdy = dz$ میں رکھنے پر

$$Bz^{\frac{1}{2}}dx + Cz^{\frac{1}{2}}dy = dz$$

$$\Rightarrow \quad Bdx + Cdy = \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$Bx + Cy = 2\sqrt{z} + D$$

جو کہ دی گئی مساوات کے لیے مطلوبہ مکمل حل ہے۔

مثال5۔ مساوات $(p^2 + q^2)x = pz$ کے لیے مکمل حل حاصل کریے۔

حل۔ فرض کرو کہ

$$f = (p^2 + q^2)x - pz = 0 \qquad .....(1)$$

مساوات (1) کو بہ لحاظ x جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p^2 + q^2$$

اسی طرح ہم حاصل کر سکتے ہیں

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = -p,$$
$$\frac{\partial f}{\partial p} = 2px - z,$$

اور

$$\frac{\partial f}{\partial q} = 2qx$$

ہم جانتے ہیں کہ چارپٹ کی معاون مساوت درجہ ذیل ہوتی ہے

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dp}{-\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \frac{dq}{-\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right)}$$

اس لیے

$$\frac{dx}{2px - z} = \frac{dy}{2qx} = \frac{dz}{p(2px - z) + q(2qx)} = \frac{dp}{-\left(p^2 + q^2 + p(-p)\right)} = \frac{dq}{-\left(0 + q(-p)\right)}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{2px - z} = \frac{dy}{2qx} = \frac{dz}{2(p^2 + q^2)x - pz} = \frac{dp}{-q^2} = \frac{dq}{pq}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{2px - z} = \frac{dy}{2qx} = \frac{dz}{2pz - pz} = \frac{dp}{-q^2} = \frac{dq}{pq}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{2px - z} = \frac{dy}{2qx} = \frac{dz}{pz} = \frac{dp}{-q^2} = \frac{dq}{pq}$$

آخری دو کسرے لینے پر

$$\frac{dp}{-q} = \frac{dq}{p}$$
$$\Rightarrow \quad pdp + qdq = 0$$

اس مساوات کو تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$p^2 + q^2 = A^2$$

مساوات (1) سے

$$pz = A^2x$$
$$\Rightarrow \quad p = \frac{A^2x}{z}$$

اب $p^2 + q^2 = A^2$ میں یہ قدر رکھنے پر

$$\left(\frac{A^2x}{z}\right)^2 + q^2 = A^2$$
$$\Rightarrow \quad q^2 = A^2 - \left(\frac{A^2x}{z}\right)^2$$
$$\Rightarrow \quad q^2 = \frac{A^2z^2 - A^4x^2}{z^2}$$
$$\Rightarrow \quad q = \frac{A\sqrt{z^2 - A^2x^2}}{z}$$

p اور q کی قیمتیں مساوات $pdx + qdy = dz$ میں رکھنے پر

$$\frac{A^2x}{z}dx + \frac{A\sqrt{z^2 - A^2x^2}}{z}dy = dz$$
$$\Rightarrow \quad A\sqrt{z^2 - A^2x^2}dy = zdz - A^2xdx$$
$$\Rightarrow \quad Ady = \frac{zdz - A^2xdx}{\sqrt{z^2 - A^2x^2}} \qquad .....(2)$$

اب مان لیجیے کہ $z^2 - A^2x^2 = m$ تب $2(zdz - A^2xdx) = dm$ اس لیے مساوات (2) سے

$$Ady = \frac{dm}{2\sqrt{m}}$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$B + Ay = \sqrt{m}$$
$$\Rightarrow \quad B + Ay = \sqrt{z^2 - A^2x^2}$$
$$\Rightarrow \quad A^2x^2 + (B + Ay)^2 = z^2$$

جو کہ دی گئی مساوات کے لیے مطلوبہ مکمل حل ہے۔

16.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں آپ نے غیر خطی جزوی تفرقی مساوات کے نظام کے ہم آہنگ ہونے کی شرط کو سمجھا اور غیر خطی جزوی تفرقی مساوات کے لیے معاون مساوات حاصل کرنا سیکھا اور پھر اس سے چارپٹ کے طریقے کو استعمال کر کے دی گئی غیر خطی جزوی تفرقی مساوات کا حل حاصل کرنا سیکھا۔

16.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

چارپٹ کی غیر خطی جزوی تفرقی مساوات، ہم آہنگ نظام، معاون مساوات، لفافہ

16.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

16.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. پہلے رتبے کی غیر خطی جزوی تفرقی مساواتیں $\phi(x, y, z, p, q) = 0$ اور $\psi(x, y, z, p, q) = 0$ کے ہم آہنگ ہونے کی شرط بتایے۔
2. چارپٹ کی غیر خطی جزوی تفرقی مساوات کے لیے معاون مساوات لکھو۔
3. پہلے رتبے کی غیر خطی جزوی تفرقی مساواتیں $\phi(x, y, z, p, q) = 0$ اور $\psi(x, y, z, p, q) = 0$ کے ہم آہنگ ہونے کی شرط $\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(z,q)} - q\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(y,q)} + \frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(z,p)} - p\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x,p)} = 0$ ہے۔ (T/F)
4. مساواتیں $p - 5x + 7y = 0$ اور $q - 6x - 8y = 0$ ہم آہنگ ہیں۔ (T/F)
5. مساوات $q = 3p^2$ کے لیے معاون مساوات..................... ہے۔

16.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. مساوات $2(z + xp + yq) = yp^2$ کا مکمل حل حاصل کرو۔
2. مساوات $zpq = p + q$ کا مکمل حل حاصل کرو۔
3. مساوات $z = px + qy - \sin pq$ کا مکمل حل حاصل کرو۔

16.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. دکھاؤ کہ جزوی تفرقی مساواتیں $z(px + qy) = 2xy$ اور $px = qy$ ہم آہنگ ہیں۔ اور پھر ان کا حل معلوم کرو۔
2. دکھاؤ کہ جزوی تفرقی مساواتیں $p^2 + q^2 = 1$ اور $(p^2 + q^2)x = pz$ ہم آہنگ ہیں۔ اور پھر ان کا حل معلوم کرو۔
3. مساوات $q = (z + xp)^2$ کا مکمل حل حاصل کرو۔
4. مساوات $p(1 + q^2) + (a - z)q = 0$ کا مکمل حل حاصل کرو۔
5. مساوات $p^2 + q^2 - 2(px + qy) + 1 = 0$ کا مکمل حل حاصل کرو۔
6. مساوات $pq = xz$ کا مکمل حل حاصل کرو۔
7. مساوات $px + qy + pq = 0$ کا مکمل حل حاصل کرو۔
8. $p^2x^2 + q^2y^2 = 4$ کا مکمل حل حاصل کرو۔

جوابات:

16.5.1 معروضی سوالات کے جوابات

$$\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x,p)} + p\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(z,p)} + \frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(y,q)} + q\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(z,q)} = 0 \quad .1$$

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{\mathrm{dy}}{\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{p}\frac{\partial f}{\partial p}+q\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{\mathrm{dp}}{-\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\mathrm{p}\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \frac{\mathrm{dq}}{-\left(\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}\right)} \quad .2$$

F .3

F .4

$$\frac{dx}{-6\mathrm{p}} = \frac{\mathrm{dy}}{1} = \frac{\mathrm{dz}}{-6p^2+q} = \frac{\mathrm{dp}}{0} = \frac{\mathrm{dq}}{0} \quad .5$$

16.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

$$yz = \frac{ax}{y} - \frac{a^2}{4y^2} + b \quad .1$$

$$z^2 = 2(1+a)\left\{x + \frac{y}{a}\right\} + b = 0 \quad .2$$

$$z = ax + by - ab \quad .3$$

16.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

$$z^2 = 2xy + a \quad .1$$

$$z^2 = x^2 + (y+a)^2 \quad .2$$

$$xz = 2\sqrt{ax} + ay + b \quad .3$$

$$4(bz - ab - 1) = (x + by + c)^2 \quad .4$$

$$(a^2+1)z = \frac{(ax+y)^2}{2} \pm \left[\frac{ax+y}{2}\sqrt{(ax+y)^2 - (a^2+1)} - \frac{(a^2+1)}{2}\log\left\{(ax+y) + \sqrt{(ax+y)^2 - (a^2+1)}\right\}\right] + b \quad .5$$

$$z = \left(a + \frac{x^2}{2}\right)(b+y) \quad .6$$

$$z = -\frac{1}{2}(y+ax)^2 + b \quad .7$$

$$z = b + \log x^a y^{\sqrt{4-a^2}} \quad .8$$

16.6 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Ordinary and Partial Differential Equations, M. D. Raisinghania, S. Chand & Company Ltd., 15th Edition, 2013

نمونہ امتحانی پرچہ

پرچہ: تفرقی مساوات

نشانات:70 وقت:3 گھنٹے

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم اور حصہ سوم۔ ہر جواب کے لیے لفظوں کی تعداد اشارتن ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1۔ حصہ اول میں 10 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات / خالی جگہ پر کرنا / مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ $10 \times 1 = 10$

2۔ حصہ دوم میں آٹھ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالات کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریبن 200 لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 6 نمبرات مختص ہیں۔ $5 \times 6 = 30$

3۔ حصہ سوم میں پانچ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالات کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریبن 500 لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 10 نمبرات مختص ہیں۔ $3 \times 10 = 30$

حصہ اول

(i) مساوات $y = x\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ کا رتبہ.................. ہے۔

A. 2 B. 3 C. 1 D. 4

(ii) تفرقی مساوات $log\,\frac{dy}{dx} = ax + b$ کا حل........................ ہے۔

(iii) ذیل میں سے کون ٹھیک مساوات ہے

A. $2xydx + (x^2 + y^2)dy = 0$ B. $(y\sin 2x)dx - (cos^2x + y^2)dy = 0$

C. $(a^2 - 2xy - y^2)dx - (x - y)^2dy = 0$ D. ان میں سے کوئی نہیں

(iv) مساوات $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$ کا I.F. ہے

A. x B. $\frac{1}{x}$ C. $\frac{-1}{x}$ D. ان میں سے کوئی نہیں

(v) مساوات $p^2 - 5p + 6 = 0$ کو جزوضربی میں تحویل کریے۔

(vi) مساوات $y = \sin p - p\cos p$ ایک کلیرو کی مساوات ہے۔ (صحی/غلط)

(vii) فرض کرو کہ $f(D)y = 0$ مستقل ضریب کے ساتھ متجانس تفرقی مساوات ہے۔ اگر $m_1 \neq m_2$ حاصل کردہ معاون مساوات کے دو روٹس ہوں، تب مساوات کا عام حل ہو گا $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$ (صحی/غلط)

(viii) مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cos 2x$ کے لیے اتمامی تفاعل لکھو۔

(ix) لگرانج کی خطی جزوی تفرقی مساوات کے لیے معاون مساوات کی تعریف کرو۔

(x) پہلے رتبے کی غیر خطی جزوی تفرقی مساواتیں $\phi(x, y, z, p, q) = 0$ اور $\psi(x, y, z, p, q) = 0$ کے ہم آہنگ ہونے کی کیا شرط ہے؟

حصہ دوم

2. حل کرو: $y^2 \log y = xyp + p^2, y > 0$

3. متغیر جداپزیر طریقہ سے مساوات $y^2 \cos\sqrt{x}\, dx - 2\sqrt{x} e^{\frac{1}{y}} dy = 0$ کا حل معلوم کرو۔

4. مساوات $x^2p^3 + yp^2 + x^2y^2p^2 + y^3p = 0$ کو حل کریے۔

5. حل کرو: $(3xy^2 - y^3)dx - (2x^2y - xy^2)dy = 0$

6. حل کرو: $x \log x \frac{dy}{dx} + y = 2 \log x$

7. حل کرو: $\frac{d^4y}{dx^4} - y = 15 \sin 2x$

8. حل کرو: $(y + zx)p - (x + yz)q = x^2 - y^2$

9. مساوات $2(z + xp + yq) = yp^2$ کا مکمل حل حاصل کرو۔

حصہ سوم

10. ثابت کرو $Ax^2 + By^2 = 1$، جہاں A اور B اختیاری مستقلات ہیں، کی تفرقی مساوات $x[yy'' + (y')^2] = yy'$ ہو گی۔

11. مساوات $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$ کو حل کرو۔

12. اگر $y = y_1, y = y_2, \cdots, y = y_n$ مساوات $f(D)y = 0$ کے n غیر تابع حل ہیں، تب ثابت کرو کہ

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$$

بھی اس کا ایک حل ہو گا، جہاں $c_1, c_2, \cdots, c_n$ اختیاری مستقل ہیں۔

13. مساوات $(1 + x)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (1 + x)\frac{dy}{dx} + y = 4\cos\{\log(1 + x)\}$ کو حل کرو۔

14. مساوات $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x(1 + x)\frac{dy}{dx} + 2(1 + x)y = x^3$ کا حل پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے سے حاصل کریے۔

BSMM250CCP

لیب مینول

(تفرقی مساوات)

بی۔ایس سی۔

(دوسرا سمسٹر)

اکائی 17۔ تفرقی مساواتوں کی تشکیل، پہلے رتبے اور پہلے درجے کے تفرقی مساواتوں کے مسائل

نمونہ تجرباتی سوال

17.1 مساوات $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ کا حل حاصل کرو۔

مقصد(Aim)

دی گئی تفرقی مساوات کا حل معلوم کرنا۔

طرز عمل(Procedure)

Step I

دی گئی مساوات کی پہچان کرنا۔ اس مساوات کے متغیرات کو جدا کرتے ہیں۔

Step II

اس کے بعد حاصل کردہ مساوات کو تکمل کریں۔

Step III

اس طرح دی گئی مساوات کا حل حاصل ہو گا۔

حل / تجویز(Solution/Calculation)

دی گئی مساوات درجہ ذیل ہے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$$

اس مساوات کے متغیر جدا کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$$

دونوں جانب تکمل کرنے پر حاصل ہے

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\tan^{-1} y = \tan^{-1} x + \mathrm{C}$$

مستقل c کو $\tan^{-1} C$ لینے پر

$$\tan^{-1} y - \tan^{-1} x = \tan^{-1} C$$

$$\Rightarrow \qquad \tan^{-1}\left(\frac{y-x}{1+yx}\right) = \tan^{-1} C$$

$$\Rightarrow \qquad y - x = C(1+yx)$$

اس طرح $y - x = C(1+yx)$ دی گئی مساوات کا حل ہو گا۔

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

حاصل کردہ حل $y - x = C(1+yx)$ ہے۔

☆☆☆☆☆

17.2 مساوات $y = ax + bx^2$ سے اختیاری مستقلات a اور b کو ساقط کر کے تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

17.3 مساوات $y = ae^{x} + be^{2x} + ce^{3x}$ کے استعمال سے تفرقی مساوات حاصل کرو، جہاں a, b, c اختیاری مستقلات ہیں۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

17.4 تفرقی مساوات $\frac{x+y+a}{x+y+b}=\left(\frac{x+y-a}{x+y-b}\right)\frac{dy}{dx}$ کو حل کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

17.5 تفرقی مساوات $(x-y)^2\,dx+2xy\,dy=0$ کا حل معلوم کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

17.6 تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx}+\frac{x^2+3y^2}{3x^2+y^2}=0$ کو حل کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

17.7 تفرقی مساوات $(2x+y-3)dy=(x+2y-3)dx$ کو حل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

17.8 تفرقی مساوات $(x-y-2)dx=(2x-2y-3)dy$ کو حل کرو۔

مقصد (Aim)

طرزعمل (Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

17.9 مساوات $(1+x)\frac{dy}{dx}-xy=1-x$ کا حل معلوم کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

اکائی 18۔ ٹھیک مساواتیں، خطی تفرقی مساوات اور ان کے مسائل

18.1 تفرقی مساوات $(1+x)\dfrac{dy}{dx}-xy=1-x$ کا حل معلوم کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

(Conclusion/Result) نتیجہ/اختتام

☆☆☆☆☆

18.2 مساوات $(1+y^2)dx = (\tan^{-1} y - x)dy$ کا حل معلوم کرو۔

(Aim) مقصد

(Procedure) طرز عمل

(Solution/Calculation) حل/تجویز

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

18.3 تفرقی مساوات $x\frac{dy}{dx}+2y=x^2\log x$ کو حل کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

18.4 تفرقی مساوات $y\ \frac{dy}{dx}=\frac{\sin^2 x}{1+x^3}-\frac{3x^2}{1+x^3}$ کو حل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

18.5 تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=y^2\sin x$ کو حل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

18.6 تفرقی مساوات $xy - \frac{dy}{dx} = y^3 e^{-x^2}$ کو حل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

18.7 تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2+1}{2xy}$ کو حل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

18.8 مساوات $\left(1+e^{x/y}\right)dx+e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$ کا حل معلوم کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

18.9 تفرقی مساوات $x\,dx + y\,dy = m(x\,dy - y\,dx)$ کو حل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

18.10 مساوات $\left(xy+2x^2y^2\right)y\,dx+\left(xy-x^2y^2\right)xdy=0$ کا حل معلوم کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

18.11 تفرقی مساوات $xy - \frac{dy}{dx} = y^3 e^{-x^2}$ کو حل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

اکائی 19۔ p، x اور y کے لیے حل کی جانے والی پہلے رتبے اور اعلی درجے کی تفرقی مساواتیں

19.1 مساوات $x^2p^2 - 2xyp + 2y^2 - x^2 = 0$ کا حل معلوم کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

19.2 مساوات $p^3(x+2y)+3p^2(x+y)+p(2x+y)=0$ کو حل کرو۔

مقصد(Aim)

طرزِ عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

19.3 مساوات $xp^2 - 2yp + ax = 0$ کو حل کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

19.4 مساوات $y + px = x^4p^2$ کو حل کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل/تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

19.5 مساوات $x^2 = a^2(1 + p^2)$ کا حل معلوم کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

19.6 مساوات $ap^2 + p - xy = 0$ کو حل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ /اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

19.7 مساوات $2px = 2\tan y + p^3 cos^2 y$ کو حل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

اکائی20۔ کلیرو کی مساوات، تفرقی مساوات کے اطلاقات اور عمودی ٹراجکٹری کے مسائل

20.1 مساوات $(x-a)p^2+(x-y)p-y=0$ کا حل حاصل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

20.2 مساوات $(py + x)(py - x) = 2p$ کا حل حاصل کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

20.3 مساوات $x^2(y - px) = p^2 y$ کو حل کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

20.4 اگر ریڈیم کی نصف دوران حیات 1600 سال ہو تو کتنے وقت میں 100 mg سے گھٹ کر 90 mg ہو جائے گی۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

20.5 منحنیات کے خاندان $x^2 + y^2 = cx$، کی عمودی ٹراجکٹری(Orthogonal Trajectory) حاصل کرو(جہاں c ایک پیرامیٹر ہے)۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

20.6 دائروں کے خاندان $x^2 + y^2 = r^2$ کو 30° کے جھکاؤ پر کاٹنے والی اوبلک (Oblique) ٹراجکٹری کی مساوات حاصل کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

20.7 منحنیات کے خاندان $r = a(\sec\theta + \tan\theta)$، کی عمودی ٹراجکٹری حاصل کرو(جہاں a ایک پیرامیٹر ہے)۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

20.8 منحنیات کے خاندان $\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1$ کی عمودی ٹراجکٹری حاصل کرو (جہاں λ ایک پیرامیٹر ہے)۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ /اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

20.9 منحنیات کے خاندان $x^{2/3} + y^{2/3} = c$، جہاں c ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری حاصل کریے۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

20.10 ثابت کرو کہ منحنیوں کے خاندان $r = a(1 - \cos\theta)$ کی عمودی ٹراجکٹری معلوم کرو (جہاں a ایک پیرامیٹر ہے)۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

اکائی 21۔ مستقل ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساواتوں کے مسائل

21.1 مساوات $\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$ کو حل کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

21.2 اگر متجانس تفرقی مساوات کے r روٹس برابر ہوں، تب اس کا حل کس طرح حاصل کیا جاتا ہے؟

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

21.3 مساوات $\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 9\frac{dy}{dx} + 13y = 0$ کا حل معلوم کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

21.4 مساوات $\frac{d^3x}{dt^3}+3\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+x=0$ کا حل محسوب کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

21.5 اگر $y = y_1, y = y_2, \cdots, y = y_n$ مساوات $f(D)y = 0$ کے n غیر تابع حل ہیں، تب ثابت کرو کہ

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$$

بھی مساوات کا حل ہو گا، جہاں $c_1, c_2, \cdots, c_n$ اختیاری مستقلات ہیں۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

21.6 مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = xe^x \sin x$ کا حل معلوم کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

21.7 مساوات $\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = e^{2x} + x^2 + x$ کو حل کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

21.8 مساوات $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 5x = 10$ کو حل کرو جب کہ دیا گیا ہے $x(0) = 0$ اور $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = 0$

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

اکائی 22۔ متغیر ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساوات اور پیرامیٹرس کے تغیر کے مسائل

22.1 حل کرو: $x^4 \frac{d^3y}{dx^3} + x^3 \frac{d^2y}{dx^2} - x^2 \frac{dy}{dx} + xy = 1$

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

22.2 مساوات $(5+2x)^2\frac{d^2y}{dx^2}-6(5+2x)\frac{dy}{dx}+8y=0$ کا حل معلوم کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

22.3 مساوات $x^2 \log x = x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 3y$ کو حل کیجیے۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

22.4 مساوات $(1+x)^2\frac{d^2y}{dx^2}+(1+x)\frac{dy}{dx}+y=4\cos\{\log(1+x)\}$ کا حل معلوم کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

22.5 مساوات $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=-\frac{1}{x(1+x^2)}$ کو پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے سے حل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

22.6 مساوات $(x-1)^2 = y - x\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2}(1-x)$ کو پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے سے حل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ /اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

22.7 مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = \frac{e^x}{1+e^x}$ کو پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے سے حل کرو، جب کہ اس کے لیے اتمامی تفاعل $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$ ہے۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ /اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

اکائی 23۔ جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کے مسائل

23.1 اختیاری مستقلات a اور b کو ساقط کرکے $z = axe^y + \frac{1}{2}a^2e^{2y} + b$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

23.2 سبھی قائم دائری مخروط(Right Circular Cone) کے سٹ جن کے محور(Axis) z – محور کو چھوتے ہوں تب اس مثلہ کی جزوی تفرقی مساوات حاصل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ /اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

23.3 ان سبھی کرّوں(Spheres) کے لیے جزوی تفرقی مساوات حاصل کرو جن کا مرکز XY مستوی پر ہو اور جس کا نصف قطر 4 ہو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

23.4 z- محور پر مرکز والے سبھی کرّوں کے لیے جزوی تفرقی مساوات حاصل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

23.5 تفاعلات ϕ اور ψ کو ہٹا کر $z = y\phi(x) + x\psi(y)$ سے جزوی تفرقی مساوات حاصل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

23.6 ضابطہ $F(x+y+z, x^2+y^2-z^2) = 0$ سے اختیاری تفاعل F کو ہٹائیے۔

مقصد (Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ /اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

اکائی 24۔ لگرانج اور چارپٹ کے تریقے کے مسائل

24.1 مساوات $p - 2q = 3x^2 \sin(y + 2x)$ کا حل حاصل کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

24.2 مساوات $(x^2 - yz)p + (y^2 - zx)q = z^2 - xy$ کو حل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

24.3 مساوات $z^2 = pqxy$ کو چارپٹ کے طریقے سے حل کیجیے۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ /اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

24.4 ثابت کرو کہ جزوی تفرقی مساواتیں$p^2 + q^2 = 1$ اور $(p^2 + q^2)x = pz$ ہم آہنگ(Compatible)ہیں اور پھر ان کا حل معلوم کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

24.5 مساوات $pq = xz$ کا چارپٹ کے طریقے سے مکمل حل (Complete Solution) معلوم کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ /اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

نمونہ امتحانی پرچہ

ریاضیات(لیب مینول)

BSMM250CCP

بی۔ایس سی- (دوسرا سمسٹر)

وقت:3 Hrs **کل نمبر:**35

نوٹ: درج ذیل میں سے کوئی پانچ سوالات کے جواب دیجیے $(5 \times 7 = 35)$

1۔ حل معلوم کیجیے: $(x - y - 2)dx + (x - 2y - 3)dy = 0$

2۔ حل کرو: $(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} + 4xy = \frac{1}{x^2+1}$

3۔ مساوات $xyp^2 - (x^2 - y^2)p - xy = 0$ کو حل کریے۔

4۔ منحنیات کے خاندان $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ جہاں a ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری محسوب کریے۔

5۔ کسی مناسب طریقے سے مساوات $\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx} + 1\right)\left(\frac{dy}{dx} - 1\right)^3 y = 12e^x$ کا حل معلوم کرو۔

6۔ مساوات $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 3y = x^2 \log x$ کو حل کرو۔

7۔ تفاعلات ϕ اور ψ کو ساقط کر کے $z = \phi(x) + \psi(y)$ سے جزوی تفرقی مساوات حاصل کرو۔

8۔ مساوات $p^2 + q^2 - 2(px + qy) + 1 = 0$ کا مکمل حل حاصل کرو۔

اہم نکات/Notes

یہ کتاب مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کے ڈی ٹی پی سیل کاؤنٹر پر دستیاب ہے۔

ملنے کا پتہ:

ڈی ٹی پی سیل کاؤنٹر، ڈائرکٹوریٹ آف ٹرانسلیشن اینڈ پبلی کیشنز

مولانا آزاد نیشنل اُردو یونیورسٹی، گچی باؤلی، حیدرآباد-500032 (تلنگانہ)

DTP Sale Counter, Directorate of Translation & Publications

Room No. G-09, H. K. Sherwani Centre for Deccan Studies
Maulana Azad National Urdu University, Gachibowli,Hyderabad-500032
M: 9394370675, 9966818593, Email: directordtp@manuu.edu.in

Account Name: DTP Sale Counter **Account No.:** 187901000009349
Bank Name: Indian Overseas Bank **IFSC:** IOBA00001879
Branch: Gachibowli, Hyderabad

Counter Timings

Monday To Friday
09:30 a.m. To 05:30 p.m.

کتابوں کی قیمت پر رعایت کی شرح:

1۔عام قارئین کے لیے 25%

2۔طلبا، کالجز اور دیگر اداروں کے لیے 30%

کتابیں ڈاک سے بھی منگوائی جاسکتی ہیں۔

نوٹ: -/500 روپے سے زائد کے بل پر ڈاک خرچ نہیں لیا جائے گا۔