BSPH201CCT

برق اور مقناطیسیت

(Electricity and Magnetism)

مع

لَیب مینول

(Lab Manual)

بیچلر آف سائنس (بی۔ایس سی۔)

(دوسرا سمسٹر)

نظامت فاصلاتی تعلیم

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

حیدرآباد-32، تلنگانہ-بھارت

Course-Bachelor of Science
ISBN: 978-93-80322-99-5
Edition: March, 2022

ناشر	:	رجسٹرار، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد
اشاعت	:	مارچ،2022
تعداد	:	600کاپیاں
قیمت	:	360روپے
ترتیب و تزئین	:	جناب ضیاء الرحمن، نظامت فاصلاتی تعلیم، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد
سرورق	:	ڈاکٹر محمد اکمل خان، نظامت فاصلاتی تعلیم، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد
مطبع	:	پرنٹ ٹائم بزنس اینڈ انٹر پرائزس، حیدرآباد

Electricity and Magnetism

Editor
Prof. H. Aleem Basha
Professor (Physics), Programme Coordinator
School of Sciences, MANUU

On behalf of the Registrar, Published by:
Directorate of Distance Education
Maulana Azad National Urdu University
Gachibowli, Hyderabad-500032 (TS), Bharat
Director: dir.dde@manuu.edu.in   Publication: ddepublication@manuu.edu.in
Phone number: 040-23008314   Website: manuu.edu.in

مجلس ادارت
(Editorial Board)

نظامت فاصلاتی تعلیم
مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی
حیدرآباد-32، تلنگانہ-بھارت

کورس کو آرڈی نیٹر

ڈاکٹر پریا حسن
اسسٹنٹ پروفیسر (طبیعیات)، اسکول برائے سائنسی علوم
مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد

مصنفین	اکائی نمبر
• پروفیسر ایچ۔ علیم باشا	اکائی 17،8،7،6،5،2،1
• ڈاکٹر زینت فاطمہ	اکائی 13،12،11،10،9
• جناب ضیاء الرحمن	اکائی 18،16،15،14،4،3

لیب مینول

• پروفیسر ایچ۔ علیم باشا • ڈاکٹر رضوان الحق انصاری • جناب ضیاء الرحمن	تجربہ 19 تا 24

مترجم

• محمد عبد المعز	اکائی 17،13،12،11،10،9

پروف ریڈرس:

اول	:	جناب ضیاء الرحمن
دوم	:	ڈاکٹر محمد اکمل خان / ڈاکٹر رضوان الحق انصاری
فائنل	:	پروفیسر ایچ۔ علیم باشا

فہرست

بلاک IV

پیغام

مولانا آزاد نیشنل اُردو یونیورسٹی 1998 میں وطنِ عزیز کی پارلیمنٹ کے ایکٹ کے تحت قائم کی گئی ۔اس کے چار نکاتی مینڈیٹس یہ ہیں۔ (1)اردو زبان کی ترویج و ترقی (2)اردو میڈیم میں پیشہ ورانہ اور تکنیکی تعلیم کی فراہمی (3)روایتی اور فاصلاتی تدریس سے تعلیم کی فراہمی اور(4) تعلیم نسواں پر خصوصی توجہ۔ یہ وہ بنیادی نکات ہیں جو اس مرکزی یونیورسٹی کو دیگر مرکزی جامعات سے منفرد اور ممتاز بناتے ہیں۔ قومی تعلیمی پالیسی 2020 میں بھی مادری اور علاقائی زبانوں میں تعلیم کی فراہمی پر کافی زور دیا گیا ہے۔

اُردو کے ذریعے علوم کو فروغ دینے کا واحد مقصد و منشا اُردو داں طبقے تک عصری علوم کو پہنچانا ہے۔ ایک طویل عرصے سے اُردو کا دامن علمی مواد سے لگ بھگ خالی رہا ہے۔ کسی بھی کتب خانے یا کتب فروش کی الماریوں کا سرسری جائزہ اس بات کی تصدیق کر دیتا ہے کہ اُردو زبان سمٹ کر چند ''ادبی'' اصناف تک محدود رہ گئی ہے۔ یہی کیفیت اکثر رسائل و اخبارات میں دیکھنے کو ملتی ہے۔ اردو میں دستیاب تحریریں قاری کو کبھی عشق و محبت کی پُر پیچ راہوں کی سیر کراتی ہیں تو کبھی جذباتیت سے پُر سیاسی مسائل میں اُلجھاتی ہیں، کبھی مسلکی اور فکری پس منظر میں مذاہب کی توضیح کرتی ہیں تو کبھی شکوہ و شکایت سے ذہن کو گراں بار کرتی ہیں۔ تاہم اُردو قاری اور اُردو سماج دورِ حاضر کے اہم ترین علمی موضوعات سے نابلد ہیں۔ چاہے یہ خود ان کی صحت وبقا سے متعلق ہوں یا معاشی اور تجارتی نظام سے، یا مشینی آلات ہوں یا ان کے گرد و پیش ماحول کے مسائل ہوں، عوامی سطح پر اِن شعبہ جات سے متعلق اردو میں مواد کی عدم دستیابی نے عصری علوم کے تئیں ایک عدم دلچسپی کی فضا پیدا کر دی ہے۔ یہی وہ مبارزات (Challenges) ہیں جن سے اُردو یونیورسٹی کو نبرد آزما ہونا ہے۔ نصابی مواد کی صورت حال بھی کچھ مختلف نہیں ہے۔ اِسکولی سطح پر اُردو کتب کی عدم دستیابی کے چرچے ہر تعلیمی سال کے شروع میں زیر بحث آتے ہیں۔ چوں کہ اُردو یونیورسٹی کا ذریعہ تعلیم اُردو ہے اور اس میں عصری علوم کے تقریباً سبھی اہم شعبہ جات کے کورسز موجود ہیں لہٰذا اِن تمام علوم کے لیے نصابی کتابوں کی تیاری اِس یونیورسٹی کی اہم ترین ذمہ داری ہے۔ انہیں مقاصد کے حصول کے لیے اردو یونیورسٹی کا آغاز فاصلاتی تعلیم سے 1998 میں ہوا تھا۔

مجھے اِس بات کی بے حد خوشی ہے کہ اس کے ذمہ داران بشمول اساتذہ کرام کی انتھک محنت اور ماہرین علم کے بھرپور تعاون کی بنا پر کتب کی اشاعت کا سلسلہ بڑے پیمانے پر شروع ہو گیا ہے۔ فاصلاتی تعلیم کے طلباء کے لیے کم سے کم وقت میں خود اکتسابی مواد اور خود اکتسابی کتب کی اشاعت کا کام عمل میں آگیا ہے۔ پہلے سمسٹر کی کتب شائع ہو کر طلباء و طالبات تک پہنچ چکی ہیں۔ دوسرے سمسٹر کی کتابیں بھی جلد طلباء تک پہنچیں گی۔ مجھے یقین ہے کہ اس سے ہم ایک بڑی اردو آبادی کی ضروریات کو پورا کر سکیں گے اور اِس یونیورسٹی کے وجود اور اِس میں اپنی موجودگی کا حق ادا کر سکیں گے۔

پروفیسر سید عین الحسن

وائس چانسلر

پیغام

فاصلاتی طریقۂ تعلیم پوری دنیا میں ایک انتہائی کار گر اور مفید طریقۂ تعلیم کی حیثیت سے تسلیم کیا جاچکا ہے اور اس طریقۂ تعلیم سے بڑی تعداد میں لوگ مستفید ہو رہے ہیں۔ مولانا آزاد نیشنل اُردو یونیورسٹی نے بھی اپنے قیام کے ابتدائی دنوں ہی سے اردو آبادی کی تعلیمی صورت حال کو محسوس کرتے ہوئے اِس طرزِ تعلیم کو اختیار کیا۔ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کا آغاز 1998 میں نظامت فاصلاتی تعلیم اور ٹرانسلیشن ڈویژن سے ہوا اوراس کے بعد 2004 میں باقاعدہ روایتی طرز تعلیم کا آغاز ہوا اور بعد ازاں متعدد روایتی تدریس کے شعبہ جات قائم کیے گئے۔ نو قائم کردہ شعبہ جات اور ٹرانسلیشن ڈویژن میں تقرریاں عمل میں آئیں۔ اس وقت کے اربابِ مجاز کے بھرپور تعاون سے مناسب تعداد میں خود مطالعاتی مواد تحریر و ترجمے کے ذریعے تیار کرائے گئے۔

گزشتہ کئی برسوں سے یو جی سی۔ ڈی ای بی UGC-DEB اس بات پر زور دیتا رہا ہے کہ فاصلاتی نظامِ تعلیم کے نصابات اور نظامات کو روایتی نظامِ تعلیم کے نصابات اور نظامات سے کماحقہ ہم آہنگ کر کے نظامتِ فاصلاتی تعلیم کے طلبا کے معیار کو بلند کیا جائے۔ چوں کہ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی فاصلاتی اور روایتی طرزِ تعلیم کی جامعہ ہے، لہٰذا اس مقصد کے حصول کے لیے یو جی سی۔ ڈی ای بی کے رہنمایانہ اصولوں کے مطابق نظامتِ فاصلاتی تعلیم اور روایتی نظامِ تعلیم کے نصابات کو ہم آہنگ اور معیار بلند کر کے خود اکتسابی مواد SLM از سرِ نو بالترتیب یو جی اور پی جی طلبا کے لیے چھ بلاک چوبیس اکائیوں اور چار بلاک سولہ اکائیوں پر مشتمل نئے طرز کی ساخت پر تیار کرائے جا رہے ہیں۔

نظامتِ فاصلاتی تعلیم یو جی، پی جی، بی ایڈ، ڈپلوما اور سرٹیفکیٹ کورسز پر مشتمل جملہ پندرہ کورسز چلا رہا ہے۔ بہت جلد تکنیکی ہنر پر مبنی کورسز بھی شروع کیے جائیں گے۔ متعلمین کی سہولت کے لیے 9 علاقائی مراکز بنگلورو، بھوپال، دربھنگہ، دہلی، کولکاتا، ممبئی، پٹنہ، رانچی اور سری نگر اور 5 ذیلی علاقائی مراکز حیدرآباد، لکھنؤ، جموں، نوح اور امراوتی کا ایک بہت بڑا نیٹ ورک تیار کیا ہے۔ ان مراکز کے تحت سرِ دست 155 متعلم امدادی مراکز (Learner Support Centres) کام کر رہے ہیں، جو طلبا کو تعلیمی اور انتظامی مدد فراہم کرتے ہیں۔ نظامت فاصلاتی تعلیم نے اپنی تعلیمی اور انتظامی سرگرمیوں میں آئی سی ٹی کا استعمال شروع کر دیا ہے، نیز اپنے تمام پروگراموں میں داخلے صرف آن لائن طریقے ہی سے دے رہا ہے۔

نظامتِ فاصلاتی تعلیم کی ویب سائٹ پر متعلمین کو خود اکتسابی مواد کی سافٹ کاپیاں بھی فراہم کی جا رہی ہیں، نیز جلد ہی آڈیو۔ ویڈیو ریکارڈنگ کا لِنک بھی ویب سائٹ پر فراہم کیا جائے گا۔ اس کے علاوہ متعلمین کے درمیان رابطے کے لیے ایس ایم ایس کی سہولت فراہم کی جا رہی ہے، جس کے ذریعے متعلمین کو پروگرام کے مختلف پہلوئوں جیسے کورس کے رجسٹریشن، مفوضات، کونسلنگ، امتحانات وغیرہ کے بارے میں مطلع کیا جاتا ہے۔

امید ہے کہ ملک کی تعلیمی اور معاشی حیثیت سے پچھڑی اردو آبادی کو مرکزی دھارے میں لانے میں نظامتِ فاصلاتی تعلیم کا بھی نمایاں رول ہو گا۔

پروفیسر محمد رضاءاللہ خان
ڈائرکٹر، نظامت فاصلاتی تعلیم

کورس کا تعارف

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کے مختلف شعبہ جات میں سن 2016ء میں سی بی ایس ای (CBSE) نصاب متعارف ہوا۔ یہ کتاب برقی اور مقناطیسیت (Electricity ad Magnetism) کے ان موضوعات سے بحث کرتی ہے جنھیں مولانا آزاد نیشنل اُردو یونیورسٹی کے بی۔ ایس سی (فزیکل سائنس) پروگرام کے سال اول (سمسٹر۔II) کے طبیعات کے نصاب میں شامل کیا گیا ہے۔ یہ موضوعات مضمون کی جدید تحقیقات کا احاطہ کرتے ہیں، اور بی۔ اس سی (B.Sc.) کورس کے سال اول میں مطالعے کے لیے انہیں شریک کیا گیا ہے۔

سہولت کی خاطر نصاب کو چند بلاکس (Blocks) میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ہر ایک بلاک چند اکائیوں پر مشتمل ہے۔ ہر اکائی میں بالعموم مضمون کے مخصوص نکات کو ملحوظ رکھا گیا ہے۔ اکائیوں کو ماہرین کے ذریعے ایک مخصوص خاکے (Format) کے مطابق تیار کیا گیا ہے۔ خاکہ کچھ اس طرح ہے کہ طالب علم انہیں پڑھ کر بغیر وقت ضائع کیے ہوئے سمجھ جائے۔ ہر اکائی کا آغاز اس کے مقاصد، مفہوم، ذاتی تصدیق اور اس کے مطالعے کے بعد حاصل ہونے والے واقفیت پسندانہ بیان سے ہوتا ہے۔ ہر اکائی کے اختتام پر خلاصہ، معروضی سوالات، نمونہ امتحانی سوالات اور مشقیں دی گئی ہیں تاکہ طلبا نفس مضمون کے صحیح ادراک کا امتحان کر لیں۔

زیر نظر کتاب مولانا آزاد نیشنل اُردو یونیورسٹی کے فاصلاتی نظام اور روایتی طلباء کے ساتھ ساتھ سائنسی مضامین میں دلچسپی رکھنے والے اردو قاریوں اور مدارس کے طلباء کے لیے بھی مفید ثابت ہوسکتی ہے۔ آسان اردو زبان میں لکھی گئی ہے۔ تکنیکی اصطلاحات کے خالص اردو ترجمے سے گریز کیا گیا ہے تاکہ طلباء دنیا میں کثرت سے استعمال ہو رہی انگریزی اصطلاحات سے واقف ہو سکیں۔

اس کتاب کے مصنفین امید کرتے ہیں کہ اس کورس میں پیش کردہ موضوعات طلباء کو سکونی برقیات، روانی برقیات اور مقناطیسیت کے نظریات، اصولوں اور اطلاقات سے واقف کروائیں گے۔ مزید امید ہے کہ قارئین اور ماہرین اپنے مشوروں سے بھی نوازیں گے۔

پروفیسر۔ ایچ علیم باشاہ

پروگرام کوآرڈی نیٹر

برق اور مقناطیسیت

(Electricity and Magnetism)

اکائی 1۔ سمتیوں کا تجزیہ

(Vector Analysis)

اکائی کے اجزا

1.0 تمہید (Introduction)

سمتیوں کا تجزیہ ایک طاقتور حسابی ٹکنیک ہے۔ جو طبعی مساوات کی ترتیب میں ایک موثر آلہ کار ہے اور ساتھ ہی ساتھ اس کی مدد سے مساوات کا طبعی مفہوم منفرد اور واضح انداز میں سمجھنے میں اور مدد ملتی ہے۔ خصوصاً برقی مقناطیسی نظریے ہیں۔

1.1 مقاصد (Objectives)

یہ اکائی میزانیے اور سمتیوں سے واقف کراتی ہے اور مثالوں کے ذریعہ سمتیوں کے تجزیہ کے تمام اصولوں کو سمجھاتی ہے۔

اس اکائی میں ہم:

- میزانی اور سمتی مقداریں اور ریاضیاتی اظہار کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔
- سمتی الجبرا کے کلیات بیان کریں گے۔
- باہم عمودی اکائی سمتیے, کوسائین سمت , مقامی سمتیہ کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔
- سمتی ضرب یا چلیپائی ضرب ،میزانی اور سمتی میدان کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔
- میزانی میدان کا گریڈینٹ, میزانی میدان کی طبعی اہمیت کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔

1.2 میزانی اور سمتی مقداریں (Vector and Scalar Quantities)

عام طور پر تمام طبعی مقداروں کو دو درجوں میں تقسیم کیا جاتا ہے (i) میزانی مقداریں (ii) سمتی مقداریں

i. **میزانی مقداریں(Scalar Quantities)**: وہ طبعی مقداریں جو صرف مقدار رکھتی ہیں اور کوئی سمت نہیں رکھتیں۔ میزانی مقدار یا میزانیے کہلاتی ہیں۔
مثلاً: کمیت، حجم، کثافت، تپش، چال، کام۔۔

ii. **سمتی مقداریں(Vector Quantities)**: وہ طبعی مقداریں جو مقدار اور سمت دونوں رکھتی ہیں سمتی مقداریں یا صرف

سمتیے کہلاتی ہیں۔

مثلاً: رفتار، اسراع، قوت، معیار حرکت، برقی میدان۔۔۔

1.3 ریاضیاتی اظہار (Mathematical Representation)

سمتیے کو انگریزی کے حروف سے ظاہر کیا جاتا ہے حروف کے اوپر ایک تیر کا نشان لگایا جاتا ہے۔ جیسے سمتیہ A کو $\vec{A}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ایک سمتیے کو ایک تیر نشان والی خط مستقیم سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے۔اس طرح کے تیر کا نشان سمتیے کی سمت اور خط مستقیم کی لمبائی اس کی مقدار کو ظاہر کرتی ہے۔ سمتیے کی مطلق قدر کو |A| یا A سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ سمتیے کی مقدار ہمیشہ مثبت لی جاتی ہے۔

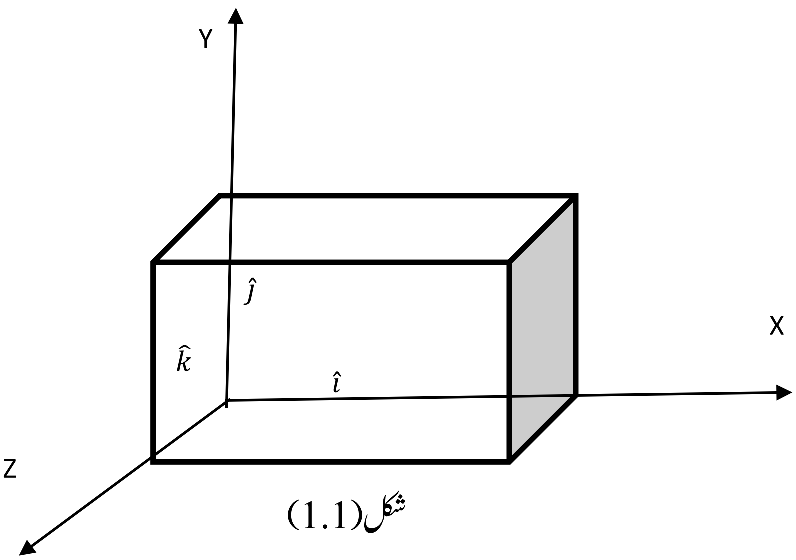
1.3.1 سمتی الجبرا کے کلیات (Laws of Vector Algebra)

1. مساوی سمتیے (Equal vectors): دو سمتیے اس وقت مساوی سمتیے کہلاتی ہیں جب کہ ان کی مقدار اور سمت یکساں ہو۔ مثلاً سمتیے $\vec{A}$, $\vec{B}$ اور $\vec{C}$ مساوی ہوں گے یعنی $\vec{A} = \vec{B} = \vec{C}$
2. منفی سمتیہ (Negative Vector): ایسا سمتیہ جس کی مقدار یکساں نہیں لیکن سمت مخالف ہوں دیے گئے سمتیے کا منفی سمتیہ کہلاتا ہے۔ علامتی طور پر دیے گئے سمتیے $\vec{A}$ کا منفی سمتیہ $\vec{A}-$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔
3. اکائی سمتیہ (Unit Vector): ایسا سمتیہ جس کی مقدار اکائی ہو اکائی سمتیہ کہلاتا ہے۔ دیا گیا سمتیہ $\vec{A}$ ہو تب اس کو اکائی سمتیہ $\hat{A}$ علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے اس کو (کیاب A پڑھا جاتا ہے)۔
4. سمتیے کا میزانیے سے ضرب: سمتیے $\vec{A}$ کا میزانیے (حقیقی عدد) m سے حاصل ضرب یعنی $m\vec{A}$ ایک سمتی مقدار ہے۔ یعنی طول $\vec{A}$ کی مقدار کا m گنا ہے اور اس کی سمت m کے لحاظ سے مثبت یا منفی ہوتی ہے۔اس طرح
$$m(-\vec{A}) = -m\vec{A} \ or \ -m(-\vec{A}) = m\vec{A}$$
5. صفری سمتیہ (Null Vector): اگر کسی سمتیے کے ابتدائی اور انتہائی نقاط منطبق ہو جائیں تو حاصل سمتیہ صفر سمتیہ کہلاتا ہے۔ صفری سمتیے کی مقدار صفر ہوتی ہے۔
6. مقامی سمتیہ (Position Vector): ایسا سمتیہ جو محددات کے نظام میں مبدے سے نقاط کے مقام کو ظاہر کرے مقامی سمتیہ کہلاتا ہے۔ اگر O مبدے اور P خلاء میں کسی نقطے کو ظاہر کرے تب $\overrightarrow{OP}$ مقامی سمتیہ ہو گا۔
7. ہم آہنگی سمتیے (Co-initial Vectors): ایسے سمتیے جن کا ابتدائی نقطہ مشترک ہو یا جو ایک ہی نقطے سے نکلتے ہوں ہم آہنگی (Co-Initial) سمتیے کہلاتے ہیں۔
8. ہم خط یا متوازی سمتیے (Collinear or Parallel Vectors): ایسے سمتیے جو ایک ہی خط یا متوازی خطوط پر عمل کرتے ہیں۔ ہم خط یا متوازی سمتیے کہلاتے ہیں۔
9. ہم مستوی سمتیے یا ہم سطحی سمتیے (Coplanar Vectors): ایسے سمتیے جو ایک ہی مستوی تک محدود ہوتے ہیں۔ ہم مستوی

یا ہم سطحی سمتیے کہلاتے ہیں۔

1.4 باہم عمودی اکائی سمتیے (Orthogonal Unit Vectors)

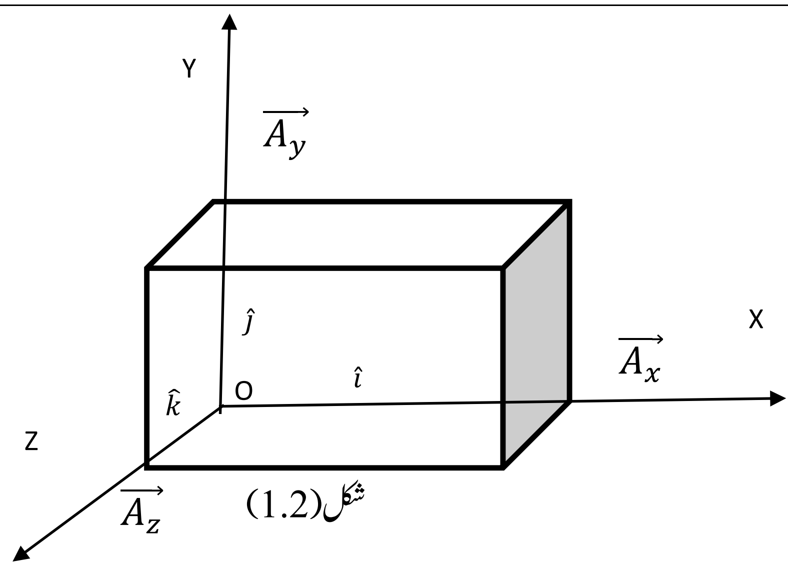
کارتیزی محددات کے نظام میں جو تین باہم عمود وار محور OX، OY اور OZ پر مشتمل ہوتا ہے۔ دیا گیا سمتیہ تین اجزا میں تقسیم ہوتا ہے۔ X، Y اور Z محوروں کی سمت میں پائے جانے والے اکائی سمتیے ترتیب وار $\vec{i}$, $\vec{j}$ اور $\vec{k}$ ہیں۔ دیے گئے سمتیے $\vec{A}$ کا X محور کی سمت میں جز PA ہوگا۔ جہاں A، سمتیے $\vec{A}$ کی مقدار ہے۔



شکل(1.1)

1.5 سمتیوں کی باہم عمودی تحلیل اور سمتی (ڈائرکشن) کوسائنس

(Orthogonal Resolution of Vector and Direction Cosines)



شکل(1.2)

فرض کیجیے کہ ایک سمتیہ $\vec{A} = \overrightarrow{OP}$ مستطیلی محددات کے نظام میں X، Y اور Z محور کی سمت میں اس کے اجزا میں تحلیل ہوتا ہے۔ فرض کیجیے کہ $\vec{A}$ کا ابتدائی کی نقطہ مبدے 'O' ہے۔

فرض کیجیے کہ $\overrightarrow{A_x}$, $\overrightarrow{A_y}$ اور $\overrightarrow{A_z}$، X,Y اور Z محور کی سمت میں پائے جانے والے سمتیے ہیں جیسا کہ شکل (1.2) میں دکھایا گیا ہے۔ A_x, A_y اور A_z ترتیب وار ان سمتیوں کی مقدار ہے۔

تب

$$\overrightarrow{A_x} = A_x\hat{\imath}\ ,\overrightarrow{A_y} = A_y\hat{\jmath}\ ,\overrightarrow{A_z} = A_z\hat{k}$$

$$\therefore\ \vec{A} = \overrightarrow{A_x} + \overrightarrow{A_y} + \overrightarrow{A_z}$$

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \qquad (1.1)$$

پیتاغورث کے مسئلہ کے مطابق

$$A^2 = {A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2 \qquad (1.2)$$

$$A = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2} \qquad (1.3)$$

سمتیے $\vec{A}$ کی سمت میں پائے جانے والا اکائی سمتیہ $\hat{A}$ باہم عمودی اکائی سمتیوں $\hat{\imath}\ ,\hat{\jmath}\ ,\hat{k}$ کی شکل میں اس طرح ہوں۔

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}}{\sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}} \qquad (1.4)$$

1.6 سمتی کوسائین (Direction Cosines)

سمتیے $\vec{A}$ اور X- محور، Y- محور، Z- محور کے درمیان بننے والے زاویئے کے کوسائین کو ترتیب وار x- سمتی کوسائین، y- سمتی اور z- سمتی کوسائین کہتے ہیں۔ جن کو ترتیب وار l، m اور n سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

فرض کرو کہ سمتیہ $\vec{A}$، X، Y اور Z محور سے ترتیب وار زاویہ α، β اور γ بناتا ہے۔

$$\text{تب}\ l = cos\ \alpha = \frac{A_x}{A}\ \text{اور}\ m = cos\ \beta = \frac{A_y}{A}\ \text{اور}\ n = cos\ \gamma = \frac{A_z}{A} \qquad (1.5)$$

جہاں پر A_x, A_y اور A_z ترتیب وار X، Y اور Z محور کی سمت میں سمتیے $\vec{A}$ کے اجزا ہیں۔ جب کہ A، سمتیے $\vec{A}$ کی مقدار ہے۔

کوسائین کو مربع کرکے جمع کرنے پر

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \left(\frac{A_x}{A}\right)^2 + \left(\frac{A_y}{A}\right)^2 + \left(\frac{A_z}{A}\right)^2$$

$$l^2 + m^2 + n^2 = \frac{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}{A^2} = \frac{A^2}{A^2} = 1 \qquad (1.6)$$

فرض کیجیے کہ $\overrightarrow{A_1}$ اور $\overrightarrow{A_2}$ دو سمتیے ہیں جن کی مقدار ترتیب وار A_1 اور A_2 ہے تب

$$\overrightarrow{A_1} = A_1x\hat{\imath} + A_1y\hat{\jmath} + A_1z\hat{k}$$
$$\frac{\overrightarrow{A_1}}{A_1} = \frac{A_1xi}{A_1} + \frac{A_1y\hat{\jmath}}{A_1} + \frac{A_1z\hat{k}}{A_1}$$
لیکن ہم جانتے ہیں کہ
$$\frac{A_1x}{A_1} = l_1;\ \frac{A_1y}{A_1} = m_1; \frac{A_1z}{A_1} = n_1$$
$$\therefore \overrightarrow{A_1} = A_1\left(l_1\hat{\imath} + m_1\hat{\jmath} + n_1\hat{k}\right)$$
اس طرح $\overrightarrow{A_2} = A_2\left(l_2\hat{\imath} + m_2\hat{\jmath} + n_2\hat{k}\right)$

تب $\overrightarrow{A_1}.\overrightarrow{A_2} = A_1A_2\cos\theta$

جہاں پر θ, $\overrightarrow{A_1}$اور$\overrightarrow{A_2}$کے درمیان بننے والا زاویہ
$$\therefore \cos\theta = \frac{\overrightarrow{A_1}.\overrightarrow{A_2}}{A_1A_2}$$
$$\cos\theta = \frac{A_1\left(l_1\hat{\imath}+m_1\hat{\jmath}+n_1\hat{k}\right).A_2\left(l_2\hat{\imath}+m_2\hat{\jmath}+n_2\hat{k}\right)}{A_1A_2}$$
$$\cos\theta = l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2$$
چوں کہ$\hat{\imath}.\hat{\imath} = \hat{\jmath}.\hat{\jmath} = \hat{k}.\hat{k} = 1$اور$\hat{\imath}.\hat{\jmath} = \hat{\jmath}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{\imath} = 0$

1.7 مقامی سمتیہ (Position Vector)

اگر(x, y, z)کسی نقطے کے محددات ہوں تب اس نقطے کو مبدے سے ملانے والا سمتیہ $\vec{r}$ اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے $\left(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}\right)$اس سمتیے کو اس نقطے کا مقامی سمتیہ کہتے ہیں۔

اگر ایک ذرہ نقطے Pپر ہے جس کے محددات (x_1, y_1, z_1)ہیں تب مقامی سمتیہ
$$\overrightarrow{r_1} = x_1i + y_1j + z_1k \qquad (1.7)$$

دوسرے نقطے Qکی جانب متحرک ہو جس کے محددات (x_2, y_2, z_2) ہیں تب مقامی سمتیہ
$$\overrightarrow{r_2} = x_2i + y_2j + z_2k \qquad (1.8)$$

تب ذرہ کا نقل مقام نقطے Pسے Qتک سمتیے$\vec{R}$سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اس طرح
$$\vec{r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1} = (x_2i + y_2j + z_2k) - (x_1i + y_1j + z_1k)$$
$$\therefore \vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)\hat{k} \qquad (1.9)$$

اگرPQچھوٹی سی سمتی تبدیلی کو ظاہر کرے تب$d\vec{r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$اور
$$x_1 - x_1 = dx, y_2 - y_1 = dy, z_2 - z_1 = dz$$
$$d\vec{r} = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}$$

$\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$ایک خط کے ٹکڑے کو ظاہر کرتا ہے جب کہ $d\vec{r}$ خط کے لا متناہی چھوٹے حصے کو ظاہر کرتا ہے۔

1.8 سمتیوں کی ضرب (Product of Vectors)

سمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کے حاصل ضرب کو دو طریقوں سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

I. میزانی ضرب یا نقطی ضرب

II. سمتی ضرب یا چلیپائی ضرب

1.8.1 میزانی ضرب یا نقطی ضرب (Scalar Product or Dot Product)

سمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کے میزانی ضرب کو $\vec{A}.\vec{B}$ ($\vec{A}$ سے $\vec{B}$) سے ظاہر کیا جاتا ہے اور حاصل ایک میزانیہ ہوتا ہے۔

سمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کا میزانی حاصل ضرب ایک میزانی مقدار ہے جو دو سمتوں کی مقدار کے حاصل ضرب اور ان کے درمیان بنے والے زاویہ Cosine کے حاصل ضرب سے ظاہر کی جاتی ہے۔

اگر θ . $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کے درمیان بننے والا زاویہ ہو تب

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$$

نوٹ:

1. اگر دو سمتیے باہم عمودا ہوں تب $\theta = 90^0$ اور $\cos 90 = 0$

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos 90^0 = 0 \text{ تب}$$

اس طرح یہ جو غیر صفری سمتیے باہم عمودی ہوں گے اور $\vec{A}.\vec{B} = 0$ ہو۔

2. دو سمتیے ہم توازی یا ہم خط (Collinear) ہوں گے اگر $\theta = 0$ یا 2π ہو۔

a) اگر $\cos 0 = 1, (\theta = 0) \Longrightarrow \therefore \vec{A}.\vec{B} = AB\,\mathrm{Cos}\,0 = AB\,Cos180^0 = AB$

b) اگر یہ دو سمتیے قد توازی ہوں تب $\theta = \pi$ اور $\mathrm{Cos}\,\pi = -1$

$$\therefore \vec{A}.\vec{B} = AB\,\mathrm{Cos}\,\theta = AB(-1) = -AB$$

c) اگر $\vec{A} = \vec{B}$ اور $\theta = 0^0$ تب $\vec{A}.\vec{B} = \vec{A}.\vec{A} = AA\,\mathrm{Cos}\,0 = A^2$

اس طرح کسی بھی سمتیے کا مربع اس کی مقدار کے مربع کے مساوی ہوگا۔

میزانی حاصل ضرب مستطایلی اجزا کی شکل میں

سمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ ان کی اجزا کی شکل میں اس طرح ہوں گے۔

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \text{ اور } \vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$$

$$\therefore \vec{A}.\vec{B} = \left(A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\right).\left(B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}\right)$$

$$= A_x B_x(\hat{\imath}.\hat{\imath}) + A_y B_y(\hat{\jmath}.\hat{\jmath}) + A_z B_z(\hat{k}.\hat{k}) + A_x B_y(\hat{\imath}.\hat{\jmath})$$
$$+ A_x B_z(\hat{\imath}.E) + A_y B_x(j.i) + A_y B_z(\hat{\jmath}.\hat{k}) + A_z B_x(\hat{k}.\hat{\imath}) + A_z B_y(k.j)$$
$$= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$
$$(\therefore \hat{\imath}.\hat{\jmath} = \hat{\imath}.\hat{k} = \hat{\jmath}.\hat{\imath} = \hat{k}.\hat{\imath} = \hat{\jmath}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{\jmath} = 0$$
اور $\hat{\imath}.\hat{\imath} = \hat{\jmath}.\hat{\jmath} = \hat{k}.\hat{k} = 1)$

دو سمتیوں کے درمیان زاویہ: جیسا کہ ہم جانتے ہیں

$$\vec{A}.\vec{B} = AB \operatorname{Cos}\theta$$
$$\therefore \operatorname{Cos}\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}\sqrt{{B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2}}$$

1.8.2 سمتی ضرب یا چلیپائی ضرب (Vector Product or Cross Product)

دو سمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کے درمیان سمتی ضرب کو $\vec{A} \times \vec{B}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ جن کی سمت زاویہ θ کی سمت میں مائیل ہوتی ہے۔ یہ ایک سمتیہ ہے جس کی قدر $AB \sin\theta$ اور سمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ سے گھری مستوی ہر عموداً ہوتی ہے۔ یہ سمت مثبت ہو گی اگر $\vec{A}$ سے $\vec{B}$ کی جانب گردش مخالف سمت ساعت ہو جب کہ یہ سمت منفی ہو گی اگر $\vec{A}$ سے $\vec{B}$ کی جانب گردش سمت ساعت ہو۔

اس طرح $\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin\theta\, \hat{n} = \vec{C}$

جہاں یہ $\hat{n}$ ایک اکائی سمتیہ ہے جو $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کے عموداً ہے۔ اس اکائی سمتیے کو اکائی عمود بھی کہتے ہیں۔

نوٹ:

1. سمتی ضرب میں سمتیوں کی ترتیب بدلنے سے سمت مخالف ہو جاتی ہے۔
$$\vec{B} \times \vec{A} = -AB \sin\theta\, \hat{n} = -(\vec{A} \times \vec{B})$$
اس طرح دو سمتیوں کا سمتی حاصل ضرب تقلیبی کلیے کی پابندی نہیں کرتا یعنی $\vec{B} \times \vec{A} \neq \vec{A} \times \vec{B}$
2. دو سمتیوں کا سمتی حاصل ضرب تقسی می کلیے کی پابندی کرتا ہے۔ یعنی
$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$
3. اگر دو سمتیے ہم خط ہوں تب π یا $\theta = 0$ یعنی $Sin\pi = \sin\theta = 0$
$$\therefore A \times B = AB \sin\theta\, \hat{n} = 0$$
اس طرح دو سمتیے ہم خط (متوازی یا قد متوازی) ہوں گے اگر $\vec{A} \times \vec{B} = 0$
4. اگر دو سمتیے مساوی ہوں تب $\theta = 0$ اور $\vec{A} \times \vec{A} = AA \sin\theta\, \hat{n} = 0$ اس طرح جو مساوی سمتیوں کا سمتی حاصل ضرب ہمیشہ صفر ہو گا۔

اگر $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ اور $\hat{k}$ اکائی سمتیے ہوں تب $\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$

5. دو اکائی سمتیوں کا سمتی حاصل ضرب

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin\theta\, \hat{n}$$

$$\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{AB} = \sin\theta\, \hat{n} \qquad \text{یا} \qquad \vec{A} \times \vec{B} = AB \sin\theta\, \hat{n}$$

اس طرح دو اکائی سمتیوں کا سمتی حاصل ضرب ایک سمتیہ ہے۔ جس کی مقدار ان کے درمیان بننے والے زاویئے کے سائین (sine) کے مستوی ہوتی ہے جب کہ سمت ان سمتیوں سے گھری ہوئی مستوی کے عموداً ہوتی ہے۔

6. دو عمودی سمتیوں کا سمتی حاصل ضرب: دو عمودی سمتیوں کے درمیان بننے والا زاویہ $\theta = 90$ ہوگا۔

$$\theta = 90 \implies \sin 90 = 1 \implies \vec{A} \times \vec{B} = AB \sin 90\, \hat{n}$$

اس طرح دو باہم عمودی سمتیوں کا سمتی حاصل ضرب ایک سمتیہ ہے۔ جس کی مقدار ان سمتیوں کی مقدار کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتی ہے جب کہ سمت $\hat{n}$ کی جانب ہوتی ہے۔

اگر $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ اور $\hat{k}$ اکائی سمتیوں ہوں تب

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k};\ \vec{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \text{ اور } \hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}$$

$$\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = -\hat{k}\ \ \hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath} \text{ اور } \hat{k} \times \hat{\jmath} = -\hat{\imath} \qquad \text{اسی طرح}$$

7. اجزا کی صورت میں سمتی حاصل ضرب: فرض کیجیے کہ (A_x, A_y, A_z) اور (B_x, B_y, B_z) ترتیب وار X , Y اور Z محور کی سمت میں سمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کے اجزا ہیں تب

$$\vec{A} = \hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y + \hat{k}A_z \text{ اور } \vec{B} = \hat{\imath}B_x + \hat{\jmath}B_y + \hat{k}B_z$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \left(\hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y + \hat{k}A_z\right) \times \left(\hat{\imath}B_x + \hat{\jmath}B_y + \hat{k}B_z\right)$$

$$\therefore\ \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{\imath}\left(A_yB_z - B_yA_z\right) - \hat{\jmath}(A_xB_z - B_xA_z) + \hat{k}\left(A_xB_y - B_xA_y\right)$$

8. سمتی ضرب کے ذریعئے دو سمتیوں کے درمیان بننے والا زاویہ: ہم جانتے ہیں کہ

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB\ sin\ \theta\ \hat{n} \tag{1.10}$$

اس طرح

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{\imath}\left(A_yB_z - B_yA_z\right) - \hat{\jmath}(A_xB_z - B_xA_z) + \hat{k}\left(A_xB_y - B_xA_y\right) \tag{1.11}$$

مساوات (1.10) اور (1.11) سے

$$AB\ sin\ \theta\hat{n} = \hat{\imath}\left(A_yB_z - B_yA_z\right) - \hat{\jmath}(A_xB_z - B_xA_z) + \hat{k}\left(A_xB_y - B_xA_y\right) \tag{1.12}$$

مساوات(1.12)کے دونوں جانب مربع کرنے پر

$$A^2B^2\sin^2\theta = \left(A_yB_z - B_yA_z\right)^2 + (A_xB_z - B_xA_z)^2 + \left(A_xB_y - B_xA_y\right)^2$$

$$\hat{n}.\hat{n} = 1 \text{ اور } \hat{\imath}.\hat{\imath} = \hat{\jmath}.\hat{\jmath} = \hat{k}.\hat{k} = 1$$

$$A^2 = {A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2 \text{ اور } B^2 = {B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2$$

$$\therefore \sin^2\theta = \frac{\left(A_yB_z - B_yA_z\right)^2 - (A_xB_z - B_xA_z)^2 + \left(A_xB_y - B_xA_y\right)^2}{({A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2).({B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2)}$$

$$\therefore \sin\theta = \left[\frac{\left(A_yB_z - B_yA_z\right)^2 - (A_xB_z - B_xA_z)^2 + \left(A_xB_y - B_xA_y\right)^2}{({A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2).({B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2)}\right]^{1/2}$$

$$\therefore \theta = sin^{-1}\left[\frac{\left(A_yB_z - B_yA_z\right)^2 - (A_xB_z - B_xA_z)^2 + \left(A_xB_y - B_xA_y\right)^2}{({A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2).({B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2)}\right]^{1/2}$$

1.9 میزانی اور سمتی میدان (Scalar & Vector Field)

میزانی میدان: خلا کا وہ علاقہ جس میں ایک میزانی مقدار مسلسل کے ساتھ موجود ہو اور جو کسی بھی نقطے پر مقامی متغیرات کی منفرد قدروں کے ذریعہ ظاہر کی جائے میزانی میدان کہلاتا ہے۔

اگر $\emptyset$ محددات کے سیٹ (x, y, z) کے مقامی متغیرات $\vec{r}$ کا میزانی تفاعل ہو تب میزانی میدان اس طرح ہوگا۔

یعنی $$\emptyset = (\vec{r}) - \emptyset(x, y, z)$$

مثال: تپشی میدان، قواتی میدان، ہم قواتی میدان۔۔۔

سمتی میدان: خلاء کا وہ علاقہ جس میں ایک سمتی مقدار مسلسل کے ساتھ موجود ہو اور جو کسی بھی نقطے پر سمت اور مقدار کے لحاظ سے مقامی متغیر کی منفرد مقداروں سے ظاہر کی جائے سمتی میدان کہلاتا ہے۔

اگر V، محددات کے سیٹ (x, y, z) کے مقامی متغیر $\vec{r}$ کا سمتی تفاعل ہو تب سمتی میدان اس طرح ہوگا۔

$$V(r) = \vec{v}(x, y, z)$$

مثالیں: برقی میدان، تجاذبی میدان، برقی رو۔۔۔

1.10 میزانی میدان کا گریڈینٹ (Gradient of Scalar Field)

فرض کیجیے کہ P مقامی متغیر $\vec{R} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ کے میزانی میدان میں ایک نقطہ ہے اور نقطے پر اس میزانی میدان کی قدر $\emptyset(\vec{r}) = \emptyset(x, y, z)$ ہو گی۔ جہاں پر $\emptyset$ تین غیر منحصر محددات x, y, z کا مسلسل تفرقی تفاعل ہے۔

y اور z کو مستقل رکھ کر $\emptyset$ کا بلحاظ x جزوی تفرق کرنے پر $\frac{\partial\emptyset}{\partial x}$ کی قیمت ہوتی ہے۔ جو نقطے P پر x کی سمت میں $\emptyset$ میں تبدیلی کی شرح کو ظاہر کرتی ہے۔ اس طرح $\frac{\partial\emptyset}{\partial x}$ نقطہ P پر z کی سمت میں اور $\frac{\partial\emptyset}{\partial z}$ نقطے P پر z کی سمت $\emptyset$ میں تبدیلی کی شرح کو ظاہر کرتی ہے۔ تفاعل

$\emptyset$ مختلف سمتیوں میں تبدیلی کی مختلف مقداریں رکھتا ہے۔

اس طرح ہم خلاء میں ایک ایسا سمتیہ ظاہر کر سکتے ہیں جس کے اجزا x, y اور z سمتیوں میں میزانی تفاعل $\emptyset$ کے جزوی تفرق ہوں گے۔اسی سمتیے کو $\emptyset$ کا گریڈینٹ کہتے ہیں اور اس کو $grad\emptyset$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\therefore\ grad\emptyset = \frac{\partial\emptyset}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}\hat{k}$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\emptyset$$
$$grad\emptyset = \vec{\nabla}\emptyset$$

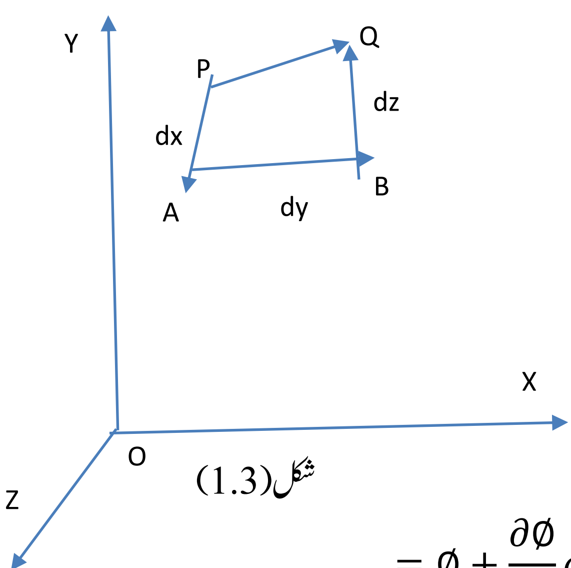
جہاں یہ علامت ∇(del) کو سمتی تفرقی آپریٹر (Vector Differential Operator) یا صرف (Del Operator) کہتے ہیں۔یہ بات قابل غور ہے کہ $\vec{\nabla}$ سمتیہ نہیں ہے صرف ایک آپریٹر ہے جو سمتیوں کے تمام کلیات کی پابندی کرتا ہے۔

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

میزانی میدان کی طبعی اہمیت (Physical Significance of Scalar field)

ایک نقطہ P لیجیے جس کے محددات x, y, z اور ایک نقطہ Q لیجیے جو P کے بہت قریب ہے جس کے محددات $x + dx$, $y + dy$ اور $z + dz$ ہیں جیسا کہ شکل(1.3)میں دکھایا گیا ہے۔نقاط P اور Q کے درمیان سمتی فاصلہ

$$d\vec{r} = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k} \qquad (1.13)$$



شکل(1.3)

فرض کیجیے کہ $\emptyset$ نقطے P پر میزانی تفاعل ہے اور $\emptyset + d\emptyset$ کو $\emptyset$ کا جملہ تفرق (Total Differential) کہتے ہیں۔

x کی سمت $\emptyset$ میں تبدیلی $\frac{\partial\emptyset}{\partial x}$ ہو گی۔

$\therefore$ A پر $\emptyset$ کی قدر اس طرح ہو گی۔

$$\emptyset + \frac{\partial\emptyset}{\partial x}dx$$

y-کی سمت میں $\emptyset$ کی تبدیلی $\frac{\partial\emptyset}{\partial y}$ ہو گی۔

B پر $\emptyset$ کی قدر اس طرح ہو گی۔

$$\emptyset + \frac{\partial\emptyset}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\emptyset + \frac{\partial\emptyset}{\partial x}dx\right)dy$$
$$= \emptyset + \frac{\partial\emptyset}{\partial x}dx + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}dy \qquad (1.14)$$

اس طرح Z-کی سمت میں $\emptyset$ میں تبدیلی $\frac{\partial\emptyset}{\partial z}$ ہو گی۔نقطے Q پر $\emptyset$ کی قدر اس طرح ہو گی۔

$$= \emptyset + \frac{\partial\emptyset}{\partial x}dx + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}\left(\emptyset + \frac{\partial\emptyset}{\partial x}dx + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}dy\right)dz$$

$$= \emptyset + \frac{\partial\emptyset}{\partial x}dx + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}dy + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}dz \qquad (1.15)$$

$$\therefore\ d\emptyset = \frac{\partial\emptyset}{\partial x}dx + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}dy + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}dz$$

$$d\emptyset = \left(\frac{\partial\emptyset}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}\hat{k}\right).\left(dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}\right)$$

$$d\emptyset = \vec{\nabla}\emptyset.\,d\vec{r} = \vec{\nabla}\emptyset.\,\hat{r}dr$$

$$\therefore \frac{d\emptyset}{dr} = \vec{\nabla}\emptyset.\,\hat{r} \qquad (1.16)$$

جہاں پر $\overrightarrow{r}, PQ$ کی جانب اکائی سمتیہ ہے۔

اس طرح میزانی میدان کا گریڈینٹ $(grad\emptyset)$ ایک سمتی میدان

کو ظاہر کرتا ہے جس کی مقدار $\emptyset$ کی قدر میں اعظم تبدیلی کے مساوی اور سمت اعظم تبدیلی کی جانب نقل مقام کی سمت میں ہوگی۔ اس طرح

"میزانی میدان کا گریڈینٹ ایک سمتیہ ہے"۔

1.11 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

اگر $\vec{A} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 2\hat{k}$، $\vec{B} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ اور $\vec{C} = \hat{\imath} - 3j - 2\hat{k}$ تین سمتیے ہوں تب

سمتیہ $\left(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}\right)$ کی مقدار اور سمتی کوسائین معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیجیے کہ $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$

$$\vec{R} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 2\hat{k} + 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k} + \hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - 2\hat{k}$$

$$\vec{R} = 4\hat{\imath} - 3\hat{k}$$

$$R_x = 4\hat{\imath}\ R_y = 0\ \ R_y = -3\hat{k}$$

$\vec{R}$ کی مقدار $= \left|\overrightarrow{R}\right| = \sqrt{{R_x}^2 + {R_y}^2 + {R_z}^2} = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

$\vec{R}$ کے سمتی کوسائین

$$l = \frac{R_x}{|\vec{R}|} = \frac{4}{5};\ m = \frac{R_y}{|\vec{R}|} = \frac{0}{5} = 0\ \ n = \frac{R_z}{|\vec{R}|} = {}^{-3}\!/_{5}$$

حل شدہ مثال 2

اگر $\vec{A} = 3\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ اور $\vec{B} = 4\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k}$ ایک مثلث کے دو اضلاع ہوں تب اس مثلث کے تمام

زاویے معلوم کیجیے۔

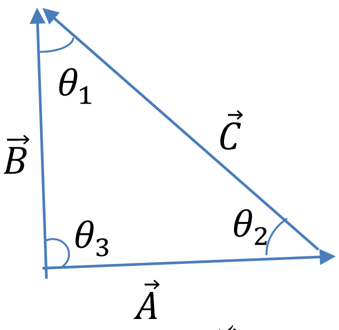
حل: فرض کیجیے کہ $\vec{C}$ دیے گئے مثلث کا تیسرا ضلع ہے۔ تب

$\vec{A}+\vec{C}=\vec{B}$ تب $\vec{C}=\vec{B}-\vec{A}$

دیا گیا ہے کہ $A=3\hat{\imath}+6\hat{\imath}-2\hat{k}$ اور $B=4\hat{\imath}-\hat{\jmath}+3k$

$$\vec{C}=\vec{B}-\vec{A}=(4\hat{\imath}-\hat{\jmath}+3k)-(3\hat{\imath}+6\hat{\imath}-2\hat{k})$$

$$\vec{C}=\hat{\imath}-7\hat{\jmath}+5\hat{k}$$



شکل (1.4)

$\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کے درمیان کا زاویہ

$$\text{Cos}\,\theta_3=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB}=\frac{A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z}{\sqrt{{A_x}^2+{A_y}^2+{A_z}^2}\sqrt{{B_x}^2+{B_y}^2+{B_z}^2}}$$

$$\text{Cos}\,\theta_3=\frac{12-6-6}{AB}=\frac{0}{AB}=0$$

$$\text{Cos}\,\theta_3=0\Rightarrow\theta_3=\text{Cos}^{-1}(0)=90^0$$

$\vec{A}$ اور $\vec{C}$ کے درمیان کا زاویہ

$$\text{Cos}\,\theta_2=\frac{\vec{A}.\vec{C}}{AC}=\frac{A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z}{\sqrt{{A_x}^2+{A_y}^2+{A_z}^2}\sqrt{{C_x}^2+{C_y}^2+{C_z}^2}}$$

$$\text{Cos}\,\theta_2=\frac{3-42-10}{\sqrt{9+36+4}.\sqrt{25+1+49}}=\frac{-49}{\sqrt{49}\sqrt{75}}=\frac{7\times9}{7\times5\sqrt{3}}$$

$$\text{Cos}\,\theta_2=-0.8083\Rightarrow\theta_2=36^0 4^1$$

$$\theta_1+\theta_2+\theta_3=180$$

$$\theta_1=180-(\theta_2+\theta_3)$$

$$=180-36^0 4^1-90$$

$$\theta_1=53^0 56^1$$

حل شدہ مثال 3

ثابت کیجیے کہ سمتیے $A=3\hat{\imath}-2\hat{\jmath}+\hat{k}$، $B=\hat{\imath}-3\hat{\jmath}+5\hat{k}$ اور $C=2\hat{\imath}+\hat{\jmath}-4\hat{k}$ ایک قائم الزاویہ مثلث بناتے ہیں۔

حل: سمتیے $\vec{A}$، $\vec{B}$ اور $\vec{C}$ اگر ایک مثلث بنائیں تب ان میں سے دو کا مجموعہ تیسرے کے مساوی ہوگا۔

$$\vec{B}+\vec{C}=(\hat{\imath}-3\hat{\jmath}+5\hat{k})+(2\hat{\imath}+\hat{\jmath}-4\hat{k})$$

$$=3\hat{\imath}-2\hat{\jmath}+\hat{k}=\vec{A}$$

$$\therefore\ \vec{B}+\vec{C}=\vec{A}$$

دیے گئے تین سمتیے $\vec{A}$, $\vec{B}$ اور $\vec{C}$ ایک مثلث بناتے ہیں۔

مزید
$$\vec{A}.\vec{B} = (3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}).(\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}) = 3 + 6 + 5 = 14$$
$$\vec{A}.\vec{C} = (3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}).(2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 4\hat{k}) = 6 - 2 - 4 = 0$$
$$\vec{B}.\vec{C} = (\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}).(2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 4\hat{k}) = 2 - 3 - 20 = 21$$

چوں کہ $\vec{A}.\vec{C} = 0$ تب سمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{C}$ باہم عموداً ہیں۔اس طرح $\vec{A}$, $\vec{B}$ اور $\vec{C}$ سے بننے والا مثلث قائم الزاویہ مثلث ہے۔

حل شدہ مثال4

اگر $\vec{A} = 3i - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$ اور $B = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ تب دو سمتیوں کا میزانی ضرب حاصل کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے کہ

$$\vec{A} = 3i - \hat{\jmath} + 2\hat{k}\ , B = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$$
$$\vec{A}.\vec{B} = (3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}).(\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k})$$
$$\vec{A}.\vec{B} = 3 + 2 + 4 = 9$$

حل شدہ مثال5

سمتیے $(2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k})$ اور $(6\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k})$ کے درمیان بننے والا زاویہ معلوم کیجیے۔

حل: $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}, \vec{B} = 6\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ دیا گیا ہے کہ

فرض کرو کہ $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کے درمیان کا زاویہ θ ہے۔تب

$$\vec{A}.\vec{B} = AB \operatorname{Cos}\theta$$
$$\operatorname{Cos}\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|A||B|} = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}\sqrt{{B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2}}$$
$$\operatorname{Cos}\theta = \frac{12 - 6 + 6}{\sqrt{17}\sqrt{49}} = \frac{12}{7\sqrt{17}}$$
$$\operatorname{Cos}\theta = \frac{12}{7\times 4.123} = 0.4158$$
$$\theta = \operatorname{Cos}^{-1}(0.4158) = 65^0 45^1$$

حل شدہ مثال6

سمتیے $\vec{A} = (\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k})$ اور $\vec{B} = (3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k})$ کے عموداً اکائی سمتیہ معلوم کیجیے۔ ساتھ ہی ساتھ زاویہ بھی معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیجیے سمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کے عموداً پائے جانے والا سمتیہ $\vec{C}$ ہے جو $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کے سمتی حاصل ضرب سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$
$$\vec{C} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = i(2 - 6) - j(1 - 9) + k(2 - 6)$$

$$\vec{C} = -4\hat{\imath} + 8\hat{\jmath} - 4\hat{k}$$
$$|\vec{C}| = \sqrt{4^2 + 8^2 + 4^2} = \sqrt{96}$$
اکائی سمتیہ $\hat{C} = \frac{\vec{C}}{|C|} = \frac{-4\hat{\imath}+8\hat{\jmath}-4\hat{k}}{\sqrt{96}}$

اس طرح $|\vec{A}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$ اور $|\vec{B}| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$

فرض کیجیے کہ θ، $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کے درمیان بننے والا زاویہ ہے۔ تب

$$|\vec{C}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$$
$$\sin\theta = \frac{|\vec{C}|}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{\sqrt{96}}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{96}}{14} = 0.6999$$
$$\theta = \sin^{-1}(0.6999)$$

حل شدہ مثال 7

سمتیے $\vec{C}$ کے اجزا معلوم کیجیے جو سمتیے $\vec{A} = (2\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 4\hat{k})$ اور $\vec{B} = (3\hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k})$ کے عمود آپر ہے۔

حل: $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = (2\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 4\hat{k}) \times (3\hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k})$

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(1-4) - \hat{\jmath}(-2+12) + \hat{k}(-2+3)$$
$$\vec{C} = -3\hat{\imath} - 10\hat{\jmath} + \hat{k}$$

حل شدہ مثال 8

دو سمتیے $A = 3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$ اور $B = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ کا سمتی حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

حل: فرض کرو کہ $\vec{C}$ حاصل سمتیہ ہے۔ تب

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = (3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}) \times (\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k})$$
$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(-2+4) - \hat{\jmath}(6-2) + \hat{k}(-6+1)$$
$$\vec{C} = 2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - 5\hat{k}$$

حل شدہ مثال 9

اگر $\emptyset = x^4 + y^4 + z^4$ تب $\vec{\nabla}\emptyset$ معلوم کیجیے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $\vec{\nabla}\emptyset = \left(\frac{\partial\emptyset}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}\hat{k}\right)$

$$\vec{\nabla}\emptyset = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)(x^4 + y^4 + z^4)$$
$$= \frac{\partial x^4}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial y^4}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial z^4}{\partial z}\hat{k}$$

$$\therefore \vec{\nabla}\emptyset = 4x^3\hat{\imath} + 4y^3\hat{\jmath} + 4z^3\hat{k} = 4\left(x^3\hat{\imath} + y^3\hat{\jmath} + z^3\hat{k}\right)$$

حل شدہ مثال10

اگر $\emptyset = x^{3/2} + y^{3/2} + z^{3/2}$ تب $\vec{\nabla}\emptyset$ معلوم کیجیے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $\vec{\nabla}\emptyset = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\emptyset$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\left(x^{3/2} + y^{3/2} + z^{3/2}\right)$$

$$= \frac{\partial x^{3/2}}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial y^{3/2}}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial z^{3/2}}{\partial z}\hat{k}$$

$$= \frac{3}{2}x^{1/2}\hat{\imath} + \frac{3}{2}y^{1/2}\hat{\jmath} + \frac{3}{2}z^{1/2}\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}\emptyset = \frac{3}{2}\left(x^{1/2}\hat{\imath} + y^{1/2}\hat{\jmath} + z^{1/2}\hat{k}\right)$$

حل شدہ مثال11

اگر $\emptyset(x,y,z) = 3x^2y - y^3x^2$، (x,y,z) کا ایک میزانی تفاعل ہو تب $(1,2,2)$ پر $grad\emptyset$ کی قدر معلوم کیجیے۔

حل: $\emptyset = 3x^2y - y^3x^2$ $\quad grad\emptyset = \vec{\nabla}\emptyset = \frac{\partial\emptyset}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}\hat{k}$

$$\frac{\partial\emptyset}{\partial x} = 6xy - 2xy^3;\ \frac{\partial\emptyset}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2x^2; \frac{\partial\emptyset}{\partial z} = 0$$

$$\therefore grad\emptyset = (6xy - 2xy^3)\hat{\imath} + (3x^2 - 3y^2x^2)\hat{\jmath}$$

$$grad\emptyset at(1,2,2) = (6.1.2 - 2.1 \times 2^3)\hat{\imath} + (3.1^2 - 3.2^3.1^2)\hat{\jmath}$$

$$grad\emptyset at(1,2,2) = (12 - 16)\hat{\imath} + (3 - 12)\hat{\jmath}$$

$$grad\emptyset at(1,2,2) = -4\hat{\imath} - 9\hat{\jmath}$$

حل شدہ مثال12

اگر $\emptyset(x,y,z) = 3x^2y - yz^2$ تب (1, 2, -1) پر $grad\emptyset$ معلوم کیجیے۔

حل: $\vec{\nabla}\emptyset = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)(3x^2y - yz^2)$

$$\frac{\partial\emptyset}{\partial x} = 6xy \quad \frac{\partial\emptyset}{\partial y} = 3x^2 - z^2 \quad \frac{\partial\emptyset}{\partial z} = -2yz$$

$$\therefore \vec{\nabla}\emptyset = 6xy\hat{\imath} + (3x^2 - z^2)\hat{\jmath} - 2yz\hat{k}$$

$$\therefore \vec{\nabla}\emptyset at(1,2,-1) = (6.1.2)\hat{\imath} + (3.1^2 - (-1)^2)\hat{\jmath} - 2(2)(-1)\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}\emptyset = 12\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 4\hat{k}$$

حل شدہ مثال13

$\emptyset(x,\ y,\ z) = 3x^3y - y^2z^2$ تب $(1,-1,1)$ پر $\vec{\nabla}\emptyset$ معلوم کیجیے۔

حل: $\vec{\nabla}\emptyset = \frac{\partial\emptyset}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}\hat{k}$

$$\frac{\partial\emptyset}{\partial x} = 9x^2y;\ \frac{\partial\emptyset}{\partial y} = 3x^3 - 2yz^2;\ \frac{\partial\emptyset}{\partial z} = -2y^2z$$

$$\vec{\nabla}\emptyset = 9x^2y\hat{\imath} + (3x^3 - 2yz^2)\hat{\jmath} - 2y^2z\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}\emptyset = (9 \times 1^3 \times 1)\hat{\imath} + (3 \times 1^3 - 2 \times -1 \times 1^2)\hat{\jmath} - (2 \times -1^2 \times 1)\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}\emptyset = -9\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 2\hat{k}$$

حل شدہ مثال 14

میزانی تفاعل $\emptyset(x, y) = x^2 - y^2$ کا گریڈینٹ معلوم کیجیے۔

حل: $grad\emptyset = \vec{\nabla}\emptyset = \frac{\partial\emptyset}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}\hat{\jmath}$

دیا گیا ہے کہ $\emptyset(x, y) = x^2 - y^2$

$$\frac{\partial\emptyset}{\partial x} = 2x;\ \frac{\partial\emptyset}{\partial y} = -2y$$

$$\vec{\nabla}\emptyset = 2x\hat{\imath} - 2y\hat{\jmath} = 2(x\hat{\imath} - y\hat{\jmath})$$

حل شدہ مثال 15

اگر $\vec{A} = \lambda\vec{B}$ تب ثابت کرو کہ $\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z}$

حل: دیا گیا ہے کہ $\vec{A} = \lambda\vec{B}$

$$\left(A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\right) = \lambda\left(B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}\right)$$

$$(A_x\hat{\imath} - \lambda B_x)\hat{\imath} + \left(A_y - \lambda B_y\right)\hat{\jmath} + (A_z - \lambda B_z)\hat{k} = 0$$

چوں کہ $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ اور $\hat{k}$ اکائی سمتیے ہیں تب مندرجہ بالا مساوات اسی وقت درست ہو گی اگر

پر $A_x - \lambda B_x = 0\ , A_y - \lambda B_y = 0\ , A_z - \lambda B_z = 0$

تب $A_x = \lambda B_x$ یا $\lambda = \frac{A_x}{B_x}$

$A_y = \lambda B_y$ یا $\lambda = \frac{A_y}{B_y}$

$A_z = \lambda B_z$ یا $\lambda = \frac{A_z}{B_z}$

اس طرح $\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z} = \lambda$

یا $\frac{\mathrm{A_x}}{\mathrm{B_x}} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z}$

1.12 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- میزانی مقداریں(Scalar Quantities): وہ طبعی مقداریں جو صرف مقدار رکھتی ہیں اور کوئی سمت نہیں رکھتیں۔ میزانی مقدار یا میزانیے کہلاتی ہیں۔ مثلاً: کمیت، حجم، کثافت، تپش، چال، کام وغیرہ
- سمتی مقداریں(Vector Quantities): وہ طبعی مقداریں جو مقدار اور سمت دونوں رکھتی ہیں سمتی مقداریں یا صرف سمتیے کہلاتی ہیں۔ مثلاً : رفتار، اسراع، قوت، معیار حرکت، برقی میدان وغیرہ
- سمتیے $\vec{A}$ کی سمت میں پائے جانے والا اکائی سمتیہ $\hat{A}$ باہم عمودی اکائی سمتیوں $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ کی شکل میں اس طرح ہوگا۔

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{A_x\hat{\imath}+A_y\hat{\jmath}+A_z\hat{k}}{\sqrt{{A_x}^2+{A_y}^2+{A_z}^2}}$$

- سمتیے $\vec{A}$ اور X- محور، Y- محور، Z– محور کے درمیان بننے والے زاویئے کے کوسائین کو ترتیب وار x– سمتی کوسائین، y- سمتی اور z– سمتی کوسائین کہتے ہیں۔ جن کو ترتیب وار l، m اور n سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ سمتیہ $\vec{A}$، X، Y اور Z محور سے ترتیب وار زاویہ α، β اور γ بناتا ہے۔

تب $l = \text{Cos}\,\alpha = \frac{A_x}{A}$ اور $m = \text{Cos}\,\beta = \frac{A_y}{A}$ اور $n = \text{Cos}\,\gamma = \frac{A_z}{A}$

- دو سمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کے درمیان سمتی ضرب کو $\vec{A} \times \vec{B}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ جن کی سمت زاویے θ کی سمت میں مائیل ہوتی ہے۔ یہ ایک سمتیہ ہے جس کی قدر $AB\sin\theta$ اور سمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ سے گھری مستوی ہر عموداً ہوتی ہے۔ یہ سمت مثبت ہوگی اگر $\vec{A}$ سے $\vec{B}$ کی جانب گردش مخالف سمت ساعت ہو جب کہ یہ سمت منفی ہوگی اگر $\vec{A}$ سے $\vec{B}$ کی جانب گردش سمت ساعت ہو۔

اس طرح $\vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\theta\,\hat{n} = \vec{C}$

جہاں یہ $\hat{n}$ ایک اکائی سمتیہ ہے جو $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کے عموداً ہے۔ اس اکائی سمتیے کو اکائی عمود کہتے ہیں۔

- اس طرح ہم خلاء میں ایک ایسا سمتیہ ظاہر کر سکتے ہیں جس کے اجزا x, y اور z سمتوں میں میزانی تفاعل $\emptyset$ کے جزوی تفرق ہوں گے۔ اسی سمتیے کو $\emptyset$ کا گریڈینٹ کہتے ہیں اور اس کو $grad\emptyset$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\therefore\ grad\emptyset = \frac{\partial\emptyset}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}\hat{k}$$

1.13 کلیدی الفاظ (Keywords)

- **مساوی سمتیے(Equal vectors)**: دو سمتیے اس وقت مساوی سمتیے کہلاتی ہیں جب کہ ان کی مقدار اور سمت یکساں ہو
- **منفی سمتیہ(Negative Vector)**: ایسا سمتیہ جس کی مقدار یکساں نہیں لیکن سمت مخالف ہو
- **اکائی سمتیہ(Unit Vector)**: ایسا سمتیہ جس کی مقدار اکائی ہو

- **صفری سمتیہ(Null vector)**: اگر کسی سمتیے کی مقدار صفر ہو
- **ہم آہنگی سمتیے(Co-initial vectors)**: ایسے سمتیے جن کا ابتدائی نقطہ مشترک ہو یا جو ایک ہی نقطے سے نکلتے ہوں
- **ہم خط یا متوازی سمتیے(Collinear vectors)** : ایسے سمتیے جو ایک ہی خط یا متوازی خطوط پر عمل کرتے ہیں
- **ہم مستوی سمتیے یا ہم سطحی سمتیے(Coplanar Vectors)**: ایسے سمتیے جو ایک ہی مستوی تک محدود ہو

1.14 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

1.14.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. سمتی مقداریں کے دو مثالیں دیجیے۔
2. مقامی سمتیہ سے کیا مراد ہے؟
3. سمتی ضرب $\vec{A} \times \vec{B} =$ ----------

(a) $AB \sin\theta\, \hat{n}$ (b) $AB \cos\theta\, \hat{n}$

(c) $AB \tan\theta\, \hat{n}$ (d) ان میں سے کوئی بھی نہیں

4. سمتیہ $\vec{A} = i + j$ کی $grad\vec{A}$ کی قیمت کیا ہے؟

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 10

5. میزانی میدان سے کیا مراد ہے؟
6. سمتی میدان سے کیا مراد ہے؟
7. $\vec{A} = 3i + 4j$ سمتیہ کی قدر $|\vec{A}|$ معلوم کیجیے۔

(a) 3units (b) 4units (c) 2units (d) 5units

8. سمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کے میزانی ضرب کی تعریف۔ میزانی ضرب $\vec{A}.\vec{B} =$ ----------ہوتی ہے۔
9. اکائی سمتیہ سے کیا مراد ہے؟
10. کن حالات میں سمتیہ کا جز سمتیہ کی قیمت کے مساوی ہوتا ہے؟
11. اکائی سمتیہ کی اکائیاں کیا ہوگی۔

1.14.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. دو سمتیوں کے میزانی (نقطی) ضرب کو بیان کیجیے اور اس کے خصوصیات بتلائیے۔
2. سمتی میدان کی تعریف کیجیے۔ اس کے کوئی دو خصوصیات بتلائیے۔

3. دو سمتیوں کے سمتی حاصل ضرب کو بیان کیجیے۔

4. سمتی اور میزانی میدان کیا ہیں۔ مثالوں سے سمجھائیے۔

1.14.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. سمتی اور میزانی میدان کیا ہیں مثالوں سے سمجھائیے۔ دو سمتیوں کے میزانی ضرب کو بیان کیجیے اور اس کے خصوصیات بتلائیے۔

2. سمتی میدان کی تعریف کیجیے۔ اس کے خصوصیات بتلائیے۔

1.14.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. دو سمتیے $\vec{A} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}$ اور $B = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\hat{k}$ کا میزانی حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

2. ثابت کرو کہ تین سمتیے $\vec{A} = 3\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}, B = \hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k}$ اور $C = \hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 4\hat{k}$ ایک دوسرے پر عمود ا ہیں۔

3. سمتیے $A = 2i + 3j + k$ اور $B = i - j + k$ کے عمود وار اکائی سمتیہ معلوم کرو۔

4. اگر $F = 2i + 3j - k$ اور $r = i - j + 6k$ تب $r \times F$ معلوم کرو۔

5. $A = 2i + j - k$ اور $B = i - k$ کے درمیان زاویہ معلوم کرو۔

6. اگر $P = 2i + 3j - 4k$ اور $Q = 5i + 2j + 4k$ ہو تو دو سمتیوں کا درمیانی زاویہ معلوم کرو۔

7. اگر $F = i + 2j - k$ اور $V = 4i - j + 7k$ ہو تب F. V معلوم کرو۔

8. $A = 10i - 6j$ اور $B = -4i + 3j$ ہو تب $A \times B$ اور $B \times A$ کو معلوم کیجیے۔

9. $A = (4j - 7k)cm$ اور $B = (5i + 3j)$ کے درمیان زاویہ Sine کو معلوم کیجیے۔

1.15 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Engineering Physics by R.K.Gaur &S.L.Gupta,Dhanpat Rai Publications.
2. Physics Part- I by Resnik.R &Halliday.D, Wiley Eastern Pvt. Ltd. New Delhi.
3. Unified Physics Vol-I, Mechanics by, Dr.S.L.Gupta&Sanjeev Gupta Jai Prakash Nath &Co. Meerut
4. Vector Algebra by Dr. Rishi Kumar Johan& Dr. Anshuman Singh
5. Vector Algebra and Analysis with Application by Prasun Kumar nayak
6. Vector Algebra by Shanti Narayan& P.K. Mittal, s Chand
7. Vector Analysis tensor analysis and linear vector space by S.P. Kuil

اکائی 2۔ سمتیوں کا تکمیلہ

(Vectors Integration)

اکائی کے اجزا

2.0 تمہید (Introduction)

سمتیوں کا تجزیہ ایک طاقتور حسابی ٹکنیک ہے۔ جو طبعی مساوات کی ترتیب میں ایک موثر آلہ کار ہے اور ساتھ ہی ساتھ اس کی مدد سے مساوات کا طبعی مفہوم منفرد اور واضح انداز میں سمجھنے میں اور مدد ملتی ہے۔

عام طور پر تمام طبعی مقداروں کو دو درجوں میں تقسیم کیا جاتا ہے (i) میزانی مقداریں (ii) سمتی مقداریں

میزانی مقداریں (Scalar Quantities) وہ طبعی مقداریں ہیں جو صرف مقدار رکھتی ہیں اور کوئی سمت نہیں رکھتی ہیں۔ میزانی مقدار یا میزانیے کہلاتی ہیں۔ مثلاً: کمیت، حجم، کثافت، تپش، چال، کام وغیرہ۔ سمتی مقداریں (Vector Quantities) وہ طبعی مقداریں جو مقدار اور سمت دونوں رکھتی ہیں سمتی مقداریں یا صرف سمیتے کہلاتی ہیں۔ مثلاً: رفتار، اسراع، قوت، معیار حرکت، برقی میدان

2.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں ہم:

- ایک سمتی تفاعل کا خطی تکمل کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔
- ایک سمتی تفاعل کا سطح تکمل کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔
- ایک سمتی میدان کا ڈائیورجینس کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔
- گاؤس غیر مرکوزیت مسئلہ کو سمجھنے کی شروعات کریں گے۔
- ایک سمتیہ میدان کا کرل, طبعی افادیت کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔
- اسٹوکس مسئلہ کو سمجھنے کی شروعات کریں گے۔

2.2 ایک سمتی تفاعل کا خطی تکمیل (Line Integral of a Vector Function)

شکل (2.1) کے مطابق فرض کیجیے کہ $\vec{F}(x, y, z)$ ایک سمتی تفاعل ہے اور AB ایک منحنی ہے۔

منحنی AB پر سمتی تفاعل $\vec{F}$ کا خطی تکمل دراصل نقطے P پہ منحنی کے مماس کی جانب $\vec{F}$ کے جز کا تکمیل ہوتا ہے۔

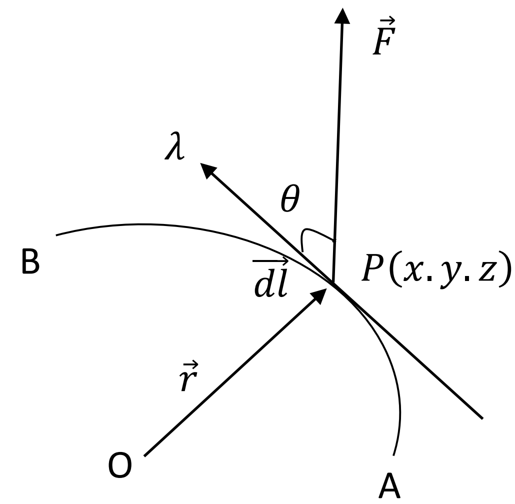
منحنی AB کو چھوٹے چھوٹے خطوط میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ فرض کیجیے کہ $\overrightarrow{dl}$ نقطے P پہ منحنی کے ایک چھوٹے کے خط کا طول ہے

$\vec{F}, \theta$ اور نقطے P پر بننے والے مماس کے درمیان بننے والا زاویہ ہے۔

نقطے P پر مماس کی جانب $\vec{F}$ کا جز $= \vec{F}\ \mathrm{Cos}\,\theta$

نقطے P پر $\vec{F}\ \mathrm{Cos}\,\theta$ اور dl کا حاصل ضرب $= \vec{F}\ \mathrm{Cos}\,\theta\, .\, dl$

$$\vec{F} dl . \mathrm{Cos}\,\theta = \vec{F} . \overrightarrow{dl}$$



شکل(2.1)

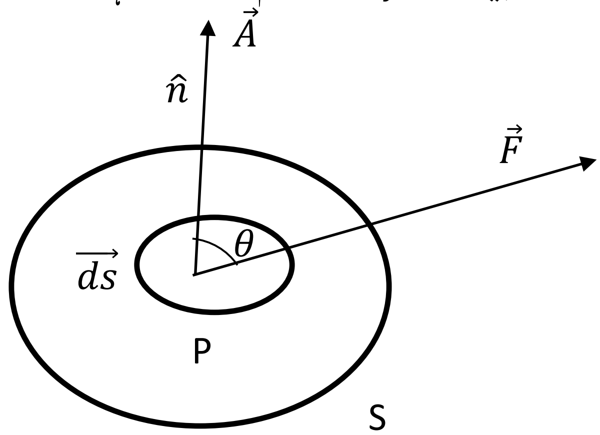
اس طرح کے حاصل ضرب کے مجموعے کی حد (Limit) یہاں تک کہ جملہ خط والے عناصر لا تناہی پر مائل ہوں اور ہر خط کا طول صفر پر مائیل ہو، $\vec{F}$ کا خطی تکمیل A سے B تک کہلاتا ہے اور اس کو اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\int_A^B \vec{F}\,.\overrightarrow{dl} \ or\ \int_C \vec{F}.dl = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} \vec{F_\iota}.\overrightarrow{dl_\iota} \qquad (2.1)$$

اگر $\vec{F}$ منحنی AB پر عمل کرنے والی متغیر قوت ہو تب خطی تکمیل $\int_A^B \vec{F}\,.\overrightarrow{dl}$ انجام کردہ کام کو ظاہر کرتا ہے تب $\vec{F}$ ذرے کو A سے B کی جانب حرکت دے گی۔ اگر C ایک بند منحنی ہو (یعنی ایسی منحنی جو خود سے کہیں بھی منطبق نہ ہو) تب اس منحنی کے اطراف خطی تکمیل کے اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے $\int_A^B \vec{F}\,.\overrightarrow{dl}$

2.3 ایک سمتی تفاعل کا سطحی تکملیہ (Surface Integral of a Vector Function)

فرض کیجیے کہ $\vec{F}\,(x, y, z)$ مقام کا سمتی تفاعل ہے اور S دی گئی سطح کا رقبہ ہے جیسا کہ شکل (2.2) میں دکھایا گیا ہے۔



شکل(2.2)

سطح S پر سمتی تفاعل $\vec{F}$ کا سطح تکمیل دراصل سطح کے عمود میں $\vec{F}$ کے جز کا تکمیل ہوتا ہے۔ فرض کیجیے کہ سطح کئی چھوٹے اجزا میں تقسیم ہے۔ فرض کیجیے کہ ds نقطے P پر چھوٹے سے سطح جز کا رقبہ ہے θ, $\vec{F}$ اور ds پر عمود PN کے درمیان بننے والا زاویہ ہے۔ $PN, \hat{n}$ کی سمت میں پائے جانے والا اکائی سمتیہ ہے۔

ds پر عمود PN کی جانب $\vec{F}$ کا جز $= F \operatorname{Cos} \theta$

نقطے P پر $F \operatorname{Cos} \theta$ اور ds کا حاصل ضرب $= F \operatorname{Cos} \theta \, ds = F ds \operatorname{Cos} \theta$

$$= \vec{F}.\hat{n}ds = \vec{F}.\overrightarrow{ds}$$

$\therefore$ اس طرح کے حاصل ضرب کے مجموعے کی انتہائی حد (Limit) یہاں تک کہ جملہ سطح اجزا لا متناہی پر اور ہر سطحی جز کا رقبہ صر پر مائیل ہو۔ $\vec{F}$ کا مکمل سطح S پر سطحی تکمیل کہلاتا ہے۔ اس کو اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\iint_S \vec{F}.\overrightarrow{ds} \; or \; \iint_S \vec{F}.\vec{n}ds$$

اس طرح $\iint_S \vec{\mathrm{F}}.\overrightarrow{\mathrm{ds}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \overrightarrow{\mathrm{F_i}}.\overrightarrow{\mathrm{ds_i}}$

سطحی تکمیل کو رقبہ S پر سمتیے $\vec{F}$ کا نفوذ (Flux) کہتے ہیں۔

کسی بند سطح کے سطحی تکملیہ کو علامت $\oiint$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

حجمی تکمیل (Volume Integral): کسی سطح سے گھیرے ہویا حجم V پر تفاعل $F(x, y, z)$ کا تین تکملیے کو حجمی تکمیل کہلاتا ہے۔ اس کو اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\iiint_V F(x, y, z)dv \qquad (2.2)$$

حجمی تکمیل عام طور پر میزانی مقداروں کے تکمیل کے طور پر واقع ہوتا ہے۔

2.4 ایک سمتی میدان کا ڈائیور جینس (Divergence of a Vector Field)

فرض کیجیے کہ $\vec{A}$ ایک سمتی میدان ہے جس کی مقدار اور سمت کسی نقطے پر مقامی محددات کا تفاعل ہے۔ تب اس سمتیے $\vec{A}$ اور تفرقی آپریٹر (Differential Operator) $\vec{\nabla}$ کا میزانی حاصل ضرب مقام کے محددات x, y, z کا میزانی تفاعل ہوگا۔ اسی کو سمتیے $\vec{A}$ کا ڈائیور جینس کہتے ہیں۔ $Div\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A}$

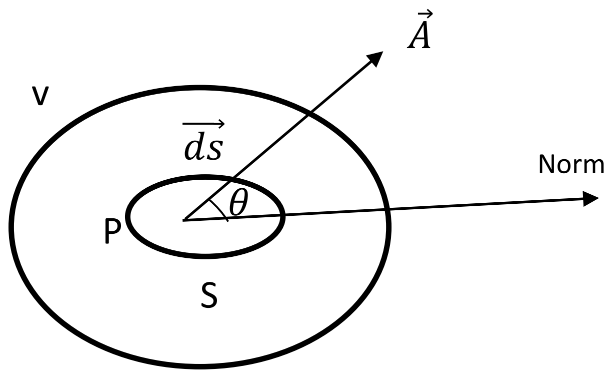
جہاں $\vec{\nabla} = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$ اور $\vec{A} = \hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y + \hat{k}A_z$

$$\therefore \; \vec{\nabla}.\vec{A} = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).\left(\hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y + \hat{k}A_z\right)$$

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial y} \qquad (2.3)$$

$\vec{\nabla}.\vec{A}$ کی طبعی افادیت: کسی سمتیے کا ڈائیور جینس اکائی حجم والے سطح رقبے سے جب کہ حجم صفر کی جانب مائیل ہو کسی طبعی مقدار

جیسے مائع یا برقی نفوذ کی جملہ بیرونی بہاؤ کی انتہائی قدر بناتا ہے۔



شکل(2.3)

فرض کیجیے کہ ایک سمتی میدان میں ایک بند حجم V ہے اور جو سطح رقبہ S رکھتا ہے۔ جیسا کہ شکل(2.3) میں دکھایا گیا ہے۔

فرض کیجیے کہ $\vec{A}$ سطحی پر نقطے P پر سمتی میدان ہے ۔ $\overrightarrow{ds}$ چھوٹے سے رقبے کو ظاہر کرتا ہے جو نقطے P کو گھیرا ہوا ہے۔

اگر θ سمتیے $\vec{A}$ اور سطح پر نقطے P پر بیرونی جانب گرائے گئے عمود کے درمیان بننے والا زاویہ ہو تب

$\vec{A}.\overrightarrow{ds} = \vec{A}\ \overrightarrow{ds}\ \mathrm{Cos}\ \theta$ رقبہ $\overrightarrow{ds}$ کے بیرونی میدان کا نفوذ(Flux)

$\iint_S \vec{A}.\overrightarrow{ds} =$ مکمل سطح کے بیرونی میدان کا جملہ نفوذ(Flux)

اگر سطح سے گھرا ہوا حجم V بہت ہی چھوٹا ہو تب اکائی حجم کا بیرونی نفوذ $\vec{A}$ کے ڈائیور جینس سے حاصل ہوتا ہے۔

$$Div\vec{A} = \iint_S \vec{A}.\overrightarrow{ds}$$

مثالیں:

i. فرض کیجیے کہ سمتیہ $\vec{A}$ متحرک مائع کی رفتار $\vec{V}$ کو ظاہر کرے تب کسی نقطے پر $div\vec{V}$ بند سطح سے گھرے ہوئے اکائی حجم سے اکائی وقت میں بہنے والے مائع کے حجم کو ظاہر کرتا ہے۔

اگر کسی نقطے $div\vec{V}$ کی قدر منفی ہو تب اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ مائع کا بہاؤ اس نقطے کی جانب ہے یعنی یہ نقطہ منسلک (sink) ہے۔ اگر کسی نقطے پر $div\vec{V}$ کی قدر مثبت ہو تب اسی سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ مائع کا بہاؤ اس نقطے کے مخالف جانب ہے۔ یعنی یہ مائع کا مبدا ہے۔

ii. ایک برقی میدان کے لیے اس میدان میں سطحی سے گھرے ہوئے اکائی حجم والے عنصر پر کسی نقطے پر میدانی سمتیہ $\vec{E}$ کا ڈائیور جینس اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$Div\vec{E} = \iint_S \vec{E}.\overrightarrow{ds}$$

جہاں پر S بند سطح ہے جو نقطے کو گھیرے ہوئی ہے اور V سطح سے گھرے ہوئے عنصر کا حجم ہے کسی بھی نقطے پر برقی میدان کے ڈائیور جینس سے اس نقطے پر برقی بار کی کثافت(Charge density)حاصل ہوتی ہے جو ایک میزانی تفاعل ہے۔

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = {}^{\rho}/_{\varepsilon_0}$$

$\vec{\nabla}.\vec{A}$ کی طبعی افادیت کے لحاظ سے ہم جانتے ہیں کہ

$$Div\vec{A} = \oiint_s \vec{A}.\overrightarrow{ds}$$

اس طرح دیے گئے نقطے پر ایک سمتی میدان کا ڈائیور جینس اس نقطے کے اطراف بنائی گئی سطح سے گھیرے ہوئے اکائی حجم سے گزرنے والے نفوذ کے مساوی ہوتا ہے اس طرح کے سطح سے گھیرا ہوا حجم صفر کی جانب مائل ہو اس طرح $div\vec{A}$ حجمی نفوذ کثافت (Volume Flux Density) ہے جو ایک میزانی مقدار ہے۔

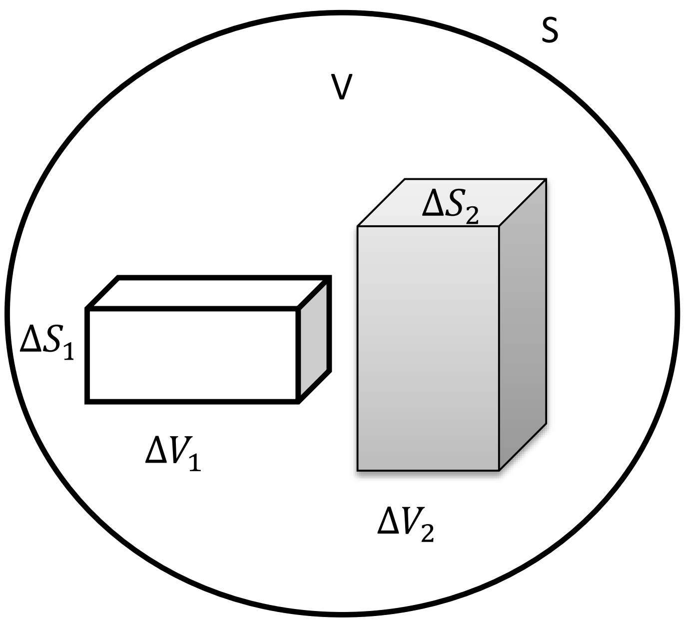
2.5 گاؤس غیر مرکوزیت مسئلہ (Gauss Divergence Theorem)

گاؤس کے مطابق، ایک سمتی میدان $\vec{A}$ میں بند سطح $\vec{S}$ سے گھیرا ہوا حجم V ہو تب مکمل سطح $\vec{S}$ پر $\vec{A}$ کے عمودی جز کا سطحی تکمیل مساوی ہوتا ہے۔ سطح $\vec{S}$ سے گھیرے ہوئے حجم V ہر $Div.\vec{A}$ کے حجمی تکمیل کے

$$\iint_S \vec{A}.\overrightarrow{ds} = \iiint_V (div.\vec{A})dv$$

$$or \iint_S \vec{A}.\overrightarrow{ds} = \iiint_V (\vec{\nabla}.\vec{A})dv$$

ثبوت:



شکل(2.4)

فرض کیجیے کہ ایک سمتی میدان $\vec{A}$ میں حجم V ایک بندی سطح S سے گھیرا ہوا ہے۔ فرض کیجیے کہ حجم چھوٹے اجزا $\Delta V_1, \Delta V_2, \Delta V_3 \ldots\ldots\ldots \Delta V_i$ میں تقسیم ہے جو ترتیب وار سطحی اجزا $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3 \ldots\ldots\ldots \Delta S_i$ سے گھرا ہوا ہے۔ بند سطح سے سمتی تفاعل کا بیرونی نفوذ مثبت اور اندرونی نفوذ منفی لینے پر سطح سے جملہ بیرونی نفوذ یعنی جملہ سطح $\vec{S}$ پر $\vec{A}$ کا سطحی تکمیل مساوی ہوتا

سطحی اجزا $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3 \ldots \ldots \ldots \Delta S_i$ پر بیرونی نفوذ کے مجموعہ کے ہے۔

$$\iint_S \vec{A}.\overrightarrow{ds} = \sum \iint_{\Delta s_1} \vec{A}.\overrightarrow{ds} \qquad (2.4)$$

چھوٹے سے حجمی جز ΔV_i پر جو سطحی جز ΔS_i سے گھیرا ہوا ہے۔ $Div\vec{A}$ کی قدر اس طرح ہو گی۔

$$Div = \lim_{\Delta V_i \to 0} \frac{1}{\Delta V_i} \iint_{\Delta S_i} \vec{A}.\overrightarrow{ds}$$

$$or\ \iint_{\Delta s_i} \vec{A}.\overrightarrow{ds} = (div\vec{A})\Delta V_i$$

$$\therefore \sum \iint_{\Delta S_i} \vec{A}.\overrightarrow{ds} = \sum (div\vec{A})\Delta V_i \qquad (2.5)$$

جہاں پر $\Delta V_i = dv$

$$\sum (div\vec{A})\Delta V_i = \iiint_V (div\vec{A})dv$$

$$\therefore \sum \iint_{\Delta S_i} \vec{A}.\overrightarrow{ds} = \iiint_V (div\vec{A})dv \qquad (2.6)$$

مساوات (2.4) اور (2.5) کا تقاعل کرنے پر

$$\iint_S \vec{A}.\overrightarrow{ds} = \iiint_V (div\vec{A})dv = \iiint_V (\nabla.\vec{A})dv$$

مندرجہ بالا مساوات سطح تکمیل کو حجمی تکمیل اور حجمی تکمیل کو سطحی تکمیل میں تبدیل کرنے کے لیے اہمیت کی حامل ہے۔

2.6 ایک سمتیہ میدان کا کرل (Curl of a Vector Field)

فرض کیجیے کہ $\vec{A}$ ایک سمتی میدان ہے جس کی مقدار اور سمت دیے گئے نقطے پر مقامی محددات کا تفاعل ہے۔ تب نفرقی آپریٹر $(\vec{\nabla})$ اور سمتیہ $\vec{A}$ کا سمتی حاصل ضرب مقامی محددات x, y اور z کا سمتی تفاعل ہے۔ اسی تفاعل کو سمتی میدان کا کرل کہتے ہیں۔

$$\therefore Curl\ \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

اگر $A = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$ اور $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)$

$$\therefore \vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \times \left(A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\right) \qquad (2.1)$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x}\hat{\imath} \times \hat{\jmath} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\hat{\imath} \times \hat{k} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\hat{\jmath} \times \hat{\imath} + \frac{\partial A_z}{\partial y}\hat{\jmath} \times \hat{k} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\hat{k} \times \hat{\imath} + \frac{\partial A_y}{\partial z}\hat{k} \times \hat{\jmath}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

مندرجہ بالا مساوات کو اس طرح لکھا جاتا ہے کہ

$$Curl\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

2.6.1 طبعی افادیت (Physical Significance)

فرض کیجیے کہ $\vec{A}$ ایک سمتی میدان ہے اور فرض کیجیے کہ $\overrightarrow{\Delta s}$ چھوٹا رقبہ ہے جو بند راستے سے گھرا ہوا ہے۔ یہ بند راستہ اس کی سرحد بتاتا ہے۔ فرض کیجیے کہ $\overrightarrow{dl}$ اس راستے میں ایک سمتی جز ہے جس کی سمت اس جز پر راستے کے مماس کی سمت ہوگی اگر A, θ اور $\overrightarrow{dl}$ کے درمیان بننے والا زاویہ ہو تب

$$\vec{A}.\overrightarrow{dl} = Adl \operatorname{Cos} \theta$$

جہاں پر $A \operatorname{Cos} \theta$ سمتیہ $\vec{A}$ کا dl کی جانب جز ہے۔ اس بند راستے کے لیے سمتی میدان $\vec{A}$ کا خطی تکمیل اس طرح ہوگا۔

$$\oint Adl \operatorname{Cos} \theta = \oint \vec{A}.\overrightarrow{dl}$$

جہاں پر علامت $\oint$ مکمل بند حلقے کہ مکمل کا ظاہر کرتی ہے۔ یہ ایک میزانی مقدار ہے یہ بند حلقہ ایک رقبہ $\overrightarrow{\Delta s}$ سے گھرا ہوا ہے۔ تب

$$\text{اکائی رقبے پر خطی تکمیل} = \frac{1}{\Delta s}\oint \vec{A}.\overrightarrow{dl}$$

فرض کیجیے کہ $\hat{n}$ رقبہ S کی عمود سمت میں ایک اکائی سمتیہ ہے۔ سمتی میدان $\vec{A}$ کا Curl (Curl A) اس طرح بیان کیا جاتا ہے کہ یہ ایک سمتیہ ہے جس کے $\hat{n}$ کی سمت میں پائے جانے والے جز کی مقدار سمتیے $\vec{A}$ کے اکائی رقبے پر خطی تکمیل سے حاصل ہوتی ہے جب کہ رقبہ صفر پر مائیکل ہو۔

$$\therefore Curl\ \vec{A}.\hat{n} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta s}\oint A.dl$$

اگر $\Delta S \to 0$ ds کو سے ظاہر کیا جائے تب

$$Curl\vec{A}.\hat{n}ds = \oint A.dl$$

$$\therefore Curl\ \vec{A}.\overrightarrow{ds} = \oint \vec{A}.dl$$

$$Curl\ \vec{A} = \frac{1}{\overrightarrow{ds}}\oint \vec{A}.dl$$

کسی سمتی میدان کا کرل ایک سمتی مقدار ہے جو آپریٹر ∇ اور $\vec{A}$ کا سمتی حاصل ضرب ہے۔

$$Curl\ A = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

2.7 اسٹوکس مسئلہ (Stokes Theorem)

اس تھیورم کے مطابق کسی بھی شکل کی سطح کے لیے مکمل سطح S پر سمتی میدان $\vec{A}$ کے Curl کا سطحی تکمیل مساوی ہوتا ہے۔ اس سطحی کی سرحد پر اس سمتی میدان کے خطی تکمیل کے یعنی

$$\iint_s Curl\ (A).\overrightarrow{ds} = \oint \vec{A}.\overrightarrow{dl}$$

جہاں پر علامت $\oint$ سطح S سے گھرے ہوئے بند راستے پر خطی تکمیل کو ظاہر کرتی ہے۔اسٹوکس مسئلہ کو اس طرح بھی بیان کیا جاسکتا ہے کہ کسی بھی بند منحنی C پر سمتی میدان $\vec{A}$ کا خطی تکمیل مساوی ہوتا ہے اس منحنی C سے گھری ہوئی ایک کھلی سطح S پر $Curl\ \vec{A}$ کے سطح تکمیل کے یعنی

$$\oint_C \vec{A}.\overrightarrow{dl} = \iint_s Curl\ \vec{A}.\overrightarrow{ds} = \iint_s (\vec{\nabla} \times \vec{A}).\overrightarrow{ds}$$

اس طرح اس تھیورم کی مدد سے کسی سمتی میدان کے خطی تکمیل کو سطحی تکمیل یا اس کے بر خلاف تبدیل کیا جا سکتا ہے۔

2.8 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال1

سمتیے $\vec{A} = xy\hat{\imath} + yz\hat{\jmath} + zx\hat{k}$ کا ڈائیورجینس معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے کہ $\vec{A} = xy\hat{\imath} + yz\hat{\jmath} + zx\hat{k}$

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\left(xy\hat{\imath} + yz\hat{\jmath} + zx\hat{k}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(zx)$$

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = y + z + x$$

حل شدہ مثال2

اگر $\vec{A} = x^3z\hat{\imath} + 2y^2z^2\hat{\jmath} - 4xyz^2\hat{k}$ تب نقطے $(2, -1, 1)$ پر $DivA$ معلوم کیجیے۔

حل: $DivA\vec{} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).\left(x^3z\hat{\imath} + 2y^2z^2\hat{\jmath} - 4xyz^2\hat{k}\right)$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^3z) + \frac{\partial}{\partial y}(2y^2z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(4xyz^2)$$

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = 3x^2z + 6yz^2 - 8xyz$$

$$Div\vec{A}at(2, -1, 1) = \left(3 \times 2^2 \times 1 + 6(-1)(1)^2 - 8(2)(-1)(1)\right)$$

$$= 12 - 6 + 16 = 22$$

حل شدہ مثال 3

اگر $\emptyset$ ایک میزانی میدان اور $\vec{A}$ ایک سمتی میدان ہو تب $\vec{\nabla}\ .\ \emptyset(\vec{A})$ کی قدر معلوم کیجیے۔

حل: $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$ جہاں $div\emptyset(\vec{A}) = div\emptyset(\vec{A})$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).\emptyset\left(A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial \emptyset}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial \emptyset}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial \emptyset}{\partial z}\hat{k}\right).\left(A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\right)$$
$$= \frac{\partial \emptyset}{\partial x}A_x + \frac{\partial \emptyset}{\partial y}A_y + \frac{\partial \emptyset}{\partial z}A_z$$
$$= \frac{\partial \emptyset}{\partial x}A_x + \emptyset\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial \emptyset}{\partial y}A_y + \emptyset\frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial \emptyset}{\partial z}A_z + \emptyset\frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$= \left(\frac{\partial \emptyset}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial \emptyset}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial \emptyset}{\partial z}\hat{k}\right).\left(A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\right) + \emptyset\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$$
$$= \vec{\nabla}\emptyset.\vec{A} + \emptyset\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right)$$
$$Div\emptyset\left(\vec{A}\right) = grad\emptyset.\vec{A} + \emptyset Div\vec{A}$$
$$\nabla.\emptyset\left(\vec{A}\right) = \vec{\nabla}\emptyset.\vec{A} + \emptyset\vec{\nabla}.\vec{A}$$

حل شدہ مثال4

ثابت کیجیے کہ $\vec{\nabla}.\left(\vec{A} + \vec{B}\right) = \vec{\nabla}.\vec{A} + \vec{\nabla}.\vec{B}$ جہاں $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ تفرقی سمتی تفاعلات ہیں۔

حل: فرض کیجیے کہ $A = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$ اور $B = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$

تب $(A + B) = (A_x + B_x)\hat{\imath} + \left(A_y + B_y\right)\hat{\jmath} + (A_z + B_z)\hat{k}$

$$\vec{\nabla}.\left(\vec{A} + \vec{B}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).\left(\vec{A} + \vec{B}\right)$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).\left[(A_x + B_x)\hat{\imath} + \left(A_y + B_y\right)\hat{\jmath} + (A_z + B_z)\hat{k}\right]$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(A_x + B_x) + \frac{\partial}{\partial y}\left(A_y + B_y\right) + \frac{\partial}{\partial z}(A_z + B_z)$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y + \frac{\partial}{\partial z}A_z\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x}B_x + \frac{\partial}{\partial y}B_y + \frac{\partial}{\partial z}B_z\right)$$
$$= \vec{\nabla}.\vec{A} + \vec{\nabla}.\vec{B}$$
$$\vec{\nabla}.(A + B) = \vec{\nabla}.\vec{A} + \vec{\nabla}.\vec{B}$$

حل شدہ مثال5

اگر $\emptyset = x^2 - y^2 + 2z$ تب $Divgrad\emptyset$ معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے کہ $\emptyset = x^2 - y^2 + 2z$ تب $\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\emptyset = ?$

$$\vec{\nabla}\emptyset = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(x^2 - y^2 + 2z) = \left(2x\hat{\imath} - 2y\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right)$$
$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\emptyset = \vec{\nabla}.\left(2x\hat{\imath} - 2y\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right)$$
$$= \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).\left(2x\hat{\imath} - 2y\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(2x) - \frac{\partial}{\partial y}(2y) + \frac{\partial}{\partial z}(z)$$
$$= 2 - 2 + 0 = 0$$

$$Div.grad\emptyset = 0$$

حل شدہ مثال 6

اگر سمتی تفاعل $\vec{A} = 3xyz\hat{\imath} + 2xy^2\hat{\jmath} - x^2yz\hat{k}$ اور میزانی تفاعل $\emptyset = 3x^2 - yz$ تب نقطے $(1, -1, 1)$ پر $div(\emptyset\vec{A})$ معلوم کیجیے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ

$$Div(\emptyset\vec{A}) = \vec{\nabla}\emptyset.\vec{A} + \emptyset(\vec{\nabla}.\vec{A})$$

$$grad\emptyset = \vec{\nabla}\emptyset = \left(\frac{\partial\emptyset}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}\hat{k}\right) = 6x\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - y\hat{k}$$

$$grad\emptyset.\vec{A} = \vec{\nabla}\emptyset.\vec{A} = \left(6x\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - y\hat{k}\right).\left(3xyz\hat{\imath} + 2xy^2\hat{\jmath} - x^2yz\hat{k}\right)$$
$$= 18x^2yz - 2xy^2z + x^2y^2z$$

$$\vec{\nabla}\emptyset.\vec{A} = xyz(18x - 2y + xy) \qquad (2.7)$$

$$Div\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).\left(3xyz\hat{\imath} + 2xy^2\hat{\jmath} - x^2yz\hat{k}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(3xyz) + \frac{\partial}{\partial y}(2xy^2) + \frac{\partial}{\partial z}(-x^2yz)$$
$$\vec{\nabla}.\vec{A} = 3yz + 4xy - x^2y$$
$$\therefore \emptyset(\vec{\nabla}.\vec{A}) = \emptyset(3yz + 4xy - x^2y)$$

$$\emptyset(\vec{\nabla}.\vec{A}) = (3x^2 - yz)[3yz + 4xy - x^2y] \qquad (2.8)$$

نقطے $(1, -1, 1)$ ہر مساوات (1) سے

$$\vec{\nabla}\emptyset.\vec{A} = xyz(18x - 2y + xy) = (1)(-1)(1)\left(18(-1) - 2(-1) + (1)(-1)\right)$$
$$= -1(18 + 2 - 1) = -19$$

نقطے $(1, -1, 1)$ پر مساوات (2.8) سے

$$\emptyset(\vec{\nabla}.\vec{A}) = [3(1)^2 - (-1)(1)][3(-1)(1) + 4(1)(-1) - (1)^2(-1)]$$
$$= (3 + 1)(-3 - 4 + 1) = -24$$
$$\vec{\nabla}\emptyset.\vec{A} + \emptyset(\vec{\nabla}.\vec{A}) = -19 - 24 = -43$$
$$Div(\emptyset\vec{A})at(1, -1, 1) = -43$$

حل شدہ مثال 7

گاؤس کی مساوات کو استعمال کر کے $\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$ کو حل کیجیے جہاں S ایک کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ہے۔

حل: فرض کیجیے کہ ایک کرہ کا نصف قطر r ایک مرکز مبدے پر ہے۔

گاؤس کی مساوات کے لحاظ سے

$$\iint_s \vec{r}.\overrightarrow{ds} = \iiint_v \left(\vec{\nabla}.\vec{r}\right)dv$$

جہاں پر $\vec{r}$ نصف قطر سمتیہ $\overrightarrow{ds}$ رقبہ سمتیہ جزاور dv حجمی جز ہے۔

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \quad \overrightarrow{ds} = dydz\hat{\imath} + dxdz\hat{\jmath} + dxdy\hat{k}$$

$$\therefore \vec{r}.\overrightarrow{ds} = \left(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}\right)\left(dydz\hat{\imath} + dxdz\hat{\jmath} + dxdy\hat{k}\right)$$

$$= xdydz + ydxdz + zdxdy$$

$$\therefore \iint_s \vec{A}.\overrightarrow{ds} = \iint_s \left(x^2\hat{\imath} + y^2\hat{\jmath} + z^2\hat{k}\right).dsi = \iint ds = s$$

سطح کا رقبہ $(y = 1, z = 1)$

اسی طرح $\iint_{S_1} \vec{A}.\overrightarrow{ds} + \iint_{S_2} \vec{A}.\overrightarrow{ds} = 1 \quad (2.9)$

اسی طرح $\iint_{S_3} \vec{A}.\overrightarrow{ds} + \iint_{S_4} \vec{A}.\overrightarrow{ds} = 1 \quad (2.10)$

اور $\iint_{S_5} \vec{A}.\overrightarrow{ds} + \iint_{S_6} \vec{A}.\overrightarrow{ds} = 1 \quad (2.11)$

مساوات(2.9),(2.10),(2.11)سے

$$\therefore \iint_S \vec{A}.\overrightarrow{ds} = 1 + 1 + 1 = 3$$

حل شدہ مثال8

اگر ایک سمتیہ $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ ہو تب ثابت کرو کہ $\iint_S \vec{r}.\overrightarrow{ds} = 3v$ جہاں پر V سطح S سے گھیرا ہوا حجم ہے۔

حل: گاس کے مساوات کے لحاظ سے

$$\iint \vec{A}.\overrightarrow{ds} = \iiint_V \left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right)dv$$

یہاں $\vec{A} = \vec{r}$

$$\therefore \iint \vec{r}.\overrightarrow{ds} = \iiint_V \left(\vec{\nabla}.\vec{r}\right)dv$$

$$\vec{\nabla}.\vec{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).\left(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}\right) = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\iint_S \vec{r}.\overrightarrow{ds} = \iiint_V 3dv = 3\iiint_V dv = 3v$$

حل شدہ مثال9

اگر $\vec{A} = (x + y)\hat{\imath} + (y - zx)\hat{\jmath} - 2z\hat{k}$ تب بتلاؤ کہ $Curl\vec{A} = -zk$ اور $Div\vec{A} = 0$

حل: دیا گیا ہے کہ $\vec{A} = (x + y)\hat{\imath} + (y - zx)\hat{\jmath} - 2z\hat{k}$

$$CurlÂ = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/_{\partial x} & \partial/_{\partial y} & \partial/_{\partial z} \\ x+y & y-zx & -2z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}\left[\frac{\partial}{\partial y}(-2z) - \frac{\partial}{\partial z}(y-2x)\right] + \hat{\jmath}\left[\frac{\partial}{\partial z}(x+y) - \frac{\partial}{\partial x}(-2z)\right] + \hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(y-2x) - \frac{\partial}{\partial y}(x+y)\right]$$

$$CurlÂ = \hat{K}(-2-1) = -3\hat{k} \Rightarrow Curl\vec{A} = -3\hat{k}$$

$$Div\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).\left[(x+y)\hat{\imath} + (y-zx)\hat{\jmath} - 2z\hat{k}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x+y) + \frac{\partial}{\partial y}(y-zx) + \frac{\partial}{\partial z}(-2z)$$

$$DivÂ = 1 + 1 - 2 = 0$$

اس طرح ثابت ہوا کہ $CurlA = -3k$ اور $DivÂ = 0$

حل شدہ مثال 10

اگر $\vec{A} = 2x^2y\hat{\imath} + 3yz\hat{\jmath} + x^2y^2z^2k$ تب نقطے $(1,-2,0)$ پر $Curl\ \vec{A}$ کی قدر معلوم کیجیے۔

حل:

$$Curl\ \vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial/_{\partial x} & \partial/_{\partial y} & \partial/_{\partial z} \\ 2x^2y & 3yz & x^2y^2z^2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}\left[\frac{\partial}{\partial y}(x^2y^2z^2) - \frac{\partial}{\partial z}(3yz)\right] + \hat{\jmath}\left[\frac{\partial}{\partial z}2x^2y - \frac{\partial}{\partial x}x^2y^2z^2\right] + \hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}3yz - \frac{\partial}{\partial y}2x^2y\right]$$

$$= \hat{\imath}(2x^2yz^2 - 3y) + \hat{\jmath}(-2xy^2z^2) + \hat{k}(-2x^2)$$

$$Curl\ \vec{A}\ at\ (1,-2,0)$$

$$= \hat{\imath}[2(1)^2(-2)(0)^2 - 3(-2)] + \hat{\jmath}[-2(1)(-2)^2(0)^2] + \hat{k}[(-2)(1)^2]$$

$$Curl\ \vec{A} = 6\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} - 2\hat{k} = 2(3i - \hat{k})$$

حل شدہ مثال 11

نقطے $(1,1,1)$ پر $Curl\ \vec{A}$ کی قدر معلوم کیجیے۔ جب کہ $\vec{A} = 2x^2y^2i - 2xy^2j + 2x^2y^2\hat{k}$

حل: دیا گیا ہے کہ $\vec{A} = 2x^2y^2i - 2xy^2j + 2x^2y^2\hat{k}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial/_{\partial x} & \partial/_{\partial y} & \partial/_{\partial z} \\ 2x^2y^2 & -2xy^2 & 2x^2y^2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}\left[\frac{\partial}{\partial y}2x^2y^2 - \frac{\partial}{\partial z}(-2xy^2)\right] + \hat{\jmath}\left[\frac{\partial}{\partial z}(2x^2y^2) - \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y^2)\right] + \hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(-2x^2y) - \frac{\partial}{\partial y}(2x^2z^2)\right]$$

$$= \hat{\imath}(4x^2y) + \hat{\jmath}(4x^2z - 4xy^2) + \hat{k}(-2y^2)$$

$$\therefore Curl\ \vec{A}\ \ at\ \ (1,1,1) i.e. x = y = z = 1$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = i(4\times1^2\times1^2) + j(4\times1^2\times1-4\times1\times1^2) + k(-2\times1^2)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = 4i + oj + 2\hat{k} = 4i - 2k$$

حل شدہ مثال 12

ثابت کرو کہ $\oint\vec{r}.\overrightarrow{dr} = 0$ اگر $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$

حل: $\oint\vec{A}.\overrightarrow{dl} = \iint_s(\vec{\nabla}\times\vec{A}).\overrightarrow{ds}$

$d\vec{l} = d\vec{r}$ اور $\vec{A} = \vec{r}$ جہاں پر

$$\therefore \oint A.dl = \oint\vec{r}.\overrightarrow{dr}$$

$$\therefore \oint\vec{r}.\overrightarrow{dr} = \iint_s(\vec{\nabla}\times\vec{r}).\overrightarrow{dr}$$

لیکن $\vec{\nabla}\times\vec{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)(xi + yj + zk)$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

$$= i\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)$$

$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\oint\vec{r}.\overrightarrow{dr} = 0$$

حل شدہ مثال13

اگر سمتیے $\vec{A}$ کا خطی تکمیل کسی بند منحنی کے اطراف مساوی ہو اس بند منحنی سے گھری ہوئی سطح پر ایک سمتیے $\vec{B}$ کے سطحی تکمیل کے ثابت کرو کہ $\vec{B} = Curl\ \vec{A}$

حل: اگر ایک بند منحنی کسی سطح S سے گھیری ہوئی ہو تب

$$\oint_c\vec{A}.\overrightarrow{dl} = \iint_s\vec{B}.\overrightarrow{ds} \qquad (2.12)$$

$$\oint_c\vec{A}.\overrightarrow{dl} = \iint_s Curl\ \vec{A}.ds \qquad (2.13)$$

اسٹوکس مسئلہ کے مطابق

(1) اور (2) مطابق $\iint_s\vec{B}.ds = \iint_s Curl\ \vec{A}ds$

$$\therefore \vec{B} = Curl\ \vec{A}$$

2.9 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- اگر $\vec{F}$ منحنی AB پر عمل کرنے والی متغیر قوت ہو تب خطی تکمیل $\int_A^B \vec{F}\,.\,\overrightarrow{dl}$ انجام کردہ کام کو ظاہر کرتا ہے تب $\vec{F}$ ذرے کو A سے B کی جانب حرکت دے گی۔ اگر C ایک بند منحنی ہو (یعنی ایسی منحنی جو خود سے کہیں بھی منطبق نہ ہو) تب اس منحنی کے اطراف خطی تکمیل کو اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے $\int_A^B \vec{F}\,.\,\overrightarrow{dl}$
- حاصل ضرب کے مجموعے کی انتہائی حد (Limit) یہاں تک کہ جملہ سطح اجزا لا متناہی پر اور ہر سطحی جز کا رقبہ سر پر مائیل ہو۔ $\vec{F}$ کا مکمل سطح S پر سطحی تکمیل کہلاتا ہے۔ اس کو اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\iint_S \vec{F}.\overrightarrow{ds} \ or \ \iint_S \vec{F}.\vec{n}ds$$

- حجمی تکمیل (Volume Integral): کسی سطح سے گھیرے ہویا حجم V پر تفاعل $F(x,y,z)$ کا تین تکمیلہ کو حجمی تکمیل کہلاتا ہے۔ اس کو اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\iiint_V F(x,y,z)dv$$

حجمی تکمیل عام طور پر میزانی مقداروں کے تکمیل کے طور پر واقع ہوتا ہے۔

- فرض کیجیے کہ $\vec{A}$ ایک سمتی میدان ہے جس کی مقدار اور سمت کسی نقطے پر مقامی محددات کا تفاعل ہے۔ تب اس سمتیے $\vec{A}$ اور تفرقی آپریٹر (Differential Operator) $\vec{\nabla}$ کا میزانی حاصل ضرب مقام کے محددات x, y, z کا میزانی تفاعل ہوگا۔ اسی کو سمتیے $\vec{A}$ کا Divergence کہتے ہیں۔

$$Div\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial y}$$

- گاؤس کے مطابق، ایک سمتی میدان $\vec{A}$ میں بند سطح $\vec{S}$ سے گھیرا ہوا حجم V ہو تب مکمل سطح $\vec{S}$ پر $\vec{A}$ کے عمودی جز کا سطح تکمیل مساوی ہوتا ہے۔ سطح $\vec{S}$ سے گھیرے ہوئے حجم V پر $Div\vec{A}$ کے حجمی تکمیل کے

$$\iint_S \vec{A}.\overrightarrow{ds} = \iiint_V \left(div\vec{A}\right)dv$$

$$or \ \iint_S \vec{A}.\overrightarrow{ds} = \iiint_V \left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right)dv$$

- فرض کیجیے کہ $\vec{A}$ ایک سمتی میدان ہے جس کی مقدار اور سمت دیے گئے نقطے پر مقامی محددات کا تفاعل ہے۔ تب تفرقی آپریٹر $(\vec{\nabla})$ اور سمتیہ $\vec{A}$ کا سمتی حاصل ضرب مقامی محددات x, y اور z کا سمتی تفاعل ہے۔ اسی تفاعل کو سمتی میدان کا کرل کہتے ہیں۔

$$\therefore \ Curl\ \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

- اسٹوکس تھیورم کے مطابق کسی بھی شکل کی سطح کے لیے مکمل سطح S پر سمتی میدان $\vec{A}$ کے Curl کا سطحی تکمیل مساوی ہوتا ہے۔ اس سطحی کی سرحد پر اس سمتی میدان کے خطی تکمیل کے یعنی

$$\iint_s Curl\,(A).\overrightarrow{ds} = \oint \vec{A}.\overrightarrow{dl}$$

2.10 کلیدی الفاظ (Keywords)

- **میزانیہ:** وہ طبعی مقدار جو صرف عددی قدر رکھتی ہو،
- **سمت :** وہ طبعی مقدار جو عدد، قدر کے ساتھ سمت بھی رکھتی ہو،
- **مقامی ویکٹر:** وہ ویکٹر جو ایک نقطہ کے مقام کو ظاہر کرتا ہو

2.11 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

2.11.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. حجمی تکمیل (Volume Integral) سے کیا مراد ہے؟
2. $\vec{A} = A_x i + A_y j + A_z k$ سمتیہ میدان کا ڈائیور جینس کیا ہوگا؟
3. گاؤس ڈآئیور جینس مسئلہ (Gauss Divergence Theorem) کو بیان کرو۔
4. اسٹوکس مسئلہ (Stokes Theorem) کو بیان کرو۔
5. $grad\emptyset$ کی طبعی اہمیت کیا ہیں۔
6. سمتیہ میدان کی تعریف کیجیے۔
7. سمتیہ میدان کے ڈآئیور جینس کی تعریف کیجیے۔
8. میزانی میدان کے دو مثالیں دیجیے۔
9. دو سمتیہ $\vec{A}$ کے سمتیہ حاصل ضرب $\vec{A} \times \vec{A} =$ ----- کی قیمت ہو گی۔

(a) صفر (b) ایک (c) دو (d) ان میں سے کوئی بھی نہیں

2.11.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. سمتی میدان کی تعریف کیجیے۔اس کے کوئی دو خصوصیات بتلائیے۔
2. سمتی اور میزانی میدان کیا ہیں؟ مثالوں سے سمجھائیے۔
3. $grad\ \emptyset$ کی طبعی اہمیت بیان کیجیے۔
4. کسی سمتیے کے خطی اور سطحی تکمیل کی تعریف کیجیے۔
5. کسی سمتیے کے حجمی تکمیل سے کیا مراد ہے؟

2.11.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. گاؤس ڈآئیورجینس مسئلہ کو بیان کیجیے اور ثابت کیجیے۔
2. سمتی میدان کے ڈآئیورجینس کی تعریف کیجیے۔اس کی طبعی اہمیت بیان کیجیے۔
3. کسی سمتیے کے خطی اور سطحی تکمیل کی تعریف کیجیے۔
4. اسٹوکس مسئلہ کو بیان کیجیے ان کی اہمیت بتائیے۔

2.11.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. اگر $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ دو تفرق پذیر سمتیے ہوں تب ثابت کرو کہ $\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{B}$
2. ثابت کرو کہ سمتیے $\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}, 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$ اور $3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 5\hat{k}$ ہم سطحی ہیں۔
3. کسی سمتیے $\vec{A}$ کے لیے ثابت کرو کہ $\vec{A}.\vec{A} = A^2$ اور $\vec{A} \times \vec{A} = 0$
4. ثابت کرو کہ تین سمتیے $\vec{A} = 3\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}, B = \hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k}$ اور $C = \hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 4\hat{k}$ ایک دوسرے پر عمودا ہیں۔
5. ایک قوت $a + bx + cx^2$ X- محور کے ذرہ پر عائد ہونے پر اس ذرہ کی حرکت $x = 1$ سے $x = 2$ کے درمیان ہوئی ہوتب اس ذرہ میں ہوا کام معلوم کیجیے۔[یہاں پر زاویہ $cos^{-1}(x/d)$]
6. (اشارہ: $W = \int F.dr$)
7. اگر $S = S(x, y, z) = x^2 - x^2y + xy^2z^2$ ہو تب gradS کو نقاط (2, -1,3) پر معلوم کیجیے۔
8. اگر r مقامی سمتیہ ہوتو معلوم کیجیے $grad\ r(a)$ $(b) grad\ \left(\frac{1}{r}\right)$
9. اگر r مقامی سمتیہ اور $\emptyset = lagr$ ہو تب $grad\emptyset$ معلوم کیجیے۔
10. اگر $A = iy + j(x^2 + y^2) + k(yz + zx)$ ہو تب $divA$ کو نقاط (1, -2, 3) پر معلوم کیجیے۔
11. اگر r مقامی سمتیہ ہے۔ثابت کیجیے کہ $divr = 3(a)$ $\nabla(r.A) = A(b)$
12. $div(r^n r) = (3 + n)r^n(c)$
13. اگر a ایک مستقل سمتیہ ہے۔معلوم کیجیے $div(r \times A)$
14. اگر $A = i(3xy) - j(y^2)$ ہو تب معلوم کیجیے $\oint_c A.dr$ جہاں $y = 2x^2$ اور (1, 2) سے (0, 0) (C بند کروں)
15. اگر $A = iy + j(x^2 + y^2) + k(yz + zx)$ ہو تب CurlA کو نقاط (2, 2, -2) پر معلوم کیجیے۔
16. اگر r مقامی سمتیہ ہو توثابت کیجیے کہ $Curl\ r = 0$

17. ثابت کیجیے کہ $A = e^{-x}(-yzi + zj + yk)$ Irrotational

18. $A = i(x + zy + az) + j(bx + 3y - z) + k(4x + cy + 2z)$,Irrotational
ہوتب c, b, a مستقل کو معلوم کیجیے۔

19. $Curl(a \times r)$ کی قیمت کو معلوم کیجیے۔(جہاں a سمتیہ مستقل ہے)

20. ثابت کیجیے کہ $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0$

21. یہ قیمت کو معلوم کیجیے (i)Curl gradS (ii)grad div A اور (iii)div Curl A

22. اگر r مقامی سمتیہ ہے ثابت کیجیے $\nabla^2 r^2 = n(n+1)r^{n-2}$

23. ثابت کریں $\nabla.(A \times r) = r.(\nabla \times A)$

24. ثابت کریں $Curl\ Curl\ A = grad\ DivA - \nabla^2 A$

25. سٹوک مسئلہ کو استعمال کرتے ہوں ثابت کیجیے کہ $Curlgrad\emptyset = 0$

26. اسٹوکس مسئلہ کے استعمال کرتے ہوئے $\oint_C (yzdx + xzdy + xydz)$ کو معلوم کیجیے۔
(جہاں $x^2 + y^2 = 1$ اور $Z = y^2$)

27. ثابت کریں $\iint_S CurlF.ds = 0$

28. اگر $F = iax + jby + kcz$ ہوتب ثابت کیجیے کہ $\iint F.nds = \frac{4}{3}\pi(a+b+c)$ یہاں S سطح ہی رقباں۔

29. گاؤس ڈآئیور جینس مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں $\iint_S F.\hat{n}ds = \frac{1}{5}2\pi r^5$ جہاں $F = ix^3 + jy^3 + Kz^3$ اور S سطح ہی رقباں۔

2.12 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

---

1. Engineering Physics by R.K.Gaur &S.L.Gupta,Dhanpat Rai Publications.
2. Physics Part- I by Resnik.R &Halliday.D, Wiley Eastern Pvt. Ltd. New Delhi.
3. Unified Physics Vol-I, Mechanics by, Dr.S.L.Gupta&Sanjeev Gupta Jai Prakash Nath &Co. Meerut
4. Vector Algebra by Dr. Rishi Kumar Johan& Dr. Anshuman Singh
5. Vector Algebra and Analysis with Application by Prasun Kumar nayak
6. Vector Algebra by Shanti Narayan& P.K. Mittal, s Chand

7. Vector Analysis tensor analysis and linear vector space by S.P. Kuil
8. Aziz, W A, and Mashood Ahmad. Millenium Science Dictionary, Physics - Chemistry & Mathematics, English - English - Urdu. Mumbai: Saifee Book Agency, 2003.
9. Gaur, R.K. &Gupta, S.L.Engineering Physics.Dhanpat Rai Publication.
10. Resnic.R&Halliday.D.Physics Part-I&Part-II.Wiley Eastern Pvt.Ltd.New Delhi.

اکائی 3۔ گاؤس تھیورم

(Gauss's Theorem)

اکائی کے اجزا

3.0 تمہید (Introduction)

قدیم برقی سکونیات کی تاریخ 600ق م کے یونانی مفکرین سے منسوب ہے جب کہ تالیس(Thales) نامی یونانی مفکر نے دریافت کیا کہ اُن میں رگڑا ہوا کافور چھوٹے تنکوں جیسے کاغذ یا کارک کے تنکوں کو کشش کرتا ہے۔ ولیم گلبرٹ نے دیکھا کہ کافور کے علاوہ دوسرے اشیا بھی ایسی کشش کرتے ہیں۔ بنجامن فرینکلن نے دریافت کیا کہ برقی بار دو قسم کے ہوتے ہیں۔ یہ دو مختلف برقی بار دور گڑنے والی سطحوں پر آتے ہیں۔ یہ مثبت اور منفی برقی بار کہلاتے ہیں۔ شیشے کی سلاخ کو ریشم پر رگڑنے سے شیشے کی سلاخ پر مثبت اور ریشم پر منفی برقی بار آتا ہے۔ اُون پر پلاسٹک کو رگڑنے سے اون پر مثبت اور پلاسٹک پر منفی برقی بار آتا ہے۔ اُون پر آبنوس کو رگڑنے سے ان پر مثبت اور آبنوس پر منفی برقی بار آتا ہے۔ ان مثالوں سے یہ اشارہ ملتا ہے کہ برقی بار کبھی پیدا نہیں ہوتا۔ رگڑنے والی سطحوں کے درمیان یہ منتقل ہوتا ہے۔

اشیا کو امالے کے ذریعے بھی برقایا جاسکتا ہے۔ جب کوئی مثبت برقی بار q+ کو تعدیلی جسم کے قریب لایا جائے تو اس تعدیلی جسم کے اگلے رخ پر مساوی اور مخالف برقی بار q− بنتا ہے اور اس کو تعدیل کرنے کے لیے اس جسم کے پچھلے رخ پر q+ برقی بار بنتا ہے۔ تعدیلی جسم پر اس طرح سے منفی اور مثبت بار کا عارضی طور پر بننا برقی امالہ کہلاتا ہے۔ تعدیلی جسم اسی لیے برقی بار سے کشش کرتا ہے۔ دھاتی اجسام یا برقی موصل اجسام پر جب اضافی برقی بار دیا جائے تو یہ اضافی بار صرف اس کی سطح پر رہتا ہے۔ کسی جسم کی بیرونی سطح پر موجود اضافہ برقی بار اس پر سطحی برقی کثافت(Surface Charge Density) بناتا ہے۔

کسی دھاتی شے پر اضافی برقی بار دیا جائے تو یہ اس کی صرف بیرونی سطح پر رہتا ہے اور نوک دار حصوں پر سطحی برقی کثافت اعظم رہتی ہے۔ اس لیے اونچی عمارتوں کو بجلی گرنے کے حادثات سے محفوظ رکھنے کے لیے نوک دار سلاخ استعمال کی جاتی ہے جو برقی باروں کو حاصل کر کے زمین میں پہنچاتی ہے۔

3.1 مقاصد (Objectives)

یہ اکائی آپ کو برقی بھرنوں کے مفہوم سے متعارف کراتی ہے اور برقی میدان اور اس کی مدت کے مفہوم سے متعارف کراتی ہے۔ مفہوم کے ادرک میں آپ کی سہولت کے لیے یہ اکائی وضاحت کرتی ہے۔اس اکائی میں ہم :

- برقی بار۔بقائے برقی بار کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔
- کولمب کا کلیہ کو بیان کریں گیں۔ برقی میدان، برقی میدان کی حدت کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔
- خطوط قوت کے بارے میں سمجھائیں گے۔
- گاؤس کا تھیورم کو سمجھنے کی شروعات کریں گے۔

3.2 برقیانے کا جدید نظریہ (Electric Current of Modern Theory)

جوہری ساخت کے مطابق مثبت برقی بار والے پروٹان مرکز ہیں مقیم رہتے ہیں اور ان کے اطراف منفی برقی بار والے الکٹران گردش کرتے رہتے ہیں۔ مرکز قیام پذیر رہتا ہے تو اس کے پروٹان یا نیوٹران میں کوئی تبدیلی نہیں آتی۔ البتہ گردش کرنے والے الکٹران کی تعداد میں اضافہ یا کمی ہوسکتی ہے۔

جب کوئی دو اشیا آپس میں رگڑی جاتی ہیں تو الکٹران ایک سطح سے نکل کر دوسری سطح میں منتقل ہوتا ہے۔ جہاں سے الکٹران نکلتا ہے وہ مثبت برقی بار والا بنتا ہے اور جس میں الکٹران کا اضافہ ہوتا ہے وہ منفی برقی بار والا بنتا ہے۔یعنی رگڑنے کے عمل سے الکٹران ایک جسم سے دوسرے جسم میں منتقل ہوتا ہے اور ان دونوں کا مجموعی برقی بار ہمیشہ صفر رہتا ہے۔

3.3 برقی بار۔بقائے برقی بار(Electric Current-Conservation of Electric Current)

اوپر کے بیان کردہ نظریئے میں یہ دیکھا گیا کہ اس جسم سے خارج ہونے والے الکٹران کی تعداد دوسرے جسم میں حاصل ہونے والے الکٹران کی تعداد کے مساوی ہوتی ہے۔یعنی الکٹران یا برقی بار نہ ہی پیدا کیا جاسکتا ہے اور نہ ہی فنا کیا جاسکتا ہے۔ یہ کلیہ بقائے برقی بار کہلاتا ہے۔

کلیہ بقائے برقی بار کے بموجب کسی آزاد جسم میں مثبت اور منفی برقی باروں کا مجموعہ الجبری ہمیشہ مستقل رہتا ہے اور برقی بار نہ ہی پیدا کیا جاسکتا ہے اور نہ ہی فنا کیا جاسکتا ہے۔

3.4 کولمب کا کلیہ (Coulomb's Law)

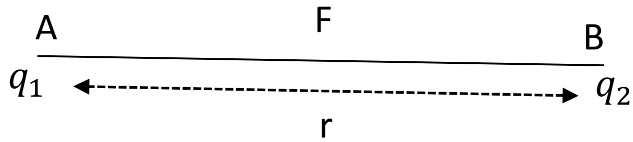
ایک فرانسیسی سائنسدان کولمب (C.A. Coulomb) نے برقی باروں کے درمیان فاصلوں اور ان کے درمیان عمل کرنے والی قوتوں کی پیمائش کی اور ان پر عمل کرنے والے ایک قانون کا انکشاف کیا جس کے مطابق یہ قوت برقی باروں کے حاصل ضرب کے راست

تناسب اور ان کے درمیانی فاصلے کے مربع کے بالعکس تناسب ہوتی ہے۔مشابہ برقی بار وضع کرتے ہیں۔اور غیر مشابہ برقی بار کشش کرتے ہیں دو پروٹانوں کے درمیان تجاذبی کشش کی قوت کے مقابلے میں برقی سکونیاتی قوت دفع 10^{36} گناہ زیادہ ہوتی ہے۔یعنی برقی سکونیاتی قوت کے مقابلے میں تجاذبی قوت قابل نظر انداز ہوتی ہے۔

اس کلیہ کو اس طرح بیان کیا جا سکتا ہے۔

"دو برقی باروں کے درمیان قوت دفع یا قوت کشش کی سمت ان کو جوڑنے والی خط مستقیم پر ہوتی ہے اور اس کی مقدار برقی باروں کے حاصل ضرب کے راست تناسب اور ان کے فاصلے کے مربع کے بالعکس تناسب ہوتی ہے۔

دو برقی بار q_1 اور q_2 ایک دوسرے سے r کے فاصلے پر ہیں ان پر عائد ہونے والی قوت F اس طرح ہوتی ہے۔



شکل(3.1)

$$F \propto q_1 q_2$$
$$F \propto \frac{1}{r^2}$$
$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}$$
$$F = K\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

مستقیل K کی قیمت دو برقی باروں کے درمیان موجود واسطے پر اور ان کے فاصلے اکائیوں پر منحصر ہوتی ہے۔خلاء یا فضا کے لیے اس کی قیمت $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ ہوتی ہے۔جہاں ε_0 کو خلا کی برقی اجازیت کہتے ہیں۔

لہٰذا $$F_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

یہ کولم کے کلیے کی حسابی شکل ہے۔اس مساوات میں برقی بار کو کولم کی اکائی میں اور فاصلے کو میٹر میں لیا جائے تاکہ قوت کی قیمت نیوٹین میں حاصل ہو سکے۔

جہاں $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ کی قیمت $9\times10^9 Fm^{-1}$ ہوتی ہے۔یعنی $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times10^9\ {N-m^2}/{coulumb^2}$

$$F = 9\times10^9\frac{q_1 q_2}{r^2}\ Newton$$

جہاں ε_0 خلا کی برقی اجازیت کی قیمت $8.9\times10^{-12}\ {cd^2}/{H-m^2}$

کولم کے کلیے کی ویکٹر کی شکل $$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^3}\hat{r}$$

جہاں $\hat{r}$، q_1 اور q_2 کے درمیان اکائی ویکٹر

کولم کی تعریف:

فضا میں ایک دوسرے سے ایک میٹر کے فاصلے پر رکھے ہوئے دو مساوی مقدار والے مثبت برقی بار اگر ایک دوسرے کو $9x10^9N$ کی قوت سے دفع کرتے ہیں تو یہ ایک کولم برقی بار کہلاتے ہیں۔

3.5 خلا کی اور واسطے کی برقی اجازئیت (Space and Medium Permittivity)

عموماً جو واسطے برقی باروں کے درمیان پائے جاتے ہیں ان واسطوں کی وجہ سے دو برقی باروں کے درمیان عائد ہونے والی قوت پر اثر پڑتا ہے۔ واسطہ میں مادے سے بنتا ہے۔ ان میں بھی الکٹران اور پروٹان پائے جاتے ہیں۔ آتشی شیشہ (Pyre glass)، ابرق (Mica)، ربر، گندھک، پانی، ہوا، کاربن ڈائی آکسائیڈ ($F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 k}\frac{q_1q_2}{r^2}$ (جہاں $\varepsilon = \varepsilon_0 K$) برقی پاروں کے درمیان عائد ہونیوالی قوت اعظم ترین اس وقت ہوتی ہے جب کہ یہ خلاء میں رکھے ہوں اور یہ قوت F_0 سے ظاہر کی جاتی ہے۔ اگر ان برقی پاروں کے درمیان کوئی دوسرا واسطہ ہو تو یہ قوت F کم ہوتی ہے۔

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1q_2}{r^2} \qquad (3.1)$$

$$F_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2} \qquad (3.2)$$

مساوات (3.1) اور (3.2) سے

$$\frac{F_0}{F} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r \qquad (3.3)$$

یہ ایک کسر غیر واجب ہوتی ہے یعنی اس کی قیمت 1 سے بڑی ہوتی ہے۔ یہ مادے کی اضافی اجازیت ایک ایسے ہندسے کو ظاہر کرتی ہے جو یہ بتاتا ہے مادے کی مطلق اجازیت خلا کی اجازیت سے کتنے گنا زیادہ ہے یا یہ مادہ برقی سکونیاتی قوت کو کتنے گنا گھٹا دیتا ہے۔ اس اضافی اجازیت کو ذو برقی مستقل (Dielectric Constant) بھی کہتے ہیں۔

$$\text{مستقل برقی ذو یا اجازیت اضافی} = \frac{\text{اجازیت مطلق کی واسطے}}{\text{اجازیت مطلق کی خلا}}$$

کئی برقی باروں سے ایک بار پر قوت :

اس کلیہ کے مطابق اگر کسی برقی بار پر دوسرے کئی مختلف برقی بار q_1، q_2 اور q_3 ---وغیرہ قوتیں F_1، F_2 اور F_3 --- وغیرہ عائد کرتے ہوں تو ان سب کی مجموعی قوت کے لیے کولم کے طریقے سے ان سب کی علاحدہ قوتوں کو معلوم کر کے ان کا سمتی مجموعہ لیا جاتا ہے۔ مجموعی قوت اس طرح ہوگی

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + ----$$

یہاں یہ بات غور طلب ہے کہ F_1، F_2 اور F_3 ----------- F_n کی جمع سمتی طریقے پر ہو۔ منفی برقی بار کے لیے کمیت میں

مخالف ہو جائے گی۔

3.6 برقی میدان (Electric Field)

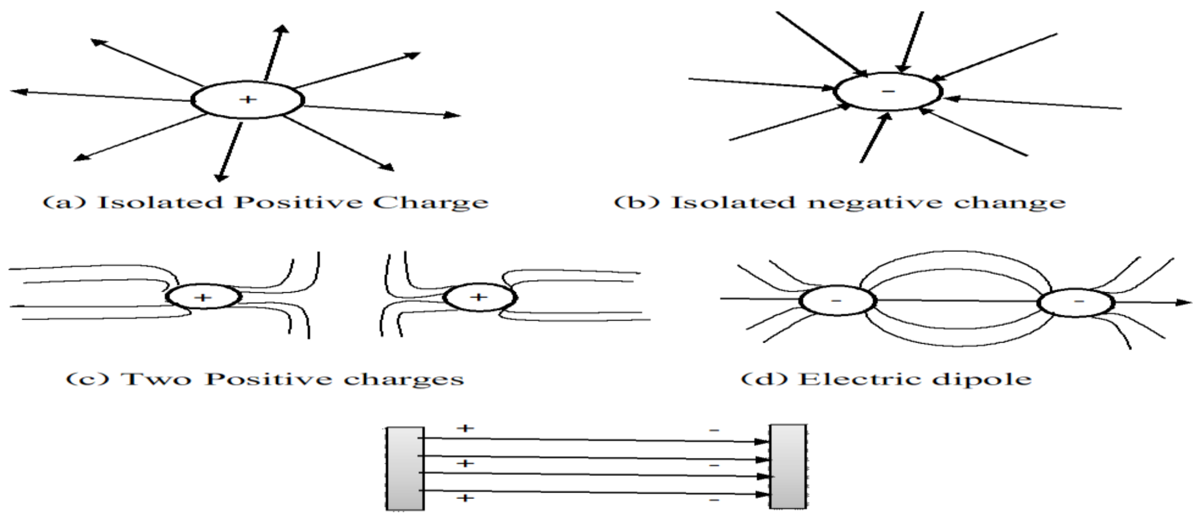
برقی میدان سے مراد برقی بار کے اطراف کا علاقہ جہاں اگر دوسرا برقی بار رکھا جائے تو اس پر قوت عائد ہوتی ہے۔ یہ علاقہ پہلے برقی بار کی وجہ سے بنا ہوا میدان کہلاتا ہے۔

3.6.1 برقی خطوط قوت:

برقی میدان کے مشاہدے کے لیے مائیکل فراڈے نے خطوط قوت کا ایک تصور دیا۔ یہ ایک ایسی منحنی ہے جو اس سمت کو ظاہر کرتی ہے جس میں کہ اکائی مثبت بھرن سفر کرے گا۔ منحنی کے کسی نقطہ پر مماس اس نقطہ پر برقی قوت کی سمت کو بتلاتا ہے۔

مائیکل فراڈے نے $\vec{E}$ کی تعبیر کے خطوط قوت کے مفہوم کو استعمال کیا تھا برقی میدان کے خاکوں کو آسانی کے ساتھ دیکھنے میں یہ مفہوم مدد کرے گا۔ اس کی مدد سے فضا کے کسی حصے میں میدان میں ہونے والی تبدیلیوں کی واضح تصویر مل سکتی ہے۔ برقی میدان کی قدر $\vec{E}$ تراش عمودی کے اکائی رقبہ میں واقع خطوط قوت کی تعداد کے تناسب ہوتی ہے جب $\vec{E}$ کی قیمت بہت بڑی ہوتی ہے تو خطوط قوت ایک دوسرے کے بہت قریب ہوتے ہیں اور اگر $\vec{E}$ کمزور ہو تو ان میں دوری بڑھ جاتی ہے۔

فیراڈے کے مطابق یہ فرض کیا جاتا ہے کہ قوتوں کی نلیوں کے ساتھ کے طولی تناؤ سے کشش قوتوں کی اور قوتوں کی نلیوں کے عموداً عرضی دباؤ سے دافعہ قوتوں کی وضاحت ہوتی ہے۔ یہ نلیاں، جہاں کہیں بھی ہوں، واسطے میں ایک بگاڑ پیدا کر دیتے ہیں۔



(e) Uniform field

شکل(3.2)

کسی مثبت برقائے جسم سے قوت کی نلی نکل کر ایک غیر برقائے جسم سے تماس میں آتی ہے تو یہ آخر الذکر میں منفی بھرن امالہ کرتی ہے نلی

چوں کہ محوری تناؤ کے تابع رہتی ہے اس لیے خود کو طول کے ساتھ چھوٹا کرنے کی متقاضی رہتی ہے اسی وجہ سے مخالف بھرن ایک دوسرے کے قریب آتے ہیں۔اس کا نتیجہ کشش ہوتا ہے۔بہت دور مثبت بھرن سے ہونے والا ہٹاؤ کم ہوتا ہے۔دو مشابہ بھرنوں کی صورت میں خطوط قوت ایک دوسرے کو دفع کرتے ہیں۔ شکل(3.2) میں چند خطوط قوت کی سمتوں کو دکھلایا گیا ہے۔

یہ خطوط لکیریں ہیں جو مثبت برقی بار سے نکلتی ہیں اور منفی بار میں داخل ہوتی ہے کسی بھی مقام پر ان لکیروں کی سمت میدان کی سمت میں ہوتی ہے۔اگر کوئی آزاد چھوٹا مثبت برقی بار اس میدان میں (یعنی لکیروں میں) چھوڑ دیا جائے تو یہ ان کی کسی لکیرے پر چلتا ہوا مثبت ہے منفی برقی بار تک پہنچتا ہے۔ہموار برقی میدان کے خطوط قوت متوازی اور فاصلہ ہوتے ہیں۔

3.6.2 برقی خطوط قوت کی خصوصیات:

1. کبھی بھی مقام پر ان خطوط کا مماس برقی میدان کی سمت کو ظاہر کرتا ہے۔
2. اکائی ور قیے سے عموداً گزرنے والی خطوط قوت کی تعداد اس مقام پر برقی میدان کی مقدار کے راست تناسب ہوتی ہے۔
3. خطوط قوت مثبت برقی بار سے نکلنے میں اور منفی برقی بار میں پہنچتے ہیں۔
4. خطوط قوت ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے۔ورنہ ایک نقطے پر میدان کی دو سمتیں ہو جائے گی۔
5. برقی خطوط اجسام کی سطح کے انتصابا ہوتی ہیں۔
6. مقناطیسی خطوط قوت بند اور مکمل ہوتے ہیں مگر برقی خطوط قوت پر ایسی کوئی پابندی نہیں۔
7. جہاں میدان طاقتور ہو وہاں یہ خطوط قریب ہوتے ہیں اور جہاں میدان کمزور ہو وہاں یہ خطوط دور دور ہوتے ہیں۔
8. ان خطوط کا کوئی طبعی موجود نہیں ہوتا یہ صرف تصوراتی ہوتے ہیں۔

3.7 برقی میدان کی حدت (Electric Field Intensity)(E)

کسی مقام پر برقی میدان کی حدت سے مراد وہاں رکھے ہوئے ایک کولم مثبت برقی بار پر عائد ہونے والی قوت ہوتی ہے۔اگر مشاہدہ کے نقطے پر ایک چھوٹا سا امتحانی بار q_0(Test Charge) رکھا جائے تو وہاں میدان کی حدت

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

برقی میدان ایک سمتیہ ہے اور اس کی سمت قوت کی سمت ہی ہوتی ہے۔اور اس کی SI اکائی نیوٹن فی کولم N/C ہوتی ہے اور اس کی اکائی تو Volt/m بھی کہا جاسکتا ہے۔

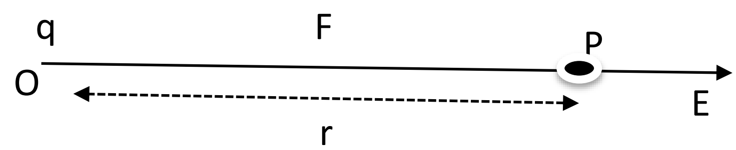
3.7.1 ہموار اور غیر ہموار برقی میدان:

ہموار میدان وہ ہوتا ہے جس میں ہر نقطے پر میدان کی حدت اور سمت یکساں رہتی ہے۔

ایسا میدان جس میں میدان کی حدت یا سمت یا دونوں مقام کے لحاظ سے بدلتے ہوں، غیر ہموار میدان کہلاتا ہے۔
اگر کوئی برقی بار q کسی برقی میدان E میں رکھا ہو تو اس پر میدان کی جانب ایک قوت عائد ہو گی۔ وہ قوت F=qE

3.7.2 علاحدہ نقطی بار سے بننے والا میدان:

فرض کیجیے کہ ایک نقطی برقی بار نقطہ O پر موجود ہے اور اس سے r کے فاصلے پر نقطہ P ہے۔ نقطہ P مشاہدے کا نقطہ سے یہاں میدان کی حدت معلوم کرنا ہے۔
اگر مشاہدے کے نقطے پر بہت چھوٹا آزمائش برقی بار جولایا جائے تو اس پر عائد ہونیوالی قوت اس طرح ہو گی۔



شکل(3.3)

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2} \qquad (3.4)$$

برقی میدان معلوم کرنے کے لیے اس قوت کو q_0 سے تقسیم کیا جائے تب

$$E = \frac{F}{q_0} \qquad (3.5)$$

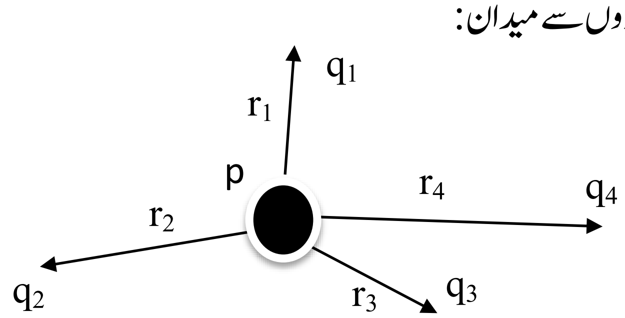
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \qquad (3.6)$$

اگر مشاہدہ کے نقطے پر خلاء کے بجائے کوئی دوسرا واسطہ موجود ہو تو وہاں میدان کی حدت کم ہو گی۔

$$E_{med} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2} \qquad (3.7)$$

$$E_{med} = \frac{E_{free}}{K} \qquad (3.8)$$

3.7.3 کئی برقی باروں سے میدان:



شکل(3.4)

فرض کیجیے کہ نقطہ P پر کل میدان کی حدت معلوم کرنا ہے اور یہ حدت مختلف برقی باروں $q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4$ وغیرہ سے بنتی ہے اور یہ برقی بار نقطہ P کے لحاظ سے مقامی سمتیے r_1, r_2, r_3, r_4 وغیرہ پر موجود ہیں۔

تب نقطہ P پر مجموعی میدان معلوم کرنے کے لیے ان تمام حدتوں کی سمتی جمع کی جائے یعنی

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} + \overrightarrow{E_3} + \overrightarrow{E_4} + ----$$

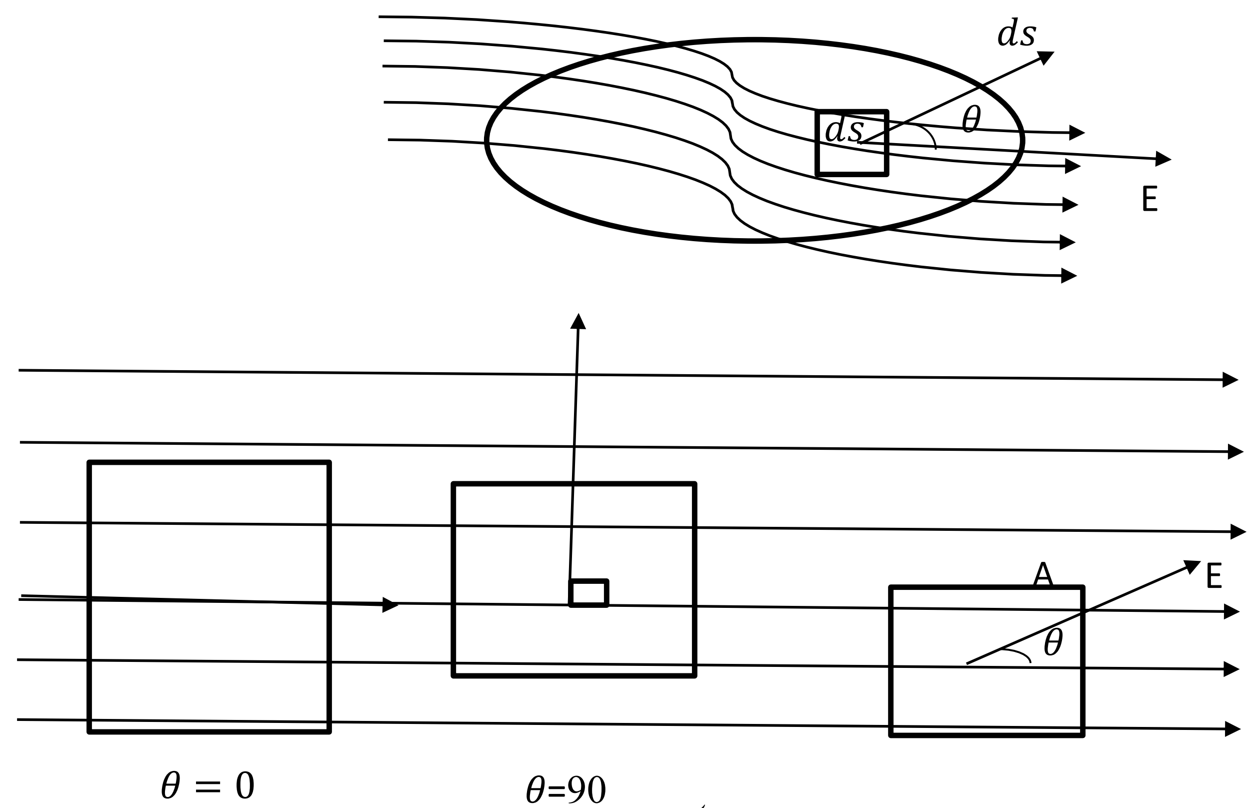
3.8 برقی امالہ/برقی نفوذ (Electric Flux)

فراڈے نے خطوط قوت اور قوت کی نلیوں کی قدری اہمیت کو واضح کیا۔ برقی خطوط قوت برقی میدان کی تفصیلات کو بتاتے ہیں۔ میدان کی حدت اور سمت دونوں بھی ان خطوط سے ظاہر ہوتے ہیں۔

برقی میدان میں رکھی ہوئی کسی سطح سے گزرنے والی برقی خطوط قوت کی تعداد اس سطح پر برقی امالہ (Electric Flux) کے تناسب ہوتی ہے۔

برقی امالہ ایک میزانیہ ہے اور اس کی اکائی Weber ہے۔

اگر یہ خطوط قوت سطح سے باہر نکلتے ہوں تو مثبت امالہ اور اگر سطح میں اندر جاتے ہیں تو منفی امالہ ہوگا۔



شکل(3.5)

اگر دی گئی سطح کا عمود برقی میدان سے θ کا زاویہ بنایا ہو تو اس A رقبے والی سطح پر برقی امالہ کی قیمت $EA\ \mathrm{Cos}\ \theta$ ہوتی ہے۔

شکل(3.5)θکی قیمت 0^0 ہے اس لیے امالہ اعظم ترین یعنی EA ہو گا۔ شکل(3.5) میں θ کی قیمت 90^o ہے اس لیے امالہ صفر ہو گا۔

اکائی بھرن سے اگر 4π خطوط خارج ہوں تو ان خطوط کو امالے کے اکائی خطوط کہا جاتا ہے۔ نصف قطر'r' کی کروی سطح کے اکائی رقبہ کے امالی خطوط کی تعداد نفوذ کی کثافت(Flux Density) کہا جاتا ہے۔اس طرح نفوذ کی کثافت ہو گی۔

$$K.E = K\ \frac{q}{Kr^2} = \frac{q}{r^2} = \frac{4\pi q}{4\pi r^2}$$

E کو تعبیر کرنے والے خطوط، قوت کے خطوط کہلاتے ہیں، جب کہ KE کو تعبیر کرنے والے خطوط امالے کے خطوط مانے جاتے ہیں۔امالے کے خطوط کی مجموعی تعداد جو کسی سطح کو اس کے عموداً قطع کرتی ہے۔ مجموعی عمودی برقی امالہ یا برقی نفوذ کہا جاتا ہے۔

اگر دی گئی سطح کے مختلف حصوں پر میدان کی حدت یا سمت یا میدان اور سطح کے عمود میں زاویہ یکساں نہ ہو تو ایسی صورت میں کل سطح پر مقناطیسی نفوذ اس طرح ہے۔

$$\phi_E = \int_s \ \vec{E}.\overrightarrow{\Delta s} = E.S$$

E اور Δs کے درمیان زاویہ θ ہے تو۔تب اس کا مزانیہ ضرب

$$E.\Delta S = Eds \operatorname{Cos} \theta$$

تب برقی امالہ بند سطحوں کے لیے اگر خطوط قوت کا رخ باہر کی طرف ہو تو Cos θ مثبت ہو گا۔اور اگر خطوط قوت اندر کی جانب عمل کر رہے ہیں تو $\operatorname{Cos}\theta$ منفی ہو گا۔

$$\phi_E = \oint E.ds \operatorname{Cos}\theta$$

$$\phi_E = E \operatorname{Cos}\theta \oint ds$$

$$\phi_E = E \operatorname{Cos}\theta\, A$$

$\oint ds = A$ جہاں سطح ہی رقبہ

$$\phi_E = EA \operatorname{Cos}\theta$$

نفوذ، سمتی میدان کی ایک خاصیت ہے اس سے مراد میدان میں ایک فرضی سطح کی تعبیر ہے جو بند یا کھلی ہو سکتی ہے۔ مثلاً مستقل بہاؤ کی صورت میں نفوذ سے مراد سیدھے خطوط کی وہ تعداد ہے جو ایک سطح کو قطع کرتی ہے اور مقناطیسی میدان کے لیے نفوذ سے مقناطیسی خطوط قوت کی وہ تعداد ہے جو اس قسم کی سطح کو قطع کرتی ہے۔

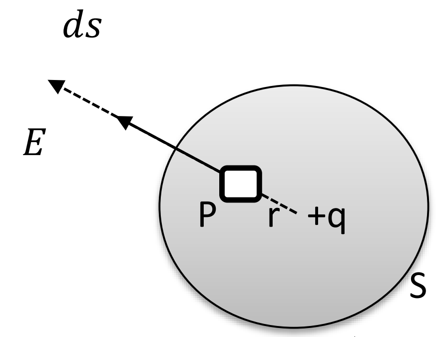
3.9 گاؤس کا تھیورم (Gauss's Theorem)

کارل فریڈرک گاؤس(Karl Friedrich Gauss) (1777-1885) صدر گاہ کو گوٹنجی(Gottingen) کے ڈائرکٹر تھے۔ فلکیات، ریاضیات، برق اور مقناطیسیت میں انہوں نے غیر معمولی کام انجام دیا ہے۔

گاؤس کے تھیورم کو اس طرح بیان کیا جاتا ہے۔ "کسی مکمل بند سطح پر موجود برقی نفوذ کی قیمت اس بند سطح میں گھرے ہوئے مادے کی برقی اجاذیت ε_0 کے بالعکس تناسب اور اس بند سطح میں موجود برقی بار کے راست تناسب ہوتی ہے۔

$$\phi_E = \oint E.ds = \oint E.ds\cos\theta = \left(\frac{1}{\varepsilon_0}\right)Q \qquad (3.9)$$

گاؤس کا تھیورم (یعنی مساوات) ان پیچیدہ سوالات میں بہت کار آمد ہوتی ہے جب کہ ایسے نظام کی برقی میدان کی حدت معلوم کرنا ہو جو کولم کے کلیے یا امتزاج کے کلیے سے ممکن نہیں۔

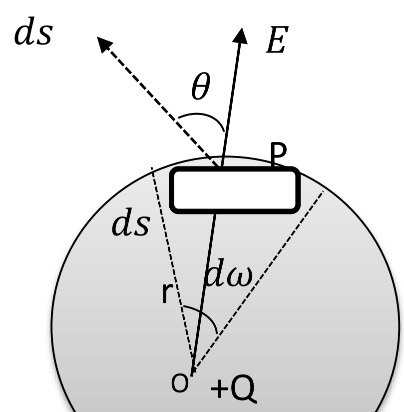


شکل (3.6)

گاؤس کے طریقے میں نفوذ کے معلوم کرنے کے لیے ایک گاسیائی سطح کو منتخب کیا جاتا ہے۔

اس سطح پر برقی میدان کی قیمت یا تو ہموار اور یکساں ہوتی ہے یا پھر صفر تب مساوات (3.9) کی تکمیل (Integration) با آسانی حل ہو جاتا ہے۔

پیش: نقطہ P کو گھیری ہوئی بند سطح پر



شکل (3.7)

فرض کرو کہ ایک نقطوی بھرن Q+ کو ایک یکساں متساوی السموت واسطے (یعنی ایسا واسطہ جس کی خصوصیات ہر سمت میں ایک جیسے ہوں) 'O' پر رکھا ہوا ہے اور فرض کرو کہ ایک نقطہ P کو گھیری ہوئی بند سطح پر 'O' سے 'r' فاصلہ میں رکھا ہوا ہے۔ 'P' کو گھیرے ہوئے ایک چھوٹے عنصر کا رقبہ ds ہے۔ فرض کرو کہ سطح پر نقطہ P پر کھینچا ہوا عمود PN، PE کے درمیان ایک زاویہ θ ہے۔ برقی حدت E ہے

جس کی سمت عمل PE باہر کی جانب رخ کیے ہوئے ہے۔ تب PN کی سمت میں E کا جز $E\ \text{Cos}\ \theta$ ہوگا۔

تب رقبہ کے چھوٹے عنصر ds پر برقی عمودی امالہ ہوگا۔

$$d\phi_E = E.ds = Eds\cos\theta \tag{3.10}$$

اگر Q سے P کا میدان کی سمت میں فاصلہ 'r' ہو تو E کی قیمت ہوگی۔

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r^2}\right) \tag{3.11}$$

مساوات (3.10) اور (3.11) سے

$$d\phi_E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}ds\cos\theta = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{ds\cos\theta}{r^2}\right) \tag{3.12}$$

لیکن کسر $\frac{dS\ \text{Cos}\ \theta}{r^2}$ رقبہ ds کے مقابل 'q' پر بنا ہوا زاویہ مجسمہ (Solid angle) ہوتا ہے جس کو $d\omega$ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

تب سطح ds پر عمودی برقی امالہ ہوگا۔

$$d\phi_E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}d\omega \tag{3.13}$$

لہٰذا پوری بند سطح پر مجموعی عمودی برقی امالہ ہوگا۔

$$Q_E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\oint d\omega \tag{3.14}$$

کیوں کہ فضا کے کسی نقطہ پر اس سے بننے والا زاویہ مجسمہ 4π کے برابر ہوتا ہے۔

$$\phi_E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\times 4\pi \tag{3.15}$$

$$\phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{3.16}$$

اگر Q مثبت ہو تو امالے کی سمت باہر کی جانب رہے گی۔ جب Q منفی ہو تو امالہ اندر کی طرف رخ کیے ہوئے رہتا ہے۔

اندرون سطح اگر ایک سے زائد بھرن $+Q_3 + Q_2 + Q_1$ $\quad$ $-\ \text{Q}_3{}^1 - \text{Q}_2{}^1 - Q_1{}^1$ موجود ہوں تو یہ

بھرن اپنا حصہ Q ادا کرے گا۔ اس طرح تمام بھرنوں کی وجہ سے مجموعی عمودی برقی امالہ Q_E ہوگا۔

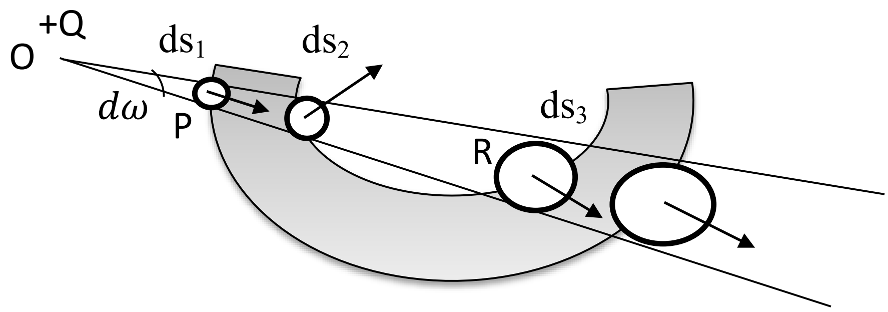
$$Q_E = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[Q_1 + Q_2 + Q_3 + ----Q_1{}^1 - Q_2{}^1 - Q_3{}^1 -\right]$$

$$\phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum Q$$

گاؤس کے تھیورم کو اس طرح بھی بیان کیا جاتا ہے۔ ایک برقی میدان میں کھینچی گئی کسی بھی شکل کی بند سطح پر مجموعی عمودی امالہ سطح کے اندر کے مجموعی بھرن کا $\frac{1}{\varepsilon_0}$ گنا ہوتا ہے۔

ii. نقطہ P کو گھیری ہوئی بند سطح کے بہر پر

فرض کرو کہ ایک یکساں مستاوی السموت واسطے میں ایک نقطوی بھرن q+ کو 'O' پر رکھا ہوا ہے۔ q کو گھیری ہوئی کھولی سطح پر نقطے S, R, Q, P کو گھیرے ہوئے چھوٹے عنصر کا رقبہ ds_4, ds_3, ds_2, ds_1 ہیں۔ اگر برقی نفوذ (Electric Flux) سطح سے باہر نکلتے ہوں تو مثبت اور اگر سطح میں اندر جاتے ہوں تو منفی نفوذ ہوگا۔ لٰہذا رقبہ ds_2 اور ds_4 کے ذریعے برقی نفوذ مثبت اور رقبہ ds_1 اور ds_3 پر منفی نفوذ ہوگا۔



شکل (3.8)

تب نقطہ P پر رقبہ کے چھوٹے عنصر ds_1 پر برقی نفوذ $ds_1 = \left(-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right) d\omega$

نقطہ Q پر رقبہ ds_2 پر برقی نفوذ $ds_2 = \left(\frac{+Q}{4\pi\varepsilon_0}\right) d\omega$

نقطہ R رقبہ ds_3 پر برقی نفوذ $ds_3 = \left(\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\right) d\omega$

اور نقطہ S رقبہ ds_4 پر برقی نفوذ $ds_4 = \left(\frac{+Q}{4\pi\varepsilon_0}\right) d\omega$

لٰہذا پوری کھولی کھلا سطح پر مجموعی برقی نفوذ ہوگا۔

$$ds = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}d\omega + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}d\omega - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}d\omega + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}d\omega = 0$$

اس سطح پر برقی میدان کی قیمت صفر ہوتی ہے۔

3.10 گاؤس کا تھیورم کا تفرقی شکل (Differential form of Gauss's Law)

گاؤس تھیورم کے مطابق $\oint E.ds = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ یا

$$\varepsilon_0 \oint E.ds = Q \tag{3.17}$$

ایک حجم پر اگر بھرن کی تقسیم یکساں ہو تو مجموعی بھرن Q+ ہوگا۔

$$Q = \iiint \rho dv \tag{3.18}$$

مساوات(3.17)اور(3.18)

$$\varepsilon_0 \oint E.ds = \iiint \rho dv \tag{3.19}$$

مسئلہ غیر مرکوزیت(Divergence Theorem)مطابق

$$\oint_s E.ds = \iiint div\, Edv \tag{3.20}$$

مساوات(3.20)کو مساوات(3.19)میں درج کیا جائے۔تب

$$\varepsilon_0 \iiint div\, Edv = \iiint \rho dv \tag{3.21}$$

مساوات(3.21)کسی بھی اختیاری حجم(Arbitrary Volume)کے لیے درست ہے۔لہٰذا تکمیلی کے برابر ہونا چاہیے۔

تب یہ ہے کہ

$$\varepsilon_0 divE = \rho\ (or) div\ E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} (or) \Longrightarrow \delta.E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{3.22}$$

خلا میں $D = \varepsilon_0 E\ (or) E = \frac{D}{\varepsilon_0}$

$$div\ D = \rho\ (or) \Longrightarrow \delta.D = \rho \tag{3.23}$$

مساوات(3.22)گاؤس تھیورم کا تفریقی شکل ہے۔

3.11 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال1

دوαذرات فضا میں ایک دوسرے سے $10^{-13}m$ کے فاصلے میں ہیں۔ان پر کتنی قوت دفع عائد ہوتی ہے۔

حل: کیوں کہ αذرہ دو پروٹان اور دو نیوٹران پر مشتمل ہوتا ہے اس لیے اس پر برقی بار $2 \times 1.6 \times 10^{-19} C$ ہوگا۔

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$$F = \frac{9\times10^9(+2\times1.6\times10^{-19})(+2\times1.6\times10^{-19})}{(10^{-13})^2} = 92.16 \times 10^{-3} N$$

حل شدہ مثال 2

چار الکٹران کو خارج کیا ہوا کلورائیڈ کا رواں $2NC^{-1}$ حدت والے برقی میدان میں رکھا ہوا ہو تو اس پر کتنی قوت عائد ہوگی۔

حل: $F = Eq$

$$F = E4e$$
$$F = 2 \times 4 \times 1.6 \times 10^{-19} = 1.28 \times 10^{-18} N$$

کلورائیڈ کے روان پر $1.28 \times 10^{-18} N$ کی قوت میدان کی سمت میں عائد ہوتی ہے کیوں کہ یہ مثبت رواں ہے۔

حل شدہ مثال 3

1μ کا برقی بار ایک برقی میدان میں $2 \times 10^{-3} N$ کی قوت سے متاثر ہوتا ہے۔ میدان کی حدت معلوم کیجیے۔

حل:

$$E = \frac{F}{q}$$
$$E = \frac{2\times10^{-3}}{1\times10^{-6}} = 2 \times 10^{3} NC^{-1}$$

حل شدہ مثال 4

$5\mu c$ اور $8\mu c$ کے دو برقی بار فضا میں ایک دوسرے 0.4m کے فاصلے پر ہیں ان دونوں کے وسطی نقطے پر میدان کی حدت معلوم کیجیے جب کہ۔

a) دونوں برقی بار مثبت ہوں

b) جب کہ بڑا برقی بار منفی اور چھوٹا مثبت ہوں۔

حل: مجموعی میدان دو برقی باروں سے بننے والے میدانوں کا سمتی مجموعہ ہوگا اور یہ سمیتے ایک ہی خط مستقیم ہی ہوں گے پہلی صورت میں یہ دو سمیتے ایک دوسرے کے مخالف سمت میں ہوں گے اور دوسری صورت میں سمیتے ایک ہی سمت میں ہوں گے۔ لہٰذا

(a

$$E = E_1 - E_2$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{8\times10^{-6}}{(0.2)^2} - \frac{5\times10^{-6}}{(0.2)^2}\right]$$
$$= 9 \times 10^{9} \times \frac{10^{-6}}{0.04}(8-5)$$
$$= \frac{9\times3}{4} \times 10^{9} \times 10^{-6} \times 10^{2} \Longrightarrow E = 6.75 \times 10^{5} NC^{-1}$$

(b

$$E = E_1 - E_2$$
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{8\times10^{-6}}{[0.2]^2} - \frac{(-5\times10^{-6})}{(0.2)^2}\right]$$
$$= 9 \times 10^{9} \times \frac{10^{-6}}{0.04}(8+5)$$
$$E = \frac{9\times13}{4} \times 10^{9} \times 10^{-6} \times 10^{2} \Longrightarrow E = 29.25 \times 10^{5} NC^{-1}$$

حل شدہ مثال 5

گاؤس تھیورم کی مدد سے کولم کے کلیے کو اخذ کیجیے۔

حل: فرض کیجیے کہ فضا میں ایک نقطی برقی بار q ہے جو اپنے اطراف ایک برقی میدان بناتا ہے۔ ایک مشاہدے کا نقطہ اس نقطی برقی بار سے 'r' کے فاصلے پر موجود ہے۔ جہاں برقی میدان کی حدت مطلوب ہے۔

گاؤس کے تھیورم کے لیے ہم ایک کروی سطح کا انتخاب کریں گے جس کا مرکز برقی بار q ہے اور نصف قطر 'r' ہے۔ اس کروی سطح پر برقی میدان کی مدت ہر جگہ یکساں ہوتی ہے۔ اور یہ کروی سطح کے انتصابا رہتی ہے۔ چنانچہ گاؤس کے کلیے کی رو سے

$$\frac{q}{\varepsilon_0} = \oint \vec{E}.\overrightarrow{ds}$$

کیوں کہ برقی میدان اس کروی سطح پر یکساں ہے۔ $\frac{q}{\varepsilon_0} = E \oint_s \ ds$

یعنی $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$

برقی سکونیات $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$

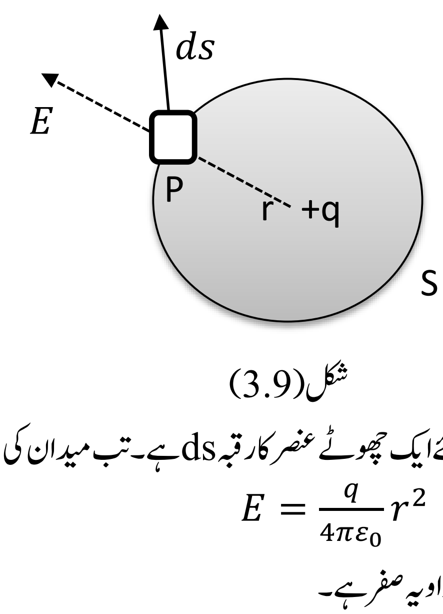
اگر اس کروی گاسیائی سطح پر اگر ایک امتحان برقی بار q_0 رکھا جائے تو اس پر میدان کی جانب سے عائد ہونے والی قوت اس طرح ہو گی۔

$$F = Eq_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}$$

یہ کولم کا کلیہ ہے۔

حل شدہ مثال 6

ایک نقطی برقی بار q کروی کے مرکز θ پر رکھا ہے اور نصف فطر 'r' ہے۔ کروی سطح پر برقی میدان کی حدت ہر جگہ یکساں رہتی ہے اور یہ کروی سطح کے انتصابا رہتی ہے۔ کروی سطح پر برقی میدان کی نفوذ معلوم کیجیے۔



شکل(3.9)

حل: فرض کرو کہ کروی کو گھیرے ہوئے ایک چھوٹے عنصر کا رقبہ ds ہے۔ تب میدان کی سمت میں E کی قیمت ہو گی۔

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}r^2$$

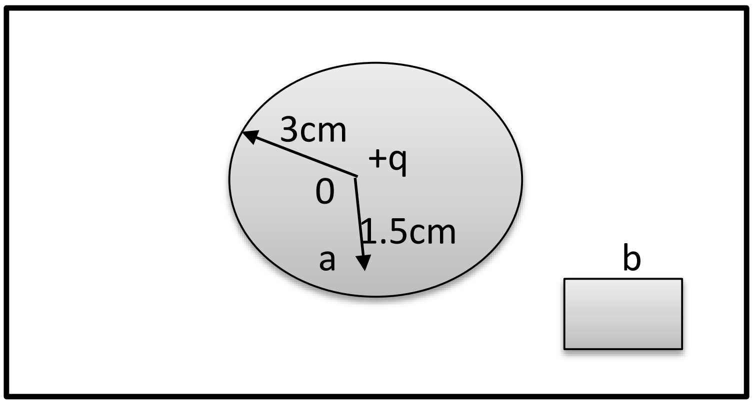
جہاں E اور ΔS کے درمیان زاویہ صفر ہے۔

لہٰذا $\Delta\emptyset = E.\Delta S = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\Delta s$

$$\phi = \sum_1 \ \Delta\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sum \Delta S$$
$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

حل شدہ مثال 7

ایک برقی بار $q = 2.0 \times 10^7 C$ کو کروی کے مرکز پر رکھا ہے اور دھات کا ٹکڑا میں اسفیریکل جوف سے 3cm کے فاصلے پر ہیں۔ شکل(3.10) سے a اور b پر برقی حدت کو معلوم کیجیے۔



شکل(3.10)

حل:

(i). فرض کیجیے کہ برمائے ہوئے کروی خول کا نصف قطر 3cm ہے اور اس کے اندر مشاہدے کا نقطہ مرکز سے 1.5cm کے فاصلے پر ہے۔ (گاسیائی اسفیریکل جوف سطح کے اندر کوئی برقی بار گھرا ہوا نہیں ہے)۔

$$E \times 4\pi(0.015)^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q}{(0.015)^2}$$
$$E = (9 \times 10^9) \times \frac{2.0\times10^{-7}}{(0.015)^2} \Rightarrow E = 8 \times 10^5 N/C$$

ii. گاسیائی اسفیریکل جوف سطح کے اندر کوئی برقی بار گھرا ہوا نہیں ہے۔ لٰہذا اس اندرونی b نقطے پر برقی میدان کی حدت $(E = 0)$ صفر ہوگی۔

حل شدہ مثال8

کسی خطی میں برقی میدان پر فاصلہ r کے ساتھ بیرونی سطح پر مختلف ہوتے ہے $E = 250\ {}^{rv}/_{m^2}$ کروی کے مرکز سے 0.2mm کے دائرے میں برقی بار کو معلوم کیجیے۔

حل: کروی کے ذریعہ برقی نفوذ $\phi = \oint E.ds = E_{surface} \times 4\pi a^2$

کروی کے سطح پر برقی بار 'q' ہے۔تب گاؤس تھیورم کے مطابق

$$\phi = \frac{q}{\varepsilon_0} (or) q = \phi \varepsilon_0$$

$$q = E_{surface} \times 4\pi a^2 \times \varepsilon_0$$

$$= 4\pi\varepsilon_0 E_{surface} \times (a^2)$$

یہاں $E_{Surface} = 250 \, {}^{rv}/_{m^2}$

$$E_{surface} = 250 \times (0.2) = 50 \, {}^{v}/_{m^2}$$

$$q = \frac{1}{9\times10^9} \times 50 \times (0.2)^2 \Longrightarrow q = 2.22 \times 10^{-10} Coulum$$

3.12 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- برقی سکونیاتی قوت اور مقناطیسی قوت کی مقداریں سے مادے کی خصوصیات کا پتہ چلتا ہے۔
- برقی بار دو قسم کے ہوتے ہیں۔ مثبت اور منفی۔
- مشابہ برقی بار ایک دوسرے کو دفع کرتے ہیں اور غیر مشابہ برقی بار ایک دوسرے کو کشش کرتے ہیں۔
- کسی مادے میں دو نقطی برقی بار کچھ فاصلے سے رکھے ہوئے ہوں تو ان کے درمیان عائد ہونے والی قوت کولم کے کلیے سے معلوم کی جا سکتی ہے۔ $F_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$
- کسی علاقے میں برقی میدان کی موجودگی کا اندازہ وہاں پر ہونے والے برقی اثرات کے ذریعہ کیا جا سکتا ہے۔ کسی مقام پر رکھے گئے ایک کولم مثبت برقی بار پر عائد ہونے والی قوت اس مقام پر برقی میدان کی حدت ہوتی ہے۔ برقی میدان کی حدت کے لیے SI اکائی NC^{-1} یا Vm^{-1} دونوں مروج ہیں۔
- برقی خطوط قوت کے کسی نقطے پر گرایا گیا مماس برقی میدان کی سمت کو ظاہر کرتا ہے۔ برقی خطوط قوت کا مکمل طور پر بند ہونا ضروری نہیں۔
- دی گئی سطح پر برقی میدان کا نفوذ اس سطح پر برقی میدان کا سطح تکمیل ہوتا ہے۔یعنی $\phi_E = \int_s E.ds$
- گاؤس (Gauss) کے کلیے کے مطابق کسی بند سطح پر لیا گیا برقی نفوذ اس سطح کے اندر گھرے ہوئے برقی بار کا $\frac{1}{\varepsilon_0}$ گنا ہوتا ہے۔

3.13 کلیدی الفاظ (Keywords)

- بقائے برقی بار: الکٹران یا برقی بار نہ ہی پیدا کیا جا سکتا ہے اور نہ ہی فنا کیا جا سکتا ہے۔
- برقی میدان: برقی بار کے اطراف کا علاقہ جہاں اگر دوسرا برقی بار رکھا جائے تو اس پر قوت عائد ہوتی ہے۔
- ہموار برقی میدان: جس میں ہر نقطے پر میدان کی حدت اور سمت یکساں رہتی ہے۔

- غیر ہموار برقی میدان: ایسا میدان جس میں میدان کی حدت یا سمت یا دونوں مقام کے لحاظ سے بدلتے ہوں۔
- وولٹ(Volt): ایک وولٹ برقی قول کی وہ قدار ہے جہاں پر 1 کولم برقی بار کو لا متناہی سے یہاں لانے کے لیے ایک جول کا کام واقع ہوتا ہو۔

3.14 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

3.14.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. اگر کوئی جسم مثبت بار سے بر قایا جائے تو اس کے وزن میں کیا کوئی تبدیلی آتی ہے۔
2. خطوط قوت پر تیر کا نشان بنایا جاتا ہے۔ وہ کس لیے۔
3. برقی میدان کی حدت E=________

a) Fq_0　b) $\frac{q_0}{F}$　c) $\frac{F}{q_0}$　d) اس میں سے کوئی بھی نہیں

4. برقی میدان کی حدت کی SI اکائی________ ہے۔

a) N/C　b) NC　c) C/N　d) اس میں سے کوئی بھی نہیں

5. برقی میدان سے کیا مراد ہے؟
6. برقی نفوذ کی SI اکائی__________ ہے۔
7. برقی نفوذ سے کیا مراد ہے؟
8. گاس کا کلیہ کو بیان کریں۔
9. $\int E.ds$ کی قیمت________ ہوتی ہے۔

a) $q\varepsilon_0$　b) q/ε_0　c) ε_0/q　d) اس میں سے کوئی بھی نہیں

10. بقائے برقی بار سے کیا مراد ہے؟

3.14.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. کولم کا برقی سکونیت والا عکسی مربعوں کا کلیہ بیان کیجیے اور سمجھائیے۔
2. کسی مقام پر برقی میدان کی حدت کی تعریف لکھیئے۔ نقطی برقی بار کی وجہ سے برقی میدان کی حدت کا ضابطہ اخذ کیجیے۔
3. ان کی تعریف لکھیے۔

a). برقی میدان E کی حدت　b). دونوں نقاط کے درمیان تفاوتِ قوں ان کے درمیان رشتے کو اخذ کیجیے۔

4. برقی نفوذ کی تعریف لکھیئے۔ کیا یہ سمتیہ ہے یا میزانیہ۔

5. برقی سکونیات کا گاؤس کا کلیہ لکھیئے اور اس کی اہمیت لکھیے۔

3.14.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. برقی سکونیات کے کولم کے کلیے کو بیان کیجیے اور سمجھائیے اس کلیے کی مدد سے برقی بار کی تعریف لکھیئے اور برقی میدان کی حدت کی تعریف کیجیے۔
2. برقی نفوذ کی تعریف لکھیے، برقی سکونیات کا گاؤس کا کلیہ بیان کیجیے اور گاؤس کے کلیے کی مدد سے کولم کے کلیے کو اخذ کیجیے۔
3. برقی میدان، میدان کی حدت کی تعریفیں لکھیئے اور برقی بار کی وجہ سے برقی میدان کی حدت کا ضابطہ اخذ کیجیے۔
4. گاؤس کے کلیے کو بیان کریں، اور گاؤس کے کلیئے کی مدد سے کولم کے کلیئے کو اخذ کیجیے۔

3.14.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. $2\mu c$ والے برقی بار پر میدان کی جانب سے اگر 3×10^{-3}N کی قوت عائد ہوتی ہے تو بتائیے وہاں میدان کی حدت کتنی ہے۔
2. 2C کے دو یکساں برقی بار فضا میں 2Km کے فاصلے پر ہیں۔ ان کے درمیان قوت معلوم کیجیے۔
3. $2\mu c$ اور $1\mu c$ کے دو برقی بار ایک دوسرے سے 10cm کی دوری پر رکھے ہوئے ہیں ان دونوں کے درمیان قوت معلوم کیجیے۔
4. کسی برقی میدان میں رکھے ہوئے 2+ مائیکرو کولم برقی بھرن پر عمل پیرا قوت 8×10^{-4} نیوٹن ہے۔ برقی میدان کی حدت کی مقدار معلوم کیجیے۔
5. 3.0×10^{-6} .. کو لوم کا ایک نقطوی بھرن ایک دوسرے 1.5×10^{-16} کو لوم سے نقطوی بھرن سے 12cm کے فاصلے پر رکھا ہوا ہے۔ ہر بھرن پر عمل کرنے والی قوت کی مقدار اور اس کی سمت معلوم کیجیے۔

3.15 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

---

1. Duffin, W J. Electricity and Magnetism. Cottingham: W.J. Duffin, 2001.
2. Gaur, R.K. &Gupta, S.L.Engineering Physics.Dhanpat Rai Publication.
3. Purcell, Edward M, and David J. Morin. Electricity and Magnetism. 2013.

اکائی 4۔ گاؤس تھیورم کا اطلاق

(Application of Gauss's Theorem)

اکائی کے اجزا

4.10.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات

4.11 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں

4.0 تمہید (Introduction)

اب تک ہم نے برقی میدان کی حدت کی قیمت کی تخمین کے لیے ایسی مثالیں لیں جس میں ایک دو یا کئی نقطی برقی بار موجود تھے۔ان کی وجہ سے بننے والے میدان کی حدت کو معلوم کرنے کے لیے ہم نے کولم کا ضابطہ اور امتزاج کے کلیے کا استعمال کیا۔ لیکن کچھ مثالیں ایسی بھی ہوسکتی ہیں جن میں برقی بار کسی نقطے پر نہیں پایا جاتا۔ مثلاً ایک لمبے تار میں برقی بار یکساں طور پر پھیلا ہوا ہو۔اس صورت میں خطی برقی کثافت (Linear Charge Density) کو معلوم کیا جاتا ہے۔ کسی سطح پر برقی بار پھیلا ہوا ہوتا ہے۔اس صورت میں سطحی برقی کثافت (Surface Charge Density) کو معلوم کیا جاتا ہے۔اسی طرح بعض غیر موصل اجسام میں برقی باران کے حجم میں پھیلا ہوا ہوتا ہے۔اس صورت میں حجمی برقی کثافت (Volume Charge Density) کو معلوم کیا جاتا ہے۔

i. خطی برقی کثافت $\lambda = \frac{dq}{dl}$ کولمب فی میٹر

ii. سطح برقی کثافت $\sigma = \frac{dq}{ds}$ کولمب فی مربع میٹر

iii. حجمی برقی کثافت $\rho = \frac{dq}{dv}$ کولمب فی مکعب میٹر

4.1 مقاصد (Objectives)

یہ اکائی کسی برقائے موصل کے قریب برقی میدان کی حدت معلوم کرنے میں مدد دیتی ہے۔اس کے مطالعے کے بعد آپ:

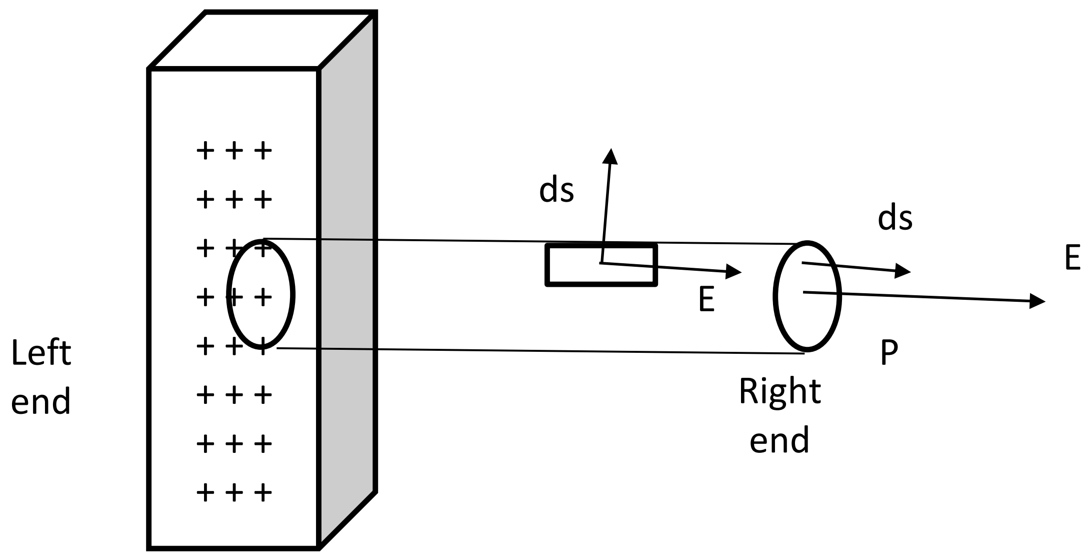
- برقائے استوانی موصل کے قریب برقی میدان کی حدت معلوم کر سکیں گے۔
- گاؤس کے کلیہ اطلاق سے کسی برقائی چادر کی لا متناہی تختی کے قریب برقی میدان کی حدت کو محسوب کریں گے۔
- طویل برقائے ہوئے لا متناہی خطی تار کے قریب برقی میدان کو محسوب کر سکیں گے۔
- برقائے موصل کی سطح پر میکانی قوت یا زور، برقی سکونی دباؤ کو معلوم کر سکیں گے۔
- برقائے ہوئے کروی خول کی وجہ سے برقی میدان کو محسوب کر سکیں گے۔
- گاؤس کے کلیئے کی مدد سے برقائے موصل کے قریب برقی میدان کی حدت معلوم کر سکیں گے۔

4.2 لا متناہی وسعت والی مستوی سطح کے قریب برقی میدان کی حدت

(Electric Field Intensity of Infinite Plane Sheet Surface)

ایک لا متناہی وسعت والی مستوی ہموار طور پر برقائی ہوئی ہے اور اس کی سطحی برقی کثافت σ ہے۔اس سطح سے برقی خطوط قوت سطح

کے دونوں جانب انتصاباً باہر نکلتے ہیں اور ہم کو اس سطح کے قریب r کے فاصلے پر نقطہ P پر برقی میدان کی حدت معلوم کرنا ہے۔ کیوں کہ یہ خطوط قوت آپس میں متوازی ہیں اس لیے ہم گاسیائی سطح کے لیے ایک استوانے کا انتخاب کریں گے جس کا طول 2r اس سطح پر انتصاباً ہے اور اس استوانے کے وسطہ سے یہ اوسط گزرتی ہے۔ یہ استوانے کی سطح تین حصوں پر مشتمل ہے۔ دو دائروی سطحیں جن سے خطوط قوت گزرتی ہیں۔ اس سطحوں پر برقی نفوذ بنتا ہے اور ایک منحنی سطح جس میں کوئی بھی خط قوت نہ ہی داخل ہوتی ہے اور نہ ہی خارج ہوتی ہے۔ برقی قوت چوں کہ، منحنی سطح کے عموداً ہے اس لیے مستطیلی متوازی سطوح کے بازوں پر عمودی برقی امالہ صفر ہوتا ہے۔



شکل(4.1)

گاؤس تھیورم کو استعمال کرنے پر

$$\oint_s E.ds = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (4.1)$$

برقی امالم

$$\emptyset = \oint_{\substack{right\\ end}} E.ds + \oint_{\substack{Left\\ end}} E.ds + \oint_{\substack{Curved\\ Surface}} E.ds$$

$$\emptyset = ES + 0 + 0 \qquad (4.2)$$

مساوات(4.1)اور(4.2)سے

$$\left(\because \sigma = \frac{q}{s} \Rightarrow q = \sigma s\right) ES = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (4.3)$$

$$ES = \frac{\sigma s}{\varepsilon_0} \qquad (4.4)$$

جہاں S استوانے کے دونوں دائروی حصوں کا رقبہ ہے۔

تب

$$2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad (4.5)$$

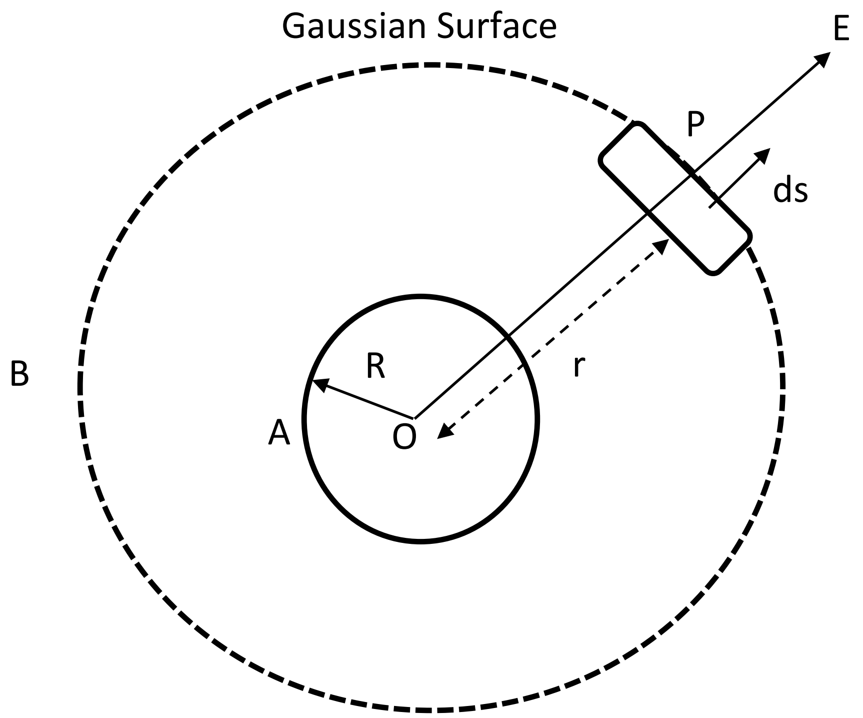
لاتناہی وسعت والی برقائی سطح کے قریب برقی میدان کی حدت $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ ہوتی ہے۔

برقی میدان اس سطح کی دونوں جانب پایا جاتا ہے۔اور اس کی حدت فاصلے کے لحاظ سے تبدیل نہیں ہوتی یہ میدان ہموار ہوتا ہے۔

البتہ اگر اس سطح کی وسعت لاتناہی نہ ہو تو اس سطح کے کناروں پر میدان غیر ہموار ہوتا ہے۔

4.3 برقائے ہوئے کروی خول کی وجہ سے برقی میدان کی حدت

(Conducting of Hallow Sphere of Electric Field Intensity)



شکل(4.2)

فرض کیجیے کہ ایک یکساں برقائے کروی A کا بھرن q ہے اور اس کے باہر ایک نقطہ P ہے فرض کرو کہ کرے کا نصف قطر R ہے۔ برقائے کروی A کے گرد ایک ہم مرکزی گاؤسین سطح B کھینچے جو نقطہ P سے گزرتی ہو جیسا کہ شکل(4.2) میں بتلایا گیا ہے اور r برقائے کروی کے مرکز O سے نقطہ P تک کا فاصلہ ہے۔ فرض کرو کہ اس کروی کے کسی نقطے پر بھی برقی میدان کی حدت 'E' ہے جو سطح کے ہر نقطے پر سطح کے علی القوائم ہے۔

اب ہم اس برقائے ہوئے کروی خول کی وجہ سے بننے والے میدان کی حدت اور قوت تین مختلف مقامات پر معلوم کریں گے۔

خول کے باہر، خول کی سطح پر اور خول کے اندر

4.3.1 خول کے باہر برقی میدان کی حدت

(Eclectic Field Intensity in Out Side of Hallow Sphere)

کروی کی سطح کا مجموعی رقبہ $4\pi r^2$ ہوگا۔

گاؤسین سطح پر مجموعی عمودی برقی امالہ ہوگا۔ $\phi_E = \oint E.ds = E\oint ds$

$$\phi_E = E(4\pi r^2) \tag{4.6}$$

جہاں گاؤسین سطح کے رقبہ پر نصف قطر $r = 4\pi r^2$

گاؤس تھیورم کو استعمال کرنے پر

$$\phi_E = \oint_S E.ds = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{4.7}$$

مساوات (4.6) اور (4.7) سے

فرض کیجیے کہ مشاہدے کا نقطہ خول کے باہر ہے (یعنی r>R) اور گاسیائی سطح 'r' نصف قطر والی کروی سطح ہے۔

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{4.8}$$

(خلا کے لیے) $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\varepsilon}{r^2} N/_C$

سمتیہ کی شکل میں برقی میدان کی حدت $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\hat{r}\, N/_C$ جہاں $\hat{r}$ اکائی سمتیہ ہے

کسی واسطے جس کے لیے برق گزار مستقل K ہو۔

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 K}\frac{q}{r^2}$$

کیوں کہ $\varepsilon = \varepsilon_0 K$

اگر بھرن کروی کی سطح پر یکساں مقدار میں پھیلا ہوا ہو تو $q = 4\pi R^2\sigma$ جہاں σ بھرن کی سطحی کثافت کی تعبیر ہے۔ تب

$$E = \frac{4\pi R^2\sigma}{4\pi\varepsilon_0 K r^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 K}\left(\frac{R^2}{r^2}\right) Volts/_m \tag{4.9}$$

4.3.2 خول کی سطح پر برقی میدان (Electric Field on Surface of Hallow Sphere)

اگر مشاہدے کا نقطہ خول کی سطح پر ہو یعنی r=R ہو تو

برقی میدان کی حدت اس طرح ہوگی۔

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \tag{4.10}$$

مساوات (4.10) سے یہ ظاہر ہوتا ہے یکساں طور پر برقائی کروی بیرونی نقطہ پر حدت وہی ہوتی ہے جو بھرن پر مرکوز ہونے کی

صورت میں حاصل ہوتی ہے۔

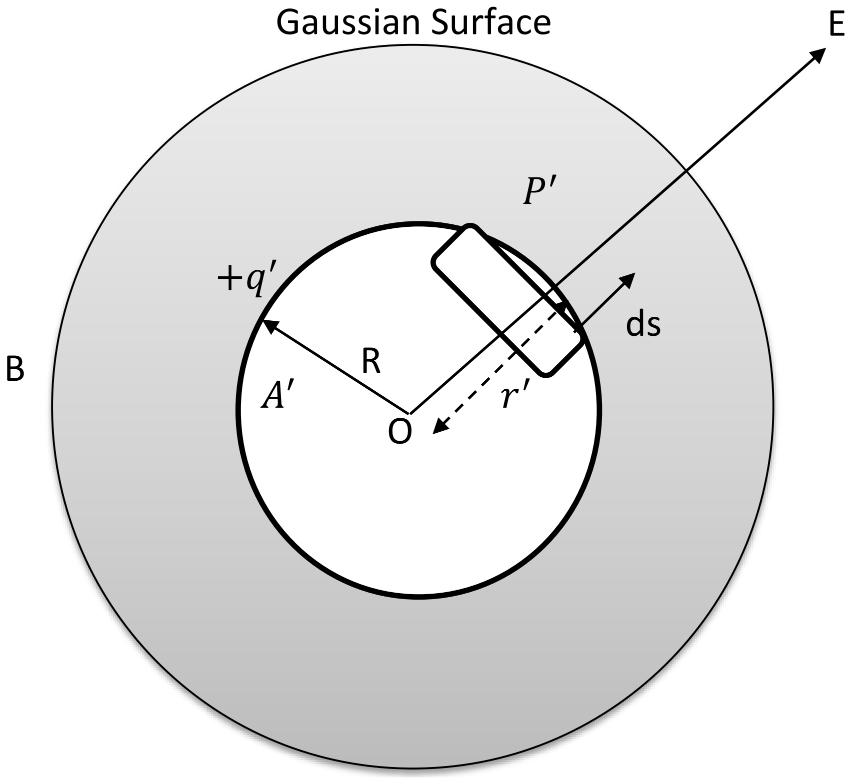
مساوات(4.9)سے

$$E = \frac{4\pi R^2 \sigma}{4\pi \varepsilon_0 K R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 K} \quad (4.11)$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 K} \quad (4.12)$$

4.3.3 جب نقطہ ‘P’ اگر کروی کے اندر واقع ہو یعنی(r<R)(Point ‘P’ in Sphere Inside)

اگر کروی خول کی سطح یکساں طور پر برقائی ہوئی ہے اور اس کے اندر کسی نقطے P پر برقی میدان کی حدت معلوم کرنا ہو تو اس کے اندرونی نقطے پر ہم ایک کروی گاسیائی سطح کو منتخب کریں گے۔



شکل(4.3)

فرض کیجیے کہ برقائے ہوئے کروی خول کا نصف قطر R ہے اور اس کے اندر مشاہدے کا نقطہ مرکز سے ‘r’ کے فاصلے پر ہے (r<R)۔ گاسیائی کروی سطح کے اندر کوئی برقی بار گھرا ہوا نہیں ہے۔ اس لیے گاؤس کے تھیورم کے مطابق ایک بند سطح کے اندر برقی بھرن صفر ہوتا ہے۔

$$\oint E.ds = 0$$

اس طرح ایک موصل کروی کے اندر برقی میدان صفر ہوتا ہے۔

بھرن کی کروی تشاکل تقسیم کی ایک دلچسپ مثال ایک یکساں بھرن کا کرہ ہے۔ یہ کرہ غیر موصل ہے اس قسم کی بھرن کی یکساں تقسیم صرف مائعات اور گیسوں جیسے برقی گزاروں میں ہو سکتی ہے۔

کروی کے مرکز سے نقطہ 'P' پر مجموعی حدت E کو یہ سمجھ کر حاصل کیا جاتا ہے۔ کہ بھرن کروی کے مرکز پر مرکوز ہے۔

مجموعی گاؤسیان سطح پر برقی امالہ ϕ_E ہوگا

$$\phi_E = \oint Eds = E\oint ds$$

$$\phi_E = E\left(4\pi r^{1^2}\right) \qquad (4.13)$$

'q' برقی بھرن اور 'r' کروی کا نصف قطر بین کروی کے اندر تمام نقاط کے لیے گاؤسیان سطح کی بھرن

$$q = \frac{4}{3}\pi r^3 \times \rho \qquad (4.14)$$

$$(\because \text{بھرن کی کثافت}\ \rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi r^3})$$

کروی کے R نصف قطر پر بھرن کی کثافت

$$\rho = \frac{\text{کل بھرن}}{\text{حجم}} = \frac{q}{{}^4\!/_3\,\pi R^3} = \frac{3q}{4\pi R^3} \qquad (4.15)$$

مساوات (4.14) اور (4.15) سے گاؤسیان سطح کی بھرن

$$q = \frac{4}{3}\pi r^{1^3} \times \frac{3q}{4\pi R^3} = q\left(\frac{r^1}{R}\right)^3 \qquad (4.16)$$

گاؤس کا تھیورم کو استعمال کرنے پر

$$\oint_E Eds = \phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (4.17)$$

مساوات (4.16) سے

$$\phi_3 = \frac{1}{\varepsilon_0} q\left(\frac{r^1}{R}\right)^3 \qquad (4.18)$$

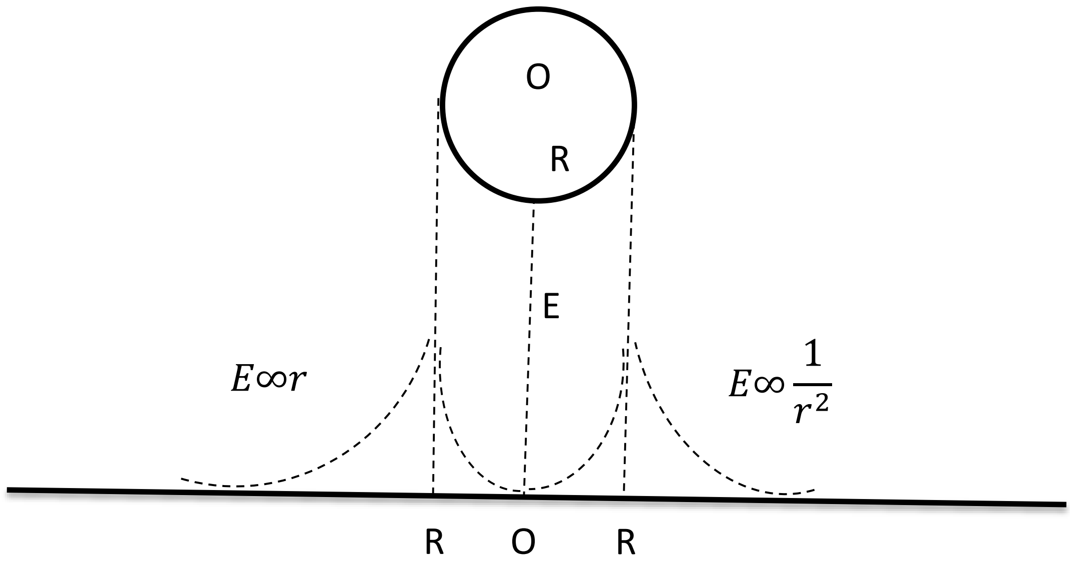
مساوات (4.13) اور (4.18) سے

$$E\left(4\pi r^{1^2}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0} q\left(\frac{r^1}{R}\right)^3 \qquad (4.19)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\varepsilon r^1}{R^3} \qquad (4.20)$$

یہ مساوات سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ یکساں برقی کروی کے مرکز سے فصلہ 'r' برقی میدان کی حدت E سے راست تناسب ہوتی ہے۔
شکل (4.4) میں فاصلہ 'r' کی تبدیلی سے برقی میدان کی حدت E کے تبدیلی کو دکھایا گیا ہیں۔

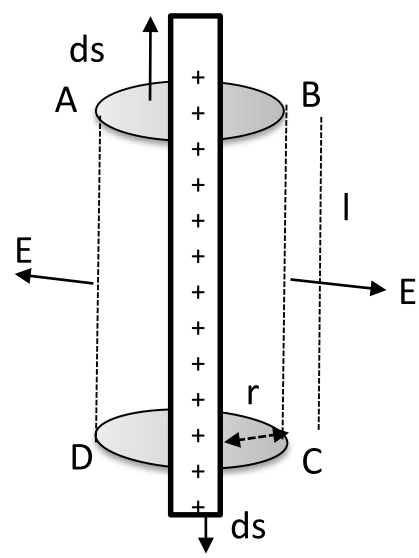
i. کروی کے باہر برقی میدان کی حدت فاصلہ کے مربع کو بالعکس تناسب ہوتی ہے۔ یہ کروی کے سطح پر اعظم ترین ہوتی ہے۔
ii. کروی خول کی سطح یکساں طور پر برقائی ہوئی ہے اور اس کے اندر کسی نقطے پر برقی میدان کی حدت (E=0) صفر ہوگی۔



شکل (4.4)

4.4 طویل برقائے ہوئے لامتناہی خطی تار کے قریب برقی میدان

(Electric Field in Infinite Linear Wire)



شکل (4.5)

فرض کیجیے کہ ایک لا تناہی طویل برقی تار کا طول L ہے اور اس پر کل برقی بھران q کو ہموار طور پر پھیلایا گیا ہے اس تار سے قریب 'r' کے فاصلے پر واقع ایک نقطہ P پر غور کیجیے۔ اس نقطہ پر میدان کی حدت معلوم کرنا ہے۔ (L>>r) کیوں کہ برقی بار طول پر پھیلا ہوا ہے اس لیے خطی برقی کثافت اس طرح ہو گی۔ $\lambda = \frac{q}{L}$

اس سوال کو حل کرنے کے لیے ہم استوانا نما گاسیائی سطح کا انتخاب کریں گے جس کا نصف قطر 'r' اور طول l ہے۔

تب گاس کے کلیے کی رو سے $\oint Eds = \frac{q}{\varepsilon_0}$

یہاں تکمیل پوری گاسیائی پر کی جاتی ہے۔ یہ استوانا نما گاسیائی سطح تین حصوں پر مشتمل ہے۔ دو دائروی شکل کی سطحیں جہاں نفوذ صفر ہے اور ایک استوانا نما سطح جس پر برقی میدان یکساں ہے۔ تب

$$\oint E.ds = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

یا

$$E.2\pi rl = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \qquad (4.21)$$

∴ لا تناہی طول کے برقائے تار کی وجہ سے برقی میدان کی حدت $E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ تار کے عمود وار ہو گی۔

مساوات (4.21) ایک لا تناہی طول کے تار کے لیے اخذ کی گئی ہے۔ لیکن یہ تخمینی ہے۔

4.5 برقائے ہوئے استوانی کی وجہ سے برقی میدان

(Electric Field of Conducting Cylinder)

فرض کرو کہ ایک یکسا برقائے دائری استوانی کا بھرن q ہے اور اس کے سطح پر ایک نقطہ P ہے فرض کرو کہ استوانی کا نصف قطر R ہے اور طول l استوانی کے اطراف واکناف کے واسطے کا برق گزار مستقل K ہے۔

برقائے استوانی کے گرد ایک گاؤسین سطح B کھینچے جو نقطہ P سے گزرتی ہو جیسا کہ شکل (4.6) میں بتلایا گیا ہے۔

اب ہم اس برقائے ہوئے استوانی کی وجہ سے بننے والے میدان کی حدت کو دو مختلف مقامات پر معلوم کریں گے۔ استوانی کے باہر اور استوانی کے اندر۔

4.5.1 استوانی کے اندر برقی میدان کی حدت (Electric Field inside the Cylinder)

برقائے استوانی کو ایک واسطے میں رکھا جاتا ہے۔ اس استوانی سے کسی فاصلے 'r' پر واقع ایک نقطہ P پر غور کیجیے۔ استوانی سطح پر E مستقل ہوتا ہے جس کی قیمت $2\pi rl$ ہوتی ہے چوں کہ سطح کا رتبہ $2\pi rl$ ہوتا ہے۔

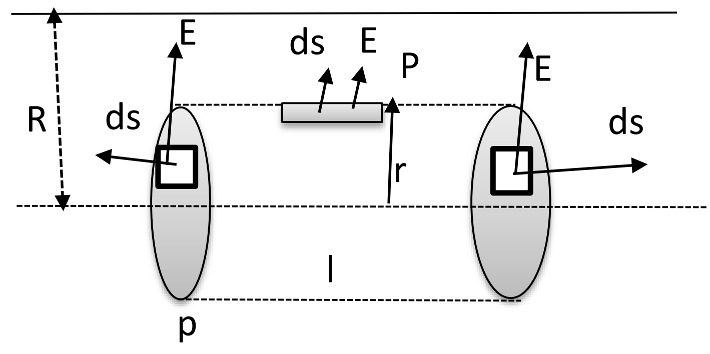
برقی میدان کی حدت کی سمت اس تصوری استوانے کے رخوں (Faces) کے متوازی ہے، اس لیے ان رخوں پر عمودی امالے کی

قیمت صفر ہوتی ہے۔

مجموعی گاؤسین سطح سے برقی امالہ ϕ_E

$$\phi_E = \oint E.ds = \oint Eds\cos\theta = \oint Eds \quad (4.22)$$

$$\phi_E = E\oint ds = E(2\pi rl) \quad (4.23)$$



شکل(4.6)

اگر بھرن استوانی کی سطح پر یکساں مقدار میں پھیلا ہوا ہو تو

بھرن=حجم x حجم کثافت

بھرن= $\pi r^2 l \times \rho$

گاؤس کے کلیہ استعمال کرنے پر $\oint E.ds = \frac{q}{\varepsilon_0}$

$$E2\pi rl = \frac{1}{\varepsilon_0}\pi r^2 l\rho \quad (4.24)$$

$$E = \frac{r\rho}{2\varepsilon_0} \quad (4.25)$$

استوانی کے سطح پر بھرن فی اکائی طول λ

بھرن کی خطی کثافت λ (بھرن فی اکائی طول) $\lambda = \frac{q}{L}$

q=استوانی پر مجموعی بھرن 'q'

$$\text{بھرن} = \pi r^2 l \times \rho = \pi r^2\rho \times \frac{q}{\pi R^2 L}$$

$$\text{بھرن} = \frac{lr^2\lambda}{R^2}$$

تب $$E(2\pi rl) = \frac{1}{\varepsilon_0} \times \left(\frac{lr^2\lambda}{R^2}\right)$$

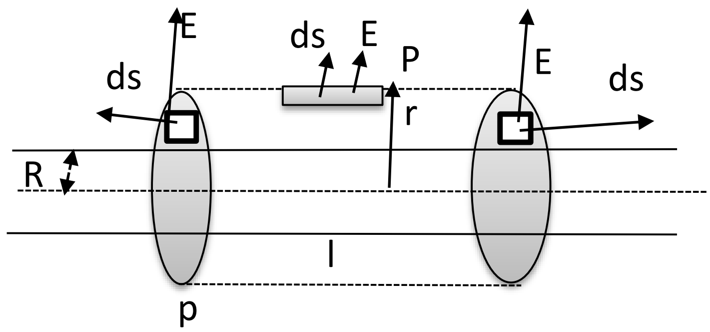
$$E = \frac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 R^2} \qquad (4.26)$$

یہ مساوات سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ استوانی سے ایک نقطہ P کسی فاصلے 'r' اور استوانی کے اندر میدان کی حدت راست تناسب ہوتا ہے۔

4.5.2 استوانی کے باہر برقی میدان کی حدت (Electric Field outside the Cylinder)

فرض کیجیے کہ مشاہدے کا نقطہ استوانی کے باہر ہے اور گاسیائی سطح 'r' نصف قطر والی استوانی سطح ہے۔

گاسیائی سطح پر مجموعی امالہ



شکل (4.7)

$$\phi_E = \oint E.ds = E.ds \qquad (4.27)$$

$$\phi_E = E(2\pi rl) \qquad (4.28)$$

مجموعی عمودی برقی امالہ بھرن q

$$q = \pi R^2 l \times \rho \qquad (4.29)$$

گاؤس کے تھیورم کو استعمال کرنے پر

$$E(2\pi rl) = \frac{1}{\varepsilon_0} \times (\pi R^2 l\rho) \qquad (4.30)$$

$$E = \frac{R^2\rho}{2\varepsilon_0 r} \qquad (4.31)$$

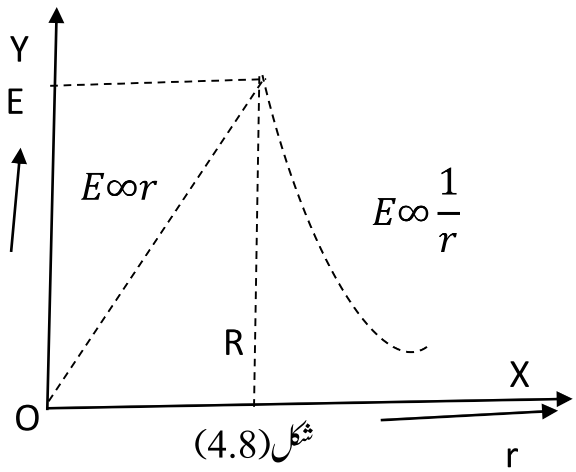
یہ مساوات سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ برقی میدان کی حدت E استوانی کے محور سے استوانی کے باہر نقطہ P کا فصلہ مربع کا نصف قطر R کو راست تناسب اور استوانی کے محور سے نقطہ P کا فصلہ کا نصف قطر r کو بالعکس تناسب ہوتی ہے۔ ایک ایکسا برقی استوانی کے محور سے فاصلہ 'r' کے ساتھ ساتھ برقی میدان کی حدت 'E' کی تبدیلی کو شکل (4.8) میں دیکھا گیا۔

استوانی کے سطح پر بھرن فی اکائی طول:

بھرن کی خطی کثافت λ (بھرن فی اکائی طول) $\lambda = \frac{q}{L}$

$$\rho = \frac{q}{\pi R^2 L} = \frac{\lambda}{\pi R^2}$$

$$E = \frac{R^2}{2\varepsilon_0 r} \times \frac{\lambda}{\pi R^2}$$
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$



شکل(4.8)

4.6 برقائے موصل کی سطح پر میکانی قوت یازور۔ برق سکونی دباؤ

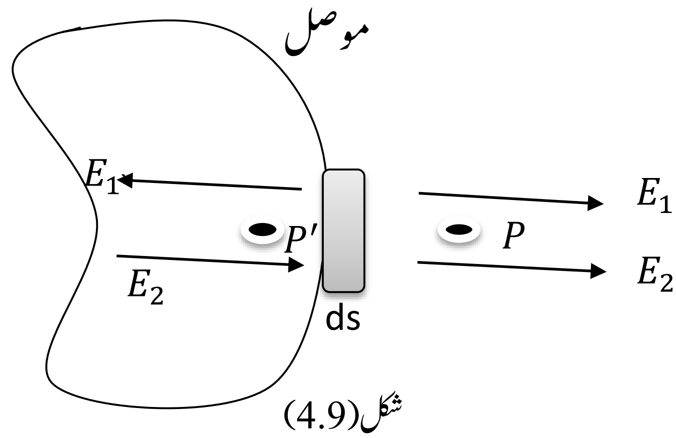
(Mechanical Force on Conductor-Electrostatic Pressure)

کسی موصل کو ایک ایسے واسطے میں رکھا گیا ہے۔ جس کا برق گزار مستقل K ہے۔ فرض کرو کہ موصل پر بھرن کی کثافت σ ہے۔
AB موصل کا ایک چھوٹا رقبہ اس کے اندر اور باہر اور بہت ہی قریبی فاصلوں پر دو نقاط P اور P^1 واقع ہیں۔ سطح AB کا رقبہ ds ہے اور اس کو مستوی تصور کیا جاتا ہے (کیوں کہ AB بہت چھوٹا ہے)۔

شکل(4.9) 'P' پر برق گزار میدان کی حدت 'E' جزوئی طور پر ds پر کے بھرن اور جزوی طور پر ماباقی موصل پر کے بھرن کے وجود سے ہوگی۔ فرض کرو کہ مدتوں کے یہ اجزا E_1 اور E_2 ہیں۔

تب 'P' پر حاصل حدت E ہوگی

$$E = E_1 + E_2 \qquad (4.32)$$



شکل(4.9)

Q(موصل کے اندر) پر حدت صفر ہوتی ہے۔ کیوں کہ موصل کے اندر کوئی بھرن نہیں ہوتا۔

اس طرح $E=E_2-E_1$

یا $0=E_2-E_1$

$$E_1 = E_2 \tag{4.33}$$

مساوات (4.33) کو (4.32) میں درج کرنے پر

$$E_1 = E_2 = \frac{E}{2} \tag{4.34}$$

کولم کے تھیورم کے رو سے $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

مساوات (4.34) میں E کو درج کرنے پر

$$E_1 = E_2 = \frac{E}{2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\ {Newton}/_{Coulomb}$$

یہ مساوات 'q' پر کی حاصل حدت E ہوگی۔

اب ہم فرض کریں گے کہ رقبہ ds موصل سے جدا ہو گیا ہے۔ تب اس کا وقوع مابقی موصل پر کے بھرن کے میدان میں ہوگا۔ اس مابقی حصہ کی وجہ سے ہونے والی حدت ہوگی۔

$$E_1 = E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{4.35}$$

اگر 'P' کے قریب کے ابتدائی رقبہ 'ds' پر بھرن σds ہو (جب کہ σ بھرن کی کثافت ہے) تو اس کی وجہ سے عمل پیرا میکانی قوت یا زور ہوگا۔ قوت = بھرن x برقی حدت اس لیے قوت

$$F = E_2 \times \sigma ds \tag{4.36}$$

$$F = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \times \sigma ds \tag{4.37}$$

$$F = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} ds\ newton \tag{4.38}$$

اس طرح اکائی رقبے پر باہر کی جانب عمل پرا میکانی قوت یا سطح پر عمل کرنے والا زور ہوگا۔

$$P = \frac{F}{ds} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\frac{ds}{ds} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} {Newton}/_{m^2} \tag{4.39}$$

اس لیے میکانی قوت فی اکائی رقبہ یا زور ہوتا ہے۔

کولم کے کلیے کی رو سے $\left(\because E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \text{ یا } \sigma = \varepsilon_0 E\right)$

σ^2 ہمیشہ مثبت ہی رہتا ہے۔ اس لیے سطح کے ہر حصے پر عمل کرنے والے دباؤ کی سمت باہر کی جانب ہوتی ہے۔ للذا سطح ہی زور کے تحت رہتی

ہے یا اس پر باہر کی جانب کوئی برقی دباؤ عمل کرتا ہے۔تب

$$P = \frac{{\varepsilon_0}^2 E^2}{2\varepsilon_0} \qquad (4.40)$$

$$P = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \qquad (4.41)$$

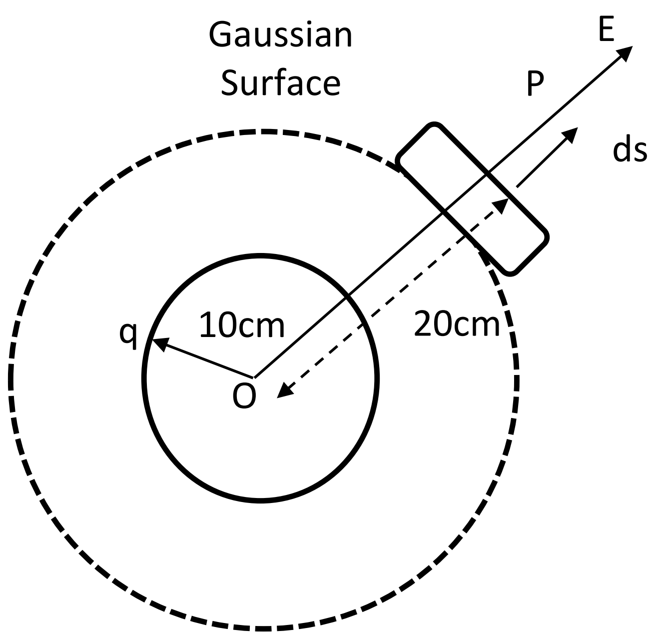
حقیقت میں اگر کسی حصے کی جدائی عمل میں نہ آتی ہو تو بھی اتنی ہی قوت عمل کرتی ہے۔موصل کے ہر حصے کے لیے یہ درست ہے خواں موصل ایک مستوئی سطح ہو یا ایک کروی خول ہو یا ٹھوس کرہ کیوں کہ ان میں ہر ایک صورت کے لیے موصل کا ایک بہت ہی چھوٹا رقبہ، مستوئی ہی تصور کیا جا سکتا ہے۔گویا ایک برقائے ہوئے موصل میں اتساع(Dilate)ہوتا ہے۔مثال کے طور پر ایک برقیا ہوا بلبلہ اس قوت کے زیر اثر متسع ہو گا۔

4.7 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال1

فرض کیجیے کہ برقائے کروی کی نصف قطر 10cm ہے اور کروی کے مرکوز سے 20cm پر برقی میدان کی حدت $1.5 \times 10^3\ {}^{N}/_{C}$ ہے۔کروی کے سطح پر برقی بھرن کو محسوب کیجیے۔

حل: شکل(4.10) میں کروی کے مرکوز سے 20cm پر گاؤسین سطح پر نقطہ P



شکل(4.10)

گاؤسین سطح پر برقی امالہ/نفوذ

گاؤسین سطح کے رقبہ $\quad \emptyset = -Ex$

جہاں "-" منفی یہ ظاہر کرتی ہے کہ نفوذ کی سمت کروی کے سطح کے اندر ہوتی ہے۔

$$\emptyset = -E \times 4\pi r^2$$
$$= -1.5 \times 10^{-2} \times 4\pi(0.2)^2$$

گاؤس کلیئے کا استعمال کرنے پر $\emptyset = \frac{q}{\varepsilon_0}$

یا $\frac{q}{\varepsilon_0} = -(1.5 \times 10^{-2}) \times 4\pi \times (0.2)^2$

$$q = -(1.5 \times 10^{-2}) \times 4\pi\varepsilon_0 \times (0.2)^2$$
$$q = \frac{-(1.5\times10^{-2})\times(0.2)^2}{9\times10^9} \Longrightarrow q = -6.67 \times 10^{-9}c$$

حل شدہ مثال2

1cm نصف قطر کا یکساں برقائے کروی کے سطح پر برقی بھرن $4 \times 10^{-8}c$ اور کھوکھلے برقی بھرن کا نصف قطر 5cm ہو تو مرکوز سے 2cm کے نصف قطر پر برقی میدان حدت کو معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیجیے کہ 'P' نقطہ پر برقی میدان کو معلوم کریں۔ اب ہم اس P نقطہ کے ذریعہ گاؤسین سطح کو کھینچئے اور اس سطح پر امالہ ہو گا۔

$$\emptyset = \oint E.ds = E\int ds = 4\pi(2 \times 10^{-2})^2 E$$

گاؤس تھیورم کو استعمال کرنے پر $\emptyset = \frac{q}{\varepsilon_0}$

$$4\pi \times (2 \times 10^{-2})^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$
$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\times(2\times10^{-2})^2} = \frac{(9\times10^9)\times(4\times10^{-8})}{4\times10^{-4}} \Longrightarrow E = 9 \times 10^5\, {}^{N}/_{C}$$

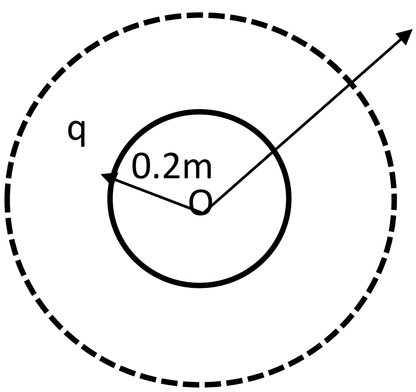
حل شدہ مثال3

'r' فصلے پر بہاہر کے سمت میں برقی میدان کی حدت $E = 250\, {}^{rv}/_{m^2}$ ہے۔ کروی کے مرکوز سے 0.2m پر نصف قطر پر برقی بھرن کو محسوب کیجیے۔

حل: برقی نفوذ $\emptyset = \oint E.ds$

$$\emptyset = E_{surface} \times 4$$

$$\boldsymbol{E = 250\, {}^{rv}/_{m^2}}$$



شکل(4.11)

کروی کے سطح پر برقی بھرن q ہو تب

گاؤس کلیئے کو استعمال کرنے پر

$$\emptyset = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \text{یا} \quad q = \emptyset\varepsilon_0$$
$$q = E_{surface} \times 4\pi a^2 \times \varepsilon_0$$
$$q = 4\pi\varepsilon_0 E_{surface} \times (a^2)$$

یہاں
$$E_{surface} = 250r \ {}^{v}/_{m^2}$$
$$q = 250 \times (0.2) = 50 \ {}^{v}/_{m^2}$$
$$q = \frac{1}{9\times10^9} \times 50 \times (0.2)^2 \Longrightarrow q = 2.22 \times 10^{-10}C$$

حل شدہ مثال 4

3grm سونے کو ویٹ کر 78 مربع سم کا ایک پتلا ورق بنایا گیا۔اس کے چھوٹے سے حصے کو کاٹ کر ایک موصل پر رکھ دیا گیا۔ موصل کے بھرن کی اس کثافت کو محسوب کیجیے جس کی وجہ سے سونے کا ورق عین اٹھنے کے قابل ہو جائے۔

حل: سونے کے ورق کو عین اٹھنے کے قابل ہونے کے لیے ضروری ہے کہ اس کا وزن موصل پر عمل پیرا بیرونی کھینچاؤ کے عین برابر ہو۔یعنی

$$mg = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$
$$\sigma^2 = \frac{3\times10^{-3}\times98}{2\times78\times10^{-4}\times8.85\times10^{-12}}$$
$$\sigma^2 = 2.13 \ {}^{Coul^2}/_{m^4} \ \sigma \Longrightarrow= 1.46 \ {}^{coul}/_{m^2}$$

حل شدہ مثال 5

جوہر کے ایک ابتدائی ماڈل میں یہ فرض کیا جاتا تھا کہ جوہر میں بار Ze کا ایک مثبت بار دار نقطہ مرکزہ ہوتا ہے، جو نصف قطر R تک منفی بار کی ہموار کثافت سے گھرا ہوتا ہے۔ جوہر مجموعی طور پر تعدیلی (Neutral) ہوتا ہے۔اس ماڈل کے لیے، مرکزے سے r فاصلہ پر برقی میدان کتنا ہوگا؟

حل: جوہر کے اس ماڈل کے نصف قطر R کی ہموار کروی بار تقسیم میں کل منفی بار Ze– ہونا لازمی ہے کیوں کہ جوہر بار Ze– کا مرکزہ + منفی بار تعدیلی ہے۔اس سے ہمیں فوراً منفی بار کثافت σ حاصل ہو جاتی ہے، کیوں کہ ضروری ہے کہ

$$\rho = -\frac{3Ze}{4\pi R^3} \quad \text{یا} \quad \frac{4\pi R^r}{3}\rho = 0 - Ze$$

اس لیے نقطہ P پر جو مرکزے سے فاصلہ r پر ہے، برقی میدان معلوم کرنے کے لیے ہم گاس کا کلیہ استعمال کرتے ہیں۔ بار کی تقسیم کے کروی تشاکل کی وجہ سے برقی میدان $\vec{E}\,(\vec{r})$ کی عددی قدر صرف نصف قطری فاصلے پر منحصر ہوگی، چاہے $\vec{r}$ کی کوئی بھی سمت ہو۔ برقی میدان کی سمت، نصف قطری سمتیہ $\vec{r}$ جو مبدے سے نقطہ P کی جانب ہے کی جانب (یا اس کے مخالف) ہوگی۔ گاس سطح کے بطور ایک کروی سطح منتخب کرنا بالکل واضح ہے، جس کا مرکز مرکزہ ہو۔ ہم دو صورتیں لیتے ہیں۔یعنی $r < R$ or $r > R$

(i) r<R: کروی سطح سے گھرا ہوا برقی فلکس $\emptyset$ ہے۔

$\emptyset = E(r) \times 4\pi r^2$ جہاں E(r)، r پر برقی میدان کی عددی قدر ہے۔

4.8 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- سیدھے لمبے تار پر λ کی خطی کثافت سے بر تایا جائے تو اس تار سے 'r' کے فاصلے پر میدان کی حدت $E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ ہوتی ہے۔
- وسیع اور مستوی سطح پر σ کی سطحی کثافت سے بر تایا جائے تو اس سطح کے قریب برقی میدان کی حدت $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ ہوتی ہے۔
- R نصف قطر والے کھوکھلے کروی خول پر σ کی سطحی کثافت سے بر تایا جائے تو اس کے مرکزہ سے r کی دوری پر میدان کی حدت $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{R^2}{r}\right)$ ہوتی ہے۔ اس کی سطح پر میدان کی حدت $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ اور خول کے اندر حدت صفر ہوتی ہے۔

4.9 کلیدی الفاظ (Keywords)

- خطی برقی کثافت (Linear Charge Density): ایک تار میں برقی باریکساں طور پر پھیلا ہوا ہو
- سطحی برقی کثافت (Surface Charge Density): سطح پر برقی بار پھیلا ہوا ہو
- حجمی برقی کثافت (Volume Charge Density): حجم میں برقی بار پھیلا ہوا ہو

4.10 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

4.10.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. برقی نفوذ منفی کب ہوتا ہے؟
2. کھوکھلے کروی بر قائے ہوئے خول کے باہر برقی میدان کی حدت کا ضابطہ۔۔۔۔۔۔۔۔ہے۔
3. سیدھے لمبے بر قائے تار کے قریب برقی میدان کی حدت کا ضابطہ۔۔۔۔۔۔ہے۔

a) $E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ b) $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ c) $E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}$ d) $E = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0 r}$

4. کھوکھلے کروی بر قائے ہوئے خول کے اندر برقی میدان کی حدت کا ضابطہ۔۔۔۔۔۔ہے۔

a) $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ b) $E = 0$ c) $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{R^2}{r}\right)$ d) اس میں سے کوئی بھی نہیں

5. لا تناہی وسعت والی بر قائی سطح کے قریب برقی میدان کی حدت۔۔۔۔۔۔ہوتی ہے۔

a) $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ b) $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ c) $E = \sigma\varepsilon_0$ d) $\sigma = {}^{E}/_{\varepsilon_0}$

6. برقی سکونیات کے گاؤس کے کلیے کو بیان کیجیے۔

7. برقی میدان کی حدت کی SI اکائی لکھیئے۔
8. برقائے ہوئے دھاتی خول کے اندر برقی میدان کی حدت۔۔۔ہوتی ہے۔

a) صفر b) ایک c) σ۔ d) اس میں سے کوئی بھی نہیں

9. برقائے موصل کی سطح پر میکانی قوت کی مساوات۔۔۔۔۔ہوتی ہے۔
10. برقی نفوذ سے کیا مراد ہے؟

4.10.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. گاؤس کے کلیے کو استعمال کر کے بتائیے کہ برقائے گئے ٹھوس کروی کے اندر برقی میدان کی حدت صفر ہوتی ہے۔
2. گاؤس کے کلیے کی مدد سے ایک سیدھے لمبے برقائے نالہ کے قریب برقی میدان کی حدت کے لیے ضابطہ اخذ کیجیے۔
3. کیا برقائے موصل کی سطح پر عمل کرنے والی قوت میکانی نوعیت کی ہوتی ہے اور اگر ایسا ہے تو اس کی کیا وجہ ہے۔
4. $P = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$ کیا مساوات سے ظاہر ہونے والے برقی سکونی دباؤ کا ضابطہ صرف کروی موصلوں کے لیے درست ہے؟
5. کسی نقطہ 'P' پر برقی میدان کی حدت کیا ہوگی جب کہ نقطہ استوانہ موصل کے اندر رہو۔
6. ایک مستوئی برقی چادر کی صورت میں کیا E کا انحصار نقطہ 'P' کو محصور کرنے والی سطح کی نوعیت پر ہوتا ہے؟ سمجھائیے۔

4.10.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. گاؤس کے کلیے کی مدد سے ایک سیدھے لمبے برقائے تار کے قریب برقی میدان کی حدت کے لیے ضابطہ اخذ کیجیے۔(اس کے لیے فرض کیجیے کہ میدان کی حدت تار کے عموداً اور تار سے مشاہدے کے نقطے کے فاصلے پر منحصر ہوتی ہے)۔
2. گاؤس کے کلئے کی مدد سے ہموار برقائی وسیع مستوی سطح کے قریب میدان کی حدت کے لیے ضابطہ اخذ کیجیے۔
3. گاؤس کے کلیے کی مدد سے ہموار برقائے گئے کھوکھلے کروی خول کے لیے برقی میدان کی حدت کے لیے ضابطہ اخذ کیجیے جب کہ مشاہدے کا نقطہ (i) خول کے باہر ہو (ii) خول کی سطح پر ہو (iii) خول کے اندر ہو۔
4. ایک مثبت بھرن والی لاتناہی برقی چادر سے کسی فاصلہ 'r' پر برقی میدان کی حدت کے لیے ایک ضابطہ اخذ کیجیے۔
5. گاؤس کے کلیے کو استعمال کرتے ہوئے یہ ثابت کیجیے کہ ایک لاتناہی خطی بھرن سے کسی فاصلے R پر برقی میدان کی حدت E ہوتی ہے۔ $E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$ جہاں λ بھرن فی اکائی طول مراد ہے۔
6. ایک برقائے موصل کی سطح کے اکائی رقبہ پر عمل کرنے والے میکانی قوت کے لیے ضابطہ اخذ کیجیے۔

4.10.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. ایک برقائے کروی خول کا نصف قطر 0.25m اور اس سطح پر برقی بھرن 0.2 مائیکرو کولوم ہو تو برقی میدان کی حدت معلوم

کیجیے۔

i. کروی خول کے اندر ii. کروی خول کے باہر iii. کروی خول کے مرکوز سے 3.0 میٹر پر

[Ans: (i) کروی خول کے اندر صفر (ii) 2.88×10^4 N/C (iii) 200 N/C]

$$\left[Hints: ii)\ E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{\varepsilon}{R^2} = (9 \times 10^9) \times \frac{0.2\times10^{-6}}{(0.25)^2}\right]$$

$$(iii) E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q}{r^2} = (9 \times 10^9) \times \frac{0.2\times10^{-6}}{(300)^2}$$

2. 2M قطر کے کروی کی برقی سطح کثافت 8+ نیانو کولوم ہے۔اس کی سطح سے 2m کے فاصلے پر میدان کی حدت کتنی ہو گی۔

(جواب 2.05 نیوٹن/کولوم)

3. فرض کیجیے کہ ایک سطح پر S=10J پر برقی میدان کی حدت E=2i+4j+7k ہے۔اس سطح کے ذریعہ برقی نفوذ کو محسوب کیجیے۔

(جواب 40 units)

$$[Hints: \phi = \sum E.ds = E.S = 2i + 4j + 7k\ (10j) = 40units]$$

4.11 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Bleaney, B I, and B Bleaney. Electricity and Magnetism. Oxford: Oxford University Press, 2013.
2. Duffin, W J. Electricity and Magnetism. Cottingham: W.J. Duffin, 2001.
3. Gaur, R.K. &Gupta, S.L.Engineering Physics.Dhanpat Rai Publication.
4. Peck, Edson R. Electricity and Magnetism. , 2013.
5. Plonsey.R&Collin.R.E.Principles and Application of Electromagnetic Field. Tata Mc Graw Hill Publication. New Delhi.
6. Purcell, Edward M, and David J. Morin. Electricity and Magnetism. , 2013.
7. Resnic.R&Halliday.D.Physics Part-I&Part-II.Wiley Eastern Pvt.Ltd.New Delhi.

اکائی 5۔ برقی قوۃ

(Electric Potential)

اکائی کے اجزا

5.0 تمہید (Introduction)

اس اکائی کے مطالعے کے بعد برقی سکونی قوۃ(Electrostatic Potential)کے تصور کو سمجھنے میں آسانی ہو گی اور اس کو استعمال کرتے ہوئے ایک نقطوی بار، برقی باروں کے نظام اور ہم قوۃ سطحیں سے برقی قوۃ کو کس طرح معلوم کیا جا سکتا ہے سمجھیں گے۔ایک طالب علم بغیر کسی کی مدد کے وہ بآسانی ان چیزوں کو سمجھنے میں دلچسپی محسوس کرے گا۔

دو ساکن برقی باروں کے درمیان کولمب قوت بھی ایک بقائی قوت ہے کیوں کہ برقی قوت اور مادی کششی قوت کے فاصلے کے مربع کے مقلوب پر منحصر ہوتے ہیں اور صرف تناسبی مستقلوں کی قدر کے لحاظ سے ہی مختلف ہیں۔ تجاذبی کشش قانون میں شامل کمیتیں، کولمب کے کلیے میں باروں سے تبدیل ہو جاتی ہیں۔اس لیے ایک تجاذبی کشش میدان میں ایک کمیت کی وضعی توانائی کی طرح، ہم ایک برقی میدان میں ایک بار کی برق، سکونی وضعی توانائی کی تعریف کر سکتے ہیں۔

5.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں ہم برقی قوۃ(Electric Potential)الکٹریک پوٹیشل کے تصور کو سمجھیں گے اور اس کو استعمال کرتے ہوئے ایک نقطوی بار(Point Charge)کی وجہ سے برقی قوۃ کو معلوم کریں گے۔

اس یونٹ کا مطالعہ کرنیکے بعد ہم برقی باروں(System of Charges)کے نظام کی وجہ سے بننے والے برقی قوۃ کو معلوم کر سکیں گے اور ہم قوۃ سطحیں(Equipotential Surfaces)کو بھی سمجھا سکیں گے۔

5.2 برقی بار کی بنیادی خاصیتیں (Basic Characteristics of Electric Charge)

ہمیں اس بات کا علم ہیکہ برقی بار دو قسم کے ہوتے ہیں یعنی مثبت اور منفی اور ان کے اثر ایک دوسرے کو منسوخ(Cancel)کرنے کی سمت میں ہوتے ہیں۔ برقی بار کی کچھ اور خصوصیات مندرجہ ذیل ہیں۔

i. برقی باروں کی جمعیت (Additive of Charges)

برقی بار کی کوئی معیاری تعریف نہیں ہے۔ اگر ایک نظام دو نقطی برقی باروں q_1اور q_2پر مشتمل ہو تو نظام کا کل برقی بار q_1اور q_2کو سادہ الجبارئی طریقہ سے جمع کر کے حاصل کیا جاتا ہے۔ یعنی برقی بار حقیقی اعداد کی طرح جمع ہوتے ہیں اور وہ میزانیہ (Scalars) ہوتے ہیں یعنی یہ مقدار تو رکھتے ہیں پر کوئی خاص سمت نہیں رکھتے۔اس طرح اگر ایک نظام میں n برقی بار ہوں جو $q_1 q_2 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots q_n$ تک ہوں تو اس نظام کا جملہ بار $(q_1 + q_2 + q_3 + - - - - + q_n)$ ہوگا اس بار کی عددی قدر تو ہوتی ہے لیکن کوئی سمت نہیں ہوتی۔ایک جسم کی کمیت ہمیشہ مثبت ہوتی ہے جب کہ بار مثبت بھی ہو سکتا ہے اور منفی بھی۔

ii. بقائے برقی بار (Charge is Conserved)

برقی باروں کو اگر ہم ذرات کی شکل میں تصور کریں تو بار کی بقا کے تصور کو سمجھنے میں آسانی ہوتی ہے۔ جب ہم دو اجسام کو رگڑتے ہیں تو ایک جسم بار کو جتنا حاصل کرتا ہے، دوسرا جسم بار کو اتنا ہی کھوتا ہے، ایک منفرد (Isolated) نظام کے اندر جو کئی برقی باردار اجسام پر مشتمل ہوتا ہے، ان اجسام کے باہم عمل کے نتیجے میں بار اپنے آپ کو دوبارہ تقسیم کر سکتے ہیں تو یہ معلوم ہوتا ہے کہ منفرد نظام کے کل بار کی ہمیشہ بقاء ہوتی ہے۔

ایک منفرد نظام کے کل بار میں کوئی بار تخلیق کرنا یا کسی بار کو فنا کرنا ممکن نہیں ہے حالانکہ کسی عمل کے دوران بار رکھنے والے ذرات تخلیق یا فنا ہو سکتے ہیں کبھی کبھی قدرت باردار ذرات کی تخلیق کرتی ہے۔ایک نیوٹران ایک پروٹان اور ایک الیکٹران میں بدل جاتا ہے۔ اس طرح تخلیق پائے پروٹان اور الیکٹران کے بار مساوی اور مخالف ہوتے ہیں اور ان کے تخلیق ہونے سے پہلے اور تخلیق ہونے کے بعد بھی کل بار صفر ہوتا ہے۔

iii. برقی بار کی کوانٹم سازی (Quantization of Charge)

تجربہ سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ تمام آزاد بار، ہمیشہ بار کی ایک بنیادی اکائی کے صحیح ضعف (Integral Multiples) ہوتے ہیں جسے سے q ظاہر کیا جاسکتا ہے۔کسی جسم پر بار ہمیشہ اس طرح $q = ne$ ہوتا ہے۔

جہاں n ہمیشہ ایک صحیح عدد (Integer) ہوتا ہے۔ بار کی بنیادی اکائی وہ بار ہے جو ایک الیکٹران یا پروٹان پر ہوتا ہے۔الیکٹران کے بار کو منفی مانا جاتا ہے اور پروٹان کے بار کو مثبت مانا جاتا ہے اور اس لیے الیکٹران کے بارے کو e– لکھا جاتا ہے اور پروٹان کے بار کو e+ لکھا جاتا ہے۔

برقی بار ہمیشہ e کا صحیح ضعف ہوتا ہے۔ بار کی کوانٹم سازی کہلاتی ہے طبیعیات میں ایسی کئی صورتیں سامنے آتی ہیں جہاں کچھ طبعی مقداریں کوانٹم سازی شدہ ہوتی ہیں۔ بار کی کوانٹم سازی سب سے پہلے انگریز ماہر تجربات فیراڈے کے برقی پاشیدگی (Electrolysis) کے تجرباتی کلیات نے تجویز کی تھی۔1912ء میں ملیکن (Millikan's) نے اسی کا تجربہ کے ذریعہ مظاہرہ کیا۔

اکائیوں کے بین الاقوامی نظام (SI نظام) میں بار کی اکائی کولمب کہلاتی اور اسے علامت C سے ظاہر کرتے ہیں۔ایک کولمب وہ بار ہے جو ایک تار سے ایک سکنڈ (1 sec) میں بہتا ہے جب کہ برقی رو ایک ایمپیئر (IA) ہو۔اس نظام میں بار کی بنیادی اکائی کی قدر

$e = 1.602 \times 10^{-19} c$ ہوتی ہے۔

5.3 برقی قوۃ (Electric Potential)

تحلیلی سمتیات کے مطابق سمتی میدان کی دو اہم خصوصیات ہوتی ہیں، بہاؤ اور گھماؤ یعنی جس کا مطلب ہے کہ سمتی میدان میں علی الترتیب بہاؤ اور گردش ہوتے رہتی ہے۔

ایسا سمتی میدان جس کے لئے خطی تکملہ صرف اختتامی نقطہ پر منحصر ہوتا ہے اور حقیقی راستہ پر منحصر نہیں ہوتا ہے۔ بقائے میدان کھلاتا ہے۔

دوسرے لفظوں میں کسی بند راستہ کے لیے بقائے میدان کا تکملہ صفر ہوتا ہے۔

$$\oint \vec{A}.\overrightarrow{dl} = 0$$

5.4 بقائے برقی میدان (Electric field is Conservatives)

برقی میدان بھی بقائے میدان کی ایک مثال ہے کیوں کہ یہ سمتی تفاعل ($\emptyset$) کا منفی تدریجی فرق (گرڈینٹ) ہوتا ہے۔

$$\vec{E} = -grad\emptyset = -\vec{\nabla}\emptyset$$

برقی میدان کا خمیدہ ہونا curl کو اس طرح لکھا جاتا ہے۔

$$Curl\vec{E} = -Curlgrad\emptyset = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\emptyset = 0$$

بقائے برقی میدان کے لیے حسب ذیل شرائط ہیں۔

i. ایسا سمتی میدان جس کے لیے خطی تکملہ صرف اختتامی نقطہ پر منحصر ہوتا ہے اور حقیقی راستہ پر منحصر نہیں ہوتا ہے۔ بقائے میدان کہلاتا ہے۔

ii. ایک بند راستے پر بقائے میدان کا خطی تکملہ صفر ہوتا ہے۔ اگر $\vec{A}$ ایک بقائے میدان ہے تب $\oint \vec{A}.\overrightarrow{dL} = 0$

iii. بقائے میدان کو ہمیشہ سمتی میدان کے تدریجی فرق (اتار چڑھاؤ کا درجہ) Gradient کے طور پر کو ظاہر کیا جاتا ہے۔

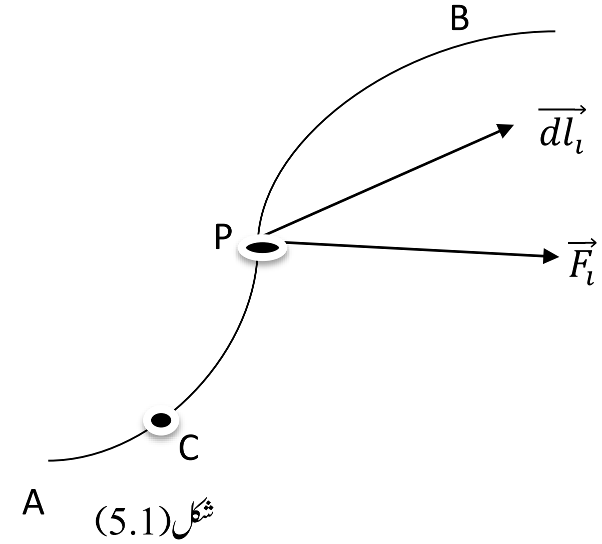
اگر $\vec{A}$ ایک بقائے میدان ہو اور $\emptyset$ اس سے متعلق سمتی میدان ہو تب $\vec{A} = \hat{\nabla}\emptyset = grad\emptyset$

iv. بقائے میدان کا خمیدہ Curl صفر ہوتا ہے۔ اگر $\vec{A}$ ایک بقائے میدان ہو تو $Curl\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$

5.5 سمتی میدان کا خطی تکملہ (Line Integral of a Vector Field)

ایک سمتی میدان F میں دو نقاط A اور B کے درمیان راستہ ACB پر غور کریں۔ اس راستے کو بہت سارے چھوٹے چھوٹے ٹکڑے $dl_1, dl_2, dl_3, \dots \dots . . dl_n$ میں اس طرح تقسیم کرتے ہیں کہ ہر ایک ٹکڑے سے متعلق سمتی میدان $F_1, F_2, F_3 - - - - F_n$ بھی ہوتا ہے۔

ہر ایک ٹکڑا یا جز $\overrightarrow{dl}$ کا ایک سمتیہ ہوتا ہے جس کی جسامت یا مقدار (Magnitudes) dl اور سمت A سے B جانے والے راستے کے متوازی ہوتا ہے۔



شکل (5.1)

غیر سمتی مقداروں کے حاصل ضرب (Scalar Product) کا مجموعہ

$$\overrightarrow{F_1}.\overrightarrow{dl_1} + \overrightarrow{F_2}.\overrightarrow{dl_2} + \overrightarrow{F_3}\overrightarrow{dl_3} + - - - \overrightarrow{F_n}\overrightarrow{dl_n} = \sum_{i=0}^{n} \overrightarrow{F_n}.\overrightarrow{dl_n} \qquad (5.1)$$

تمام اجزا جو حد Limit، $\widehat{dl_n} \rightarrow 0$ $limit$ کے اندر ہوں ان کو سمتی میدان $\vec{F}$ کا خطی تکملہ (Line Integral) کے نام سے جانا جاتا ہے۔

$$\therefore \text{سمتی میدان کا خطی تکملہ } Line\ Integral\ of\ a\ vector\ feild = \int_A^B \vec{F}.\widehat{dl}$$

5.6 برقی سکونی میدان کا خطی تکملہ (Line Integral of an Electrostatic Field)

فرض کریں کہ برقی میدان ایک سمتی میدان ہے جس میں ایک بہت چھوٹا سا امتحانی بار (امتحانی بار (Test Charge)) q_0 کسی نقطہ P پر رکھا ہے۔

جو کہ ایک قوت کو محسوس کرتا ہے۔

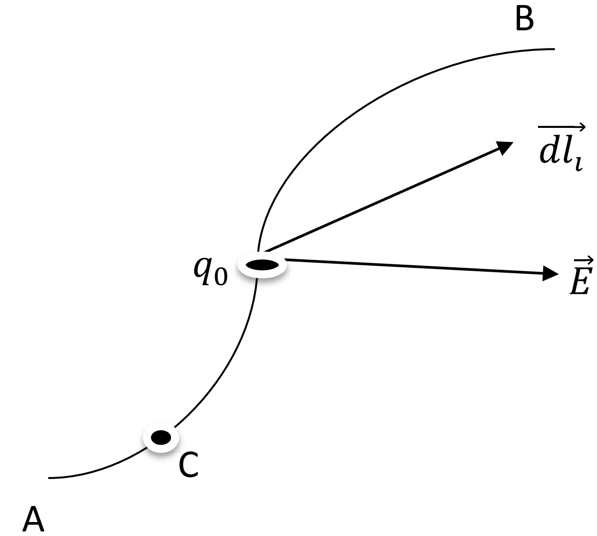
$$\vec{F} = q_0\vec{E} \qquad (5.2)$$

تب امتحانی بار (Test Charge) ایک چھوٹ سے سمتیہ فاصلہ $\widehat{dl}$ کو طئے کرتا ہے تب اس میدان کے ذریعہ کیا گیا کام ہوگا۔

$$dW = \vec{F}.\widehat{dl} = q_0\vec{E}.\widehat{dl} \qquad (5.3)$$

امتحانی بار (Test Charge) کے A سے B تک حرکت کرنے میں کیا گیا جملہ کام ہوگا

$$W = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F}.\widehat{dl} = \int_A^B q_0\vec{E}.\widehat{dl} = q_0 \int_A^B \vec{E}.\widehat{dl} \tag{5.4}$$



شکل(5.2)

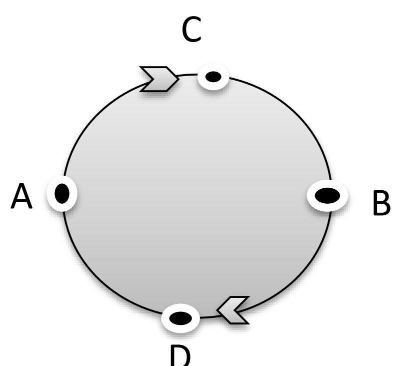
میدان کے ذریعہ فی اکائی بار کیا گیا کام ہو گا

$$= \frac{W}{q_0} = \int_A^B \vec{E}.\widehat{dl} \tag{5.5}$$

کسی اکائی مثبت بار کا میدان کے زیر اثر کسی نقطہ A سے B کی تک حرکت کرتے ہوے کیا گیا کام برقی سکونی میدان کے خطی تکملہ A سے B کے برابر ہوتا ہے۔

5.7 بند راستہ پر کسی سمتی میدان کا خطی تکملہ

(Line Integral of a Vector Field over a closed path)



شکل(5.3)

کسی میدان کے بقاء کو غیر سمتی میدان کے خمیدہ ہونے(Gradient)کے طور پر بھی ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

اگرایک سمتی میدان $\hat{\nabla}\emptyset = grad\emptyset = \vec{A}$

جہاں $\emptyset$ایک غیر سمتی میدان ہے اور $\vec{A}$ایک بقائے میدان ہے۔

کسی پوائنٹ Aاور Bکے درمیان سمتی میدان $\vec{A}$کا خطی تکملہ $\int_A^B \vec{A}.\overrightarrow{dr}$ ہوگا۔ جہاں $\overrightarrow{dr}$فاصلہ کا چھوٹا سا سمتی جز ہے۔

$$\therefore \int_A^B \vec{A}.\overrightarrow{dr} = \int_A^B \vec{\nabla}\emptyset.\overrightarrow{dr} = \int_A^B d\emptyset$$

$$\vec{\nabla}\emptyset.dr = \left(\frac{\partial\emptyset}{\partial x}i + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}j + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}k\right)\left(dx\hat{z} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}\right)$$

$$= \frac{\partial\emptyset}{\partial x}dx + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}dy + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}dz = \widehat{d\emptyset}$$

$$\therefore \int_A^B \hat{A}.\widehat{dr} = \int_A^B d\emptyset = \emptyset_B - \emptyset_A \qquad (5.6)$$

جہاں $\emptyset$ غیر سمتی تفاعل کی قدر نقطہ Bپر $\emptyset_B$اور نقطہ Aپر $\emptyset_A$ ہوگی۔

مساوات (5.6) سے ظاہر ہوتا ہے کہ کسی بقائے سمتی میدان $\hat{A}$کا خطی تکملہ غیر سمتی میدان کے مقام Aاور Bکے ابتدائی وانتہائی مقام پر منحصر ہوتا ہے۔ Aاور Bکے راستے پر منحصر نہیں ہوتا ہے۔

شکل (5.3) میں دیے ہوئے بند راستہ (closed path) ACBDA پر غور کریں۔ ACBDA کے گرد خطی تکملہ راستہ ABCکے گرنقاط Aسے Bکے خطی تکملہ اور راستہ BDAکے گرد نقاط Aسے Dکے خطی تکملے کے مجموعہ برابر ہوگا۔

$$\therefore \oint_{ACBDA} \hat{A}.\widehat{dr} = \int_A^B \hat{A}.\widehat{dr} + \int_B^A \hat{A}.\widehat{dr} \qquad (5.7)$$

تعین کرنے پر $\therefore \int_A^B \hat{A}.\widehat{dr} = -\int_B^A \hat{A}.\widehat{dr}$

$$\int_{ACBDA} \hat{A}.\widehat{dr} = \int_A^B \hat{A}.\widehat{dr} - \int_A^B \hat{A}.\widehat{dr} = 0 \qquad (5.8)$$

یعنی کسی بندراستے پر کسی سمتی میدان کا خطی تکملہ صفر ہوتا ہے۔

5.8 بندراستے پر برقی میدان کا خطی تکملہ صفر ہوتا ہے

(Line Integral of an Electric Field over a Closed Path in Zero)

کسی اکائی مثبت بار کا کسی نقطہ Aسے Bتک کیا گیا کام یہ ہوگا

$$W = \int_A^B \vec{E}.\widehat{dr} \qquad (5.9)$$

جہاں dr ایک اس راستے کا چھوٹا سا ٹکڑا یا جز ہے۔

کسی برقی میدان میں راستہ ACB پر کسی اکائی مثبت چارج کو نقاط A سے B تک جانے کے لیے کیا گیا کام یہ ہوگا

$$W_1 = \int_A^B \hat{E}.\widehat{dr} \tag{5.10}$$

ٹھیک اس طرح سے راستہ BDA پر کسی اکائی مثبت بار کو نقاط B سے A تک جانے کے لیے برقی میدان کے خلاف کیا گیا کام یہ ہوگا۔

$$W_2 = \int_B^A \hat{E}.\widehat{dr} = -\int_A^B \hat{E}.\widehat{dr} \tag{5.11}$$

کسی بند راستے ACBDA پر کسی اکائی مثبت بار کے ذریعہ راستہ A سے B تک اور پھر واپس A تک آنے میں کیا گیا کام یہ ہوگا

$$\oint_A^B \hat{E}.\widehat{dr} = \int_A^B \hat{E}.\widehat{dr} - \int_A^B \hat{E}.\widehat{dr} = 0 \tag{5.12}$$

یعنی بند راستے پر برقی میدان کا خطی تکملہ صفر ہوتا ہے۔

دوسرے لفظوں میں برقی سکونی قوت(Electrostatics Force)ایک بقائی قوت ہے۔اس لیے ایک بند راستے پر کل کام صفر ہے۔یہاں پر یہ خیال رکھنا ہے کہ برقی میدان سمتیہ ہوتا ہے۔ جس کا curl انفراج صفر ہوتا ہے۔یعنی $\hat{\nabla} \times \hat{E} = 0$

5.9 قوۃ اور تفاوت قوۃ (Potential and Potential Difference)

کسی نقطہ پر قوۃ : کسی برقی میدان کے کسی نقطہ پر لا متناہی فاصلہ سے برقی قوت کے مخالف سمت میں لائے گئے اکائی مثبت بار کو لانے کے لیے کیا گیا کام کو کسی نقطہ پر برقی قوۃ کہا جاتا ہے۔

تفاوت قوۃ(Potential Difference)

کسی برقی میدان میں کسی اکائی مثبت بار کو نقطہ A سے B تک لے جانے کے لیے کیے گئے کام کو برقی تفاوت قوۃ کہا جاتا ہے۔
دوسرے الفاظ میں اسے A سے B تک برقی میدان کے خطی تکملہ کے منفی کے طور پر بیان کہا جا سکتا ہے۔

دو نقاط کے درمیان برقی قوۃ (Potential Difference between two Points)

کسی امتحانی بار (Test Charge) q_0 کو ایک چھوٹے سے سمتیہ دوری یا فاصلہ $\overrightarrow{dr}$ کو پورا کرنے کے لیے برقی سکونی میدان $\vec{E}$ کا کیا گیا کام ہوگا $dW = q_0\vec{E}.\widehat{dr}$

کسی امتحانی بار (Test Charge) q_0 کو ایک چھوٹے سے سمتیہ دوری یا فاصلہ $\overrightarrow{dr}$ کو پورا کرنے کے لیے برقی سکونی میدان $\vec{E}$ کے خلاف کیا گیا کام ہوگا $dW = -q_0\hat{E}.\widehat{dr}$

یہ کام امتحانی بار(Test Charge) q_0 میں توانائی باالقوۃ کی شکل میں محفوظ ہو جائے گی۔

$$dU = -q_0\hat{E}.\widehat{dr} \qquad (5.13)$$

اور جیساکے ہمیں معلوم ہے کہ برقی سکونی میدان بقائی میدان ہے اس لیے توانائی بالقوۃ صرف ابتدااور انتہا کے نقطہ پر منحصر کرے گی۔

اگر بار ایک محدود فاصلہ پر برقی میدان کے خلاف نقطہ A سے B کی طرف حرکت کرتا ہے تب

$$U_B - U_A = -\int_A^B q_0\hat{E}.\widehat{dr}$$

برقی میدان کی خصوصیت کو کسی سمتی مقدار کے ذریعہ بیان کیا جاسکتا ہے۔ جو کہ کسی مثبت چارج کے کسی دو نقاط کے درمیان حرکت کرنے کے لیے کیے گئے کام کے برابر ہوتا ہے جسے دو نقاط کے درمیان کا تفاوت قوۃ کہا جاتا ہے۔

دو نقاط کے درمیان کسی چھوٹے سے سمتیہ دوری یا فاصلہ dr کے درمیان تفاوت قوۃ ہو گا۔

$$dv = \frac{-dU}{q_0} = -\hat{E}.\widehat{dr} \qquad (5.14)$$

دو نقطے A اور B کے لیے جو کہ ایک متناہی فاصلہ پر ہے۔

$$V_B - V_A = \frac{U_B - U_A}{q_1} = -\int_A^B \hat{E}.\widehat{dr} \qquad (5.15)$$

$\int_A^B \hat{E}.\widehat{dr}$ کو دو نقطہ A اور B کے درمیان برقی میدان کا خطی تکملہ کہا جاتا ہے۔ مساوات میں موجود منفی نشانی سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ امتحانی بار(Test Charge) میں محفوظ توانائی بالقوۃ برقی میدان کے خلاف کیے گئے کام کے وجہ سے ہے۔

برقی قوۃ کی اکائیاں(Units of Electric Potential) ‘V’

چھوٹا سا سمتی فاصلہ $\widehat{dr}$ رکھنے والے دو نقات کے درمیان برقی قوۃ ہو گا۔ $\boldsymbol{dv = \frac{-du}{q_0}}$

جہاں du امتحانی بار(Test Charge) میں محفوظ برقی قوۃ ہے۔

$$\text{قوۃ یا تفاو تقوۃ کی اکائی} = \frac{U \text{ کی اکائی}}{q_0 \text{ کی کائی}}$$

$$\frac{erg}{Stat.Coulamb}\, in\ CGS\ unit$$

$$= \frac{Joule}{Coulomb}\, in\ S.I\ Unit - Volt$$

بین القوامی نظام میں جول فی اکائی کولمب۔ ولٹ

Stat Volt: برقی قوۃ کی CGS اکائی Stat-Volt ہے۔ کسی برقی قوت کے خلاف اکائی مثبت بار کو لا متناہی سے کسی نقطہ پر لانے کے لیے کیے گئے ایک erg کام کو اس نقطہ پر ایک Stat Volt برقی قوۃ کہا جاتا ہے۔

Volt: قوۃ کی بین الا قوامی نظام S.I میں اکائی Volt ہوتی ہے۔

کسی برقی قوت کے خلاف اکائی Coulomb مثبت بار کو لا متنائی سے کس نقطہ پر لانے کے لیے کیے گئے ایک Joule کام کو اس نقطہ پر ایک Volt کی برقی قوۃ کہا جاتا ہے۔

$$1Volt = \frac{Joule}{Coulomb} = \frac{10^7 erg}{3\times10^9 statcoulomb} = \frac{1}{300} StatVolt$$
$$i.e. 1Stat\ Volt = 300volts$$

5.10 نقطوی بار کی وجہ سے قوۃ (Electric Potential due to Point Charge)

سب سے پہلے ہم کسی نقطوی بار کے وجہ سے بننے والی قوۃ کو معلوم کریں گے جو کہ مبداء پر اور کسی نقطہ کے درمیان ہو گا۔ پھر اس نتیجہ کو مسلسل بار کی تقسیم کے لیے وسعت دیں گے۔

5.10.1 جب بار مبداء پر ہوں:

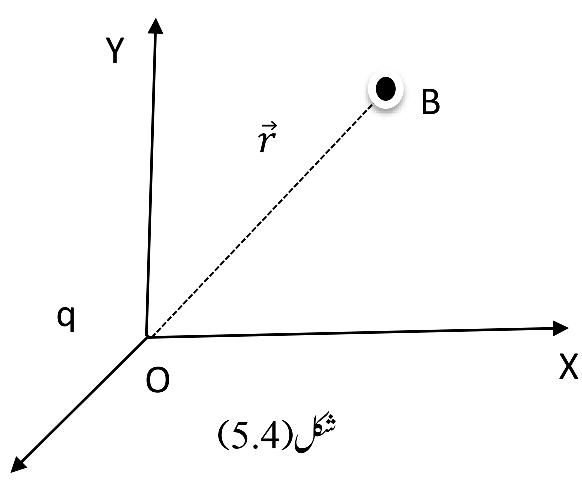
کسی برقی میدان میں اکائی مثبت بار کو لا متناہی سے کسی نقطہ پر لانے کے لیے کیے گئے کام کو اس نقطہ کا برقی قوۃ کہا جاتا ہے۔

$$V = \int_{\infty}^{r} \hat{E}.\widehat{dr} \tag{5.16}$$

جہاں $\vec{r}$ ایک سمتی مقام(Position Vector)ہے اور $\vec{E}$ برقی میدان ہے اور غور کریں کہ ایک نقطوی بار q مبداء پر ہے تب نقطہ B پر برقی قوۃ ہو گا۔

$$V_B = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}.\overrightarrow{dr} \tag{5.17}$$

مبداء پر بار q کے وجہ سے نقطہ B پر برقی میدان $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\vec{r}|^3}\vec{r}$



شکل(5.4)

مساوات(5.17)میں درج کرنے پر

$$V_B = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r}\frac{\hat{r}.\widehat{dr}}{|\vec{r}|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r}\frac{rdr}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r}\frac{dr}{r^2} \qquad (5.18)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$ = کسی نقطوی بار کے ذریعہ فاصلہ rپر برقی قوۃ

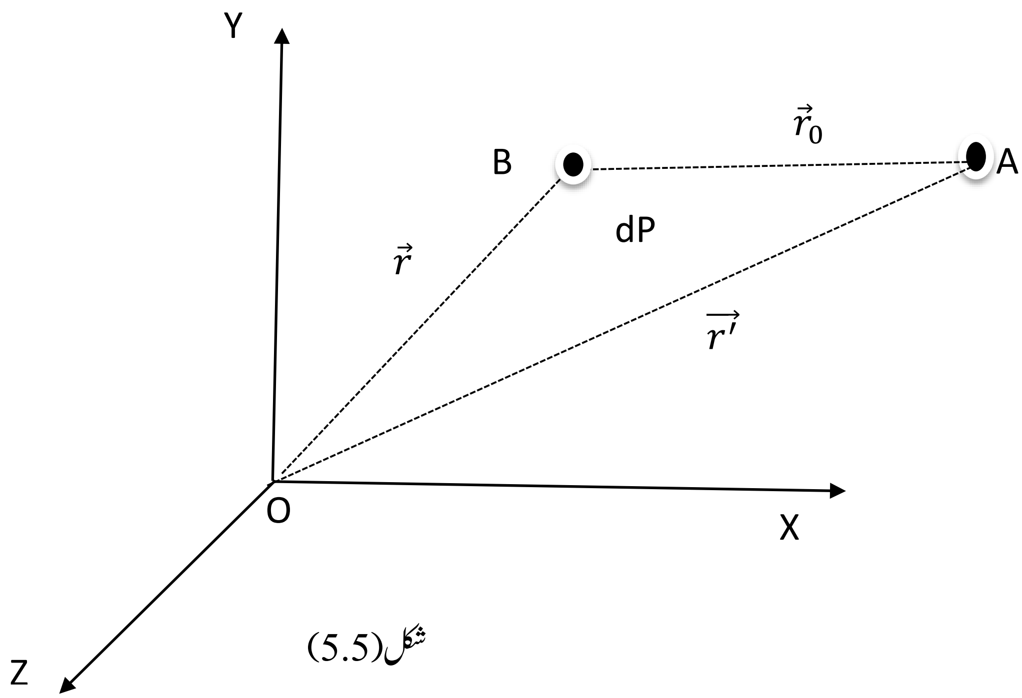
5.10.2 جب بار کسی اختیاری نقطہ پر ہو (When a Charge is Located at an arbitrary Point)

فرض کرئے کہ بارqکسی(Position)مقام سمتیہ$\vec{r}$پر مقیم ہے۔

$$\vec{r} = \vec{r_1} - \vec{r_0}$$

جہاں$\vec{r_0}$نقطہ Aسے Bتک کی سمتیہ دوری یا فاصلہ ہے۔

$$|\vec{r_0}| = \left|\vec{r} - \vec{r^1}\right|$$



شکل(5.5)

نقطوی بارqکے وجہ سے نقطہ Bپر برقی قوۃ

$$V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{\left|\vec{r}-\vec{r^1}\right|}$$

جہاں $\vec{r}$نقطہ مشاہدہ کاPositionمقام سمتیہ ہے اور$\vec{r^1}$بارqکاPositionمقام سمتیہ ہے۔

5.11 برقی قوۃ بوجہ مسلسل بار کی تقسیم کے

(Electric Potential due to Continuous Charge Distributers)

سبب:

برقی قوۃ ایک غیر سمتی مقدار ہے اور متعدد نقطوی بار q_n $---$ q_1, q_2, q_3 جو مختلف مقام سمتیہ r_1, r_2, r_3 $-$

r_n $--$ پر مقیم ہیں۔اس طرح سے $\vec{r}$ پر جملہ برقی قوۃ یہ ہوگا۔

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r_1}|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{|\vec{r}-\vec{r_2}|} + --- + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_m}{|\vec{r}-\vec{r_m}|}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=0}^{n}\frac{q_2}{|\vec{r}-\vec{r_2}|}$$

مشاہدہ کی بناپر بار q_1 کے وجہ سے قوۃ $Now, \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r_1}|} = V_1$

$$Similarly\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{|\vec{r}-\vec{r_2}|} = V_2 and\ So\ on.$$

$$\therefore V = V_1 + V_2 + V_3 + --- V_n = \sum_{i=1}^{n} V_i$$

مسلسل بار کی تقسیم (Continuous Charge Distributions)

مسلسل بار کی تقسیم (Continuous Charge Distributes) کی صورت میں q کو ابتدائی بار dq سے تبدیل کیا

جاتاہے اور مبداء سے اس کی سمتی فاصلہ یادوری $\vec{r_2}$ لینے پر

$$\therefore V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r_2}|}$$

خط بار کی تقسیم کے لیے

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\lambda dl}{|\vec{r}-\vec{r_2}|}$$

جہاں لیمڈا فی اکائی طول ہے(Where $\lambda$is charge per unit length)

سطح بار کی تقسیم کے لیے(For surface charge distributions.)

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int^{1}\frac{\sigma ds}{|\vec{r}-\vec{r_2}|}$$

حجم بار کی تقسیم کے لیے سگما فی اکائی ($\sigma$is charge per unit) سطحی رقبہ ہے۔

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho dv}{|\vec{r}-\vec{r_2}|}$$

ρ بار فی اکائی حجم ہے۔

5.12 ہم قوۃ سطح (کوئی ایسی سطح جِس کے تمام نُقطے یکساں قوۃ رکھتے ہوں) (Equipotential Surface)

ایسی سطح جس کے ہر ایک نقطہ پر برقی قوۃ ایک جیسا ہوتا ہے۔اسے ہم قوۃ سطح کہتے ہیں۔ نقطوی بار کے گرد ہم قوۃ سطح ہم مرکزی

کروں پر مشتمل رہتی ہے اور کروی بار کے گرد بھی ہم قوۃ سطح ہم مرکزی کروں پر مشتمل رہتی ہے۔ یہ ہموار برقی میدان کے علی القوائم ہوتی ہے۔

ہم قوۃ سطح پر برقی میدان کا خطی تکملہ صفر ہوتا ہے

(Line Integral of Electric field on Equipotential Surface is Zero)

کسی برقی میدان میں کسی دو نقطہ A اور B کے درمیان تفاوت قوۃ ہوگا۔

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dr} \qquad (5.19)$$

ہم قوۃ سطح کے لیے $V_B = V_A or V_B - V_A = 0$

$$\int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dr} = 0 \qquad (5.20)$$

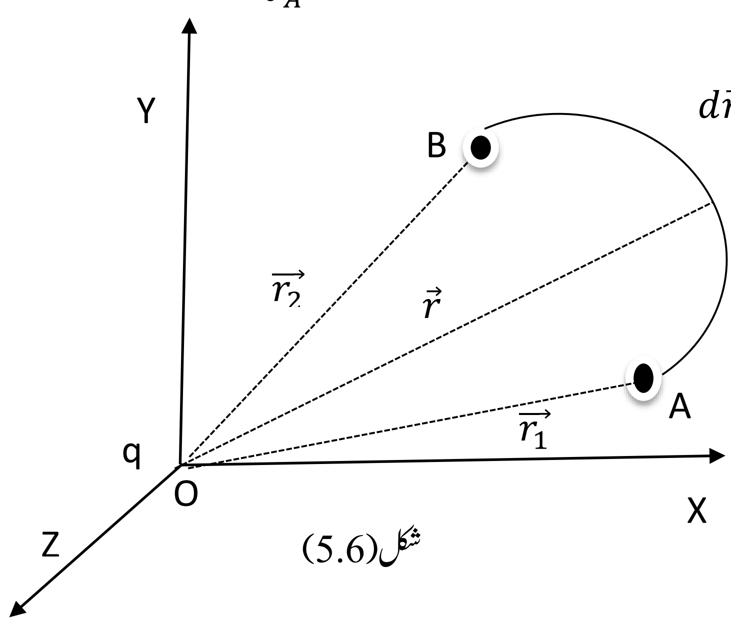
لہذا ہم قوۃ سطح پر برقی میدان میں دو نقاط کا خطی تکملہ صفر ہوتا ہے۔

5.13 کسی برقی میدان میں موجود دو نقاط کے درمیان برقی تفاوت قوۃ

(Electric Potential Difference between two Points)

برقی میدان میں موجود دو نقاط A اور B میں برقی قوۃ کا فرق ہوگا۔

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dr} \qquad (5.21)$$



شکل(5.6)

جہاں $\int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dr}$ برقی میدان کے دو نقاط کے درمیان کا خطی تکملہ ہے۔

اگر کوئی بار q مبداء پر ہو اور نقطہ A اور B ان کی radial دوری $\overrightarrow{r_1}$ اور $\overrightarrow{r_2}$ ہے۔

q جو مبداء پر ہے اور ایک نقطہ r ہے۔تب نقطہ P پر موجود برقی میدان کیا ہو گا

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\vec{r}|^3}\vec{r} \qquad (5.22)$$

مساوات (5.21) اور (5.22) سے

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dr} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{q}{|\vec{r}|^3}\vec{r}\overrightarrow{dr} \qquad (5.23)$$

$$Now, \vec{r}.\overrightarrow{dr} = \frac{1}{2}d(r)^2 = \frac{1}{2}2rdr = rdr$$

$$V_B - V_A = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2} q/_{r^2}\, dr$$

$$V_B - V_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right]$$

5.14 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال1

ثابت کیجیے کہ $\vec{E} = \hat{\imath}x + \hat{\jmath}y + \hat{k}z$ بقائی برقی میدان ہے۔

حل: دیا گیا ہے $\vec{E} = \hat{\imath}x + \hat{\jmath}y + \hat{k}z$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial/_{\partial x} & \partial/_{\partial y} & \partial/_{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right) - \hat{\jmath}\left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)$$

$$\therefore \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$$

$\vec{E}$ بقائی برقی میدان ہے

حل شدہ مثال2

ثابت کیجیے کہ $\vec{E} = xy\hat{\imath} + y^3\hat{\jmath}$ بقائی برقی میدان ہیں یا نہیں؟

حل: دیا گیا ہے کہ $\vec{E} = xy\hat{\imath} + y^3\hat{\jmath}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial/_{\partial x} & \partial/_{\partial y} & \partial/_{\partial z} \\ xy & y^3 & 0 \end{vmatrix}$$

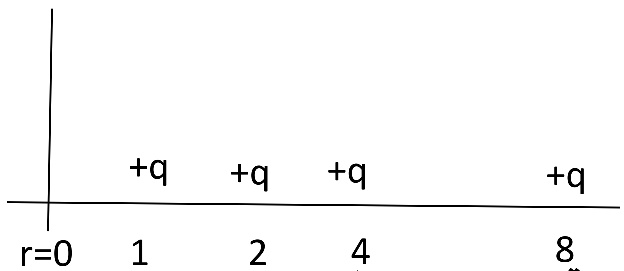
$$= \hat{\imath}\left(0 - \frac{\partial y^3}{\partial z}\right) - j\left(0 - \frac{\partial xy}{\partial z}\right) + k\left(\frac{\partial yz}{\partial x} - \frac{\partial xy}{\partial y}\right)$$
$$= \hat{\imath}(0) + \hat{\jmath}(0) + k(-x) = -\hat{k}x$$
$$\therefore \nabla \times \vec{E} \neq 0$$

$\therefore$ $\vec{E}$ بقائی برقی میدان نہیں ہے۔

حل شدہ مثال 3

مساوی مقدار والے ایک جیسے نقطی برقی بار ایک قطار میں صف بندی کیے ہوئے ہیں۔ مشاہدے کے نقطے پر کل برقی قوۃ معلوم کیجیے۔ جہاں سے ان کے فاصلے ملی لا ترتیب۔۔۔ 1، 2، 4، 8 وغیرہ ہیں۔ اگر ترتیب وار ایک مثبت اور ایک منفی برقی بار لیا جائے تو قوۃ کتنی ہو گی؟

حل: $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{\propto}\frac{q_n}{r_n}$



کیوں کہ تمام برقی بار ایک جیسے ہیں اس لیے

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n}^{\propto}\frac{1}{r_n}$$
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + - -\right]$$

قوسین (Cosine) میں ایک ہندسی سلسلہ ہے جس کی پہلی رقم 1 اور مشترک نسبت $\frac{1}{2}$ ہے۔

لہٰذا اس لا متناہی ہندسی سلسلے کا مجموعہ اس طرح ہوتا ہے۔

$$S_\propto = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-{}^1/_2} = 2$$
$$\therefore V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \times 2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}$$

اگر اس برقی باروں کے سلسلے میں ہر دوسرا برقی بار منفی ہو تو مشاہدے کے مقام پر برقی قوۃ اس طرح ہو گی۔

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + - - -\right]$$

قوسین میں ایک ہندسی سلسلہ ہے جس کی پہلی رقم 1 اور مشترک نسبت $\frac{1}{2}$ ہے۔

لہٰذا اس لا متناہی ہندسی سلسلے کا مجموعہ

$$\therefore S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

لہٰذا برقی قوۃ کی قیمت اس طرح ہو گی۔

$$\therefore V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{2}{3} = \frac{q}{6\pi\varepsilon_0}$$

حل شدہ مثال4

$10\mu c$ برقی بار کے نقطے سے کتنی دوری پر قوۃ $3 \times 10^4 V$ ہو گی۔

حل: فرض کیجیے کہ اس نقطی برقی بار سے 'r' کے فاصلے پر دی گئی قوۃ کی قیمت ہو گی۔ یعنی

$$= \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{q}{r}$$

$$r = \frac{9\times10^9\times10^{-5}}{3\times10^4} = 3m$$

حل شدہ مثال5

9cm ضلع والے مربع کی چار راسوں پر چار نقطی برقی بار $0.02\mu c-$ علی الترتیب مخالف سمت ساعت میں مرتب ہیں۔ مربع کے مرکز پر جملہ برقی قوۃ معلوم کیجیے۔

حل: کیوں کہ مشاہدے کے نقطے سے تمام برقی بار یکساں دوری پر ہیں اور فرض کیجیے کہ یہ فاصلہ 'r' ہے۔

اس لیے کل برقی قوۃ اس طرح ہو گی $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_1^\infty \frac{q}{r}$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}[-2+4+2-4] \times 10^{-3} \times 10^{-6} = 0$$

یہاں قوسین میں برقی باروں کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔ اس لیے کل برقی بار صفر ہو گا۔

حل شدہ مثال6

دو پروٹان ایک دوسرے سے $0.53 \times 10^{-10}m$ کے فاصلے پر ہیں۔ اس نظام کی برقی توانائی بالقوں معلوم کیجیے۔

حل:

$$q_1 = q_2 = 1.6 \times 10^{-19}C$$

$$r = 5.3 \times 10^{-11}m$$

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$$

$$= 9 \times 10^9 \frac{1.6\times1.6\times10^{-38}}{5.3\times10^{-11}}$$

$$U = \frac{9\times10^9\times1.6\times1.6\times10^{-38}}{5.3\times10^{-11}} ev = 4.34 \times 10^{-18} ev$$

حل شدہ مثال 7

0.4m نصف قطر والے کروی پر آٹھ نقطی برقی بار $3\mu c, 5\mu c, 7\mu c, 10\mu c, 15\mu c, -1\mu c, -5\mu c$

اور $-7\mu c$ علی الترتیب مخالف سمت ساعت میں مرتب ہیں۔ کروی کے مرکز پر جملہ برقی قوۃ معلوم کیجیے۔

حل: برقی قوۃ $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_1^\infty \frac{q_i}{r}$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}[q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 + q_7 + q_8]$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{0.4}[7 + 5 + 3 + 10 + 15 - 5 - 1 - 7]$$

$$V = 9 \times 10^9 \times \frac{27\times10^{-6}}{0.4} = 6.075 \times 10^5 Volt$$

5.15 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- برقی میدان کا خمیدہ ہونا (Curl) کو اس طرح لکھا جاتا ہے۔

$$Curl\vec{E} = -Curlgrad\emptyset = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\emptyset = 0$$

- کسی اکائی مثبت بار کا کسی نقطہ A سے B تک کیا گیا کام یہ ہوگا $W = \int_A^B \vec{E}.\widehat{dr}$
- کسی برقی میدان میں کسی اکائی مثبت بار کو نقطہ A سے B تک لے جانے کے لیے کیے گئے کام کو برقی تفاوت قوۃ کہا جاتا ہے۔

دوسرے الفاظ میں اسے A سے B تک برقی میدان کے خطی تکملہ کے منفی کے طور پر بیان کہا جا سکتا ہے۔

- دو نقطے A اور B کے لیے جو کہ ایک متناہی فاصلہ پر ہے۔

$$V_B - V_A = \frac{U_B - U_A}{q_1} = -\int_A^B \hat{E}.\widehat{dr}$$

- **Stat Volt:** برقی قوۃ کی CGS اکائی Stat-Volt ہے۔ کسی برقی قوت کے خلاف اکائی مثبت بار کو لا متناہی سے کسی نقطہ پر لانے کے لیے کیے گئے ایک erg کام کو اس نقطہ پر ایک Stat Volt برقی قوۃ کہا جاتا ہے۔
- **Volt:** قوۃ کی بین الاقوامی نظام S.I میں اکائی Volt ہوتی ہے۔

5.16 کلیدی الفاظ (Keywords)

- **امالی برقی رو** : تبدیل ہوتے ہوئے مقناطیسی میدان کے ذریعے کسی موصل میں پیدا ہونے والی برقی رو امالی برقی رو کہلاتی ہے ۔
- **مقناطیسی نفوذ** : یہ کسی دیے گئے رقبے میں جملہ مقناطیسی میدان کی پیائش ہوتی ہے ۔
- **برقی میدان کی حدت:** ایک کولم مثبت برقی بار پر عائد ہونے والی قوت۔
- **Stat Volt:** برقی قوۃ کی CGS اکائی Stat-Volt ہے۔ کسی برقی قوت کے خلاف اکائی مثبت بار کو لا متناہی سے کسی نقطہ پر

لانے کے لیے کیے گئے ایک erg کام کو اس نقطہ پر ایک Stat Volt برقی قوۃ کہا جاتا ہے۔

- **Volt**: قوۃ کی بین الاقوامی نظام S.I میں اکائی Volt ہوتی ہے۔

5.17 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

5.17.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. برقی قوۃ کی SI اکائی۔۔۔۔۔۔۔ہے۔

(a) Volt (b) Amp (c) Ohm (d) Farad

2. زمین کی قوۃ کو۔۔۔۔۔۔۔۔۔مانا جاتا ہے۔

(a) ایک (b) صفر (c) دو (d) ∞

3. کیا کسی مقام پر صفر حدت کا میدان ہوتے ہوئے برقی قوۃ ہو سکتی ہے؟

4. برقی قوۃ سے کیا مراد ہے؟

5. بقائی میدان سے کیا مراد ہے؟

6. برقی قوۃ کا ابعادی ضابطہ۔۔۔۔۔۔۔ہے۔

7. ایکساں برقی قوۃ سطح سے کیا مراد ہے؟

8. وولٹ سے کیا مراد ہے؟

9. برقی سکونیاتی قوۃ سے کیا مراد ہے؟

10. تفاوت قوۃ۔۔۔۔۔۔۔مقدار ہے۔

(a) میزانی (b) سمت (c) a اور b (d) ان میں سے کوئی نہیں

11. بقائے برقی میدان کی شرط۔۔۔۔۔۔۔ہوتی ہے۔

(a) $\nabla \times E = 0$ (b) $\nabla \times E \neq 0$ (c) $\nabla . E = 0$ (d) $\nabla . E \neq 0$

12. برقی بار منقدر (quantized) ہوتا ہے کا مطلب کیا ہے۔

5.17.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. برقی میدان سے کیا مراد ہے؟ بقائے برقی میدان اور $\nabla \times E = 0$ کو اخذ کیجیے۔
2. بتائیے کہ میزانی میدان کی گریڈینٹ (Gradient) اور میزانی میدان کی کرل (Curl) میلان کی بقائے صفر ہوتی ہے۔
3. برقی قوۃ کی تعریف لکھیے۔ اس کی SI اکائی کیا ہے اور کیا یہ سمتیہ ہے یا میزانیہ۔

4. برقی سکونیات برقی میدان اور برقی قوۃ پرایک نوٹ لکھیے۔
5. بتائیے کہ بند سطح پر برقی میدان کی قطعی تکمیلہ صفر ہوتی ہے سمجھائیے۔

5.17.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. برقی قوۃ اور تفاوت قوۃ کی تعریفیں لکھیے اور "وولٹ" کی تعریف کیجیے۔ نقطی برقی باروں کے نظام کی توانائی بالقوۃ کے لیے ضابطہ اخذ کیجیے۔
2. سمتیہ میدان کی قطعی تکمیلہ کی طبیعی اہمیت کو سمجھائیے اور مثالیے کے ذریعہ سمجھائیے۔
3. ہموار برقائے گئے کھوکھلے کروی قول کے لیے برقی قوۃ کے لیے ضابطہ کیجیے جب کہ مشاہدے کا نقطہ (i) خول کے مرکز پر (ii) خول کی سطح پر ہو۔
4. برقی قوۃ کی تعریف کریں اور اس کے SI اکائی کیا ہے۔ وولٹ اور سکونیاتی وولٹ کے درمیان فرق کو سمجھائے اور ان کے درمیان رشتے کو اخذ کیجیے۔

5.17.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. تین نقطی برقی بار $5\mu c, -5\mu c, -5\mu c$ کو 10cm ضلع والے مثلث مساوی الاضلاع کی راسوں پر رکھا گیا ہے۔ دو منفی برقی باروں کے درمیانی نقطے پر برقی قوۃ معلوم کیجیے۔
2. ایک علاقے میں برقی میدان $\vec{E} = 20\hat{\imath} + \hat{\jmath}NC^{-1}$ ہے اور مبداء پر قوۃ صفر ہے۔ نقطہ 2.2 پر کتنی قوۃ ہو گی؟
3. +9μc اور −3μc کے دو نقطی برقی بار ایک دوسرے سے 0.16cm کے فاصلے پر ہیں۔ ان سے بننے والی برقی قوۃ کی قیمت معلوم کیجیے۔ (i) ان دونوں کے باہر منفی برقی بار سے 0.04m دوری پر (ii) ان دونوں کے باہر منفی برقی بار سے 0.08m دوری پر۔
4. ایک ذرے کی کمیت ایک گرام اور برقی بار $10^{-8}C$ ہے۔ یہ ذرہ اس طرح حرکت کر رہا ہے کہ ایک مقام پر اس ذرے کی رفتار $0.2ms^{-1}$ اور دوسرے مقام پر اس کی رفتار $\sqrt{0.028ms^{-1}}$ ہو جاتی ہے۔ اگر پہلے مقام پر قوۃ صفر ہو تو دوسرے مقام پر قوۃ کتنی ہو گی۔

   (اشارہ $\frac{1}{2}m\left(V_1{}^2 - V_2{}^2\right) = q(V_2 - V_1)$)
5. دو دھاتی کروں کی برقی گنجائش 3:4 کی نسبت میں ہے اور ان کو ایک دوسرے سے تماس میں رکھ کر $7 \times 10^{-6}C$ کے بار سے برقایا گیا۔ پھر ان کو جدا کر کے اتنا دور لے جایا گیا کہ یہ ایک دوسرے پر کچھ بھی اثر نہیں کرتے۔ چھوٹے کرے سے 50m دوری پر کتنی قوۃ بنتی ہے۔

[اشارہ: دو کروں میں برقی بار کی تقسیم ان کی گنجائش کے لحاظ سے ہوتی ہے کیوں کہ دونو پر یکساں قوۃ ہے۔]

5.18 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Aziz, W A, and Mashood Ahmad. Millenium Science Dictionary, Physics - Chemistry & Mathematics, English - English - Urdu. Mumbai: Saifee Book Agency, 2003.
2. Bleaney, B I, and B Bleaney. Electricity and Magnetism. Oxford: Oxford University Press, 2013.
3. Bennet, G A. G. Electricity and Modern Physics. London: English Language Book Society & Edward Arnold, 1983.
4. Duffin, W J. Electricity and Magnetism. Cottingham: W.J. Duffin, 2001.
5. Gaur, R.K. &Gupta, S.L.Engineering Physics.Dhanpat Rai Publication.
6. Kurrelmeyer, Bernhard, and Walter H. Mais. Electricity and Magnetism. Princeton, N.J: Van Nostrand, 1967.
7. Peck, Edson R. Electricity and Magnetism. , 2013.
8. Plonsey.R&Collin.R.E.Principles and Application of Electromagnetic Field. Tata Mc Graw Hill Publication. New Delhi.
9. Purcell, Edward M, and David J. Morin. Electricity and Magnetism. , 2013.
10. Resnic.R&Halliday.D.Physics Part-I&Part-II.Wiley Eastern Pvt.Ltd.New Delhi.
11. Resnick, Robert, David Halliday, and Kenneth S. Krane. Physics. New York: Wiley, 2002.
12. Schuh, Mari C. Magnetism. Minneapolis, MN: Bellwether Media, 2008.

اکائی 6۔ برقی ذوقطبیہ

(Electric Dipole)

اکائی کے اجزا

6.0 تمہید (Introduction)

ایک برقی ذوقطبیہ، مساوی اور مخالف نقطی باروں qاور q-کا ایک جوڑا ہوتا ہے۔ جب کہ ان نقطی باروں کے درمیان فاصلہ 2a ہو۔ دونوں باروں کو ملانے والا خط، فضا میں ایک سمت کو دکھلاتا ہے۔ قرار داد کے مطابق q- سے q کی جانب، سمت کو ذوقطبیہ کی سمت مانا جاتا ہے۔ q–اور qکے مقامات کا وسطی نقطہ (Middle Point) ذوقطبیہ کا مرکز کہلاتا ہے۔

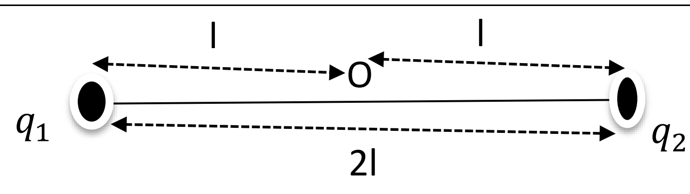
ظاہر ہے کہ ایک برقی ذوقطبیہ کا حاصل بار صفر ہوگا۔ اس کا یہ مطلب نہیں ہے کہ برقی ذوقطبیہ کا میدان بھی صفر ہوگا۔ کیوں کہ بار qاور بار q- کے درمیان کچھ فاصلہ ہے۔ اس لیے جب ان کے ذریعے پیدا ہونے والے برقی میدان جوڑے جاتے ہیں تو وہ مکمل طور پر ایک دوسرے کی تنسیخ نہیں کرتے۔ حالانکہ ذوقطبیہ تشکیل دینے والے باروں کے درمیان فاصلے کے مقابلے میں بہت زیادہ فاصلوں $r \gg 2\alpha$ پر q اور q- کی وجہ سے پیدا ہونے والے برقی میدان ایک دوسرے کی تقریباً تنسیخ کر دیتے ہیں۔ اس لیے مقابلتاً بڑے فاصلوں پر ایک ذوقطبیہ کی وجہ سے پیدا ہونے والے برقی میدان کی قدر $\frac{1}{r^2}$ سے زیادہ تیزی کے ساتھ کم ہوتی ہے (جو کہ ایک واحد بار qکی وجہ سے پیدا ہونے والے برقی میدان کا rپر انحصار ہے)۔

6.1 مقاصد (Objectives)

یہ اکائی برقی ذوقطبیہ کے مفہوم کو پیش کرتی ہے۔ اس مفہوم کو قابل ادراک بنانے کے لیے یہ اکائی ہماری مدد کرتی ہے۔ اس اکائی میں ہم

- برقی ذوقطبیہ کے تصور کو سمجھیں گے۔
- ایک برقی ذوقطبیہ کا برقی میدان کو اور ایک ہموار باردار پتلے کروی خول کی وجہ سے پیدا ہونیوالا برقی میدان معلوم کریں گے۔
- ہم برقی ذوقطبے کی وجہ سے عائد برقی قوۃ کو معلوم کر سکیں گے۔
- برقی باروں کے نظام کی وجہ سے برقی قوۃ اور برقی کثیر قطبی کو بھی سمجھ سکیں گے۔

6.2 برقی ذوقطبیہ (Electric Dipole)



شکل(6.1)

ایک برقی ذوقطبیہ، مساوی اور مخالف نقطی باروں qاور q–کا ایک جوڑا ہوتا ہے جب کہ ان نقطی باروں کے درمیان فاصلہ 2l ہو۔ دونوں باروں کو ملانے والے خط، فضا میں ایک سمت کو دکھلاتا ہے۔ q– سے q کی جانب، سمت کو ذوقطبیہ کی سمت مانا جاتا ہے۔ q–اور qکے

مقامات کا وسطی نقطہ ذو قطبیہ کا مرکز کہلاتا ہے۔

برقی ذو قطبیہ معیار اثر کو اس طرح دیا جاتا ہے۔ $P = q \times 2\vec{l} = 2q\vec{l}$

P ایک ویکٹر (سمتیہ) ہے اور اس کی سمت q− سے q+ کی جانب مانی جاتی ہے۔

6.2.1 ذو قطبیوں کی طبعی اہمیت (Physical Significance of Dipoles)

زیادہ تر سالموں میں مثبت باروں اور صنعتی باروں کے مراکز ایک ہی مقام پر ہوتے ہیں اس لیے ان کا ذو قطبیہ معیار اثر صفر ہوتا ہے۔ CO_2 اور CH_4 اس قسم کے سالمے ہیں حالانکہ جب ایک برقی میدان لگایا جاتا ہے تو ان میں ذو قطبیہ معیار اثر پیدا ہو جاتا ہے۔ لیکن کچھ سالموں میں منفی باروں اور مثبت باروں کے مراکز ایک دوسرے پر منطبق نہیں ہوتے اسلیے ایک برقی میدان کو غیر موجودگی میں بھی ان میں ایک مستقل برقی ذو قطبیہ معیار اثر ہوتا ہے۔ ایسے سالمے قطبیہ سالمات (Polar Molecule) کہلاتے ہیں۔ پانی H_2O کے سالمے، اس قسم کی ایک مثال ہے۔

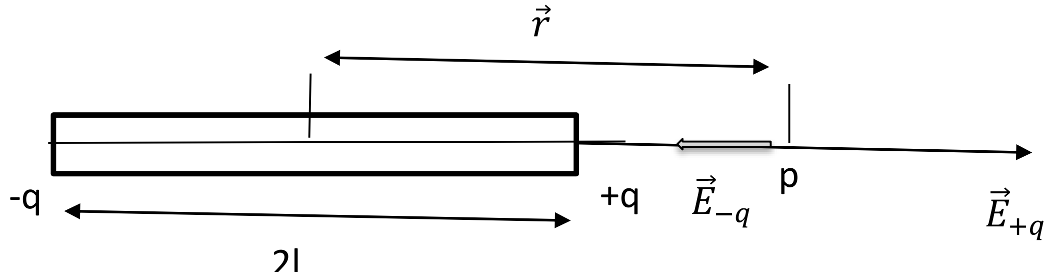
مختلف قسم کی مادی اشیا برقی میدان کی موجودگی اور غیر موجودگی میں دلچسپ خاصیتیں ظاہر کرتی ہیں اور ان کے اہم استعمال ہیں۔

6.3 ایک برقی ذو قطبیہ کا برقی میدان (Electric Field of an Electric Dipole)

فضا میں کسی بھی نقطے پر باروں کے جوڑے (q اور q-) کا برقی میدان کہ کلمب کے کلیے اور انطباق کے اصول سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ ذیل میں دو صورتوں میں سادہ نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

(i) جب کہ نقطہ ذو قطبیہ محور (dipole axis) پر ہو (ii) جب نقطہ ذو قطبیہ کے استوائی مستوی یعنی کہ (Equatorial axis) ایسے مستوی میں ہو جو ذو قطبیہ کے مرکز سے گزرتے ہوئے محور پر عمود وار ہو۔ کسی بھی عمومی نقطہ P پر برقی میدان، اس نقطہ پر بار q− کی وجہ سے پیدا ہونیوالے برقی میدان $\vec{E}_{-q}$ اور بار q− کی وجہ سے پیدا ہونیوالے برقی میدان $\vec{E}_{+q}$ کو سمتیوں کے متوازی الاضلاع کا (Law of Parallelogram) کے ذریعے جوڑ کر حاصل کیا جا سکتا ہے۔

i. محور پر نقاط کے لیے:



شکل (6.2)

فرض کرو کہ نقطہ 'P' ذو قطبیہ کے مرکز سے $\vec{r}$ فاصلہ پر، بار q کی سمت میں ہے۔ تب

$$\vec{E}_{-q} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r+l)^2}\hat{P} \tag{6.1}$$

جہاں $\hat{P}$ ذو قطبی محور (q- سے q کی جانب) کی سمت میں اکائی سمتیہ ہے۔اسی طرح

$$\vec{E}_{+q} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r-l)^2}\hat{P} \tag{6.2}$$

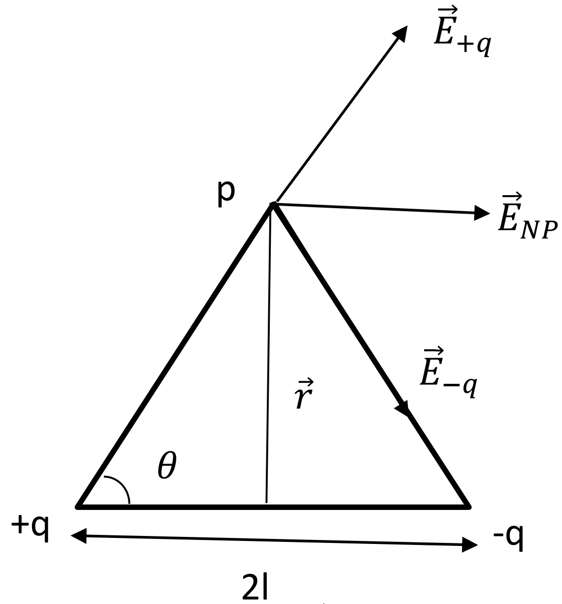
P پر جملہ میدان ہے۔

$$\vec{E} = \vec{E}_{+q} + \vec{E}_{-q} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(r-l)^2} - \frac{1}{(r+l)^2}\right]\hat{P}$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{4rl}{(r^2-l^2)^2}\hat{P} \tag{6.3}$$

$$if\ r \gg l\ then\ \vec{E} = \frac{4ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\hat{P} \tag{6.4}$$

.ii استوائی مستوی کے ایک نقطہ کے لیے:



شکل (6.3)

دونوں باروں q+ اور q- کی وجہ سے پیدا ہونیوالے برقی میدانوں کی عددی قدریں

$$\vec{E}_{+q} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2+l^2} \tag{6.5}$$

$$\vec{E}_{-q} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2+l^2} \tag{6.6}$$

اور یہ دونوں عددی قدریں ایک دوسرے کے مساوی ہیں۔

$\vec{E}_{+q}$ اور $\vec{E}_{-q}$ کی سمتیں وہی ہیں جو شکل (6.3) میں دکھائی گئی ہیں۔کل برقی میدان $\hat{P}$ کی مخالف سمت میں ہے۔

$$\therefore \vec{E} = -(E_{+q} + E_{-q}) \cos\theta = \frac{2ql}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 + l^2)^{3/2}} \hat{P} \qquad (6.7)$$

زیادہ فاصلوں پر(r>>l) یہ تحلیل ہو جاتا ہے۔

$$\vec{E} = -\frac{2ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \hat{P} \qquad (6.8)$$

مساوات(6.8) سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ زیادہ بڑے فاصلوں پر ذوقطبیہ میدان میں q اور l جداگانہ طور پر شامل نہیں ہوتے بلکہ یہ میدان کے حاصل ضرب ql پر منحصر ہے۔ ذوقطبیہ معیاراثر(Dipole Moment) کی تعریف تجویز کرتا ہے کہ ایک برقی ذوقطبیہ کے ذوقطبیہ معیاراگر سمتیہ کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ

$$\vec{P} = q \times 2l\hat{P} = 2ql\hat{P} \qquad (6.9)$$

یعنی P یہ ایک ایسا سمتیہ ہے جس کی عددی قدر بار q اور درمیانی فاصل 2l کی حاصل ضرب ہے اور سمت q− سے q کی جانب ہے۔

ذوقطبیہ محور کے ایک نقطہ پر:

$$\vec{E} = \frac{2\vec{P}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} (r \gg l) \qquad (6.10)$$

استوائی مستوی میں ایک نقطہ پر:

$$(r>>l)\ \vec{E} = \frac{\overrightarrow{-P}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad (6.11)$$

یہاں یہ بات نوٹ کریں کہ زیادہ بڑی فاصلوں پر ذوقطبیہ میدان $1/r^2$ کو مناسبت سے نہیں بلکہ $1/r^3$ کی مناسبت سے کم ہوتا ہے۔ مزید یہ کہ ذوقطبیہ میدان کی عددی قیمت اور فاصلہ r پر ہی منحصر نہیں بلکہ مقام سمتیہ $\vec{r}$ اور ذوقطبیہ معیار اثر $\vec{P}$ کے مابین زاویہ پر بھی منحصر ہے۔

6.4 ایک ہموار باردار پتلے کروی خول کی وجہ سے پیدا ہونیوالا برقی میدان

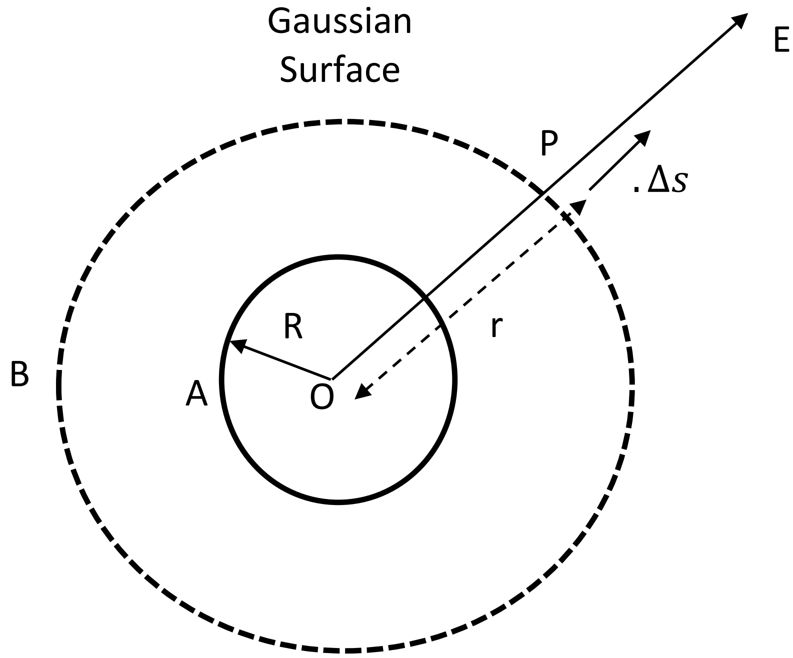
(Field due to a Uniformly Charged thin Spherical Shell)

فرض کریں کہ نصف قطر R کے ایک پتلے کروی خول کی ہموار سطح بار کثافت ہے۔ باہر یا اندر، کسی بھی نقطے P پر برقی میدان صرف r پر منحصر ہو سکتا ہے اور نصف قطری ہونا لازمی ہے۔

خول کے باہر میدان: خول سے باہر ایک نقطہ P لیجیے جس کا نصف قطری $\vec{r}$ سمتیہ ہے۔ نقطہ P پر $\vec{E}$ معلوم کرنیکے لیے ہم گاؤس سطح کے بطور ایک کرہ منتخب کرتے ہیں جس کا نصف قطر r ہے اور مرکز O ہے۔ دی ہوئی باز تشکیل کی مناسبت سے، اس کرہ پر تمام نقطے متعادل(Equivalent) ہوں گے اس لیے گاؤس سطح کے ہر نقطے پر برقی میدان کی عددی قدر E یکساں ہوگی اور ہر نقطہ پر برقی میدان کی

سمت نصف قطری سمتیہ کی جانب ہو گی۔اس لیے ہر نقطہ پر $\vec{E}$ اور $\Delta\vec{S}$ متوازی ہیں اور ہر چیز سے گزرنے والا فلکس $E\,.\,\Delta s$ ہے۔ تمام Δs پر جمع کرنے پر گاؤس سطح سے گزرنے والا فلکس $E \times 4\pi r^2$ ہے۔ سطح سے گھرا ہوا بار $\sigma \times 4\pi R^2$ ہے۔ گاس کے کلیے سے

$$E \times 4\pi r^2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} 4\pi R^2$$



شکل(6.4)

$$E = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{6.12}$$

جہاں $q = 4\pi R^2 \sigma$ کروی خول پر جملہ بار ہے۔ ویکٹر فارم میں

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \tag{6.13}$$

اگر $q > 0$ ہو تو برقی میدان باہر کی جانب ہو گا اور اگر $q < 0$ ہو تو اندر کی جانب ہو گا۔ لیکن یہ قطعی وہی میدان ہے جو ایک مرکزہ پر رکھے ہوئے بار کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے۔اس لیے خول سے باہر کے نقاط کہ لیے ایک ہموار طور پر باردار خول کی وجہ سے پیدا ہونے والا برقی میدان ایسا ہو گا جیسے کہ خول کا جملہ بار اس کے مرکز پر مرتکز ہو۔

خول کے اندر میدان: اگر نقطہ P خول کے اندر ہو تو گاؤس سطح پھر ایک کرہ ہے جس کا مرکز ہے اور جو P سے گزر رہا ہے۔ گاؤس سطح سے گزرنے والا فلکس $E \times 4\pi r^2$ ہے۔ لیکن اس صورت میں گاؤس سطح کسی بار کو گھیرے ہوئے نہیں ہے تو گاس کے کلیے کے مطابق۔

$$E \times 4\pi r^2 = 0$$

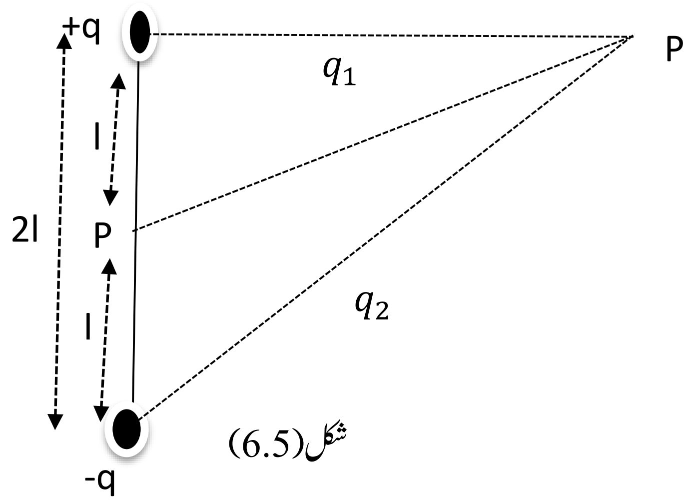
$$E = 0 (r < R) \tag{6.14}$$

یعنی ایک ہموار طور پر باردار پتلے خول کی وجہ سے پیدا ہونے والا برقی میدان خول کے اندر ہر نقطہ پر صفر ہو گا۔ یہ اہم نتیجہ گاؤس کے

کلیے کا براہِ راست حاصل ہے جو کولمب کے کلیے سے اخذ کیا جاتا ہے۔اس نتیجہ کا تجرباتی ثبوت، کولمب کے کلیہ میں شامل $1/_{r^2}$ انحصار کو تصدیق کر دیتا ہے۔

6.5 برقی ذو قطبے کی وجہ سے عائد برقی قوۃ (Potential Due to an Electric Dipole)

ہم جانتے ہیں کہ ایک برقی ذو قطبیہ دو باروں q اور q– پر مشتمل ہوتا ہے جنکہ درمیانی فاصلہ 2l ہے۔اس کا جملہ بار صفر ہوتا ہے۔اس کی خاصیت اس کا ذو قطبی معیار اثر $\vec{P}$ جس کی عددی قدر $q \times 2l$ ہے اور جس کی سمت q- سے q کی جانب ہوتی ہے۔ شکل(6.5) ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ ایک نقطہ پر جس کا مقام سمتیہ $\vec{r}$ ہے۔



شکل(6.5)

ایک ذو قطبیہ کا برقی میدان نہ صرف عددی قدر r پر منحصر ہے بلکہ $\vec{r}$ اور $\vec{P}$ کے درمیانی زاویہ پر بھی منحصر ہے۔مزید یہ کہ بڑے فاصلوں پر، برقی میدان $1/_{r^2}$ کی مناسبت سے کم نہیں ہوتا بلکہ $1/_{r^3}$ کی مناسبت سے کم ہوتا ہے۔ہم ایک برقی ذو قطبیہ کی وجہ سے برقی قوۃ معلوم کریں گے۔

شکل(6.5) کے مطابق مبداء ذو قطبیہ کے مرکز پر منتخب کرتے ہیں۔ برقی میدان انطباق کے اصول کی پابندی کرتا ہے اور برقی قوۃ بھی انطباق کے اُصول کا پابند ہے۔اس لیے ذو قطبیہ کی وجہ سے برقی قوۃ باروں q اور q- کی وجہ سے قوں کا حاصل جمع ہے۔

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right] \qquad (6.15)$$

جہاں r_1 اور r_2 بالترتیب نقطہ P کے q اور q- سے فاصلے ہیں۔

$$\therefore r_1{}^2 = r^2 + l^2 - 2al\cos\theta \qquad (6.16)$$

$$r_2{}^2 = r^2 + l^2 + 2al\cos\theta \qquad (6.17)$$

اگر (r>>l) اور پھیلاؤ میں l/r کے صرف پہلے درجے تک کے ارکان ہی لیتے ہیں۔

$$r_1{}^2 = r^2\left(1 - \frac{2l\cos\theta}{r} + \frac{l^2}{r^2}\right) \approx r^2\left[1 - \frac{2l\cos\theta}{2}\right] \qquad (6.18)$$

اسی طرح (6.19)
$$r_1{}^2 = r^2\left[1 - \frac{2l\cos\theta}{r}\right]$$

دور کنی مسئلہ استعمال کرتے ہوئے اور 1/r میں صرف پہلے درجے تک کے ارکان لینے پر

$$\frac{1}{r_1} \cong \frac{1}{r}\left[1 - \frac{2l\cos\theta}{r}\right]^{-1/2} = \frac{1}{r}\left[1 + \frac{l}{r}\cos\theta\right] \qquad (6.20)$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r}\left[1 + \frac{2l\cos\theta}{r}\right]^{-1/2} = \frac{1}{r}\left[1 - \frac{l}{r}\cos\theta\right] \qquad (6.21)$$

مساوات (6.15)، (6.20)، (6.21) اور $\vec{P} = 2ql$ استعمال کرتے ہوئے حاصل قوۃ ہے۔

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2ql\cos\theta}{r^2} = \frac{\vec{P}\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ \left(\because \vec{P}\cos\theta = \vec{P}.\hat{r}\right) \qquad (6.22)$$

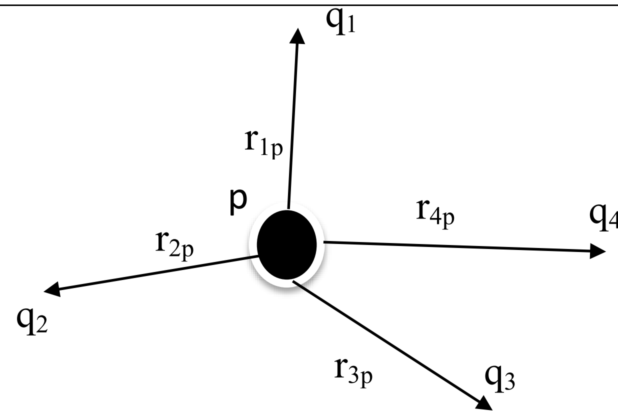
جہاں $\hat{r}$ مقام سمتیہ $\overrightarrow{OP}$ کی جانب اکائی سمتیہ ہے۔

$\therefore$ ایک ذو قطبیہ کا برقی قوۃ

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{\vec{P}.\hat{r}}{r^2}\,(r \gg l) \qquad (6.23)$$

مساوات (6.23) سے یہ ظاہر ہے کہ ذو قطبیہ کی جسامت کے مقابلے میں صرف بہت بڑے فاصلوں کے لیے ہی نزدیکی طور پر درست ہے، اس طرح کہ 1/r میں بڑے درجے کے ارکان قابل نظر انداز ہیں۔

6.6 برقی باروں کے نظام کی وجہ سے برقی قوۃ (Potential Due to a System of Charges)



شکل (6.6)

برقی باروں $q_1, q_2, q_3 \ldots\ldots q_n$ کا ایک نظام مان لیجیے جس کے مقام سمتیے کسی مبدے کو

مناسبت $\overrightarrow{q_1}, \overrightarrow{q_2} \dots \dots . \overrightarrow{q_n}$ شکل (6.6) P پر بار q_1 کی وجہ سے قوۃ V_1 یہ ہے۔

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{1p}}$$

جہاں q_1, r_{1p} اور P کا درمیان فاصلہ ہے۔اسی طرح P پر q_2 کی وجہ سے قوۃ V_2 اور q_3 کی وجہ سے قوۃ V_3، $V_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3}{r_{3p}}$ ،

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{2p}}$$

جہاں r_{2p} اور r_{3p}، P کے بالترتیب q_2 اور q_3 سے فاصلے ہیں۔ بالکل اسی طرح دوسرے باروں کی وجہ سے قوۃ بھی ہوں گے۔

انطباق کے اُصول کے ذریعہ جملہ بار تشکیل کی وجہ سے P پر قوۃ V انفرادی باروں کی وجہ سے قوۃ کا الجبرائی مجموعہ یہ ہوتا ہے۔

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n \tag{6.24}$$

$$\therefore V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{r_{1p}} + \frac{q_2}{r_{2p}} + \frac{q_3}{r_{3p}} + \cdots + \frac{q_n}{r_{np}}\right] \tag{6.25}$$

اگر ہمارے پاس ایک مسلسل بار تقسیم ہے جس کی بار کثافت $(\vec{r})$ ہو تو اسے چھوٹے حجم اخزاء میں تقسیم کر لیتے ہیں جن میں سے ہر جز کی جسامت $\rho\Delta V$ ہے اور اس پر جملہ بار $\rho\theta$ ہے۔ پھر ہم ہر حجم خر کی وجہ سے قوۃ معلوم کرتے ہیں اور ایسے تمام حصوں کو جمع یا تکمیلہ کر لیتے ہیں اور اس طرح پوری تقسیم کی وجہ سے قوۃ معلوم کر لیتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ ایک ہموار طور پر بر قائے ہوئے کروی خول کہ لیے، خول کے باہر برقی میدان ایسا ہوتا ہے کہ جیسے کہ خول کا پورا بار اس کے مرکز پر مرتکز ہو، اس لیے خول کے باہر قوۃ اس طرح دیا جاتا ہے۔

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\,(r \geq R) \tag{6.26}$$

جہاں q خول پر جملہ بار ہے اور R اس کا نصف قطر ہے۔خول کے اندر برقی میدان صفر ہے۔اس سے یہ معلوم کیا جا سکتا ہے کہ خول کے اندر قوۃ مستقل ہے کیوں کہ خول کے اندر ایک بار کو حرکت دینے میں کوئی کام نہیں کیا جاتا اور اس لیے اس کی قدر سطح پر قدر کے مساوی ہے جو

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q}{R} \tag{6.27}$$

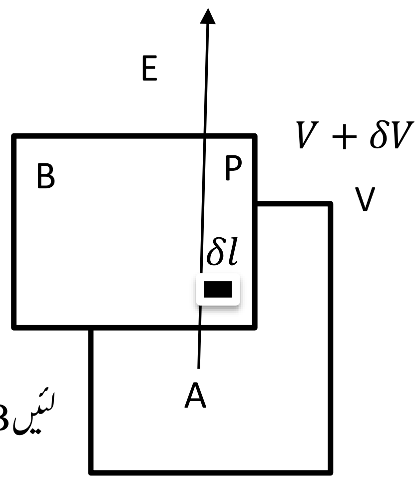
برقی کثیر قطبی (Electric Multi poles)

جب ایک سے زائد ذو قطبیہ کو چھوٹی سی جگہ میں جمع کرتے ہوں تو اس برقی باروں کے نظام کو برقی کثیر قطبیہ کہتے ہیں اور یہ پیچیدگیوں کو بڑھاتی ہے۔ مثال کے طور پر ذو قطبیہ، چار قطبیہ، آٹھ قطبیہ اور عام طور پر 2^n قطبیہ جہاں n= کثیر قطبیہ کی قدر ہے۔

6.7 برقی قوۃ سے برقی میدان (Electric Field from Potential)

ایک دوسرے کے نزدیک رکھی ہوئی دو ہر قوۃ سطحیں A اور B لئیں جن کے قوۃ کی قدریں V اور $V + \delta V$ ہیں۔فرض کریں کہ نقطہ P سطح B پر ایک نقطہ ہے۔δl سطح A کا P سے عمودی فاصلہ ہے۔فرض کریں کہ ایک اکائی مثبت بار کو اس عمود پر سطح B سے سطح A تک برقی میدان کے خلاف حرکت دی جاتی ہے۔اس دوران کیا گیا کام $|E|\delta l$ ہوگا۔یہ کام تفاوت قوۃ $V_A - V_B$ کے مساوی ہے۔اس لیے

$$|\bar{E}|\delta l = V(V + \delta V) = -\delta V$$



دو ہر قوۃ سطحیں A اور B لئیں

شکل(6.7)

یعنی کہ

$$|\bar{E}| = -\frac{\delta V}{\delta l} \qquad (6.28)$$

کیوں کہ δV منفی ہے $|\delta V| - = \delta V$ اس لیے مساوات(6.28) کو اس طرح سے لیے سکتے ہیں۔

$$|\bar{E}| = -\frac{\delta V}{\delta L} = \frac{|\delta V|}{\delta l} \qquad (6.29)$$

اس لیے ہم برقی میدان اور قوۃ کے رشتہ سے متعلق دو اہم نتائج یہ ہیں۔

i. برقی میدان اس سمت میں ہے جس میں قوۃ سب سے زیادہ شرح سے کم ہو رہا ہے۔

ii. برقی میدان کی عمودی قدر، قوۃ کی عددی قدریں تبدیلی فی اکائی نقل اس نقطہ پر ہم قوۃ کے عمدوار سے دی جاتی ہے۔

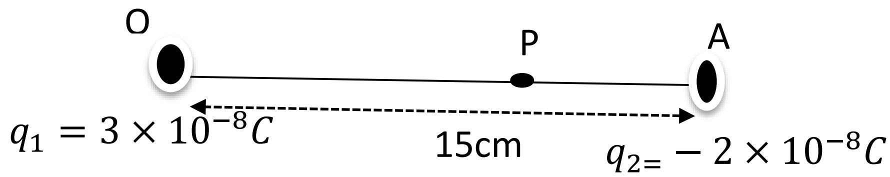
6.8 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال1

دو برقی بار $3 \times 10^{-8} C$ اور $-2 \times 10^{-8} C$ ایک دوسرے سے 15cm کے فاصلے پر رکھتے ہوئے ہیں۔ان دونوں

باروں کو ملانے والے خط کے کس نقطے پر برقی قوۃ صفر ہے۔

حل: فرض کریں کہ مثبت بار کے مقام پر مبدا O ہے۔ ان دونوں برقی باروں کو ملانے والے خط کو X– محور مان لیتے ہیں اور منفی بار کو مبدائے کے دائیں جانب لے لیتے ہیں۔ جیسا کہ شکل (6.8) میں بتلایا گیا ہے۔



شکل (6.8)

فرض کریں کہ نقطہ P، X محور پر وہ مطلوبہ نقطہ ہے جہاں قوۃ صفر ہے۔

اگر نقطہ P، O اور A کے درمیان ہو تو ہمارے پاس

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3\times10^{-8}}{P\times10^{-2}} - \frac{2\times10^{-8}}{(15-P)\times10^{-2}}\right] = 0$$

جہاں P دیا گیا فاصلہ سنٹی میٹر میں ہے تو اس کو میٹر میں لیں۔

$$\frac{3}{P} - \frac{2}{(15-P)} = 0$$

اس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $P = 9$

اگر P بڑھائے خط OA پر ہے تو مطلوبہ شرط یہ ہے۔

$\frac{3}{P} - \frac{2}{(P-15)} = 0$ جس سے حاصل ہوتا ہے $P = 45$

اس لیے برقی قوۃ مثبت بار سے منفی بار کی جانب 9cm اور 45cm فاصلے پر صفر ہے۔

حل شدہ مثال 2

دی گئی شکلوں میں بالترتیب ایک مثبت اور منفی بار کے میدانی خطوط دکھائے گئے تو

a) فرق قوۃ $V_P - V_Q$ اور $V_B - V_A$ کی علامتیں بتائیے۔

b) نقاط P اور Q، A اور B کے درمیان ایک کم مقدار کے منفی بار کے قوۃ توانائی فرق کی علامت بتائیے۔

c) Q سے P تک ایک قلیل مثبت بار کو لے جانے میں میدان کے ذریعے کیے گئے کام کی علامت بتائیے۔

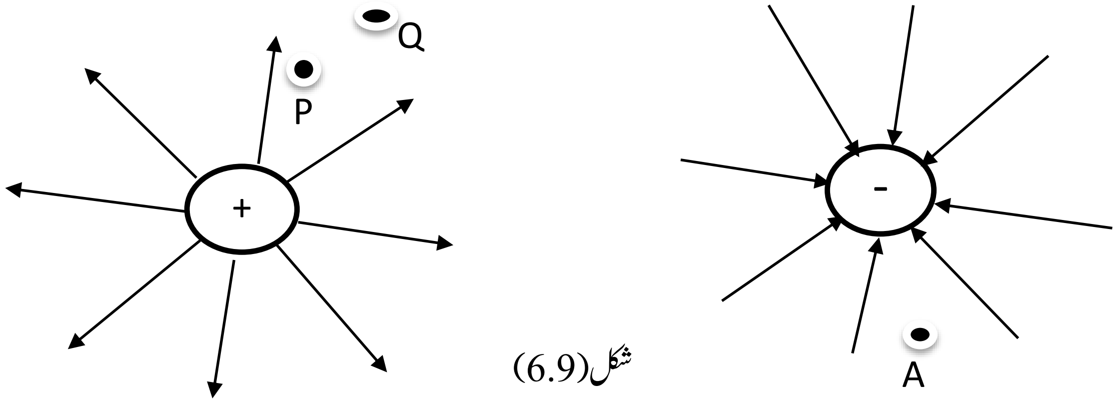
d) B سے A تک ایک کم منفی بار کو لے جانے میں بیرونی ایجنسی کے ذریعے کیے گئے کام کی علامت بتائیے۔

حل:

a) کیوں کہ $V \propto \frac{1}{r}$، $V_P > V_Q$ $\therefore$ اس لیے $(V_P - V_Q)$ اور $(V_B - V_A)$ مثبت ہیں۔

b) ایک قلیل منفی بار مثبت بار کی جانب کشش ہو گا۔

یہ منفی بار زیادہ قوۃ توانائی سے مقابلتاً کم قوۃ توانائی کی طرف حرکت کرتا ہے اس لیے Pاور Qکے درمیان ایک قلیل منفی بار کے قوۃ توانائی فرق کی علامت مثبت ہو گی اسی طرح $(P.E)_A > (P.E)_B$اس لیے قوۃ توانائی فرق کی علامت مثبت ہے۔



شکل(6.9)

c) Q سے Pتک ایک قلیل مثبت بار کو لے جانے میں، ایک بیرونی ایجنسی کو برقی میدان کے خلاف کام کرنا ہو گا اس لیے برقی میدان کے ذریعے کیا گیا کام منفی ہو گا۔

d) B سے Aتک، ایک منفی بار کو لے جانے میں بیرونی ایجنسی کے ذریعے کام کیا جائیگا یہ مثبت۔

e) منفی بار پر دفع کی قوت کی وجہ سے رفتار کم ہوتی ہے اور اس لیے B سے Aتک جانے میں حرکی توانائی کم ہوتی ہے۔

حل شدہ مثال3

دو باروں 5Cاور15Cایک دوسرے سے نقاط(2,-4, 3)اور(-3, 2, 1)پر رکھے ہوئے ہیں۔تب 15Cپر دو باروں کے درمیانی قوت کو معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے کہ $q_1 = +5C \quad q_2 = +15C$

$$\overrightarrow{r_1} = 2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 3\hat{k} \qquad \text{اور} \qquad \overrightarrow{r_2} = -3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}$$

$$\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1} = \left(-3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}\right) - \left(2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 3\hat{k}\right)$$

$$-5i + 6j - 2k$$

q_2بار پر قوت

$$\overrightarrow{F_{21}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{(\overrightarrow{r_2}-\overrightarrow{r_1})^3}(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1})$$

$$|\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}| = \sqrt{(-5)^2 + (6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{25 + 36 + 4} = \sqrt{65}$$

$$\overrightarrow{F_{21}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{5\times 15}{\left(\sqrt{65}\right)^3}\left(-5\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 2\hat{k}\right)$$

$$= \frac{9\times 10^9 \times 5\times 15}{65^{3/2}}(-5i + 6j - 2k)$$

$$\overrightarrow{F_{21}} = 1.288 \times 10^9\left(-5\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 2\hat{k}\right) Newton$$

حل شدہ مثال4

دو پروٹان کے درمیان برقی قوت اس پروٹان کے قیمت کے مساوی ہیں۔ان دو پروٹان کے درمیان فاصلہ معلوم کیجیے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ پروٹان کی قیمت $m = 1.67 \times 10^{-27} Kg$

$$e = 1.6 \times 10^{-19} C$$

دو پروٹان کے درمیان فاصلے

پروٹان کے وزن= $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e \times e}{r^2}$

فرض کیجیے کہ دو پروٹان کے درمیان فاصلے r اور پروٹان کے وزن

$$mg = 1.67 \times 10^{-27} \times 9.8\, Newton$$

$$\therefore F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = \frac{9\times10^9\times1.6\times10^{-19}\times1.6\times10^{-19}}{r^2}$$

$$r^2 = \frac{9\times10^9\times1.6\times10^{-19}\times1.6\times10^{-19}}{1.67\times10^{-27}\times9.8} = 1.408 \times 10^{-2}$$

$$r = \sqrt{1.408 \times 10^{-2}} = 1.186 \times 10^{-1} m = 0.1186 m$$

حل شدہ مثال5

ہائیڈروجن ایٹم کے پروٹان اور الکٹران کے درمیانی فاصلے $5.3 \times 10^{-11} m$ ہیں۔ان کے درمیانی برقی قوت کی قدر کو معلوم کیجیے۔

حل: پروٹان اور الکٹران باروں کی قیمت $e = 1.6 \times 10^{-19} c$

فاصلے $r = 5.3 \times 10^{-11} m$

قوت $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e \times e}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{\left(1.6\times10^{-19}\right)^2}{(5.3\times10^{-11})^2}$

$$= \frac{9\times1.6\times1.6\times10^{-16}}{5.3\times5.3} \times 10^9 = 0.82 \times 10^{-7}$$

$$F = 8.2 \times 10^{-8} Newton$$

حل شدہ مثال6

$U_{92}(Z = 92)$ کے سطح پر برقی میدان کی شدت معلوم کیجیے۔یہاں پر نصف قطر $r = 7 \times 10^{-15} m$

حل: دی گئی ہیں کہ $r = 7 \times 10^{-15} m$

$$Q = Ze = 92 \times e$$

$$= 92 \times 1.6 \times 10^{-19} c$$

$$Q = 92 \times 1.6 \times 10^{-19C}$$

برقی میدان کی شدت $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$

$$E = \frac{9\times10^9\times92\times1.6\times10^{-19}}{(7\times10^{-15})^2}$$
$$E = 27.04 \times 10^{20}\ N/_C$$

حل شدہ مثال7

برقی میدان کی تصور کیجیے جس کا ذو قطبیہ معیار اثر $4.5 \times 10^{-10} cm$ ہیں(i) محور پر نقاط کے لیے ہو (ii) استوانی مستوی کے ایک نقطہ کے لیے۔

حل:

i. محور پر نقاط کے لیے برقی میدان $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2P}{r^3}$

جہاں $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9, r = 1m, P = 4.5 \times 10^{-10}cm$

$$\vec{E} = \frac{9\times10^9\times2\times4.5\times10^{-10}}{1\times1\times1} = 8.1N/C$$

ii. استوانی مستوی کے ایک نقطہ کے لیے

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{P}{r^3} = \frac{8.1}{2}N/c$$
$$\vec{E} = 4.05\ N/C$$

حل شدہ مثال8

100c بار و کو(3, 4, 0)نقطہ پر رکھا ہے۔(0, 0, 0)مرکزی نقطہ پر برقی میدان کی شدت معلوم کیجیے۔

حل: دی گئی ہیں کہ $\vec{r} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$

$$|\vec{r}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5m$$

مرکزی پر برقی میدان $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(\vec{r})^3}\vec{r}$

$$= 9 \times 10^9 \times \frac{100}{5^3}|-3i - 4j|$$
$$= 9 \times 10^9 \left[\frac{-12i}{5} - \frac{16}{5}j\right]$$
$$9 \times 10^9 - (2.4\hat{\imath} + 3.2\hat{\jmath})$$
$$\vec{E} = 9 \times 10^9\sqrt{(2.4)^2 + (3.2)^2} = 36 \times 10^9 N/C$$
$$\vec{E} = 36 \times 10^9 N/C$$

6.9 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- ایک برقی ذو قطبیہ، مساوی اور مخالف نقطی باروں q اور q– کا ایک جوڑا ہوتا ہے جب کہ ان نقطی باروں کے درمیان فاصلہ 2l ہو۔

دونوں باروں کو ملانے والے خط، فضا میں ایک سمت کو دکھلاتا ہے۔ $-q$ سے q کی جانب، سمت کو ذوقطبیہ کی سمت مانا جاتا ہے۔

q اور $-q$ کے مقامات کا وسطی نقطہ ذوقطبیہ کا مرکز کہلاتا ہے۔

برقی ذوقطبیہ معیار اثر کو اس طرح دیا جاتا ہے۔ $P = q \times 2\vec{l} = 2q\vec{l}$

P ایک ویکٹر (سمتیہ) ہے اور اس کی سمت $-q$ سے $+q$ کی جانب مانی جاتی ہے۔ $\therefore\ \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{4rl}{(r^2-l^2)^2}\hat{P}$

- ذوقطبیہ محور کے ایک نقطہ پر: $\vec{E} = \frac{2\vec{P}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\ (r \gg l)$
- استوائی مستوی میں ایک نقطہ پر: $\vec{E} = \frac{\overrightarrow{-P}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$
- جہاں $q = 4\pi R^2\sigma$ کروی خول پر جملہ بار ہے۔ ویکٹر فارم میں $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$
- **خول کے اندر میدان:**

اگر نقطہ P خول کے اندر ہو تو گاس سطح پھر ایک کرہ ہے جس کا مرکز ہے اور جو P سے گزر رہا ہے۔ گاس سطح سے گزرنے والا فلکس $E \times 4\pi r^2$ ہے۔ لیکن اس صورت میں گاس سطح کسی بار کو گھیرے ہوئے نہیں ہے تو گاس کے کلیے کے مطابق۔

$$E \times 4\pi r^2 = 0$$
$$E = 0 (r < R)$$

ایک ذوقطبیہ کا برقی قوۃ $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{P}.\hat{r}}{r^2}\ (r \gg l)$

6.10 کلیدی الفاظ (Keywords)

- **وولٹ (Volt):** ایک وولٹ برقی قوۃ کی وہ قدار ہے جہاں پر 1 کولم برقی بار کو لتناہی سے یہاں لانے کے لیے ایک جول کا کام واقع ہوتا ہو۔
- **الکٹران وولٹ (ev):** توانائی کی پیائش کی یہ چھوٹی اکائی ہے۔ ایک الکٹران وولٹ کی چھوٹی توانائی اس الکٹران میں آتی ہے جس کو ایک وولٹ کے برقی میدان میں اسراع کروایا گیا ہے۔
$$1ev = 1.6 \times 10^{-19} J$$
- **ذوبرقی حدت:** ذوبرقیئے پر عائد کردہ بیرونی میدان کی وہ حدت جس پر امن کی پاشیدگی (break down) ہوتی ہے۔

6.11 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

6.11.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. برقی ذوقطبیہ سے کیا مراد ہے؟
2. محور پر نقطہ کے لیے ایک برقی ذوقطبیہ کا میدان کی مساوات $\vec{E}$ = ــــــــــــ

(a) $\vec{E} = \frac{2P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ (b) $\vec{E} = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ (c) $E = \frac{P}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$ (d) c اور a

3. استوائی مستوی میں ایک نقطہ پر ایک برقی ذوقطبیہ r میدان کی مساوات $\vec{E}$۔=۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔

(a) $\vec{E} = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ (b) $\vec{E} = \frac{2P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

(c) $E = \frac{P}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$ (d) ان میں سے کوئی بھی نہیں

4. ذوقطبیہ کی SI اکائی۔۔۔۔۔۔ہے۔

5. ذوقطبیہ کی ابعاد ضابطہ۔۔۔۔۔۔ہے۔

6. ہمواری برقی میدان میں برقی ذوقطبیہ پر عائد جفت کے لیے مساوات۔۔۔۔۔۔۔

7. جفت (Torque) سے کیا مراد ہے؟

8. قطبیہ سالمات (Polar molecule) سے کیا مراد ہے؟

9. باروں (Charge) کی SI اکائی کیا ہیں؟

6.11.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. برقی باروں کے نظام کی وجہ سے برقی قوۃ کے لیے مساوات اخذ کرو۔
2. برقی ذوقطبیہ محوری، مستوی کے کسی نقطہ پر برقی میدان کی حدت کے لیے عبارت اخذ کرو۔
3. برقی ذوقطبیہ کے استوائی مستوی کے کسی نقطہ پر برقی میدان کی حدت کے لیے عبارت اخذ کرو۔
4. برقی ذوقطبیہ سے کیا مراد ہے اور اس کی اہمیت کو بیان کرو۔
5. برقی ذوقطبیہ کی تعریف کیجیے اس کی اکائی ابعادی ضابطہ لکھیے۔

6.11.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. برقی ڈائی پول سے کیا مراد ہے؟ ایک ڈائی پول کی وجہ سے ایک نقطہ پر کے قوۃ کو محسوب کیجیے اور علی ہذاالقیاس برقی میدان کی قیمت معلوم کیجیے۔ اس میدان کی قیمت کیا ہوگی جب کہ (i) نقطہ ڈائی پول کے محور پر ہو (ii) نقطہ محور کے عمود پر ہو۔
2. برقی ذوقطبیہ کی تعریف کرو۔ ایک ہموار باردار پتلے کروی خول کی وجہ سے پیدا ہونیوالا برقی میدان کے لیے مساواتیں اخذ کرو۔
3. برقی قوۃ کی تعریف کرو۔ برقی ذوقطبے کی وجہ سے عائد برقی قوۃ معلوم کیجیے ۔

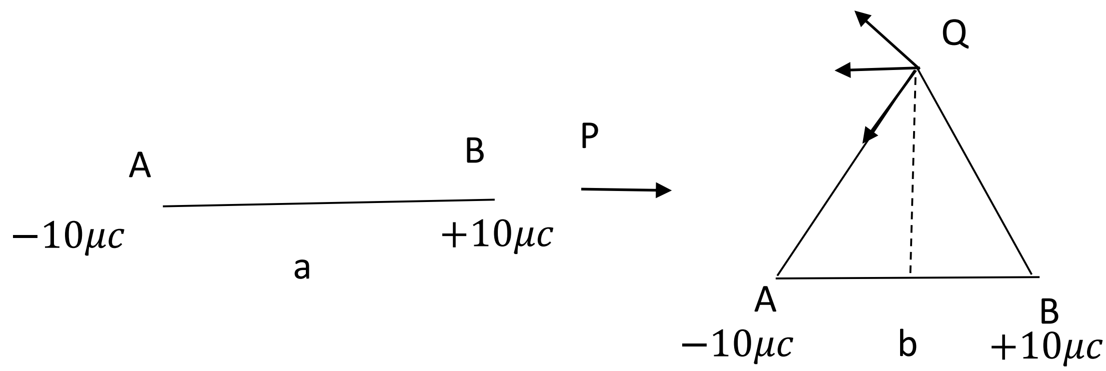
6.11.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. ہائیڈروجن جوہر میں الکٹران اور پروٹان کا درمیانی فاصلہ 0.5A ہے۔ نظآم کا دوقطبی معیار شرکت کیا ہوگی۔
2. $10\sqrt{2}C$ باروں کو $(3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 5\hat{k})m$ نقاط پر رکھئے $(5i + 4j + 3k)m$ نقاط پر برقی میدان کی شدت

معلوم کیجیے۔

3. دو باروں $+5C$ اور $+15C$ کو $(3, -4, 2)$ اور $(1, 2, -3)$ نقاطوں پر رکھے تب $+15C$ پر برقی قوت کو معلوم کیجیے۔

4. $\pm 10\mu c$ کے دو باروں ایک دوسرے سے 5.0 ملی میٹر کے فاصلے پر رکھے ہوئے ہیں۔ برقی میدان معلوم کیجیے۔ (a) ایک نقطہ P پر جو ذو قطبیہ کے محور پر اس کے مرکزہ سے 15cm دور مثبت بار کی جانب ہے (b) ایک نقطہ Q پر جو O سے گزرتے ہوئے اور ذو قطبیہ محور کے علی القوائم خط پر 0 سے 15cm ہے۔



6.12 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Bleaney, B I, and B Bleaney. Electricity and Magnetism. Oxford: Oxford University Press, 2013.
2. Duffin, W J. Electricity and Magnetism. Cottingham: W.J. Duffin, 2001.
3. Gaur, R.K. &Gupta, S.L.Engineering Physics.Dhanpat Rai Publication.
4. Plonsey.R&Collin.R.E.Principles and Application of Electromagnetic Field. Tata Mc Graw Hill Publication. New Delhi.
5. Purcell, Edward M, and David J. Morin. Electricity and Magnetism. , 2013.
6. Resnick, Robert, David Halliday, and Kenneth S. Krane. Physics. New York: Wiley, 2002.

اکائی 7۔ ذو برقیاں

(Dielectrics)

اکائی کے اجزا

7.0 تمہید (Introduction)

ہم جانتے ہیں کہ مادہ ایک یا ایک سے زیادہ ذروں(atoms) سے بنا ہوا ہے۔ایک ذرے کے پاس مثبت چارج شدہ نیوکلس (Positively Charged Nucleus)ہوتا ہے اور ایک یا ایک سے زیادہ برقیہ(Electrons)اس کے گرد گھومتے ہے تاکہ مجموعی طور پر ایک ذرہ تعدیلی بن جائے۔ایسے برقیوں کو آزاد برقیات(Free electrons)کہتے ہے۔

جدید برقی نظریہ کے مطابق تمام مادے اپنے برتاؤ کے بنیاد پر تین حصوں میں تقسیم کیے جاتے ہے۔ موصل ،نیم موصل ، غیر موصل یا حاجز۔

7.1 مقاصد (Objectives)

یہ اکائی برقی ذوبرقیاں کے مفہوم کو پیش کرتی ہے۔اس مفہوم کو قابل ادارک بنانے کے لیے یہ اکائی ہماری مدد کرتی ہے۔

اس اکائی میں برق گزار مستقل پر بحث کی گئی ہے اور بتایا گیا ہے کہ ایک مکثفہ کی گنجائش پر برق گزار واسطے کا کیا اثر ہوتا ہے۔

- اس اکائی میں ہم ذوبرقیاں کے تصور کو سمجھیں گے۔
- ذوبرقیوں میں برقی میدان کو اور برقی میدانوں میں قطبی ریزوں کی صف بندی معلوم کریں گے۔
- ہم ذوبرقیہ میں برقی سکونیات کی مساوات اور دوبرقیوں میں برقی میدان کو معلوم کرسکیں گے۔
- ذوبرقیہ میں گاوس کا مسئلہ کو بھی سمجھ سکیں گے۔

7.2 ذوبرقیوں میں برقی میدان (Electric Fields in Dielectrics)

ہم جانتے ہے کہ مادہ ایک یا ایک سے زیادہ ذروں(atoms) سے بنا ہوا ہے۔ ایک ذرے کے پاس مثبت چارج شدہ نیوکلس(Positively Charged Nucleus) ہوتا ہے اور ایک یا ایک سے زیادہ برقیہ(electrons)اس کے گرد گھومتے ہے تاکہ مجموعی طور پر ایک ذرہ تعدیلی(تعدیلی)بن جائے۔ایسے برقیوں کو آزاد برقیات(Free electrons)کہتے ہے۔

جدید برقی نظریہ کے مطابق تمام مادے اپنے برتاؤ کے بنیاد پر تین حصوں میں تقسیم کیے جاتے ہے۔

موصل(Conductors)

ایک اچھے موصل میں ہر ذرہ ایک آزاد برقیہ کو جنم دیتی ہے۔ایک ٹھوس میں ذروں کی تعداد فی کیوبک سنٹی میٹر 10^{22} کے آڑر کا ہوتا ہے۔اس لیے آزاد برقیوں کی تعداد بھی اتنا ہی یعنی 10^{22} ہوتا ہے۔

دھاتیں جیسے Al, Cu, Ag.......وغیرہ اچھے موصل کی کچھ مثالیں ہے۔

نیم موصل(Semi-Conductors)

نیم موصل ایسے مواد ہے جن کے ایصالیت(Conductivity)اچھے موصل اور غیر موصل کے درمیان ہے یعنی جن کی ایصالیت 10^{-10} گنااچھے موصل کے ایصالیت کے برابر ہے۔یہ مادے ایک مفید طبقہ بنانے میں استعمال ہوتے ہے۔

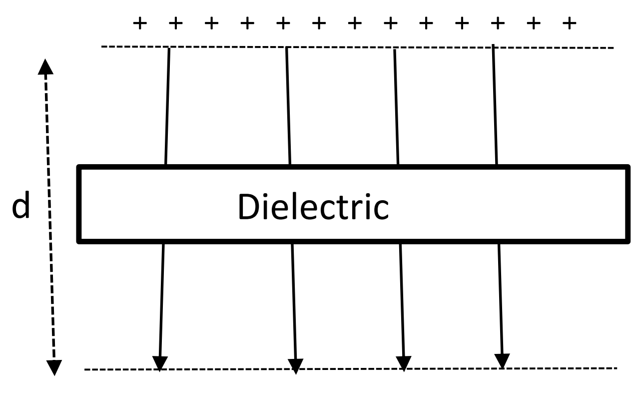
غیر موصل یاحاجز:(Insulators)

ایک حاجز میں عملی طور پر کوئی آزاد برقیہ نہیں ہوتا۔ان کی ایصالیت مشکل سے 10^{-20} گناہ ہوتی ہے۔اچھے موصل سے مادے جیسے گلاس،ایبونٹ(Ebonite) اورابرک(Mica)حاجز کی کچھ مثالیں ہے۔ایسے مادوں کوذو برقیاں بھی کہتے ہے۔

ذو برقیاں یاحاجزایک خاص طبقہ ہے مادوں کا جن کو بہت سے چیزوں میں استعمال کیاجاتاہے جیسے برقی حاجز ریڈیو، کیپیسٹر وغیرہ۔دو برقیوں کا مطالعہ، ہمیں مدد کرتا ہے سمجھنے میں کہ ایک خاص ذو برقیہ کا چناؤ کیسے کرنا ہے ایک کیپیسٹر کے لیے اور باقی نوری رجحان(Optical Phenomenon) جیسے انعکاس (Reflection) انعطاف(Refraction) اوردوری انعطاف (Double Refraction)سنگ مرمر کے ذروں میں۔

فطری ربر، کپاس، لکڑی کچھ مثالیں ہے اچھے برقی ذوبرقیوں کی۔کاغذ(Paper)ابرک(Mica)،اور شیشہ(glass)اچھے ذو برقیہ ہے جو کیپیسٹر کے استعمال میں ہوتے ہے۔ہم جانتے ہے کہ ذو برقیوں کو کیپیسٹر میں استعمال کیا جاتاہے تاکہ ان کی گنجائش بڑھائی جاے۔

اس تصور(Concept) کو سمجھنے کے لیے،ایک متوازی پلیٹ کیپیسٹر کو لیتے ہے جس کے تختیوں پر آزاد چارج Q ہو جیسا کہ شکل میں دکھایاگیاہے۔



شکل(7.1)

ہم جانتے ہے کہ اگرایک مثبت چارج اوپر والی پلیٹ پر ہو اور اگر منفی چارج نیچے والی پلیٹ پر ہے۔اگر تختیوں کا رقبہ A ہے اور ‘d’ ان کے درمیان کی دوری ہو تو کیپیسٹر کی گنجائش ہمیں ملتی ہے۔

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \qquad (7.1)$$

پلیٹ پر چارج ہمیں پوٹینشل فرق دیتا ہے۔

$$V = {}^{Q}\!/_{C} \qquad (7.2)$$

دوسری مساوات سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ اگر گنجائش کو بڑھایا جایا تو پلیٹوں کے درمیان پوٹینشل فرق کم ہو جاتی ہے اس بات کو ہم نیچے دئے گئے تصور سے سمجھا جاسکتا ہے۔

a) ذوبرقیہ بنتے ہے ذروں اور ریزوں (Molecules) کے ایک بہت بڑے تعداد ہے۔

b) ہر ذرے میں ایک مثبت چارج کا ایک مرکز ہوتا ہے جس کے گرد منفی چارج کے برقیہ ہوتے ہے۔

c) مثبت چارج اور منفی چارج برابر ہوتی ہے تاکہ ایک ذرہ برقی طور پر تعدیلی ہوتا ہے۔

d) ذوبرقیوں میں موصل کے مقابلے میں ذروں سے جھڑے ہوئے چارج حرکت کرنے کے لیے آزاد نہیں ہوتے ہے۔یعنی چارج جو ہے وہ بندھے ہوئے ہوتے تھے ذوبرقیوں میں۔

e) ایک ریزہ (Molecule) بنتا ہے ایک ہی قسم یا مختلف قسم کے ذروں سے۔

اس طرح سے ہم ذوبرقیوں کا برتاؤ، برقی میدانوں میں سمجھ سکتے ہے۔

اگر ذوبرقیوں کو باہر کی برقی میدان میں ڈال جائے تو کیا ہوتا ہے؟ بنیادی طور پر ذوبرقیوں کے دو قسمیں ہے۔

غیر قطبی (Non-Polar) ذوبرقیہ یا تعدیلی روں یا غیر قطبی ریزوں سے بنے ہے اور قطبی ذوبرقیہ قطبی ریزوں سے بنے ہے۔دو طریقہ کار ہے جن سے باہری برقی میدان مؤثر کرتا ہے چارج کی تقسیم کو ایک ذوبرقیہ میں۔

1. غیر قطبی ریزوں یا تعدیلی ذروں میں ذوبرقیوں کو ڈالنا ایک غیر قطبی ذوبرقیوں کے اندر۔
2. قطبی ریزوں کے مستقل ذوبرقیوں کو قطبی ذوبرقیہ کے اندر صف بندی کرنا۔

7.3 ذو قطبی امالی (Dipoles Induced)

ذروں کے اس مثال پر غور کر لیں۔

i. مثبت مرکز ایک ذرے کے بیچ میں ہوتا ہے۔

ii. منفی برقیہ اس مرکز کے گرد کرے کی شکل میں گھومتے ہے۔

iii. مثبت اور منفی چارج کا مرکز ایک ہی ہوتا ہے۔

iv. ذرہ برقی طور پر تعدیلی ہے اور کوئی برقی ڈائیپول معیار اثر نہیں ہوتا۔

اب جب "تعدیلی" ذرہ ایک برقی میدان میں رکھا جاتا ہے، دو خطے ایک مثبت اور ایک منفی چارج اس ذرے کے اندر برقی میدان سے مؤثر ہوتے تھے۔ مثبت مرکز میدان کی سمت میں منتقل ہو جاتا ہے اور منفی برقیہ اس کے الٹی سمت میں منتقل ہو جاتے ہے۔ لیکن مثبت اور منفی چارج ایک دوسرے کو کھینچتے ہے اور ذرے کو تھام کے رکھتے ہے۔

اگر برقی میدان بہت بڑا ہے تو ذرے کی روانگی(Ionizes)ہوتی ہے اور اگر برقی میدان زیادہ بڑا نہیں ہے تو دو مختلف طاقتے، ایک جو کہ باہری برقی میدان سے ہے جو مثبت مرکز اور برقیہ کو ایک دوسرے سے دور لے کے جاتے ہیں اور دوسرا طاقت جو ان کی آپسی برقی کشش سے ہے ایک دوسرے کی طرف کھینچتے ہے اور ایک توازن پیدا ہوتا ہے۔جب یہ ہوتا ہے تو مثبت چارج کا مرکز تھوڑا سے ہل جاتا ہے ایک سمت میں اور منفی چارج کا مرکز دوسری سمت میں چلا جاتا ہے۔اس کے نتیجے سے ایک تھوڑی سے دوری پیدا ہوتی ہے دونوں چارج کے مرکزوں کے بیچ میں اور ایک دو قطبی املی ظاہر ہو جاتا ہے۔

پس ایک دو قطبی املی پیدا ہوتا ہے ایک باہری برقیہ میدان کی موجودگی میں۔اگر مثبت مرکز اور منفی مرکز کے درمیان کی دوری ‘d’ ہے تو پھر ڈائیپول معیار اثر

$$\vec{P} = qd\hat{n} = q\vec{d} \qquad (7.3)$$

جہاں $\hat{n}$ یونٹ سمتیہ ہے $\vec{d}$ کی سمت میں اور $\vec{E}$ کی سمت میں ہوتا ہے۔یعنی دوری ‘d’ باہری برقی میدان پر متناسب ہوتی ہے۔

$$\vec{P} \propto \vec{E}$$

$$\vec{P} = \alpha\vec{E} \qquad (7.4)$$

α کو جوہری تقطیب شدہ کہتے ہے اور اس کی اکائی C^2mN^{-1} اس کی قیمت ذرے کی ساخت پر منحصر ہے۔یعنی ہم نے یہ دیکھا کہ برقی دو قطبی املی پیدا ہوتا ہے ایک تعدیلی ذرے میں باہری برقی میدان کی موجودگی میں اسی طرح ہم ریزوں(Molecules)کے مسئلے کا مطالعہ بھی کر سکتے ہے۔

ایک قسم کے ریزوں جن کو غیر قطبی ریزے کہتے ہے، مثبت اور منفی چارج کے مرکز ہمیشہ ایک دوسرے کے اوپر ہوتے ہے ایسے ریزوں کا ڈائی پول حرکت سفر(zero)ہوتا ہے باہری برقی میدان کی غیر موجودگی میں۔ایسے ریزوں سے بنے ہوئے ذو برقیوں کو غیر قطبی ذو برقیہ(Non-Polar Dielectrics)کہتے ہے۔مثلاً ہوا، ہائیڈروجن، کاربن، بینزین،.....وغیرہ۔

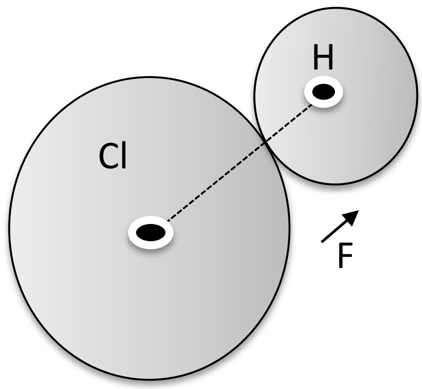
پس غیر قطبی ریزوں کا مستقل ڈائیپول معیار اثر نہیں ہوتا ہے۔ہم یہ کہہ سکتے ہے کہ ان کا برتاؤ باہری برقی میدان کی موجودگی میں بالکل ایک تعدیلی جوہر کے جیسا ہونا چاہئے۔یعنی جب ایک تعدیلی جوہر یا غیر قطبی ریزہ باہری برقی میدان میں رکھا جاتا ہے تو امالیت کی مدد سے اس پر چھوٹا سا ڈائیپول معیار اثر برقی میدان کی سمت میں آتا ہے۔

7.4 برقی میدانوں میں قطبی ریزوں کی صف بندی

(Alignment of Polar Molecules in Electric Fields)

کچھ ریزے ایسے بنے ہوتے ہے کہ مثبت اور منفی چارج کے مرکز ایک دوسرے کے ساتھ جڑے نہیں ہوتے ہے۔ایسے ریزے برقی طور پر تعدیلی ہوتے ہے مگر باہری برقی میدان کے باوجود برقی ڈائیپول معیار اثر رکھتے ہے اور ان کو قطبی ریزے بھی کہا جاتا ہے۔یعنی جو دو برقیہ ایسے ریزوں سے بنتے ہے ان کو قطبی ذو برقیہ کہتے ہے۔

ہم جانتے ہے کہ ہائیڈروجن کلورائیڈ یعنی HCl یا کہ دوزروں (Diatomic) والا ریزہ ہے جو دو مختلف ذروں سے بناہوا ہے۔ بنیادی طور پر یہ دونوں ذرے گول ہے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ جب ان ذروں سے HCl بنتا ہے ہائیڈروجن کا برقیہ تھوڑا سا Cl کے ڈھانچے سے اوپر چلا جاتا ہے اور پیچھے مثبت H کا مرکز جھوڑتا ہے۔ یعنی Cl کی جانب تھوڑا منفی چارج زیادہ ہوتا ہے اور H کی جانب مثبت چارج زیادہ ہوتا ہے۔



شکل (7.2)

اس مثبت اور منفی چارج کے درمیان کی دوری سے HCl میں مستقل ڈائیپول معیار اثر پیدا ہوتا ہے۔ یعنی قطبی ریزوں کے اندر مستقل برقی ڈائی پول S ہوتے ہے۔ اگر ان ریزوں کو باہری برقی میدان میں رکھا جائے تب مثبت چارج پر طاقت یعنی F+، منفی چارج والی طاقت F- کو رد کر دیتی ہے۔ یعنی یہ طاقتیں ایک جوڑا (Couple) بناتی ہے۔ اس لیے ہر برقی ڈائی پول ایک قوت مروڑ (Torque) محسوس کرتا ہے جو اس کو برقی میدان کی سمت میں لاتا ہے۔

موجودہ دروس میں ہم نے یہ سیکھا کہ کیسے غیر قطبی ریزے یا تعدیلی ذرے اور قطبی ریزے برتاؤ کرتے ہے جب ان کو باہری برقی میدان میں رکھا جاتا ہے۔ اب ہم یہ دیکھے گئے کہ ذو برقیہ مادے کو باہری برقی میدان میں رکھنے سے کیا ہوتا ہے۔

7.5 ذو برقیوں کی تقطیب (Polarization of Dielectrics)

ہمیں بات یہ پتہ چلی ہے کہ ذو برقیوں کے دو قسمیں ہے۔ غیر قطبی ذو برقیہ غیر قطبی ریزوں یا تعدیلی ذروں سے بنے ہے اور قطبی ذو برقیہ جو قطبی ریزوں سے بنے ہے۔

غیر قطبی ذو برقیہ: جب ایک غیر قطبی ذو برقیہ، جو غیر قطبی ریزوں اور تعدیلی ذروں سے بنے ہے، باہری برقی میدان میں رکھا جائے تو برقی میدان کی سمت میں ڈائیپول معیار اثر حاصل ہوتا ہے۔

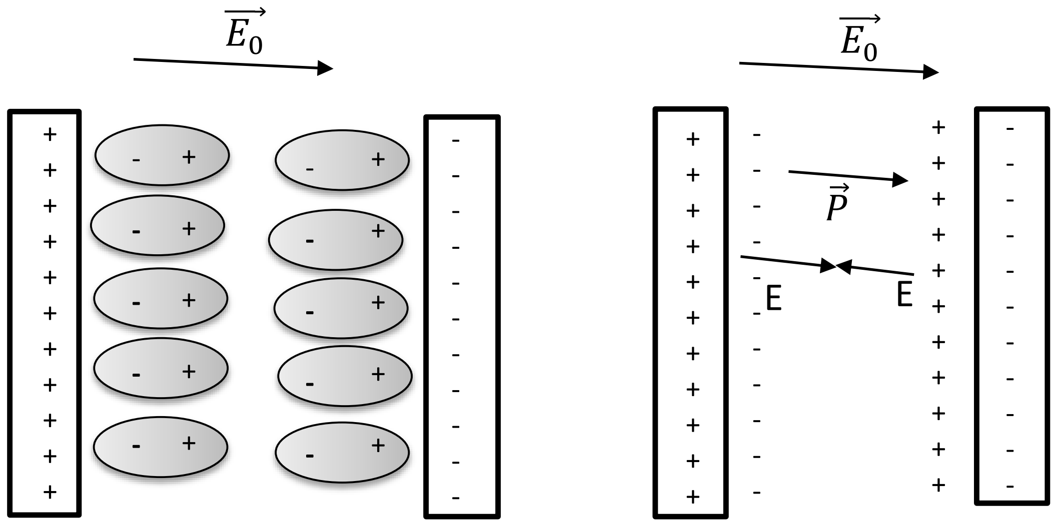
قطبی ذو برقیہ: جب ایک قطبی ذو برقیہ، جو قطبی ریزوں سے بنے ہے اور مستقل ڈائیپول معیار اثر رکھتے ہے، جب ان کو باہری برقی میدان میں رکھا جاتا ہے تو قطبی ریزوں کا مستقل ڈائیپول معیار اثر ایک قوت مروڑ محسوس کرتا ہے اور ان کو برقی میدان کی سمت میں رکھ دیتے ہے۔

پس اوپر کے طریقہ کاروں سے یہ بات واضح ہو گئی کہ دونوں غیر قطبی ذو برقیہ اور قطبی دو برقیہ جوہری سالماتی ڈائی پول بناتے ہے ذو

برقیہ میں میدان کی سمت میں ہم یہ کہہ سکتے ذوبرقیہ قطبی ہوتے ہے۔ مجموعی طور پر ذوبرقیہ برقی طور پر تعدیلی ہے اور ذوبرقیوں کے اندر کوئی زائد چارج نہیں ہوتا۔

اب ہم مقداری طور پر ذو برقیہ کی تفصیل بیان کریں گے۔ اب ہم ایک یکساں(Homogeneous) اور ہم رخ(Isotropic) تختی لیتے ہے۔اس کا مطلب یہ ہے کہ ذوبرقیوں کی خصوصیات ہر سمت میں ایک جیسے ہوتے ہے۔

اگر ایک ذوبرقیہ تختی کو ایک باہری برقی میدان $\overrightarrow{E_0}$ میں رکھا جائے(شکل 7.3)اگر ذوبرقیہ مواد تعدیلی ذروں یا غیر قطبی ریزوں سے بنا ہو تو ایک ڈائیپول معیار اثر ہر ذرے میں پیدا ہوتا ہے۔اسی طرح اگر ایک ذوبرقیہ قطبی ریزوں سے بنا ہے تو ہر مستقل ڈائی پول ایک قوت مروڑ محسوس کرے گا جو اس کو میدان کی سمت میں رکھنے کی کوشش کرتا ہے۔مزید ڈائیپول معیار اثر کی سمت کسی بھی ذوبرقیہ میں ایک جیسی ہوتی ہے جو میدان کی سمت ہے۔



شکل(7.3)

مثبت اور منفی چارج کے مراکز کی دوری ذوبرقیہ تختی کے چہروں پر سطح چارج بناتی ہے۔ جو پھر برقی میدان بناتی ہے ذوبرقیوں کے چہروں پر جیسے $\vec{E}$ جوہری برقی میدان کے سمت کے مخالف ہے۔ برقی میدان کا نتیجہ ایک ذوبرقیہ کے اندر سمتیہ کے نشان سے دیا جاتا ہے۔ $\vec{E}$ اور $\overrightarrow{E_0}$ اس رجحان کو ریاضی کے طور پر سمجھنے کے لیے ہم تقطیب $\vec{P}$ کو بیان کرتے ہے۔جملہ ڈائیپول معیار اثر فی کی حجم

$$\vec{P} = Dipole\ Movement\ Per\ volume$$

اگر ایک ذوقربیہ کے اندر N قطبی ریزے فی کی حجم

$$\vec{P} = N\vec{p} \qquad (7.5)$$

ایک یکساں اور ہم رخ ذوبرقیہ میں $\vec{p}$ برقی میدان $\vec{E}$ پر منحصر ہے۔

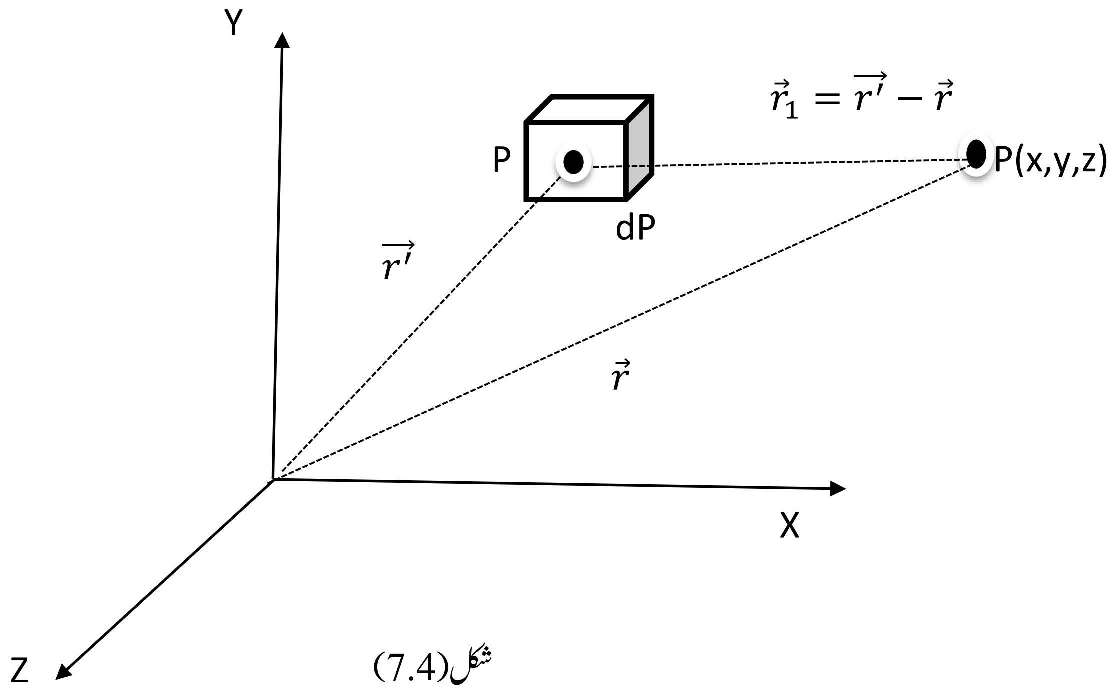
$$\vec{p} \propto \vec{E} \qquad (7.6)$$

$$\vec{p} = \chi \varepsilon_0 \vec{E} \qquad (7.7)$$

جہاں χ کو برقی اثر پزیری کہا جاتا ہے۔ ذو برقی مادے جو مساوات (7.7) کے تابع ہوتے ہے ان کو قطبی ذو برقیہ کہتے ہے۔ مساوات(7.7) کو تجرباتی طور پر بہت سے مادوں کے لیے صحیح پایا گیا اور برقی میدان کمزور ہو۔ مساوات(7.7) ہمیں یہ بھی بتاتی ہے کہ ذو برقی کی اثر پزیری ہمیں ایک حد بتاتی ہے جہاں تک اس کو ایک باہری برقی میدان میں تقطیب کہا جاسکتا ہے۔ ایک دو برقیہ کی اثر پزیری اس کی ساخت پر منحصر ہے اور باہری عوامل پر جیسے کہ درجہ حرارت۔ مزید مساوات (7.6) میں $\vec{E}$ کل برقی میدان ہے ایک ذو برقیہ میں جو کہ آزاد چارج اور ذو برقیہ کی تقطیب سے ہے۔

نوٹ: $\vec{P}$ ہے ڈائیپول معیار اثر اس کی اکائی Cm^{-2} ہے۔

7.6 قطبی شے کا برقی میدان (Electric Field of a Polarized Object)



شکل(7.4)

مان لو ایک قطبی ذو برقیہ شے ہے جس میں بہت سے ذرے یا ریزے برقی میدان کی سمت میں ہے۔ اگر اس مادے کا ڈائیپول معیار اثر فی حجم $\vec{P}$ ہے۔ اب ایک سوال پیدا ہوتا ہے کہ اس شے کی وجہ سے ایک خاص جگہ پر کتنا برقی میدان پیدا ہوتا ہے؟

برقی سکونیات SI میں ہم جانتے ہے ایک ڈائی پول کی وجہ سے کتنا برقی میدان ہوتا ہے۔ اس علم کی بنیاد پر ہم اس شے کو بہت سے ویسے ڈائی پول S میں تقسیم کریں گے اور ان کے برقی میدانوں کو جوڑینگے تاکہ ہمیں پورا برقی میدان پتہ چل سکے۔

اس شے کا ایک چھوٹا سا حصہ لیتے ہے۔ جس کا ڈائیپول معیار اثر $\vec{P}$ ہو۔ پہلے اس ڈائی پول کی وجہ سے اس جگہ پر برقی قوت (Electric Potential) پتہ کریں گے اور پھر ان سب برقی قوتوں کو جوڑینگے تاکہ پوری برقی قوت پتہ چل جائے۔ ہمیں یہ پتہ ہے کہ ایک اکیلے ڈائی پول کے لیے $\vec{r}$ نقشہ پر برقی قوت ہوتی ہے۔

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}\vec{P}}{r^2} \tag{7.8}$$

شکل(7.4)ایک حجم کا حصہ دکھاتی ہے۔ جوذو برقیہ کا ہے(r (x, y, z پر اور جس کا $\vec{\rho}dv$ ڈائیپول معیار اثر اس حجم کے حصہ کی وجہ سے ρ نقشہ پر برقی قوت ہو گی۔

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}r_1}{{r_1}^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\hat{r}_1}{{r_1}^2}dv(\vec{p} = \vec{\rho}dv) \tag{7.9}$$

جہاں

$$\vec{r}_1 = r - \vec{r}_1 \tag{7.10}$$

پورے حجم پر جوڑنے کے بعد برقی قوت کچھ اس طرح سے آتی ہے

$$V(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{\bar{p}.\hat{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2}dv \tag{7.11}$$

اب ہم یہ دکھا سکتے ہے۔

$$\nabla\left(\frac{1}{r_1}\right) = \frac{\widehat{r_1}}{{r_1}^2} \tag{7.12}$$

جہاں ∇^1 کو(Laplacian Operator)بولتے ہے۔

7.7 ذو برقیہ میں برقی سکونیات کی مساوات(نقل مکان سمتیہ $\bar{D}$)

(Electrostatic Equations in Dielectrics(Displacement Vectors))

ہمیں برقی سکونیات S کی بنیادی مساوات یاد ہے جس کو گواس کا کلیہ بھی بولتے ہے اور جو

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = {}^{\rho}/_{\varepsilon_0} \tag{7.13}$$

جہاں ρ کو حجم چارج کثافت اور $\vec{E}$ کو برقی میدان کہا جاتا ہے۔ لیکن ذو برقیہ کے لیے یہ مناسب ہے کہ اس برقی میدان کو دو حصوں میں تقسیم کیا جائے۔

ایک جو باؤنڑ تقطیب (Bound Polarization)چارج کثافت(ρ_b) کی وجہ سے ہے اور دوسرا جو آزاد چارج کی وجہ سے ہے۔

پھر ہم ذو برقیہ کے اندر پوری حجم چارج کثافت(ρ) کو باؤنڑ تقطیب چارج کثافت(ρ_b)اور مفت چارج کثافت(ρ_f) کے جوڑنے سے ظاہر کریں گے۔

$$\rho = (\rho_b) + (\rho_f) \tag{7.14}$$

پس ذو برقیہ کے لیے گواس کا کلیہ کچھ اس طرح کا بن جاتا ہے۔

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho_f + \rho_b}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_f - \vec{\nabla}.\vec{p}}{\varepsilon_0}\left(\because \rho_b = -\vec{\nabla}.\vec{p}\right) \tag{7.15}$$

$$\vec{\nabla}.\left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}\right) = \frac{\rho_f}{\varepsilon_0} \tag{7.16}$$

$$\vec{\nabla}.(\varepsilon_0 E + \vec{p}) = \rho_f \tag{7.17}$$

اب ہم ایک نیا سمتیہ $\vec{D}$ کو بیان کریں گے جس کو برقی نقل مکان سمتیہ کہتے ہے۔

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{p} \tag{7.18}$$

مساوات(7.18)کو مساوات(7.17)میں استعمال کرنے کے بعد گواس کا کلیہ کچھ اس طرح بن جاتا ہے۔

$$\vec{\nabla}.\vec{D} = \rho_f \tag{7.19}$$

تکملہ (Integral)کی شکل کو اس طرح سے لکھا جاتا ہے۔

$$\int \vec{D}.\overrightarrow{ds} = Q_f \tag{7.20}$$

جہاں Q_f پوری آزاد چارج ہے۔یعنی ہم $\vec{D}$ کو گواس کا کلیہ کی مدد سے ناپ سکتے ہے اس چارج distribution میں جہاں قطبی، Spherical،Planar یا Cylindrical Symmetryہو۔$\vec{E}$ کے کرل کی مساوات میں کوئی تبدیلی نہیں آتی ہے۔

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \tag{7.21}$$

قطبی دو برقیوں میں تقطیب $\vec{P}$ برقی میدان پر ہی منحصر ہے۔

$$\vec{P} = \varepsilon_0\chi\vec{E} \tag{7.22}$$

بشرطیکہ کہ $\vec{E}$ کمزور ہو۔

χ کو برقی اثر پزیری کہتے ہے۔

مساوات(7.18)اور(7.22)سے ہمیں یہ ملتا ہے۔

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0\vec{E} + \varepsilon_0\chi\vec{E} = \varepsilon_0(1+\chi)\vec{E} \tag{7.23}$$

اگر ہم $\varepsilon = \varepsilon_0(1+\chi)$ لکھیں۔

تو پھر ذو برقیہ کے اندر $\vec{D}$ کچھ اس طرح کا ہو گا۔

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \tag{7.24}$$

جہاں ε کو ذو برقیہ شے کی مختاری کہتے ہے۔

مساوات(7.23)ہمیں یہ بتاتی ہے کہ $\vec{D}$ پورے برقی میدان پر منحصر ہے۔اگر ہم مساوات(7.24)کو ε_0 سے تقسیم کریں گے تو ہمیں ایک شے ملتی ہے۔

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \chi = K \qquad (7.25)$$

ε_r یا K کو اضافیت مختاری یا ذو برقی مستقل کہا جاتا ہے۔ مساوات (7.24) اور (7.25) سے ہمیں ملتا ہے۔

$$\vec{D} = \varepsilon_0 K \vec{E} \qquad (7.26)$$

اثر پزیری اور ذو برقیہ مستقل ایک زو برقی شے کی اہم بڑی خصوصیات میں سے ہے۔ اگر ایک ایسے چیز کو جس کا ذو برقی مستقل بڑا ہو۔ ایک برقی میدان میں ڈالا جائے تو ذو برقیہ کے اندر برقی میدان کم ہو جائے گا۔ اس خصوصیت کو گنجائش بڑھانے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے اور کیپیسٹر کو جوڑ کرنے کے لیے کافی اہم ہے۔

پس خلا میں برقی سکونیات قوانین کچھ اس طرح سے ہے۔

$$\vec{\nabla}.\overrightarrow{E_0} = \frac{\rho_f}{\varepsilon_0} \; and \; \bar{\nabla} \times \bar{E} = 0 \qquad (7.27)$$

سیدھے ذو برقیوں کے لیے

$$\bar{\nabla}.\overline{E_0} = \rho_f \; or \bar{\nabla}(K\bar{E}) = \frac{\rho_f}{\varepsilon_0} \; \& \; \bar{\nabla} \times \bar{E} = 0 \qquad (7.28)$$

اگر K ہر جگہ ایک جیسا ہے تو یہ ایک مستقلہ کو پھر ہم لکھ سکتے ہے۔

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \bar{\nabla} \times (K\bar{E}) = \bar{\nabla} \times \bar{D} = 0 \qquad (7.29)$$

مساوات (7.28) اور (7.29) سے خلا میں برقی میدان

$$KE = E_0 \qquad (7.30)$$

مساوات (7.30) ہمیں بتاتی ہے کہ ایک ذو برقیہ اوسط میں جس کا ذو برقیہ مستقل K ہے، برقی میدان K سے کم ہو جاتا ہے۔

ہم جانتے ہے کہ ایک متوازی پلیٹ کے لیے جو چارج پلیٹ پے ہوتی ہے وہ ایک جیسی ہوتی ہے۔ یعنی اس کی گنجائش یعنی $C = Q/V$ سے بڑھ جاتی ہے۔ مساوات $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$ سے یہ بات ظاہر ہے کہ

$$C = \frac{\varepsilon_0 K A}{d} \qquad (7.31)$$

ہم مساوات (7.31) کو ایک ذو برقی والے متوازی پلیٹ کیپیسٹر کے لیے استعمال کر سکتے ہے۔

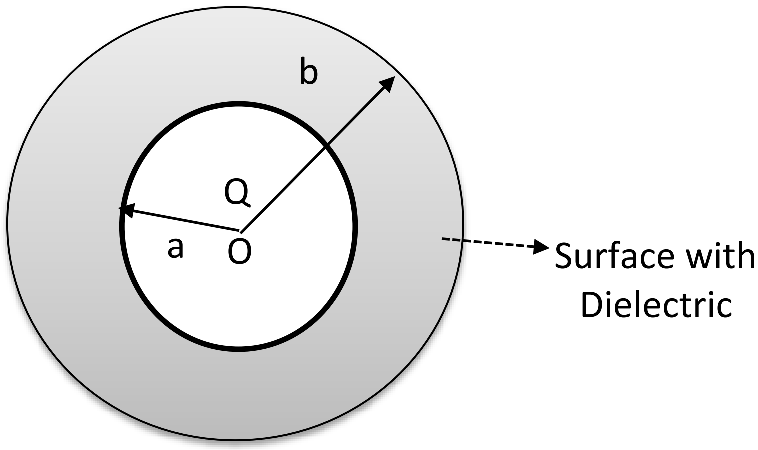
7.8 ذو برقیوں میں برقی میدان (Electric Field in a Dielectric)

ایک دھاتی کرہ (Metal sphere) جس کا نصف قطر (a) اور چارج (Q) ہے۔ یہ ایک سیدھے ذو برقیہ مواد سے گھیرا ہوا ہے جس کا ذو برقیہ 'K' مستقل دوری b تک۔

ان خطوں میں برقی میدان پتہ کرنا ہے۔ $a < r < b, r < a$ اور $r > b$ اور مرکز پر برقی قوت پتہ کرنی ہے۔

چوں کہ ایک موصل میں چارج ہمیشہ سطح پر رہتا ہے۔

گواس کا کلیہ کی مدد سے ہم کہہ سکتے ہے۔ $E = 0$ جب $r < a$



شکل(7.5)

خطہ $a < r < b$ میں برقی میدان پتہ کرنے کے لیے ہم $DA = Q$ کا استعمال کریں گے۔

$$D(4\pi r^2) = Q$$

$$\bar{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}(a < r < b) \tag{7.32}$$

ہم جانتے ہے کہ $D = \varepsilon_0 K\bar{E}$ یا $\bar{E} = \frac{\bar{D}}{\varepsilon_0 K}$

$$\bar{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 K r^2}\hat{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r}(a < r < b) \tag{7.33}$$

خطہ $r > b$ کے لیے جہاں ذوبرقیہ موجود نہیں ہے۔

$$\bar{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}(r > b) \tag{7.34}$$

مرکز پر برقی قوت(Electric Potential)

$$V = -\int_{\infty}^{0} \bar{E}.\bar{dl} = -\int_{\infty}^{b} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr - \int_{b}^{a} \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}dr - \int_{a}^{0} 0.dr \tag{7.35}$$

$$V = \frac{Q}{4\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon_0 b} + \frac{1}{\varepsilon_0 a} - \frac{1}{\varepsilon_0 b}\right] \tag{7.36}$$

7.9 ذوبرقیہ میں گواس کا کلیہ (Guass's Law for Dielectrics)

ذوبرقیہ اوسط میں گواس کا کلیہ تھوڑا سا مختلف ہوتا ہے اس کے جو برقی سکونیات S میں ہوتا ہے اور یہ بات درست ہوگی اگر ہم ایک

اور نفوض کا تعارف کرائے جس کو نقل مکان سمتیہ کہتے ہے اور جو برابر ہوتی ہے۔

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$\overline{D}$ کی زبان میں گواس کا کلیہ کہتا ہے ایک بند سطحی سے $\overline{D}$ کا بہاؤ برابر ہوتا ہے پورے آزاد چارج کے جس اس بند سطحی میں بندر ہتا ہے۔

$$\oint \overline{D}.\overline{ds} = Q \ or\ \overline{\nabla}.\overline{D} = \rho_f$$

برقی مختاری ,اثر پزیری اور ذوبرقیہ مستقل ایک یکساں اور ہم رخ ذوبرقیہ کو قطبی ذوبرقیہ کہتے ہے۔ $\vec{p} = \varepsilon_0 \chi \overline{E}$

جہاں χ کو برقی اثر پزیری کہتے ہے $\overline{D}$ (Displacement Value) اس دو برقیہ کے لیے

$$D = \varepsilon_0(1+\chi)\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$$

جہاں ε کو اوسط کی مختاری کہتے ہے۔

ہم ایک اور بغیر جہت کی مقدار K کو تعارف کرتے ہے جو $K = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ اور یعنی $\vec{D} = \varepsilon_0 K\vec{E}$

$\vec{D}$ خالی آزاد چارج پر منحصر ہے اور کسی کے بغیر بھی حاصل کیا جاتا ہے۔

گنجائش پر دوقربیہ کا اثر: ایک ذوبرقیہ کے اندر برقی میدان جو آزاد چارج کی وجہ سے ہوتا ہے K کی مقدار سے کم ہو جاتا ہے۔اس کی وجہ سے ایک کیپیسٹر کی گنجائش بڑھ جاتی ہے جو ایک ذوبرقیہ سے بھرا ہوا ہے اور جو برابر ہوتی ہے اس چیز کے ذوبرقیہ مستقل کے۔

7.10 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

دو متوازی پلیٹیں جن کا تراشی رقبہ $100cm^2$ ہے اور برابر اور مخالف چارج $1.0 \times 10^{-7}C$ کا دو پلیٹوں کے درمیان کی جگہ جو ذوبرقیہ مواد سے بھرا گیا ہے اور ذوبرقیہ کے اندر برقی میدان $3.3 \times 10^5\ {}^{v}/_{m}$ کا ہے۔ذوبرقیہ مستقل کیا ہوگا؟ اگر ذوبرقیوں کے بغیر پلیٹوں کا برقی میدان $E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ جہاں J پلیٹوں کی چارج کثافت ہے۔

حل: سطحی چارج کی کثافت $\sigma = {}^{Q}/_{A}$

$$\sigma = \frac{1.0\times10^{-7}}{100\times10^{-4}} = 10^{-5}\ {}^{C}/_{m^2}$$

ذوبرقیہ کی غیر موجودگی میں پلیٹوں کے بیچ میں برقی میدان

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{1.0\times10^{-5}}{8.85\times10^{-12}}\frac{cm^{-2}}{C^2N^{-1}m^{-2}} = \frac{1.0\times10^{7}}{8.85}\ {}^{V}/_{m}$$

ذوبرقیہ کی موجودگی میں برقی میدان کم ہوتا ہے ذوبرقی مستقل کے برابر والے نمبر سے یعنی $E = {}^{E_0}/_{K}$

$$K = \frac{E_0}{E} = \frac{1.0\times10^{7}}{8.85\times3.3\times10^{5}} = 3.4$$

حل شدہ مثال2

مان لیجیے کہ ایک متوازی پلیٹ کیپیسٹر دو چکور پلیٹوں کی بنی ہو جن کا رقبہ $6.45 \times 10^{-4} m^2$ ہے اور جن کی آپس میں دوری $2 \times 10^{-3} m$ کی ہے۔ 100V کی برقی قوت کو استعمال کیا گیا۔ اگر ذو برقی مستقل (قیمت 6) پلیٹوں کے بیچ میں ڈالا جائے تو پھر بتائیں۔

i) کیپیسٹر کی گنجائش ii) ہر ایک پلیٹ پر کتنی چارج جمع ہوگی iii) نقل مکان (D) iv) تقطیب P

حل:

i. ہم جانتے ہے کہ ذو برقیہ سے بھرے ہوئے متوازی پلیٹ کیپیسٹر کی گنجائش

$$C = \frac{K\varepsilon_0 A}{d} = \frac{6 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 6.45 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-3}} = 1.7 \times 10^{-11} F$$

ii. پلیٹ پر جمع چارج برابر ہوتی ہے CV کے جہاں

$V = 100v \;\&\; C = 1.7 \times 10^{-11} f$

iii. بس چارج۔ $-1.7 \times 10^{-9} c$

iv. ذو برقیہ میں گواس کا کلیہ سے

$$DA = Q \quad \text{یا} \quad D = Q/A$$

پس $D = {}^{Q}/_{A} = \frac{1.7 \times 10^{-9} C}{6.45 \times 10^{-4} m^2} = 2.6 \times 10^{-6} cm^{-2}$

چوں کہ $D = \varepsilon_0 E + P$ اور $E = \frac{V}{d}$

$$P = D - \varepsilon_0 E = \left[2.6 \times 10^{-6} - \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 100}{2.0 \times 10^{-3}}\right]$$

$$P = 2.6 \times 10^{-6} - 4.4 \times 10^{-7} = 2.2 \times 10^{-6} cm^{-2}$$

حل شدہ مثال3

ایک بڑھا دھاتی پلیٹ جس کا رقبہ $1m^2$ ہے $4.4 \times 10^{-10} c$ چارج کے لیے چلتا ہے۔ اس پلیٹ کے نزدیک ایک جگہ پر برقی میدان بتاؤ؟

حل: مان لو کہ پلیٹ کی سطح پر T چارج کثافت ہے۔

جیسا کہ $\bar{E}$ اور $\overline{ds}$ آپس میں عمودی (Perpendicular) ہے اور انکا میزانیا ضرب صفر ہے۔ یعنی

$$\oint E.ds = \partial AE = \frac{JA}{\varepsilon_0} \; or \; \bar{E} = {}^{J}/_{2}\, \varepsilon_0$$

چوں کہ $A = 1m^2$ پھر

$$J = \frac{Q}{A} = \frac{4.4\times10^{-10}c}{1m^2} = 4.4\times10^{-10}cm^{-2}$$
$$\Longrightarrow E = \frac{J}{2\varepsilon_0} = \frac{4.4\times10^{-10}}{2\times8.85\times10^{-12}} = 24.9\,{}^{V}/_{m} = 25\,{}^{V}/_{m}$$

حل شدہ مثال4

متوازی تختیوں والے کپیسٹر کی تختیوں کا رقبہ 2 مربع میٹر ہے۔ان کا درمیانی فاصلہ 5x10m ہے اور ان کے درمیان عائد کردہ تفاوت قوۃ 10 وولٹ ہے۔

i. (a) گنجائش (b) ہر تختی پر کا بارو (c) ہر تختی کی سطح پر بارو کی کثافت (d) برقی حدت (e) ان کے درمیانی جگہ میں برقی نقل مکان معلوم کیجیے۔

ii. جب بیاٹری کو عالحدہ کرکے K=S مستقل اور 0.5x10m کید بازت والے برق گزار کو داخل کیا جائے تو E,C تفاوت قوۃ اور برقی نقل مکان معلوم کیجیے۔

حل: (i

$$a)\ C = \frac{\varepsilon_0 KA}{d} = \frac{8.85\times10^{-12}\times1\times2}{5\times10^{-3}} = 3.56\times10^{-3}\mu F$$
$$b)\ q = CV = 3.56\times10^{-9}\times10^4 = 3.56\times10^{-5}coul$$
$$c)\ \sigma = \frac{q}{A} = \frac{3.56\times10^{-5}}{2} = 1.78\times10^{-5}\,{}^{Coul}/_{m^2}$$
$$d)\ E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{1.78\times10^{-5}}{8.9\times10^{-12}} = 2.0\times10^{6}\,{}^{volt}/_{m}$$

(ii

$$C^1 = CK = 3.56\times10^{-9}\times5 = 17.8\times10^{-3}\mu F$$
$$q^1 = C^1V = 17.8\times10^{-9}\times10^4 = 17.8\times10^{-5}Coul$$
$$\sigma^1 = \frac{q^1}{A} = \frac{17.8\times10^{-9}\times10^4}{2} = 8.9\times10^{-5}\,{}^{coul}/_{m^2}$$
$$E = \frac{\sigma^1}{K\varepsilon_0} = \frac{8.9\times10^{-5}}{5\times8.9\times10^{-12}} = 2.0\times10^{6}\,{}^{Volt}/_{m}$$
$$D = \varepsilon_0 KE = \frac{5\times8.9\times10^{-5}\times8.85\times10^{-12}}{5\times8.85\times10^{-12}} = 8.9\times10^{-5}\,{}^{Volt}/_{m}$$
$$P.d = E^1 d = 2\times10^6\times0.5\times10^{-2} = 1\times10^4 Volt$$

7.11 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- جب ایک ذو برقیہ کو باہری برقی میدان میں رکھا جاتا ہے تو یہ تقطیب شدہ ہو جاتا ہے۔
- ذو برقیہ (تقطیب): برقی دو قطبیہ معیار اثر فی حجم $\vec{\rho}$ کو تقطیب کہتے ہے۔
- ذرہ (Atomic) تقطیب پزیری: برقی ذو قطبیہ معیار اثر جو ایک ذرہ یا ریزہ نے حاصل کیا ہے۔ وہ برقی میدان پر منحصر ہے اور

$\vec{p} = \alpha E$ کی شکل میں لکھا جاتا ہے۔ جہاں α کو ذرہ تقطیب پزیری کہتے ہے۔

- بند (باؤنڑ) چارج: برقی میدان جو ایک قطبی ذو برقیہ پیدا کرتا ہے وہ برابر ہوتا ہے اس برقی میدان کے جو ایک باؤنڑ سطح چارج کثافت $J_b = \bar{P}.\hat{n}$ اور $\overrightarrow{\rho b} = -\nabla.\bar{P}$ سے بنتا ہے۔
- ذو برقیہ میں گواس کا کلیہ: ذو برقیہ اوسط میں گواس کا کلیہ تھوڑا سا مختلف ہوتا ہے اس کے جو برقی سکونیات S میں ہوتا ہے اور یہ بات درست ہو گی اگر ہم ایک اور نفوض کا تعارف کرائے جس کو نقل مکان سمتیہ کہتے ہے اور جو برابر ہوتی ہے۔ $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$

$\vec{D}$ کی زبان میں گواس کا کلیہ کہتا ہے ایک بند سطح ہی سے $\vec{D}$ کا بہاؤ برابر ہوتا ہے پورے آزاد چارج کے جس اس بند سطح میں بند رہتا ہے۔

$$\oint \bar{D}.\overline{ds} = Q \ or\ \nabla.\bar{D} = \overline{\rho f}$$

برقی مختاری , اثر پزیری اور ذو برقیہ مستقل ایک یکساں اور ہم رخ ذو برقیہ کو قطبی ذو برقیہ کہتے ہے۔ $\vec{\mathrm{p}} = \varepsilon_0\chi\bar{E}$

جہاں χ کو برقی اثر پزیری کہتے ہے $\bar{D}$(Displacement Value) اس ذو برقیہ کے لیے

$$D = \varepsilon_0(1+\chi)\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$$

جہاں ε کو اوسط کی مختاری کہتے ہے۔

ہم ایک اور بغیر جہت کی مقدار K کو تعارف کرتے ہے جو $K = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ اور یعنی $\vec{D} = \varepsilon_0 K\vec{E}$

$\vec{D}$ خالی آزاد چارج پر منحصر ہے اور کسی حوالہ کے بغیر بھی حاصل کیا جاتا ہے۔

7.12 کلیدی الفاظ (Keywords)

- غیر موصل: وہ مادے ہوتے ہیں جن سے برقی رو نہیں گزر سکتی
- غیر قطبی سالمہ (Non-Polar): اگر مثبت بار کا برقی مرکز اور منفی بار کا برقی مرکز ایک ہی نقطے پر منطبق ہو
- قطبی سالمات (Polar): اگر مثبت اور منفی باروں کے مرکز ایک دوسرے سے ہٹے ہوئے ہوں

7.13 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

7.13.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. ذرہ ڈائیپول معیار اثر کی تعریف کیجیے۔
2. ذو برقی تقطیب سے کیا مراد ہے؟
3. قطبی اور غیر قطبی سالمات کیا ہوتے ہے؟
4. ذو برقیاں سے کیا مراد ہے؟
5. غیر قطبی ذو برقیہ سے کیا مراد ہے؟

6. قطبی ذو برقیہ سے کیا مراد ہے؟

7. سمتیہ نقل مکان (نقل مکان سمتیہ) کی مساوات $\vec{D} =$ ------

(a) $\varepsilon_0\vec{E} + \vec{p}$ (b) $\vec{E} + \varepsilon_0\vec{p}$ (c) $\vec{E} + \vec{p}$ (d) ان میں سے کوئی بھی نہیں۔

8. ذو برقی مستقل کو کس مساوات سے ظاہر کیا جاتا ہے؟

9. ذو برقی مواد کے دو مثالیں دیجیے۔

10. مثبت اور منفی چارج کا مرکز------ہوتا ہے۔

(a) صفر (b) ایک ہی (c) دو (d) ان میں سے کوئی بھی نہیں

11. غیر موصل کے دو مثالیں دیجیے۔

12. نیم موصل سے کیا مراد ہے؟

13. ذرہ برقی طور پر تعدیلی ہے اور کوئی برقی ڈائیپول معیار اثر کی قیمت-----ہوتی ہیں۔

(a) صفر (b) ایک (c) دو (d) ان میں سے کوئی بھی نہیں

7.13.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. ذرہ ڈائیپول معیار اثر اور ذری تقطیب کی تعریف کیجیے۔

2. دو برقی مواد کیا ہے؟ مثالیں بھی دیجیے۔

3. ذو برقی تقطیب سے کیا مراد ہے؟ ذ برقیوں کی افادیت پر بحث کیجیے۔

4. قطبی اور غیر قطبیہ سالماتیں کیا ہوتے ہے۔ مثالیں بھی دیجیے۔

5. ظرفیہ میں ذخیرہ توانائی کے لیے عبارت اخذ کرو۔ تختیوں کے درمیان کسی ذو برقی شے کی موجودگی میں ذخیرہ توانائی معلوم کرو جب کہ (a) برقی خانے کا برقیانہ منقطع کرنے پر (b) برقاؤ برقی خانے کو کسی دور سے جوڑنے پر

6. بیرونی میدان میں ذو برقی واسطہ کے برقاؤ کی وضاحت کرو۔

7. درج ذیل سوالوں کے جواب دیجیے۔

a. ایک متوازی تختیوں والے مکثفے میں دو تختیوں کے درمیان فاصلے کے $\frac{2}{3}$ حصے کو ذو برقیے سے بھرا گیا جس کے نتیجے میں مکثفے کی گنجائش 2.25 گنا بڑھ گئی۔ ذو برقیئے کا مستقل معلوم کیجیے۔

b. غیر قطبی سالمات اور برقی تقطیب کو سمجھائیے۔

c. برقی موصل اور غیر موصل کیا ہوتے ہیں؟

7.13.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. دوبرقی مواد کیا ہے؟مثالیں بھی دے؟دوبرقیوں کی افادیت پر بحث کیجیے۔
2. $\bar{P}, \bar{E}$ & $\bar{D}$ ان تین برقی Vectors کی تعریف اور وضاحت کیجیے۔ $\bar{D} = \varepsilon_0\bar{E} + \bar{p}$ کو ثابت کرو؟اور ان کی اکائی بھی لکھیے۔
3. برقی نقل مکان سمتیہ کی وضاحت کیجیے۔

7.13.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

6. ایک اوسط کا ذو برقی 5 مستقل ہے۔ برقی نقل مکان سمتیہ کی قیمت $5 \times 10^{-2}\ {}^{c}/_{m^2}$ ہے۔ برقی میدان کی شدت کی مقدار پتہ کیجیے؟ $D = K\varepsilon_0 E/\ or\ E = {}^{D}/_{K\varepsilon_0}$
7. $8 \times 10^{-3}m$ جڑ دبازت والے ایک محور مادے کے کندے کو جب متوازی تختیوں والے مکثفے کی تختیوں کے درمیان داخل کیا جاتا ہے تو معلوم ہوا کہ مکثفے کی گنجائش کو اپنی اصلی قیمت پر بحال کرنے کے لیے تختیوں کے درمیان فاصلے میں $7 \times 10^{-3}m$ کا اضافہ کرنا پڑتا ہے۔مادے کا ذو برقیہ مستقل محسوب کیجیے۔
8. ایک متوازی تختیوں والے مکثفے کی تختیوں کا درمیانی فاصلہ $2.4 \times 10^{-2}m$ ہے۔ان کے درمیانی $1.2 \times 10^{-2}m$ جڑ دبازت اور 5 ذو برقیہ مستقل کے مستطیلی کندے کو داخل کیا گیا اور تختیوں کے درمیانی فصل میں اتنا اضافہ کیا گیا کہ مکثفے کی گنجائش میں کوئی تبدیلی نہ ہونے پائے۔اس نئے درمیانی فاصلے کو محسوب کیجیے۔
9. کسی واسطے کے ذو برقی مستقل اور اضافہ اجازیت کی تعریف لکھیے۔ایک نقطہ برقی سے کسی فاصلے پر برقی میدان کی حدت کے لیے ضابطہ اخذ کیجیے۔

7.14 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Bleaney, B I, and B Bleaney. Electricity and Magnetism. Oxford: Oxford University Press, 2013.
2. Duffin, W J. Electricity and Magnetism. Cottingham: W.J. Duffin, 2001.
3. Gaur, R.K. &Gupta, S.L.Engineering Physics.Dhanpat Rai Publication.
4. Resnick, Robert, David Halliday, and Kenneth S. Krane. Physics. New York: Wiley, 2002.

اکائی 8۔ مکثفے

(Capacitors)

اکائی کے اجزا

8.0 تمہید (Introduction)

اس اکائی میں ہم مکثفہ (Capacitor) کا مطالعہ کریں گے جو کہ برقی و برقیاتی اشیا میں استعمال ہوتا ہے۔ پچھلی اکائی میں ہم برقی میدان میں موجود برق گزار (Dielectric) مادہ اور برق گزار (Dielectric) قوۃ کے برقی میدان کے طرز عمل کا مطالعہ کرے تھے۔ جس سے ہمیں معلوم ہوا کہ برق گزار (Dielectric) مادہ کو مکثفہ (Capacitor) میں استعمال کیا جاتا ہے پر ہم اس اکائی میں مکثفہ (Capacitor) پر توجہ مرکوز کریں گے۔

پچھلی جماعتوں میں یہ ہمیں معلوم ہوا تھا کہ کسی موصل پر عائد بار (بھرن) میں اضافہ کرنے اس کے قوۃ میں بھی اضافہ ہوتا ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ کسی موصل پر عائد بار (بھرن) اس کے وولٹیج یا تفاوت قوۃ کے راست متناسب ہوتا ہے اور اس نسبت کے مستقل کو مکثفہ (Capacitor) کی گنجائش (Capacitance) کہتے ہیں۔ یا پھر ہم اسے یوں بھی کہا سکتے ہیں کہ بھرن اور تفاوت قوۃ میں پائی جانی والی نسبت موصل کی گنجائش (Capacitance) کہلاتی ہے۔

ریاضی کو استعمال کرتے ہوئے ہم اس کو اس طرح ظاہر کر سکتے ہیں

$$Q \propto V$$
$$Q = CV$$

جہاں پر مستقل C کو گنجائش کہتے ہیں اور یہ بھی ہمیں معلوم ہے کہ جب کسی شے میں گنجائش (Capacitance) ہوتی ہے تب اس شے کو مکثفہ (Capacitor) کہتے ہیں۔ ہماری روزمرہ زندگی میں مکثفہ کئی جگہ استعمالات ہوتا ہے۔

مکثفہ (Capacitor) برقی و برقیاتی دور میں استعمال ہوتے ہیں۔ عام طور پر یہ موٹر اور پنکھوں میں ہمیں نظر آتے ہیں اسی طرح امالہ کے ساتھ اسے جوڑ کر اہتزاز کو پیدا کیا جاتا ہے اس طرح برقیاتی ترسیل میں بھی انکا استعمال ہوتا ہے۔

8.1 مقاصد (Objectives)

یہ اکائی برقی گنجائش کے مفہوم سے بحث کرتی ہے اور برقی باروں اور وولٹیج سے اس کے تعلق کی وضاحت کرتی ہے۔ یہ اکائی ان

شرائط کو سمجھاتی ہے جو بقائے ہوئے مکثفے میں توانائی کے محفوظ کرنے کے لیے ضروری ہوتے ہے اور اس اکائی میں متوازی تختیوں والے مکثفے کی گنجائش کو محسوب کرنے والی مساواتوں کو سمجھایا گیا ہے۔

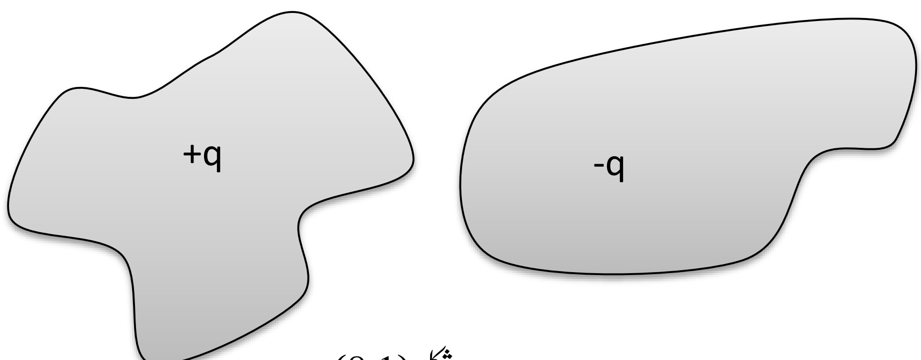
اس اکائی کو پڑھنے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ

- مکثفہ (Capacitor) کی گنجائش (Capacitance) کو بیان کر سکیں گے۔
- مکثفہ (Capacitor) اور برق گزار (Dielectric) واسطے میں ذخیرہ شدہ توانائی کو معلوم کر سکیں گے۔
- مکثفہ میں برق گزار (Dielectric) مادہ کو نصب کرنے کے بعد مکثفہ کی گنجائش کو معلوم کر سکیں گے۔
- متوازی تختیوں والے مکثفہ، کروی تختیوں والے مکثفہ اور استوانی تختیوں والے مکثفہ کی گنجائش کو معلوم کر سکیں گے۔
- ہم سلسلہ و ہم متوازی ترتیب میں مکثفہ کی موثر گنجائش کو معلوم کر سکیں گے۔
- عملی طور پر مکثفہ کی وضاحت کر سکیں گے اور ان کے استعمالات کی فہرست بنا پائیں گے۔

8.2 گنجائش (Capacitance)

فرض کرو کہ دو موصلوں کی چادریں (Sheets) ہیں۔ جس میں علی الترتیب مثبت q+ اور منفی q− برقی بار (بھرن) ہے جس طرح ہمیں شکل (8.1) میں نظر آرہا ہے۔ ہمیں معلوم ہے کہ ان موصل پر تفاوت قوۃ مستقل رہے گا کیوں کہ یہ ہم قوۃ (مساوی قوۃ رکھنے والی) (Equipotential) سطح رکھتے ہیں۔ اس طرح ان دونوں چادروں (Sheets) کے درمیان تفاوت قوۃ یہ ہوگا۔

$$V = V_+ + V_- = -\int_{-}^{+} \vec{E}\,.dt \qquad (8.1)$$



شکل (8.1)

جہاں V_+ موصل کا قوۃ ہے جو q+ برقی بار (بھرن) رکھتا ہے اور V_- موصل کا قوۃ ہے جو q- برقی بار (بھرن) رکھتا ہے۔

ہمیں معلوم ہے کہ دو موصلوں پر مشتمل نظام جس کا تفاوت قوۃ V مساوات ایک (8.1) میں بتایا گیا ہے اس کا جملہ برقی بار (بھرن) Q تفاوت قوۃ V کے راست متناسب ہوتا ہے۔ $Q \propto V$

$$Q = CV \qquad (8.2)$$

جہاں متناسب کے مستقل C کو اس نظام کی گنجائش (Capacitance) کہتے ہیں۔ مساوات (8.2) کے لحاظ سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$C = \frac{Q}{V}$$

جہاں V مثبت موصل اور منفی موصل کے قوۃ کا درمیانی فرق ہے اور Q مثبت موصل کا برقی بار (بھرن) ہے۔ اس طرح C ایک مثبت مقدار ہو گی اور اس کی بین الاقوامی نظام میں اکائی فیریڈ ہوتی ہے۔ جس کو F سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$1Farad = \frac{1\,Coloumb}{1\,Volt} \qquad (8.3)$$

برقی دور میں مکثفہ (Capacitor) کو بتلانے کے لیے اس علامت کو استعمال کیا جاتا ہے۔ ─┤├─

8.3 مکثفہ میں ذخیرہ شدہ توانائی (Energy Stored in a Capacitor)

ہم جانتے ہیں کہ مکثفہ (Capacitor) ایسا برقیاتی آلہ ہے جو اپنے اندر موجود تختیوں میں برقی بار (بھرن) کو جمع کرتے ہوئے برقی توانائی کو ذخیرہ کرتا ہے۔ ان تختیوں میں موجود برقی بار (بھرن) کو منتقل کرتے ہوئے مکثفہ (Capacitor) میں موجود ذخیرہ شدہ توانائی کو حاصل کیا جا سکتا ہے۔ پر ایسا کرنے کے لیے ہمیں برقی میدان کے مخالف سمت میں کام کرنا پڑتا ہے جو انہیں مثبت موصل کی جانب واپس کھینچتا ہے اور منفی موصل سے دور ڈھکیلتا ہے۔

فرض کرو کہ کے موصل پر موجود برقی بار (بھرن) q ہے اور تفاوت قوۃ V ہے اس طرح کہ $V = \frac{q}{c}$ اور موصل پر چھوٹے سے برقی بار (بھرن) dq کو لا متناہی سے مکثفہ تک لانے کے لیے کیا ہوا کام dw ہو گا جو

$$dw = Vdq = \frac{q}{C}dq \qquad (8.4)$$

مکثفہ (Capacitor) کو صفر برقی بار (بھرن) q =0 سے خطی برقی بار (بھرن) q =Q میں تبدیل کرنے کے لیے کیا گیا کام ہو گا۔

$$W = \int_0^Q dw = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{1}{C}\int_0^Q qdq = \frac{q^2}{2C}\bigg| = \frac{Q^2}{2C} \qquad (8.5)$$

یہ کام برقی توانائی بالقوۃ U کی شکل میں مکثفہ (Capacitor) میں ذخیرہ ہوتا ہے۔ کیوں کہ $Q = \mathrm{CV}$ ہوتا ہے لہذا

$$U = \frac{C^2V^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 \qquad (8.6)$$

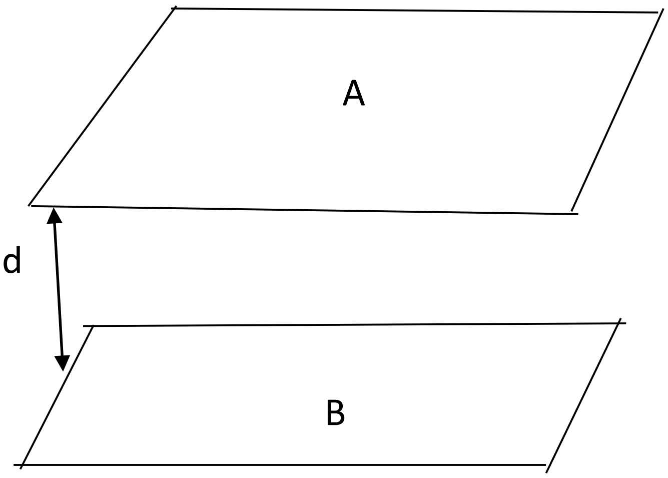
جہاں V مکثفہ (Capacitor) کا خطی قوۃ ہے۔ جہاں مساوات (8.5) اور (8.6) کسی بھی ساخت اور جسامت کے مکثفہ (Capacitor) کے لیے درست ہوتی ہے۔

مثال کے طور پر V 10 قوۃ رکھنے والے 1 μF مکثفہ (Capacitor) میں ذخیرہ شدہ توانائی ہو گی۔

$$U = \frac{1}{2}cv^2 = \frac{1}{2}(10^{-6}F)(10V^2) = 50 \times 10^{-6}j$$

8.4 متوازی تختیوں والا مکثفہ (Parallel Plate Capacitor)

متوازی تختیوں والے مکثفہ (Capacitor) میں دو دھاتی تختیاں پائی جاتی ہے جو مستطیل کی شکل یا دائروی شکل کی ہو سکتی ہیں جو باہم ایک دوسرے کے متوازی ہوتی ہیں اور d درمیانی فاصلہ ان کے درمیان ہوتا ہے۔ جس طرح ہمیں شکل(8.2) میں نظر آرہا ہے۔



شکل(8.2)

فرض کرو کہ ایک A تختی پر مثبت برقی بار(بھرن) +Q اور دوسری تختی B پر منفی برقی بار(بھرن) -Q ہے اور تختیوں میں برقی بار(بھرن) برابر طور پر تمام سطح پر منقسم ہے۔ سطحی بار(بھرن) کی کثافت σ ہر تختی پر یہ ہوگی۔ $\sigma = \frac{Q}{A}$

اور جہاں پر A تختی کا رقبہ ہوگا۔ ہم گاؤس کے کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے تختیوں کے درمیان برقی میدان کو معلوم کر سکتے ہیں۔

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (8.7)$$

متوازی تختیوں والے مکثفہ میں برقی میدان:

گاؤس کے کلیہ کی مدد سے ہمیں تختی A اور B کے درمیان پائے جانے والا تفاوت قوۃ معلوم ہوتا ہے۔

$$V = \int_A^B \vec{E} \, . \overrightarrow{dl} = Ed = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 A} d \qquad (8.8)$$

اور

$$C = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 A} d \qquad (8.9)$$

اگر تختیاں مربعی شکل کی ہو جس کا ضلع 10 سمر ہو اور ایک دوسرے سے $1.0 \times 10^{-4} m$ فاصلے پر ہوں تب ان کی گنجائش(Capacitance) ہوگی۔

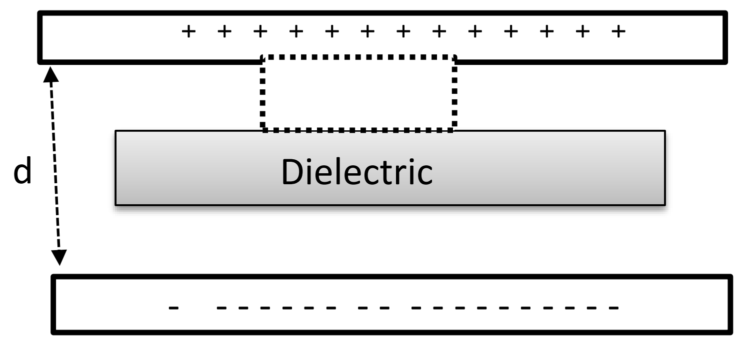
$$C = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 A} d = \frac{(1.0 \text{ x} 10^{-2} m)^2}{1.0 \text{ x} 10^{-4} m} \times 8.85 \times 10^{-12} = 885 \, pF$$

$$\therefore C = 8.85 \times 10^{-10} F$$

8.5 برق گزار واسطے کے ساتھ متوازی تختیوں والا مکثفہ

(Parallel Capacitor with Dielectric Medium)

جب متوازی تختیوں والے مکثفہ کی تختیوں کے درمیان ایک برق گزار واسطے کو رکھا جاتا ہے تب تختیوں کے برقی میدان میں تخفیف یا کمی ہوتی ہے جو مستقل k کے سبب ہوتی ہے اسے برق گزار (Dielectric) مستقل کہتے ہیں۔اس کی تصدیق کرنے کے لیے ہم فرض کرتے ہیں کہ متوازی تختیوں والا مکثفہ (Capacitor) ہے جس کا تراش عمودی کا رقبہ A ہے برق گزار واسطے کو ان پلیٹ ان تختیوں کے درمیان رکھا گیا ہے جس طرح شکل (8.3) میں نظر آرہا ہے۔فرض کرو کے تختیوں کا درمیانی فاصلہ d ہے اور تختی کی سطحی بار (بھرن) کی کثافت سگمہ σ ہے۔اب برق گزار (Dielectric) واسطے پر گاوسین سطح کے رقبہ کے لیے گاوس کے کلیہ کو استعمال کرتے ہیں۔جو ہمیں شکل (8.3) میں نظر آرہی ہے۔



شکل (8.3)

$$\oint \vec{D}.\overrightarrow{ds} = (Q)_{Enclosed}$$

جہاں برقی نقل مکان $\vec{D}$ مکثفہ (Capacitor) کی تختیوں کے عمود وار ہوتا ہے اور صرف آزاد سطحی بار (بھرن) کی کثافت ہی اس میں شریک ہوتی ہے۔

$$D = \frac{Q}{A} = \sigma \qquad (8.10)$$

ہمیں معلوم ہے کہ بندیشی سطحی بار (بھرن) D احالہ میں شرکت نہیں کرتے۔لہذا $\vec{D} = \varepsilon_0 K\vec{E}$ یا

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 K} \qquad (8.11)$$

مساوات (8.10) اور (8.11) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0 K} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 K} \qquad (8.12)$$

مگر تختیوں کے درمیان تفاوت قوۃ V ہو گا جو $V = Ed$ ہو گا اور مساوات (8.13) سے ہمیں اس کی گنجائش (Capacitance)

حاصل ہوتی ہے جو

$$D=\frac{Q}{V}=\frac{\sigma A}{\varepsilon_0 K}=\frac{\sigma A}{\frac{\sigma d}{\varepsilon_0 K}}=\frac{\varepsilon_0 AK}{d}$$

$$C=\frac{\varepsilon_0 AK}{d} \qquad (8.13)$$

مساوات (8.10) اور (8.13) سے ہمیں متوازی تختیوں والے مکثف (Capacitor) کی گنجائش (Capacitance) معلوم ہوتی ہے اور اس سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ برق گزار (Dielectric) مادے کو مکثف (Capacitor) کی تختیوں میں رکھنے پر مکثف (Capacitor) کی گنجائش (Capacitance) میں اضافہ ہوتا ہے۔

برق گزار مادے کے ساتھ مکثف (Capacitor) کی گنجائش (Capacitance) اور بغیر برق گزار (Dielectric) مادے کے ساتھ مکثف (Capacitor) کی گنجائش (Capacitance) کے درمیان پائی جانے والی نسبت سے ہمیں برقی گزار مستقل حاصل ہوتا ہے جسے ہم k سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$K=\frac{\text{برق گزار مادے کے ساتھ مکثف (Capacitor) کی گنجائش}}{\text{بغیر برق گزار (Dielectric) مادے کے ساتھ مکثف (Capacitor)}}$$

$$K=\frac{C_d}{C_a} \qquad (8.14)$$

یعنی برق گزار (Dielectric) مستقل K دراصل کسی مکثف (Capacitor) کی تختیوں میں برق گزار (Dielectric) مادے کے ساتھ گنجائش (Capacitance) اور اسی مکثف (Capacitor) کی تختیوں میں ہوا کے ساتھ جو گنجائش (Capacitance) ہوتی ہے ان دونوں میں پائی جانے والی نسبت کو برق گزار مستقل کہتے ہیں۔

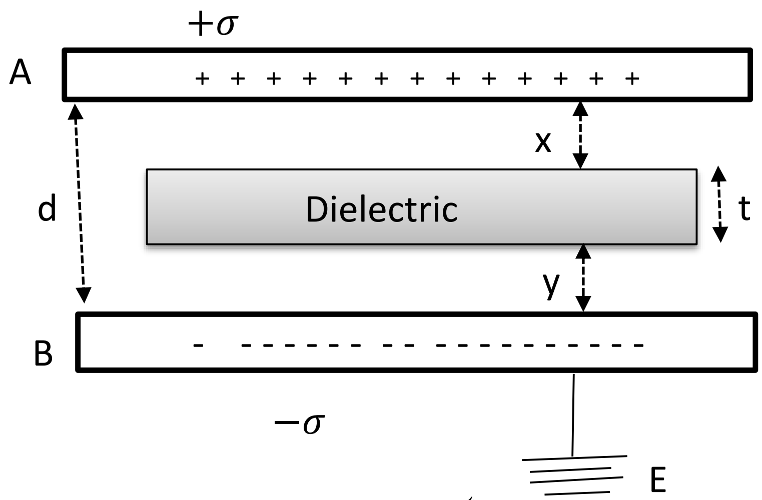
8.6 جزوی طور پر بھرا ہوا مکثف (Capacitor) (جب کہ $t < d$)

(Capacitor with Dielectric Medium)

جب برق گزار (Dielectric) D مادے کی موٹائی t مکثف (Capacitor) میں موجود تختیوں کے درمیانی فاصلے d سے کم ہو اور مکثف (Capacitor) کی تختیوں کے ساتھ ہوا بھی ہو اور برق گزار (Dielectric) مستقل K بھی ہو تب برق گزار واسطے میں برقی میدان $\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$ ہوگا اور ہوائی حصہ میں برقی میدان $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ ہوگا۔

فرض کرو کہ برق گزار مادہ کے اوپر ہوا کی موٹائی x ہے اور مادے کے نیچلے حصے میں ہوا کی موٹائی y ہیں تب

$$x+y=d-t \qquad (8.15)$$



شکل(8.4)

چنانچہ برقی میدان کے برخلاف A سے B کی جانب برقی بار کو لے جانے کے لیے کیا گیا کام ہوگا۔

$$= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\, y + \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} t + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\, x = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(x + y + \frac{t}{\varepsilon_r}\right)$$

$$= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(d - t + \frac{t}{\varepsilon_r}\right) \qquad (8.16)$$

چنانچہ تفاوت قوۃ ہوگی

$$V_A - V_B = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[d - t + \frac{t}{\varepsilon_r}\right] \qquad (8.17)$$

$$\text{مکثفہ } C = \frac{A\sigma}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[d - t + \frac{t}{\varepsilon_r}\right]} = \frac{\varepsilon_0 A}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[d - t + \frac{t}{\varepsilon_r}\right]}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{\varepsilon_r d - t(\varepsilon_r - 1)} = \frac{K\varepsilon_0 A}{d - t + \frac{t}{\varepsilon_r}} \qquad (8.18)$$

8.7 مکثفہ کی گنجائش پر برق گزار واسطے کا اثر (Dielectric Effect in Capacitor in Capacitance)

مکثفہ(Capacitor) کی تختیوں کے درمیان برق گزار(Dielectric) مادہ کے برق گزار(Dielectric) مستقل پر اثر یہ ہوتا ہے کہ دو تختیوں کے درمیان کسی نقطے پر برقی میدان کی حدت $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ سے $\frac{\sigma}{K\varepsilon_0}$ تک گر جاتی ہے جہاں سگما σ برقائی ہوئی تختیوں پر بار فی اکائی رقبہ ہے اور دو تختیوں کے درمیان تفاوت قوۃ کم ہوتے ہوئے $\frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$ سے $\frac{\sigma d}{K\varepsilon_0}$ ہوتا ہے جب کہ d دونوں تختیوں کا درمیانی فاصلہ ہے اور گنجائش (Capacitance) $C = \frac{Q}{V}$ ہو تی ہے یہ گنجائش (Capacitance) بڑھتے ہوئے $\frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{A\sigma}{\frac{\sigma d}{\varepsilon_0}}$ سے $= \frac{A\sigma}{\frac{\sigma d}{K\varepsilon_0}}$ $\frac{K\varepsilon_0 A}{d}$ ہوتی ہے اس کا مطلب ہے کہ یہ برق گزار(Dielectric) کو متعارف کرانے سے پہلے کی قدر سے k گناہ زیادہ ہو جاتی ہے۔ یہی

وجہ ہے کہ برق گزار (Dielectric) کی موجودگی کے سبب مکثفہ (Capacitor) کی گنجائش (Capacitance) میں اضافہ ہوتا ہے۔

$$C_d = k\,C_a \qquad (8.19)$$

8.7.1 مکثفہ کی توانائی فی اکائی حجم (کثافت توانائی):

ہم متوازی تختیوں والے مکثفہ (Capacitor) میں فی اکائی حجم ذخیرہ شدہ توانائی کو کثافتِ توانائی کہتے ہیں۔ تختیوں کے درمیان قوۃ کو مستقل رکھتے ہوئے یا تبدیل کرتے ہوئے بھی ہم اس کی جانچ کر سکتے ہیں۔ ہمیں معلوم ہے کہ مکثفہ (Capacitor) میں ذخیرہ شدہ توانائی ہوتی ہے۔

$$U = \frac{1}{2}\,CV^2 \qquad (8.20)$$

اگر ہمارے پاس ایک ہم متوازی تختیوں والا مکثفہ (Capacitor) C_a ہے جب کہ تختیوں کے درمیان ہوا موجود ہے اور ہر ایک تختی کا رقبہ A اور جن کا درمیانی فاصلہ d ہے۔ اب بالکل اتنی ہی موٹائی d والے برق گزار (Dielectric) مادے کو متعارف کرانے پر حاصل ہونے والی گنجائش (Capacitance) ہو گی۔

$$C_a = kC_d$$

8.7.2 برقی میدان یا برقی قوۃ کو مستقل رکھنے پر:

اگر ہم مکثفہ پر مزید بار (بھرن) کو عائد کرتے ہوئے تختیوں کے درمیان قوۃ کو مستقل رکھتے ہیں تب برق گزار (Dielectric) کے ساتھ مکثفے کی توانائی یہ ہو گی۔

$$U_d = \frac{1}{2}C_d\,V^2 \qquad (8.21)$$

اور ہوا کے ساتھ

$$U_a = \frac{1}{2}C_a\,V^2 \qquad (8.22)$$

کیوں کہ V مستقل حالت میں ہے اس لیے

$$\frac{U_d}{U_a} = \frac{\frac{1}{2}C_d\,V^2}{\frac{1}{2}C_a\,V^2} = \frac{C_d}{C_a} = K \qquad (8.23)$$

لہذا مکثفہ (Capacitor) میں ذخیرہ شدہ توانائی جب کہ تختیوں کے درمیان برق گزار (Dielectric) واسطہ، مستقل k ہونے کی صورت میں یہ ذخیرہ شدہ توانائی خلایا ہوا سے k گناہ زیادہ ہوتی ہے۔ ہم متوازی تختیوں والے مکثفہ (Capacitor) میں

ہوا یا خلا کی موجودگی میں ذخیرہ شدہ توانائی ہوگی۔

$$U_a = \frac{1}{2} C_a V^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 A (Ed)^2}{d} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 A d (E)^2 \qquad (8.24)$$

جہاں E مکثفہ (Capacitor) کی تختیوں کے درمیان برقی حدت ہے جب کہ Ad حجم ہے۔

ہوا رکھنے والے مکثفہ (Capacitor) کے لیے کثافت توانائی = ذخیرہ شدہ توانائی فی اکائی حجم

$$= \frac{\frac{1}{2} \varepsilon_0 A d (E)^2}{Ad} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (E)^2 \qquad (8.25)$$

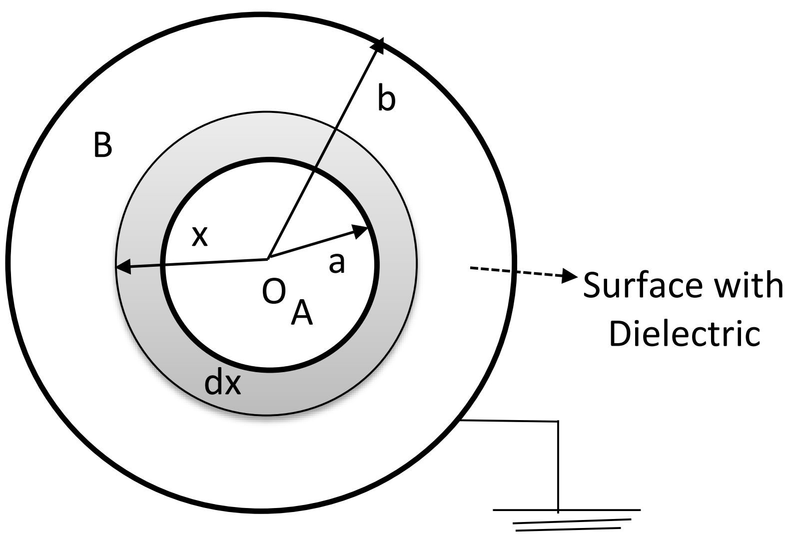
برق گزار (Dielectric) مادہ رکھنے والے مکثفہ (Capacitor) کے لیے

$$U_d = \frac{1}{2} C_d V^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A (Ed)^2}{d} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r A d (E)^2 \qquad (8.26)$$

کثافتِ توانائی $= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r (E)^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}.\vec{E} = \frac{1}{2} \varepsilon \vec{E}.\vec{E} = \frac{1}{2} \vec{D}.\vec{E}$

جہاں $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$. اور $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ (8.27)

8.8 کروی مکثفہ (Spherical Capacitor)



شکل (8.5)

فرض کرو کہ A اور B دو ہم مرکزی کرے ہیں جن کے نصف قطر ترتیب وار A اور B ہیں جن کے درمیان ہوا موجود ہے۔ بیرونی کرے کو ارتھنگ زمینی تار لگا ہوا ہے اور اندرونی کرے کو مثبت برقی بار q فراہم کیا جا رہا ہے۔

فرض کرو کہ ایک ہم مرکزی خول جس کا نصف قطر x اور موٹائی dx ہے جس طرح ہمیں شکل (8.5) میں نظر آ رہا ہے۔

مرکز سے x فاصلے پر پائے جانے والے کسی نقطے پر برقی میدان یہ ہو گا۔ $E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x^2}$
میدان باہر کی جانب عمل کرتا ہے۔ تب کرہ A اور B درمیان پائی جانے والا تفاوت قوۃ یہ ہو گی۔

$$V_A - V_B = \int_b^a \overrightarrow{-E}.\overrightarrow{dr} \tag{8.28}$$

یہاں E اور dr کی سمت x محور کی سمت میں ہے۔

$$\int_b^a \overrightarrow{-E}.\overrightarrow{dr} = \int_b^a -E.dx = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_b^a -\frac{q}{x^2}dx$$

$$V_a - V_b = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left|\frac{1}{x}\right|_b^a = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab}$$

ہوائی مکثفہ (Capacitor) کی کثافت

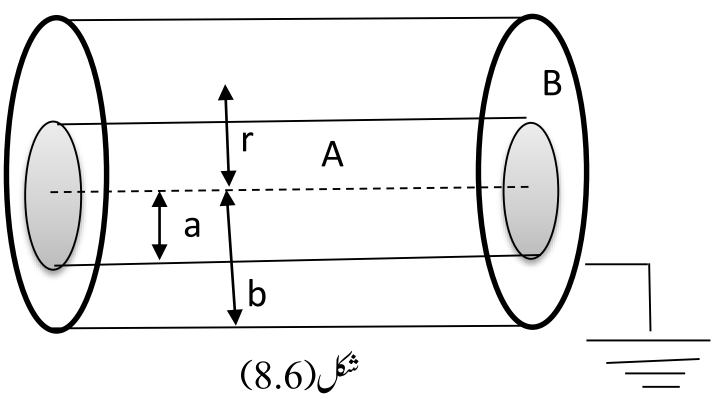
$$C = \frac{q}{V_A - V_B} = 4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a} \tag{8.29}$$

اور جب دو کروں کے درمیان موجود جگہ مکمل طور پر برق گزار (Dielectric) مادے سے بھری ہوئی ہے جس کی اضافی اجازیت ε_r ہے۔ تب E کی قدر کم ہوتے ہوئے یہ ہو جائے گی $\frac{\epsilon}{\varepsilon_r}$ اور سطح A پر بار کی قدر تقطیب کی وجہ سے کم ہوتے ہوئے q سے $\frac{q}{\varepsilon_0}$ ہو جائے گی

$$V_A - V_B = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{b-a}{ab}$$

$$C = \frac{q}{V_A - V_B} = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{ab}{b-a} \tag{8.30}$$

8.9 اسطوانہ نما مکثفہ (Cylindrical Capacitor)



شکل (8.6)

اسطوانہ نما مکثفہ (Capacitor) دو ہم محوری اسطوانوں پر مشتمل ہوتا ہے۔ ان دو اسطوانوں کے درمیان موجود جگہ میں یا تو ہوا

ہوتی ہے یا برق گزار(Dielectric)مادہ پایا جاتا ہے۔

فرض کرو کہ Aاور Bان دو ہم محوری اسطوانوں کو بتلا رہے ہیں اور ان کے نصف قطر ترتیب وار aاور bہیں اور ہم فرض کرتے ہیں کہ اسطوانہ Bار تھنگ زمینی تار سے جڑا ہوا ہے اور اسطوانہ A کو بار فی اکائی طول λفراہم کیا جا رہا ہے۔اور دونوں اسطوانوں کے درمیان محور سے xفاصلے پر ایک نقطہ P ہے۔تب برقی میدان کی حدت کی مقدار یہ ہو گی

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r} \qquad (8.31)$$

دو اسطوانوں کا درمیان تفاوت قوۃ ہو گا

$$V_A - V_B = \int_b^a \overrightarrow{-E}.\overrightarrow{dr} = -\int_b^a \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{dr}}{r}.$$

Eاور dr ایک ہی سمت میں ہے

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}[log]_b{}^a = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ log_e\frac{b}{a} \qquad (8.32)$$

لہٰذا مکثفہ(Capacitor)کی گنجائش(Capacitance)فی اکائی طول یہ ہو گی

$$C = \frac{\lambda}{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}log_e\frac{b}{a}} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{log_e\frac{b}{a}} \qquad (8.33)$$

استوانہ نما مکثفہ(Capacitor)کے طول lکی گنجائش(Capacitance)یہ ہو گی

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{log_e\frac{b}{a}} \qquad (8.34)$$

جب دو اسطوانوں کے درمیانی جگہ کو برق گزار(Dielectric)مادے کے مستقل kیا اضافی اجازیت ε_r سے پُر کیا جاتا ہے۔تب

اور $E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}.\frac{\lambda}{r}$

$$C_d = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{log_e\frac{b}{a}}\, and\ C_l = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l}{log_e\frac{b}{a}} \qquad (8.35)$$

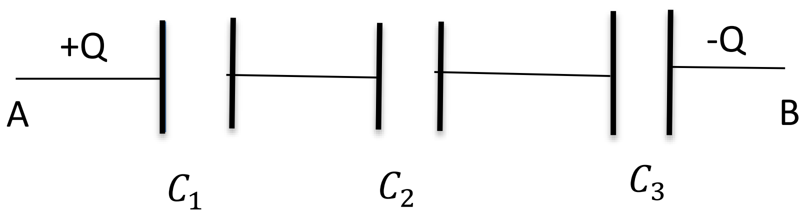
اور kکے لحاظ سے اس طرح ہو گا

$$C_d = \frac{2\pi\varepsilon_0 K}{log_e\frac{b}{a}}\, and\ \mathrm{C}_l = \frac{2\pi\varepsilon_0 Kl}{log_e\frac{b}{a}} \qquad (8.36)$$

8.10 مکثفوں کی ترتیب (Combination of Capacitors)

مزاحمتوں کی طرح مکثفوں کو بھی برقی دور میں مختلف طریقوں سے جوڑا جاتا ہے جیسے کہ ہم سلسلہ یا ہم متوازی یا ان دونوں کو آپس میں ملا کر جوڑا جا سکتا ہے۔

8.10.1 مکثفوں کی ہم سلسلہ ترتیب (Series Combination Of Capacitors)



شکل(8.7)

شکل(8.7) میں ہمیں نظر آرہا ہے کہ یہاں مکثفے (Capacitors) ہم سلسلہ ترتیب سے جڑے ہوئے ہیں
اگر کسی وولٹیج کے مبدا کو ہم سلسلہ ترتیب سے جڑے ہوئے مکثفہ (Capacitor) کے دونوں کناروں سے یعنی پہلے مکثفہ (Capacitor) کے کنارے A اور آخری مکثفہ (Capacitor) کے کنارے B سے جوڑا جائے تب ہر مکثفہ (Capacitor) میں مساوی بار ظاہر ہوتا ہے اور ہر مکثفہ (Capacitor) میں تفاوت قوۃ مکثفہ (Capacitor) کی گنجائش (Capacitance) پر منحصر ہوتا ہے۔
اب ہم سلسلہ ترتیب سے جڑے ہوئے تین مکثفوں کی موثر گنجائش (Capacitance) کو معلوم کرتے ہیں جس طرح ہمیں شکل (8.7) میں نظر آرہا ہے۔

جہاں C_1 C_2, C_3 اور انفرادی طور پر ہر مکثفہ (Capacitor) کی گنجائش (Capacitance) ہے۔ جب اس ترتیب میں سرے A اور B سے وولٹیج کو عائد کیا جاتا ہے تب پہلی تختی پر بار Q+ ظاہر ہوتا ہے جس کے سبب دوسری تختی پر Q- ہوتا ہے۔ برقی سکونی امالہ کے مطابق ہر مکثفہ (Capacitor) میں قوۃ کا کم ہونا گنجائش (Capacitance) کے باالعکس تناسب میں ہوتا ہے یعنی∴ ($V = \frac{Q}{C}$ <= $C = \frac{Q}{V}$ یعنی $V \ \alpha \ \frac{1}{C}$ اور Q معین و مستقل ہوتا ہے۔

$$V_1 = \frac{1}{C_1}, V_2 = \frac{1}{C_2}, V_3 = \frac{1}{C_3}$$
$$V_1 = \frac{Q}{C_1}, V_2 = \frac{Q}{C_2}, V_3 = \frac{Q}{C_3}$$
$$\therefore V = V_1 + V_2 + V_3$$

گنجائش (Capacitance) C اس ترتیب کی موثر گنجائش (Capacitance) کہلاتی ہے۔

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow \frac{V}{Q} = \frac{1}{C}$$

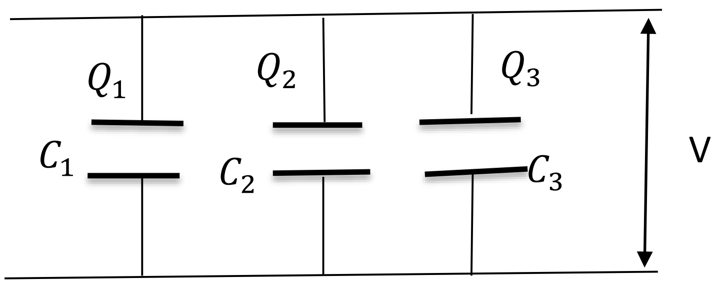
$V = V_1 + V_2 + V_3$ اور

$$\therefore \frac{1}{C} = \frac{V_1+V_2+V_3}{Q} = \frac{V_1}{Q} + \frac{V_2}{Q} + \frac{V_3}{Q}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \qquad (8.37)$$

اس مساوات سے یہ واضح ہوتا ہے کہ جب مکثفوں کو ہم سلسلہ ترتیب میں جوڑا جاتا ہے تب گنجائش (Capacitance) کے مقلوب کے مجموعہ سے موثر گنجائش (Capacitance) کا مقلوب حاصل ہوتا ہے۔

8.10.2 مکثفوں کی ہم متوازی ترتیب (Parallel Combination Of Capacitors)



شکل (8.8)

جس طرح ہمیں شکل (8.8) میں نظر آرہا ہے اس طرح مکثفوں کو ہم متوازی ترتیب دیتے ہوئے ہم ان کی گنجائش (Capacitance) کو معلوم کر سکتے ہیں۔ یہاں C_1, C_2, اور C_3 انفرادی مکثفے (Capacitors) ہیں اور ان کا بار ترتیب وار Q_1, Q_2, اور Q_3 ہے اور ان مکثفوں کے تختیوں کے درمیان پائی جانے والا تفاوت قوۃ V ہے۔

اس طرح ترتیب دینے پر ہم دیکھتے ہیں کہ تختیوں کے درمیان تفاوت قوۃ ایک ہی رہتا ہے پر اس ترتیب سے منسلک کرنے پر حاصل ہونے والا جملہ بار تمام مکثفوں کے بار کا مجموعہ ہوتا ہے۔ فرض کیجیے کہ C اس ترتیب کی موثر گنجائش (Capacitance) ہے اور جملہ برقی بار Q ہے-

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 \qquad (8.38)$$

ہم متوازی ترتیب میں تفاوت قوۃ اتنا ہی ہوتا ہے جتنا اکیلے منفرد مکثفہ (Capacitor) کا ہوتا ہے

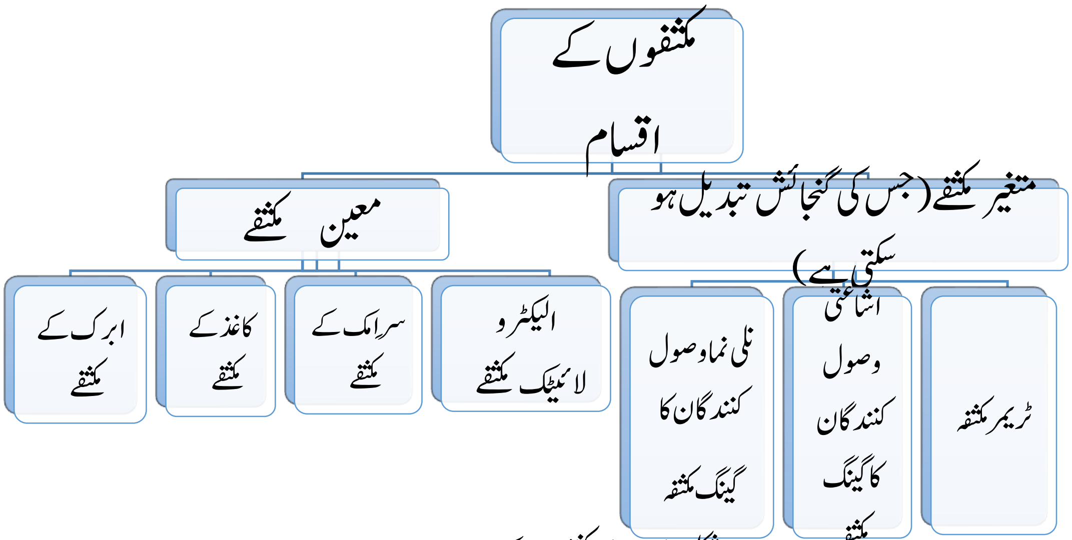
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q_1+Q_2+Q_3}{V} = \frac{Q_1}{V} + \frac{Q_2}{V} + \frac{Q_3}{V}$$

$$\therefore\ C = C_1 + C_2 + C_3 \qquad (8.39)$$

لہذا مکثفوں کو ہم متوازی ترتیب دینے پر حاصل ہونے والی موثر گنجائش (Capacitance) تمام منفرد مکثفوں کی گنجائش (Capacitance) کے مجموعے برابر ہوتی ہے۔

8.11 مکثفوں کے اقسام و استعمالات (Capacitor Types and Uses)

عمومی طور پر مکثفوں کی دو زمروں میں درجہ بندی کی جاتی ہے۔ معین مکثفے اور متغیر مکثفے (جن کی گنجائش تبدیل ہو سکتی ہے) اور پھر ان کی بھی مزید درجہ بندی ان کے ڈیزائن اور بناوٹ کے لحاظ سے کی جاتی ہے۔



شکل (8.9) مکثفوں کے اقسام

مکثفہ (Capacitor) کی تختیوں کے درمیانی فاصلے پر منحصر ہوتا ہے کہ یہ کس وولٹیج پر کام کرتے ہیں اسی لحاظ سے انہیں ڈیزائن کیا جاتا ہے اور بنایا جاتا ہے چند مثالیں ہم مندرجہ ذیل ٹیبل میں دیکھ سکتے ہیں۔

مکثفہ کے حدود	استعمال ہونے والا برق گزار (Dielectric)	انتہائی وولٹیج
$250\,pf - 10\mu f$	کاغذ	$150kv$
$25\,pf - 0.25\mu f$	ابرک	$2\,kv$
$0.5\,pf - 0.0\mu f$	سرامک	$500kv$
$1\mu f - 1000\mu f$	الیکٹرولائیٹک	$600kv$

8.12 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

ہوا بردار متوازی تختیوں والے مکثفے کی تختیاں ہر مقام پر ایک دوسرے سے 1.5mm دور ہیں۔ اگر اس کی گنجائش 1.5f ہو تو تختی کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل: $C = \frac{q}{V} = \frac{\varepsilon_0 EA}{ED} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$

$$A = \frac{Cd}{\varepsilon_0} = \frac{1.5\times10^{-3}\times1.5}{8.85\times10^{-12}} = 2.532\times10^8 m^2$$

حل شدہ مثال2

دھاتی پٹیوں کو استعمال کر کے ایک مکثفہ بنایا گیا۔ ہر پٹی کا رقبہ $6\times4cm^2$ ہے۔ ان کو ایک برق کی چادر کے ذریعہ ایک دوسرے سے علاحدہ کیا گیا ہے برق کا برق گزار مستقل 6 اور اس کی مستقل دبازت 0.15cm ہے۔ گنجائش معلوم کیجیے۔

حل: $C = \frac{(n-1)\varepsilon_0 KA}{d}$

$$C = \frac{14\times8.85\times10^{-12}\times6\times6\times10^{-2}\times4\times10^{-2}}{1.5\times10^{-4}}$$

$$C = 12000PF$$

حل شدہ مثال3

مدور تراش عمودی کے متوازی تختیوں والے مکثفے کی تختیوں کا نصف قطر 10cm ہے اور ان کا درمیانی فعل 1cm ہے۔ ان کے درمیان کے برقی گزار تیل کا مستقل 6 ہے۔ اگر تفاوت قوۃ 300 وولٹ ہو تو تختیوں کے مابین عمل پیرا قوت کشش معلوم کیجیے۔

حل: قوت کشش$= \frac{K\varepsilon_0 A}{2d^2} = V^2$

$$7.54\times10^{-2}N = \frac{6\times8.85\times10^{-12}\times\pi\times(10^{-2})^2\times300^2}{2\times(10^{-3})^2}$$

حل شدہ مثال4

$2\mu F$ کے ایک مکثفہ A کو $10\mu F$ کے مکثفہ B سے ہم متوازی ملایا گیا ہے اولز کر کو 1500 وولٹ تک اور آخر الذکر کو 150 وولٹ تک برقایا گیا ہے۔ الحاق سے قبل کی مجموعی توانائی، الحاق کے بعد توانائی کا نقصان اور مشترکہ قوۃ معلوم کیجیے۔

حل: A پر کا باروں ہوگا $A = 20\times10^{-6}\times500 = 0.03C$

B پر کا باروں ہوگا $B = 10\times10^{-6}\times150 = 0.0015C$

مجموعی گنجائش $30\mu F$ ہے۔

مجموعی توانائی ما قبل الحاق $\frac{1}{2}\times20\times10^{-6}\times(1500)^2 + \frac{1}{2}\times10\times10^{-6}\times(150)^2 = 22.61$

مجموعی توانائی مابعد الحاق $\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{(0.0315)^2}{2\times30\times10^{-6}} = 6.07J$

مشترکہ قوۃ $\frac{q}{C} = V \qquad 1050V = \frac{0.0315}{30\times10^{-6}} =$

حل شدہ مثال5

4cm قطر کے ایک کروی موصل کی وجہ سے اس کے مرکز سے 20cm کے فاصلے پر برقی میدان کی حدت 30Vcm ہے۔

موصل کی توانائی معلوم کیجیے۔

حل:

$$E = 3000\ V/m$$

$$C = 4\pi\varepsilon_0(0.02)$$

$$V_{20cm} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(0.02)$$

$$V = E.d = \frac{q}{C}$$ یا $$q = 4\pi\varepsilon_0(0.02) \times 3000 \times (0.02)$$

$$\frac{q^2}{2C} = \frac{[4\pi\varepsilon_0 \times 0.02 \times 3000 \times 0.02]^2}{2 \times 4\pi\varepsilon_0 \times 0.02}$$

$$4\pi\varepsilon_0 \times \frac{(3000)^2 \times (0.02)^3}{2} = 4.00 \times 10^{-13} Joules$$

حل شدہ مثال 6

چار $10\mu F$ کے ظرفیوں کے ایک دور کو 500v سپلائی سے جوڑا گیا ہے معلوم کیجیے کہ۔

(a) دور کی موثر ظرفیت (b) ہر ظرفیے پر پار (نوٹ کریں کہ ایک ظرفیہ کا بار اس کی مقابلتاً زیادہ قوۃ والی تختی کا بار ہے جو مقابلتاً کم قوۃ والی تختی کے بار کے مساوی اور مخالف ہے۔)

حل: (a) $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$

$C_1 = C_2 = C_3 = 10\mu F$ کے لیے $\frac{1}{C} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}$

$$C = 10/3\mu F$$

C اور C_4 متوازی ہے۔ تب

$$C^1 = C + C_4 = \left(\frac{10}{3} + 10\right)\mu F = 13.3\mu F$$

(b) C_2, C_1 اور C_3 تینوں مکثفے میں سے ایک ہر بار یکساں ہے۔ فرض کرو یہ یکساں بار Q ہے

فرض کیجیے C_4 پر بار Q^1 ہے۔

$$\frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = 500V$$

$$\frac{Q^1}{C_4} = 500V$$

$$Q = 500V \times \frac{10}{3}\mu F = 1.7 \times 10^{-3} C$$

$$Q^1 = 500V \times 10\mu F = 5.0 \times 10^{-3} C$$

8.13 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- مکثفہ (Capacitor): ایسا آلہ جو بار (بھرن) کو اپنے اندر ذخیرہ کر سکتا ہے مکثفہ کہلاتا ہے۔ ہم متوازی تختیوں والے مکثفہ کے

تختیوں کے درمیان اگر خالی جگہ ہوں تب ان کی گنجائش(Capacitance)یہ ہوگی $C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$

- متوازی تختیوں والے مکثفہ(Capacitor)کی تختیوں کے درمیان برق گزار(Dielectric)مستقل k ہوتب ان کی گنجائش (Capacitance) یہ ہوگی $C = \frac{\varepsilon_0 AK}{d}$
- مکثفہ(Capacitor)میں ذخیرہ شدہ توانائی: $U = \frac{1}{2}\ CV^2 = \frac{Q^2}{2C}$
- برق گزار(Dielectric)واسطے کی موجودگی میں فی اکائی حجم ذخیرہ شدہ توانائی ہوگی۔ $\frac{1}{2}\vec{E}\vec{D}$
- استوانہ نمامکثفہ(Capacitor):استوانہ نمامکثفہ(Capacitor) میں برق گزار(Dielectric)واسطے کے ساتھ گنجائش (Capacitance)فی اکائی طول یہ ہوگی $C = \frac{2\pi\varepsilon_0 k}{log_e \frac{b}{a}}$
- مکثفوں کی ہم سلسلہ ترتیب: جب دو مکثفوں کو ہم سلسلہ ترتیب میں جوڑا جاتا ہے تب ان کی گنجائش یہ ہوتی ہے $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$
- مکثفوں کی ہم متوازی ترتیب: جب دو مکثفوں کو ہم متوازی ترتیب میں جوڑا جاتا ہے تب ان کی گنجائش(Capacitance)یہ ہوتی ہے۔ $C = C_1 + C_2$

8.14 کلیدی الفاظ (Keywords)

- **ہم سلسلہ مکثفے:** مکثفوں کو ہم سلسلہ میں جوڑنے کے لیے
- **متوازی مکثفے:** مکثفوں کو متوازی میں جوڑنے کے لیے
- **مکثفے(Capacitor):** دو موصل برق کے پرزے جو ایک غیر موصل کے ذریعہ ایک دوسرے سے جدا ہوئے ہو،
- **برقی گنجائش:** کسی برقی پرزے پر IV کا تفاوت قوۃ عائد کرنے پر اس میں جتنا برقی بار ذخیرہ ہوتا ہے وہ اس کی برقی گنجائش کہلاتی ہے
- **Farad:** Farad ایک بہت بڑی اکائی ہے۔ یہ برقی گنجائش کی SI اکائی ہے۔

8.15 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

8.15.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. مکثفے سے کیا مراد ہے؟
2. مکثفے کے دو استعمالات لکھیے۔
3. مکثفے کی SI اکائی ------ ہے۔
4. مکثفوں کے ہم سلسلہ سے کیا مراد ہے؟
5. فیراڈے کی تعریف کریں۔

6. $1\mu\mu F$ کی قیمت۔۔۔۔۔۔Faraday ہوتی ہے۔

(a) $10^{-6}f$ (b) $10^{-12}f$ (c) $10^{-9}f$ (d) ان میں سے کوئی بھی نہیں۔

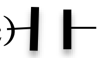
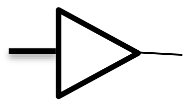
7. مکثفے کے سلسلہ وار جوڑنے کے لیے جملہ مکثفے C کی مساوات =۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔

8. مکثفے کے متواضی وار جوڑنے کے لیے جملہ مکثفے C کی مساوات =۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔

9. مکثفے C کے مکثفے میں، جس پر بار Q اور قوۃ V ہے، ذخیرہ شدہ توانائی U =۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔

(a) $\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ (b) $\frac{1}{2}CV^2$ (c) $\frac{1}{2}av$ (d) تمام d,c,b,a

10. مکثفے کو کس شکل میں ظاہر کیا جاتا ہے۔

(a)  (b)  (c)  (d) ان میں سے کوئی بھی نہیں۔

8.15.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. مکثفہ کی گنجائش (Capacitance) اور اس کی اکائی بیان کیجیے؟
2. کر و ی مکثفہ (Capacitor) کی گنجائش (Capacitance) کے لیے مساوات اخذ کیجیے؟
3. اسطوانہ نما مکثفہ (Capacitor) کی گنجائش (Capacitance) کے لیے مساوات اخذ کیجیے؟
4. مکثفہ (Capacitor) میں ذخیرہ شدہ توانائی کے لیے مساوات حاصل کیجیے ۔؟
5. بتلائے کہ برق گزار (Dielectric) میں برقی سکونی توانائی فی اکائی حجم $\frac{1}{2}\vec{E}\vec{D}$ ہوتی ہے؟
6. برقی دور میں مکثفوں کی ترتیب پر نوٹ لکھیے۔
7. جب ایک مکثفے کو کسی دوسرے مکثفے سے ملانے پر توانائی کا نقصان کیوں ہوتا ہے۔
8. مکثفے کی گنجائش کی تعریف لکھیے اور مکثفے کے اصول کو سمجھایئے۔
9. کئی مکثفوں کو متوازی جوڑنے پر حاصل مکثفے کی گنجائش کے لیے ضابطہ اخذ کیجیے۔
10. کئی مکثفوں کو ہم سلسلہ جوڑنے پر حاصل مکثفے کے لیے ضابطہ اخذ کیجیے۔
11. ایک متوازی تختیوں والے مکثفہ میں K مستقل کے برق گزار مادے کے داخل کرنے پر توانائی میں کمی ہو جاتی ہے جب کہ بار وں وہی رہتا ہے سمجھائے۔
12. کیا آپ ایک بر قائے متوازی تختیوں والے مکثفے کی تختیوں کے در میان ایک برق گزار کندے کو آہستہ آہستہ داخل کر سکتے ہیں؟ اگر نہیں کر سکتے تو کیوں؟ سمجھائے۔

8.15.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. مکثفہ کی گنجائش (Capacitance) اوراس کی اکائی بیان کیجیے؟ متوازی تختیوں والے مکثفہ (Capacitor) کی گنجائش (Capacitance) کے لیے مساوات اخذ کیجیے؟
2. متوازی تختیوں والا مکثفہ (Capacitor) جو جزوی طور پر برق گزار (Dielectric) مادہ سے بھرا گیا ہے اس کی گنجائش (Capacitance) کے لیے مساوات اخذ کیجیے؟
3. متوازی تختیوں والا مکثفہ (Capacitor) جو مکمل طور پر برق گذار مادہ سے بھرا گیا ہے اس کی گنجائش (Capacitance) کے لیے مساوات اخذ کیجیے؟
4. کر و ی مکثفہ (Capacitor) کی گنجائش (Capacitance) کے لیے مساوات اخذ کیجیے؟ اسطوانہ نما مکثفہ (Capacitor) کی گنجائش (Capacitance) کے لیے مساوات اخذ کیجیے؟
5. مکثفہ (Capacitor) میں ذخیرہ شدہ توانائی کے لیے مساوات حاصل کیجے۔
6. بتلائے کہ برق گزار (Dielectric) میں برقی سکونی توانائی فی اکای حجم $\frac{1}{2}\vec{E}\vec{D}$ ہوتی ہے؟
7. مکثفہ (Capacitor) C_1 اور C_2 آپس میں ہم سلسلہ و ہم متوازی ترتیب دیے گئے ہیں تب ان کی مؤثر گنجائش (Capacitance) کیا ہوگی؟
8. متوازی تختیوں کے مکثفے کی گنجائش محسوب کیجیے۔
9. برقائے ہوئے متوازی تختیوں والے مکثفے محفوظ کردہ توانائی کی شرط کو اخذ کیجیے۔ تختیوں کے درمیان ذو برقیہ مادے کے کندے کو داخل کرنے پر کیا اثرات مرتب ہوتے ہیں۔

8.15.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. متوازی تختیوں والے مکثفہ (Capacitor) کی گنجائش (Capacitance) کو معلوم کیجیے جب کہ ان کے درمیان برق گزار واسطہ ہے جن کا برق گزار مستقل 6 کے مساوی ہے اور تختیوں کا رقبہ $6 \times 10^{-3} m^2$ اور تختیوں کا درمیانی فاصلہ $2.5 \times 10^{-4} m$ ہے؟ [جواب۔ 1274pf]
2. برقی میدان کی حدت کو معلوم کیجیے جب کہ برق گزار واسطے کا مستقل 5 ہے اور برقی نقل مکانی سمتیہ $5 \times 10^{-12} \frac{Coul}{m^2}$ ہے؟ $[D = k\varepsilon_0 E]$
3. فرض کرو کہ زمین کا نصف قطر 6.4x10m ہے اور خلا میں یہ ایک کرہ ہے جس کی سطح پر کے برقی میدان کی حدت 300 v/m ہے۔ اس کے باروں کی توانائی اور اگر اس کو مکمل طور پر ڈس چارج کر دیا جائے تو اس سے پیدا ہونے والی حرارت کو محسوب

کیجیے۔

4. گنجائش کا مکثفہ بنانا مقصود ہے۔اس کے بنانے میں ٹین کے پتلے ورقوں کو استعمال کیا گیا ہے اور جنہیں برق سے علاحدہ کیا گیا ہے۔اس طرح اگر برق کی 30 مادریں استعمال ہوئی ہوں اور ہر پترے کا رقبہ $10cm^2$ ہو اور برق کا برق گزار مستقل 6.5k ہو تو برق کی چادر کی تقریبی فاصلہ معلوم کیجیے۔

5. دو مکثفوں جن کی گنجائش $4\mu F$ اور $2\mu F$ کو ہم متوازی جوڑ کر اجتماع پر 300Volt کے تفاوت قوۃ کو عائد کیا گیا تو نظام میں محفوظ کردہ مجموعی توانائی معلوم کیجیے۔

6. $2\mu f$, $4\mu f$ اور $6\mu f$ گنجائش والے تین مکثفوں کو متوازی جوڑ کر 12V تفاوت قوۃ عائد کیا گیا۔ان میں ذخیرہ ہونے والے برقی بار کی مقداریں معلوم کیجیے۔

8.16 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Bleaney, B I, and B Bleaney. Electricity and Magnetism. Oxford: Oxford University Press, 2013.
2. Duffin, W J. Electricity and Magnetism. Cottingham: W.J. Duffin, 2001.
3. Gaur, R.K. &Gupta, S.L.Engineering Physics.Dhanpat Rai Publication.
4. Kurrelmeyer, Bernhard, and Walter H. Mais. Electricity and Magnetism. Princeton, N.J: Van Nostrand, 1967.
5. Plonsey.R&Collin.R.E.Principles and Application of Electromagnetic Field. Tata Mc Graw Hill Publication. New Delhi.
6. Purcell, Edward M, and David J. Morin. Electricity and Magnetism. , 2013.
7. Resnic.R&Halliday.D.Physics Part-I&Part-II.Wiley Eastern Pvt.Ltd.New Delhi.
8. Resnick, Robert, David Halliday, and Kenneth S. Krane. Physics. New York: Wiley, 2002.
9. Schuh, Mari C. Magnetism. Minneapolis, MN: Bellwether Media, 2008.

اکائی 9۔ مقناطیسی سکونیات

(Magneto Statics)

اکائی کے اجزا

9.0 تمہید (Introduction)

اور سٹیڈ(Oersted)نے 1820ء میں برقی رو رکھنے والے تار کے قریب قطب نما کو رکھا تب اس نے محسوس کیا کہ قطب نما کی مقناطیسی سوئی میں انحراف ہو رہا ہے اس طرح برق کا مقناطیسی اثر نظر آیا۔اس نے اس تجربہ کا خلاصہ اور سٹیڈ کے کلیہ میں بیان کیا کہ برقی رو مقناطیسی میدان پیدا کرتی ہے۔اس طرح اس نے پہلی مرتبہ برق اور مقناطیسیت میں تعلق کا انکشاف کیا۔اس اکائی میں ہم برقی رو بردار موصل کی وجہ سے پیدا ہونے والے مقناطیسی میدان کو معلوم کرنے کے چند طریقوں کا فہم حاصل کریں گے۔

9.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں ہم:

i. برقی مقناطیسی امالہ کے مظہر کو سمجھیں گیں۔

ii. فیراڈے کے کلیے کو بیان کریں گے اور اس سے متعلق سوالات کے جوابات حل کریں گے۔

iii. لینز کے کلیہ کو بیان کر سکیں گے اور اس کا اطلاق کو سمجھیں گے۔

9.2 مقناطیسی سکونیات (Magneto Statics)

مقناطیسی میدان سمتی خاصیت رکھتا ہے یعنی جس میں سمت اور مقدار دونوں ہوتے ہیں۔مقناطیسی میدان میں کسی پر سمت اور مقدار کو $\vec{B}$ سے ظاہر کرتے ہیں جیسے مقناطیسی امالہ یا مقناطیسی نفوذی کثافت کہتے ہیں۔

مقناطیسی میدان کو تصوراتی خطوط کے ذریعہ ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ان خطوط کو امالی خطوط کہتے ہیں۔امالی خطوط کہ کسی نقطہ پر خط مماس کھینچنے سے اس نقطہ پر B کی سمت معلوم ہونی ہے۔

کسی بند سطح گزرنے والے مقناطیسی میدان کے خطوط کی تعداد کو مقناطیسی نفوذ کہتے ہیں۔مقناطیسی نفوذ کو $\emptyset$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

جس طرح برقی نفوذ کو $\emptyset_B$ سے ظاہر کرتے ہیں۔اگر بند سطح کا رقبہ $\emptyset_E$ تب مقناطیسی نفوذ کا رقبہ $d\emptyset_B$ ہوگا۔

$$d\emptyset_B = B.dA \qquad (9.1)$$

یا $\emptyset_B = \int B.dA$ جملہ نفوذ

$$\emptyset = B.A$$

$$\emptyset = B$$

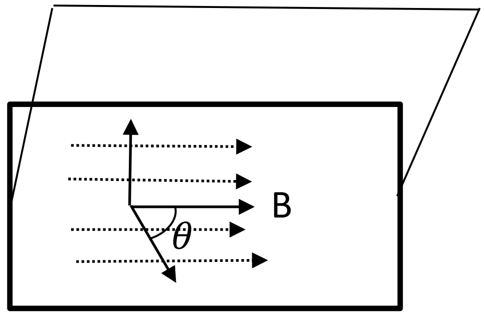
لہٰذا مقناطیسی میدان میں عمود وار رقبہ پر کسی نقطہ گزرنے والا مقناطیسی نفوذ کو اس نقطہ کا مقناطیسی امالہ B کہتے ہیں۔

مقناطیسی نفوذ کی اکائی ویبر (Weber) ہے اور مقناطیسی نفوذی (Fluxdensity) کثافت(Magnetic) یا مقناطیسی(Magnetic)امالہ(induction) B کی اکائی ویبر فی مربع میٹر $^{wb}/_{m^2}$ یا(Tesla)ٹسلہ ہے۔

9.3 مقناطیسی امالہ بل حاظ قوت (Magnetic Induction in Term of Force)

ہم جانتے ہیں کہ ہموار مقناطیس میدان میں برقی بار (q) رکھنے والا ذرہ V رفتار سے حرکت کر رہا ہے تب متحرک برقی بار پر عائد ہونے والا قوت $\vec{F}$ ہو گی۔

$$\vec{F} = q(\vec{V} \times \vec{B})$$



شکل (9.1)

جہاں q متحرک زڑہ کا برقی بار ہے۔

$$\vec{F} = qvB \sin\theta$$

$$\left[\vec{F}_{\text{آعظم}}\right] = qvB \qquad \text{جہاں} \qquad \theta = 90$$

مقناطیسی میدان کے مقناطیسی امالہ کی عددی قدر مساوی ہوتی ہے میدان کے عموداً محترک ایک اکائی برقی بار کے جو ایک میٹر فی سکنڈ کی چال سے حرکت کر رہا ہے۔

$$B = \frac{F_{\text{آعظم}}}{qv} \qquad (9.2)$$

B کی اکائی $Tesla = \frac{N}{A.M} = \frac{N}{Cms^{-1}}$ ٹسلہ اور B کی اکائی C.G.S نظام میں gauss گاؤس ہے جہاں $1T = 10^4 gauss$

جہاں $\vec{B}$ کی سمت کو بائیں ہاتھ کا اُصول بتلاتا ہے۔ بائیں ہاتھ کے اصول کے مطابق انگشتِ شہات، درمیانی انگلی اور انگوٹھا کو آپس میں باہم عموددار رکھیں۔ تب درمیانی انگلو متحرک برقی بار یا برقی رو کی سمت بتلاتی ہے اور انگوٹھا قوت کی سمت کو بتلاتا ہے اور انگشتِ شہات مقناطیسی میدان $\vec{B}$ کی سمت کو بتلاتی ہے۔

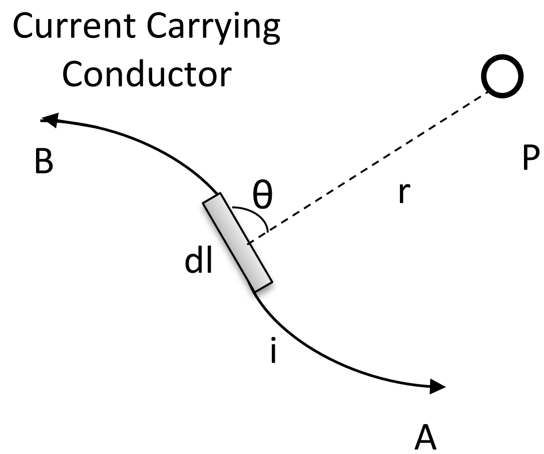
9.4 بیوٹ۔ساورٹ کا کلیہ (Biot-Savart's Law)

بیوٹ۔ساورٹ کا کلیہ جو برقی رو (Current Element) سے پیدا ہونے والے مقناطیسی میدان (Magnetic Field) کے درمیان رشتہ کو بتلاتا ہے۔ فرض کرو کہ ایک وائر کا ٹکڑا dl یا برقی رو i بہہ رہی ہے۔ وائر کے ٹکڑے میں جز برقی رو dt اور نقطہ P کو ملانے والے خط کا درمیانی زاویہ θ ہے۔ بیوٹ۔ساورٹ کلیہ کے مطابق برقی رو i کی وجہ سے نقطہ P پر پیدا ہونے والا مقناطیسی میدان

dB حسب ذیل عناصر پر مشتمل ہوتا ہے۔

i. dBراست تناسب ہے۔ برقی رونے اور dl کے طول کے

$$\overrightarrow{dB} \propto dl$$
$$\overrightarrow{dB} \propto i$$



شکل(9.2)

ii. dB معکوس مناسب ہے r کہ جو نقطہ p اور dl کا درمیانی فاصلہ ہے۔

iii. dBراست تناسب ہوناز اویہ sin θ کے۔

ان سب کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔ $\overrightarrow{dB} \propto \frac{idl \sin\theta}{r^2}$

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{idl\ sin\ \theta}{r^2} \qquad (9.3)$$

جہاں $\frac{\mu_0}{4\pi}$ تناسبی مستقل ہے اور μ_0 کو آزاد فضائی (خلاء) کی مقناطیسی اجازیت (Permeability) کہتے ہیں۔ جس کی قدر $\mu_0 =$ $4\pi \times 10^{-7}\ {wb}/{A.m}$

اگر dl برقی رو i یا نفاوٹہ قوۃ V کی سمت میں ہے تب وائر کے ٹکڑے میں جز برقی رو $\overrightarrow{dl}$ کا طول سمتیہ ہو گا۔ تب dB کو اس طرح لکھیں گے۔

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i\overrightarrow{dl} \times \vec{r}}{r^3} \qquad (9.4)$$

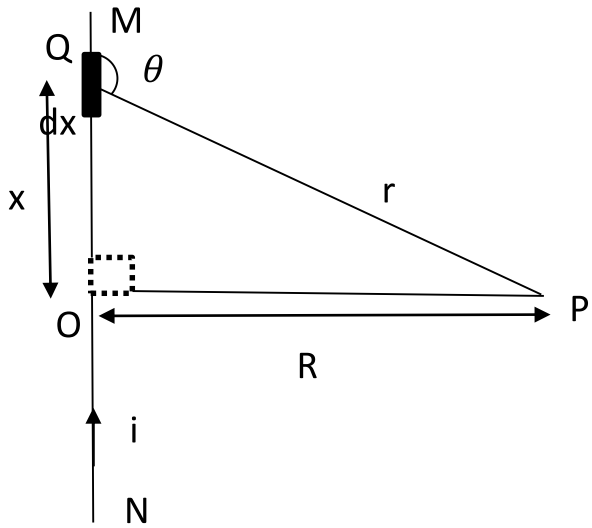
نتیجتاً مکمل برقی دور کی وجہ سے نقطہ P پر میدان B اس طرح ہو گا۔

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{i}{r^3} (\overrightarrow{dl} \times \vec{r}) \qquad (9.5)$$

9.5 بیوٹ۔ساورٹ کلیہ کے استعمالات (Applications of Biot- Sawart's Law)

9.5.1 مقناطیسی امالہ بوجہ مستقیم برقی بردار طویل تار (Magnetic Induction Due to Long Strength Wire)

ہم برقی رودن بردار سیدھے لمبے تار کی وجہ سے کسی نقطہ P پر مقناطیسی امالہ کو محسوب کریں گے۔فرض کرو کہ وائر MN کا چھوٹا جو dx ہے۔dx اور O کا درمیانی فاصلہ x ہے اور P اور O کا درمیانی فاصلہ R ہے۔



شکل (9.3)

بیوٹ-ساورٹ کے کلیہ کا اطلاق کرنے پر

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i}{r^3}\overrightarrow{dx} \times \vec{r} \qquad (9.6)$$

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int \frac{dx \times r}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int \frac{dx \ \sin\theta}{r^2} \qquad (9.7)$$

ΔPQO میں

$$\sin\theta = \sin(180-\theta) = \frac{R}{r}$$

$$\cot\theta = -\cot(180-\theta) = \frac{r}{R}$$

چوں کہ $\sin\theta = \frac{R}{r} \Rightarrow \sin^2\theta = \frac{R^2}{r^2} \Rightarrow \frac{\sin^2\theta}{R^2} = \frac{1}{r^2}$

$$-x = R\cot\theta$$

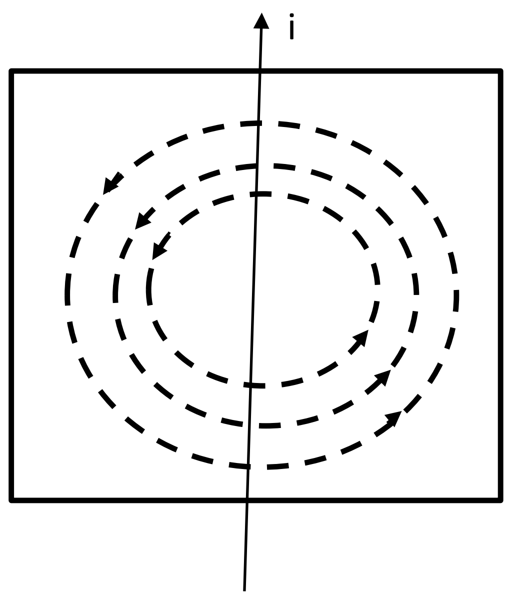
$$dx = Rcosec^2\theta d\theta$$

مساوات (9.7) میں درج کرنے پر

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int R^2 cosec^2\theta . d\theta . \frac{\sin^2\theta}{R^2} . \sin\theta \, d\theta$$

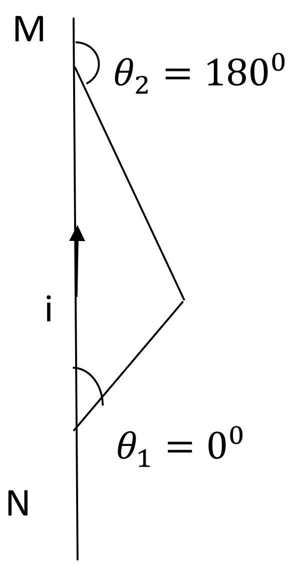
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta \, d\theta$$

جہاں θ_1 اور N، θ_2 اور M کے ذریعہ سے والے زاویے ہیں۔

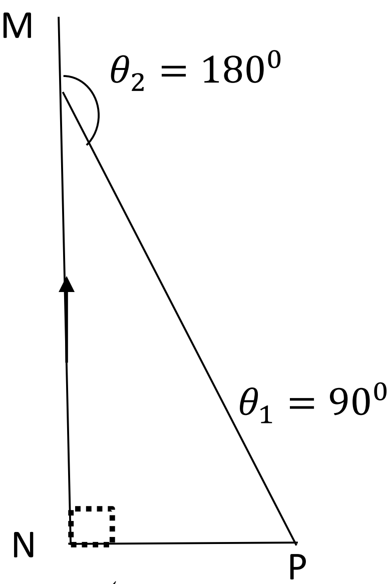


شکل(9.4)

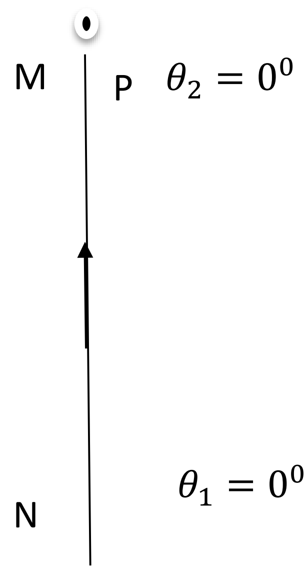
$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\{cos\,\theta_1 - cos\,\theta_2\} \qquad (9.8)$$



شکل (9.5(a))



شکل (9.5(b))



شکل((9.5(c)

شکل(9.5)

a) لاتناہی طول رکھنے والے تار کے لیے: شکل کے مطابق $\theta_1 \to 0$ اور $\theta_2 \to 180$

لٰہذا (9.9)
$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

تاہیکہ عمود وار تار سے پیدا ہونے والے مقنا طیسی امالہ کے خطوط دائروی اور ہم مرکزی ہوتے ہیں اور تار سے مساوی فاصلہ رکھنے والے تمام نقاط کے لیے B کی قدر مساوی ہوتی ہے۔

b) نصف تناہی تار کے لیے: نصف تناہی یعنی ایسا تار جو ایک سمت میں محدود اور دوسرے سمت میں لاتناہی ہو۔ شکل ((9.5(b)) کے مطابق

$\theta_1 = 90$ اور $\theta_2 = 180$

مساوات (9.8) میں درج کرنے پر

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \qquad (9.10)$$

c) اگر تار کے طول کے آگے نقطہ ہو۔

شکل ((9.5(c)) کے مطابق θ_1 اور θ_2 دونوں ہی صفر ہوتے ہیں۔ اس لیے B=0 ہوگا۔ لٰہذا اگر تار کے طول کے آگے نقطہ ہو تب اس نقطہ پر میدان صفر ہوگا۔

9.5.2 مقناطیسی امالہ بوجہ رو بردار دائروی لچھہ (Magnetic Induction a Circular Current Coil)

فرض کرو کہ ایک برقی رو (i) بردار دائروی لچھہ کا نصف قطر a ہے۔ اس کے مرکز سے x فاصلہ کہ طور پر ایک نقطہ P ہے۔

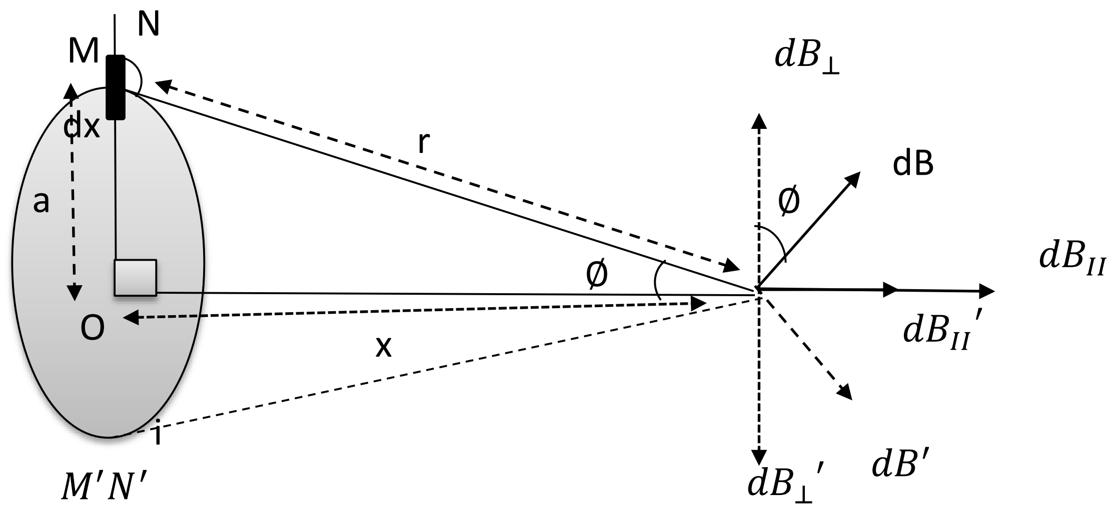
بیوٹ۔ ساورٹ کے کلیہ کا اطلاق کرنے پر۔ a پر (Current Element) جز برقی رو MN کا طول dl کی وجہ سے نقطہ P پر مقناطیسی امالہ dB ہے۔ تب P سے r کا فاصلہ ہوگا۔

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\vec{dl}\times\vec{r}}{r^3}$$

فرض کرو کہ حلقہ کا مستوی کاقدر کے مستوی کے علی الا قوائم ہے۔ تب سمتیہ $\vec{dl}$ کی سمت عمودا کاغذ سے باہر کی طرف ہوگی۔ جب کہ r حلقہ کے ایصالی اجزائ کے لیے عمود وار ہوگا۔ یعنی $\vec{dl}$ $\vec{r}$ اور $\vec{dB}$ کی سمت کاغز کے مستوی پر اور $\vec{dl}$ اور $\vec{r}$ سے تشکیل دئے گئے مستوی پر عمود وار ہے۔

فرض کرو کہ r اور حلقہ کے محور کا درمیانی زاویہ θ ہے۔ تب dB کو اس کے اجزا میں تحلیل کیا گیا جہاں ایک جز $dB_\perp$ جو $dB_\perp = dB \operatorname{Cos} \emptyset$ محور کے عمود وار اور ایک $dB_\parallel$ سے جو $dB_\parallel = dB \sin \emptyset$ محور کے متوازی ہے۔ تمام حلقہ کا جملہ B دراصل تمام حلقہ کی dl کے دونوں اجزا کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا۔ تشاکل (Symmetry) کی مدد سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ عمود وار اجزا

جیسے MN کی وجہ سے $dB_{\perp}$ اور $M'N'$ کی وجہ سے $dB'_{\perp}$ مساوی اور متضاد ہیں اسی طرح ان کی تنسیخ ہو جاتی ہے اور صفر نتیجتاً حاصل ہوتا ہے۔ اب متوازی اجزا $dB_{\parallel}$ اور $dB'_{\parallel}$ سیدھا شور کی سمت میں ہوتے ہیں۔ اس کا نتیجہ یہ نکلتا ہے کہ B محور کی سمت میں ہوتی ہے جو $\int dB \sin\theta$ کے مساوی ہوتی ہے۔



شکل(9.6)

شکل(9.6) سے

$$\sin\theta = \frac{A}{r} \qquad (9.11)$$

چوں کہ
$$\theta = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,dl\,\sin\theta}{r^2}\sin\emptyset$$

$dl \perp r$ کیوں کہ $\theta = 90$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r^2}\int dl \qquad (9.12)$$

مساوات (9.11) کو مساوات (9.12) میں درج کرنے پر

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{a}{r^3}\int dl$$

دائروی لچھے کے لیے

$$\int dl = 2\pi a$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{a}{r^3} 2\pi a \qquad \left(r = \sqrt{a^2 + n^2}\right)$$

$$B = \frac{\mu_0 i a^2}{2r^3}$$

$$B = \frac{\mu_0 i a^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}} \qquad (9.13)$$

a. حلقہ کے مرکز میں X=0 ہو گا۔ اس قدر کو مساوات (9.13) میں درج کرنے پر۔

$$B = \frac{\mu_0 i}{2a} \qquad (9.14)$$

b. اگر لچھہ میں N گھماؤ یا چکر ہوں اس کو N سے ضرب دیں گے۔

$$B = \frac{\mu_0}{2}\frac{iNa^2}{(a^2+x^2)^{3/2}} \qquad (9.15)$$

c. اگر x>>a اور $r \approx x$ اور لچھہ کا رقبہ $= \pi a^2$ ہے ان کو مساوات (9.15) میں درج کرنے پر

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2iNA}{x^3} \qquad (9.16)$$

مساوات (9.16) کا تقابل برقی میدان کے برقی ذوقطبیہ کی مساوات سے کرنے پر۔

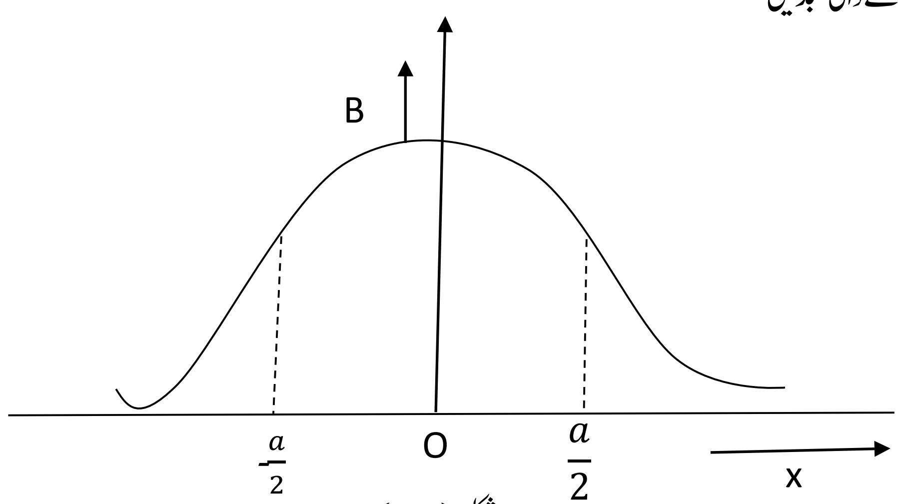
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Pe}{x^3} \qquad (9.17)$$

اس طرح مساوات (9.16) ہمیں بتلاتی ہے کہ رو بردار حلقہ کو ہم مقناطیسی دوقطبیہ (Dipole) کی طرح ملاحظہ کر سکتے ہیں۔ جو اپنا خود مقناطیسی میدان پیدا کرنا ہے۔

مساوات (9.16) اور مساوات (9.17) کا تقابل کرنے پر iNA کو حلقہ (Loop) کا مقناطیسی دوقطبیہ (Dipole) کا اثر کہتے ہیں جسے P_m سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$P_m = iNA \qquad (9.18)$$

B کی x کے ساتھ ہونے والی تبدیلی



شکل (9.7)

9.5.3 مقناطیسی میدان بوجہ پیچول (سولینائیڈ) (Field due to a Solenoid)

سولینائیڈ ایک طویل تار پر مشتمل ہوتا ہے جو ایک مرغولی شکل میں لپیٹا ہوتا ہے۔ جس میں دو پڑوسی چکروں کے درمیان بہت کم جگہ

ہوتی ہے۔ یہ طویل لچھہ سولینائیڈ کھلاتا ہے۔

فرض کرو کہ N چکروں والا لچھہ ہے جس کا طول l ہے اور اگر n چکروں کی تعداد فی اکائی طول ہے تب یہ $n = \frac{N}{L}$ ہوگا اور کسی موصل کی جز برقی رو dx کے n چکروں کی تعداد ہوگی اور محوری نقطہ O پر تب dx کی وجہ سے مقناطیسی امالہ ہوگا۔

$$dB = \frac{\mu_0}{2}\frac{indxa^2}{(a^2+x^2)^{3/2}} \qquad (9.19)$$

مساوات (9.19) کو استعمال کرتے ہوئے۔

متغیر کو θ کی شکل میں لکھنا سہولت بخش ہوگا اس لیے۔

$$x = a\cot\theta \Rightarrow dx = -acosec^2\theta d\theta$$

$$r^3 = (a^2+x^2)^{3/2} = (a^2+a^2\cot^2\theta)^{3/2}$$

$$r^3 = a^3cosec^3\theta$$

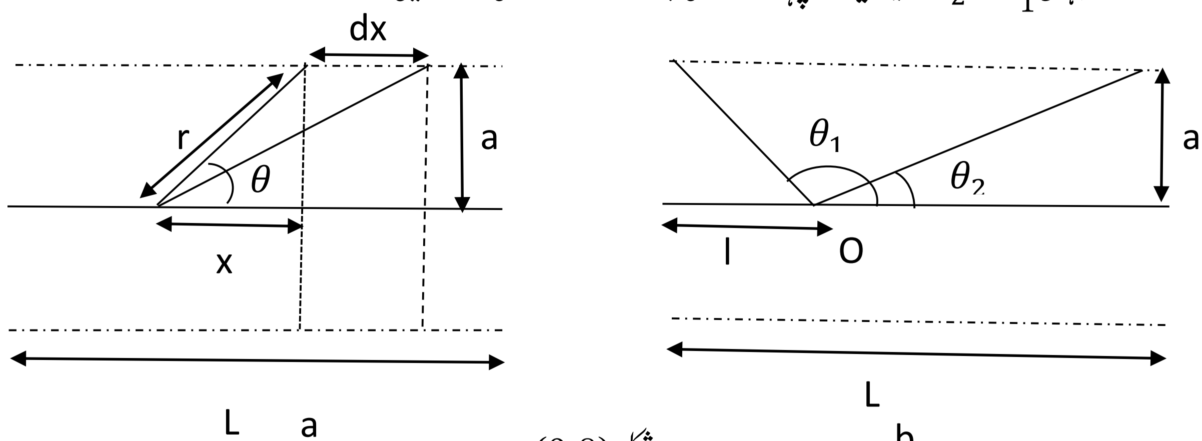
یہ مساوات (9.12) میں درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا کہ

$$dB = -\frac{\mu_0}{2}ni\sin\theta\, d\theta$$

مکمل سولینائیڈ کی وجہ سے پیدا ہونے والا مقناطیسی میدان یہ ہوگا۔ $B = \frac{1}{2}\mu_0 ni\int_{\theta_1}^{\theta_2}(-\sin\theta)d\theta$

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 ni\{cos\,\theta_2 - cos\,\theta_1\} \qquad (9.20)$$

جہاں θ_1 اور θ_2 سولینائیڈ کے پہلے اور آخری چکر کے نصف عمودی زاوئے ہیں۔



شکل (9.8)

شکل ((9.8(b)) سے مساوات (9.20) کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$B = \frac{\mu_0 n_i}{2}\left\{\frac{L-l}{\{a^2+(L-l)^2\}^{1/2}} + \frac{l}{\{a^2+l^2\}^{1/2}}\right\}$$

i. لاتناہی طویل سولینائیڈ کے محور کے درمیان میں B

(B Value the Middle of axis of an Infinitely Long Solenoid)

لاتناہی طول رکھنے والا سولینائیڈ کے لیے L>a اور $\theta \approx 180^0$ اور $0 \approx \theta_2$ کو مساوات (9.21) میں درج کرنے پر

$$B = \mu_0 ni \qquad (9.21)$$

ii. سولینائیڈ کے اختتام پر

$\theta_1 = 90^0$ اور $\theta_0 = 0$

مساوات (9.21) سے

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 ni \qquad (9.22)$$

9.6 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

دائروی لچھے (Circular Coil) کے درمیان پر مقناطیسی نفوض کو معلوم کیجیے۔ جس کا نصف قطر 10cm اور جس کے 20 turns ہیں۔ جس میں برقی رو 2A ہو۔

حل : دیا ہوا ہے

$$i = 2A$$
$$N = 20$$
$$a = 10cm = 10 \times 10^{-2}m$$
$$B = \frac{\mu_0 Ni}{2a}$$
$$B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 20 \times 2}{2 \times 2 \times 10^{-2}}$$
$$B = 25.12 \times 10^{-5}\ tesla$$

حل شدہ مثال 2

مقناطیسی میدان کی شدت کو معلوم کیجیے۔ جب کہ دائروی لچھے (Circular coil) کے 10 turns میں اور وہ 10cm دوری پر واقع ہے جو 1amp برقی رکھتا ہے اور جس کا نصف قطر 20cm ہے۔

حل: دیا ہوا ہے

$$i = 1amp$$
$$a = 20cm = 2 \times 10^{-2}m$$
$$x = 10cm = 10 \times 10^{-2}m$$
$$B = \frac{\mu_0 Nia^2}{2(a^2+x^2)^{3/2}}$$

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{Nia^2}{2(a^2+x^2)^{3/2}}$$
$$H = \frac{10\times1\times(0.2)^2}{2\{(0.2)^2+(0.1)^2\}^{3/2}}$$
$$H = 17.89\ amp\ /\ metre$$

9.7 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- مقناطیسی میدان سمتی خاصیت رکھتا ہے یعنی جس میں سمت اور مقدار دونوں ہوتے ہیں۔ مقناطیسی میدان میں کسی پر سمت اور مقدار کو $\vec{B}$ سے ظاہر کرتے ہیں جیسے مقناطیسی امالہ یا مقناطیسی نفوذی کثافت کہتے ہیں۔
- مقناطیسی نفوذ (Magnetic Flax) کی اکائی ویبر (Weber) ہے اور مقناطیسی نفوذی کثافت (Magnetic Flux Density) یا مقناطیسی (Magnetic) امالہ (Induction) B کی اکائی ویبر فی مربع میٹر $wb/_{m^2}$ یا tesla ٹسلہ ہے۔
- ہم جانتے ہیں کہ ہموار مقناطیس میدان میں برقی بار (q) رکھنے والا ذرہ V رفتار سے حرکت کر رہا ہے تب متحرک برقی بار پر عائد ہونے والا قوت $\vec{F}$ ہو گی۔

$$\vec{F} = q(\vec{V} \times \vec{B})$$

9.8 کلیدی الفاظ (Keywords)

- **مقناطیس (Magnet):** کسی شے کی کینچاؤں خاصیت جو قدرتی طور پر ہو یا Artificial ہو۔ جو کہ لوہا اور Steel ہیں۔
- **مقناطیسی میدان (Magnetic Field):** مقناطیسی کے اطراف بننے والا میدان، جہاں تک مقناطیس قوت کار آمد ہوں۔ اُسے ہم مقناطیسی میدان کہتے ہیں۔
- **سمتیہ میدان (Vector Field):** سمتیہ میدان کے ساتھ جو سمتیہ (Vector) ہے۔ جو space کے ہر نقطہ پر واقع ہے۔
- **مقناطیسی بہاؤ (Magnetic Flux):** مقناطیسی بہاؤ یہ ایک طرح کی پیمائش ہوتی ہے۔ جو ایک Unit area میں گزرنے والی مقناطیسی قطبی نکلنے کا مجموعہ ہوتا ہے یا ایک حصہ سے نکلنے والی مقناطیسی قطبی کو اس حصہ کا نفوذ کہتے ہیں۔
- **T (Testa):** Tesla یہ ایک derived unit ہے۔ جس سے مقناطیسی نفوذ کثافت (Magnetic Flux Density) کو ظاہر کرتے ہیں۔ B یہ ایک SI Unit ہے۔ $1T = 1\, {web}/_{m^2}$
- گواس **(Gauss):** مقناطیسی املا (Magnetic Induction) کا C.G.S یونٹ Gauss ہوتا ہے۔

- گواس پیما(**Gauss Meter**): مقناطیسی میدان کے (Intensity) شدت کے ناپنے کے لیے گواس پیما (Gauss Meter) کا استعمال کیا جاتا ہے۔
- اورسٹیڈ(**Oersted**): مقناطیسی میدان کے شدت ایک اکائیٔ C.G.S، اور سٹیڈ (Oersted) ہوتا ہے۔

9.9 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

9.9.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. اور سٹیڈ کا کلیہ (Orested law) کو بیان کیجیے۔
2. مقناطیسی شامل (Magnetic Induction) کی بیان کیجیے۔
3. مقناطیسی شامل r فاصلہ پر جواپنے میں رو برق رکھتا ہے۔ یہ تناسب میں ہو گا۔

$\frac{1}{r^3}$ (a $\frac{r}{i^2}$ (b $\frac{C^2}{r^2}$ (c $\frac{i}{r^2}$ (d

4. مقناطیسی نفوذی (Flux density) کا C.G.S یونٹ ہے۔

Weber (a Gausses (b Tesla (c Ampere/meter (d

5. ایک Tesla برابر ہوتا ہے ------ گواس کے۔
6. کیا ایک برق رو لے جانے والے لچھے کو ہموار مقناطیسی میدان پیدا کرتی ہے۔
7. ایک تانبہ کا تار نصف دائری موڑ کیا ہے۔ مقناطیسی میدان کی قیمت اس کے درمیان میں کیا ہو گی؟
8. برقی بار ایک ہموار مقناطیسی میدان کی سمت میں حرکت کرتی ہے۔ تب اس کا راستہ کیا ہو گا۔
9. بیاٹ سوارٹ کا کلیہ بیان کیجیے۔
10. بتلاؤ کہ مقناطیسی میدان کی ماہیت کیا ہے؟
11. سولی نائڈ سے جڑا مقناطیسی معیارِ اثر کیا ہے؟

9.9.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. بیاٹ سوارٹ کے قانون کو بیان اور اس کو وضاحت کیجیے۔
2. پیچول کی وجہ سے مقناطیسی میدان کی امالہ کو وضاحت کیجیے۔
3. مقناطیسی سکونیات (Magneto Statics) اور مقناطیسی امالہ بل حاظ قوت کو بیان کیجیے۔
4. روبردار دائروی لچھ (Circular Current Coil) مقناطیسی میدان $\vec{B}$ کی عدد قدر کو وضاحت کیجیے؟

5. مقناطیسی میدان بوجہ پیچول (Field due to a Solenoid) مقناطیسی میدان $\vec{B}$ کی عدد قدر کو وضاحت کیجیے؟

9.9.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. بیاٹ سوارٹ قانون کی وضاحت کیجیے اس کے لیے مساوات کو معلوم کیجیے۔
2. مقناطیسی میدان کی امالہ(Magnetic Field Induction) کو معلوم کیجیے۔ جہاں ایک دائروی لچھے(Circular Coil) ہے جو اپنے میں فرق کو x کہتے ہوئے ہے گراف (graph)کے مور سے اس کے اندر کے(Verities)کو دیکھا ہے۔
3. بیوٹ۔ساورٹ کلیہ کے استعمالات مقناطیسی میدان $\vec{B}$ کی عدد قدر کو وضاحت کیجیے۔
   a) B بوجہ مستقیم لمباتار(B Due to Long Strength Wire)پر
   b) B بوجہ رو بردار دائروی لچھہ پر

9.9.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. ایک سیدھے تار سے 10A کی برق رو گزر ہی ہے۔اس سے 0.5cm کے فاصلے پر خلا میں مقناطیسی امالے کے میدان کی حدت معلوم کیجیے۔
2. ایک دائروی لچھے میں 32 تار ہیں۔ جن کا نصف قطر 25cm ہے۔اگر اس میں 50A کی برقی رو گزاری جائے تو اس کے مرکز پر امالے کے میدان کی حدت معلوم کرو؟ لچھے کے مرکز پر کثافت نفوذ معلوم کرو۔
3. ایک لچھے میں 100 تار ہیں اور ان کا امالہ 0.05H ہے جب اس میں 0.05 ہے جب اس میں 0.02A کی برقی رو گزار جائے تو اس میں کتنا نفوذ(flux)بنے گا۔
4. ایک 10cm نصف قطر کا سختی سے لپیٹا گیا 100 چکروں کا لچھا(Coil) لیجیے، جس میں 1A برقی رو بہہ رہی ہے۔ لچھے کے مرکز پر مقناطیسی میدان کی عددی قدر کیا ہے۔
5. ایک 0.5m طول کے سولی نائڈ کا نصف قطر 1cm ہے اور یہ 500 چکروں کا بنا ہوا ہے۔اس میں 5A برقی رو ہے۔ سولی نائیڈ کے اندر مقناطیسی میدان کی عددی قدر کیا ہے؟
6. ایک دائری حلقہ کا تار جس کا قطر 30cm ہے اس سے 3.5A کی برقی رو بہہ رہی ہے تب محور کے ایک نقطہ پر جو مرکز سے 40 سمر کے فاصلہ پر واقع ہے مقناطیسی میدان معلوم کرو؟
7. تار کا ایک دائری لچھا 100 چکروں پر مشتمل ہے جس میں سے ہر ایک کا نصف قطر 8.0cm ہے۔اس میں 0.40A برقی رو ہے۔ لچھے کے مرکز پر مقناطیسی میدان $\vec{B}$ کی عدد قدر کیا ہے؟

8. ایک طویل مستقیم تار میں 35A برقی رو ہے۔ تار سے 20cm فاصلے پر ایک نقطہ پر میدان $\vec{B}$ کی عددی قدر کیا ہے؟

9.10 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Bleaney, B I, and B Bleaney. Electricity and Magnetism. Oxford: Oxford University Press, 2013.
2. Duffin, W J. Electricity and Magnetism. Cottingham: W.J. Duffin, 2001.
3. Gaur, R.K. &Gupta, S.L.Engineering Physics.Dhanpat Rai Publication.
4. Peck, Edson R. Electricity and Magnetism. , 2013.
5. Plonsey.R&Collin.R.E.Principles and Application of Electromagnetic Field. Tata Mc Graw Hill Publication. New Delhi.
6. Purcell, Edward M, and David J. Morin. Electricity and Magnetism. , 2013.
7. Resnic.R&Halliday.D.Physics Part-I&Part-II.Wiley Eastern Pvt.Ltd.New Delhi.

اکائی 10۔ ایمپیر کا کلیہ ومقناطیسی قوۃ

(Ampere's Law and Magnetic Potential)

اکائی کے اجزا

10.0 تمہید (Introduction)

پچھلی اکائی میں ہم بیوٹ ساورٹ کے کلیے کی مدد سے مختلف رو بردار موصلوں میں برقی میدان کو معلوم کرنا سیکھیں گے۔اس اکائی میں ہم مزید آسان طریقوں کو استعمال کرتے ہوئے مقناطیسی میدان کو معلوم کریں گے۔ اس اکائی میں ہم ایمپیر کے کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے مقناطیسی میدان کو معلوم کریں گے اور ساتھ ہی مقناطیسی سمتی و غیر سمتی قوۃ کا بھی فہم حاصل کریں گے۔

10.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں ہم:

- ایمپیئر کے دوری کلیہ کو بیان کریں گے اور اس کی تشریح کریں گے ۔
- ایمپیئر کے کلیہ کا اطلاق کرتے ہوئے اسے آسان جیومیٹری کے ذریعے مقناطیسی میدان کو معلوم کریں گے۔
- مقناطیسی میدان کا انفراج (Divergence)اور خمیدہ (Curl)معلوم کریں گے۔
- مقناطیسی سمتی و غیر سمتی قوۃ کو سمجھ یں گے۔
- ایمپیئر کے کلیہ پر منحصر سوالات کو حل کریں گے۔
- مقناطیسی قوۃ پر منحصر سوالات کو حل کریں گے۔

10.2 ایمپیر کا دوری کلیہ(Amperes Circuital Law)

ہمیں معلوم ہے کہ طویل برقی رو i بردار تار کے اطراف مقناطیسی میدان$B=\frac{\mu_0 i}{2\pi r}$اور مقناطیسی خطوط تار کے اطراف ہم مرکزی دائروں میں ہوتے ہیں۔ کسی بند سطح کے نصف قطرRکے اطراف خطی تکمل(Line Integral)رہے گا۔

$$\oint B.dl=\int Bdl\,Cos\theta$$

$\theta=0$صفر درجہ ہو تب مقناطیسی میدان دائری راستہ کی مماسی کی سمت ہوگا۔

$$\oint B.dl=\int \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\,Cos\theta\,dl$$

$$\oint B.dl=\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\int dl$$

اگر Rکسی خاص دائری راستے پر مستقل ہے تب اسے باہر کی طرف تکمل لے سکتے ہیں اور $\int dl$ کا$2\pi r$کے مساوی ہوگا

لہذا

$$\oint B.dl = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\ 2\pi r \quad (10.1)$$

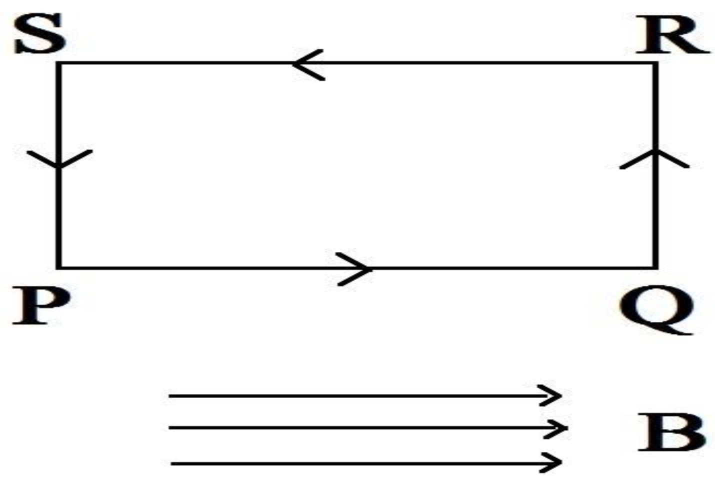
$$\oint B.dl = \mu_0 i \quad (10.2)$$

مندرجہ بالا مساوات بتاتی ہے کہ کوئی بھی آزاد ساخت رکھنے والے بند راستے کے لیے حسب بالا رشتہ درست ہوتا ہے یعنی خطی تکمل راستے کی ساخت پر منحصر نہیں ہوتا یا کسی بند راستے کے لیے $\oint B.dl$ راستے کی جسامت سے آزاد ہوتا ہے اور تار کے مقام سے بھی آزاد ہوتا ہے ۔

مساوات (10.2) ایمپیر کے کلیہ کو بتلاتی ہے جسے اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے کہ کسی بند راستے پر مقناطیسی امالہ B کا خطی تکمل برقی رو راستے سے گھرے تمام علاقہ کہ μ مرتبہ کے مساوی ہوتا ہے ۔

10.3 ایمپیر کے کلیہ کے اطلاقات (Applications of Ampere's Law)

جب کبھی ایسا نظام ہوتا ہے جہاں برقی رو کی تقسیم میں تشاکل (Symmetry) پایا جاتا ہے تب ایمپیر کے کلیہ کے ذریعے مقناطیسی میدان B کی قدر معلوم کرنا آسان ہو جاتا ہے ذیل کی مثال میں لامتناہی طول رکھنے والے سولینائیڈ کی وجہ سے مقناطیسی میدان پیدا ہورہا ہے۔



شکل (10.1)

پیچواں یا سولینائیڈ کے اندر مقناطیسی میدان محور کے متوازی اور ہموار ہوتا ہے۔ فرض کرو کے ایک مستطیلی حلقہ PQRS ہے اس PQRS کے اطراف تکمل اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\oint B.dl = \int_P^Q B.dl + \int_Q^R B.dl + \int_R^S B.dl + \int_S^P B.dl$$

$$= B.dl + 0 + \ 0 + \ 0$$

پہلی قدر Bl کے مساوی ہو گی جہاں $\theta \ = 0$ پر ہو گا۔ دوسری اور چوتھی قدر صفر ہو گی کیوں کہ dl کی سمت مقناطیسی میدان B کی سمت کے عمودوار ہے۔ تیسری قدر میں S سولینائیڈ کے باہر ہو گا اور ہم جانتے ہیں کہ سولینائیڈ کے باہر میدان صفر ہوتا ہے۔ اس طرح تیسری قدر بھی صفر ہو گی ۔

لہٰذا

$$\oint B.dl = Bl$$

$$\oint B.dl = \mu_0 \, i$$

N چکروں کے لیے یہ $\mu_0 N \, i$ کے مساوی ہو گا ۔

$$Bl = \mu_0 \, N \, i \qquad (10.3)$$

مگر $\mathrm{n} = \frac{N}{\mathrm{l}}$

$$\mathrm{l} \, \mathrm{n} = N$$

$$Bl = \mu_0 \, nl \, i \qquad (10.4)$$

$$B = \mu_0 \, n \, i \qquad (10.5)$$

یہ بالکل ایسا ہی ہے جیسے مساوات (10.5) میں ہمیں حاصل ہوا پر یہاں ہم بہت آسانی سے B کی قدر معلوم کر سکتے ہیں اور ہم ایمپیری حلقہ کو ترتیب دے کر ایسا نظام بنا سکتے ہیں جہاں برقی رو کی تقسیم میں تشاکل (Symmetry) پایا جاتا ہے جیسے کہ تار، ٹورائیڈ (Toroid)، استوانہ وغیرہ اور اس میں ہم اب ایمپیر کے کلیہ کے ذریعے بہت آسانی سے مقناطیسی میدان B کو معلوم کر سکتے ہیں۔

10.4 مقناطیسی میدان کا خمیدہ (Curl of Magnetic Field)

فرض کرو کہ ایک خطہ میں برقی رو بہہ رہی ہے۔ بہنے والی جملہ برقی رو i ہے۔ سطح کا چھوٹا سا جز ds ہے جو بند راستے سے گھیرا ہے اور اس جز ds میں برقی رو کی کثافت j ہے۔

$$i = \ \int j.ds \qquad (10.6)$$

ایمپیر کے کلیہ کے مطابق

$$\oint B.dl = \mu_0 \, i$$

$$\oint B.dl = \mu_0 \int j.ds \qquad (10.7)$$

مسئلہ اسٹوکس(Stokes Theorem)کواستعمال کرتے ہوئے۔

$$\oint B.dl = \int curl\ B.ds = \mu_0 \int j.ds \qquad (10.8)$$

$$CurB = \mu_0\, j \qquad (10.9)$$

یہ ایمپیر کے کلیہ کی تفرقی(Differential)شکل ہے۔یہ رشتہ بتاتا ہے کہ برقی سکونی میدان کے برعکس مقناطیسی سکونی میدان میں گھماو یا خمیدہ ہوتا ہے ۔

10.5 مقناطیسی میدان کا انفراج (Divergence of Magnetic Field)

بیوٹ سیاورٹ کی کلیہ سے (Biot-Savart's Law)

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{i\, dl \times r}{r^3}$$

$$\mathrm{i\ dl = j\ dr}$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{j \times r}{r^3} dr \qquad (10.10)$$

$$div\ B = \nabla.B = \nabla.\frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{j \times r}{r^3}\ dv$$

عامل ڈیل (Del Operator)میدان کے نقطہ کا ایک تفاعل ہوتا ہے۔یہ تکمل (Integral)میں آزاد متغیر ہوتا ہے جو مبدا نقطہ (عنصر برقی رو) کا تفاعل ہے۔اس لیے یہ تکمل(Integral)کے دائیں جانب ہٹ سکتا ہے۔

$$\nabla.B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \nabla.\frac{j \times r}{r^3}\ dv$$

سمتیہ کے مطابق

$$\nabla.(A \times B) = B.(\nabla \times \mathrm{A}) - \mathrm{A}.(\nabla \times \mathrm{B})$$

کیوں کہ $B = \frac{x}{r^3}$ اور $A = j$

$$\nabla.\left(j \times \frac{x}{r^3}\right) = \frac{x}{r^3}.(\nabla \times j) - j.(\nabla \times \frac{x}{r^3})$$

دائیں جانب کی پہلی قدر صفر ہے کیوں کہ j مبدا کے نقطے کا تفاعل اور ∇ میدان کے نقطہ کے حوالے سے ہے۔ہم $\nabla \times \frac{x}{r^3}$ کو مزید سہل کر سکتے ہیں۔

$$\nabla \times \frac{x}{r^3} = \nabla \times \left\{-\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right\} = -\nabla \times \nabla(\frac{1}{r})$$

مگر کسی بھی تفاعل کے لیے خمیدہ(Curl)کا تدریجی فرق(Gradient) صفر ہوتا ہے۔اس لیے یہ قدر بھی صفر ہو گئی ۔

$$\nabla . B = 0 \qquad (10.11)$$

برقی سکونیات کی مساوات سے تقابل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\nabla . E = P$$

جہاں P برقی بار کی کثافت ہے۔اس سے ہم نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ ایک قطبی مقناطیس نہیں رہتا ہے دوسرے الفاظ میں مقناطیسی میدان B میں انفراج (Divergence) یا $\nabla . B$ ہمیشہ صفر ہوتا ہے اس طرح کسی بند سطح (Closed Surface) پر نفوذ صفر ہوتا ہے۔یعنی B کے خطوط اس طرح ہوتے ہیں کہ مقناطیسی نفوذ(Flux)میں نہ ہی ان کی ابتدا ہوتی ہے اور نہ انتہا ہوتی ہے۔بلکے یہ خود اپنے اندر ہی مل جاتے ہیں۔

$$\int_S B . ds = \int \nabla . B \, dv$$

10.6 مقناطیسی سمتی و غیر سمتی قوۃ (Magnetic Scalar and Vector Potential)

مقناطیسی میدان کو مقناطیسی قوۃ کی شکل میں بھی ظاہر کر سکتے ہیں مساوات(10.9) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\nabla \times B = \mu_0 \, j$$

برقی رو کی غیر موجودگی میں برقی رو کی کثافت سفر ہو گی۔$j = 0$

$$\nabla \times B = 0$$

کسی غیر سمتی مقدار (Scalar) کے لیے خمیدہ(Curl)کا تدریجی فرق(Gradient)صفر ہوتا ہے B کو ہم غیر سمتی مقدار (Scalar)کے تدریجی فرق (Gradient) کی طرح ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$B = -\nabla \Phi_m \qquad (10.12)$$

جہاں Φ_m کو مقناطیسی غیر سمتی قوۃ (Magnetic Scalar Potential)کہتے ہیں۔

مساوات(10.11) سے ہم کو معلوم ہوتا ہے کہ

$$\nabla . B = 0$$

اور غیر سمتی میدان کے انفراج یا تباعد (Divergence)کا تدریجی فرق(Gradient) بھی صفر ہوتا ہے۔یعنی

$$-\nabla . \nabla \Phi_m = 0$$

$$\nabla^2 \Phi_m = 0 \qquad (10.13)$$

عامل ∇^2 کو لیپ لیسین (Laplacian) کہتے ہیں۔ مساوات (10.13) لیپ لیسین مساوات کہلاتی ہے پر تب ہی یہ قابل عمل ہے جب کے میدان کا خطہ آزاد برقی رو سے الگ ہوں جہاں $j \neq 0$ ہوتا ہے یعنی برقی رو کی کثافت کی مقدار ہو گی وہاں پر مقناطیسی سمتی قوۃ (Magnetic Vector Potential) کو استعمال کرتے ہیں۔

برقی سکونیات کے گاؤس کلیہ کے مطابق $\nabla.\vec{B} = 0$

کیوں کہ سمتیہ کے خمیدہ (Curl) کا تباعد یا انفراج (Divergence) صفر ہوتا ہے۔ B کو ہم سمتی تفاعل $\vec{B}$ کا خمیدہ (Curl) لکھ سکتے ہیں۔

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \qquad (10.14)$$

اس مقدار $\vec{A}$ کو مقناطیسی سمتی قوۃ (Magnetic Vector Potential) کہتے ہیں۔ ہم $\vec{A}$ ایسا تفاعل نہیں ہے جس کا خمیدہ (Curl) صفر کو A کے ساتھ جوڑنے سے وہی نتیجہ دیتا ہے اس لیے $\vec{A}$ پر ایک اضافی شرط اعائد کی جاتی ہے۔ یعنی

$$\nabla \times \vec{A} = 0 \qquad (10.15)$$

مقناطیسی سمتی قوۃ (Magnetic Vector Potential) کو حسب ذیل مساواتوں کے سیٹ کے ذریعے بیان کیا جاتا ہے۔

$$\boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}}$$

اور

$$\boxed{\nabla \times \vec{A} = 0}$$

10.7 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

لا متناہی طویل موصل جو 20 ایمپیر برقی رو رکھتا ہے اس سے 10 سمر دور فاصلے پر مقناطیسی امالہ معلوم کرئے۔؟

حل: دیا گیا ہے کہ

$$i = 20\ mA = 20 \times 10^{-3} A$$
$$R = 10\ cm = 10 \times 20^{-2} m$$

$$B = \frac{\mu_0\ i}{2\pi R}$$

$$B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 20 \times 10^{-3}}{2\pi \times 10 \times 10^{-2}} \Rightarrow \boldsymbol{B = 4 \times 10^{-8} Tesla}$$

حل شدہ مثال2

مستقیم طویل3.5 ایمپیر رو بردار وائر میں کتنے فاصلے پر مقناطیسی نفوذی کثافت $7 \times 10^{-6} A/m$ ہو گی ؟

حل:

دیا گیا ہے کہ

$$i = 3.5\ A$$
$$B = 7 \times 10^{-6} A/M$$

$$B = \frac{\mu_0\ i}{2\pi R}$$
$$R = \frac{\mu_0\ i}{2\pi B}$$
$$R = \frac{4\pi\ \times\ 10^{-7} \times\ 3.5}{2\pi \times\ 7\ \times 10^{-6}}$$
$$\boldsymbol{R = 0.1\ m}$$

حل شدہ مثال3

ایک طویل سولینائیڈ میں 10 چکر فی سمر ہیں اور برقی رو 10 mA ہے۔ محور کے داخلی نقطہ پر مقناطیسی امالہ معلوم کیجیے ؟

حل : دیا گیا ہے کہ

$$i = 10\ mA = 10 \times 10^{-3} A$$
$$n = 10\ per\ cm = 1000\ per\ m$$

$$B = \mu_0 n\ i$$
$$B = 4\pi\ \times\ 10^{-7} \times 1000 \times\ 10 \times 10^{-3}$$

$$\boldsymbol{B = 12.56\ \ \times\ 10^{-6}} \frac{\text{ویبر}}{\text{میٹر}^{2}}$$

حل شدہ مثال4

سولینائیڈ جو پچاس50 سمر طول رکھتا ہے جس میں ہزار1000 چکر ہیں اور اس سے ایک 1 ایمپیئر برقی رو بہہ رہی ہے۔ محور کے اندرونی حصے پر مقناطیسی میدان کی حدت کیا ہو گی ؟

حل: دیا گیا ہے کہ

$$N = 1000, L = 50\ cm = 0.5\ m$$
$$i = 1\ amp$$

$$B = \mu_0 n\ i$$

$$H = \frac{B}{\mu_0} = n\,i$$

$$n = \frac{N}{l} = \frac{1000}{0.5} = 2000$$

$$H = 2000 \times 1$$

$$\boldsymbol{H = 2000}\frac{\text{چکر}}{\text{میٹر}}\ \text{ایمپیر}$$

حل شدہ مثال5

اگر مقناطیسی غیر سمتی قوۃ $\phi_m = \frac{1}{2}x^2 - xy - \frac{1}{2}z^2$ ہے تب مقناطیسی امالہ B معلوم کرئے؟

حل:

$$B = -\nabla\Phi_m$$

$$B = [\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2 - xy - \frac{1}{2}z^2\right)i + \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2}x^2 - xy - \frac{1}{2}z^2\right)j + \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2}x^2 - xy - \frac{1}{2}z^2\right)k$$

$$B = -[\,(x-y)i - x\,j - z\,k]$$

$$\boldsymbol{B = [\,(y-x)i + x\,j + z\,k]}$$

حل شدہ مثال6

اگر مقناطیسی سمتی قوۃ $\vec{A} = (3x^2 + 2y^2)k$ ہے تب مقناطیسی میدان کی حدت B معلوم کرئے؟

حل:

$$B = \nabla \times A$$

$$H = \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times A)$$

$$H = \frac{1}{\mu_0}\begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ 0 & 0 & 3x^2 + 2y^2 \end{bmatrix}$$

$$H = \frac{1}{\mu_0}\{\quad 4y - 6j\,\}$$

حل شدہ مثال7

دیے گئے خطے میں سمتی قوۃ $\vec{A} = -2y\, i + xj$ ہے B کو معلوم کرئے؟

حل:

$$B = \nabla \times A$$

$$B = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ -2y & x & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \{1 - (-2)\}\hat{k}$$

$$B = 3\hat{k}$$

10.8 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- مندرجہ بالا مساوات بتاتی ہے کہ کوئی بھی آزاد ساخت رکھنے والے بند راستے کے لیے حسب بالا رشتہ درست ہوتا ہے یعنی خطی تکمل راستے کی ساخت پر منحصر نہیں ہوتا یا کسی بند راستے کے لیے $\oint B.dl$ راستے کی جسامت سے آزاد ہوتا ہے اور تار کے مقام سے بھی آزاد ہوتا ہے ۔

$$\oint B.dl = \mu_0 i$$

- فرض کرو کہ ایک خطہ میں برقی رو بہہ رہی ہے۔ بہنے والی جملہ برقی رو i ہے۔ سطح کا چھوٹا سا جز ds ہے جو بند راستے سے گھیرا ہے اور اس جز ds میں برقی رو کی کثافت j ہے۔

$$i = \int j.ds$$

- مقناطیسی سمتی قوۃ (Magnetic Vector Potential) کو حسب ذیل مساواتوں کے سیٹ کے ذریعے بیان کیا جاتا ہے۔

$$\boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}}$$

اور

$$\boxed{\nabla \times \vec{A} = 0}$$

10.9 کلیدی الفاظ (Keywords)

- **برقی رو کی کثافت j** : یہ اکائی تراش عمودی کے رقبے میں سے گزرنے والی برقی رو کی مقدار ہے اس کی بین الاقوامی اکائی ایمپیر فی مربع میٹر $\frac{amp}{m^2}$ ہے۔
- **حقیقی قدر رکھنے والے تفاعل کی تدریج:** $\nabla f(x,y,z) = \frac{df}{dx}\hat{\imath} + \frac{df}{dy}\hat{\jmath} + \frac{df}{dz}\hat{k}$
- **سمتیہ تفاعل کا انفراج یا تباعد:** $f = f_1 i + f_2 j + f_3 k$

$$\nabla . f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

- **حقیقی قدر رکھنے والے تفاعل** $f(x,y,z)$ **کا لاپلاسین۔ ∇^2:**

$$\nabla^2 = \nabla . \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- **قضیہ اسٹوکس یا مسئلہ اسٹوکس:** گھری ہوئی بند سطح کے تفاعل کا انفراج کا سطحی تکمل، سطح کی اطراف مخصوص سمتی تفاعل کے خطی تکمل کے مساوی ہوتا ہے۔

10.10 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

10.10.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. صحیح جواب کا انتخاب کیجیے ۔

i. ایمپیئر کی دوری کلیہ کو بتلائے ؟

a) $\oint B \cdot dl = \mu_0 i$ b) $\oint B \cdot dl = \frac{\mu_0}{i}$

c) $\oint B \cdot dl = \mu_0 j$ d) $\oint B \cdot dl = \frac{\mu_0}{j}$.

ii. طویل رو بردار مستقیم موصل سے r فاصلہ پر پائی جانے والے مقناطیسی میدان B راست متناسب ہوتا ہے۔

a) r b) r^2 c) $\frac{1}{r}$ d) $1/r^2$

2. ایمپیئر کی کلیہ کو تفرقہ کی شکل میں لکھیے ؟

3. مقناطیسی میدان کا انفراج ہمیشہ مساوی ہوتا ہے...

4. $\oint H . dl$- کی قدر ہے...

5. مقناطیسی غیر سمتی قوۃ کے لیے لاپلاسین کی مساوات لکھیے ۔

6. مقناطیسی سمتی قوۃ کی دو مساوات لکھیے اور سمجھائے۔

7. ایمپیئر کا کلیہ بیان کیجیے۔

8. (Ammeter) ایم پیما اور وولٹ پیما (Voltmeter) میں فرق بتلاؤ۔

9. مقناطیسی سمتی قوۃ بیان کیجیے۔

10. مقناطیسی سمتی قوۃ (Magnetic Vector Potential) کی مساواتیں.......................ہے۔

10.10.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. ایمپیر کے دوری کلیوں کو بیان کیجیے اور اخذ کیجیے ۔ثابت کیجیے کہ. $j=0$ کے لیے مقناطیسی میدان باقی نہیں رہتا ہے۔

2. ایمپیر کے کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے طویل رو بردار مستقیم موصل کے ذریعے مقناطیسی امالہ کو معلوم کرئے ۔

3. طویل پیچواں (سولینائیڈ) سے ایمپیر کے کلیہ کا اطلاق کرتے ہوئے مقناطیسی نفوذی کثافت کو معلوم کرئے۔

4. ایمپیر کے دوری کلیوں کو بیان کیجیے اور اخذ کیجیے۔

5. مقناطیسی غیر سمتی و سمتی قوۃ (Magnetic Potential and Scalar Potential) کو بیان کیجیے ۔

10.10.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. B کا انفراج کا (Divergence) اور خمیدہ ہونا (Curl) معلوم کیجیے اور ثابت کیجیے کہ ایک قطبی مقناطیس نہیں پایا جاتا ہے ؟

2. مقناطیسی غیر سمتی و سمتی قوۃ (Magnetic Potential and Scalar Potential) کیلیے مساوات اخذ کیجیے۔

3. ایمپیر کے دوری کلیوں کو بیان کیجیے اور اخذ کیجیے ۔ثابت کیجیے کہ. $j=0$ کے لیے مقناطیسی میدان باقی نہیں رہتا ہے ؟ایمپیر کے کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے طویل رو بردار مستقیم موصل کے ذریعے مقناطیسی امالہ کو معلوم کرئے۔

10.10.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. ایک لچھے میں 100 تار ہیں اور ان کا امالہ 0.05H ہے جب اس میں 0.05 ہے جب اس میں 0.02A کی برقی رو گزار جائے تو اس میں کتنا نفوذ (Flux) بنے گا۔

2. ایک دائری حلقہ کا تار جس کا قطر 30cm ہے اس سے 3.5A کی برقی رو بہہ رہی ہے تب محور کے ایک نقطہ پر جو مرکز سے 40 سمر کے فاصلہ پر واقع ہے مقناطیسی میدان معلوم کرو؟

3. تار کا ایک دائری لچھا 100 چکروں پر مشتمل ہے جس میں سے ہر ایک کا نصف قطر 8.0cm ہے۔اس میں 0.40A برقی رو ہے۔ لچھے کے مرکز پر مقناطیسی میدان $\vec{B}$ کی عدد قدر کیا ہے؟

4. ایک طویل مستقیم تار میں 35A برقی رو ہے۔ تار سے 20cm فاسلے پر ایک نقطہ پر میدان $\vec{B}$ کی عددی قدر کیا ہے

5. ایک اوپر سے جارہی افقی پاور لائن میں 90A برقی رو ہے، جس کی سمت مشرق سے مغرب کی جانب ہے۔ لائن سے 1.5 نیچے، برقی رو کی وجہ سے پیدا ہونے والے مقناطیسی میدان کی سمت اور عددی قدر کیا ہے؟

6. ہائیڈروجن جوہر کے بھور ماڈل میں الکٹران، مرکزہ کے گرد $5.1 \times 10^{-11} m$ نصف قطر کے دائروی مدار میں $68 \times 10^{-15}\ {}^{rev}/_{sec}$ چکر فی سکنڈ کے تعدد کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔ مدار مرکز پر قائم ہونے والے B کی قیمت کیا ہوگی۔

10.11 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Bleaney, B I, and B Bleaney. Electricity and Magnetism. Oxford: Oxford University Press, 2013.
2. Duffin, W J. Electricity and Magnetism. Cottingham: W.J. Duffin, 2001.
3. Gaur, R.K. &Gupta, S.L.Engineering Physics.Dhanpat Rai Publication.
4. Kurrelmeyer, Bernhard, and Walter H. Mais. Electricity and Magnetism. Princeton, N.J: Van Nostrand, 1967.
5. Peck, Edson R. Electricity and Magnetism. , 2013.
6. Plonsey.R&Collin.R.E.Principles and Application of Electromagnetic Field. Tata Mc Graw Hill Publication. New Delhi.
7. Purcell, Edward M, and David J. Morin. Electricity and Magnetism. , 2013.
8. Resnic.R&Halliday.D.Physics Part-I&Part-II.Wiley Eastern Pvt.Ltd.New Delhi.
9. Resnick, Robert, David Halliday, and Kenneth S. Krane. Physics. New York: Wiley, 2002.
10. Schuh, Mari C. Magnetism. Minneapolis, MN: Bellwether Media, 2008.

اکائی 11۔مادہ کے مقناطیسی خواص

(Magnetic Properties of Material)

اکائی کے اجزا

11.8 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں

11.0 تمہید (Introduction)

پچھلی اکائی میں ہم برقی رو بردار موصلوں کی وجہ سے پیدا ہونے والے برقی میدان کے بارے میں معلومات حاصل کرے تھے اور مقناطیسی سمتی و غیر سمتی قوۃ کا فہم ہم حاصل کرے تھے۔ اس اکائی میں ہم مختلف مادوں کے مقناطیسی خصوصیات اور ان کی اصل کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔

11.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مطالعہ میں ہم:

- مقناطیسی نفوذ، مقناطیسی امالہ، مقناطیسی میدان کی کی حدت، اجازیت اور مقناطیسی میلانیت کے تصورات کو سمجھیں گے۔
- مقناطیسی میلانیت اور مقناطیسی اجازیت کے درمیان نسبت قائم کریں گے۔
- ڈایا، پیرا اور لوہ مقناطیسی اشیا میں درجہ بندی کریں گے۔
- مندرجہ بالا تصورات پر مبنی سوالات کو حل کریں گے۔

11.2 مقناطیسی خواص (Magnetic Properties)

وہ اشیا جو مقناطیس سے کشش کرتے ہیں مقناطیسی اشیا کہلاتے ہیں۔ مقناطیسی اشیا کے جوہر کے اندر موجود برقی بار رکھنے والے ذرات کی گردش کی وجہ سے مقناطیسی اثر پیدا ہوتا ہے۔ ہم پہلے پڑھ چکے ہیں کے برقی بردار رکھنے والا حلقہ مقناطیسی ذو قطبیہ کے برابر ہوتا ہے۔ یہ ہی وجہ ہے کہ ظاہر میں مرکزے کے اطراف اپنے مدار پر منفی الیکٹران کی حرکت کی وجہ سے مقناطیسی اثر پیدا ہوتا ہے اسے مداری مقناطیسی معیار اثر کہتے ہیں اور الیکٹرون کے گھماؤ کی وجہ سے بھی مقناطیسی اثر پیدا ہوتا ہے۔ اگر الیکٹران کے گھماؤ کی وجہ سے ہونے والے مقناطیسی معیار اثر کو (Bohr Magneton) بھور کا مقنیطیہ (مگنی ٹون) کہتے ہیں۔ جس سے M_B سے ظاہر کرتے ہیں۔

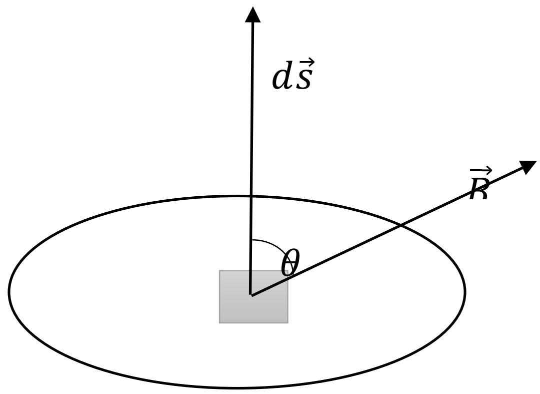
$$M_B = \frac{eh}{4\pi m_e} = 9.274 \times 10^{-24} A/m^{-2} \qquad (11.1)$$

جہاں e الیکٹران کا برقی بار، h پلانکسا مستقل ' m_e الکٹران کی کمیت ہے۔ بوہر مقنیطیہ (Magneton) بہت ہی بنیادی مقناطیسی معیار اثر ہے۔ یہی وجہ ہے کہ جوہر کی ساخت پر اشیا کا مقناطیسی معیار اثر منحصر رہتا ہے ۔

11.2.1 مقناطیسی امالہ/ مقناطیسی نفوذی کثافت (Magnetic Induction/ Magnetic Flux 'H'Density)

کسی نقطے پر مقناطیسی امالہ مقناطیسی میدان B کے عمود وار اکائی رقبے میں سے گزرنے والا مقناطیسی نفوذ ہوتا ہے ۔

$$\phi_m = B.A \qquad (11.2)$$



شکل(11.1)

مقناطیسی میدان کی حدت دراصل کسی شے میں موجود مقناطیسی میدان ہوتا ہے جو کسی کا ذاتی وقدرتی نہیں ہوتا ہے یہ بیرونی برقی رو کے ذریعے پیدا ہوتا ہے۔اس کو H کی سمتیہ کی شکل میں ظاہر کیا جاتا ہے اور H کی اکائی A/m ہے۔

اگر برقی رو i سے لچھے کے ذریعے مقناطیسی میدان پیدا کیا گیا ہے جس کا طول l ہے اور اس میں n چکر ہیں اسے اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$H = \frac{n\,i}{l} \qquad (11.3)$$

11.2.2 اجازیت (Permeability) 'μ'

اجازیت (Permeability) μ یہ مادہ کی خصوصیت ہوتی ہے۔جو مادہ میں مقناطیسی نفوذی کثافت B اور مقناطیسی حدت کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے یا مقناطیسی نفوذی کثافت B اور مقناطیسی حدت کو آپس میں تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

$$\mu = \frac{B}{H} \qquad (11.4)$$

اجازیت (Permeability) (μ) واسطے کی مخصوص خصوصیت ہے اور اس کی اکائی $\frac{web}{A-M}$ ویبر فی ایمپیر میٹر ہے یا ہنری (Henry) فی میٹر (Meter) ہے۔ اضافی مقناطیسی اجازیت کو اس طرح بیان کیا جاتا ہے۔

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \qquad (11.5)$$

جہاں μ_r اس درجہ کی پیمائش ہے جس درجہ پر مادہ کو مقناطیس بنایا جاسکتا ہے اور μ_0 خلاء کی مقناطیسی اجازیت ہے۔

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{web}{A - M}$$

11.2.3 مقناو کی حدت (‘I’ Intensity of Magnetization)

مقناو، مقناطیسی شے میں مقناطیسی میدان کے ذریعے مقناطیسی معیار اثر کو ترغیب دینے یا مائل کرنے کا عمل ہے۔

مقناو کی حدت سمتیہ(Intensity of Magnetization) I سے ظاہر کیا جاتا ہے ۔جب مادہ کو مقناطیسی میدان میں رکھا جاتا ہے تب جوہری ذوقطبیہ (Atomic Dipole) میدان کی سمت میں مکمل یا جزوی مائل ہوتا ہے ۔اس لیے میدان کی سمت میں جملہ مقناطیسی معیار اثر ترتیب پاتا ہے۔ I دیے گئے مادہ کی مستقل یا ترغیب شدہ ذو قطبی معیار اثر کی کثافت کی پیائش ہے۔

$$I = \frac{M}{V} \qquad (11.6)$$

جہاں M جملہ مقناطیسی معیار اثر ہے جو مقناو میدان کی وجہ سے حجم V کے اندر ہے۔I مقناطیسی شے کا مقناطیسی معیار اثر فی اکائی حجم ہے۔ جس کی پیائش ایمپیر فی مربع میٹر ہوتی ہے۔ جس کی اکائی ایمپیر فی میٹر Am^{-1} میں ہوتی ہے۔

11.2.4 مقناطیسی میلا نیت (′χ′ Magnetic Susceptibility)

مقناطیسی میلانیت(Magnetic Susceptibility)اس حد کی پیائش ہے جس میں بیرونی مقناطیسی میدان سے کسی شے کو مقناطیس بنایا جاسکتا ہے۔یہ کسی مادہ میں ترغیب شدہ مقناو کی حدت I اور مقناطیسی میدان کی حدت H کے درمیان نسبت ہوتی ہے ۔

$$\chi = \frac{I}{H} \qquad (11.7)$$

کیوں کہ I اور H کی اکائیاں ایک ہی ہوتی ہے یعنی Am^{-1} اس وجہ سے ان کی نسبت کی اکائی نہیں ہوتی ہے ۔

μ_r اور χ میں نسبت :

$$B = \mu_0 H + \mu_0 I \qquad (11.8)$$

یہاں جملہ مقناطیسی میدان دو حصوں میں تقسیم ہے پہلا یعنی H بیرونی عوامل جیسے سولینائڈ سے گزررہے برقی رو کی وجہ سے پیدا ہونے والا ہے اور دوسرا $\mu_0 I$ اضافی مقناطیسی نفوذ فی اکائی حجم ہے جو امالی اثر کی وجہ سے ہوتا ہے۔

مگر $B = \mu H$ اور مساوات(11.8) سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

$$\chi = \frac{\mathrm{I}}{H} \Rightarrow \chi H = \mathrm{I}$$

مساوات (11.8) میں درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\mu H = \mu_0 H + \mu_0(\chi H)$$

$$\mu H = \mu_0 H(1+\chi)$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = (1+\chi)$$

$$\mu_r = (1+\chi)$$

$$\mu_r - 1 = \chi \tag{11.9}$$

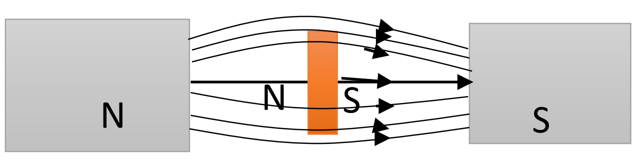
11.3 مقناطیسی اشیا کی درجہ بندی (Classification of Magnetic Materials)

مقناطیسی اشیا کو ان کے مقناطیسی طرز عمل کی بنیاد پر درجہ بندی کی جاتی ہے جس کا انحصار χ پر ہوتا ہے اور اس کی مقدار اور علامت پر ہوتا ہے اس کے بنیادی طور پر تین اقسام ہیں ۔

- ڈیا مقناطیسی(Diamagnetic)اشیا
- پیرامقناطیسی(Paramagnetic) اشیا
- لوہ مقناطیسی(Ferromagnetic) اشیا

11.3.1 ڈیامقناطیسی اشیا (Diamagnetic Materials)

ڈیامقناطیسی مادہ مقناطیس سے کمزور طور پر دفاع کرتا ہے۔اس مادہ میں مستقل ذوقطبیہ (Diploe) کی کمی ہوتی ہے۔جب بیرونی مقناطیسی میدان کو عائد کیا جاتا ہے جس کے نتیجے میں جوہر کے مداروں میں گردش کرنے والے الیکٹرانس اپنا توازن کھودیتے ہیں اور ہلکا سا مقناطیسی ذوقطبیہ (Diploe) بناتے ہیں جو عائد ہونے والے میدان کے مخالف سمت میں ہوتا ہے ۔جو منفی مقناطیسی اثر پیدا کرتا ہے جسے ہم ڈیامقناطیسیت کہتے ہیں ۔



شکل(11.2)

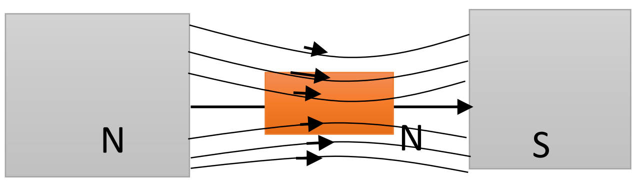
ڈیامقناطیسی اشیا میں حسب ذیل خواص ہوتے ہیں ۔

- یہ کمزور اثر رکھتے ہیں۔

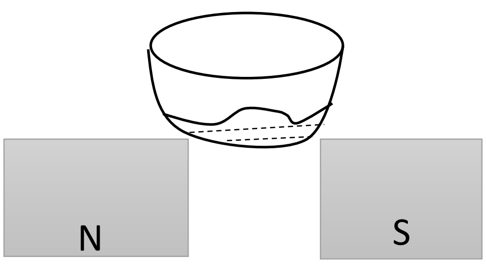
- مستقل ذو قطبیہ (Diploe) غیر موجود رہتے ہیں۔
- امالی مقناطیسی معیار اثر بہت کم رہتا ہے اور مقناو I کی سمت عائد ہونے والے مقناطیسی میدان H کی سمت کی مخالف سمت میں ہوتی ہے۔
- اس وجہ سے نفوذی کثافت باہر کے مقابلے اندر کم ہوتی ہے ۔
- اضافی اجازیت اکائی سے کم ہوتی ہے یعنی مقناطیسی میلان منفی ہوتا ہے ۔
- مثال کے طور پر تانبہ Cu' چاندی Ag' سیلکان Si وغیرہ ۔

11.3.2 پیرامقناطیسی اشیا (Paramagnetic Materials)

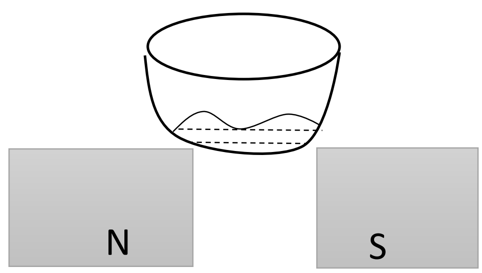
پیرا مقناطیسی اشیا مقناطیس سے کمزور طور پر کشش کرتے ہیں ۔ پیرا مقناطیسی اشیا مستقل ذو قطبی معیار اثر (Diploe Moment) رکھتے ہیں ۔کیوں کہ ان میں الیکٹرانی گھماؤں اور مداری مقناطیسی معیار اثر کی نامکمل تنسیخ ہوتی ہے۔بیرونی مقناطیسی میدان کی غیر موجودگی میں جوہری مقناطیسی معیار اثر کی بے ترتیبی کی وجہ سے جملہ مقناطیسیت نہیں پائی جاتی ہے۔ لیکن جب بیرونی مقناطیسی میدان عائد کیا جاتا ہے تب ذوقطبیت (Dipoles) میدان کے ساتھ ترتیب پاتے ہیں۔ جس کے نتیجہ میں مثبت مقناطیسیت پائی جاتی ہے۔ پیرامقناطیسی اشیامیں حسب ذیل خواص پائے جاتے ہیں۔



شکل(a)



شکل(b)



شکل(c)

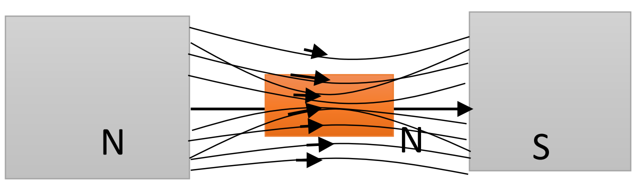
شکل(11.3)

- ان کا اثر ڈیامقناطیس سے کچھ طاقتور ہوتا ہے۔
- مستقل ذوقطبیے (Diploes) موجود ہوتی ہیں لیکن ذوقطبیے (Diploes) ایک دوسرے پر اثر انداز نہیں ہوتے ہیں۔

- کیوں کہ یہ ایک دوسرے پر اثر انداز نہیں ہوتے ہیں اس لیے ان سب کو ترتیب دینے کے لیے بہت بڑے مقناطیسی میدان کی ضرورت ہوتی ہے۔
- بیرونی مقناطیسی میدان کو ان سے ہٹانے سے ان کا اثر ختم ہو جاتا ہے۔
- ان اشیا کی مقناطیسی میلانیت (Susceptibility) مثبت ہوتی ہیں ۔
- اضافی اجازیت ایک سے زیادہ ہوتی ہے۔
- اگر حراری حرکت بے ترتیب ہو تب مقناطیسی ذوقطبیت میں کمی ہوتی ہے اور تپش کے اضافہ سے میلان میں کمی ہوتی ہے۔
- $\chi = \frac{c}{T}$ جہاں c تپش مطلقے اور اسے کیوری کا کلیہ کہتے ہیں اور مستقل کو کیوری کا مستقل کہتے ہیں۔
- مثال کے طور پر پلاٹینیم، المونیم، کرومیم، ٹیٹانیم وغیرہ۔

11.3.3 لوہ مقناطیسی اشیا (Ferromagnetic Materials)

فیروں مقناطیسی مادہ مقناطیس سے طاقتور طور پر کشش کرتے ہیں۔جب انہیں بیرونی مقناطیسی میدان میں رکھا جاتا ہے تب یہ بھی طاقتور مقناطیس بن جاتے ہیں اور شے کے اندر مقناطیسی نفوذی کثافت میں اضافہ ہوتا ہے۔ان اشیا میں بیرونی مقناطیسی میدان کی غیر موجودگی میں بھی مستقل مقناطیس اثر ہوتا ہے۔جب کہ ڈایا مقناطیسی اشیا اور پیرا مقناطیسی اشیا میں ایسا نہیں ہوتا ہے۔جب بیرونی مقناطیسی میدان میں ان کو رکھا جاتا ہے جب یہ بہت تیزی سے مقناطیسی میدان کی سمت میں ترتیب پاتے ہیں۔



شکل(11.4)

لوہ مقناطیسی اشیا میں حسب ذیل خواص پائے جاتے ہیں۔

- ان کے اثرات بہت طاقتور ہوتے ہیں۔
- ان میں مستقل ذوقطبے (Dipoles) ہوتے ہیں۔
- ان مین ذوقطبے (Dipoles) ایک دوسرے پر اثر انداز ہوتے ہیں۔
- ان میں اضافی اجازیت بہت زیادہ ہوتی ہے اور مثبت χ قریب قریب 10^{6} سے زیادہ ہوتا ہے۔
- ان میں میلان تپش پر بہت زیادہ منحصر رہتی ہے۔
- لوہا مقناطیسی خاصیت تپش پر منحصر ہوتی ہے۔کافی زیادہ تپش پر لوہا مقناطیس پیرا مقناطیس کی طرح ہو جاتا ہے۔

- لوہا مقناطیس پیرا مقناطیس میں تبدیل ہونے کی تپش کیوری تپش T_c کھلاتی ہے۔
- میلانیت اور تپش میں رشتہ کو Curie-Weiss law کلیہ میں بتلایا گیا ہے جو یہ ہے۔ $\chi = \frac{c}{T-T_c}$
- جہاں C مستقل ہے اور T تپش ہے اور T_c کیوری تپش ہے۔
- مثال کے طور پر کوبالٹ، لوہا، نکل اور ان کی بھرتیں ہیں۔

11.4 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

ایک فیرو مقناطیسی مادے سے بنی سلاخ کا مستطیلی تراش عمودی کارقبہ چار 4 مربع میٹر ہے اسے ہزار 1000 ایمپیر فی مربع میٹر حدت رکھنے والے مقناطیسی میدان کے متوازی اس سلاخ کو رکھا گیا ہے سلاخ کا مقناطیسی نفوذ 4×10^{-4} ویبر ہے۔اس سلاخ کے مادہ کی اجازیت کیا ہوگی؟

حل: دیا گیا ہے کہ

$$H = 1000\ amp/m$$
$$A = 4\ sq\ cm$$
$$\emptyset = 4 \times 10^{-4}\ weber$$

$$B = \frac{\emptyset}{A} = \frac{4 \times 10^{-4}\ \text{ویبر}}{4 \times 10^{-4} m^2}$$
$$B = 1\ Tesla$$
$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{1}{1000}$$

$$\mu = 1 \times 10^{-3} \frac{\text{ویبر}}{\text{میٹر} \times \text{ایمپیر}}$$

حل شدہ مثال 2

ایک مقناطیس جس کے ابعاد $5cm \times 2cm \times 1cm$ ہیں۔جملہ مقناطیسی معیار 5.4 ایمپیر فی مربع میٹر رکھتا ہے۔ مقناو کی حدت معلوم کیجیے؟

حل: دیا گیا ہے کہ

$$l = 5\ cm$$
$$b = 2\ cm$$
$$h = 1\ cm$$

$$m = 5.4\ amp\ \ m^2$$

$$v = l\ \times\ b\ \times\ h$$
$$v = 5\ \times\ 2\ \times 1\ cm^3$$
$$v = 10\ cm^3$$
$$v = 10\ \times\ 10^{-6}\ cm^3$$

$$\mathrm{I} = \frac{M}{V} = \frac{5.4}{10^{-5}}\ \frac{\text{ایمپیر}}{\text{میٹر}}$$

$$\mathrm{I} = 5.4\ \times 10^5\ \frac{\text{ایمپیر}}{\text{میٹر}}$$

حل شدہ مثال 3

ایک سولینائڈ کے اندر مقناطیسی میدان 4.8×10^{-4} T ہے۔ اگر یہی سولینائڈ کو لوہے کے گرد لپیٹا گیا ہے تب میدان 1.2 T ہوگا۔ لوہے کی اضافی اجازت کو معلوم کرئے؟

حل: دیا گیا ہے کہ

$$M = 1.2\ T$$
$$H = 4.8\ \times 10^{-4} T$$

$$\chi = \frac{\mathrm{M}}{H} = \frac{1.2}{4.8\ \times 10^{-4}} = 2500$$
$$\chi = 2500$$
$$\chi_r = 1 +\ \chi$$
$$\chi_r = 1 + 2500$$
$$\chi_\mathrm{r} = 2501$$

11.5 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- الیکٹران کے گھماؤ کی وجہ سے بھی مقناطیسی اثر پیدا ہوتا ہے۔ اگر الیکٹران کے گھماؤ کی وجہ سے ہونے والے مقناطیسی معیار اثر کو (Bohr Magneton) بھور کا مقنیطیہ (مگنی ٹون) کہتے ہیں۔ جس سے M_B سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$M_B = \frac{eh}{4\pi m_e} = 9.274 \times 10^{-24} A/m^{-2}$$

- کسی نقطے پر مقناطیسی امالہ مقناطیسی میدان B کے عمودوار اکائی رقبے میں سے گزرنے والا مقناطیسی نفوذ ہوتا ہے۔

$$\phi_\mathrm{m} = B.A$$

- اجازیت یہ مادہ کی خصوصیت ہوتی ہے۔ جو مادہ میں مقناطیسی نفوذی کثافت Bاور مقناطیسی حدت کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے یا مقناطیسی نفوذی کثافت Bاور مقناطیسی حدت کو آپس میں تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

$$\mu = \frac{B}{H}$$

- اجازیت (Permeability (μ)) واسطے کی مخصوص خصوصیت ہےاور اس کی اکائی $\frac{web}{A-M}$ ویبر فی ایمپیر میٹر ہے یا ہنری(Henry)فی میٹر(Meter)ہے۔ اضافی مقناطیسی اجازیت کو اس طرح بیان کیا جاتا ہے۔

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$$

- مقناوی کی حدت سمتیہ I سے ظاہر کیا جاتا ہے ۔جب مادہ کو مقناطیسی میدان میں رکھا جاتا ہے تب جوہری ذوقطبیہ (Atomic Dipole)میدان کی سمت میں مکمل یا جزوی مائل ہوتا ہے ۔اس لیے میدان کی سمت میں جملہ مقناطیسی معیار اثر ترتیب پاتا ہے۔ I دیے گئے مادہ کی مستقل یا ترغیب شدہ ذوقطبی معیار اثر کی کثافت کی پیائش ہے۔

$$I = \frac{M}{V}$$

جہاں M جملہ مقناطیسی معیار اثر ہے جو مقناو میدان کی وجہ سے حجم V کے اندر ہے۔I مقناطیسی شے کا مقناطیسی معیار اثر فی اکائی حجم ہے۔ جس کی پیائش ایمپیر فی مربع میٹر ہوتی ہے۔ جس کی اکائی ایمپیر فی میٹر Am^{-1} میں ہوتی ہے

- مقناطیسی میلانیت (Magnetic Susceptibility)اس حد کی پیائش ہے جس میں بیرونی مقناطیسی میدان سے کسی شے کو مقناطیس بنایا جاسکتا ہے۔ یہ کسی مادہ میں ترغیب شدہ مقناوی کی حدت I اور مقناطیسی میدان کی حدت H کے درمیان نسبت ہوتی ہے ۔ $\chi = \frac{I}{H}$

کیوں کہ I اور H کی اکائیاں ایک ہی ہوتی ہے یعنی Am^{-1} اس وجہ سے ان کی نسبت کی اکائی نہیں ہوتی ہے ۔

μ_r اور χ میں نسبت: $\chi = \mu_r - 1$

- مقناطیسی اشیا کو ان کے مقناطیسی طرز عمل کی بنیاد پر درجہ بندی کی جاتی ہے جس کا انحصار χ پر ہوتا ہے اور اس کی مقدار اور علامت پر ہوتا ہے اس کے بنیادی طور پر تین اقسام ہیں ۔

  i. ڈیا مقناطیسی(Diamagnetic) اشیا
  ii. پیرامقناطیسی(Paramagnetic) اشیا
  iii. لوہ مقناطیسی(Ferromagnetic) اشیا

- ڈیامقناطیسی اشیا (Diamagnetic Materials): ڈیامقناطیسی مادہ مقناطیس سے کمزور طور پر دفاع کرتا ہے۔
- پیرامقناطیسی اشیا (Paramagnetic Materials) : پیرامقناطیسی اشیا مقناطیس سے کمزور طور پر کشش کرتے ہیں ۔

- لوہ مقناطیسی اشیا (Ferromagnetic Materials) : فیروں یا لوہ مقناطیسی مادہ مقناطیس سے طاقتور پر کشش کرتے ہیں۔

11.6 کلیدی الفاظ (Keywords)

- **مقناطیسیت** : مقناطیسی اثر کے سبب مادہ دوسرے مادے کو کشش یا دفاع کرتا ہے یہ مظہر مقناطیسیت کہلاتی ہے۔
- **مداری مقناطیسی معیار اثر:** مداری مقناطیسی معیار اثر مرکز کے اطراف الیکٹران کا اپنے مدار میں حرکت کے سبب مقناطیسی معیار اثر
- **بوہر مقنیطیہ۔مگنی ٹون:** یہ الیکٹرون کے گھومنے (Spin) کے سب پائے جانے والا مقناطیسی معیار اثر
- **مقناطیسی میدان کی شدت H :** یہ کسی ایسے مادہ میں مقناطیسی میدان کا راستہ ہے جو بیرونی کرنٹ سے پیدا ہوتا ہے اور خود مادہ میں اندرونی نہیں ہوتا ہے۔
- **اجازیت:** یہ مقناطیسی نفوذی کثافت B اور مقناطیسی میدان کی شدت H کا تناسب ہے۔
- **اضافی اجازیت μ_r :** یہ مادہ کی اجازیت اور خلاء کی اجازیت کے درمیان پائے جانے والے نسبت ہے۔
- **مقناو کی حدت:** مقناطیسی معیار اثر فی اکائی حجم مقناو کی حدت کھلاتی ہے۔
- **مقناطیسی میلانیت :** یہ کسی مادہ میں ترغیب شدہ مقناو کی حدت اور مقناطیسی میدان کی حدت کے درمیان پائی جانے والی نسبت ہے۔ مقناطیسی میلانیت اس حد کی پیائش ہے جس پر بیرونی مقناطیسی میدان سے کسی شے کو مقناطیس بنایا جا سکتا ہے۔
- **مقناطیسی اشیاء :** بیرونی مقناطیسی میدان کے ذریعہ جن اشیا کو مقناطیس بنایا جاسکتا ہے وہ اشیا مقناطیسی اشیا کہلاتی ہیں۔
- **کیوری درجہ حرار یا تپش :** وہ تپش جس سے پر فیرو مقناطیسی مادہ پیرا مقناطیسی مادہ کے طور پر برتاؤ کرتا ہے۔

11.7 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

11.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. میں کون ہوں ؟

الف:- میں وہ مقناطیسی مادہ ہو جس میں مستقل مقناطیس ڈائی پول نہیں ہوتا ہے ؟

ب:- میں وہ تپش ہو جس سے فیرو مقناطیسی اشیا پیرا مقناطیسی اشیا بن جاتی ہیں ؟

2. درست جواب کا انتخاب کیجیے ؟

الف:-:- ڈیا مقناطیسی اشیا کی میلانیت ہوتی ہے ؟

a) قلیل، مثبت b) کثیر، منفی c) قلیل، منفی d) کثیر، مثبت

ب:- مقناطیسی امالہ B کا تعلق مقناطیسی میدان کی حدت H تک ہوتا ہے؟

$$B = \mu_0(H - M) \quad (d \; B = \mu_0(\frac{H}{M}) (c \; B = \mu_0(\frac{M}{H}) (b \; B = \mu_0(H + M) (a$$

3. مقناؤ کی حدت کی تعریف کیجیے ؟

4. مقناطیسی اجازیت کی تعریف کیجیے ؟

5. بوہر مقنیطیہ۔ مگنی ٹون مساوی ہوتا ہے...

6. جب مقناطیس کو مقناطیسی میدان میں رکھا جاتا ہے تب مقناطیسی اشیا سے مقناطیسی خطوط قوت بہت زیادہ دفع ہو رہے ہیں یہ کونسا مادہ ہوگا..

7. فیرومقناطیسی اشیا میں چند کی فہرست بنایئے؟

8. مقناطیسی میلانیت کے لحاظ سے اضافی اجازیت کو ظاہر کیجیے؟

9. مقناطیسی میدان کی حدت کی اکائی کیا ہے؟

11.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. مقناطیسی امالہ B، مقناطیسی میدان کی حدت H، اور اجازیت μ کو بیان کیجیے؟

2. مقناؤ کی حدت I، مقناطیسی میلانیت χ و اضافی اجازیت μ_r کو بیان کیجیے؟

3. اضافی اجازیت μ_r اور میلانیت χ کے درمیان نسبت کو حاصل کیجیے؟

11.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. ڈیا، پیرا اور فیرومقناطیسی اشیا کے خصوصیات پر تفصیلی گفتگو کیجیے۔

2. مقناؤ کی حدت I، مقناطیسی میلانیت χ، اور اضافی اجازیت μ_r کو بیان کیجیے اور اضافی اجازیت μ_r اور میلانیت χ کے درمیان نسبت کو حاصل کیجیے؟

11.7.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. ایک سولی نائیڈ کا قالب ایسے مادے کا ہے جس کی اضافی اجازیت 400 ہے۔ سولی نائیڈ کی لپٹیں قالب سے حاجز کر دی گئی ہیں اور ان میں 2A برقی رو ہے۔ اگر چکروں کی تعداد 1000 فی میٹر ہے تو حساب لگایئے۔

(a) مقناطیسی میدان کی حدت H (b) M (c) مقناطیسی امالہ B (d) مقنائی برقی رو I_m

اشارہ: $B = \mu_0 n_0 (I + I_m), M = B - \mu_0 {}^{H}/_{\mu_0}, B = \mu_r \mu_0 H, H = nI$

2. اس سولی نائیڈ جس کے قالب کو عاجز تار لپٹا گیا ہے جس کی اضافی مقناطیسی اجازیت 200 ہے۔ اگر ہر ایک میٹر تار کے لیے

500 چکروں کی تعداد ہے اور 1A کی برقی رو بہہ رہی ہے تب B, H اور مقناطیسی معیار اثر M محسوب کرو؟

11.8 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Bleaney, B I, and B Bleaney. Electricity and Magnetism. Oxford: Oxford University Press, 2013.
2. Duffin, W J. Electricity and Magnetism. Cottingham: W.J. Duffin, 2001.
3. Gaur, R.K. &Gupta, S.L.Engineering Physics.Dhanpat Rai Publication.
4. Kurrelmeyer, Bernhard, and Walter H. Mais. Electricity and Magnetism. Princeton, N.J: Van Nostrand, 1967.
5. Peck, Edson R. Electricity and Magnetism. , 2013.
6. Plonsey.R&Collin.R.E.Principles and Application of Electromagnetic Field. Tata Mc Graw Hill Publication. New Delhi.
7. Purcell, Edward M, and David J. Morin. Electricity and Magnetism. , 2013.
8. Resnic.R&Halliday.D.Physics Part-I&Part-II.Wiley Eastern Pvt.Ltd.New Delhi.
9. Resnick, Robert, David Halliday, and Kenneth S. Krane. Physics. New York: Wiley, 2002.
10. Schuh, Mari C. Magnetism. Minneapolis, MN: Bellwether Media, 2008.

اکائی 12۔ برقی مقناطیسی امالہ

(Electromagnetic Induction)

اکائی کے اجزا

12.0 تمہید (Introduction)

اٹھارہ سو بیس 1820 میں اور اسٹیڈ نے دریافت کیا کہ برقی رو رکھنے والے موصل کے اطراف مقناطیسی میدان پیدا ہوتا ہے اس کے بعد کئی سائنسداں جیسے کہ بیوٹ ساورٹ اور ایمپیئر وغیرہ نے مقناطیسی میدان کے ذریعے برقی میدان کو پیدا کرنے کے لیے کئی تجربات کیئے۔ تقریباً ایک دہائی بعد یعنی اٹھارہ سو اکتیس 1831 میں مائیکل فیراڈے نے امالی برقی رو کو دریافت کیا اس نے مقناطیسی میدان کے ذریعہ یعنی مقناطیسی میدان میں تبدیلی کرتے ہوئے برقی رو کو پیدا کرنے میں کامیابی حاصل کی اس مظہر کو برقی مقناطیسی امالہ کہتے ہیں۔

اس اکائی میں ہم برقی مقناطیسی امالہ کے مظہر کے بارے میں پڑھیں گے اور ساتھ ہی برقی مقناطیسی امالہ سے متعلق چند بنیادی کلیات کو سمجھیں گے۔

12.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں ہم

- برقی مقناطیسی امالہ کے مظہر کو سمجھائیں گے۔
- فیراڈے کے کلیے کو بیان کریں گے اور اس سے متعلق سوالات کے جوابات حل کریں گے۔
- لینز کے کلیہ کو بیان کریں گے اور اس کا اطلاق کریں گے۔

12.2 فیراڈے کا کلیہ (Faraday's Law)

مائیکل فیراڈے نے متعدد تجربات کیئے اور دریافت کیا کہ جب بھی مقناطیسی نفوذ کسی بند دور سے کٹتا ہے تب اس دور میں امالی برقی رو بہتی ہے اور جب تک یہ عمل قائم رہتا ہے امالی برقی رو بہتی رہتی ہے ۔ دراصل یہ عمل امالی برقی قوت محرکہ کو پیدا کرتا ہے جو برقی مقناطیسی امالہ کھلاتا ہے۔

ہم یہاں فیراڈے کے ذریعہ کیئے گئے تجربات کی طرح دو تجربات کو بیان کریں گے۔

12.2.1 فیراڈے کا پہلا تجرب (Faraday's First Experiment)

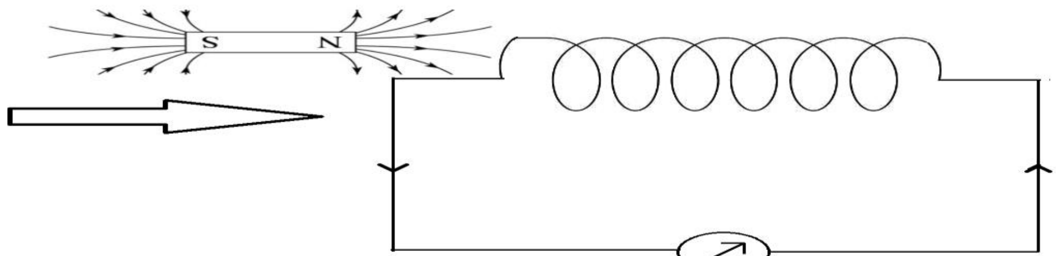
اس تجربے کے لیے ہم ایک دائروی لچھے کو ایک گیلوانو میٹر سے جوڑیں گے اور ایک مقناطیس کو اس ساکن لچھے کے اندر اور باہر حرکت دیں گے اس طرح کرنے پر ہم کو حسب ذیل مشاہدات حاصل ہوتے ہیں ۔

1. جب مقناطیس لچھے سے گزرتا ہے لچھے کے اندر برقی رو بہتی ہے ۔
2. جب مقناطیس حرکت نہیں کرتا ہے یعنی رکتا ہے تب برقی رو بھی نہیں بہتی ہے ۔
3. جب مقناطیس کو لچھے کی جانب دھکیلا جاتا ہے تب گیلوانو میٹر کی سوئی ایک جانب منخرف ہوتی ہے اور جب مقناطیس کو لچھے

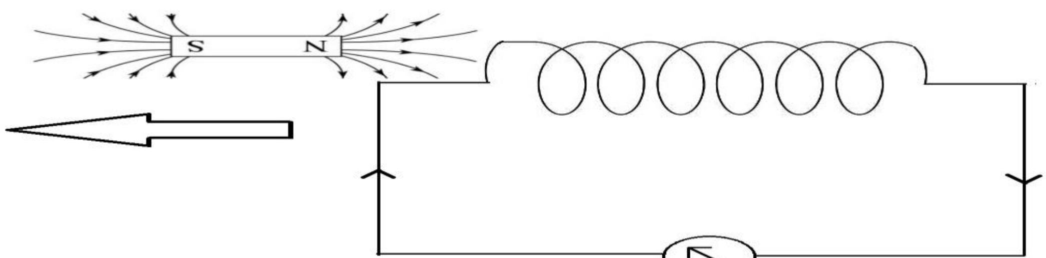
سے پرے دھکیلا جاتا ہے تب گیلوانو میٹر کی سوئی دوسری جانب منحرف ہوتی ہے۔

4. اس تجربہ کے دوران اگر مقناطیسی قطب کو تبدیل کیا جائے یعنی وہ مقناطیسی قطب جو لچھے کی جانب ہے اس کو دوسری جانب کیا جائے اور وہ مقناطیسی قطب جو دوسری جانب میں اس کو ل لچھے کی جانب کیا جائے اور اس طرح جب لچھے میں مقناطیس کو داخل کیا جائے تب گیلوانو میٹر کی منحرف ہونے والی سوئی کی سمت بھی تبدیل ہو جاتی ہے ۔

5. جب مقناطیس کو تیزی سے حرکت کیا جاتا ہے تب انحراف بھی زیادہ ہوتا ہے اور جب مقناطیس کو آہستہ حرکت کیا جاتا ہے جب انحراف بھی کم ہوتا ہے ۔یہ بتلاتا ہے کہ مقناطیس کی حرکت کرنے کی شرح پر برقی رو کی مقدار منحصر ہوتی ہے ۔



(a)



(b)

شکل(12.1)

a. مقناطیس کو لچھے کی جانب دھکیلا جا رہا ہے۔

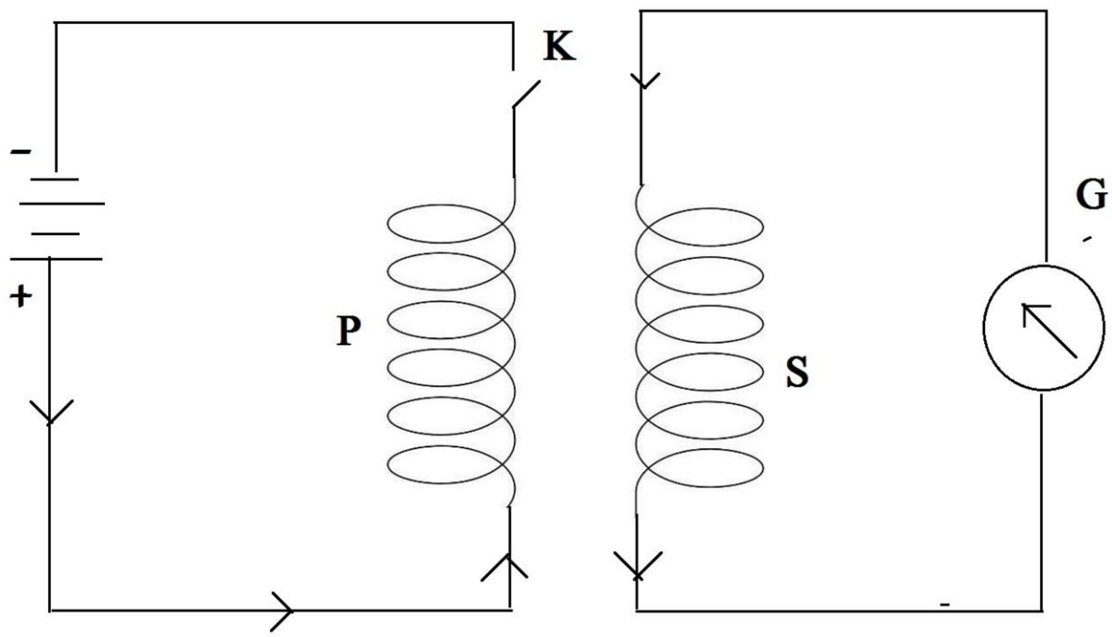
b. مقناطیس کو لچھے سے پرے دھکیلا جا رہا ہے۔

12.2.2 فیراڈے کا دوسرا تجربہ (Faraday's Second Experiment)

اس تجربے کو کرنے کے لیے ہم پہلے لچھے p کو بیٹری سے جوڑیں گے اور دوسرے لچھے S کو گیلوانو میٹر سے جوڑیں گے جس طرح ہمیں شکل میں نظر آرہا ہے۔ تجربہ کے دوران ہمیں حسب ذیل مشاہدات نظر آتے ہیں۔

1. جب اس برقی دور کو کنجی کی ذریعہ بند کیا جاتا ہے تب اس برقی دور میں برقی رو بہنا شروع ہوتی ہے اور دوسرے لچھے S سے جڑے ہوئے گیلوانو میٹر کی سوئی ایک جانب منحرف ہوتی ہے۔

2. جب پہلے برقی دور P میں برقی رو مستقل رہتی ہے یعنی برقی رو میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی ہے اس وقت دوسرے برقی دور S سے منسلک گیلوانو میٹر میں کچھ انحراف نہیں ہوتا ہے۔



شکل(12.2)

3. جب کنجی کو برقی دور سے نکالا جاتا ہے تب پہلے برقی دور P میں برقی رو آہستہ آہستہ کم ہوتی ہے اور دوسرے برقی دور S سے منسلک گیلوانو میٹر کی سوئی واپس منحرف ہوتی ہے۔پر اس بار مخالف سمت میں منحرف ہوتی ہے۔

ان دونوں تجربات سے معلوم ہوتا ہے کہ مقناطیسی میدان کو تبدیل کرنے سے برقی رو پیدا ہوتی ہے اس برقی رو کو امالی برقی رو کہتے ہیں اور جب تک یہ عمل قائم رہتا ہے امالی برقی رو بہتی رہتی ہے ۔ پہلے تجربے میں مقناطیس کی حرکت کی وجہ سے برقی رو پیدا ہوتی ہے اور دوسرے تجربے میں لچھے S میں مقناطیسی نفوذ کی اضافے یا کمی کے سبب برقی رو پیدا ہوتی ہے۔ فیراڈے نے ان دو تجربات کے نتائج کا خلاصہ اپنے برقی مقناطیسی امالہ کہ دو کلیات کے اندر پیش کیا ہے جو یہ ہیں

1. کسی برقی دور سے منسلک مقناطیسی نفوذ جب تبدیل ہوتا ہے تب برقی قوت محرکہ emf پیدا ہوتی ہے ۔

2. امالی برقی قوت محرکہ emf کی مقدار برقی دور سے منسلک مقناطیسی نفوذ میں تبدیلی کی منفی شرح کہ راست متناسب ہوتی ہے۔

اس طرح فیراڈے ثابت کرتا ہے کہ برقی مقناطیسی میدان میں تبدیلی سے امالی برقی قوت محرکہ پیدا ہوتی ہے جو جو امالی برقی رو کا سبب بنتی ہے ۔ برقی میدان میں تبدیلی کی وجہ سے پیدا ہونے والا امالی برقی میدان، برقی قوت محرکہ اور برقی رو کو ظاہر کرنے والا مظہر برقی مقناطیسی امالہ (Electromagnetic Induction) کہلاتا ہے۔

12.3 فیراڈے کے کلیہ کا ریاضیاتی اظہار (Mathematical Statement of Faraday's Law)

فرض کرو کے ϕ_B برقی دور سے منسلک ملک کسی لمحہ کا مقناطیسی نفوذ ہے اور ε امالی برقی قوت محرکہ ہے ۔ برقی دور میں امالی برقی قوت محرکہ اس برقی دور سے گزرنے والے مقناطیسی نفوذ میں تبدیلی کی منفی شرح کہ راست متناسب ہوتی ہے۔ یعنی

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} \qquad (12.1)$$

12.4 فیراڈے کے کلیہ کی سمتیہ شکل (Vector form of Faraday's Law)

ہمیں معلوم ہے کہ امالی برقی قوت محرکہ emf برقی دور میں حرکت کرنے والے اکائی برقی بار کے ذریعہ کیئے گیئے کام کہ مساوی ہوتی ہے۔

$$\varepsilon = \oint \vec{E}.\overrightarrow{dl} \qquad (12.2)$$

بند حلقہ C میں برقی میدان کا خطی تکمیلہ سے

مساوات (12.1) اور (12.2) سے

$$\varepsilon = \oint \vec{E}.\overrightarrow{dl} = -\frac{d\phi_B}{dt} \qquad (12.3)$$

ہمیں معلوم ہے کہ مقناطیسی نفوذ ϕ_B ہوتا ہے

$$\phi_B = \iint_S \vec{B}.\overrightarrow{ds} \qquad (12.4)$$

جہاں S ، C کے ذریعہ گھیری ہوئی سطح ہے-

مساوات (12.3) کو (12.4) میں درج کرنے پر

$$\varepsilon = \oint \vec{E}.\overrightarrow{dl} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}.\overrightarrow{ds} \qquad (12.5)$$

مساوات (12.5) فیراڈے کی کلیہ کی تکملی شکل ہے۔

مسئلہ اسٹوکس کو استعمال کرتے ہوئے۔

$$\oint \vec{E}.\overrightarrow{dl} = \iint_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right).\overrightarrow{ds} \qquad (12.6)$$

مساوات (12.6) کو (12.5) میں درج کرنے پر

$$\iint_{s} (\vec{\nabla}.\vec{E}).\overrightarrow{ds} = -\frac{d}{dt}\iint_{s} \vec{B}.\overrightarrow{ds} \tag{12.7}$$

چوں کہ B زماں و مکاں کا تفاعل ہو سکتا ہے اس لیے مساوات (12.7) کو دوبارہ اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\iint_{s} (\vec{\nabla}.\vec{E}).\overrightarrow{ds} = -\iint_{s} \frac{\overrightarrow{dB}}{dt}.\overrightarrow{ds} \tag{12.8}$$

جہاں $\frac{\overrightarrow{dB}}{dt}$ مقناطیسی میدان $\vec{B}$ کے وقت کے ساتھ تبدیل ہونے کو ظاہر کرتا ہے اور چوں کہ اختیاری (arbitrary) سطح S کے لیے مساوات (12.8) درست ہے لہذا تکملیہ کو مساوی کیا جا سکتا ہے۔

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\overrightarrow{dB}}{dt} \tag{12.9}$$

مساوات (12.9) فیراڈے کے کلیہ (Faraday's Law) کی تفرقی شکل ہے۔

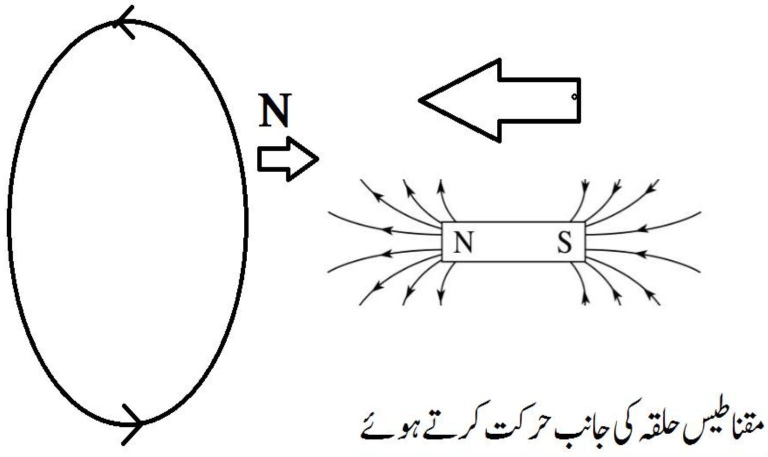
12.5 لینز کا کلیہ (Lenz's Law)

کلیہ کا بیان :

امالی برقی قوت محرکہ یا برقی رو ایسی سمت میں عمل کرتی ہے جو اس مقناطیسی نفوذ میں تبدیلی کی مخالفت کرتی ہے جس تبدیلی کی وجہ سے یہ برقی قوت محرکہ یا برقی رو خود پیدا ہوتی ہے۔

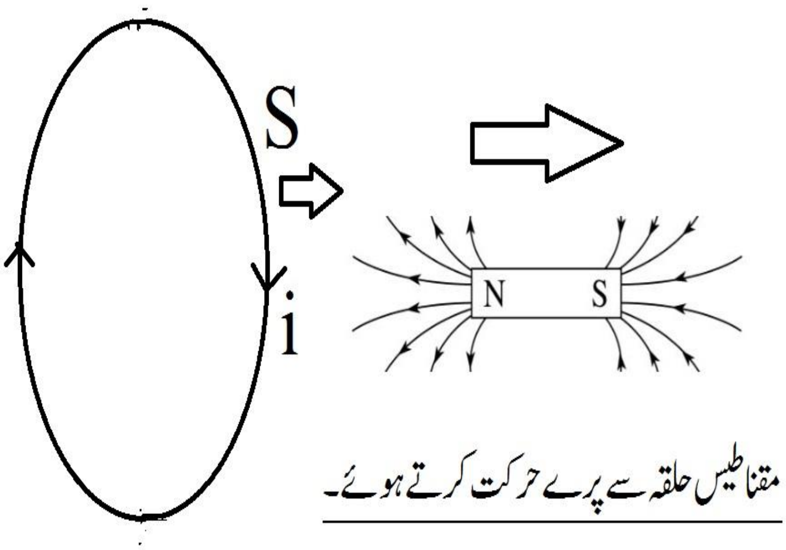
فرض کرو کہ ایک مقناطیس ہے جس کا شمالی قطب ایک حلقے کی جانب حرکت کر رہا ہے جب مقناطیس کو تیزی کے ساتھ حلقے کی جانب دھکیلا جاتا ہے تب حلقے میں امالی برقی رو i رونما ہوتی ہے جس کی سمت مخالف سمت ساعت ہوتی ہے یہاں امالی برقی قوت محرکہ حلقے کے اطراف و اکناف میں اپنا ایک مقناطیسی میدان پیدا کرتی ہے۔ لینز کے کلیے کے مطابق یہ امالی برقی رو i مقناطیسی کثافت میں اضافے کی مخالفت کرتی ہے۔ یعنی حلقے میں برقی رو کی وجہ سے پیدا ہونے والا مقناطیسی میدان سلاخی مقناطیس کی وجہ سے پائے جانے والے مقناطیسی میدان B کی مخالفت کرتا ہے ۔ جس طرح ہمیں شکل میں نظر آ رہا ہے حلقہ میں پیدا ہونے والی برقی رو کے اطراف والے مقناطیس کی جانب مقناطیسی میدان بھی شمالی قطب کا ہوتا ہے۔

حلقے میں برقی رو کی سمت کو سیدھے ہاتھ کے اصول کو استعمال کرتے ہوئے معلوم کیا جاتا ہے ۔ سیدھے ہاتھ کے انگوٹھے کو مقناطیسی میدان کی سمت میں رکھیے اور اپنے انگلیوں کو موڑیئے۔ موڑے ہوئے انگلیوں کی سمت برقی رو کی سمت کو ظاہر کرتی ہے۔ اس طرح یہاں پر شمالی قطب سلاخی مقناطیس کی جانب ہے اور یہ دونوں آپس میں ایک دوسرے کی مخالفت کریں گے۔



شکل(12.3)

جب مقناطیس کو حلقے سے پرے دھکیلا جاتا ہے تب حلقے میں پیدا ہونے والی برقی رو کے اطراف کا مقناطیسی میدان ان مقناطیسی حرکت کی مخالفت کرے گا اس طرح خواہ مقناطیس کو ہم ڈھکیلین یا کھینچیں ہر صورت میں خود بخود ہمیشہ اس حرکت کی مخالفت ہو گی۔



شکل(12.4)

12.6 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال1

الف:-مقناطیسی نفوذ برقی دور میں مستوی سطح کے عمود وار گزرتا ہے اگر مقناطیسی نفوذ وقت کے لحاظ سے اس طرح تبدیل ہوتا ہے جس طرح کے یہاں بیان کیا گیا ہے ۔

$$\emptyset_B = 5\,t^2 - 6t + 10\ mwb$$

اگر وقت دو سیکنڈ ہے تب حلقے میں جب امالی برقی قوت محرکہ (Induced emf) کی مقدار کیا ہوگی ؟

ب :- برقی رو کی سمت معلوم کیجیے اگر برقی دور کاغذ کے مستوی پر اور مقناطیسی میدان کی سمت کاغذ کے اندر کی جانب ہے ؟

حل: الف :- دیا گیا ہیکہ :

$$\emptyset_B = 5\,t^2 - 6t + 10\,mwb$$

$$t = 2s$$

$$\varepsilon = \frac{d\emptyset_B}{dt}$$

$$\varepsilon = \frac{d(5\,t^2 - 6t + 10) \times 10^{-3}}{dt}$$

$$\varepsilon = (10t - 6) \times 10^{-3}$$

$$t = 2s$$

$$\varepsilon = (10 \times 2 - 6) \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon = (20 - 6) \times 10^{-3} \Longrightarrow \varepsilon = 14\,mVolt$$

ب :- فلکس $\emptyset_B$ کے علامتی اظہار سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ مقناطیسی نفوذ جو حلقے سے منسلک ہے فزوں ہوتا ہے۔

لینز کے کلیے کے مطابق امالی برقی قوت محرکہ یا برقی رو ایسی سمت میں عمل کرتی ہے جو اس مقناطیسی نفوذ میں تبدیلی کی مخالفت کرتی ہے جس تبدیلی کی وجہ سے یہ برقی قوت محرکہ یا برقی رو خود پیدا ہوتی ہے۔

اس طرح امالی برقی رو اس سمت میں بہہ گی کے اس سے پیدا ہونے والی مقناطیسی میدان کی سمت عائد کیے گئے مقناطیسی میدان کی سمت کی مخالفت کرے گی ۔

اس طرح امالی مقناطیسی میدان سطح کے عمودوار ہوگا اور امالی برقی رو کی سمت مخالف سمت ساعت میں ہوگی۔

حل شدہ مثال 2

ایک دھاتی قرص (Disc) جس کا قطر 10 سمر ہے اس کا محور اس سے عمودوار گزرتا ہے یہ ایک سیکنڈ میں 10 مرتبہ گردش کرتی ہے ۔ ایک ہموار مقناطیسی میدان 10^{-3} ویبر فی مربع میٹر جو قرص (Disc) کے مستوی کے عمودوار عمل کرتا ہے اس کی امالی برقی قوت محرکہ (Induced emf) معلوم کرئے؟

حل: دیا گیا ہیکہ

قطر d =10 سمر نصف قطر r = 5 سمر

مقناطیسی میدان B = 10^{-3} ویبر فی مربع میٹر

$$\phi_B = B\ A \quad \text{مقناطیسی نفوذ}$$

$$|\varepsilon| = \frac{d\phi_B}{dt}$$

$$|\varepsilon| = \frac{dB\ A}{dt}$$

$$|\varepsilon| = \frac{B\ \ d\ A}{dt}$$

$\frac{d\ A}{dt}$ رقبہ جو قرص سے باہر فی اکائی وقت :

$$\frac{d\ A}{dt} = \pi r^2 \times \text{گردش محوری فی سکنڈ}$$

$$\frac{d\ A}{dt} = \pi r^2 \times 10$$

$$\frac{d\ A}{dt} = 3.14(5)^2 \times (10)^2 \times 10$$

$$\frac{d\ A}{dt} = 0.0785$$

$$|\varepsilon| = \frac{B\ \ d\ A}{dt}$$

$$|\varepsilon| = 10^{-3} \times 0.0785 \Longrightarrow |\varepsilon| = 78.5\ \mu V$$

حل شدہ مثال 3

ایک لچھا جس کے 100 چکر ہیں اور جس کا تراش عمودی کا رقبہ 200 مربع میٹر ہے جو 250 ریڈین فی سیکنڈ زاویائی رفتار سے عمودوار محور پر مقناطیسی میدان 0.4 ویبر فی مربع میٹر میں گردش کر رہا ہے ۔ اگر لچھہ 2 اوم کی مزاحمت سے جڑا ہوا ہے تو برقی دور میں برقی رو کو معلوم کرئے ؟

حل: دیا گیا ھیکہ $\quad A = 200 \times 10^{-4} m^2$ میٹر $\quad A = 200\ Cm^2$ سمر $\quad N = 100\ turns$ چکر

$$\omega = 250 \frac{rad}{sec}, B = 0.4\ wb/m^2, R = 2\ Ohm \text{اوم}$$

$$\varepsilon_{max} = NAB\omega$$

$$\varepsilon_{max} = 100 \times 200 \times 10^{-4} \times 0.4 \times 250$$

$$\varepsilon_{max} = 200\ volts$$

$$i_{max} = \frac{\varepsilon_{max}}{R}$$

$$= \frac{200}{2} = 100 \text{ ایمپیر}$$

حل شدہ مثال4

ایک 10 ہنری موصل 1 ایمپیر مستقل و قائم برقی رکھتا ہے۔ وہ کون سی شرح ہے جس پر کرنٹ میں اضافہ ہونا چاہئے تاکہ ای ایم ایف یا 20 وولٹ ہو سکے؟

حل: دیا گیا ھیکہ $\varepsilon = 20$ وولٹ $\quad i = 1$ ایمپیر $\quad L = 10$ ہنری

$$\varepsilon = -L\frac{di}{dt}$$

$$|\varepsilon| = L\frac{di}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon}{L}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{20}{10} \Longrightarrow \frac{di}{dt} = 2 \text{ ایمپیر فی سکنڈ}$$

حل شدہ مثال5

ایک لچھے کی امالیت 50 mH اور 100 چکر ہیں اگر اس میں سے 20×10^{-3} ایمپیر برقی رو گزر رہی ہے تب اس سے منسلک مقناطیسی نفوذ کو معلوم کرئے؟

حل: دیا گیا ھیکہ ہنری $L = 50mH = 50 \times 10^{-3}$. ایمپیر $i = 20 \times 10^{-3}$

$N = 200$

$$Li = N\emptyset \Longrightarrow \emptyset = \frac{Li}{N}$$

$$\emptyset = \frac{50 \times 20 \times 10^{-3} \times 10^{-3}}{200}$$

$$\emptyset = 5 \times 10^{-6} Wb$$

12.7 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- مائیکل فیراڈے نے متعدد تجربات کیئے اور دریافت کیا کہ جب بھی مقناطیسی نفوذ کسی بند دور سے کٹتا ہے تب اس دور میں امالی برقی

رو بہتی ہے اور جب تک یہ عمل قائم رہتا ہے امالی برقی رو بہتی رہتی ہے ۔ دراصل یہ عمل امالی برقی قوت محرکہ کو پیدا کرتا ہے جو برقی مقناطیسی امالہ کہلاتا ہے۔

- اس طرح فیراڈے ثابت کرتا ہے کہ برقی مقناطیسی میدان میں تبدیلی سے امالی برقی قوت محرکہ پیدا ہوتی ہے جو امالی برقی رو کا سبب بنتی ہے ۔ برقی میدان میں تبدیلی کی وجہ سے پیدا ہونے والا امالی برقی میدان، برقی قوت محرکہ اور برقی رو کو ظاہر کرنے والا مظہر برقی مقناطیسی امالہ(Electromagnetic Induction) کہلاتا ہے۔
- فرض کرو کے ϕ_B برقی دور سے منسلک ملک کسی لمحہ کا مقناطیسی نفوذ ہے اور ε امالی برقی قوت محرکہ ہے ۔ برقی دور میں امالی برقی قوت محرکہ اس برقی دور سے گزرنے والے مقناطیسی نفوذ میں تبدیلی کی منفی شرح کہ راست متناسب ہوتی ہے۔ یعنی

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

- لینز کا کلیہ کا بیان :امالی برقی قوت محرکہ یا برقی رو ایسی سمت میں عمل کرتی ہے جو اس مقناطیسی نفوذ میں تبدیلی کی مخالفت کرتی ہے جس تبدیلی کی وجہ سے یہ برقی قوت محرکہ یا برقی رو خود پیدا ہوتی ہے۔

12.8 کلیدی الفاظ (Keywords)

- **ای ایم ایف یا برقی قوت محرکہ:** برقی قوت محرکہ بدلتے ہوئے مقناطیسی میدان سے پیدا ہونے والی برقی قوۃ ہے۔ اس کی تعریف یوں بھی کی جاتی ہے کہ یہ موصل کے ایک حلقہ کے ارد گرد کیا گیا برقی مقناطیسی کام ہے جو برقی بار کا ایک بار حلقہ کے گرد سفر کرنے کے نتیجہ میں ہوتا ہے
- **برقی مقناطیسی امالہ:** مقناطیسی میدان میں تبدیلی کے ذریعے موصل میں برقی قوت محرکہ پیدا کرنے کا عمل
- **گیلوانو میٹر** : برقی دور میں قلیل مقدار میں برقی رو کی پیمائش و ظاہر کرنے کے لیے استعمال ہونے والا آلہ ہے
- **امالی برقی رو** : تبدیل ہوتے ہوئے مقناطیسی میدان کے ذریعے کسی موصل میں پیدا ہونے والی برقی رو
- **مقناطیسی نفوذ :** یہ کسی دیے گئے رقبے میں جملہ مقناطیسی میدان کی پیمائش ہوتی ہے

12.9 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

12.9.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. میں کون ہوں؟

الف: میں برقی دور سے منسلک مقناطیسی نفوذ میں منفی تبدیلی کی شرح کے براہ راست متناسب ہوتا ہو ں؟

ب : میں اکائی برقی رو گزرنے والے لچھے سے منسلک مقناطیسی نفوذ کے عددی طور پر میں مساوی ہو ں؟

2. صحیح جواب کا انتخاب کرئے؟

a. الف:-ایک ہینزی مساوی ہوتا ہے ؟

a)ایک وولٹ فی سیکنڈ b)ایک ولٹ فی ایمپی c) ر $\frac{\text{ایک ولٹ}}{\text{ایک ایمپیر}}$ فی سیکنڈ d) ایک ولٹ

3. برقی مقناطیسی امالہ کے فیراڈے کے کلیہ کو بیان کیجیے؟

4. لینز(Lenz's)کے کلیہ کو بیان کیجیے؟

5. برقی مقناطیسی امالہ کی تعریف کیجیے ؟

6. فیراڈے اور ہنری کے تجربات کیا ظاہر کرتے ہیں؟

7. فیراڈے کا برقی مقناطیسی امالہ کا کلیہ بیان کرو؟

8. ای ایم ایف یا برقی قوت محرکہ کی تعریف کیجیے ؟

9. برقی مقناطیسی امالہ کی تعریف کیجیے ؟

10. فیراڈے کے کلیہ کا ریاضیاتی اظہار.................................ہے۔

12.9.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. تجربہ کی مدد سے فیراڈے کے کلیہ کو سمجھائے؟

2. برقی مقناطیسی امالہ کے لینز(Lenz's)کے کلیہ کو سمجھائے ؟

3. فیراڈے کے کلیہ کو تکملی اور تفرقی شکل میں اظہار کیجیے ؟

12.9.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. تجربہ کی مدد سے فیراڈے کے کلیہ کو سمجھائے؟فیراڈے کے کلیہ کو تکملی اور تفرقی شکل میں اظہار کیجیے ؟

2. برقی مقناطیسی امالہ کے لینز(Lenz's)کے کلیہ کو بیان کیجیے اور مثالوں کے ذریعے اس کو سمجھائے ؟

12.9.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. ایک دائروی لچھے میں 32 تار ہیں۔ جن کا نصف قطر 25cm ہے۔ اگر اس میں 50A کی برقی رو گزاری جائے تو اس کے مرکز پر امالے کے میدان کی حدت معلوم کرو؟ لچھے کے مرکز پر کثافت نفوذ معلوم کرو۔

2. ایک چار اوم مزاحمت کا موصلی گھیرا اس کاغذ کی سطح پر ہے اسے ہموار مقناطیسی امالہ B اس کے $0.002m^2$ پر ہے۔B کی سمت گھیرے کے عموداً ہے تب گھیرے میں امالہ واں برقی رو معلوم کرو B کی قیمت شرح گراوٹ $0.1\, {wb}/{m^2}$ ہو۔

3. ایک دھاتی سلاخ جس کا طول 1m ہے کہ ایک سرے کو 90^0 زاویہ پر ہموار مقناطیسی میدان کی حدت $2.5 \times 10^{-3}\, {wb}/{m^2}$ ہے۔ گھمایا جاتا ہے اگر یہ 1800 چکر فی میٹر لگاتا ہو تب اس کے سروں پر امالی emf کتنا ہوگا۔
4. ایک تار میں 4A کی برقی رو گزر رہی ہے اس کو کتنے نصف قطر والے دائرے میں موڑ لینا چاہئے تاکہ مرکز پر $10^{-6}T$ کی حدت والا امالہ کا میدان ہے۔

12.10 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Bleaney, B I, and B Bleaney. Electricity and Magnetism. Oxford: Oxford University Press, 2013.
2. Duffin, W J. Electricity and Magnetism. Cottingham: W.J. Duffin, 2001.
3. Gaur, R.K. &Gupta, S.L.Engineering Physics.Dhanpat Rai Publication.
4. Kurrelmeyer, Bernhard, and Walter H. Mais. Electricity and Magnetism. Princeton, N.J: Van Nostrand, 1967.
5. Peck, Edson R. Electricity and Magnetism. , 2013.
6. Plonsey.R&Collin.R.E.Principles and Application of Electromagnetic Field. Tata Mc Graw Hill Publication. New Delhi.
7. Purcell, Edward M, and David J. Morin. Electricity and Magnetism. , 2013.
8. Resnic.R&Halliday.D.Physics Part-I&Part-II.Wiley Eastern Pvt.Ltd.New Delhi.
9. Resnick, Robert, David Halliday, and Kenneth S. Krane. Physics. New York: Wiley, 2002.
10. Schuh, Mari C. Magnetism. Minneapolis, MN: Bellwether Media, 2008.

اکائی 13۔ برقی مقناطیسی خود امالیت

(Electromagnetic Self Inductance)

اکائی کے اجزا

13.0 تمہید (Introduction)

اس سے پہلے باب میں ہم برقی مقناطیسی امالہ کے مظہر کے بارے میں پڑھا اور ساتھ ہی برقی مقناطیسی امالہ سے متعلق چند بنیادی کلیات کو پڑھا گیا ہے۔ اس اکائی میں ہم خود امالیت یا ذاتی امالیت کے تصور کا فہم کو حاصل کریں گے۔

13.1 مقاصد (Objectives)

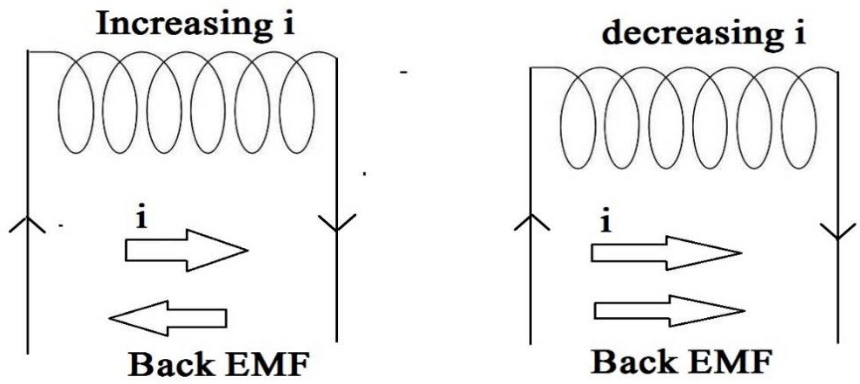
اس اکائی کے میں ہم:

- خود امالیت یا ذاتی امالیت کو معلوم کریں گے اور اس سے متعلق سوالات حل کریں گے۔
- کسی بھی دیے گئے امالہ گر برقی دور میں ذخیرہ شدہ مقناطیسی توانائی کا تعین کریں گے ۔
- مقناطیسی میدان میں ذخیرہ شدہ توانائی کو بھی معلوم کریں گے۔

13.2 ذاتی یا خود امالیت (Self- Inductance)

ذاتی امالیت یا خود امالیت کے مظہر کو 1832 میں جوزف ہنری (Joseph Henry) نے دریافت کیا جب برقی رو ایک لچھے یا حلقے سے گزرتی ہے تب حلقے یا لچھے کے اطراف مقناطیسی میدان ترتیب پاتا ہے جب تک برقی رو تبدیل نہیں ہوتی ہے تب تک اس میں مقناطیسی نفوذ تبدیل نہیں ہوتا ہے۔ جب حلقے میں برقی رو تبدیل ہوتی ہے یعنی بڑھتی ہے یا کم ہوتی ہے تب اس کی وجہ سے ہونے والا مقناطیسی نفوذ بھی تبدیل ہوتا ہے تبدیل ہونے والا مقناطیسی نفوذ اسی حلقہ میں برقی قوت محرکہ کو پیدا کرتا ہے۔

اس طرح حلقے میں خود امالی برقی رو ظاہر ہوتی ہے۔ جو حقیقی برقی رو میں تبدیلی کی مخالفت کرتی ہے ۔اس مظہر کو خود امالیت یا ذاتی امالیت کہتے ہیں۔ برقی رو رکھنے والے حلقے میں بہنے والی برقی رو میں تبدیلی کی مزاحمت یا مخالفت کرنے کی خصوصیت کو امالیت کہتے ہیں اور اس امالی برقی قوت محرکہ کو معکوس برقی قوت محرکہ Back emf کہتے ہیں۔

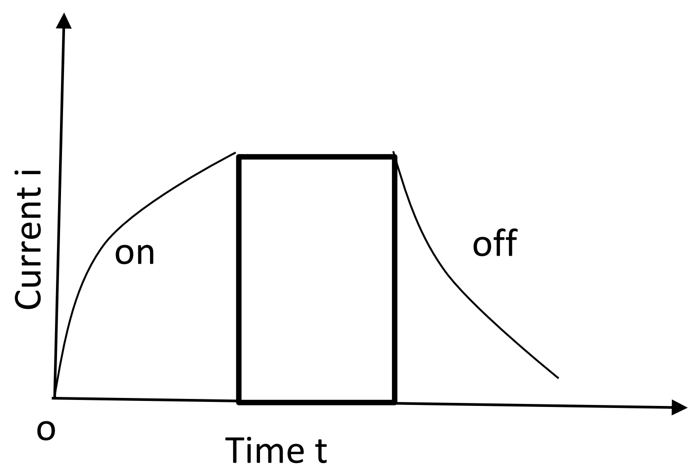


شکل(b) شکل(13.1) شکل(a)

لیکن شکل((13.1(a)) میں یہ نوٹ کرنا چاہیے کہ برقی رو اپنی مکمل قیمت تک بڑھنے کے لیے ایک محدود وقت لیتی ہے جب کہ شکل((13.1(b)) میں برقی رو فوری اپنی مکمل قیمت حاصل کر لیتی ہے۔ مزید یہ کہ جب ادوار کو توڑا جاتا ہے تو شکل((13.1(a)) میں برقی رو بتدریج ایک محدود وقت میں صفر تک گھٹتی ہے جب کہ شکل((13.1(b)) کے دور میں یہ فوری صفر تک پہنچ جاتی ہے۔

شکل((13.1(a)) میں لچھا کیوں برقی رو کے بڑھنے(Growth) اور گھٹنے(Decay) میں تاخیر کا باعث بنتا ہے۔ لچھے کے اندر سے برقی رو کا بڑھنا لچھے سے متعلق مقناطیسی نفوذ میں ایک تبدیلی پیدا کرتا ہے۔ لینز(Lenz) کے کلیے کے مطابق لچھے میں ایک قوت محرکہ برق(emf) کا امالہ عمل میں آتا ہے جو عائد کردہ emf کی مخالفت کرتا ہے۔ امالہ شدہ emf وقت تک باقی رہتا ہے جب تک کہ برقی رو کا بڑھنا اور گھٹنا واقع ہوتا رہتا ہے۔

ایک بند برقی دور میں دور کے جوڑنے اور توڑنے سے امالہ کردہ emf کو ذاتی امالے emf یا امالہ شدہ emf ہوتا ہے۔ بڑھنے اور گھٹنے کے محدود وقت کا انحصار لچھے میں سے نفوذ(flux) کے دھنسنے پر ہوتا ہے اور ساتھ ہی یہ لچھے پر بھی مختصر ہوتا ہے۔ اس ساخت اور نوعیت کے لچھے امالہ گر(Inductors) کہلاتے ہیں۔



شکل(13.2)

13.3 ذاتی امالہ کی شرح (Co-efficient of Self Induction "L")

حلقے سے منسلک مقناطیسی نفوذ ϕ_B راست متناسب ہوتا ہے حلقے سے گزرنے والی برقی رو i کے یعنی حلقے میں برقی رو i میں اضافہ ہو گا تو مقناطیسی نفوذ ϕ_B میں بھی اضافہ ہو گا اور حلقے سے گزرنے والی برقی رو i میں اگر کمی ہو گی تو مقناطیسی نفوذ ϕ_B میں بھی کمی ہو گی۔

$$\phi_B \propto i$$

$$\phi_B = Li \qquad (13.1)$$

جہاں L تناسبی مستقل ہے جسے خود امالیت یا ذاتی امالیت کی شرح یا حلقے یا امالہ گر کی امالیت کہتے ہیں۔ اگر i=1 ہو تب $\phi_B = L$

حلقے سے اگر اکائی برقی رو گزر رہی ہے تب خود امالیت عددی طور پر حلقے سے منسلک مقناطیسی نفوذ کے مساوی ہوتی ہے۔

N عدد چکر رکھنے والے تار کے لچھے میں برقی رو گزرتی ہے فرض کیجیے جس میں ہر چکر سے متعلقہ نفوذ $\emptyset_B$ ہے۔

فیراڈے کے کلیے امالیت کے بموجب امالہ شدہ emf ہوگا۔ $e = -\frac{d}{dt}(N\emptyset_B)$

کسی تار کے لچھے میں مقناطیسی نفوذ $\emptyset_B$ اور جو لچھے میں گزرنے والی برقی رو کے راست تناسب ہے۔

$$N\emptyset_B \infty i$$
$$N\emptyset_B = Li$$

جہاں L کو ذاتی امالہ کی شرح یا حلقہ کا ذاتی امالہ کہتے ہیں۔ عموماً اُسے حلقہ کا امالہ کہتے ہیں۔

برقی مقناطیسی کلیات کی رو سے جب نفوذ کسی لچھے میں مستفیر ہے تب امالہ والی قوت محرکہ بنتی ہے۔ یعنی

$$e = -\frac{d}{dt}(N\emptyset_B) \qquad (13.2)$$

$$e = \frac{-Ldi}{dt} \qquad (13.3)$$

جو لچھے میں امالہ والی قوت محرکہ پر بننے والی قوت محرکہ کی قیمت ہے۔

a) **ذاتی امالہ:** اس کی تعریف کرنے والی مساوات کے طور پر لیا جا سکتا ہے کہ یہ لچھے سے جڑا مقناطیسی نفوذ ہوتا ہے جب اس میں سے ایک اکائی برقی رو کا گزر ہو۔

کسی تار کے لچھے کے خود امالہ سے مراد اکائی شرح سے برقی رو کی تبدیلی کرنے پر بننے والی قوت محرکہ کی قیمت ہے۔

$$\therefore L = \frac{-edt}{di} \qquad \text{یا } L = \frac{\emptyset}{i}$$

خود امالیت کی SI اکائی ہینری Henry (H) ہے۔ $1\ Henry = \frac{1\ tesla{-}m^2}{ampere}$

$$\frac{Volt\ sec}{amp} \qquad \text{یا} \qquad {weber}/{amp}$$

اس اکائی کا نام ہنری (Henry) دیا گیا ہے اور H علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اس کا ابعادی ضابطہ $[M^1L^2T^{-2}I^{-2}]$ — اکائیاں میں $1mH = 10^{-3}H$ بھی عام طور پر استعمال کی جاتی ہیں۔

$$1\mu H = 10^{-6}H$$

ہمیں معلوم ہے کہ امالی برقی قوت محرکہ دی گئی ہے

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} \qquad (13.4)$$

$$(\because \phi_B = Li)$$

$$\varepsilon = -\frac{d(Li)}{dt} \qquad (13.5)$$

$$\varepsilon = -L\frac{di}{dt} \qquad (13.6)$$

اگر $\frac{di}{dt} = 1$ ہوتب $\quad \varepsilon = -L$

اس لیے ذاتی امالیت یاخود امالیت کو برقی قوت محرکہ شکل میں بھی ظاہر کیاجاسکتاہےاس طرح کے برقی رو میں تبدیلی کی شرح ایک ہوتب ذاتی امالیت یاخود امالیت عددی طور پر امالی برقی قوت محرکہ کے مساوی ہوتی ہے۔

استعمال:

ذاتی امالہ ہمارے گھروں میں استعمال شدہ ٹیوب ٹسٹ میں تفاوت خواں کو کم کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ایک لچھے کا چوکہ جس میں زیادہ امالہ اور کم مزاحمت لچھے ٹیوب کے ساتھ سلسلہ وار جوڑا جاتا ہے۔جو ابتدا میں بہت زیادہ تفاوت قواں پیدا کر کے ٹیوب میں برقی رو گزارتی ہے۔

جب تار سے لچھے میں برقی رو کو روک دئے تب اس کو کم ہونے والی برقی رو کی وجہ سے نفوذ $\emptyset$ کم ہو گی۔

تب $\quad dW = -eidt$

$$dW = +L\frac{di}{dt}idt \qquad \left[\therefore e = \frac{-Ldi}{dt}\right]$$

کل کام کے لیے $i = 0$ اور $i = i_0$ کے دو کے درمیان تکملہ کیا جائے۔تب برقی رو i قائم کرنے میں کیے گئے کام کی کل مقدار ہے۔

$$W = L\int_0^{i_0} i\frac{di}{dt}dt \qquad (13.7)$$

$$W = L\int_0^{i_0} idi \qquad (13.8)$$

$$W = \frac{1}{2}L{i_0}^2 \qquad (13.9)$$

اس لیے رو i قائم کرنے کے لیے درکار توانائی ہے۔ $W = \frac{1}{2}Li^2$

یہ ریاضیاتی عبارت ہمیں ایک m کمیت کے ذرے کی حرکی توانائی $mq^2/_2$ کی یاد دلاتی ہے اور اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ l اور 2m مشابہ ہے (یعنی کہ L برقی جمود ہے اور دور میں برقی رو کے بڑھنے یا کم ہونے کی مخالفت کرتا ہے)۔

13.4 اکیلے لچھے کا ذاتی امالہ (Self Inductance of Single Coil)

فرض کرو کہ ایک طویل سولینائڈ ہے جس کا طول l ہے اور ہموار تراش عمودی کا رقبہ A ہے۔پچھلی اکائی میں ہم برقی رو رکھنے والے سولینائڈ کا مقناطیسی میدان B کو معلوم کر چکے ہیں جو یہ ہے۔

$$B = \mu_0 ni \;\; weber/m^2$$

جہاں خلاء میں اجازیت $= \mu_0$ ، فی میٹر چکروں کی تعداد = n

ہر چکر میں مقناطیسی نفوذ $= \phi_B = BA = \mu_0 ni \ weber$

پیچواں (سولینائیڈ) میں جملہ چکروں کی تعداد =N

$$n = \frac{N}{l} \Rightarrow nl = N$$

اور سولینائڈ سے منسلک نفوذ ہو گا

$$\phi_B = \mu_0 ni\, A \times N$$

$$\phi_B = \mu_0 ni\, A \times nl$$
$$\phi_B = \mu_0 n^2 i\, Al$$

مگر $\phi_B = L\, i$ جہاں L ذاتی امالیت یا خود امالیت ہے۔

$$\therefore Li = \mu_0 n^2 i\, Al$$
$$\boxed{L = \mu_0 n^2\, Al}$$

سولینائڈ کے جملہ چکروں کی تعداد کو ظاہر کرتے ہوئے L کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے ۔ $L = \mu_0 \left(\frac{N}{l}\right)^2 Al$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \qquad (13.10)$$

اکیلے لچھے کا ذاتی امالہ N=1

$$L = \frac{\mu_0\, A}{l}$$

مندرجہ بالا مساوات سے یہ واضح ہوتا ہے کہ لچھے کی ذاتی امالیت یا خود امالیت لچھے کی مہندس (جومیٹری) پر منحصر ہوتی ہے۔یعنی

i. لچھے میں چکروں کی تعداد

ii. تراش عمودی کا رقبہ اور

iii. پیچوے (سولینائڈ) کا طول

13.5 پیچواں سے ذاتی امالہ (Self-Inductance of Long Solenoid)

ایک لمبا استوانہ نما لچھا پیچواں کہلاتا ہے۔اس طرح پیچواں دراصل ایک لمبا تار ہوتا ہے جس کو ایک ایسے مرغولہ کی شکل میں پٹا جاتا ہے جس کے چکریں ایک دوسرے کے بہت قریب ہوں یہ مرغولہ اس کے قطر کے مقابلہ میں بہت طویل تصور کیا جاتا ہے۔ پیچواں کے طول l اور عمودی تراش کا رقبہ A ہے۔ فرض کرو کہ چکروں کی تعداد فی اکائی طول n ہے تمام چکروں سے گزرنے والی مجموعی رو i ہے۔ پیچواں کے اندر کے مقناطیسی امالے کی مقدار 'B' ہے۔ایک ایسے پیچواں کو فرض کیجیے جس کے فی اکائی طول میں 'n' عدد چکر موجود ہیں۔اس کا طول l اور

اس کی تراش عمودی کا رقبہ A ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ ایک پیچواں کے لیے مقناطیسی امالہ B ہوتا ہے۔

$$B = \mu_0 ni \qquad (13.11)$$

فی اکائی طول میں 'n' عدد چکر میں مقناطیسی نفوذ $\emptyset_B = BA$

$$\emptyset_B = \mu_0 niA \qquad (13.12)$$

پیچواں کے چکروں کی مجموعی تعداد N ہے۔تب پیچواں میں مقناطیسی نفوذ

$$\emptyset_B = \mu_0 niA \times N \qquad (13.13)$$

چکروں کی مجموعی تعداد $nl = N$

$$\emptyset_B = \mu_0 niA \times nl \qquad (13.14)$$

$$\emptyset_B = \mu_0 n^2 iAl \qquad (13.15)$$

ایک پیچواں کی ذاتی امالیت کی مقدار کو محسوب کرنا ممکن ہے۔ایک امالہ گر کے لیے۔

$$L = \frac{N\emptyset_B}{i} \qquad (13.16)$$

پیچواں کے ذاتی امالیت

پیچواں کے چکروں کی مجموعی نفوذ $= Li$

$$Li = \mu_0 n^2 iAl \qquad (13.17)$$

$$L = \mu_0 n^2 Al \; Henry \qquad (13.18)$$

جہاں فی اکائی طول میں 'n' عدد چکریں ہے۔

پیچواں کے چکروں کی مجموعی تعداد N میں ذاتی امالیت 'L'

$$L = \mu_0 \left(\frac{N}{l}\right)^2 Al \qquad (13.19)$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \qquad (13.20)$$

لہذا طول 'l' رکھنے والے ایک پیچواں کی امالیت اس کے حجم (lA) اور فی اکائی طول میں موجوں چکروں کی تعداد کے تناسب ہوتی ہے۔

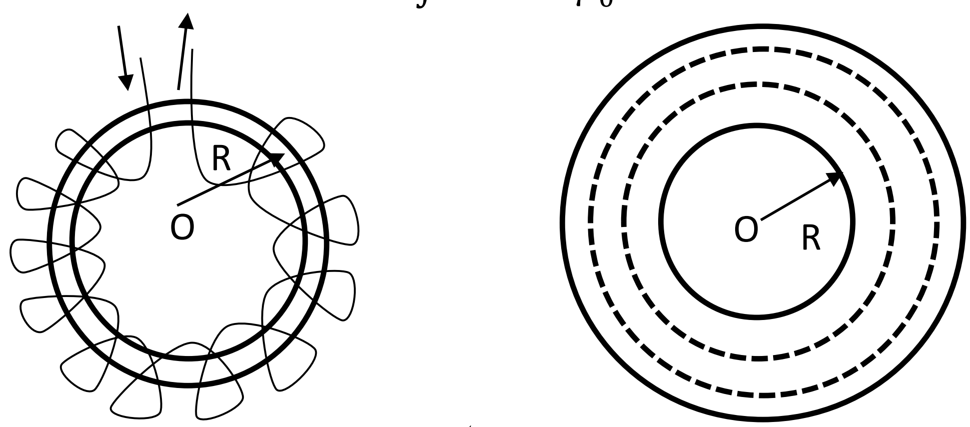
13.6 ایک ٹورائیڈ کی امالیت (Self-Inductance of a Toroid)

ایک ٹورائیڈ کو بتلاتی ہے جو ایک محدود پیچواں ہے جس پر تار کے چکروں کی تعداد N ہے اور ان سے گزرنے والی رو i ہے اور اس کا اوسط نصف قطر 'R' ہے۔

ٹورائیڈ کو اس کے بیرونی ہوائی منطقہ سے علاحدہ کرنے والی سرحد پر مماسی میدان B مسلسل ہے۔اس لیے ٹورائیڈ کے بیرون کے مقابلے میں اندرون میں نفوذ کی کثافت B بہت زیادہ ہے۔اس لیے نفوذ کے خطوط کی کثیر تعداد ٹورائیڈ کے اندرون میں مرکوز ہے۔

نصف قطر 'R' کے تکملی راستے پر ایمپیر کے کلیے کے اطلاق سے

$$\oint \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \mu_0 iN$$



شکل (13.3)

جہاں ٹورائیڈ کے لچھے سے گزرنے والی رو i ہے چکروں کی مجموعی تعداد N ہے۔لہٰذا

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{iN}{R} \qquad (13.21)$$

ٹورائیڈ کی تراش عمودی کا رقبہ A ہے اور ٹورائیڈ میں N چکر موجود ہو تو ہر تار پر اتنا ہی نفوذ بنتا ہے تو جملہ نفوذ اس طرح ہوگا۔

$$\emptyset = BNA \qquad (13.22)$$

مساوات (13.21) اور (13.22) سے

$$\emptyset = \left(\frac{\mu_0 Ni}{2\pi R}\right) NA \qquad (13.23)$$

$$\emptyset = \frac{\mu_0 N^2 iA}{2\pi R} \qquad (13.24)$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$\emptyset = Li \qquad (13.25)$$

مساوات (13.24) اور (13.25) کو مساوی کیا جائے تو

$$Li = \frac{\mu_0 N^2 iA}{2\pi R} \qquad (13.26)$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi R} Henry \qquad (13.27)$$

13.7 مقناطیسی میدان میں ذخیرہ شدہ توانائی (Energy Stored in a Magnetic Field)

برقی دور میں برقی رو کو جانے کے لیے معکوس برقی قوت محرکہ Back emf کے خلاف کام کرنا ہوگا ۔

معکوس برقی قوت محرکہ Back emf کے خلاف کی اکائی وقت میں کیا گیا کام ہوگا۔

$$\frac{dw}{dt} = -\varepsilon_i \tag{13.28}$$

$$-L\frac{di}{dt} = -\varepsilon_i \tag{13.29}$$

مساوات دو کو ایک میں درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا۔

$$\frac{dw}{dt} = -(-L\frac{di}{dt})i \tag{13.30}$$

$$\frac{dw}{dt} = Li\frac{di}{dt} \tag{13.31}$$

مساوات تین کو تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا۔

$$W = \frac{1}{2}\ Li^2 \tag{13.32}$$

ہمیں معلوم ہے کہ L حلقے کی جیومٹر پر منحصر ہوتا ہے۔ہم کسی بھی سطح اور حجم کے لیے ایک عمومی مساوات حاصل کرنے کے لیے آیئے مقناطیسی سمتیہ قوۃ A کے لحاظ سے مساوات (13.25) کو دوبارہ لکھیں گے۔

$$\phi = \ Li \tag{13.33}$$

$$\phi = \iint_S \vec{B}.\vec{s} \tag{13.34}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\ \times \vec{A} \tag{13.35}$$

$$\phi = \iint_S (\vec{\nabla}\ \times \vec{A}).ds \tag{13.36}$$

اسٹوکس تھیورم کا استعمال کرتے ہوئے۔

$$\phi = \oint_c \vec{A}\ \ .\overrightarrow{dl} \tag{13.37}$$

جہاں C لوپ (حلقہ) کا پیرامیٹر ہے اور S سی C سے آگے کی کوئی بھی سطح ہے۔

مساوات (13.36) اور (13.32) کو مساوی کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$Li = \oint_{c} \vec{A} \ .\overrightarrow{dl} \qquad (13.38)$$

مساوات(13.37) کو (13.32) میں درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$W = \frac{1}{2}\, Li^2 = \frac{1}{2}\, i \oint_{c} \vec{A} \ .\overrightarrow{dl} \qquad (13.39)$$

حجم برقی رو کے لے مساوات(13.39) میں idl کو jdv اور $\oint_c$ کو $\iiint_V$ سے تبدیل کرنے پر۔ جہاں V برقی رو کا حجم ہے۔

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{A} \ .\vec{J} dv \qquad (13.40)$$

ایمپیر کی کلیے سے۔

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \qquad (13.41)$$

مساوات(13.41) کو(13.40) میں درج کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_V \vec{A} \ .(\vec{\nabla} \times \vec{B}) dv \qquad (13.42)$$

سمتیہ کو استعمال کرتے ہوئے۔

$$\begin{aligned} \nabla.\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) &= \vec{B}.\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) - \vec{A}\,.\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \\ \vec{A}\,.\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) &= \vec{B}.\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) - \nabla.\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \\ &\vec{B}.\vec{B} - \nabla.\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \qquad (13.43) \end{aligned}$$

مساوات(13.42) کو(13.41) میں درج کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \{\iiint_V \vec{B}\,.\vec{B}\, dv \ - \iiint_V \vec{\nabla}\,.\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) dv\}$$

مسئلہ انفراج کو استعمال کرتے ہوئے۔

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \{\iiint_V \vec{B}\,.\vec{B}\, dv \ - \oiint_S \left(\vec{A} \times \vec{B}\right).ds\} \qquad (13.44)$$

اگر ہم تمام کی تمام جگہ کا تکمل کرتے ہیں تب سطح کا تکمل صفر ہو گا۔

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_{all\ space} B^2 \ dv$$

اس طرح مقناطیسی میدان میں ذخیرہ شدہ توانائی $\frac{B^2}{2\mu_0}$ فی اکائی حجم کے مساوی ہو گی۔

13.8 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال1

ایک لچھے میں 100 تار ہیں۔اس میں 5A کی برقی رو گزرنے پر 10^{-6} کا نفوذ(flux) بنتا ہے۔اس لچھے کا خود امالہ معلوم کیجیے۔

حل: مثال میں دی گئی قیمت

$$i = 5A \quad \emptyset = 10^{-6}$$
$$N = 100$$
$$L = \frac{N\emptyset}{i}$$
$$L = \frac{100\times10^{-6}}{5} = 20\mu m$$

حل شدہ مثال2

ایک 10H والے امالہ گر میں 2amp کی قائم رو گزر رہی ہے۔ کس طرح اس امالہ گر میں ایک 100Volt کی ذاتی امالہ شدہ قوت محرکہ برقی پیدا کی جاسکتی ہے۔

حل:

$$\varepsilon = L\frac{di}{dt}$$
$$\varepsilon = 100\ Volt$$
$$L = 10H$$
$$100 = 10\frac{di}{dt}$$
$$\frac{di}{dt} = 10\ amp/sec$$

حل شدہ مثال3

ایک پیچواں پر 10 تانبے کے تاروں کی ایک واحد تہہ لپٹی گئی ہے۔(تار کا قطر 0.1 انچ ہے) پیچواں کا قطر 40 مٹر ہے اور اس کا طول 2m ہے۔ پیچواں کے مرکز کے قریب فی اکائی طول امالیت کتنی ہوگی۔

حل:

$$L = n^2 lA$$
$$L = 1.26\times10^{-6}\left[\frac{10^2}{0.1\times2.54}\right]^2\times\pi\times\left(\frac{2}{10^2}\right)^2$$
$$L = 245.4\times10^{-6}H$$
$$L = 0.245mH$$

حل شدہ مثال4

ایک لچھے کی امالیت 2H اور مزاحمت 100Hm ہے۔اس کو ایک مزاحمت سے 100Volt کی بیڑی سے جوڑا گیا(a) توازنی برقی کتنی ہوگی؟(b) جب یہ برقی رو لچھے میں موجود ہوتی ہے تو مقناطیسی میدان میں کتنی توانائی ذخیرہ ہوگی۔

حل: (a) توازنی برقی رو

$$i = \frac{E}{R} = \frac{100}{10} = 10amps$$

(b) ذخیرہ شدہ توانائی$= \frac{1}{2}Li^2$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 10^2 = 100J$$

حل شدہ مثال5

5cm نصف قطر والے تار کا ایک حلقہ 100amp برقی رو کا حامل ہے۔اس کی توانائی کی کثافت کتنی ہو گی۔

حل:

$$U_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \ \& \ B = \frac{\mu_0 i}{2R}$$

$$U_B = \frac{1}{2}\frac{{\mu_0}^2 i^2}{4R^2}$$

$$U_B = \frac{1.26\times10^{-6}\times(100)^2\times10^4}{8\times5\times5}$$

$$U_B = 0.63\ Joule\ /\ m^3$$

حل شدہ مثال6

سولینائیڈ جس کا طول 0.5 میٹر اور تراش عمودی کا رقبہ 0.01 مربع میٹر ہے جس کے 1000 چکر ہیں اس کی خود امالیت یا ذاتی امالیت معلوم کرے۔؟

حل: دیا گیا ھیکہ $N = 0.5\ m \quad A = 0.01\ m^2 \qquad N = 1000\ turns$

$$L = \mu_0\ m^2 A\ l$$

$$L = \mu_0\ n^2 A\ l$$

$$L = (4\ \pi \times 10^{-7})\{\frac{1000}{0.5}\}^2(0.01) \times\ 0.5$$

$$L = \frac{4\ \times\ 3.14\ \times\ 10^{-7} \times\ \ 10^6\ \times\ 0.01}{0.5}$$

$$L = 0.02512\ Henry$$

حل شدہ مثال7

اگر لچھے کے چکروں کی تعداد دگنی کر دی گئی ہو تب لچھے کی ذاتی امالیت معلوم کرئے؟

حل: $L \infty N^2$:

$$N_2 = \ 2\ N_1$$

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{{N_1}^2}{{N_2}^2}$$
$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{{N_1}^2}{4{N_2}^2} \Longrightarrow \frac{L_1}{L_2} = \frac{1}{4}$$
$$\boldsymbol{L_2 = 4\,L_1}$$

حل شدہ مثال8

ایک لچھہ جس کے 1000 چکریں ہیں اس کی ذاتی امالیت 100mH ہے۔اسی طرح کا لچھہ جس کے 600 چکریں ہیں ذاتی امالیت معلوم کرے؟

حل: دیا گیا ھیکہ $N_1 = 1000\ turns \quad L_1 = 100mH \quad N_2 = 600\ turns$

$$L \propto N^2$$
$$\frac{100}{L_2} = \frac{(1000)^2}{(600)^2}$$
$$L_2 = \frac{360000 \times 100}{1000000}$$
$$L_2 = 36\ m\ Henry$$

حل شدہ مثال 9

ایک 10 ہنری موصل 1 ایمپیر مستقل و قائم برقی رکھتا ہے۔وہ کون سی شرح ہے جس پر کرنٹ میں اضافہ ہونا چاہیئے تا کہ ای ایم ایف یا 20 ولٹ ہو سکے؟

حل: دیا گیا کہ ولٹ $\varepsilon = 20$ ایمپیر $i = 1$ ہنر $L = 10$

$$\varepsilon = -L\frac{di}{dt}$$
$$|\varepsilon| = L\frac{di}{dt}$$
$$\frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon}{L} \Longrightarrow \frac{di}{dt} = \frac{20}{10}$$

$$\frac{di}{dt} = 2 \text{ ایمپیر فی سکند}$$

حل شدہ مثال 10

ہموار مقناطیسی میدان کا امالہ 10 ویبر فی مربع میٹر 10^{-3} مکعب میٹر حجم میں ہو تب کتنی مقناطیسی توانائی ذخیرہ ہوگی۔؟

حل: دیا گیا کہ $V = 10^{-3}$ مکعب میٹر $B = 10$ ویبر مربع میٹر

$$u = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$u = \frac{(10)^2}{2 \times 4\pi \times 10^{-7}}$$

فی اکائی حجم میں ذخیرہ شدہ توانائی u ہے۔

$$U = u \times v \quad \text{ذخیر شدہ توانائی}$$

$$U = 39.8 \times 10^6 \times 10^{-3}$$

$$U = 39.8 \times 10^6 \times 10^3 \text{جول} \quad \text{ذخیر شدہ توانائی}$$

13.9 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- ایک لچھے میں برقی رو تبدیل ہوتا ہے تو وہ اسی لچھے میں ایک الٹی برقی قوت محرکہ کا امالہ کرتا ہے۔ یہ ذاتی امالہ / نفوذ برقی قوت محرکہ دی جاتی ہے $\varepsilon = L\frac{di}{dt}$ جہاں $L \Leftarrow$ لچھے کی ذاتی امالیت ہے۔
- ایک طویل سولی نائیڈ (پیچواں) کی ذاتی امالیت

$$L = \mu_0 n^2 A l$$

- برقی بھرنوں سے پیدا ہونے والے ایک برقی سکونی میدان میں ذخیرہ شدہ توانائی ہوگی۔

$$U_B = \frac{1}{2} L i^2$$

اور ایک مقناطیسی میدان میں توانائی کی کثافت ہوگی $U_B = \frac{\frac{1}{2}Li^2}{lA}$

13.9 کلیدی الفاظ (Keywords)

- **ذاتی امالیت یا خود امالیت** : لچھے میں تبدیل ہونے والی برقی رو اسی لچھے میں امالی قوت محرکہ پیدا کرتی ہے۔
- **باہمی امالیت** : دو لچھوں کی باہمی امالیت سے مراد ایک لچھے کی مقناطیسی میدان کے ذریعے پیدا ہونے والی امالی برقی قوت محرکہ دوسرے لچھے میں برقی رو اور وولٹیج میں تبدیلی کی مخالفت کرتی ہے۔
- **ہنری (اکائی)** : ہنری بین الاقوامی نظام میں برقی امالیت کی اکائی ہے۔

- **باہمی امالیت کی شرح** : یہ برقی دور سے منسلک نفوذ ہے جو دوسرے برقی دور میں برقی رو کے بہنے کے سبب ہوتا ہے۔
- **برقی مقناطیسی امالہ** : مقناطیسی میدان میں تبدیلی کے ذریعے موصل میں برقی قوت محرکہ کو پیدا کرنے کا عمل۔

13.11 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

13.11.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. میں کون ہوں؟

الف: میں برقی دور سے منسلک مقناطیسی نفوذ میں منفی تبدیلی کی شرح کے براہ راست متناسب ہوتا ہو ں؟

ب : میں اکائی برقی رو گزرنے والے لچھے سے منسلک مقناطیسی نفوذ کے عددی طور پر میں مساوی ہو ں؟

2. مندرجہ بالا میں سے کوئی نہیں۔

i. ذاتی یا خود امالیت Lاس پر منحصر ہوتی ہے؟

a) لچھے کے طول Lپر b) لچھے کے چکروں Lپر c) لچھے کے تراشے عمودی کے رقبے Aپر d) مندرجہ بالا تمام پر

3. برقی مقناطیسی امالہ کی تعریف کیجیے ؟
4. ذاتی امالیت کی بین الا قوامی اکائی .... ہے۔
5. سولینائڈ میں ذخیرہ شدہ توانائی.................................... ہو گی۔
6. ایک چھوٹا مقناطیسی ایک دھاتی حلقہ اقتصابِ محو ہے حالت سکون گرایا گیا ہے۔تب ایک سکنڈ میں اس مقناطیسی کتنا فاصلہ طئے کرے گی۔

7.0m (d) 6.0m (c) 5.0m (b) 4.0m (a)

7. ذاتی امالہ کی تعریف کیجیے۔
8. ذاتی امالے کی شرح کی تعریف کیجیے۔
9. امالیت کی اکائی۔۔۔۔۔۔۔۔۔ہو گی۔

Volt –sec (d) Henry (c) amp (b) volt (a)

10. ہنری۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔ کی اکائی ہے۔

13.11.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. ایک پیچواں کی امالیت کی تحسیب کے لیے ایک مساوات اخذ کیجیے۔
2. ایک مقناطیسی میدان میں موجود توانائی کے لیے ایک ضابطہ اخذ کیجیے۔

3. ذاتی امالہ کی شرح کی تعریف کرو۔
4. ایک ٹورائیڈ کی امالیت کے اظہار کے لیے مساوات اخذ کیجیے ۔

13.11.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. ذاتی امالیت کیا ہے ؟ذاتی امالیت کی شرح کو بیان کیجیے اور سولینائیڈ کی ذاتی امالیت کے اظہار کے لیے مساوات اخذ کیجیے۔
2. ذاتی امالیت کیا ہے ؟ذاتی امالیت کی شرح کو بیان کیجیے اور ایک ٹورائیڈ کی ذاتی امالیت کے اظہار کے لیے مساوات اخذ کیجیے۔
3. مقناطیسی میدان میں ذخیرہ شدہ توانائی کے لیے مساوات کو اخذ کیجیے اور کثافتِ توانائی کے لیے مساوات کی تخریج کیجیے۔
4. ذاتی امالہ کی شرحوں (Coefficients) کے لیے ضابطہ اخذ کیجیے۔

13.11.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. ایک لچھے میں 1000 تار ہیں اس میں 2A کی برقی رو 0.5wb کا نفوذ پیدا کرتی ہے لچھے کا ذاتی امالہ معلوم کیجیے۔
2. یہ بتایئے کہ ایک طول 'l' والے لمبے تار کی ذاتی امالیت جو تار کے اندر نفوذ (flux) سے متعلق ہوتی ہے۔ وہ $\pi\, {}^{1}/_{8}\, \mu_0$ ہو گی اور یہ تار کے قطر پر منحصر نہیں ہوتی۔

13.12 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Bleaney, B I, and B Bleaney. Electricity and Magnetism. Oxford: Oxford University Press, 2013.
2. Duffin, W J. Electricity and Magnetism. Cottingham: W.J. Duffin, 2001.
3. Gaur, R.K. &Gupta, S.L.Engineering Physics.Dhanpat Rai Publication.
4. Kurrelmeyer, Bernhard, and Walter H. Mais. Electricity and Magnetism. Princeton, N.J: Van Nostrand, 1967.
5. Peck, Edson R. Electricity and Magnetism. , 2013.
6. Plonsey.R&Collin.R.E.Principles and Application of Electromagnetic Field. Tata Mc Graw Hill Publication. New Delhi.
7. Purcell, Edward M, and David J. Morin. Electricity and Magnetism. , 2013.
8. Resnic.R&Halliday.D.PhysicsPart-I&Part-II.Wiley Eastern Pvt.Ltd.New Delhi.

اکائی 14۔ برقی مقناطیسی باہمی امالیت

(Electromagnetic Mutual Inductance)

اکائی کے اجزا

14.0 تمہید (Introduction)

اور سٹیڈ(Oersted) نے 1820ء میں دریافت کیا کہ برقی موصل سے برقی رو گزرنے پر مقناطیسی میدان بنتا ہے۔ برقی موصل کے اطراف قائم ہونے والے مقناطیسی میدان کی حدت اور موصل سے گزرنے والی برقی رو کی مقدار میں رشتہ ایمپیئر نے معلوم کیا۔ اس طرح کے مسلسل مشاہدات کے بعد ان حقائق کو مائیکل فیراڈے نے 1831ء میں کچھ آسان کلیات کی شکل میں پیش کیا۔ نظریاتی اور تجرباتی دریافت نے یہ ظاہر کیا کہ حرکی برقی بار نہ صرف برقی میدان پیدا کرتا ہے بلکہ مقناطیسی میدان بھی پیدا کرتا ہے۔ فیراڈے اور جوزف ہنری نے 1831 کے ذریعے کیے گئے تجربات نے قطعی طور پر مظاہرہ کر کے ثابت کر دیا کہ جب بند لچھوں پر تبدیل ہوتا ہوا مقناطیسی میدان لگایا گیا تو ان میں برقی رو کا امالہ ہوا۔ اس اکائی میں ہم تبدیل ہوئے مقناطیسی میدان سے منسلک مظاہر کا مطالعہ کریں گے اور ان کے اُصول سمجھیں گے۔ وہ مظہر جس میں برقی رو، مقناطیسی میدان کے تغیر کے ذریعہ پیدا ہوتا ہے ، بجا طور پر ، برقی مقناطیسی امالہ(Electromagnetic Induction) کہلاتا ہے۔

فیراڈے اور ہنری کے رہنمایانہ تجربات نے جدید دور کے جنریٹر اور ٹرانسفارمر تیار کرنے کی براہِ راست راہ دکھائی۔ آج کی جدید تہذیب اپنی ترقی کے لیے بری حد تک برقی مقناطیسی امالہ کی دریافت کی مرہون منت ہے۔

14.1 مقاصد (Objectives)

یہ اکائی امالیت کے مظہر سے بحث کرتی ہے۔ اس مظہر کو سمجھانے کے لیے اس اکائی میں اس بات کی وضاحت کی گئی ہے کہ :

- باہمی امالیت کو معلوم کریں اور اس سے متعلق سوالات حل کریں گے۔
- کسی بھی دیے گئے امالہ گر برقی دور میں ذخیرہ شدہ مقناطیسی توانائی کا تعین کریں گے اور مقناطیسی میدان میں ذخیرہ شدہ توانائی کو بھی معلوم کریں گے۔
- ٹرانسفارمر کے اصول کی وضاحت کریں گیں۔

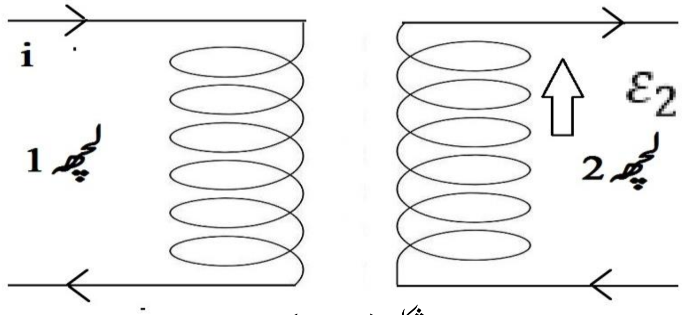
14.2 باہمی امالیت (Mutual Inductance “M”)

فرض کرو کہ دو حلقے یا امالہ گر ایک دوسرے کے قریب رکھے گئے ہیں جس طرح ہمیں شکل میں نظر آرہا ہے ۔

جب پہلے لچھے میں برقی رو گزرتی ہے تب اس سے منسلک مقناطیسی نفوذ میں تبدیلی واقع ہوتی ہے اور امالی برقی قوت محرکہ ε_2 دوسرے لچھے میں ترتیب پاتی ہے اس مظہر کو باہمی امالیت(Mutual Inductance) کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ پہلے حلقے میں برقی رو i_1 ہے جو پہلے لچھے میں مقناطیسی میدان B_1 کو پیدا کر رہی ہے کیوں کہ دونوں لچھے ایک دوسرے کے قریب ہے اس لیے B_1 دوسرے لچھے سے بھی گزرے گی فرض کرو کہ ϕ_2 دوسرے لچھے کا مقناطیسی نفوذ ہے جو B_1 کی وجہ

سے ہیں۔اگر برقی رو i_1اور مقناطیسی میدان B_1 میں تبدیلی واقع ہوتی ہے تب ϕ_2 بھی تبدیل ہوگا جو دوسرے لچھے میں امالی قوت محرکہ ε_2 پیدا کرتا ہے۔



شکل(14.1)

اس طرح دوسرے لچھے سے منسلک نفوذ پہلے لچھے میں موجود برقی رو سے راست متناسب ہوگا۔

$$\phi_2 \propto i_1$$

$$\phi_2 = M i_1 \qquad (14.1)$$

جہاں M تناسبی مستقل ہے جسے باہمی امالے کی شرح یا دو لچھوں کی باہمی امالیت (Mutual Inductance) کہا جاتا ہے۔اگر i=1 ہو تب $\phi_2 = M$ ہوگا۔

اس طرح ہم باہمی امالیت کے بارے میں کہہ سکتے ہیں کہ یہ اکائی برقی رو کے بہنے کی وجہ سے دوسرے برقی دور سے منسلک مقناطیسی نفوذ ہے۔

مساوات ایک کو وقت کے لحاظ سے تفرق کرنے پر

$$\frac{d\phi_2}{dt} = M\frac{di_1}{dt} \qquad (14.2)$$

فیراڈے کلیے کے مطابق

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\phi_2}{dt} \qquad (14.3)$$

مساوات (14.3) کو مساوات (14.2) میں درج کرنے پر

$$\varepsilon_2 = -M\frac{di_1}{dt} \qquad (14.4)$$

اگر $\frac{di}{dt} = 1$ ہو تب $\varepsilon_2 = M$

لہذا باہمی امالے کی شرح اس وقت اکائی ہوگی جب کہ امالہ شدہ برقی قوت محرکہ ایک ولٹ ہو جب کہ دوسرے لچھے میں برقی رو کی مقدار ایک ایمپیئر فی سیکنڈ کی شرح سے بدل رہی ہو۔

باہمی امالیت کی SI اکائی بھی ہینری Henry (H) ہی ہے۔

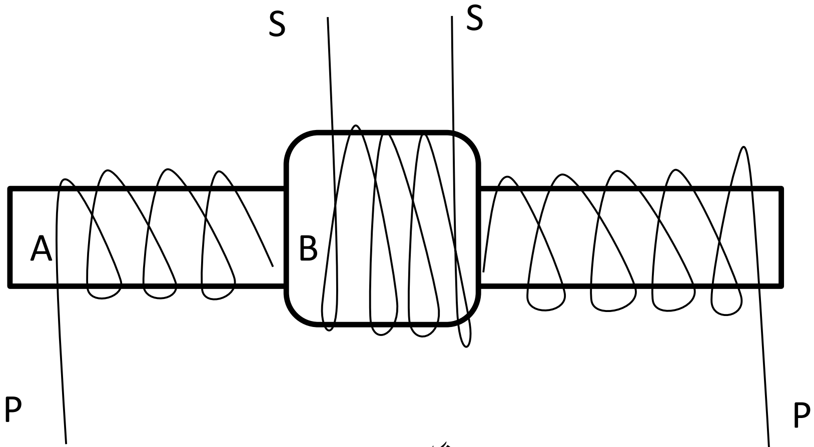
$\frac{Volt\ sec}{amp}$ یا $^{weber}/_{amp}$

اس اکائی کا نام ہنری (Henry) دیا گیا ہے اور H علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اس کا ابعادی ضابطہ $[M^1L^2T^{-2}I^{-2}]$ — اکائیاں میں $1mH = 10^{-3}H$ بھی عام طور پر استعمال کی جاتی ہیں۔

$1\mu H = 10^{-6}H$

14.3 دو لچھوں میں باہمی امالیت (Mutual Induction of Two Given Coils)



شکل (14.2)

شکل (14.2) میں دکھایا گیا ہے کہ ایک لمبا استوانہ پیچواں میں ایک پیچواں A اور دوسرا پیچواں B۔

ابتدائی (Primary) پیچواں A کی چکروں کی تعداد $= n_1$

ہر پیچواں کا طول $= l$ رقبہ کا عمودی تراش $= a$

ثانوی (Secondary) پیچواں B چکروں کی تعداد $= n_2$

A پیچواں میں برق رو $= i$

A پیچواں کے اندرونی مقناطیسی میدان $= \frac{\mu_0 n i_r i}{l}$ $\left(\frac{weber}{(met)^2}\right)$ $\frac{\text{ویبر}}{\text{میٹر سکیر}}$

A لچھے میں چکروں کی تعداد فی اکائی مقناطیسی نفوذ

$$\emptyset = BA = \mu_0 \frac{n_1}{l} \times i \times a \quad Weber \qquad (14.5)$$

پیچواں کے مرکوز مقام پر لچھے B لچھے A کے ساتھ نفوذ بندھن ہے۔ دوسری لچھے B میں چکروں کی تعداد فی اکائی مقناطیسی نفوذ لچھے A کے برابر ہو گی۔

دوسرے لچھے B میں مقناطیسی نفوذ

$$\emptyset = \mu_0 \frac{n_1}{l} \times i \times a \times n_2 \quad (14.6)$$

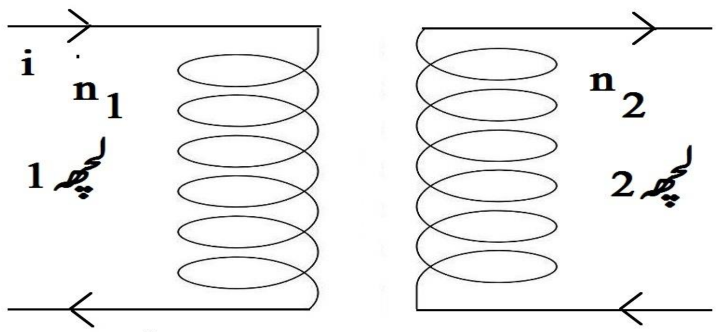
یہاں پر M دو لچھوں میں باہمی امالہ ہیں۔اس لیے پیچواں B کے ساتھ نفوذ

$$Mi = \mu_0 \frac{n_1}{l} \times i \times a \times n_2 \quad (14.7)$$

$$M = \frac{\mu_0 n_1 n_2 a}{l} \quad (14.8)$$

(or) anather method

دو لچھوں کا ایم (M of two Coils) (



شکل (14.3)

فرض کرو کہ برقی رو i پہلے لچھے یا امالہ گر سے بہہ رہی ہے جسے لچھہ 1 (Coil1) کہیں گے اور پہلے لچھے میں چکروں کی تعداد n_1 ہے اور دوسرے لچھے میں چکروں کی تعداد n_{21} ہے اور تراشے عمودی کا رقبہ A ہے تب پہلے 1 لچھے میں مقناطیسی میدان ہوگا

$$B = \mu_0 \frac{n_1}{l} i \quad (14.9)$$

$$\phi_2 = BA = \mu_0 \frac{n_1}{l} iA \quad (14.10)$$

کیوں کہ لچھے ایک دوسرے کے قریب ہیں اس لیے نفوذ دوسرے لچھے سے بھی گزرے گا ۔

∴ دوسرے لچھے یا امالہ گر سے منسلک مقناطیسی نفوذ ہوگا۔

$$\phi_2 = \frac{\mu_0 n_1 A}{l} \times n_2 \quad (14.11)$$

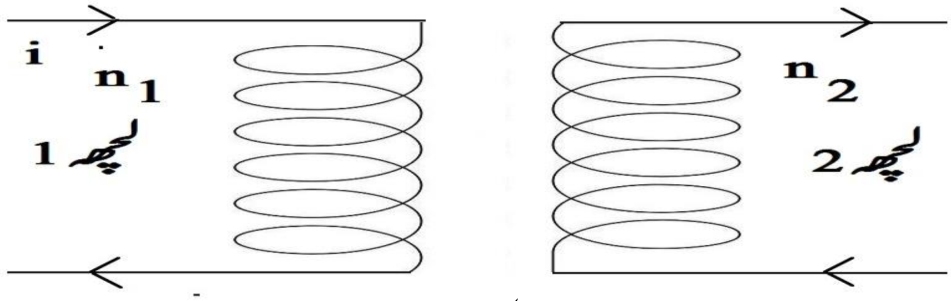
$$(\therefore \emptyset = Mi)$$

$$Mi = \frac{\mu_0 n_1 A i n_2}{l} \quad (14.12)$$

$$M = \frac{\mu_0 n_1 n_2 A}{l} \quad (14.13)$$

14.4 پیچواں بندھن کی شرح (Coefficient of Coupling)

شکل(14.4) میں دکھایا گیا ہے کہ جس میں دو ہم محور طویل پیچواں دکھائے گئے ہیں۔ ہر پیچواں کا طول 'l' ہے۔ عرض کیجیے n_1اور n_2 بالترتیب دو لچھوں کے چکروں کی کل تعداد ہے۔اس دو لچھوں میں برق رو i_1اور i_2 گزاری جاتی ہے۔تب دو لچھوں میں ذاتی امالیت



شکل(14.4)

$$L_1 = \frac{n_1 \emptyset_1}{i_1} \qquad (14.14)$$

$$L_2 = \frac{n_2 \emptyset_2}{i_2} \qquad (14.15)$$

جہاں پیچواں(Solenoid)(1)اور(2)کے اندرونی برقی رو بالترتیب i_1اور i_2 کے ذریعہ مقناطیسی نفوذ $\emptyset_1$اور $\emptyset_2$

جب پیچواں(2)میں سے ایک رو i_2 گزاری جاتی ہے تو یہ پیچواں(1)میں ایک مقناطیسی نفوذ پیدا کرتا ہے۔ہم اسے $\emptyset_1$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ پیچواں(1)کے ساتھ مطابق پیچواں بندھن ہے۔تب

$$n_1 \emptyset_1 = M_{12} I_2 \qquad (14.16)$$

جہاں پیچواں(2)کی مناسبت سے پیچواں(1)کی باہمی امالیت کہلاتی ہے۔اسے باہمی امالہ کی شرح بھی کہتے ہیں۔اسی طرح اب ہم اس کی مخالف صورت لیتے ہیں۔ پیچواں(1)میں سے ایک برقی رو i_1 گزاری جاتی ہےاور لچھے(2)کے ساتھ نفوذ بندھن ہے۔تب

$$n_2 \emptyset_2 = M_{21} I_1 \qquad (14.17)$$

جہاں M_{21} پیچواں(1)کی مناسبت سے، پیچواں(2)کی باہمی امالیت کہلاتی ہے۔

باہم دگری مسئلہ(Reciprocity Theorem)استعمال کرنے پر

$$M_{12} = M_{21} = M_{maximum}$$

یہ قیمت کو مساوات(14.16)اور(14.17)میں استعمال کرنے پر

$$n_2 \emptyset_1 = M_{max} i_1 \qquad (14.18)$$

$$n_1 \emptyset_2 = M_{max} i_2 \qquad (14.19)$$

مساوات(14.18)اور(14.19)کو ضرب کرنے پر

$$M^2{}_{max} i_1 i_2 = n_1 n_2 \emptyset_1 \emptyset_2 \quad (14.20)$$

$$M^2{}_{max} = \left(\frac{n_1 \emptyset_1}{i_1}\right) \times \left(\frac{n_2 \emptyset_2}{i_2}\right) \quad (14.21)$$

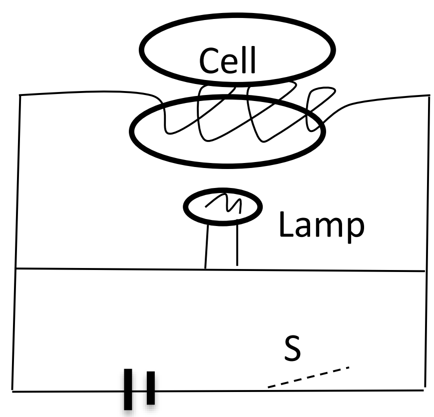
مساوات(14.18)اور(14.19)کو(14.21)میں درج کرنے پر

$$M^2{}_{max} = L_1 L_2 \quad (14.22)$$

$$M_{max} = \sqrt{L_1 L_2} \quad (14.23)$$

14.5 ایک مقناطیسی میدان میں ذخیرہ شدہ توانائی (Energy Stored in Magnetic Field)

ایک امالہ گر سے برقی رو گزرتی ہے تو یہ اپنے گرد توانائی کو ذخیرہ کر لیتے ہے۔اس کو بموجب شکل(14.5)ایک برقی دور کی مدد سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔جب سوئچ S کو بند کیا جاتا ہے۔تو بلب روشن ہوتا ہے۔لیکن جب سوئچ کو کھولا جاتا ہے تو بلب کی چمک لمحے کے لیے بڑھ جاتی ہے۔اس چمک میں یہ اضافہ امالے کے مقناطیسی میدان میں ذخیرہ شدہ توانائی کی وجہ سے ہوتی ہے۔کیوں کہ جب میدان ڈھجاتا ہے تو امالہ گر کا مقناطیسی میدان پر ایک بڑی مقدار میں برقی رو کا امالہ کرتا ہے۔



شکل(14.5)

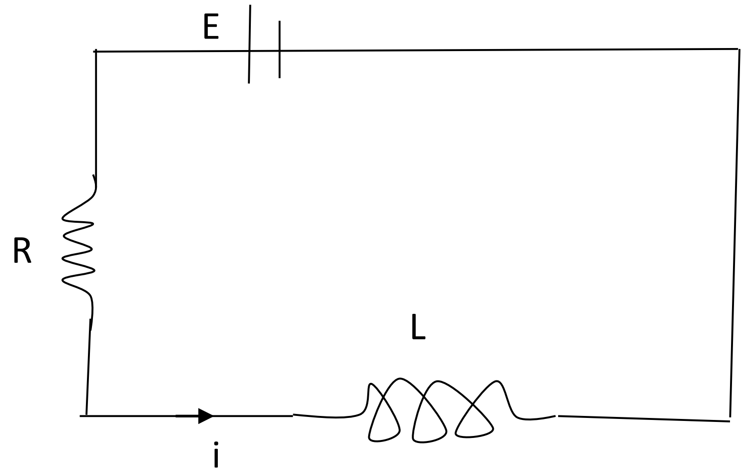
ایک مقناطیسی میدان کو قائم کرنے میں مطلوبہ کام کو محسوب کرنے کے لیے ہم مبدا شکل(14.5)سے ایک علاحدہ دور کو فراہم کردہ توانائی کو محسوب کریں گے۔جب کہ برقی رو صفر سے شروع ہو کر ایک قیمت تک بڑھتی ہے۔

اس دور میں مزاحمت 'R' ذاتی امالیت 'L' اور emf 'e' والے شکل(14.6)بیڑی پر مشتمل ہوتا ہے۔

دور میں بہنے والی رو ہے اور لچھے کے گرد قوت۔$L\frac{di}{dt}$ ہے اور آگے کی جانب رواں حاصل $\varepsilon - L\frac{di}{dt}$ ہے۔

لہٰذا اوم کے کلیے کو استعمال کرنے پر

$$\varepsilon - \frac{Ldi}{dt} = iR \qquad (14.24)$$



شکل(14.6)

برقی بھرن کی ایک مقدار dq کو برقی دور میں گزارنے کے لیے emf سے ہوا کام dw

$$dw = \varepsilon dq \qquad (14.25)$$

$$(\therefore\ dq = idt) \qquad dw = \varepsilon idt$$

$$\frac{dw}{dt} = \varepsilon i \qquad (14.26)$$

مساوات(14.24)اور(14.26)سے

$$\frac{dw}{dt} = Li\frac{di}{dt} + i^2R \qquad (14.27)$$

کام اور توانائی اصلاحوں میں اس مساوات کی وضاحت یوں ہوگی۔ مساوات(14.27)کے بائیں جانب کی اصطلاح وہ شرح ہے جس سے دور میں توانائی فراہم کرتی ہے۔جب کہ دائیں جانب کی اصطلاح i^2R وہ ضائع کردہ توانائی ہے جو مزاحمت میں جول حرارت کے طور پر ضائع ہو جاتی ہے۔

لٰہذا وہ توانائی جو جول حرارت کے طور پر ظاہر نہیں ہوتی،اسے لازمی طور پر امالہ گر سے متعلقہ مقناطیسی میدان میں ذخیرہ ہو جانا چاہئے۔اس طرح اصطلاح $\frac{Lidi}{dt}$ مقناطیسی میدان میں توانائی کے ذخیرہ ہونے کی شرح کو ظاہر کرتی ہے۔

$$Li\ \frac{di}{dt} = \frac{du_B}{dt}$$

یا

$$du_B = Lidi$$

$$U_B = \int du_B = \int_0^i Lidi$$

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2 \qquad (14.28)$$

مساوات(14.28)برقی رو i لے جانے والی امالیت ‘L’ سے متعلق مقناطیسی توانائی کو تعبیر کرتی ہے۔ مقناطیسی توانائی کے ابعاد

ہوتے ہیں امالیت ضرب برقی رو کا مربع۔

14.6 ایک مقناطیسی میدان میں توانائی کی کثافت (Power of Energy in Magnetic Field)

مقناطیسی امالیت کی رقم میں اس توانائی کی کثافت کو معلوم کرنے کے لیے مقناطیسی میدان کو امالہ گر کے اندر ایکساں سمجھا جاتا ہے۔ لہٰذا ذخیرہ شدہ توانائی کو لازمی طور پر پیچواں کے سارے حجم میں ایکساں منقسم ہونا چاہیے۔

برقی رو لے جانے والے امالہ گر میں محفوظ توانائی امالہ گر کے اطراف مقناطیسی میدان کی شکل میں ذخیرہ ہو جاتی ہے۔

مقناطیسی میدان میں توانائی کے ذخیرہ ہونے کی مساوات

$$U = \frac{1}{2} L{i_0}^2 \qquad (14.29)$$

ایک ایسے پیچواں کو فرض کیجیے جس کا طول 'l' اور تراش عمودی کا رقبہ A ہے۔ تب پیچواں کے طول سے متعلقہ حجم lA ہوگا۔

ایک پیچواں کے امالیت

$$L = \mu_0 n^2 Al \qquad (14.30)$$

جہاں پیچواں (Solenoid) کے فی اکائی طول میں n عدد چکریں ہیں۔

$$U = \frac{1}{2}(\mu_0 n^2 Al){i_0}^2 = \frac{1}{2}\frac{(\mu_0 n i_0)^2}{\mu_0} Al \qquad (14.31)$$

ایک پیچواں میں مقناطیسی میدان $B = \mu_0 n i$

$$U = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} Al \qquad (14.32)$$

مقناطیسی میدان کی توانائی کی کثافت ہوگی

$$U = \frac{U}{lA} \qquad (14.33)$$

$$U = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\frac{Al}{Al} \qquad (14.34)$$

$$U = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \qquad (14.35)$$

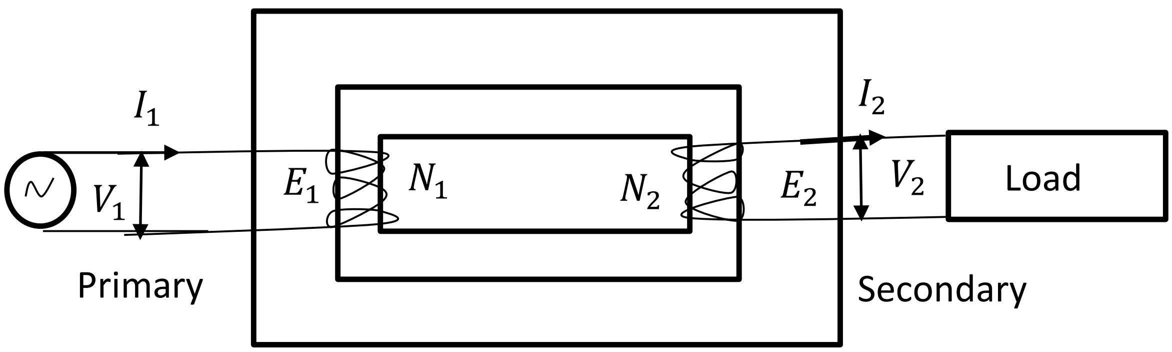
حالانکہ مقناطیسی میدان کی کثافت کی یہ مساوات ایک پیچواں کے خصوصی کیس کے لیے اخذ کی گئی ہے۔ مگر مساوات (14.35) کا ضابطہ تمام مقناطیسی میدانوں کے لیے بھی درست ہوتا ہے۔

اس طرح مقناطیسی میدان میں ذخیرہ شدہ توانائی $\frac{B^2}{2\mu_0}$ فی اکائی حجم کے مساوی ہوگی۔

14.7 ٹرانسفارمر کا اُصول (Principle of Transformer)

اُصول: کئی مقاصد کے لیے، نیک متبادل برقی قوں کو اس سے کم یا زیادہ مقدار کی برقی قوں میں تبدیل کرنا ضروری ہوتا ہے۔ یہ ایک ایسے آلہ کی مدد سے کیا جاتا ہے، جسے ٹرانسفارمر (Transformer) کہتے ہیں جو باہم امالہ کے اُصول پر مبنی ہے۔

ٹرانسفارمر ایک برقی آلہ ہے جو برقی طاقت کو ایک لچھے سے دوسرے لچھے میں مستقل کرتا ہے۔ یہ صرف متبادل رو (AC) کے لیے کام کرتا ہے۔ جس کے ابتدائی لچھے اور ثانوی لچھے میں تعداد مساوی ہوتی ہے۔ کچھ ٹرانسفرمر تفاوت قثہ کو گھٹاتے اور برقی رو کو بڑھاتے ہیں۔ یہ Step down کہلاتے ہیں۔ یہ دو لچھوں کے باہمی امالہ کو ملانے والے مشترکہ مقناطیسی نفوذ پر کام کرتا ہے۔ ٹرانسفارمر کو قواں زیادہ برقی رو کو زیادہ قوں کم برقی رو اور اس کے معکوس کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ یہ صرف متبادل رو AC کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔



شکل (14.7)

تشریالات: ٹرانسفارمر ایک مشترک قالب پر لپٹے ہوئے دو لچھوں پر مشتمل ہوتا ہے۔ قالب ایک بلند نفوذ پذیری رکھنے والے مادے جیسے نرم لوہے کا بنا ہوتا ہے۔ اس قالب کا کام یہ ہوتا ہے کہ وہ لچھے سے جڑے مقناطیسی نفوذ میں اضافہ کرتا ہے۔ لچھا 'P' جو اس وولٹیج کو جوڑا جاتا ہے جس کو تبدیل کرنا مقصود ہوتا ہے۔ ابتدائی (Primary) کہلاتا ہے اور دوسرا لچھا 'S' جس کے سروں کے درمیان تبادل وولٹیج حاصل کیا جاتا ہے، ثانوی (Secondary) کہلاتا ہے۔ قالب جس پر لچھے 'P' اور 'S' لپٹے ہوتے ہیں۔ عام طور پر مقناطیسی مادوں کی پتلی پرتوں سے بنا ہوتا ہے۔ ان پرتوں کو اوراق (Laminations) کہا جاتا ہے جن کو لیمینینگ کاغذ کی پتلی پرتوں کے ذریعہ برقی طور پر حاجز بنایا جاتا ہے۔ شکل (14.7) میں ایک ٹرانسفارمر کی ایک تراش عمودی اور دور (Circuit) کی روایتی علامت کو دکھا گیا ہے۔

emf کی مساوات (e.m.f Equation):

ابتدائی (Primary) لچھوں کے سروں پر ایک متبادل وولٹیج عائد کیا جاتا ہے تو یہ قالب میں تبدیل پذیر مقناطیسی نفوذ پیدا کرتا ہے۔ فیراڈے کے امالے کے کلیے کے مطابق ابتدائی لچھے میں ایک متبادل امالہ شدہ emf وجود میں آجاتا ہے۔ یہ امالہ شدہ emf ابتدائی لچھے میں عائد کردہ وولٹیج سے بڑی حد تک مساوی ہوتا ہے۔ فرض کیجیے کہ ابتدائی لچھے میں چکروں کی تعداد N اور نفوذ کی تبدیلی شرح $\frac{d\emptyset}{dt}$ ہے۔ تب

لینز(Lenz) کے کلیے کے مطابق ε_1 ہو گا۔

$$E_1 = -N_1 \frac{(d\emptyset)}{dt} \qquad (14.36)$$

ٹرانسفارمر سے گزرنے والے مقناطیسی نفوذ

$$\emptyset = \emptyset_m sin\omega t$$

$$\emptyset = \emptyset_m sin2\pi ft \quad Weber \qquad (14.37)$$

مساوات(14.37) کو(14.36) میں درج کرنے پر

$$e_1 = -N \frac{d\emptyset}{dt}$$

$$E_1 = -N \frac{d}{dt} (\emptyset_m sin2\pi ft) \qquad (14.38)$$

$$E_1 = -N\emptyset_3 2\pi f . cos2\pi ft$$

$$E_1 = +N_1\emptyset_m 2\pi f sin\left(2\pi ft - {}^{\pi}/_{2}\right) volt$$

مبداء کی برقی قوںemf اور نفوذ میں برقی رو کے لیے مساوات(14.38) سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ برقی رو، برقی قوں سے ${}^{\pi}/_{2}$ یا 90^0 دور سے یعنی قدم(log) ہے۔

تب
$$E_{max} = N_1\emptyset_m . 2\pi f \ vol$$

$$E_{rms} = \frac{E_{rms}}{\sqrt{2}} = E_1 = \frac{2\pi f . N_1 \emptyset_m}{\sqrt{2}}$$

$$E_1 = 4.44\emptyset_m N_1 f \ \ Vot \qquad (14.39)$$

اسی طرح

چوں کہ ثانوی لچھا بھی اسی مالب پر لپٹا ہوا ہے۔اس لیے سارا نفوذ اور متناظر نفوذ میں تبدیلیاں بھی ثانوی لچھے سے منسلک ہو جاتی ہے۔اگر ثانو لچھے میں چکروں کی تعداد N_2 ہے اور نفوذ میں تبدیلی کی شرح $\frac{d\emptyset}{dt}$ ہے، تب ثانوی لچھے میں امالی emf E_2 ہو گا۔

$$E_2 = -N_2 \frac{d\emptyset}{dt}$$

تب
$$E_2 = 4.44\emptyset_m N_2 f \ vot \qquad (14.40)$$

مساوات(14.39) اور مساوات(14.40) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{4.44 f N_1 \emptyset_m}{4.44 f N_2 \emptyset_m} = \frac{N_1}{N_2} = a \qquad (14.41)$$

مساوات(14.41) کو ٹرانسفارمر کی مساوات کہا جاتا ہے، جز'a' کو ٹرانسفارمر کی نسبت کہتے ہیں۔ عروجی(Stepup) ٹرانسفارمر میں $E_2 > E_1$ ہوتا ہے۔اس لیے N_2 کو لازمی N_1 سے بڑا ہونا چاہیے۔

جب کہ نزولی(Step down)ٹرانسفارمر میں $E_2 < E_1$ یعنی $N_2 < N_1$ ہوتا ہے لہٰذا
ثانوی لچھے میں امالی emf × ثانوی لچھے میں چکروں کی تعداد = ابتدائی لچھے میں امالی emf × ابتدائی لچھے میں چکروں کی تعداد (یا)
حاصل شدہ وولٹیج × ثانوی لچھے میں چکروں کی تعداد = عائد کردہ وولٹیج × ابتدائی لچھے میں چکروں کی تعداد

ایک کامل ٹرانسفارمروں ہوتا ہے جس کے ابتدائی اور ثانوی لچھوں میں ایسا کامل کپلنگ(Coupling) موجود ہوتا ہے کہ توانائی کا کوئی انتشار(dissipation) واقع نہیں ہوتا۔ اس لیے لچھوں کی مزاحمت صفر ہوتی ہے اور اس طرح قالب میں کوئی حرارت ضائع نہیں ہوتی۔ چوں کہ تقریب(Approximation) کی صورت میں کوئی جملہ زیادہ واقع نہیں ہوتا۔ لہٰذا عائد کردہ اور حاصل شدہ طاقتوں کو لازمی طور پر مساوی ہونا چاہیے۔ یعنی

$$\varepsilon_2 i_2 = \varepsilon_1 i_1 \qquad (14.42)$$

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1} \qquad (14.43)$$

ایک عروجی ٹرانسفارمر میں ثانوی لچھے کے مقابلے میں ابتدائی لچھا زیادہ طاقتور برقی رو کا حاصل ہوتا ہے۔ جب کہ ایک نزولی ٹرانسفارمر میں ابتدائی لچھے کے مقابلے میں ثانوی لچھا طاقتور برقی رو رکھتا ہے۔

عملی ٹرانسفارمر میں حاصل شدہ طاقت کے عائد کردہ طاقت سے ہمیشہ کم ہوتی ہے۔ کیوں کہ ڈیزائین وغیرہ میں نقائص کی وجہ سے توانائی کا نقصان واقع ہوتا ہے۔ اس کی مندرجہ ذیل وجوہات ہیں۔

i. نفوذ کا رسنا(Flux Leakage): کچھ نہ کچھ نفوذ ہمیشہ رستا ہے، یعنی کہ ابتدائی کا پورا نفوذ ثانوی سے نہیں گزرتا۔ اس کی وجہ قالب کا خراب ڈیزائن یا قالب میں خالی جگہوں میں بھری ہوا(air gap) ہو سکتی ہے۔ ابتدائی اور ثانوی لچھے کو ایک دوسرے کے اوپر لپیٹ کر اسے کم کیا جا سکتا ہے۔

ii. لپیٹوں کی مزاحمت: لپیٹوں میں استعمال ہوئے تاروں کی کچھ مزاحمت ضرور ہوتی ہے اور اس لیے تاروں میں پیدا ہوئی حرارت I^2R کی وجہ سے کچھ توانائی ضرور ضائع ہوتی ہے۔ اعلیٰ برقی رو اور کم برقی قوں کی لپیٹوں میں، موٹے تار کو استعمال کر کے اسے کم کیا جا سکتا ہے۔

iii. گردابی رو: متبادل مقناطیسی مکس لوہے کے قالب میں گردابی رو کا امالہ کرتا ہے اور حرارت پیدا کرتا ہے۔ ایک ورقہ دار قالب استعمال کر کے اس اثر کو کم کیا جا سکتا ہے۔

iv. پسماندگی(Hysteresis): قالب کا مقیانا، متبادل مقناطیسی میدان کی وجہ سے بار بار الٹا ہوتا ہے۔ اس کے نتیجے میں قالب میں صرف ہونے والی توانائی حرارت کی شکل میں ظاہر ہوتی ہے اور اسے کم ترین رکھنے کے لیے ایسا مقناطیسی مادہ استعمال کیا جا سکتا ہے جس کا پسماندگی ریاں کم ہو۔

برقی توانائی کی بڑے پیمانے پر ترسیل اور لمبے فاصلوں پر تقسیم ٹرانسفارمر کے استعمال سے کی جاتی ہے۔ جنریٹر سے حاصل ہوئے قوائی

مخرجہ کو اسٹیپ آپ کیا جاتا ہے (تا کہ برقی رو کم ہو جائے اور i^2R زیاں کم ہو جائے) پھر اسے لمبی دوریوں پر صارفین کے نزدیک علاقے کے تحت اسٹیشن تک ترسیل کیا جاتا ہے۔ یہاں برقی قوں کو اسٹیپ ڈاؤن کیا جاتا ہے۔ اسے تقسیم کرنے والے تحت اسٹیشنوں اور بجلی کے کھمبوں پر مزید اسٹیپ ڈاؤن کیا جاتا ہے اور اس رخ 240V سپلائی ہمارے گھروں تک پہنچتی ہے۔

متبادل پیمانے پر استعمال کیے جانے والے بڑے ٹرانسفارمروں کی استعداد 98.6 ہوتی ہے۔ جب کہ چھوٹے ٹرانسفارمروں کی استعداد تقریباً 90 فیصد ہوتی ہے۔

14.8 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

ایک لچھے میں 5A کی برقی رو $10^2 sec$ میں بڑھ کر 10A ہو جاتی ہے جس کی وجہ سے دوسرے لچھے پر 50mV امالہ محرکہ قوت بنتی ہے ان کا باہمی امالہ معلوم کرو؟

حل:

$$dt = 10^{-2}sec \quad di = (10-5) = 5A$$
$$emf(\varepsilon) = 50mv = 50\times10^{-3}volt: m=?$$
$$\varepsilon = \frac{Mdi}{dt}$$
$$M = {\varepsilon}\Big/{\frac{di}{dt}} = 50\times10^{-3}\times\frac{10^{-2}}{5}$$
$$M = 10^{-4}H = 100\mu H$$

حل شدہ مثال2

ایک کامل ٹرانسفارمر کے چکروں کی نسبت 2 ہے۔ یعنی ایک emf،18 Volts والی متبادل رو اس کے ابتدائی لچھے پر عائد کی گئی ہے۔ اس کے ثانوی کے سروں پر ظاہر ہونے والی emf یا وولٹیج کو معلوم کروں۔

حل:

$$\varepsilon_2 = \frac{N_2}{N_1}\varepsilon_1$$
$$\varepsilon_2 = 2\times10 = 20V$$

حل شدہ مثال3

ایک ٹرانسفرمر کی نسبت 10:1 ہے۔ اگر ابتدائی قوں 440V ہے تب شاونی emf معلوم کرو۔ مزید یہ کہ ثانوی برقی رو 100A کی ضرورت ہو تب ابتدائی برقی رو کتنی ہو گی فرض کرو کہ ٹرانسفرمر ایک تمثیلی ہے۔

حل: $\frac{N_2}{N_1} = \frac{10}{1}, E_1 = 440V, E_2 = ?$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

$$E_2 = E_1\left(\frac{N_2}{N_1}\right) = 440\left(\frac{10}{1}\right) = 4400V$$

تمثیلی ٹرانسفر مر کے لیے

$$E_1 I_1 = E_2 I_2 \quad (\because I_2 = 100A)$$

$$440 \times I_1 = 4400 \times 100 \Longrightarrow I_1 = 1000A$$

حل شدہ مثال 4

5cm نصف قطر والے تار کا ایک حلقہ 100amp برقی رو کا حامل ہے۔اس کی توانائی کی کثافت کتنی ہو گی۔

حل:

$$U_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \ \& \ B = \frac{\mu_0 i}{2R}$$

$$U_B = \frac{1}{2}\frac{{\mu_0}^2 i^2}{4R^2}$$

$$U_B = \frac{1.26\times10^{-6}\times(100)^2\times10^4}{8\times5\times5}$$

$$U_B = 0.63\, Joule\, /\, m^3$$

14.9 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- ایک لچھے میں تبدیل ہوتی ہوئی برقی رو ایک نزدیک رکھے ہوئے لچھے میں ایک برقی قوت باہمی نفوذ کر سکتی ہے۔ یہ رشتہ دیا جاتا ہے $\varepsilon = -M\frac{di}{dt}$ جہاں $M =$ لچھے کی باہمی امالیت کہلاتی ہے۔
- برقی بھرنوں سے پیدا ہونے والے ایک برقی سکونی میدان میں ذخیرہ شدہ توانائی ہو گی۔ $U_B = \frac{1}{2}Li^2$
اور ایک مقناطیسی میدان میں توانائی کی کثافت ہو گی $U_B = \frac{\frac{1}{2}Li^2}{lA}$
- ٹرانسفر مر باہمی امالہ کے اصول پر کام کرتا ہے۔ایک تمثیلی ٹرانسفار مر کے لیے ابتدائی گھیرے میں طاقت ثانوی گھیرے کی طاقت کے مساوی ہو گی۔
- ابتدائی لچھے کو ایک AC مبداء سے جوڑ دیا جائے تو ابتدائی برقی قوۃ اور ثانوی برقی قوۃ میں رشتہ ہے۔ $V_2 = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)V_1$
اور ابتدائی برقی رو اور ثانوی برقی رو میں رشتہ ہے۔ $I_2 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)I_1$
- اگر ثانوی لچھا میں ابتدائی لچھا سے زیادہ چکریں ہوں تو قوۃ عروجی (اسٹیپ اپ) ہو جاتی ہے اس قسم کی ترتیب کو ایک عروجی ٹرانسفار مر کہتے ہیں۔اگر ثانوی لچھا میں ابتدائی لچھا سے کم چکریں ہوں تو ہمیں نزولی (اسٹیپ ڈاؤن) ٹرانسفار مر کہلاتا ہے۔

14.10 کلیدی الفاظ (Keywords)

- **باہمی امالیت** : دو لچھوں کی باہمی امالیت سے مراد ایک لچھے کی مقناطیسی میدان کے ذریعے پیدا ہونے والی امالی برقی قوت محرکہ

دوسرے لچھے میں برقی رواور وولٹیج میں تبدیلی کی مخالفت کرتی ہے اس مظہر کو باہمی امالیت کہتے ہیں۔

- **باہمی امالیت کی شرح** : یہ برقی دور سے منسلک نفوذ ہے جو دوسرے برقی دور میں برقی رو کے بہنے کے سبب ہوتا ہے۔
- **عروجی(اسٹیپ اپ)** : ثانوی لچھا میں ابتدائی لچھا سے زیادہ چکر ہوں یعنی $(N_2 > N_1)$
- **نزولی(اسٹیپ ڈآؤن):** ثانوی لچھا میں ابتدائی لچھا سے کم چکر ہوں یعنی $N_1 > N_2$

14.11 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

14.11.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. باہمی امالہ کی تعریف کیجیے ؟
2. باہمی امالیت کی بین الاقوامی اکائی .... ہے۔
3. ٹرانسفرمر کے مغز کو غیر موصلی پرت کیوں لگادی جاتی ہے۔
4. کس اُصول پر ٹرانسفرمر کام کرتا ہے۔
5. کچھ ٹرانسفرمر تفاوت قتہ کو گھٹاتے اور برقی رو کو بڑھاتے ہیں تو۔۔۔۔۔۔۔۔ کہتے ہیں۔
6. باہمی امالے کی شرح M=۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔
7. امالیت کی اکائی۔۔۔۔۔۔۔۔۔ہو گی۔

Volt –sec (d) Henry (c) amp (b) volt (a)

8. ہنری۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔ کی اکائی ہے۔
9. باہمی امالیت کو آپ کیا سمجھتے ہیں؟

14.11.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. ایک مقناطیسی میدان میں موجود توانائی کے لیے ایک ضابطہ اخذ کیجیے۔
2. دو طویل ہم محور پیچواں کے باہمی امالیت کی مساوات اخذ کرو۔
3. باہمی امالہ کی شرح کی تعریف کرو۔
4. ٹرانسفارمر کا اُصول کیا ہے؟اس کی کارکردگی کو بیان کرنے کے لیے ضروری نکات لکھو۔

14.11.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. مقناطیسی میدان میں ذخیرہ شدہ توانائی کے لیے مساوات کو اخذ کیجیے اور کثافتِ توانائی کے لیے مساوات کی تخریج کیجیے۔

2. باہمی امالیت کو بیان کیجیے۔دو(سولینائیڈ) پیچواوں کے لیے باہمی امالیت کی مساوات کو اخذ کیجیے ۔
3. ٹرانسفارمر کس اُصول پر کام کرتا ہے۔موزوں نظریہ کے ساتھ ٹرانسفارمر کی کارکردگی بیان کرو۔

14.11.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. ایک ٹرانسفرمر کے ابتدائی لچھے میں 10 تار ہیں اور یہ متبادل مبداء کے 100V کو 1000V میں تبدیل کرتا ہے اس کے ثانوی لچھے میں کتنے تار ہیں۔
2. ایک ٹرانسفارمر کے لچھوں کا باہمی امالہ 5H ہے ابتدائی لچھے سے گزرنے والی برقی رو sec 10^{-4} کے عرصے میں صفر ہونے جانے پر ثانوی لچھے میں 20,000V کی امالی قوت محرکہ بنتی ہے۔ابتدائی لچھے میں کتنی برقی رو گزر رہی تھی۔
3. ایک Step Down ٹرانسفارمر میں ابتدائی لچھہ میں 1100V ہے ٹرانسفرمر کی نسبت 5:1 اگر ابتدائی کچھ سے 10A برقی رو گزر رہی ہو تب ثانوی لچھہ کا قواں اور برقی رو معلوم کرو۔یہ مان لیا گیا ہے کہ ٹرانسفرمر تمثیل ہے۔
4. ایک کامل ٹرانسفارمر کی باہمی امالیت کتنی ہوگی۔اگر اس کے ابتدائی لچھے پر ایک 60Hz والی 2amp برقی رو عائد کرنے سے اس کے ثانوی لچھے کے سروں پر 6VH کے rms کا امالہ ہوتا ہو۔(یہاں نسبت یکساں ہے)۔

14.12 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Bleaney, B I, and B Bleaney. Electricity and Magnetism. Oxford: Oxford University Press, 2013.
2. Duffin, W J. Electricity and Magnetism. Cottingham: W.J. Duffin, 2001.
3. Gaur, R.K. &Gupta, S.L.Engineering Physics.Dhanpat Rai Publication.
4. Peck, Edson R. Electricity and Magnetism. , 2013.
5. Plonsey.R&Collin.R.E.Principles and Application of Electromagnetic Field. Tata Mc Graw Hill Publication. New Delhi.
6. Purcell, Edward M, and David J. Morin. Electricity and Magnetism. , 2013.
7. Resnic.R&Halliday.D.Physics Part-I&Part-II.Wiley Eastern Pvt.Ltd.New Delhi.
8. Resnick, Robert, David Halliday, and Kenneth S. Krane. Physics. New York: Wiley, 2002.
9. Schuh, Mari C. Magnetism. Minneapolis, MN: Bellwether Media, 2008.

اکائی 15۔ مکس ویل کی مساواتیں

(Maxwell's Equations)

اکائی کے اجزا

15.0 تمہید (Introduction)

سائینسدانوں کو برقی اور مقناطیسی میدانوں کے وجود کے بارے میں معلومات 20 صدی کے وسط تک حاصل ہو چکی تھیں۔ حقیقت تو یہ ہے کہ برقی مقناطیسی کو اس وقت فیراڈے (Faraday) کے پیش کردہ اس نئے نظریے کو بہت سارے سائنسدانوں نے شک کی نظر سے دیکھا تھا۔ اس سے قبل میدانوں کو برقی اور مقناطیسی عمل کی وجہ سے قوتوں کی ترتیبوں کو سمجھنے کے ایک سہولت بخش ذریعہ کے طور پر دیکھا جاتا تھا۔ لیکن فیراڈے کے لیے مقناطیسی میدان ہی اصل ذریعہ تھا جس سے مقناطیسی قوت لگائی جاتی تھی۔

امپیر (Ampere) کے تحقیقاتی کام (1820-1825) کی بنیاد پر یہ سمجھا جا رہا ہے کہ برقی رو لے جانے والا ایک تار دوسرے برقی رو لے جانے والے تار پر ایک قوت لگاتا ہے اور اس قوت لگانے کے لیے کسی درمیانی ذریعہ کو شمار میں نہیں لیا گیا۔ یہ ایک فاصلے سے عمل (Action at a Distance) کا نظریہ تھا جس کے بعد منطقی طور پر نیوٹن کا آفاق کلیہ تجاذبی وجود میں آیا۔ نیوٹن کے کلیہ نے ایک فاصلے سے عمل کو فرض کیا۔ کیوں کہ اس کلیہ نے تجاذبی قوت کی ترسیلہ کے لیے کسی ذریعے کو ضروری نہیں سمجھا۔ بہر حال فیراڈے نے برقی اور مقناطیسی میدانوں کے طبعی حقیقت کو سمجھا (Conceived) اور اس کے لیے مکس ویل نے درمیانی تعلق کو معلوم کیا۔

برقی اور مقناطیسی کے بنیادی کلیہ (Basic Laws of Electricity and Magnetism)

- برق اور مقناطیس کے بنیادی کلیہ یہ ہیں۔ $\oint E.ds = \frac{q}{\varepsilon_0}$
- گاؤس (Gauss) کا کلیے کے مطابق کسی بند سطح پر برقی نفوذ اس سطح کے اندر گھرے ہوئے برقی بار کا $\frac{1}{\varepsilon_0}$ گنا ہوتا ہے۔

$$\oint B.ds = 0$$

$$\oint B.dl = \mu_0 i$$

- ایمپیئر کا کلیہ برقی بردار تار کے اطراف سے گھیرے ہوئے بند راستے پر مقناطیسی امالی میدان کا اوسط کسی مقناطیسی اجازیت اور برقی رو کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔ $\oint E.dl = \frac{-d\phi_B}{dt}$

فیراڈے کے امالہ کے کلیات سے اخذ کیا جا سکتا ہے کہ ایک لچھے میں امالی برقی قوت محرکہ اس لچھے سے گزر رہے فلکس کی تبدیلی کی شرح سے راست متناسب ہوتی ہے۔

15.1 مقاصد (Objectives)

آپ کو اس مظہر کو سمجھنے میں مدد دینے کے لیے یہ اکائی:

- نقل مکانی رو (Displacement Current) کے سلسلہ میں مکس ویل کے کارناموں کو پیش کرتی ہے۔
- برقی مقناطیسی (Electromagnetism) کی بنیاد پر اخذ کردہ کلیوں کا جائزہ لیتی ہے۔
- بقائے بار کا کلیہ۔ استمراری مساوات کو بیان کرتی ہے ۔
- تفرق شکل میں مکس ویل کے مساواتیں کو حاصل کرنا ہے ۔

▪ ہموار مستوی موجوں کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔

15.2 بقائے بار کا کلیہ۔استمراری مساوات

(Charge Conservation Law – Continuity Equation)

بقائے بار کے کلیہ کے مطابق کسی نظام کا کل برقی بار مستقل رہتا ہے۔یعنی بار ہی نہ ہی پید ہوتا ہے اور نہ فناء ہوتا ہے اور وہ مساوات جو اس کلیہ کی وضاحت کرتی ہے استمراری مساوات(Continuity Equation) کہلاتی ہے۔

15.2.1 بقائے بار کے کلیہ کی تکمیلی شکل(Integral form of Charge Conservation Law)

فرض کرو کہ کسی خاص حجم V میں بار اسی وقت تبدیل ہوتا ہے جب اس کے اندر یا اس سے باہر جاتا ہے۔یعنی حجم V بند حدود S پر محیط ہیں۔

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{v} \rho dv = -\oint j.ds \qquad (15.1)$$

جہاں ρ بار کی کثافت ہے۔$(Q = \rho dv)$ اور j رو کی کثافت ہے یعنی برقی رو فی اکائی ترش عمودی کے رقبہ ہے۔

حسب بالا نسب میں بائیں طرف کی قدریں(LHS) حجم میں ہونے والے بار کے تغیر کی شرح کو بتلاتے ہیں جب کہ دائیں طرف کی قدریں(RHS) حجم کی سطح کہ حدود سے گزرنے والے رو کی طاقت کو بتلاتا ہے۔ منفی علامت حجم میں مثبت بار کے کم ہونے کو ظاہر کرتی ہے۔جب کہ رو کی کثافت کی سمت حجم سے باہر کی جانب ہے۔اس سے سمجھ آتا ہے کہ بند سطح سے بیرونی جانب عمود مثبت ہو گا۔لہٰذا حسب بالا نسب میں سمتیہ S سیدھا سطح کے بیرونی عمود کے ساتھ ہو گا۔

15.2.2 کلیہ بقائے بار کی تفریقی شکل (Differential form of Charge Conservation Law)

مساوات(15.1) میں حجم V اور سطحی رقبہ S وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتا ہے۔اس وجہ سے مساوات(15.1) کے(L.H.S) بائیں طرف کی قدر میں مشتق زمانی(Time Derivative) کو تکمیلہ(Integral) میں شامل کر سکتے ہیں۔دوسری طرف گاؤس کے کلیہ کے مطابق مساوات کے دائیں طرف(R.H.S) کو تکملہ حجمی(Volume Integral) میں تبدیل کر سکتے ہیں۔

$$\therefore \frac{\partial}{\partial t}\int_{v} \rho dv = \int_{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \qquad (15.2)$$

اور

$$\oint j.ds = \int_{v} divjdv \qquad (15.3)$$

مساوات(15.1) میں درج کرنے پر

$$\int_{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = -\int_{v} divjdv \qquad (15.4)$$

یا

$$\int_v \left[\frac{\partial p}{\partial t} + divj\right] dv = 0 \quad (15.5)$$

مساوات ہر حجم کے لیے معتبر و درست ہوتی ہے۔تضاد(Contradiction)کے ذریعہ تکمیلہ(Integral)صفر حاصل کر سکتے ہیں۔اگر کسی نقطہ پر تکمل(Integral)صفر کے مساوی نہیں ہے۔تب ہم اس نقطہ کے اطراف چھوٹا سا حجم V لے سکتے ہیں جس میں تکمیل(Integral) کی علامت تبدیل نہیں ہوتی ہے۔ بہر کیف یہ مساوات(15.5) کا تضاد (Contradiction) ہے۔ نتیجتاً تکمل(Integral)ہر نقطہ پر صفر کے مساوی ہو گا۔

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + divj = 0 \quad (15.6)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla . j = 0 \quad (15.7)$$

یہ کلیہ بقائے بار کی تفرقی شکل ہے اور اسے استمرازی مساوات(Continuity Equation) بھی کہتے ہیں۔

15.3 نقل رو (Displacement Current)

ہم جانتے ہیں کے موصل میں برقی رو مقناطیسی میدان پیدا کرتی ہے مکس ویل(Maxwell)نے ثابت کیا کہ خلاء میں یا ذو برقیہ (Dielectric) میں برقی میدان کی تبدیلی مقناطیسی میدان پیدا ہوتا ہے۔ برقی میدان میں تبدیلی مساوی ہوتی ہے برقی رو کے جو برقی میدان میں بہتی ہے اور جو ایسا ہی مقناطیسی دائرپیدا کرتی ہے جیسا کے عام ایصابی رو(Conduction Current)پیدا کرتی ہے اسے نقل رو(Displacement Current)کہتے ہیں۔ہم ایمپیر کے کلیہ میں تبدیلی کے ذریعہ نقل رو کو دیکھیں گے۔

ایمپیر کے کلیہ کو سمتیہ شکل میں اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\vec{\nabla} \times B = \mu_0 j \quad (15.8)$$

جہاں j برقی رو کی کثافت ہے۔

اس مساوات کا انفراج(Divergence) لینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla} \times B\right) = div\ curlB = div\mu_0 j = \mu_0 divj$$

ہمیں معلوم ہے کہ سمتیہ کے کرل کا انفراج(Divergence)ہمیشہ صفر ہوتا ہے۔لہٰذا

$$\therefore \vec{\nabla}.(\mu_0 j) = 0\ and\ divj = 0 \quad (15.9)$$

اس سے ہمیں معلوم ہو رہا ہے کہ کسی بند سطح سے باہر برقی رو کا جملہ نفوذ صفر ہوتا ہے۔ پر اس مساوات کا استمراری مساوات کے ساتھ تضاد(Contradiction)ہے۔جو بتلاتی ہے کہ

$$divj + \frac{\partial \rho}{dt} = 0 \quad (15.10)$$

جہاں ρ بار کی کثافت کو بیان کرتا ہے۔

مکس ویل (Maxwell) کہتا ہے کہ مساوات (15.10) نامکمل ہے مکس ویل کہتا ہے کہ ایمپیر کا کلیہ جو $\vec{\nabla} \times B = \mu j$ قائم حالت کے لیے درست ہے اور جہاں پر بار کی کثافت وقت کے لحاظ سے تبدیل ہوتی ہے وہاں پر یہ ناکافی ہے۔ یعنی $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ صفر نہیں ہوتا ہے۔ مکس ویل ایمپیر کے کلیہ میں تبدیلی کرتا ہے یہ اس طرح قائم (Standing) اور وقت کے لحاظ سے تبدیل ہونے والی دونوں حالتوں کے لیے درست ثابت ہوتا ہے۔ یہ کہتا ہے کہ مساوات (15.8) میں j کے ساتھ ضرور کسی چیز کا اضافہ کرنا چاہیے۔ اس طرح مساوات کے دونوں جانب انفراج (Divergence) ایکسا ہوگا۔

$$CurlB = \mu_0 j(\text{کچھ چیز})$$

اس کچھ چیز کے لیے مکس ویل مفروضہ قائم کرتا ہے کہ جس طرح (فیراڈے کا امالی کلیہ) مقناطیسی میدان کی تبدیلی سے برقی میدان پیدا ہوتا ہے اسی طرح برقی میدان کی تبدیلی سے مقناطیسی میدان پیدا ہوتا ہے چنانچہ برقی میدان میں تبدیلی دراصل برقی رو کے مساوی ہوتی ہے جو جب تک بہتی ہے جب تک کہ برقی میدان کی تبدیلی سے مقناطیسی میدان پیدا ہوتا ہے۔ اسے نقل رو (Displacement Current) کہتے ہیں۔

گاؤس کے کلیہ کو سمتیہ (Vector) کی شکل میں اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\vec{\nabla}.D = \rho$$

t کے لحاظ سے تفرق کرنے پر $\vec{\nabla}.\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$

دونوں جانب $\vec{\nabla}.j$ لگانے پر

$$\vec{\nabla}.j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla}.j + \vec{\nabla}.\frac{\partial D}{\partial t} \qquad (15.11)$$

$$= \vec{\nabla}.\left[j + \frac{\partial D}{\partial t}\right] \qquad (15.12)$$

استمراری مساوات کے مطابق

$$\vec{\nabla}.j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla}.\left[j + \frac{\partial D}{\partial t}\right] = 0 \qquad (15.13)$$

چنانچہ $\vec{\nabla}.j = 0$ برائے قائم رو (Steady Current)

(Steady Current) قائم رو DC راست رو کی ایک قسم ہے جس کی حدت وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتی ہے)

اور (قائم رو) $\vec{\nabla}.j = 0$

(ہر جگہ کے لیے)

$$\vec{\nabla}.\left[j + \frac{\partial D}{\partial t}\right] = 0 \qquad (15.14)$$

یعنی قائم رو اور رو جو وقت کے ساتھ تبدیل ہوتی ہے ان کے میدانوں کے لیے

مکس ویل نے ایمپیر کے کلیہ میں J کو اس طرح تبدیل کیا۔

$$\left(j + \frac{\partial D}{\partial t}\right)$$

ایمپیر کا کلیہ اس طرح ہو گا۔

$$Curl\ B = \mu_0\left(j + \frac{\partial D}{\partial t}\right) \qquad (15.15)$$

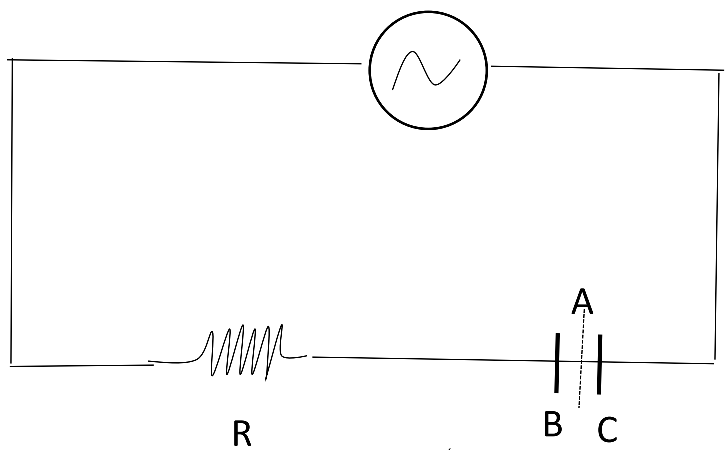
جہاں $\frac{\partial D}{\partial t}$ کو نقل رو کی کثافت کہتے ہیں کیوں کہ یہ جب نقل برقی D جب وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے یہ بڑھتا ہے۔

اس طرح مساوات (15.15) کو ہم اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$Curl\ B = \mu_0\left(j + \varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}\right) \qquad (15.16)$$

15.4 نقل رو اور ایصال رو (Conduction Current and Displacement Current)

طبعی تشریح: فرض کرو کہ ایک متوازی تختیوں والا مکثفہ متبادل جنریٹر سے ہم سلسلہ مزاحمت سے جڑا ہوا ہے۔ جس طرح ہم شکل میں دیکھ سکتے ہیں۔



شکل (15.1)

ہمیں معلوم ہے کہ ہم سلسلہ برقی دور میں تمام تراش عمودی پر برقی رو کی قدر یکساں ہوتی ہے ۔ برقی دور میں ایصالی رو (Conduction Current) جو برقی باروں کی وجہ سے ہے تمام تراشی عمودی پر یکساں ہوتی ہے سوائے مکثفہ (Capacitor) کے اندر موجود تمام ذو برقیہ (Dielectric) کے تراش عمودی کے (جیسے کہ A,B) ۔ ذو برقیہ ہوا ہے جس کی اجازت (Permitivitty) ہے۔ یہاں یہ کہنا بھی ضروری ہے کہ ذو برقیہ میں آزاد الکٹران بہتے ہیں اور دوسرے الکٹران پر قوت عائد کرتے ہیں

دوسری پلیٹ کی جانب ہے۔ پر دوسرے الفاظ میں مکثفہ (Capacitor) کے تختیوں کے درمیان برقی رو جاری نہیں رہتی ہے۔اس کے لیے مکس ویل نے (J.C. Maxwell)، مکس ویل نے (Displacement Current) نقلِ رو کو متعارف کروایا۔

فرض کرو کہ کسی خاص کسی لمحہ میں q مکثفہ (Capacitor) کی تختی کا برقی بار ہے اور ایصالی رو (Conduction Current) (i_c) برقی رو کے بہنے کی شرح ہے۔یعنی

$$i_c = \frac{dq}{dt} \qquad (15.17)$$

ذو برقیہ میں برقی نقل مکان D یہ ہوگا۔

$$D = \sigma = \frac{q}{A} \qquad (15.18)$$

جہاں σ سطح کے بار کی کثافت اور A پر تختی کا رقبہ ہے۔تب q=DA

q کی قدر کو مساوات (15.17) میں درج کرنے پر۔

$$i = \frac{d}{dt}(DA) = A\frac{dD}{dt} \qquad (15.19)$$

مکس ویل $A\left(\frac{dD}{dt}\right)$ کو ذو برقیہ کے اندر کی رو رکھتا ہے اور اسے نقل رو (Displacement Current) کہتے ہیں اور اسے J_d سے ظاہر کرتے ہیں۔اس وجہ سے

$$i_d = A\frac{dD}{dt} \qquad (15.20)$$

لہٰذا کثافت نقل رو ہو گی J_d جو ہو گی

$$J_d = \frac{dD}{dt} \qquad (15.21)$$

اور سمتیہ D ہو گا۔ $J_d = \frac{\partial D}{\partial t}$

چنانچہ لائن میں ذو برقیہ کے اندر نقل رو (Displacement Current) i_d جو ایصالی رو (Conduction Current) i_c کے مساوی ہو گا۔

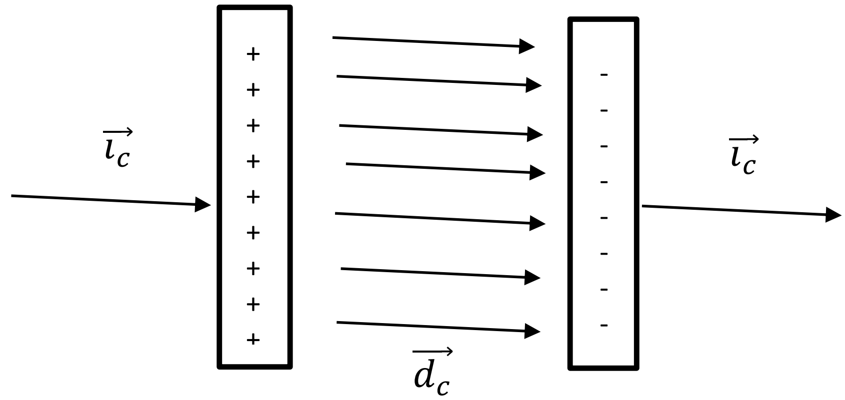
اہم نکات (Important Points):

i. ایصالی رو (Conduction Current) اور نقل رو (Displacement Current) کا تصور شکل (15.2) میں نظر آرہا ہے۔

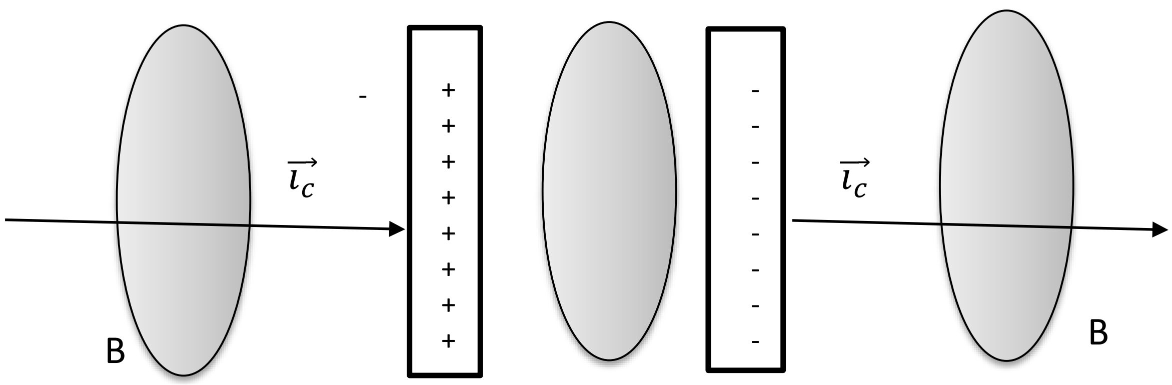
ii. مکثفہ میں ایک پلیٹ سے دوسری پلیٹ میں ایصالی رو (i_c) (Conductor Current Capacitor) موصل تاروں کے ذریعہ گزرتی ہے۔ مکس ویل (Maxwell) کہتا ہے کہ مکثفہ کے پلیٹوں کے درمیان برقی میدان جو بہتا ہے اس پر کی برقی رو کو نقل رو (Displacement Current) کہتے ہیں اسے i_d سے ظاہر کرتے ہیں یہ پلیٹوں کے درمیان جگہ کے آر پار بہتا

ہے۔

.iii نقل رو کی کثافت j_d مکثفہ سے براہِ راست گزرنے والی برقی رو کو ظاہر نہیں کرتا ہے۔ یہ صرف ایک پلیٹ سے دوسری پلیٹ کی جانب ظاہر ہونے والے برقی رو کی شرح ہوتی ہے۔



شکل(a)



شکل(b)

شکل(15.2)

.iv ایصالی رو(Conduction Current)اور نقل رو(Displacement Current)مساوی ہوتی ہیں یعنی

$$i_c = i_d$$

ایصالی رو کی طرح نقلِ رو بھی مقناطیسی میدان کا منبع ہے۔

.v اچھے موصلوں میں نقلِ رو ایصالی رو کے مقابلہ قابل نظر انداز ہوتی ہے۔

.vi نقل رو تب ہوتی ہے جب کہ برقی میدان E وقت کے لحاظ سے تبدیل ہوتا ہے۔یعنی نقل رو D وقت کے ساتھ تبدیل ہو رہا ہو۔ اگر مکثفہ مکمل چارج ہو تب پلیٹوں کے درمیان برقی میدان اپنی قائم قدر کو پہنچ گیا ہو تب dE/dt اور dD/dt صفر ہو گا۔

15.5 تفرقی شکل میں مکس ویل کے مساواتیں (Maxwell's Equations in Differential Form)

برقی اور مقناطیسی کے بنیادی کلیے کے ذریعے مکس ویل نے 1862ء میں چار مساواتیں کو معلوم کیا ہے۔ یہ مساوات ہی مکس ویل مساواتیں کہلاتے ہیں۔ تکمیلی شکل میں مکس ویل مساواتیں

$$\oint E.ds = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{15.22}$$

$$\oint B.ds = 0 \tag{15.23}$$

$$\oint E.dl = \frac{-\partial \emptyset_B}{\partial t} \tag{15.24}$$

$$\oint B.dl = \mu_0 \left(j + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) \tag{15.25}$$

تفرقی شکل میں مکس ویل مساواتیں کو مآخذ کثافت (ڈائیور جنس اور گردشی کثافتوں (کرل)) دونوں کے لیے عبادرت دونوں بنیادی میدانی ویکٹروں کے لیے ہیں۔

$$divE = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{15.26}$$

$$divB = 0 \tag{15.27}$$

$$CurlE = \frac{-\partial B}{\partial t} \tag{15.28}$$

$$CurlB = \mu_0 \left(j + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) \tag{15.29}$$

مساواتیں(15.26)تا(15.27) برقی مقناطیسی فطریے کی بنیادی مساواتیں ہیں جو مکس ویل کی مساواتیں کہلاتی ہیں۔ یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ مکس ویل کی مساواتوں کا اطلاق جب ایک ایسے متجانس(Homogeneous) واسطے پر کیا جاتا ہے تو یہ آسان اور متشاکل(Symmetrical) بن جاتی ہیں۔ جس میں کوئی بھرن اور کوئی مولیت(Conductivity) نہیں ہے۔

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{dE}{dt} \tag{15.30}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{d\vec{H}}{dt} \tag{15.31}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \tag{15.32}$$

$$\nabla \times \vec{H} = 0 \tag{15.33}$$

مشق(Derivations) :

مندرجہ ذیل کے تفرقی مساواتیں کو تکمیل مساواتیں سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

1. گاؤس کا برقی سے متعلق کلیہ

$$\oint E.ds = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (15.34)$$

اگر برقی بھرن کثافت ρ اور V حجم کی سطح پر چوٹا حجم کی مقدار dv پر غور کریں تب برقی بھرن کی مساوات

$$q = \int_v \rho dv \quad (15.35)$$

مساوات (15.34) اور (15.35) سے

$$\oint E.ds = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_v \rho dv \quad (15.36)$$

$$\oint \varepsilon_0 E.ds = \int_v \rho dv \quad (15.37)$$

$$(\therefore \in_0 E = D) \oint D.ds = \int_v \rho dv \quad (15.38)$$

ڈائیور جینس تھیورم کو استعمال کرنے پر

$$\oint A.ds = \int_V (\vec{\nabla}.A) dv \quad (15.39)$$

$$\oint D.ds = \int_v (\vec{\nabla}.D) dv \quad (15.40)$$

$$\int_v \vec{\nabla}.D dv = \int_v \rho dv \quad (15.41)$$

یا $\vec{\nabla}.D = \rho$ (15.42)

یا $\vec{\nabla}.E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (15.43)

$$divE = {}^{\rho}/_{\varepsilon_0} \quad (15.44)$$

یا $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (15.45)

2. گاؤس کا مقناطیسیت کا کلیہ $\oint B.ds = 0$

سطحی تکمیل سے حجم تکمیل میں بدلنا پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\oint_s B.ds = \int_v \vec{\nabla}.B dv \quad (15.46)$$

$$\int_v \vec{\nabla}.Bdv = 0 \tag{15.47}$$

جیساکہ حجم اختیاری(Arbitrary)ہے۔ تکمیل صفر ہو گا۔

$$\text{یا}\ \vec{\nabla}.B = 0 \tag{15.48}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \tag{15.49}$$

3. فیراڈے کاامالے(Induction)کاکلیہ

$$\oint E.dl = \frac{\partial \emptyset_B}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_s B.ds \tag{15.50}$$

$$= -\int_S \frac{\partial B}{\partial t}.ds \tag{15.51}$$

اسٹوک تھیورم کے متعلق

$$\oint E.dl = \int_s (\vec{\nabla} \times E).ds \tag{15.52}$$

$$\therefore \int_s (\vec{\nabla} \times E).ds = -\int_s \frac{\partial B}{\partial t}.ds \tag{15.53}$$

جیساکہ یہ مساوات تمام سطحوں کے لیے درست ہے۔تب

$$\vec{\nabla} \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{15.54}$$

$$\text{یا}\ Curl\ E = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{15.55}$$

$$\text{یا}\ i\left[\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial E_z}\right] + j\left[\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right] + k\left[\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right] \tag{15.56}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\left[iB_x + jB_y + kB_z\right] \tag{15.57}$$

$$\therefore \left[\frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial Z}\right] = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \tag{15.58}$$

$$\left[\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right] = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \tag{15.59}$$

$$\left[\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right] = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \tag{15.60}$$

4. ایمپیر(Ampere)کا کلیہ $\oint B.dl = \mu_0 i$

اسٹوک تھیورم کو استعمال کرنے پر

$$\oint B.dl = \int_s (\vec{\nabla} \times B).ds \tag{15.61}$$

$$\int_s (\nabla \times B).ds = \mu_0 \int_s j.ds \tag{15.62}$$

یا $\vec{\nabla} \times B = \mu_0 j$ (15.63)

یا $\vec{\nabla} \times B = \mu_0 \left[j + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\right]$ (15.64)

$(j + \partial t)$ کی جگہ $j + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$ کو تبدیل کرنے پر ہمیں حاصل ہونے والی مساوات

$$\vec{\nabla} \times B = \mu_0 \left[j + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\right] \tag{15.65}$$

15.6 مکس ویل کی موجی مساوات (یا) برقی مقناطیسی موجوں کی مساوات

(Maxwell's Wave Equations (or) Equation of Electromagnetic Waves)

مکس ویل کی برقی مقناطیسی مساوات کو متجانس(Homogeneous)، ہم سمت(Isotropic)ذو برقیہ واسطہ (جس میں برقی خرمی اسپیس(Space) بھی شامل ہے جس کی اجازیت $\varepsilon = \varepsilon_0$ ہے)ذو برقیہ واسطہ برقی رو کے لیے لا متناہی مزاحمت فراہم کرتا ہے اور اس موصلیت صفر ہوتی ہے۔یعنی j=0، متجانس ہم سمت مادہ میں بار کی حجمی تقسیم نہیں ہوتی ہے۔اس لیے بار کی کثافت ρ صفر ہوتی ہے۔لہٰذا

$$j = 0, \rho = 0, D = K\varepsilon_0, E = \varepsilon E, H = \mu H \qquad \text{اور}\ B = \mu_0 \mu_r H$$

لہذا ذو برقیہ کے لیے مکس ویل کی مساوات ہو گی:

$$\vec{\nabla}.E = 0 \tag{15.66}$$

$$\vec{\nabla}.B = 0 \tag{15.67}$$

$$\vec{\nabla} \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{15.68}$$

$$\vec{\nabla} \times B = \mu\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \tag{15.69}$$

a) ہمذو برقیہ واسطہ سے موج کی اشاعت کی مساوات کو حاصل کرنے کے لیے مساوات(15.68)اور(15.69)سے E کو حذف کرکے حاصل کر سکتے ہیں۔

مساوات(15.69)کا کرل(Curl)

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times B = \vec{\nabla} \times \mu\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} = \mu\varepsilon \left[\vec{\nabla} \times \frac{\partial E}{\partial t}\right]$$

(واسطہ میں یہ مستقل(Constant)ہوں گے ε اور $\therefore\ \mu$)

$$= \mu \in \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times E\right)$$

مساوات(15.67)سے $\therefore\ \vec{\nabla} \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$

$$= \mu \in \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial B}{\partial t}\right)$$

$$\therefore\ \vec{\nabla} \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$= -\mu \in \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

تب

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times B = -\mu \in \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \qquad (15.70)$$

ہم جانتے ہیں کہ $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times B = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.B - \nabla^2 B\right)$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times B = \vec{\nabla}(0) - \nabla^2 B$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times B = -\nabla^2 B \qquad (15.71)$$

$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times B$ قیمت کو مساوات(15.70)کو(15.71)میں درج کرنے پر

$$-\nabla^2 B = -\mu \in \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 B = \mu \in \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \qquad (15.72)$$

اسی طرح مساوات(15.68)کے ذریعہ ہم ہاسل کر سکتے ہے

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times E = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial B}{\partial t}\right)$$

دو جانب کرل کو لیے نے پر(15.68)مساوات

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times E = \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times E\right)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times E = -\mu \in \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \qquad (15.73)$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times E = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}. E - \nabla^2 E\right)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times E = \vec{\nabla}(0) - \nabla^2 E \qquad (15.74)$$

$$-\nabla^2 E = -\mu \in \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 E = \mu \in \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \qquad (15.75)$$

رفتارِ موج(Wave Velocity)

مساوات (15.72) اور (15.75) برقی میدان Eاور مقناطیسی میدان B کے زماں و مکاں کے تغیر کو بتلاتی ہیں۔ انہیں Bاور E کی موجی مساوات کہتے ہیں۔ یہ مساواتیں موجی حرکت کی تفرقی مساواتوں کی عمومی شکل ہیں۔ عمومی موجی حرکت کی مساوات کو اس طرح ظاہر کرتے ہیں۔

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \qquad (15.76)$$

جہاں V موج کی رفتار اور y اس کا حیطہ(Amplitude) ہے۔ مساوات(15.75)اور(15.76)کا تقابل کرنے پر پتہ چلتا ہے کہ اور μاور ε کا ایک ہی مفہوم ہیں۔ جیسا کہ $(\frac{1}{N^2})$تب اس سے معلوم ہوتا ہے کہ Bاور E میں تغیر ہو رہا ہے اور متجانس و ہم سمتی واسطے میں اس کی اشاعت ہو رہی ہے جس کی رفتار ہے۔

$$\frac{1}{V^2} = \mu\varepsilon \qquad (15.77)$$

$$V^2 = \frac{1}{\mu\varepsilon} \qquad (15.78)$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \qquad (15.79)$$

جہاں μاور ε واسطہ کی اجازیت (Permeability)اور Permittivity ہے اس لیے برقی سمتیہ Eاور مقناطیسی میدانی

سمتیہB کی اشاعت فضا میں ہو رہی ہے۔ موجی مساوات کے لحاظ سے رفتار $\frac{1}{\sqrt{(\mu_0\varepsilon_0)}}$۔ یہ موجیں برقی مقناطیسی کہلاتی ہیں۔

$$V = \frac{1}{\sqrt{(\mu_0\varepsilon_0)}}$$

$$\mu_0 = 4 \times 10^{-7}$$

$$\frac{1}{4}\pi\varepsilon_0 = 9 \times 10^9 \quad \text{یا} \quad \varepsilon_0 = {}^1/_4\,\pi \times 9 \times 10^9$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{(4\pi\times10^{-7})\times({}^1/_4\pi 9\times10^9)}} = \sqrt{(9 \times 10^{16})} = 3 \times 10^8\, {}^m/_{sec}$$

اس طرح Eاور H کے تغیر کی اشاعت کی رفتار روشنی کی رفتار کے مساوی ہوتی ہے۔

مساوات(15.72)اور(15.75)بتلاتی ہے کہ موجی اشاعت سے ابعادی ہوتی ہے اور اس موج میں مقناطیسی میدان اور برقی میدان کا دوری تغیر ہوتا رہتا ہے۔ اس لیے اس برقی مقناطیسی موج کہتے ہیں مکس ویل اس موج کے بارے میں کہتا ہے کہ برقی مقناطیسی موج کی اشاعت سے ابعادی ہوتی ہے اور ثابت کیا کہ یہ موجیں روشنی کی رفتار سے سفر کرتی ہیں۔

ڈائی الکٹرک(ذوبرق)کاانعطاف نما (Refraction Index of Dielectric)

(ڈالکٹرک)ذوبرقی واسطہ(غیر موصل واسطے)میں برقی مقناطیسی موج کی رفتار V ہو گی۔ $V = \frac{1}{\sqrt{(\mu\varepsilon)}}$

جہاں μ مادہ کی(Permeability)اجازیت اور(Permittivity) ε ہے اسی طرح خلاء میں برقی مقناطیسی موج کی رفتار یہ ہو گی۔

$$C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

اور n مادہ کا انطاف نما ہو گا۔ $n = \frac{C}{V} = \frac{\sqrt{{}^1/_{\mu_0\varepsilon_0}}}{\sqrt{{}^1/_{\mu\varepsilon}}} = \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{\sqrt{(\mu_0\varepsilon_0)}}$

زیاتر ذوبرقیہ کے لیے $\mu = \mu_0$ ہوتا ہے تب

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} = \sqrt{K}$$

جہاں K مادہ کا ذوبرقیہ مستقل ہے۔ اس طرح مادہ کا انعطاف نما مساوی ہوتا ہے۔ ذوبرقیہ مستقل کے مربع کے مساوی ہوتا ہے۔

واسطے کے انعطاف نما کے لحاظ سے ذوبرقیہ واسطے میں برقی مقناطیسی موجوں کی رفتار

Velocity of Electromagnetic waves in Dielectric medium in term of Refractive) (Index of the Medium

خلاء میں برقی مقناطیسی موجوں کی رفتار $C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$

ذو برقی واسطے میں $C_m = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

جہاں $\mu = \mu_r$ اور $\varepsilon = k\varepsilon_0$

$$C_m = \frac{1}{\sqrt{(\mu_r\mu_0 K\varepsilon_0)}} = \frac{1}{\sqrt{(\mu_r k)}\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\mu_r K}} \times \frac{1}{1/C} = \frac{C}{\sqrt{\mu_r k}} = \frac{C}{n}$$

جہاں n واسطے کا انعطاف نما۔

15.7 ہموار مستوی موجیں (Uniform Plane Waves)

ہموار مستوی موجیں در اصل موجی مساوات کی خاص شکل ہے۔ جس کے لیے برقی میدان y اور z پر منحصر نہیں ہوتا اور یہ صرف x اور t کا تفاعل ہوتا ہے۔اس طرح کی موج کو ہموار مستوی موج (Uniform Plane Wave) کہتے ہیں۔ مستوی موج کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

E کے اجزا کے لحاظ سے

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \tag{15.74}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \tag{15.75}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x^2} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \tag{15.76}$$

ایسے علاقہ میں جہاں کثافت میں تبدیلی نہیں ہوتی یعنی $\rho = 0$ کے لیے

$$\vec{\nabla}.E = 0 \tag{15.77}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{15.78}$$

ایسی ہموار مستوی موج جس میں E کا انحصار Y اور Z پر نہیں ہوتا ہے۔اس کے لیے $\frac{\partial E_y}{\partial_y}$ اور $\frac{\partial E_z}{\partial_z} = 0$ ہوتا ہے۔ مستقل $= E_x$ یعنی

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \tag{15.79}$$

مساوات (15.79) بتلاتی ہے کہ x– سمت میں E_x میں تغیر نہیں ہوتا ہے اس لیے ہموار مستوی موج جس کی x– سمت میں اشاعت ہوتی ہے اس میں E کی اجزا نہیں یا E پر مشتمل حصہ x– سمت میں نہیں ہوتے ہے۔اسی طرح H یا B کے اجزا یا H یا B پر مشتمل حصہ

x شمت میں نہیں ہوتے ہے۔اس لیے ہمواری مستوی برقی مقناطیسی موجیں عرض موجیں ہوتی ہیں Eاور H کی سمت، سمتِ اشاعت کے عمودوار ہوتی ہیں۔

15.8 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال1

ایک برقی مقناطیسی موجی کی تعداد $f = 3.0mHz$ ہے۔یہ موجی خلاء کے اندر غیر مقناطیسی واسط میں مختاری (Permittivity) μ سے سفر کر رہی ہیں۔اضافہ موجی طول کو معلوم کیجیے۔

حل: رفتار

$$C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \Leftarrow \frac{C}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \vartheta \quad \text{اور} \quad \vartheta = f\lambda \quad \text{یا} \quad \lambda = {}^{\vartheta}/_{f}$$

$$\lambda^1 = \frac{1}{f}\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r}} \quad \text{اور} \quad \lambda = \frac{C}{f} = \frac{1}{f}\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

$$\lambda^1 - \lambda = \frac{1}{f}\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r}} - \frac{1}{f}\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

$$= \frac{1}{f\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} - 1\right) = \frac{C}{f}\left(\frac{2}{\sqrt{\varepsilon_r}} - 1\right)$$

$$\lambda^1 - \lambda = \Delta\lambda = \frac{3\times10^8}{3\times10^6}\left(\frac{1}{\sqrt{4}} - 1\right) = -50m$$

$$\lambda\Delta = -50m$$

موجی طول 50m کم سے خلاء میں سفر کرتی ہیں۔

15.9 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- ڈائیور جینس اور گردشی کثافتوں (کرل) دونوں کے لیے عبارت دونوں بنیادی میدانی ویکٹروں کے لیے مکس ویل کے مساواتیں

$$divE = {}^{\rho}/_{\varepsilon_0}$$
$$divB = 0$$
$$CurlE = \frac{-\partial B}{\partial t}$$

- بقائے بار کے کلیہ کے مطابق کسی نظام کا کل برقی بار مستقل رہتا ہے۔یعنی بار نہ ہی پید ہوتا ہے اور نہ ہی فناء ہوتا ہے اور وہ مساوات جو اس کلیہ کی وضاحت کرتی ہے استمراری مساوات (Continuity Equation) کہلاتی ہے۔
- ہم جانتے ہیں کے موصل میں برقی رو مقناطیسی میدان پیدا کرتی ہے مکس ویل (Maxwell) نے ثابت کیا کہ خلاء میں یاذو برقیہ (Dielectric) میں برقی میدان کی تبدیلی مقناطیسی میدان پیدا ہوتا ہے۔ برقی میدان میں تبدیلی مساوی ہوتی ہے برقی رو کے جو برقی میدان میں بہتی ہے اور جو ایسا ہی مقناطیسی دائر وی پیدا کرتی ہے جیسا کے عام ایصالی رو (Conduction

(Current پیدا کرتی ہے اسے نقل رو(Displacement Current) کہتے ہیں۔

- برقی اور مقناطیسی کے بنیادی کلیے کے ذریعے مکس ویل نے 1862ء میں چار مساواتیں کو معلوم کیا ہے۔ یہ مساوات ہی مکس ویل مساواتیں کہلاتے ہیں۔ تکمیلی شکل میں مکس ویل مساواتیں

$$\oint E.ds = \frac{q}{\varepsilon_0}$$
$$\oint B.ds = 0$$
$$\oint E.dl = \frac{-\partial \emptyset_B}{\partial t}$$
$$\oint B.dl = \mu_0\left(j + \varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}\right)$$

- تفرق شکل میں مکس ویل مساواتیں کو ماٰخذ کثافت (ڈائیور جنس اور گردشی کثافتوں (کرل)) دونوں کے لیے عبادرت دونوں بنیادی میدانی ویکٹروں کے لیے ہیں۔

$$divE = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$divB = 0$$
$$CurlE = \frac{-\partial B}{\partial t}$$
$$CurlB = \mu_0\left(j + \varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}\right)$$

- مکس ویل کی برقی مقناطیسی مساوات کو متجانس(Homogeneous)، ہم سمت(Isotropic)ذو برقیہ واسطہ (جس میں برقی خرمی اسپیس بھی شامل ہے جس کی اجازیت $\varepsilon = \varepsilon_0$ ہے)ذو برقیہ واسطہ برقی رو کے لیے لا متناہی مزاحمت فراہم کرتا ہے اور اس موصلیت صفر ہوتی ہے۔ یعنی j=0، متجانس ہم سمت مادہ میں بار کی حجمی تقسیم نہیں ہوتی ہے۔اس لیے بار کی کثافت ρ صفر ہوتی ہے۔ لٰہذا $B = \mu_0\mu_r H$ اور $j = 0, \rho = 0, D = K\varepsilon_0, E = \varepsilon E, H = \mu H$
لہذا ذو برقیہ کے لیے مکس ویل کی مساوات ہو گی۔ $\vec{\nabla}.E = 0$

$$\vec{\nabla}.B = 0$$
$$\vec{\nabla}\times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla}\times B = \mu\varepsilon\frac{\partial E}{\partial t}$$

- ہموار مستوی موجیں دراصل موجی مساوات کی خاص شکل ہے۔ جس کے لیے برقی میدان y اور z پر منحصر نہیں ہوتا اور یہ صرف x اور t کا تفاعل ہوتا ہے۔اس طرح کی موج کو ہموار مستوی موج(Uniform Plane wave) کہتے ہیں۔ مستوی موج کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔ $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$

15.10 کلیدی الفاظ (Keywords)

- **مقناطیسی نفوذ(magnetic flux):** کسی بھی دیے گئے رقبے پر مقناطیسی نفوذ Ø اس رقبے سے گزرنے والی مقناطیسی خطوط قوت کی تعداد یا یہ کسی دیے گئے رقبے میں جملہ مقناطیسی میدان کی پیائش ہوتی ہے۔
- **گیلوانو میٹر:** برقی دور میں قلیل مقدار میں برقی رو کی پیائش و ظاہر کرنے کے لیے استعمال ہونے والا آلہ ہے۔
- **امالی برقی رو :** تبدیل ہوتے ہوئے مقناطیسی میدان کے ذریعے کسی موصل میں پیدا ہونے والی برقی رو امالی برقی رو کہلاتی ہے۔

15.11 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

15.11.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. امپیر کا کلیہ $\oint B.\,dl =$

(a) $\mu_0 i$ (b) $^{\mu_0}/_{i}$ (c) $^{i}/_{\mu_0}$ (d) $\mu_0 + i$

2. مکس ویل کی مساوات $\nabla.\,E =$

(a) $\rho\varepsilon_0$ (b) $^{\rho}/_{\varepsilon_0}$ (c) $^{\varepsilon_0}/_{\rho}$ (d) ان مین سے کوئی نہیں

3. مکس ویل کی دوسری مساوات $\nabla.\,B =$

(a) $\propto$ (b) 1 (c) 0 (d) ان میں سے کوئی نہیں

4. فیراڈے کا کلیہ $\oint E.\,dl =$ -------- ہے۔
5. مکس ویل کی چوتھی مساوات $CurlB = \nabla \times B =$ -------- ہے۔
6. گاؤس کا مقناطیسیت کا کلیہ $\oint B.\,ds$ -------- ہوتی ہے۔
7. استمراری مساوات (Continuity equation) سے کیا مراد ہے؟
8. نقل رو (Displacement Current) سے کیا مراد ہے؟
9. ڈائی الکٹرک سے کیا مراد ہے؟

15.11.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. مکس ویل کی مساوات کیا ہے؟
2. نقل رو (Displacement current) پر ایک نوٹ لکھیے۔
3. رفتار موج (Wave Velocity) پر نوٹ لکھیے۔

4. ہموار مستوی موجیں سے کیا مراد ہے؟اس کی مساوات کو حاصل کیجیے۔
5. برقی اور مقناطیسی کے بنیادی کلیہ کو بیان کریں۔

15.11.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. مکس ویل کی مساواتیں تفرق شکل میں اخذ کیجیے۔ یہ ثابت کریں کی برقی مقناطیسی موجین کی ہیٔت(Phase) میں برقی اور مقناطیسی کی کثافت مساوی ہو گی۔
2. مکس ویل کی مساواتیں تفرق اور تکمیل شکل میں لکھیئے۔ برقی مقناطیسی موجیں کے ذریعے توانائی رفتار کی مساوات اخذ کیجیے۔
3. نقل رو کو بیان کریں۔ مکس ویل کی مساواتیں کی مدد سے نقل رو اور ایصال رو(Conduction current) کی مقداریں مساوی ہوتے ہیں ثابت کیجیے۔
4. برقی میدان میں مکس ویل کی مساواتیں لکھیئے اور ہر مساوات کی وضاحت کریں اور برقی مقناطیسی موجوں کی عرضی فطرت پر نوٹ لکھیئے۔

15.11.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. برقی مقناطیسی موجی $E = E_0 \text{Cos}(kx - \omega t)$ سے خلاء میں سفر کر رہی ہیں۔ یہ دکھائیں کے نفوذ کثافت $I = \frac{c\varepsilon_0}{2} {E_0}^2$

15.12 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Bleaney, B I, and B Bleaney. Electricity and Magnetism. Oxford: Oxford University Press, 2013.
2. Duffin, W J. Electricity and Magnetism. Cottingham: W.J. Duffin, 2001.
3. Gaur, R.K. &Gupta, S.L.Engineering Physics.Dhanpat Rai Publication.
4. Plonsey.R&Collin.R.E.Principles and Application of Electromagnetic Field. Tata Mc Graw Hill Publication. New Delhi.
5. Purcell, Edward M, and David J. Morin. Electricity and Magnetism. , 2013.
6. Resnic.R&Halliday.D.Physics Part-I&Part-II.Wiley Eastern Pvt.Ltd.New Delhi.
7. Resnick, Robert, David Halliday, and Kenneth S. Krane. Physics. New York: Wiley, 2002.

اکائی 16۔ پوائنٹنگ ویکٹر

(Pointing Vector)

اکائی کے اجزا

16.0 تمہید (Introduction)

برق سکونی میدانوں میں توانائی کے رشتوں پر بحث کرتے وقت ایک مخصوص عمل پر غور کرنے سے ہم برقی میدان کے ساتھ ایک توانائی کثافت منسلک کرنے میں کامیاب ہوئے تھے۔اس سلسلہ میں مخصوص عمل باروں کو اکھٹا کرنا تھا جس کے دوران کام ہوا تھااور میدان میں تبدیلیاں واقع ہوئی تھیں۔کام اور توانائی کی رقموں کا توازن کرنے سے حرحرکیاتی میں آزاد توانائی کی کثافت پانا ممکن ہوا۔اس سے قبل کہ ہم برق مقناطیسی میدان کے لیے ایک عام رشتوں کو پانے کے لیے رجوع کریں۔آیئے ہم ایک مقناطیسی میدان کو قائم کرنے کے لیے اسی طرح کے عمل پر غور کریں۔

مندرجہ اکائی میں ہم بحث کی جاچکی ہے جب حد سے خلاء میں برقی مقناطیسی توانائی کی مقدار بڑھ جاتی ہے تو وہ نہ تو ایک جگہ ساکن ٹہر سکتی ہے اور نہ ہی محض ضائع ہو جاتی ہے۔وہ صرف ایک موج کے طور پر سفر کر سکتی ہے۔یعنی کہ وہ منتشرہ(Dissipate)نہ ہو جائے۔یہ بتانے کے لیے کہ واقع یہی وہ عمل ہے جو مکس ویل کی مساوات پیش کرتی ہے، ہم ان سے سفر کرنے والے موج کی مساواتوں کو اخذ کریں گے۔

16.1 مقاصد (Objectives)

یہ اکائی مکس ویل کی مساوات کے حل کا جائزہ لیتی ہے۔جس میں برقی اور مقناطیسی میدان کے سمتیے ایک محدود رفتار سے سفر کرنے والی موج کے حیطوں کی نمائندگی کرتی ہے۔

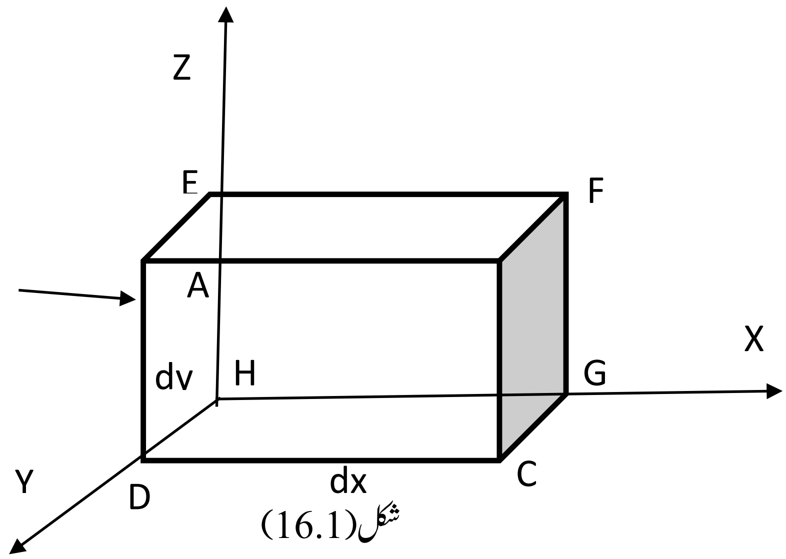
16.2 پوائنٹنگ ویکٹر (Pointing Vector)

موج کی اشاعت کا ایک اہم پہلو ہے خلاء میں توانائی کا بہاؤ جیسے جیسے موج خلاء میں ایک سطح میں گزرتی ہے، ویسے ویسے توانائی بھی منتقل ہو جاتی ہے۔کسی بھی لمحے سطح کے ایک ہر ایک اکائی رتبے میں طاقت کا بہاو $^{watt}/_{m^2}$ یا $^{Joule}/_{m^2 \times sec}$ واقع ہوگا اور اس کی علامت $\vec{P}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔حاصل ضرب $\vec{P}\,.\,A$ وہ طاقت ہے جو ایک رقبہ A سے گزرتی ہے۔لہٰذا ایک برقی مقناطیسی موج میں توانائی کے بہاؤ کی شرح اکائی رقبے کو سمتیے ρ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔اس کو پوائنٹنگ سمتیے کے نام سے جانا جاتا ہے۔کیوں کہ جان ہنری پوئنٹنگ نے جس سے پہلے اس کی خصوصیات کا پتہ چلایا تھا۔جب نفوذ(flux) کے مضبوط(سمتیہ $\vec{P}$)کھینچے جاتے ہیں تو یہ برقی مقناطیسی توانائی کے بہاؤ کو ظاہر کرتے ہیں۔

$$P = \frac{1}{\mu_0}(E \times B)\ (or)(E \times H)$$

فرض کیجیے جو کہ ایک مستطیل نما مستواری پیپ(Rectangularparallelopiped) کے سطح dy, dx اور dz جیسے کی شکل(16.1)میں دکھایا گیا ہے۔مستطیل نما کا حجم $dv = dxdydz$

مشق(Derivation):



شکل(16.1)

فرض کیجیے کے مستطیل نما کے x– محور علاقے سے جس شرح سے برقی مقناطیسی توانائی بہتی ہے۔تب توانائی کے پھیلاؤ $dydz$ عمودی رقبہ کی سمتیہ میں ہوتی ہیں۔یہ حجم پر برقی مقناطیسی توانائی U اور توانائی کی تبدیلی کی شرح $\frac{\partial U}{\partial t}$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\oint_s P.ds \qquad (16.1)$$

منفی(-) یہ ظاہر کرتا ہے کہ توانائی اس حجم میں دخل ہو رہی ہیں۔

$$\oint_s P.ds = -\frac{\partial U}{\partial t} \qquad (16.2)$$

ہم جانتے ہیں کہ

a) برقی میدان E پر توانائی کثافت فی اکائی حجم $U_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ برقی توانائی

b) مقناطیسی میدان H پر توانائی کثافت فی اکائی حجم $U_B = \frac{1}{2}\mu_0 H^2$ مقناطیسی توانائی

یہ برقی اور مقناطیسی توانائیوں کا مجموعہ (sum) ہوتا ہے۔

جملہ توانائی $U = U_E + U_B$

$$U = \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H^2\right) \qquad (16.3)$$

لیکن اگر توانائی اس علاقے سے باہر نکل رہی ہے تب لازمی طور پر اس علاقے میں برقی مقناطیسی توانائی میں متناظر نقصان واقع ہونا چاہیے تب حجم dv

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H^2\right) dv \qquad (16.4)$$

حجم v کے لیے توانائی کی کمی کی شرح (rate)

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H^2\right) dv$$

$$= \int_v -\left[\varepsilon_0 E\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right) + \mu_0 H\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)\right] dv \qquad (16.5)$$

مکس ویل کی مساوات سے $\vec{\nabla} \times H = j + \frac{\partial D}{\partial t}$

$$\vec{\nabla} \times H = j$$

موجیں کی اشاعت (Propagation) غیر موصل واسطے میں سفر کررہی ہیں۔ $\vec{\nabla} \times H = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\vec{\nabla} \times H}{\varepsilon_0} \qquad (16.6)$$

اسی طرح $\vec{\nabla} \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla} \times E}{\mu_0} \qquad (16.7)$$

مساوات (16.6) اور (16.7) کو مساوات (16.5) میں درج کرنے پر

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = \int_v -\left[\varepsilon_0 E\left(\frac{\vec{\nabla} \times H}{\varepsilon_0}\right) - \mu_0 H\left(\frac{\vec{\nabla} \times E}{\mu_0}\right)\right] dv \qquad (16.8)$$

مساوات (16.8) کو ہم اس طرح لکھیے۔

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = \int_v \left[H.\left(\vec{\nabla} \times E\right) - E.\left(\nabla \times H\right)\right] dv$$

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = \int_v \vec{\nabla}.(E \times H) dv \qquad (16.9)$$

$$| \because \vec{\nabla}.(A \times B) = B.\left(\vec{\nabla} \times A\right) - A.\left(\vec{\nabla} \times B\right)$$

یعنی گاؤس تھیورم کا غیر مرکوزیت (Gauss Theorem of Divergence) کو استعمال کرتے ہوئے حجم پر تکمیلا کیا گیا ہے۔ اس کے لیے ہم یہاں اس حجم کو گھیرنے والی سطح پر تکمیلا (Integration) کو اس کی جگہ رکھ سکتے ہیں۔ اس لیے مساوات (16.9) ذیل کی مساوات بن جائے گی۔

$$= \oint_s (E \times H).nds \qquad (16.10)$$

جہاں 'n' سطح پر اکائی ویکٹر

مساوات(16.2)اور(16.9)کو مساوی کیا جائے۔

$$\oint_s P.ds = \oint (E \times H).ds \qquad (16.11)$$

چوں کہ مساوات(16.11)کی دونوں جانب سطحی تکملے ہیں جو خلاء(Space)کے ایک اختیار کردہ مان لیے گئے علاقے کو گھیرے ہوئی سطح پر تکمیلا رہے ہیں۔لہٰذا ہمیں پائنٹنگ سمتیہ(Pointing Vector)اس طرح حاصل ہوتا ہے۔

$$P = (E \times H)$$

$$P = EH\sin\theta$$

$$P = EH \qquad (\because \theta = 90^0 \Rightarrow \sin 90^0 = 1)$$

یا

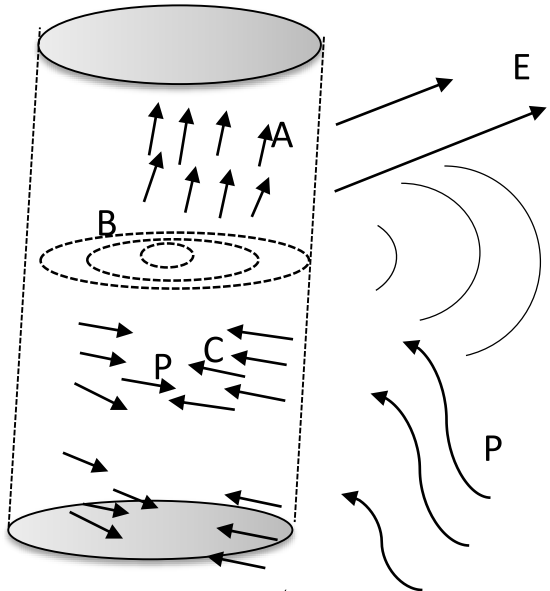
$$\vec{P} == \frac{1}{2\mu}\left(\overrightarrow{E_m} \times \overrightarrow{B_m}\right)$$

اور اس طرح موجی حرکت میں طاقت کے بہاؤ کو حاصل کیا جاتا ہے اور یہ عمودی طور پر موصل یا غیر موصل خطوں علاقوں میں برقی مقناطیسی توانائی کے بہاؤ کے لیے درست(Valid)ہوتا ہے۔

16.3 پائنٹنگ ویکٹر کی مثال (Example of Pointing Vector)

اس پائنٹنگ ویکٹریں کے میدان کے ایک آسان مثال کے طور پر برقی رو لے جانے والے ایک لمبے استوانوی موصل پر غور کیجیے۔ جیسا کہ شکل(16.2)میں بتایا گیا ہے ایک استوانوی موصل میں ایک قائم(Steady)برقی رو اوپر کی جانب بہہ رہی ہے۔اس شکل میں موصل کے سامنے کا نصف حصہ کاٹ کر دکھایا گیا ہے۔موصل کے اندر برقی میدان متناظر طور پر(Correspondingly)یکساں اور اوپر کی جانب رخ کیا ہوا ہے۔ موصل کے باہر برقی میدان کافی قوی ہے۔ جس کا ماسی(Tangential)جز رو کے کسی اور حصے پر ختم(Terminate)کے متناسب ہے۔موصل کے اندر پائنٹنگ ویکٹر $\vec{E} \times \vec{H}$ ہے اور نصف قطری کے اندر کی جانب ہے اور جیسے جیسے یہ موصل کے اندر گھستا ہے کمزور پڑتا جاتا ہے۔

پائنٹنگ میدان کی بڑھتی ہوئی کمزوری توانائی کے فرج ہونے کو ظاہر کرتی ہے۔توانائی موصل کی سطح سے داخل ہوتی ہے اور اس کے مرکز کی جانب بہتی ہے۔اس توانائی کو موصل میں مزاحمت سے ہونے والے نقصان کی پابجائی کے لیے استعمال کیا جاتا ہے اور جیسے جیسے یہ موصل کے مرکز تک پہنچتی ہے اس توانائی کا اندرونی بہاؤ نصف ہو جاتا ہے۔موصل کے باہر پائنٹنگ میدان بنیادی طور پر موصل کے متوازی ہے جو یہ ظاہر کرتا ہے کہ توانائی موصل کی سمت میں گزر رہی ہے(جو کہ توانائی کے لیے ایک رہنما(guide)کا کام کرتا ہے)۔لیکن بیرونی میدان میں خاصی(Sufficient)حد تک نصف قطری جز موجود ہے۔جو موصل میں توانائی کے نقصان کی پابجائی کے لیے توانائی کا ایک اندرونی بہاؤ عمل میں لاتا ہے۔صرف ایک کامل(Perfect)مولیت رکھنے والے موصل کے گرد ہی پائنٹنگ میدان پوری طور پر موصل کے متوازی رہ سکتا ہے۔



شکل(16.2)

پائنٹنگ ویکٹر اور ساھت ہی موج کے سفر کے سمت کو خصوصی طور پر ملاحظہ کیجیے۔ اگر دائیں ہاتھ کی انگلیاں $\vec{E}$ سے $\vec{H}$ کی جانب موڑلی جائیں تب انگوٹھے موج کے سفر کی سمت کو بتاتا ہے۔ اس بہت ہی اہم تعلق کو آسانی کے ساتھ ذہین نشین کرلیا جاسکتا ہے۔ اگر $\vec{E} \times \vec{H}$ کو مضبوتی سے دھیان میں رکھا جائے۔ یہ واقع ہے کہ ان ویکٹریں ترتیب کی الٹ (یعنی $\vec{H} \times \vec{E}$) تباہ کن (runinous) ہو سکتا ہے۔ لیکن یادداشت کی اس طرح مدد کی جاسکتی۔ یہ بات پیش نظر رہے کہ انگریزی حروف تہی میں $\vec{E}$ پہلے آتا ہے $\vec{H}$ بعد میں۔

16.4 موصلیت واسطح میں برقی مقناطیسی موجیں۔ جلدی گہرائی

(Electromagnetic Waves in Conducting Media – Skin Depth)

ہم جانتے ہیں کہ مکس ویل مساواتیں

$$divD = \rho, divB = 0 \qquad (16.12)$$

$$CurlH = J + \frac{\partial H}{\partial t} \text{ اور } CurlE = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad (16.13)$$

جہاں J = رو کثافت

غور کریں متجانس آئسو ٹراپک موصل واسطح میں سرایت پذیری (Permeability)(μ) مختاری (Permittivity) ε اور موصلیت σ ہیں تب

$$J = \sigma E \qquad D = \varepsilon E \qquad \text{اور} \qquad B = \mu H$$

موصلیت واسطح میں $\rho = 0$ ہو تب مکس ویل مساواتیں

$$\nabla . E = 0, \nabla . H = 0, \ \nabla \times H = \sigma E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \qquad \text{اور}$$

$$\nabla \times E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \qquad (16.14)$$

کرل E(Curl E)کی مساوات

$$\vec{\nabla} \times E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \qquad (16.15)$$

یہ مساوات کو دائیں اور بائیں Curl لینے پر

$$\vec{\nabla} \times (\nabla \times E) = \vec{\nabla} \times \left(-\mu \frac{\partial H}{\partial t}\right)$$
$$= -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} \times H\right)$$
$$\left(\because \nabla \times H = \sigma E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}\right) \qquad = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left[\sigma E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}\right]$$
$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times E\right) = -\sigma\mu \frac{\partial E}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times E\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.E\right) - \nabla^2 E$$
$$= \vec{\nabla}(0) - \nabla^2 E = -\nabla^2 E$$
$$\therefore -\nabla^2 E = -\sigma\mu \frac{\partial E}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

یا

$$\nabla^2 E = \sigma\mu \frac{\partial E}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \qquad (16.16)$$

اسی طرح

$$\nabla^2 H = \sigma\mu \frac{\partial H}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \qquad (16.17)$$

مساوات(16.16)اور(16.17) یہ ظاہر کرتے ہیں کہ برقی میدان Eاور Hموجیں کی مساواتیں ہیں۔اب ہم تقطیب شدہ مستوی برقی مقناطیسی موجیں کی اشاعت z–سمتیہ اور x–سمتیہ پر E

تاکہ

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0, E = iE_x \text{ اور } \qquad H = jH$$

مساواتیں(16.16)اور(16.17)سے

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial Z^2} = \sigma\mu \frac{\partial E_x}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \qquad (16.18)$$

اور

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial Z^2} = \sigma\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}$$

t کے ساتھ E_x کی تبدیلی

$$E_x = E_0 e^{j\omega t}$$

اور

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = E_0(j\omega)e^{j\omega t} = j\omega E_x$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 e^{j\omega t} = -\omega^2 E_x \qquad (16.19)$$

مساوات(16.18)کو(16.19)میں درج کرنے پر

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial Z^2} = \sigma\mu j\omega E_x - \mu\varepsilon\omega^2 E_x \qquad (16.20)$$

یا

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial Z^2} - \sigma\mu j\omega E_x + \mu\varepsilon\omega^2 E_x = 0$$

یا

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial Z^2} - (j\omega\sigma\mu - \omega^2\mu\varepsilon)E_x = 0 \qquad (16.21)$$

مساوات(16.21)میں $j\omega\sigma\mu - \omega^2\mu\varepsilon$ کو γ اشاعت مستقل لینے پر

$$\gamma^2 = j\omega\sigma\mu - \omega^2\mu\varepsilon \qquad (16.22)$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial Z^2} - \gamma^2 E_x = 0 \qquad (16.23)$$

یہ مساوات(16.23)E کے لیے موجی کی تفاعل(Wave Function) کہلاتی ہے۔

مساوات(16.23)کے حل کے لیے z–سمتیہ میں موجی سفر کی مساوات

$$E_x = E_0 e^{-\gamma z} \qquad (16.24)$$

جہاں

$$\gamma = [j\omega\sigma\mu - \omega^2\mu\varepsilon]^{1/2}$$

$$= \left[j\omega\sigma\mu\left(1 + \frac{j\omega\varepsilon}{\sigma}\right)\right]^{1/2}$$

اچھی موصل کے لیے $\omega\varepsilon/\sigma \ll 1$ لہٰذا

$$\gamma = 1 + j\left[\frac{\omega\mu\sigma}{2}\right]^{1/2} \qquad (16.25)$$

اس قیمت سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ γ حقیقی اور(Imaginary)جز(part)ہے۔یعنی $\gamma = \alpha + j\beta$

یہاں α حقیقی جز ہے اور تخفیف مستقلہ(Attenuation Constant)کہتے ہے۔(Imaginary) β جز ہے اور یہ موجی کی ہیت کہتے ہے یا ہیت مستقلہ کہتے ہے۔

مساوات(16.25)سے

$$\alpha = \beta = \left[\frac{\omega\mu\sigma}{2}\right]^{1/2} \qquad (16.26)$$

مساوات(16.25)کو مساوات(16.24)میں درج کرنے پر

$$E_x = E_0 exp\left[-(1+j)\sqrt{\left(\frac{\omega\mu\sigma}{2}\right)}.z\right]$$

$$E_x = E_0 exp\left[-\sqrt{\left(\frac{\omega\mu\sigma}{2}\right)}.z\right] exp.(-j\sqrt{\left(\frac{\omega\mu\sigma}{2}\right)}.z) \qquad (16.27)$$

مساوات(16.27)میں تخفیف فیکٹر(Attenuation factor) $exp\left[-\sqrt{\left(\frac{\omega\mu\sigma}{2}\right)}.z\right]$

اور ہیت فیکٹر(Phase factor) $exp\left[-j\sqrt{\left(\frac{\omega\mu\sigma}{2}\right)}.z\right]$

ہئیت رفتار(Phase velocity): اچھی موصل میں موجی کی ہیت رفتار

$$\vartheta = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{[\omega\mu\sigma/2]^{1/2}} = \left(\frac{2\omega}{\mu\sigma}\right)^{1/2} \qquad (16.28)$$

انعطافی اشاریہ(Refractive index): موصلیت وا سطح میں انعطافی اشاریہ

$$n = \frac{C}{\vartheta} = C\left(\frac{\mu\sigma}{2\omega}\right)^{1/2} \qquad (16.29)$$

پنیٹریشن کی گہرائی یاجلدی گہرائی (Depth of Penetration (or) Skin Depth)

ہم دیکھتے ہیں کی ایک موصلیت و سطح میں ایک موجی تخفیف(attenuation)، تشکل کی للذااس موصل و سطح میں موجی کی پنیٹریشن کو تلاش کرتے ہیں۔یہی جلدی گہرائی(Skin Depth)یاپنیٹریشن کی گہرائی کہلاتاہے۔پنیٹریشن کی گہرائی(δ)کواس طرح بیان کی جاتی ہے کے موجیں تخفیف کی گہرائی،اس موجیں کی پہلے پنیٹریشن کی طاقت کا$\frac{1}{e_0}$گناہوتاہے۔

مساوات(16.24)سے

$$E_x = E_0 e^{-\gamma z} = E_0 e^{-\alpha Z}$$

اگر $\alpha Z = 1$ تب $\frac{E_x}{E_0} = \frac{1}{e}$

اس طرح $z = 1/_{\alpha}$ نقل مکان سفر کرتی ہےاور $Z = 0$ کی قیمت پر حیطہ $1/_{e}$ گنازوال پذیر ہوتاہے۔اس طرح نقل مکان پنیٹریشن کی گہرائی(δ)کی مساوی ہوتی ہے۔ $\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\left(\frac{2}{\omega\mu\sigma}\right)}$

تعدد زیادہ ہوتوδ چھوٹی قیمت ہوگا۔i.e.پنیٹریشن کم ہوگا۔اچھے موصل کے لیے تعداد کی قیمت $10^4 cycle$ ہےاور جلدی کی نقل مکان کی قیمت $0.667 \times 10^{-3} m$ ہوتی ہےاور زیادہ تعدد پر رو موصل کے سطح پر سفر کرتی ہے۔

16.5 سفر کرنے والی امواج (Travelling Waves)

اب ہم مکس ویل کی پہلی دو مساواتوں پر غور کریں گے۔یہ مساوات میں Eاور Hدونوں موجود ہیں۔ان میں پہلا قدم یہ ہوگا کہ ایک متغیر کو ساقط کرنے کے لیے دونوں مساواتوں کو ایک ساتھ حل کیا جائے ۔ یہ فرض کرتے ہیں کہ واسطہ(Medium) متجانس(Homogeneous) ہے جس میں کوئی بھرن(Charge) نہیں ہے اور کوئی موصلیت(Conductivity) نہیں ہے۔

مکس ویل کی پہلی دو مساواتیں ہوں گی۔

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{d\vec{H}}{dt} \tag{16.30}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{d\vec{E}}{dt} \tag{16.31}$$

مساوات(16.31)کی دونوں جانب کا کرل(Curl) لینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = -\mu \nabla \times \frac{d\vec{H}}{dt} \tag{16.32}$$

مساوات کی دائیں جانب نوٹ کیجیے کہ کرل(Curl)جو فاصلے کے لحاظ سے ایک جزوی(Partial) تفرقہ(Derivative) ہے، وقت کے لحاظ سے ایک جزوی تفرقے(Partial Derivative) پر عمل (Operate) کرتا ہے۔ چوں کہ جزوی تفرق(Partial Differentiation)کا درجے(Order)سے کوئی فرق نہیں پڑتا۔

ہمیں تب یہ مساوات حاصل ہوتی ہے۔

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = -\mu \frac{d}{dt}\left(\nabla \times \vec{H}\right) \tag{16.33}$$

مساوات(16.32)سے حاصل کردہ H کے کرل(Curl)کی قیمت کو(16.33)سے درج کرنے پر

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = -\mu \frac{d}{dt}\left(\epsilon \frac{d\vec{E}}{dt}\right) = -\mu\epsilon \frac{d^2\vec{E}}{dt^2} \tag{16.34}$$

ریاضیاتی تھیورم کی رو سے ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی سمتیے کا کرل(Curl)مساوی ہوتا ہے۔اس سمتیے کے انشاع(Divergence) کے ڈھلان(Gradient)اور اس سمتیے کے لاپلاشین(Laplacian)کے فرق کے لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = \nabla.\left(\nabla.\vec{E}\right) - \nabla^2\vec{E} \tag{16.35}$$

برقی میدان کا انشاع(Divergence)صفر ہوتا ہے۔کیوں کہ یہ فرض کر لیا گیا کہ موج جس واسطے میں اشاعت پا رہی ہے۔اس میں کوئی آزاد بھرن موجود نہیں ہے۔

لہٰذا ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $-\nabla^2\vec{E} = -\mu\epsilon \frac{d^2\vec{E}}{dt^2}$

یہاں ∇^2 لاپلاشین آپریٹر کہلاتا ہے۔اس کی قیمت $\nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$

یا $$\nabla^2\vec{E} = \mu\epsilon \frac{d^2\vec{E}}{dt^2} \tag{16.36}$$

نوٹ کیجیے کہ مساوات(16.36)میں سمتی مقدار میں کارٹیشن شکل میں دی گئی ہیں۔

لہٰذا ہمیں یہ مساواتیں حاصل ہوتے ہیں۔

$$\frac{d^2E_x}{dx^2} + \frac{d^2E_y}{dy^2} + \frac{d^2E_z}{dz^2} = \mu\epsilon\frac{d^2E_x}{dt^2}$$
$$\frac{d^2E_y}{dx^2} + \frac{d^2E_y}{dy^2} + \frac{d^2E_z}{dz^2} = \mu\epsilon\frac{d^2E_y}{dt^2}$$
$$\frac{d^2E_x}{dz^2} + \frac{d^2E_y}{dy^2} + \frac{d^2E_z}{dz^2} = \mu\epsilon\frac{d^2E_z}{dt^2}$$

اب ایک سادہ صورت حال کا جائزہ لیں جس میں برقی میدان کے سمتیے کے اجزا E_x اور E_z موجود نہیں ہیں۔ لیکن جز E_y $'x'$ کے تفاعل کے طور پر موجود ہے۔ لہٰذا $E_x = 0$ اور $E_z = 0$ کے ساتھ مساوات (16.31) ذیل کے طور پر (reduces) بن جاتی ہے۔

$$\frac{d^2E_y}{dx^2} = \mu\epsilon\frac{d^2E_y}{dt^2} \qquad (16.37)$$

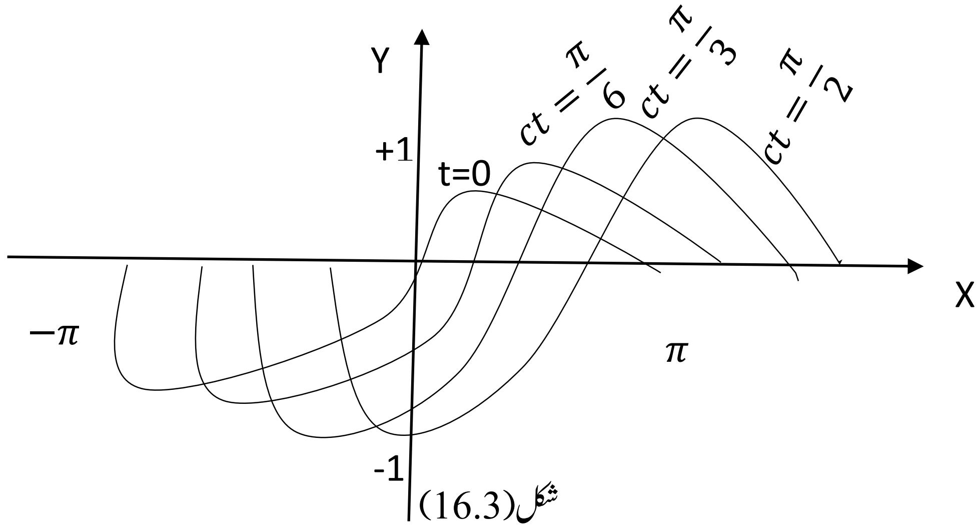
مساوات (16.37) ایک برقی میدان کی سفر کرنے والی موج کی تفرقی مساوات کی ایک جانی پہچانی شکل کو پیش کرتی ہے۔

مساوات (16.37) کو پورا کرنے موجی حل ذیل کی شکل ہو گی۔

$$E_y = f(x - \vartheta t) \qquad (16.38)$$

جہاں V خلاء میں رفتار ہے اس کی قیمت $V = C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$

اور تفاعل $(x - \vartheta t)$ مقدار $f(x - \vartheta t)$ کے کسی بھی تفاعل کی نمائندگی کرتا ہے۔ مساوات (16.37) کے دوسرے حل بھی موجود ہیں۔ عملاً $f(x + \vartheta t)$ جو منفی x– محور پر سفر کرنے والی موج کو وقت کے ایک تفاعلی کے طور پر ظاہر کرتی ہے۔



شکل (16.3)

ہمیں یہ بتانا ہے کہ مساوات (16.38) ایک عرضی موج کو بیان کرتی ہے۔ مثال کے طور پر خلاء میں سفر کرنے والی مساوات (16.38) کی موج جیسی (Sinusoidal) نوعیت کی ہو سکتی ہے جس کو ذیل کے طور پر ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

$$E_y = E_{oy}e^1(Kz - \omega t) \qquad (16.39)$$

شکل (16.3) اس موج کے ایک سائیکل (Cycle) کو بتاتی ہے جو وقت کی متعدد مختلف قیمتوں کے لیے 'x' کے ایک تفاعل کے

طور پر مرتسم کی گئی ہے۔

یہ الفاظ دیگر، موج جیسے جیسے خلاء میں سفر کرتی ہے، اگر دکھائی دیتی تو شکل(16.3) اس موج کے متواتر فوری فوٹوؤں (Snapshots) کو ظاہر کرتی ہے جو کہ مختلف وقتوں میں یعنی $ct = 0. \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ میں لیے گئے ہیں۔ مساوات سے یہ ظاہر ہے کہ یہ تمام Sine امواج ہوں گی۔ لیکن $ct = \frac{\pi}{6}$ کے لیے منحنی $\frac{\pi}{6}$ کے مقابلہ میں ہٹی ہوئی (Displaced) ہوگی اور ان متیاطر قیمتوں میں سے ہر ایک اس وقت واقع ہوگی جب کہ 'x' کی قیمت $\frac{\pi}{6}$ سے بڑھ جائے گی۔ یعنی E_y کی اصلی قیمت کے لیے 'x' میں وقت کے ساتھ اضافہ ہونا چاہیے۔ اس کا حاصل ایک موج ہوگی۔ وقت کے ساتھ بائیں سے دائیں جانب سفر کرے گی۔ وقت اور فاصلہ کو جس جز سے ملایا جاتا ہے، وہ رفتار (Velocity) ہے۔

مساوات (16.39) ایک عرضی موج کی مساوات ہے۔ کیوں کہ برقی میدان E_y کی سمت کہ محور کے ساتھ ہے۔ جب کہ موج کی اشاعت 'x' سمت میں واقع ہو رہی ہے۔ اسی طرح $\vec{E}$ کو صاقط کرتے ہوئے اور $\vec{H}$ کو قائم رکھ کر مقناطیسی سمتیے کے لیے ایک ملتی جلتی (Similar Wave) موج مساوات حاصل کی جاتی ہے۔

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu\epsilon \frac{d^2\vec{H}}{dt^2} \qquad (16.40)$$

اس مساوات کا حل بھی $\vec{H}$ ایک سفر کرنے والی موج ہے جو سمتیے $\vec{E}$ کے حل سے ملتی جلتی (Similar) ہے۔

یہ بات عیاں ہے کہ یہ ممکن نہیں ہے کہ ایسا برقی خلل پر جس کا کوئی مقناطیسی خلل نہ ہو اور اس لیے مکس ویل مساوات کی رو سے ایک برقی جز اور ایک مقناطیسی جز رکھتی ہے جو ایک ساتھ سفر کرتے ہیں۔ ایک جز دوسرے جز کے بغیر حاصل کرنے کا مطلب اس بات کے مماثل (Analogous) ہوتا کہ ایک ایسی پانی کی موج حاصل کی جائے جس میں بغیر نقل مکان کے حرکت موجود ہو یا بغیر حرکت کے نقل مکان واقع ہو۔ حالانکہ $\vec{E}$ اور $\vec{H}$ کے لیے علاحدہ مساواتیں ہیں۔ یہ ایسی مقداروں کی نمائندگی کرتی ہیں۔ جن کو طبیعی طور پر الگ سا کیا جاسکتا ہے۔ خلاء میں برقی مقناطیسی موجوں کی رفتار ہے $C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ جہاں μ_0 اور E_0 ابعادی مستقلات ہیں جن کو برقی سکونی کے ساتھ ساتھ مقناطیسی قوتوں کی پیمائش کے ذریعہ محسوب کیا جاسکتا ہے۔ 1865ء میں مکس ویل نے ایک قوت کو دوسرے کے ساتھ توازن میں لاتے ہوئے یہ معلوم کیا کہ 'C' کی عددی قیمت تقریباً 3×10^8 ہے۔ یعنی برقی مقناطیسی امواج رفتار 'C' سے سفر کرتی ہیں جہاں $C =$ $3 \times 10^8 m/sec$ تقریباً 25 سال بعد برقی مقناطیسی امواج کے طبعی وجود کو ہرٹز (Hertz) نے ثابت (Prove) کیا۔

16.6 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال.1

پنیٹریشن کی گہرائی $\rho = 1mm$ کی تعدد معلوم کیجیے۔ (چاندی کی $\sigma = \frac{3.0\mu s}{m}$)

حل: ہم جانتے ہیں کہ $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}}$ یا

$$\delta^2 = \frac{2}{2\pi\sigma\mu f} \quad \text{یا} \quad f = \frac{1}{\pi\sigma\mu\delta^2}$$

اور $\sigma = 3 \times 10^6\, {}^{S}/_{m}\,,\ \delta = 10^{-3}m$

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$$

$$f = \frac{1}{12\pi^2} 10^7 = 84.4Hz$$

حل شدہ مثال.2

ایک موجی رفتار کی تعدد 1.6MHz ہے تب جلدی گہرائی (δ) کو معلوم کیجیے۔

(ایلومینیم $38.2\, {}^{\mu S}/_{m}$ اور $\mu_r = 1$)

حل: پنیٹریشن گہرائی

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}}$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f\sigma\mu}} \qquad (\because \omega = 2\pi f)$$

ہم کو حل میں دیا گیا ہے کی

$$f = 1.6 \times 10^6 HZ, \sigma = 38.3 \times 10^6\, {}^{S}/_{m}$$

$$\mu_r = 1 also\ \mu = \mu_0\mu_r = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$$

$$\delta = [\pi \times 1.6 \times 10^6 \times 38.2 \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7}]^{-1/2}$$

$$\delta = 6.44 \times 10^{-5}m\ (or) 64.4\mu m$$

$$\vartheta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\left[\frac{2}{\sigma/\varepsilon\omega}\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2\omega}{\sigma\mu}}$$

یا $\vartheta = \omega\delta = 2\pi f.\delta$

$$= 2 \times \pi \times 1.6 \times 10^6 \times 6.44 \times 10^{-5}\vartheta \Longrightarrow= 64.7\, {}^{m}/_{s}$$

16.7 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- برقی اور مقناطیسی میدانون کے لیے مقناطیسی مساوات میں سمتیے خلاء میں تناہی رفتار سے سفر کرنے والی موج کے حیطوں کو ظاہر کرتے ہیں۔ ان امواج کے لیے کسی واسطے کی ضرورت نہیں ہوتی۔ یہ امواج عرضی نوعیت کی ہوتی ہیں اور توانائی کی ایک جگہ دوسری جگہ اشاعت عمل میں لاتے ہیں۔
- پائنٹنگ ویکٹر توانائی کے بہاؤ کو ظاہر کرتا ہے۔ $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$

$$\vec{P} = \frac{1}{2\mu}\left(\overrightarrow{E_m} \times \overrightarrow{B_m}\right)$$

16.8 کلیدی الفاظ (Keywords)

- موصلیت(Conductivity): کسی موصل کے مادہ کی موصلیت سے مراد اس کے مادہ سے برق رو کے گزرنے کی صلاحیت۔
- طول موج(Wavelength): یکساں ہیت میں واقع واسطہ کے دو متعلقہ ذرات کا درمیانی فاصلہ۔
- غیر موصلیت(Non-conductivity): کسی موصل کے مادہ کی موصلیت سے مراد اس کے مادہ سے برقی رو نہیں گزرنے کی صلاحیت۔
- عرضی موجیں(Transverse wave): اگر واسطے میں ذرات کی ارتعاش کی سمت موجوں کی اشاعت کے سمت کے عمود وار ہو۔

16.9 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

16.9.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. پوائنٹنگ ویکٹر $\vec{P}=$ -----

a) $\vec{E}\times\vec{H}$ b) $\vec{H}\times\vec{E}$۔ c) $(\vec{E}\times\vec{H})ds$۔ d) ان میں سے کوئی بھی نہیں

2. جلدی کی گہرائی(Skin Depth) سے کیا مراد ہے؟
3. پوائنٹنگ ویکٹر سے کیا مراد ہے؟
4. اچھے موصل کے لیے تعدد---------قیمت ہوتی ہے۔
5. موصلیت واسطح میں-----کی قیمت-----ہوتی ہے۔

a) 1 b) 0 c) α d) ان میں سے کوئی بھی نہیں

6. سفر موجیں کیا ہے؟
7. خلاء میں رو کی رفتار $C=$ -------------ہے۔

a) $C=\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ b) $C=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ c) $C=\sqrt{\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}}$ d) $C=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$

8. موصلیت کی مختاری(Permittivity) کے لیے اظہار کرتے ہیں۔

a) ایک غیر موصلیت b) موصلیت سے زیادہ

c) موصلیت سے کم d) اجتماعی مختاری(Complex Permittivity)

9. خلاء میں رو کی رفتار کی قیمت-----ہوتی ہے۔

16.9.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. پائنٹنگ ویکٹر کیا ہے؟
2. سفر کرنے والی موجیں کیا ہیں؟
3. خلاء میں سفر کرنے والی موجیں کی خصوصیات بیان کریں۔
4. پائنٹنگ ویکٹر کیا ہے؟اس کے خصوصیات بیان کریں۔

16.9.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. برقی مقناطیسی امواج میں توانائی کثافت کو بیان کریں اور پوئنٹنگ ویکٹر سے اس کا کیا تعلق ہے؟
2. پائنٹنگ ویکٹر کیا ہے؟اور $\vec{E} \times \vec{H} = \vec{P}$ کو آغاز کریں۔
3. پائنٹنگ ویکٹر کیا ہے؟مکس ویل مساواتیں کے مدد سے پائنٹنگ ویکٹر کو اخذ کریں۔

16.9.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. پنیٹریشن کی گہرائی $\rho = 2.5mm$ کی تعدد کو معلوم کیجیے۔(تانبا کی $\sigma = 3.5\ {}^{\mu s}/_{m}$)
2. موجی رفتار کی تعدد 5mHz سے مستر کر رہی ہے تب جلدی گہرائی (δ) کو معلوم کیجیے۔ (چاندی کی σ قیمت $42.3\ {}^{ms}/_{m}$ اور $\mu_r = 1$)

16.10 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Bleaney, B I, and B Bleaney. Electricity and Magnetism. Oxford: Oxford University Press, 2013.
2. Duffin, W J. Electricity and Magnetism. Cottingham: W.J. Duffin, 2001.
3. Gaur, R.K. &Gupta, S.L.Engineering Physics.Dhanpat Rai Publication.
4. Plonsey.R&Collin.R.E.Principles and Application of Electromagnetic Field. Tata Mc Graw Hill Publication. New Delhi.
5. Purcell, Edward M, and David J. Morin. Electricity and Magnetism. , 2013.
6. Resnic.R&Halliday.D.Physics Part-I&Part-II.Wiley Eastern Pvt.Ltd.New Delhi.
7. Schuh, Mari C. Magnetism. Minneapolis, MN: Bellwether Media, 2008.

اکائی 17۔ برقی مقناطیسی موجیں

(Electromagnetic Waves)

اکائی کے اجزا

17.0 تمہید (Introduction)

میکس ویل کے دور میں مرئی روشنی (نظر آنے والی روشنی)، زیر سرخ (انفراریڈ)اور بالائے بنفشی روشنی کی شعاعوں کو ہی صرف برقی مقناطیسی موجوں کے طور پر جانا جاتا تھا۔ بعد ازاں ریڈیو موجیں ،ٹی وی مو جیں، مائیکرو موجیں، لا شعاعیں، گاما شعاعیں، کائناتی شعاعیں (کاسمک شعاعوں) کی بھی برقی مقناطیسی موجوں کے طور پر شناخت کی گئی۔ تمام برقی مقناطیسی موجوں کی رفتار خلا میں اتنی ہی ہوتی ہے جتنی روشنی کی رفتار ہوتی ہے جو 3×10^8 میٹر فی سکنڈ ہوتی ہے۔

17.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں ہم:

- برقی مقناطیسی موجیں کے مظہر کو سمجھ جائیں گے۔
- برقی مقناطیسی موجوں کی خصوصیات بیان کریں گے۔
- موصل واسطے میں برقی مقناطیسی موجی مساواتیں کے مظہر کو سمجھ جائیں گے۔
- برقی مقناطیسی موجوں کی عرضی فطرت کو سمجھ جائیں گے۔
- مستوی موج تقطیب شدہ برقی مقناطیسی موج کو سمجھ جائیں گے۔
- خلا میں ہموار مستوی برقی مقناطیسی موجوں کی لیے مکس ویل کی مساواتیں کو حاصل کریں گے اور اس سے متعلق سوالات کے جوابات حل کریں گے۔

17.2 برقی مقناطیسی موجیں (Electromagnetic Waves)

مکس ویل کے دور میں مرئی روشنی (نظر آنے والی روشنی)، زیر سرخ (انفراریڈ)اور بالائے بنفشی روشنی کی شعاعوں کو ہی صرف برقی مقناطیسی موجوں کے طور پر جانا جاتا تھا۔ بعد ازاں ریڈیو موجیں ،ٹی وی مو جیں، مائیکرو موجیں ،لا شعاعیں، گاما شعاعیں، کائناتی شعاعیں (کاسمک شعاعوں) کی بھی برقی مقناطیسی موجوں کے طور پر شناخت کی گئی۔ تمام برقی مقناطیسی موجوں کی رفتار خلا میں اتنی ہی ہوتی ہے جتنی روشنی کی رفتار ہوتی ہے جو 3×10^8 میٹر فی سکنڈ ہوتی ہے۔

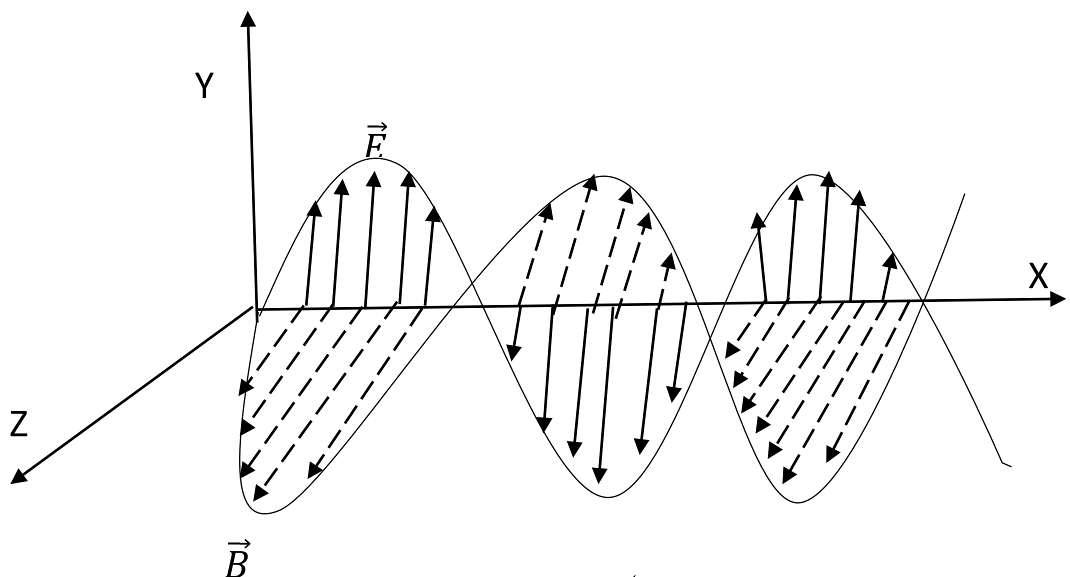
فیراڈے کا کلیہ بتاتا ہے کہ مقناطیسی میدان میں تبدیلی کرنے سے برقی میدان پیدا ہوتا ہے اور ایمپیر۔ میکسویل کے کلیہ سے پتہ چلتا ہے کہ بدلتا ہوا برقی میدان مقناطیسی میدان کو جنم دیتا ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ جب برقی یا مقناطیسی میدان وقت کے ساتھ تبدیل ہو تا ہے تو دوسرا میدان ظاہر ہوتا ہے۔ اس طرح برقی مقناطیسی خلل برقی اور مقناطیسی میدان تبدیل ہونے کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے۔ لہذا برقی اور مقناطیسی میدان تبدیل ہونے کی وجہ سے برقی مقناطیسی خلل پیدا ہوتا ہے۔ یہ خلل برقی مقناطیسی موجوں کی شکل میں آگے بڑھتا

ہے۔اس طرح برقی مقناطیسی موجوں کی اشاعت ہوتی ہے۔

مکثفہ (کنڈینسر) کی پلیٹوں کے درمیان مقناطیسی میدان ہوتا ہے مقناطیسی میدان کے وجود کو پلیٹوں کی درمیان میں قطب نما کی سوئی کہ انحراف کے ذریعہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔ پلیٹوں کے درمیان قطب نما رکھنے پر اس کی سوئی منحرف ہوتی ہے۔ مکثفہ (کنڈینسر) کی دو پلیٹوں کے درمیان یہ مقناطیسی میدان دراصل کچھ برقی رو کے بہاؤ کی وجہ سے ہو تا ہے۔ مکس ویل نے اس برقی رو کو نقل رو (Displacement Current) کا نام دیا۔ مکثفہ (کنڈینسر) کی دو پلیٹوں کے درمیان برقی میدان میں تبدیلی ہونے کی وجہ سے نقل رو (Displacement Current) وجود میں آتی ہے۔ اس نقل رو کے سبب مقناطیسی میدان بنتا ہے جس وجہ سے قطب نما کی سوئی منحرف ہوتی ہے۔

ایصالی رو (Conduction Current) برقی بار کی حرکت کی وجہ سے مقناطیسی میدان پیدا کرتی ہے۔ جب کہ نقل رو برقی میدان کی تبدیلی کی شرح (برقی میدان میں تبدیلی فی اکائی وقت) کی وجہ مقناطیسی میدان پیدا کرتی ہے۔ لہذا پلیٹوں کے درمیان کی جگہ میں برقی اور مقناطیسی میدان دونوں موجود ہوتے ہیں۔

یہاں برقی میدان ($\vec{E}$) اور مقناطیسی میدان ($\vec{B}$) جو وقت کے لحاظ سے تبدیل ہوتے رہتے ہیں ایک دوسرے کے لیے عمودوار ہوتے ہیں یہ دو باہم مل کر برقی مقناطیسی موج بناتی ہیں۔



شکل (17.1)

17.2.1 برقی مقناطیسی موجوں کی خصوصیات (Characteristics of Electromagnetic Waves)

1. برقی مقناطیسی موجیں اس وقت پیدا ہوتی ہیں جب بھی برقی بار کو اسرع (Accelerated) کیا جاتا ہے۔
2. برقی مقناطیسی موجوں کی اشاعت برقی میدان اور مقناطیسی میدان کی شکل میں ہوتی ہیں جو باہم تبدیل ہوتے رہتے ہیں۔ برقی مقناطیسی موجوں کی فطرت عرضی ہوتی ہیں۔

3. برقی مقناطیسی موجوں کی اشاعت کے لیے واسطہ کی ضرورت نہیں ہوتی ہے۔یعنی وہ خلاء میں بھی سفر کرسکتی ہیں۔
4. برقی مقناطیسی موجوں کی ترسیل یاانجذاب منعکس،منعطف، یا جزوی طور پر منعکس یا جزوی طور پر منعطف ہوکر ہو سکتا ہے جو سطح کی نوعیت اور موج کے تعدد پر منحصر ہوتا ہے۔
5. برقی مقناطیسی موجیں C رفتار سے خلامیں سفر کرتی ہیں۔جو $C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3 \times 10^8\ m/s$

اور واسطہ کے مادہ میں رفتار ہوگی۔ $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

جہاں و اسطہ کی مطلق(Permeability) اجازیت(مقناطیسی میدان) μ اور مطلق (Permittivity) اجازیت(برقی میدان) ε ہے۔

6. برقی مقناطیسی موجوں کی توانائی برقی اور مقناطیسی سمتیوں کے درمیان یکساں طور پر تقسیم ہوتی ہے۔
7. کراس پروڈکٹ$(\vec{E} \times \overrightarrow{B})$)(ضرب خارجی) ہمیشہ برقی مقناطیسی موجوں کے اشاعت کی سمت ظاہر کرتی ہے۔
8. برقی مقناطیسی موجیں معیار حرکت رکھتی ہیں۔لہذا وہ سطح وقوع پر دباوعائید کرسکتی ہیں۔
9. برقی مقناطیسی موجیں توانائی کو ایک خطے سے دوسرے خطے میں منتقل کرنے کے قابل ہوتے ہیں۔توانائی کے بہاؤ کی شرح فی اکائی رقبہ یا جوپوئنٹنگ سمتیہ کی طرف سے دی گئی ہے۔وہ یہ ہے۔ $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E} \times \overrightarrow{B}) = \vec{E} \times \vec{H}$

جہاں خلایاخالی جگہ کی اجازیت μ_0 ہے۔

10. برقی اور مقناطیسی میدان کی حیطہ کا تناسب ہمیشہ مستقل رہتا ہے اور یہ ریاضیاتی طور پر برقی مقناطیسی موجوں کی رفتار کے برابر ہوتا ہے۔ $C = \frac{E}{B}$

17.3 موصل واسطے میں برقی مقناطیسی موجی مساوات

(Electromagnetic Wave Equation in a Conducting Medium)

فرض کروکہ ایک موصل مادہ ہے جس کی موصلیت سگما σ جس کی (Permeability)اجازیت(مقناطیسی میدان) μ اور(Permittivity)اجازیت(برقی میدان) ε ہے۔یہ مادہ برقی بار کہ مبدا سے علحدہ ہے۔لھذااس کے بار کی کثافت $\rho = 0$ ہوگی۔اس حالت میں مکس ویل کی 4 مساواتیں ہوں گی۔

$$\vec{\nabla}.\vec{D} = \varepsilon\,\vec{\nabla}.\vec{E} = 0 \ or\ \vec{\nabla}.\vec{E} = 0 \qquad (17.1)$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \qquad (17.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad (17.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\left(\vec{J} + \varepsilon\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \mu\left(\sigma\vec{E} + \varepsilon\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \qquad (17.4)$$

$$\vec{J} = \sigma\vec{E}$$

برقی میدان $\vec{E}$ کے لیے مساوات(17.3)اور(17.4)سے $\vec{B}$ کوحذف کرتے ہوئے مساوات(17.3)کاانفراج (Curl)لینے پر

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right)}{\partial t} \qquad (17.5)$$

مساوات(17.4)اور(17.5)سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = \frac{\partial}{\partial t}[\mu\sigma\vec{E} + \mu\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}] \qquad (17.6)$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = -\mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad (17.7)$$

ہمیں معلوم ہے کہ $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}\left(\vec{A}.\vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A}.\vec{B}\right)$

ہمیں معلوم ہے کہ $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{E}\right) - \vec{E}\left(\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\right)$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = 0 - \vec{\nabla}^2\vec{E} \qquad (17.8)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla}^2\vec{E} \qquad (17.9)$$

مساوات(17.7)اور(17.9)سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$-\vec{\nabla}^2\vec{E} = -\mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad (17.10)$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{E} = \mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad (17.11)$$

یہ برقی میدان $\vec{E}$ کے لیے عام موجی مساوات ہے۔اگرواسطہ غیر موصل ہے تب سگما $\sigma = 0$ صفر ہوگا۔تب مساوات ہوگی۔

$$\vec{\nabla}^2\vec{E} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad (17.12)$$

مساوات (17.9) اور (17.11) سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ وہ $\mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$ اصطلاح ہے جس نے برقی رو کو بہنے کی اجازت دی ہے۔

اسی طرح مقناطیسی میدان $\vec{B}$ کے لیے مساوات(17.3)اور(17.5)سے $\vec{E}$ کوحذف کرتے ہوئے مساوات(17.3)کاانفراج (Curl)لینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \times \left(\mu\sigma\vec{E} + \mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\right)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu\sigma(\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{E})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu\sigma\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) + \mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\mu\sigma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} \qquad (17.13)$$

ٹرپل ویکٹر لگانے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{B}) - \vec{B}.(\vec{\nabla}.\vec{\nabla})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0 - \vec{\nabla}^2\vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\vec{\nabla}^2\vec{B} \qquad (17.14)$$

مساوات (17.13) اور (17.14) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$-\nabla^2\vec{B} = -\mu\sigma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} \qquad (17.15)$$

$$\nabla^2\vec{B} = \mu\sigma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} \qquad (17.16)$$

مساوات (17.16) مقناطیسی میدانی سمتیہ کے لیے عمومی موجی مساوات ہے اگر واسطہ غیر موصل ہو تب سگمہ صفر کے برابر ہوگا $\sigma = 0$ تب ہمارے پاس مساوات ہوگی۔

$$\nabla^2\vec{B} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} \qquad (17.17)$$

مساوات (17.16) اور (17.17) سے یہ واضح ہے کہ $\mu\sigma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ یہ وہ اصطلاح ہے جو کرنٹ کو بہنے کی اجازت دیتی ہے۔

17.4 خلا میں ہموار مستوی برقی مقناطیسی موجوں کے لیے مکس ویل کی مساواتیں

(Maxwell Equations for Uniform Plane Electromagnetic Waves in Free Space)

مکس ویل کی مساواتیں برائے خلا یا خالی جگہ جو برقی بار سے مستشنیٰ $\rho = 0$ ہیں جو غیر موصل واسطہ $\sigma = 0$ کے لیے جس کی متناہی اجازیت (Permeability) (مقناطیسی میدان) μ اور (Permittivity) اجازیت (برقی میدان) ε ہے کو سمتیہ شکل میں اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = 0 \ or \ \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right).\left(iE_x + jE_y + kE_z\right) = 0$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \ or \ \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right).\left(iB_x + jB_y + kB_z\right) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \ or \ \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{bmatrix} = -(i\frac{\partial B_x}{\partial x} + j\frac{\partial B_y}{\partial y} + k\frac{\partial B_z}{\partial z})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \ or \ \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix} = \mu_0\varepsilon_0(i\frac{\partial E_x}{\partial x} + j\frac{\partial E_y}{\partial y} + k\frac{\partial E_z}{\partial z})$$

مندرجہ بالا مساوات کو اجزاکی شکل میں دوبارہ اس طرح لکھا جاسکتا ہے ۔

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \qquad (17.18)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \qquad (17.19)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \qquad (17.20a)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \qquad (17.21a)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \qquad (17.22a)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t} \qquad (17.23b)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t} \qquad (17.24b)$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial t} \qquad (17.25b)$$

آیئے ہم مستوی موجوں کے نظام پر غور کرتے ہیں اور فرض کرتے ہیں کہ یہ موجوں کی اشاعت مثبت X- محور کی سمت میں ہیں۔تب ایسی صورت میں سمتیہ برقی $\vec{E}$ اور مقناطیسی $\vec{B}$ میدان Y اور Z- محوروں کی سمت سے آزاد ہوگا اور یہ صرف X اور t کا تفاعل ہوگا۔ایسی موج کو ہموار مستوی موج کہتے ہیں۔

کیوں کہ برقی $\vec{E}$ اور مقناطیسی $\vec{B}$ میدان دونوں Y اور Z- محوروں کی سمت سے آزاد ہوں گے۔اس لیے انکا جزوی مشتق y اور z کے لحاظ

سے صفر ہو گا۔

$$\frac{\partial E}{\partial y} = \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial z} = 0$$
$$E = iE_x + jE_y + kE_z$$
$$B = iB_x + jB_y + kB_z$$
$$\therefore \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \;;\; \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \;;\; \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0 \;;\; \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

کیوں کہ $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \;;\; \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$ ہے اس تناظر مساوات(17.18) میں موجود میکس ویل نسبت اس طرح ہو گی۔ $\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$

اسی طرح $\frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$ ہوں گے۔

مساوات (17.20) اور (17.21) کے X اجزا ہو نگے۔

$$-\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$
$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$$

مندرجہ بالا تعلق سے ہم لکھ سکتے ہیں کہ برقی میدان یا مقناطیسی میدان کا X- جز زماں و مکاں کے لحاظ سے تبدیل نہیں ہوتا ہے بلکہ E_x اور B_x مستقل رہتے ہیں۔

ارتعاش کی نوعیت پر غور کرنے پر ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ E_x اور B_x مستقل رہتے ہیں اور موج کی اشاعت کا اس پر کوئی اثر نہیں پڑے گا۔لہذا ان کو صفر تصور کیا جاسکتا ہے یعنی $E_x = B_x = 0$

مساوات((17.21 ,3 (17.20) سے (17.23), (17.24)

$$-\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad \text{یا} \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \qquad (17.26)$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \qquad (17.27)$$
$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad \text{یا} \quad \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \qquad (17.28)$$
$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \qquad (17.29)$$

مندرجہ بالا چار مساواتیں (17.26) سے تک(17.29) ہموار مستوی کے لیے موجی مساواتیں کہلاتی ہیں۔

17.5 برقی مقناطیسی موجوں کی عرضی فطرت (Transverse Nature of EM Waves)

X- محور کی سمت میں موج کی اشاعت ہو رہے اور $E_x = B_x = 0$ کے برابر ہے دوسرے لفظوں میں برقی

مقناطیسی موجو میں طولی اجزا نہیں ہیں۔مزید مقناطیسی یا برقی میدانوں میں تغیر صرف ایک سمت میں ہوتا ہی جو X - محور کو عموددار ہے ۔مساوات (17.26)،(17.27)،(17.28)اور (17.29) سے اشاعت کی سمت ہم دیکھتے ہیں کہ نہ ہی وقتی مشتق اور نہ ہے X-سمت میں مشتق معدودم ہوتا ہے۔اس کا مطلب یہ ہے کہ ان موجوں میں عرضی فطرت ہوتی ہے۔

ثبوت: مساوات (17.26) کو مساوات (17.27)سے تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\frac{\partial E_z}{\partial x}}{\frac{\partial E_y}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial B_y}{\partial t}}{-\frac{\partial B_z}{\partial t}} \ or \ \frac{\partial E_z}{\partial E_y} = -\frac{\partial B_y}{\partial B_z}$$

$$or \ \frac{E_z}{E_y} = -\frac{B_y}{B_z} \ or \ E_z B_z = -B_y E_y$$

$$E_z B_z + B_y E_y = 0 \qquad (17.30)$$

جہاں $\vec{E}.\vec{B} = EB\,Cos\theta$ جہاں θ برقی میدان کا سمتیہ $\vec{E}$ اور مقناطیسی میدان کے سمتیہ $\vec{B}$ کا درمیانی زاویہ ہے۔

$$\therefore \left(i\,E_x + jE_y + kE_z\right).\left(i\,B_x + jB_y + kB_z\right) = EB\,Cos\theta$$

$$B_x E_x + B_y E_y + B_z E_z = EB\,Cos\theta$$

مگر $E_x B_x = 0$ یا $B_x = 0$ اور $E_x = 0$

$$E_y B_y + B_z E_z = E\,B\,Cos\,\theta$$

مساوات ایک کے لحاظ سے اس طرح ہو گی۔

$$E\,B\,Cos\,\theta = 0$$

$$Cos\,\theta = 0$$

کیونکہ $0 \neq H$ اور $E \neq 0$

$\therefore$ لہذا $\theta = \frac{\pi}{2}$ ریڈین ہو گا۔ چنانچہ $\vec{B}$ اور $\vec{E}$ ایک دوسرے کے علی القوائم یا زاویہ قائمہ پر ہیں۔

17.6 مستوی موج تقطیب شدہ برقی مقناطیسی موج

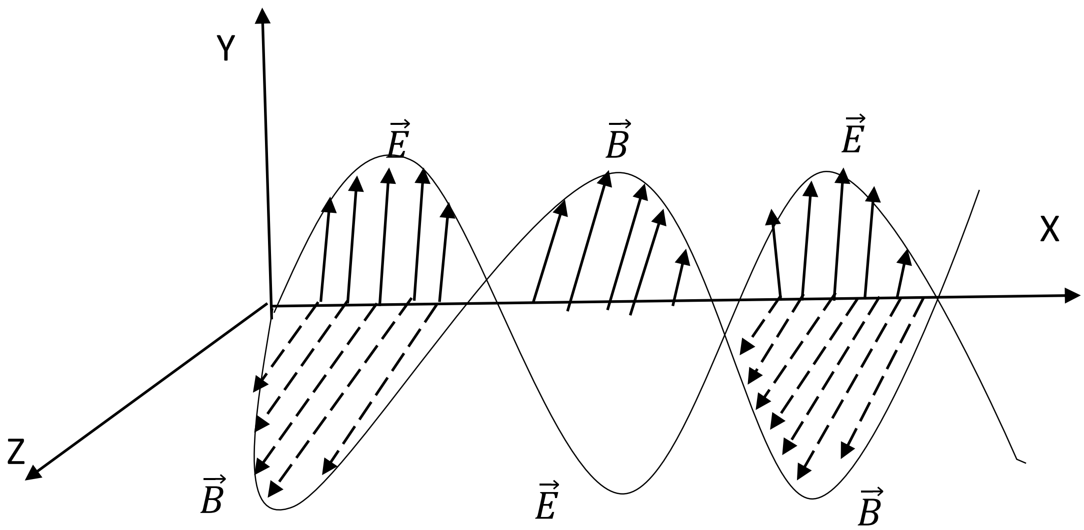
(Plane Wave Polarized Electromagnetic Wave)

شکل(17.2)میں برقی اجزا اور مقناطیسی اجزا باہم ایک دوسرے کے عموددار ہیں اور سمت اشاعت کے بھی عموددار ہیں لہذا برقی مقناطیسی موج عرضی طبع یا فطرت رکھتی ہے۔

جب برقی اور مقناطیسی میدان کا تغیر صرف ایک ہی مستوی تک محدود رہتا ہے تب ایسی برقی مقناطیسی موج کو مستوی تقطیب شدہ موج(Plane Polarized Wave)کہتے ہیں۔ میکانی کی طور پر عرضی فطرت رکھنے والی موجیں ہی تقطیب شدہ موج ہو سکتی ہے ۔تمام برقی مقناطیسی موجیں عرضی فطرت رکھتی ہیں اس لیے یہ تقطیب شدہ ہو سکتی ہیں۔

برقی مقناطیسی موجیں تقطیب شدہ خصوصیت کو ظاہر کرتی ہیں جو عرضی موج ہونے کی علامت ہے روشنی جو کہ برقی مقناطیسی موج پر مشتمل ہوتی ہے۔ روشنی کی صورت میں اس میں آسانی سے تقطیبی خصوصیت کو ظاہر کیا جاسکتا ہے ۔

مثال کے طور پر ہموار مستوی موج جو واسطے میں X- محور کی ساتھ سفر کررہی ہے اس کی اجازیت μ_0 ہے اور ε_0(Permittivity) اور $\vec{J} = 0$ ہے جہاں پر سمتیہ $\vec{B}$ اور $\vec{E}$ جو Y,Z مستوی پر موجود ہے اگر $E_y = E_z = 0$ تب ہم اس موج کے بارے میں کہہ سکتے ہیں کہ یہ موج تقطیب شدہ ہے اسی طرح Y- محور کی سمت میں تقطیب کو بتانے کے لیے E_y موج Y- محور کی سمت میں $E_y = 0$ اور مقناطیسی سمتی میدان $\vec{B}$ Z- محور کی سمت میں $B_z = 0$ ہو گی۔



شکل(17.2)

مساوات(17.26)اور(17.29)میں $E_y = B_z = 0$ درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \qquad (17.31)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \qquad (17.32)$$

مساوات(17.31)کا $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}$ اور مساوات(17.32)کا $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ لینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 B_y}{\partial x\, \partial t} \qquad (17.33)$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x\, \partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \qquad (17.34)$$

مساوات(17.33)اور(17.34)سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \qquad (17.35)$$

E_z کے لیے موجی مساوات کہلاتی ہے۔

اسی طرح مساوات (17.31) کا $\frac{d}{dt}$ اور مساوات (17.32) کا $\frac{d}{dx}$ لینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x\,\partial t} = \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \qquad (17.36)$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial x\,\partial t} \qquad (17.37)$$

(17.36) اور (17.37) مساوات سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \qquad (17.38)$$

یہ مستوی تقطیب شدہ برقی مقناطیسی موج B_y کی موجی مساوات ہے۔

17.7 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

ایک مسطح برقی مقناطیسی موج جس کا تعدد 25mHz ہے۔ X– سمت میں آزاد فضا میں سفر کرتی ہے۔ وقت اور فضا کے ایک خاص نقطے پر $\vec{E} = 6.3j\ V/m$ اس نقطہ پر $\vec{B}$ کیا ہے؟

حل: $B = \frac{E}{C} = \frac{6.3j\ v/m}{3\times10^8 m/s} = 2.1 \times 10^{-8} T$

17.8 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- فرض کرو کہ ایک موصل مادہ ہے جس کی موصلیت سگما σ جس کی (Permeability) اجازیت (مقناطیسی میدان) μ اور (Permittivity) اجازیت (برقی میدان) ε ہے۔ یہ مادہ برقی بار کہ مبدا سے علحدہ ہے۔ لہذا اس کے بار کی کثافت ρ = 0 ہو گی۔ اس حالت میں میکس ویل کی 4 مساواتیں ہوں گی۔

$$\vec{\nabla}.\vec{D} = \varepsilon\,\vec{\nabla}.\vec{E} = 0 \ or\ \vec{\nabla}.\vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\left(\vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \mu\left(\sigma\vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$\vec{J} = \sigma\vec{E}$$

- جب برقی اور مقناطیسی میدان کا تغیر صرف ایک ہی مستوی تک محدود رہتا ہے تب ایسی برقی مقناطیسی موج کو مستوی تقطیب شدہ موج(Plane Polarized Wave)کہتے ہیں۔میکانیات کے طور پر عرضی فطرت رکھنے والی موجیں ہی تقطیب شدہ موج ہوسکتی ہے ۔تمام برقی مقناطیسی موجیں عرضی فطرت رکھتی ہیں اس لیے یہ تقطیب شدہ ہوسکتی ہیں۔
- برقی مقناطیسی موجوں کی اشاعت برقی میدان اور مقناطیسی میدان کی شکل میں ہوتی ہیں جو باہم تبدیل ہوتے رہتے ہیں۔ برقی مقناطیسی موجوں کی فطرت عرضی ہوتی ہیں۔
- برقی مقناطیسی موجوں کی اشاعت کے لیے واسطہ کی ضرورت نہیں ہوتی ہے۔یعنی وہ خلاء میں بھی سفر کرسکتی ہیں۔
- برقی مقناطیسی موجوں کی ترسیل یاانجذاب منعکس،منعطف، یا جزوی طور پر منعکس یا جزوی طور پر منعطف ہوکر ہو سکتا ہے جو سطح کی نوعیت اور موج کے تعدد پر منحصر ہوتا ہے۔
- برقی مقناطیسی موجیں C رفتار سے خلا میں سفر کرتی ہیں۔جو $C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3 \times 10^8\ m/s$

اور واسطہ کے مادہ میں رفتار ہوگی۔ $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

جہاں واسطہ کی مطلق (Permeability) اجازیت(مقناطیسی میدان) μ اور مطلق (Permittivity) اجازیت(برقی میدان) ε ہے۔

- کراس پروڈکٹ $(\vec{E} \times \vec{B})$ (ضرب خارجی) ہمیشہ برقی مقناطیسی موجوں کے اشاعت کی سمت ظاہر کرتی ہے۔
- برقی مقناطیسی موجیں معیار حرکت رکھتی ہیں۔لہذا وہ سطح وقوع پر دباوعائید کرسکتی ہیں۔
- برقی اور مقناطیسی میدان کی حیطہ کا تناسب ہمیشہ مستقل رہتا ہے اور یہ ریاضیاتی طور پر برقی مقناطیسی موجوں کی رفتار کے برابر ہوتا ہے۔ $C = \frac{E}{B}$

17.9 کلیدی الفاظ (Keywords)

- **موجیں(Waves):** یہ نمونے جو حقیقی طبعی منتقلی یا مجموعی طور پر مادے کیے بہاؤ کے بغیر حرکت کرتے ہیں۔
- **حیطہ ارتعاش(Amplitude):** موج کا حیطہ کے مقامات توازن سے اعظم ترین نقل کی عددی قدر ہے۔
- **مستوی تقطیب شدہ موج:** جب برقی اور مقناطیسی میدان کا تغیر صرف ایک ہی مستوی تک محدود رہتا ہے تب ایسی برقی مقناطیسی موج کو مستوی تقطیب شدہ موج(Plane Polarized Wave)کہتے ہیں۔

17.10 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

17.10.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. برقی رو سے کیا مراد ہے؟

2. برقی مقناطیسی موجیں۔۔۔۔۔۔۔۔سے خلامیں بھی سفر کرتی ہیں۔

(a)$3 \times 10^8 m/s$ (b)$3 \times 10^8 cm/sec$

(c)$1000m/sec$ (d)ان میں سے کوئی بھی نہیں۔

3. مستوی تقطیب شدہ موج سے کیامراد ہے؟

4. برقی مقناطیسی موجیں کی دو خصوصیات بیان کریں۔

5. برقی مقناطیسی موجیں تعریف کریں۔

6. نقل مکانی رو سے کیامراد ہے؟

7. برقی مقناطیسی موجیں کی واسطہ کے مادہ میں رفتار V=۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔

(a)$\sqrt{\mu\varepsilon}$ (b)$\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ (c)$\sqrt{\mu/_{\varepsilon}}$ (d)ان میں سے کوئی بھی نہیں

8. برقی مقناطیسی موج کوجب آزاد فضامیں رکھاجاتاہے تب برقی اور مقناطیسی میدانوں کے حیطہ ار تعاشوں میں کیا رشتہ ہوگا۔

9. لاشعاعوں کااوسط موجی طول کتناہوتاہے؟

17.10.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. موصل واسطے میں برقی مقناطیسی موجوں کے لیے میکس ویل کی مساواتون کوبیان کیجیے ؟

2. واسطے میں برقی مقناطیسی موجوں کے لیے موجی مساواتوں کواخذ کیجیے ۔

3. خلامیں ہموار مستوی برقی مقناطیسی موجوں کے لیے میکسویل کی مساواتوں کو حاصل کیجیے؟

4. ہموار مستوی برقی مقناطیسی موج کی تقطیب کا کیا مطلب ہے؟

5. برقی مقناطیسی موجیں عرضی فطرت وطبع رکھتی ہیں بیان کیجیے؟

6. برقی مقناطیسی موجوں کے مبدا پر گفتگو کیجیے؟

7. خلامیں یاخالی جگہ میں موجود برقی مقناطیسی موجوں کی خصوصیات کولکھیے ؟

8. برقی مقناطیسی موجوں کے کوئی چھ (6) خصوصیات لکھیے۔

17.10.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. موصل واسطے میں برقی مقناطیسی موجوں کے لیے میکس ویل کی مساواتو ں کوبیان کیجیے ؟واسطے میں برقی مقناطیسی موجوں کے لیے موجی مساواتوں کواخذ کیجیے ۔

2. خلامیں ہموار مستوی برقی مقناطیسی موجوں کے لیے میکسویل کی مساواتوں کو حاصل کیجیے ؟ہموار مستوی برقی مقناطیسی موج کی

تقطیب کا کیا مطلب ہے۔

3. خلا میں موجود مستوی ترغیب شدہ برقی مقناطیسی موج جس کی ε اور μ کی متناہی قدریں ہیں ان کے لیے موجی مساوات کو اخذ کیجیے۔

4. برقی مقناطیسی موجوں کے مبدا پر گفتگو کیجیے؟ برقی مقناطیسی موجیں عرضی فطرت وطبع رکھتی ہیں بیان کیجیے۔

5. خلا میں یا خالی جگہ میں موجود برقی مقناطیسی موجوں کی خصوصیات کو لکھیے ۔

17.10.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. ایک مسطح برقی مقناطیسی موج جس کا تعدد 15mHz ہے۔X– سمت میں آزاد فضا میں سفر کرتی ہے۔ وقت اور فضا کے ایک خاص نقطے پر $\vec{E} = 3.3j\ V/m$ اس نقطہ پر $\vec{B}$ کیا ہے؟

17.11 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Bennet, G A. G. Electricity and Modern Physics. London: English Language Book Society & Edward Arnold, 1983.
2. Duffin, W J. Electricity and Magnetism. Cottingham: W.J. Duffin, 2001.
3. Gaur, R.K. &Gupta, S.L.Engineering Physics.Dhanpat Rai Publication.
4. Kurrelmeyer, Bernhard, and Walter H. Mais. Electricity and Magnetism. Princeton, N.J: Van Nostrand, 1967.
5. Peck, Edson R. Electricity and Magnetism. , 2013.
6. Plonsey.R&Collin.R.E.Principles and Application of Electromagnetic Field. Tata Mc Graw Hill Publication. New Delhi.
7. Purcell, Edward M, and David J. Morin. Electricity and Magnetism. , 2013.
8. Resnic.R&Halliday.D.Physics Part-I&Part-II.Wiley Eastern Pvt.Ltd.New Delhi.
9. Resnick, Robert, David Halliday, and Kenneth S. Krane. Physics. New York: Wiley, 2002.
10. Schuh, Mari C. Magnetism. Minneapolis, MN: Bellwether Media, 2008.

اکائی 18۔ تقطیب

(Polarization)

اکائی کے اجزا

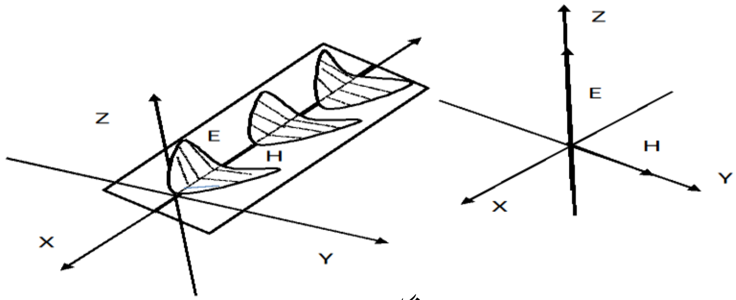
18.0 تمہید (Introduction)

شکل(18.1) میں برقی مقناطیسی لہر کا سادہ ترین نقشہ ہے جس میں ہر موجی اگلا رخ (Wave Front) مستوی میں جب کہ کسی ایک خاص نقطہ پر جس سے لہری سلسلہ (Wave Series) گزرتا ہوئے برقی اور مقناطیسی شدت (Intensity) مستقیم خطوط پر اہتزاز کرتی ہیں جو آپس میں ایک دوسرے کے اور اشاعت کی سمت کے عمودی ہیں۔اس طرح کے لہری سلسلہ کے جو X- سمت کی طرف بڑھ رہا ہے ظاہر کر کے کئی روایئ (Conventional) طریقے شکل (18.1) میں دکھائے گئے ہیں۔x-z اور x-y مستوا میں لہروں کے ذریعہ شکل (18.1a) میں Z اور Y سمتوں E اور H ویکٹروں سے شکل (18.1b) میں صرف E ویکٹر سے شکل (18.1c) میں یہاں H ویکٹر قارئین کے قیاس کے لیے چھوڑ دیا گیا ہے۔ایک دیگر رواج جو ہم اکثر استعمال کریں گے شکل (18.1d) میں دکھایا گیا ہے۔اس میں دوہرا تیر دو مخالف سمتوں میں E کی دو برابر اعلیٰ ترین (Maximum) قدروں کو ظاہر کرتا ہے۔

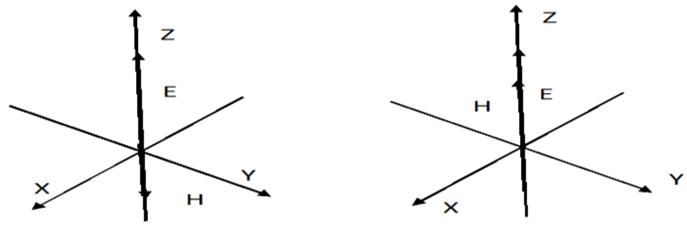
شکل (18.2) میں مظہر ہر خطی تقطیب شدہ (Linearly Polarized) کہلاتی ہے جس کا مطلب یہ ہے کہ کسی خاص نقطہ پر ویکٹر E یا H کا سرا ایک خط پر اہتزاز کرتا ہے۔چوں کہ شکل (18.2a) میں ہر ایک سائن لہر (Sine Waves) ایک مستقری میں واقع ہوتی ہے اس لیے لہر کو مستوی تقطیب شدہ (Plane Polarized) بھی کہتے ہیں۔ بعد میں اس اکائی میں دوسرے زیادہ پیچیدہ (Complicated) مثال پر بحث کی جائے گی۔

نظریہ (Theory) اور تجربہ (Experiment) دونوں ظاہر کرتے ہیں کہ ایک سادہ ریڈیو یا رڈار اینٹینا (Radar Antenna) ایک اہتزازی دو قطبہ خطی تقطیب شدہ ہوتی ہیں اور اُن کا برقی ویکٹر دو قطبہ سے مسطح ہوتا ہے (Dipole Oscillating) روشنی کے ماخذ (Source) سے کرنیں، اغلباً ماخذ کے مالیکول (Molecules of the Source) میں شروع ہوتی ہیں اور اگر یہ مالیکیول اسی طرح اشعاع (Radiation) کرتے ہیں جس طرح کہ ایک محدود جسامت (Finite Size) کا دو قطبہ (Dipole) کرتا ہے تو کسی بھی ایک مالکیول سے چلنے والی کرنیں بھی خطی تقطیب شدہ ہوگی۔ در حقیقت ایک واحد مالیکیول کو

دوسروں سے علاحدہ کرنااور اس سے خارج ہر سلسلہ کا مطالعہ کرنا ممکن ہے۔



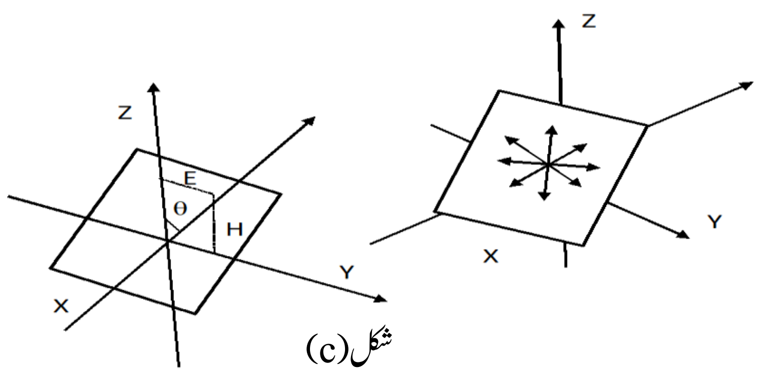
شکل(a)



شکل(b)

شکل(18.1)

روشنی کے ہر ماخذ میں مالیکولوں کی بہت بڑی تعداد ہوتی ہے جو سب ممکن سمتیوں مین رخ رکھتے ہیں۔ تب اس طرح کے ماخذ سے روشنی کی لہروں کی شعاع جو x سمت پر داہنی طرف شکل(18.2) میں سفر کر رہی ہے لہروں کی ایک آمیزش(Mixture) ہونی چاہئے جن میں سے کچھ میں E کا رخ شکل(18.2) (c) کی مانند ہے جب کہ دیگر لہروں میں ویکٹر (اگر x سمتیہ سطر کر رہی ہے تو اُسے ہمیشہ yz مستوی میں واقع ہونا چاہیے)z سمت سے زادیہ θ بناتا ہے جیسا کہ شکل(18.2) (c) میں ہے۔



شکل(c)

شکل(18.2)

چوں کہ زاویہ سمت اکراس(Azimuth angle) θ کی سب قدریں برابر کا احتمال رکھتی ہیں لہٰذا E ویکٹرس اشاعت کی سمت کے گرد تناسب کے ساتھ(Symmetrically) ترتیب شدہ ہوں گے جیسا کہ شکل(18.2) (b) میں ہے۔اس طرح کی حالت

در حقیقت موجود پائی جاتی ہے اور اس لیے اس قسم کی روشنی غیر تقطیب شدہ(Polarized) یا قدرتی روشنی کہلاتی ہے۔

18.1 مقاصد (Objectives)

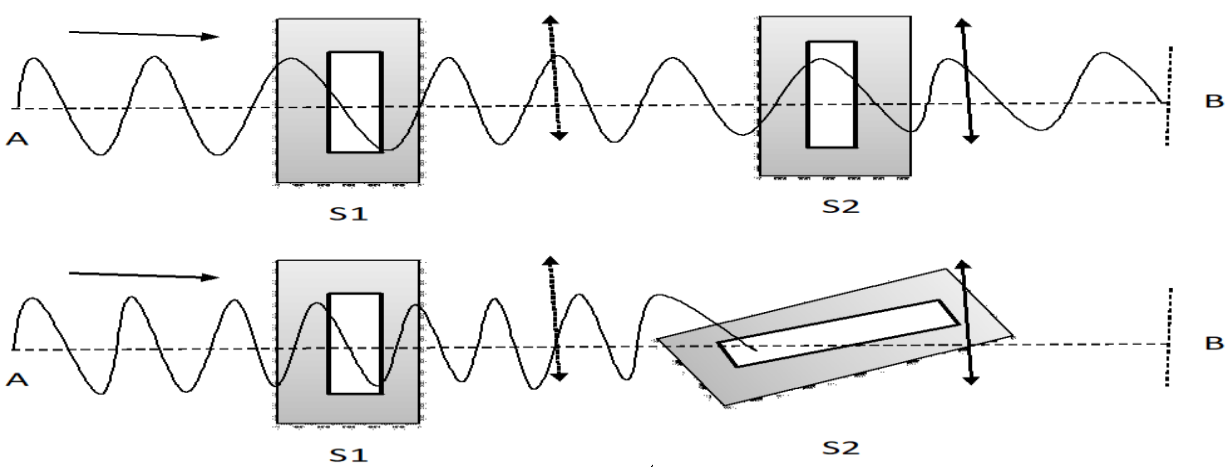
تداخل، انکسار اور تقطیب نامی کچھ ایسے نور کے واقعات ہیں جن میں نور کی موجی خصوصیت بہت اہم ہوتی ہے۔ ان واقعات یا ان تجربات کو بندسی نوریات کے اُصول کے ذریعہ سمجھایا نہیں جاسکتا۔

اس اکائی میں انعکاس(Reflection) انعطاف(Refraction) پر بنی نور کی تقطیب(Polarization) کے مظہر کو سمجھایا گیا ہے۔ اس اکائی میں ہم:

- تقطیب نما(Polarized) کو استعمال کرتے ہوئے غیر مقطب(Unpolarised) نور کو مستوی مقطب(plane polarized) نور میں تبدیلی کو سمجھیں گے۔
- مالس کے کلیہ کی مدد سے تقطیب شدہ نور کی حدت کو محسوب کریں گے۔
- دوہرے انعطاف کے مظہر کو سمجھیں گے۔
- معمولی اور غیر معمولی شعاعوں کے انعطاف نما کو سمجھیں گے۔
- نکول منشور کی ساخت اور اس کے کام کرنے کے طریقہ کو محسوب کریں گے۔

18.2 تقطیب (Polarization)

تداخل اور انکسار کے واقعات سے نور کی موجی ماہیت ثابت ہوگی مگر یہ ظاہر نہیں ہوتا کہ یہ موجیں طولی ہوتی ہیں یا عرضی۔ کیوں کہ نور کی شعاعیں برقی مقناطیسی موجیں ہوتی ہیں اور برقی مقناطیسی موجوں میں برقی میدان $\vec{E}$ اور مقناطیسی میدان $\vec{H}$ کے سمتیے ایک دوسرے کے عموداً ہوتے ہوئے موج کی سمت اشاعت کے بھی عموداً ہوتے ہیں۔ اس لیے یہ کہا جاسکتا ہے کہ نور کی شعاعیں عرضی ہوتی ہیں۔



شکل(18.3)

تقطیب دراصل عرضی موجوں کی خاصیت ہوتی ہے جس کی بناءپر اس موج کے ارتعاشات ایک سطح میں مقید رہتے ہیں۔تقطیب کے تصور کو سمجھنے کے لیے ہم سب سے پہلے ایک میکانی عرضی موج پر غور کریں گے جو ایک افقی ڈوری میں آگے بڑھ رہی ہے۔اس موج کے لیے واسطہ ڈوری ہے اوراس کے ذرات عمودی سمت میں مرتعش ہیں۔

فرض کیجیے کے اس ڈوری کو دو کارڈ بورڈ کے جھری(سلٹ) S_1 اور S_2 میں کٹے ہوئے عمودی شگاف سے گزارا جائے جیسا کہ شکل(18.3)میں دکھایا گیاتب بھی یہ موج اس کارڈبورڈ سے باآسانی گزر جائے گی۔اگراس دوکارڈبورڈمیں دوسری کارڈبورڈ کی جھری S_2 کے شگاف کو 90^o پر گھما کر اُفقاً کر دیا جائے تو ڈوری کے موجی ارتعاشات اس کارڈ بورڈ کے جھری S_2 پر آکر رک جاتے ہیں جیسا کہ شکل(18.3)میں دکھایا گیاہے۔

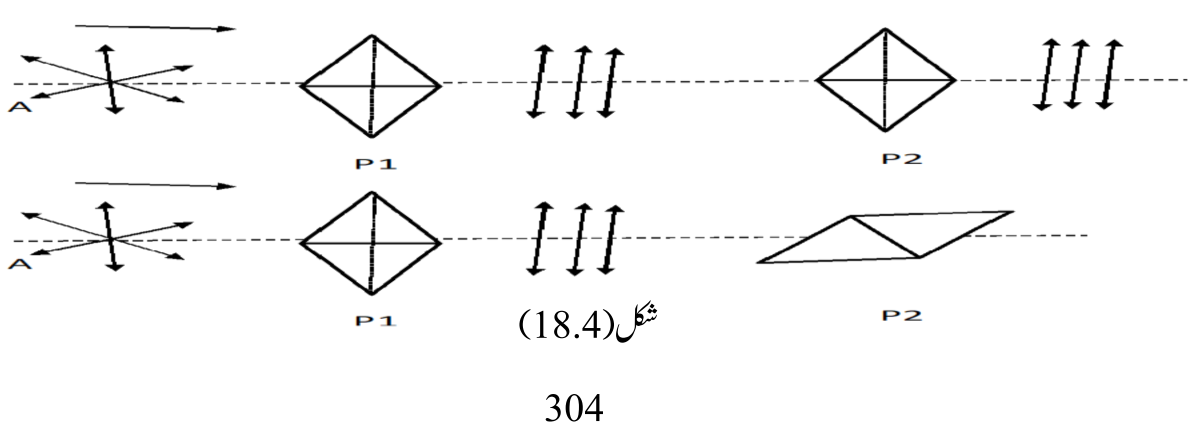
افقی ڈوری میں عرضی ارتعاشات کو بھی اُفقاً کیاجاسکتاہے۔جس کی وجہ سے ڈوری میں موج افقی سطح میں آگے بڑھتی ہے۔اگرایسی ڈوری کوکارڈبورڈوالے دوشگاف S_1اورS_2 کے جھری سے گزارا جائے تو موجی ارتعاشات اس کارڈبورڈوں سے اسی وقت گزر سکتے ہیں جب کہ یہ دوشگاف S_1اور S_2 جھری بھی افقاًہو۔اگراس شگاف کوS_2 کے جھری کو90^oپر گھما کر عموداًرکھاجائے تو موجی S_1 شگاف سے گزرتے ہوئے S_2 جھری کے شگاف پررک جاتی ہیں۔

اگرایک ہی عرضی موج کوایک کے بعد دیگرے شگافوں سے گزارناہو توان شگافوں کوایک دوسرے کے متوازی رکھناضروری ہوتا ہے۔اگران شگافوں کے درمیان زاویئے کو بڑھایاجائے تو موج کا گزر کم ہونے لگتاہے۔اگراس زاویئے کو90^o کیاجائے تو موج مکمل طور پر رک جاتی ہے۔یہ تجربات صرف عرضی موجوں کے لیے ممکن ہیں۔طولی موج کے لیے تقطیب کاتصور بے معنی ہوتاہے۔

تقطیب کی خصوصیات:

18.2.1 منقطب شعاع (Polarized Ray)

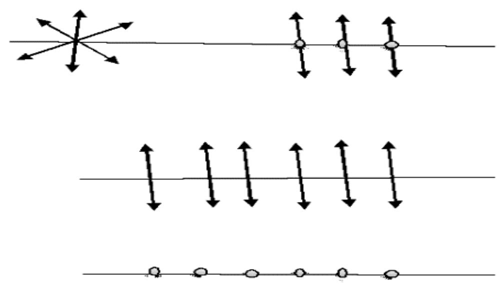
شکل(18.4)پر غور کیجیے جس میں ایک موج x- محور کی سمت میں آگے بڑھ رہی ہے۔یہ ایک برقی مقناطیسی موج ہے اوراس کا برقی سمتیہ $\vec{E}$ ہمیشہ y کی سمت میں بڑھتاہے اور گھٹتاہے یہ موج اس طرح آگے بڑھتی ہے کہ اس کا برقی سمتیہ ہمیشہ x-y سطح میں رہتاہے۔یہ منقطب شعاع(Polarized ray) کہلاتی ہے۔



شکل(18.4)

x-y سطح اس کی سطح تقطیب ہوئی اور یہی سطح ارتعاش بھی کہلاتی ہے۔عام طور پر جب کسی مبداء سے نور کی شعاعیں خارج ہوتی ہیں تو اس کے ہر سالمے سے شعاعوں کا اخراج ہوتا ہے۔ان سب شعاعوں میں برق سمتیے کا تمام مختلف سمتوں میں ہوا کرتے ہیں۔ان تمام شعاعوں کو جب مجموعی طور پر حاصل کیا جاتا ہے تو ان میں ان کے برقی سمتیے ہر سمت میں پائے جاتے ہیں۔

18.2.2 غیر منقطب شعاع (Un Polarized ray)



شکل(18.5)

شکل(18.5) میں ایک شعاع کو دکھایا گیا ہے جو اس صفحے انتصاباً نکل کر باہر آرہی ہے اور مختلف سمتوں میں تیر کے نشانات ان کے برقی سمتیوں کو ظاہر کرتے ہیں۔اس مجموعی شعاع کو غیر منقطب شعاع(Polarized ray) کہتے ہیں۔

18.2.3 دائروی منقطب (Circularly Polarized)

برقی میدان کا سمتیہ (اس کی وجہ سے مقناطیسی میدان کا سمتیہ بھی) اگر کچھ اس طرح حرکت کرے کہ اس کا سرا(Tip) شعاع کی سمت کے اطراف ایک مستقل زاوئی رفتار سے گردش کرتے ہوئے ایک دائرہ کو تعبیر کرے تو ہمیں دائروی منقطب (Circularly Polarized) نور حاصل ہوتی ہے۔

18.2.4 ناقصی منقطب(Elliptically Polarized)

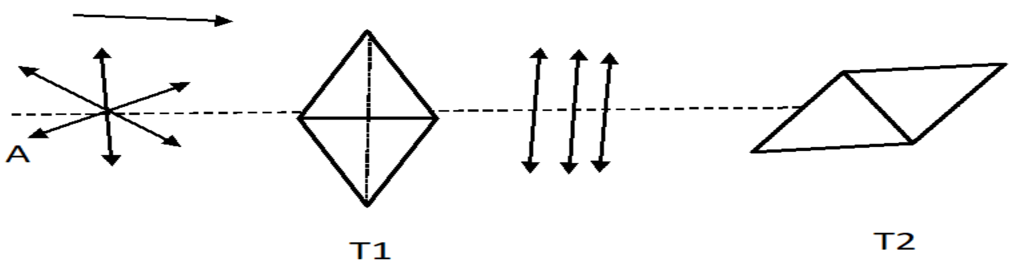
اگر برقی میدان کے سمتیے کا سرا (اس کی وجہ سے مقناطیسی میدان کا سمتیہ بھی) شعاع کی سمت کے گرد ایک مستقل زاوئی رفتار سے گھومتے ہوئے ایک ناقصی(Ellipse) بناتا ہے تو ہمیں ناقصی منقطب(Elliptically Polarized) نور حاصل ہوتی ہے۔

18.2.5 خطی منقطب شعاع (Linear Polarized ray)

شعاع کی اشاعت کے دوران اگر برقی سمتیہ $\vec{E}$ ہمیشہ ایک مخصوص سمت میں مرتعش ہوتا ہے تو ایسی مخصوصی سمت میں مرتعش ہوتا ہے تو ایسی شعاع خطی منقطبت شعاع(Linear Polarized ray) کہلاتی ہے۔

ایک غیر منطقب شعاع سے خطی مسقطب شعاع حاصل کی جاسکتی ہے۔اس کے لیے غیر منقطب شعاع میں موجود تمام سمتوں والے

برقی سمتیوں کو روک کر صرف ایک مخصوص سمت والے برقی سمتیے کو آگے بڑھایا جاتا ہے۔اس کام کے لیے ٹار مالیں کی تختی کو استعمال کی جاتی ہے۔



شکل(18.6)

شکل(18.6) میں ایک غیر منقطب شعاع مبداء سے نکل کر فار مالین کی تختی T پر واقع ہوتی ہے۔ٹار مالین کی دونوں تختیاں T_1اور T_2 کی سطحیں شعاع پر انتصاباً رکھی گئی ہیں۔چنانچہ غیر منقطب شعاع کے تمام برقی سمتیے اس پہلی تختی T_1 پر واقع ہوتی ہیں۔

ان سمتیوں میں صرف ایک ہی سمتیے کے لیے یہ تختی شغاف ہوتی ہے اور دوسرے تمام سمتیوں کو یہ روک دیتی ہے۔اس تختی سے گزر کر آگے بڑھنے والی شعاع خطی منقطب شعاع ہوتی ہے۔اس خطی منقطب شعاع کی حدت I غیر منقطب شعاع وقوع کی حدت I_0 کے مقابلے کم ہوتی ہے۔

اگر تختی T_2 کے محور کی سمت وقوع پر شعاع کے 'E' سمتیے کے متوازی ہو تو شعاع مکمل طور پر تختی سے گزر کر مشاہد کی آنکھ پر پڑتی ہے اور روشنی کی حدت انتہائی دکھائی دیتی ہے۔اگر E سمت تختی T_2 کے محور کے عموداً واقع ہو تو شعاع کامل طور پر رک جاتی ہے اور مشاہد کوئی روشنی محسوس نہیں کرتا۔

اگر ٹار مالین کی دو تختیوں کے درمیان زاویہ θ ہو اور I_0 حدت والی غیر منقطب شعاع ان دونوں سے گزرنے کے بعد اس کی حدت I رک جاتی تب۔

$$I = I_0 Cos^2\theta$$

یہ مالس کا کلیہ (Malus law) کہلاتا ہے۔

جب ٹار مالین ی دو تختیوں کے محور ایک دوسرے کے متوازی $\theta = 0$ یا $\theta = 180^0$ ہو تو شعاعوں کی اعظم ترین حدت ان سے گزرتی ہے۔

اگر یہ دونوں محور ایک دوسرے کے عموماً $\theta = 90^0$ یا $\theta = 270^0$ ہو تو شعاعیں بالکل رک جاتی ہے۔

18.2.6 تقطیب کے اطلاق:

1. مائعات اور قلموں کی نوری فعالیت (Optical activity) کی تخمین کی جاتی ہے۔

2. خلوی ترشوں (Nucleic acids) کی مر غولہ دار ساخت کا مطالعہ کیا جاتا ہے۔
3. سالمات کی ساخت اور جسامات کے مطالعے کے لیے ان سے منتشر شدہ شعاعوں کی تقطیب کا مشاہدہ کیا جاتا ہے۔
4. کمپیوٹر ٹیلی ویژن، سیل فون وغیرہ کا مائعاتی قلمی پیشگر (Liquid Crystal Display) پر بننے والی شکلیں شعاعوں کی تقطیب کی وجہ سے ہوتی ہیں۔

18.3 بروسٹر کا کلیہ (Brewster's Law)

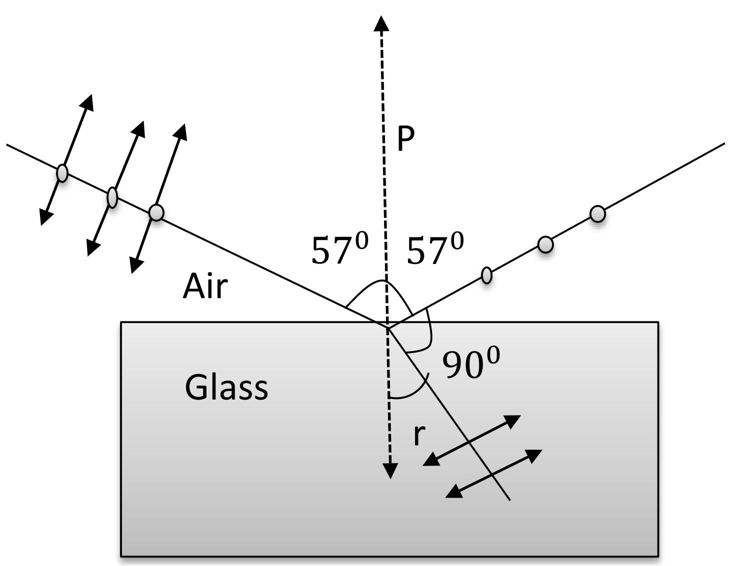
بروسٹر (Brewster) نامی سائنسداں نے بتایا کہ کسی مخصوص زاویہ وقوع کی قیمت پر شعاع منعکس سو فیصد افقی اور شعاع منعطف سو فیصد عمودی منقطب ہو جاتی ہے۔ یہ اُس وقت ہوتا ہے جب کہ یہ دونوں شعاعیں ایک دوسرے 90° کا زاویہ بنا کر آگے بڑھ رہی ہوں۔ اگر خلاں میں گزرنے والی ایک غیر منقطب شعاع انعطاف نما والے واسطے پر $i\rho$ زاویہ وقوع سے واقع ہوتی ہے اور اس کی وجہ سے شعاعِ منعکس اور شعاعِ منعطف ایک دوسرے سے 90° کا زاویہ بنا کر آگے بڑھتی ہوں تو

$$\mu = \tan i\rho$$

جہاں $\mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}$ واسطہ 1 کے لحاظ سے واسطہ 2 کا انعطاف نما ہے۔ یہ مساوات کو بروسٹر کا کلیہ (Brewster's) کہا جاتا ہے۔

انعکاس اور انعطاف کے درمیان زاویہ:

شکل (18.7) میں ایک غیر منقطب شعاع جو نقطہ A اور B تک پہنچتی ہے۔ یہ شعاع منعکس ہو کر BC کے راستے پر چلتی ہے اور منعطف ہو کر BD کے راستے پر چلتی ہے۔ یہ شعاع ایک مخصوص زاویہ وقوع 57° پر صرف وہ ارتعاش منعکس ہوتے ہیں جن کو نقاط کے ذریعہ دکھایا گیا ہے۔ جب کہ دوسرا اجز مکمل طور پر منعطف (Refract) ہو جاتا ہے۔



شکل (18.7)

بروسٹر کا کلیہ کو استعمال کرنے پر

$$\mu = \tan P \tag{18.1}$$

اسنیل سے کے کلیہ کی رو سے

$$\mu = \frac{\sin P}{\sin i} \tag{18.2}$$

مساوات(18.1)اور(18.2)سے

$$\tan P = \frac{\sin P}{\sin i} \tag{18.3}$$

$$\frac{Sin\, P}{\cos P} = \frac{\sin P}{\sin i} \tag{18.4}$$

$$(\because i = r) \qquad Sin\, i = \sin P \tag{18.5}$$

$$Sin\, r = \sin(90^0 - P) \tag{18.6}$$

$$r = 90^0 - P \tag{18.7}$$

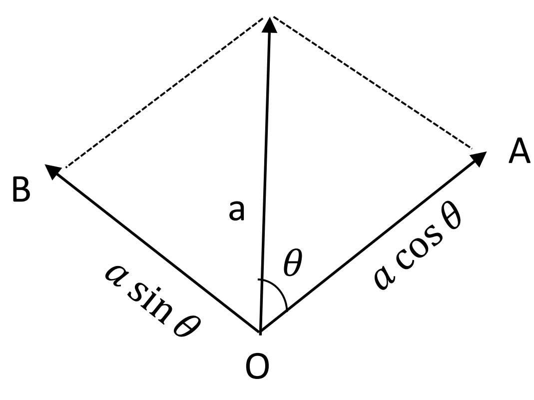
$$r + P = 90^0 \tag{18.8}$$

بروسٹر (Brewster)نے یہ معلوم کیا کہ تقطیب کے زاویہ 57^o پر شکل(18.7) منعکس شدہ اور خارج شدہ شعاعیں ایک دوسرے پر علی القوائم واقع ہوتی ہیں۔

یعنی $r + P = 90^0$

18.4 مالس کا کلیہ (Law of Mauls)

ایک تجزیہ گر(Analyzer)کو نور کو سمت اشاعت کے گرد گھمایا جائے تو اس سے خارج ہونے والے نور کی حدت کس طرح متاثر ہوتی ہے۔



شکل(18.8)

دو تقطیب نما کے درمیان زاویہ θ کے لیے اگر تجزیہ گر پر پڑنے والے مستوی مقطب نور کا حیطہ ارتعاش a ہو تو خارج ہونے والے نور کا حیطہ ارتعاش $a\ \mathrm{Cos}\ \theta$ ہو گا۔

شکل(18.8) میں نور کی حدت اس کے حیطہ ارتعاش کے مربع کے تناسب ہوتی ہے۔

$$Intensity \propto (amplitude)^2$$

$$I_\theta = (a\ \mathrm{Cos}\ \theta)^2 = a^2\ \mathrm{Cos}^2\ \theta$$

I خارج ہونے والے نور کی اعظم ترین حدت ہے۔

$$I = a^2$$

$$I_\theta = I\ \mathrm{Cos}^2\ \theta$$

$$I_\theta \propto \mathrm{Cos}^2\ \theta$$

جہاں θ تجزیہ گر اور تقطیب گر کے درمیان تقطیبی سمتوں کا زاویہ ہے۔

Case1 $\theta = 0^o$ ہو تو تب $\mathrm{I}_\theta = I(1)$ $\because \mathrm{Cos}\ \theta^0 = 1$

$$I_\theta = I$$

دو تقطیب نما کے درمیان زاویہ صفر ہوتا ہے تو نور کی حدت اعظم ترین ہوتی ہے۔

Case2 $\theta = 90^o$ ہو تو تب $\mathrm{I}_\theta = 0$ $\because \mathrm{Cos}\ 90^0 = 0$

دو تقطیب نما کے درمیان زاویہ 90^o ہوتا ہے تو نور کی حدت صفر ہو جاتی ہے۔

18.5 تقطیب کے طریقے (Types of Polarization)

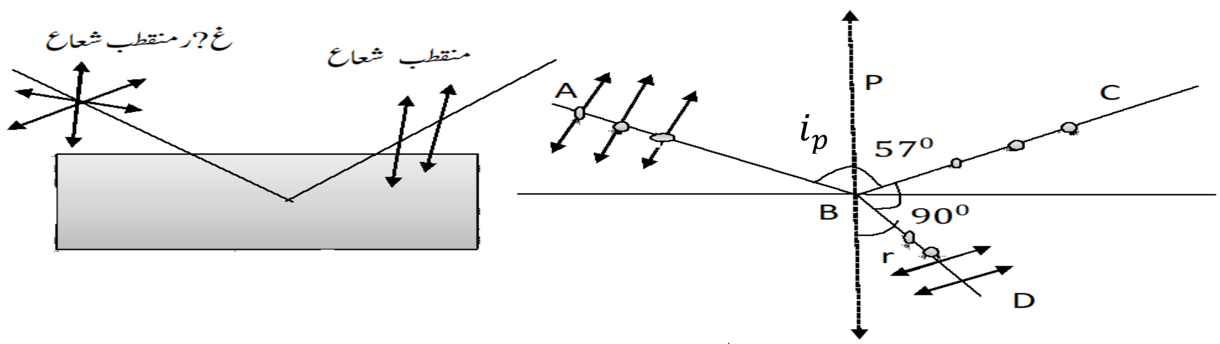
تقطیب

1. انعکاس کے ذریعہ تقطیب (Polarization by Reflection)
2. انعطاف کے ذریعہ تقطیب (Polarization by Refraction)
3. دوہرے انطاف کے ذریعہ تقطیب (Polarization by Double Refraction)
4. روشنی کا بکھرنے کے ذریعہ تقطیب (Polarization by Scattering of light)
5. منتخب جذب کے ذریعہ تقطیب (Polarization by Selective absorption)

18.5.1 انعکاس کے ذریعہ تقطیب (Polarization by Reflection)

فرانسی ماہر طبیعیات مالس (Malus) نے سب سے پہلے یہ مشاہدہ کیا کہ جب غیر منقطب شعاع کسی سطح سے منعکس ہوتی ہے تو منعکس شدہ شعاع جزوی یا مکمل طور پر منقطب ہو جاتی ہے۔ کیوں کہ غیر منقطب شعاع دراصل اُن تمام منقطب شعاعوں کا مجموعہ ہوتی ہے جس میں برقی سمتیہ $\vec{E}$ سمت اشاعت کے انتصابی قرص ہر ممکنہ قطر پر پائے جاتے ہیں۔ چنانچہ جب کوئی غیر منقطب شعاع آگے بڑھتی ہے تو اس

شعاع سے منسوب تمام برقی سمتیوں کو اجزامیں تحلیل کر کے صرف دو عمودی سمتیے تصور کیے جا سکتے ہیں۔یعنی اگر غیر منقطب شعاع Z سمت میں بڑھ رہی ہے تو اس کے تمام برقی سمتیے xy سطح میں ہوں گے اور ان کو یہ کہا جا سکتا ہے کہ یہ دو سمتیوں کا مجموعہ جو x اور y سمتوں میں ہیں۔ شکل(18.9) (a) میں ایک غیر منقطب شعاع دکھائی گئی ہے اور اس کے انتصاباً قرص میں برقی سمتیے $\vec{E}$ تیروں کے ذریعہ دکھائے گئے ہیں۔ انعکاس کے بعد اس شعاع کے تمام تر تحلیل ہو جاتے ہیں اور ایک تیر باقی رہتا ہے جو سطح انعکاس کے انتصاباً ہوتا ہے۔ عموماً جب کسی غیر منقطب شعاع کو شکل سے ظاہر کرنا ہو تو شعاع پر ترتیب وار نقطے اور دوہرے رخ والے تیر اُتارے جاتے ہیں۔



شکل(18.9)

شکل(18.9) میں ایک غیر منقطب شعاع کو دکھایا گیا ہے جو نقطہ A اور B تک پہنچتی ہے۔ کیوں کہ یہ شعاع غیر منقطب ہے اس لیے اس پر دوہرا تیر اور نقاط دکھائے گئے ہیں۔ یہ شعاع منعکس ہو کر BC کے راستے پر چلتی ہے اور منطف ہو کر BD کے راستے پر چلتی ہے۔ شعاعِ منعکس BC میں برقی سمتیے سطح انعکاس (یعنی کاغذ کی سطح) کے انتصاباً ہوتے ہیں۔ اس لیے ان کو نقاط سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اسی طرح شعاعِ منقطف BD میں برقی سمتیے سطح انعکاس میں ہوتے ہیں۔ اس لیے ان کو دوہرے تیروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ عموماً شاعِ منعکس اور شعاع منعطف مکمل طور پر منقطب نہیں ہوا کرتیں۔ شعاعِ منعکس تقریباً افقی منقطب ہوتی ہے اور اس میں چھوٹا سا حصہ عمودی منقطب شعاع کا ہوتا ہے۔ اسی طرح شعاعِ منعطف تقریباً عمودی منقطب ہوتی ہے اور اس میں چھوٹا سا حصہ افقی منقطب شعاع کا ہوتا ہے۔

بائیسوٹس پولار سکوپ: فرانسی ماہر طبیعیات مالس (Mauls) نے یہ دریافت کیا کہ جب ایک غیر مقطب نور کسی شفاف شیشے کی سطح پر تقریباً 57^{o} کا زاویہ بناتے ہوئے واقع ہوتا ہے تو اس سطح سے منعکس ہونے والا نور مستوی مقطب ہوتا ہے۔ اس تجربہ کی ترتیب کو شکل(18.10) میں دکھایا گیا ہے جو مالس کی دریافت کی وضاحت کرتی ہے۔

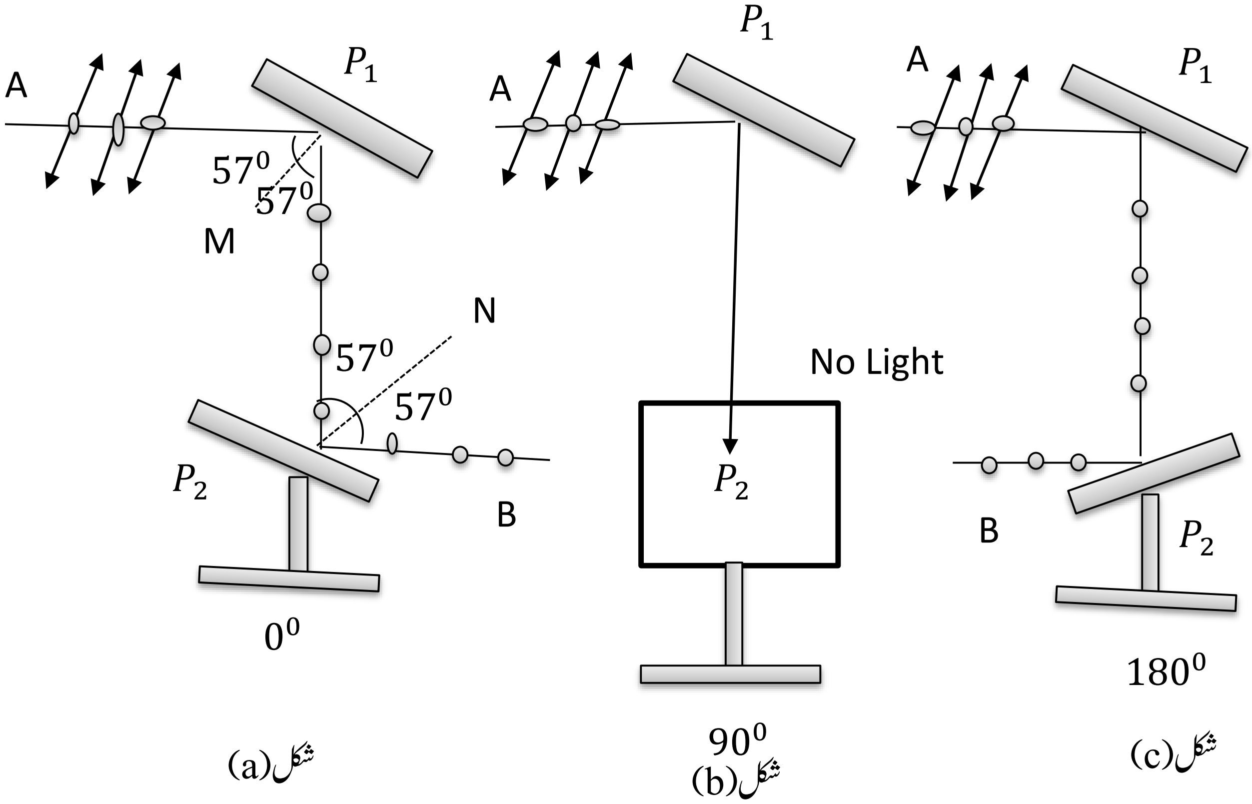
بائیوٹس پالور سکوپ کے تجربی ترتیب میں P_1 اور P_2 دو شیشہ کے پلیٹ ہوتے ہیں۔ شیشہ کے دوسرے پلیٹ P_2 کو ایک پائیدان پر اس طرح نصب کیا جاتا ہے کہ اس کو P_1 اور P_2 کے اطراف گھمایا جا سکتے ہیں۔

شکل(18.10)(a) میں یہ دکھایا گیا ہے کہ ایک غیر مقلب نور کی شعاع A کو پہلے شیشے کے پلیٹ P_1 کی سطح پر واقع ہو رہی ہے۔ پھر یہ نور دوسرے شیشہ کے پلیٹ P_2 سے اسی زاویہ پر منعکس ہوتا ہے۔ P_1 اور P_2 پلیٹ ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔ اب ہم پائیدان کو

آہستہ سے گردش دے کر P_2 کو محور P_1 اور P_2 کے گرد گھماتے ہیں۔ P_2 پلیٹ سے منعکس ہونے والے نور کی حدت میں کمی واقع ہوتی ہے اور 90^o کے زاویہ پر مکمل طور پر غائب ہو جاتی ہے۔

شکل (18.10)(b) میں پائیدان کو آہستہ سے گھمانے سے P_2 پلیٹ پر منعکس ہونے والی شعاع B ظاہر ہوتی ہے۔

اسی طرح شکل (18.10c) میں دکھایا گیا ہے کہ پائیدان کو گھمانے سے منعکس ہونے والی شعاع 180^o کے زاویہ پر اعظم ترین ہوتی ہے۔ اس کے بعد مزید گھمانے سے نور کی حدت 270^o پر صفر ہو جاتی ہے اور 360^o کے زاویہ پر اعظم ترین ہو جاتی ہے۔ اس ایک مکمل گردش کے دوران دونوں پلیٹوں پر نور زاویہ وقوع 57^o رہتا ہے۔



شکل (a) شکل (b) شکل (c)

شکل (18.10)

اگر زاویہ وقوع 57^o سے مختلف ہو تو نور کی حدت ہر مرتبہ 90^o پر پہلے کی طرح اپنی اعظم اور اقل قیمتوں سے گزرے گی مگر اقل ترین حدت صفر تک نہیں پہنچے گی۔ بالالفاظ دیگر اس صورت میں منعکس ہونے والی شعاع B ہمیشہ موجود پائی جائے گی۔

مذکورہ بالا تجربے کو انعکاس میں واقع ہونے والی تبدیلیوں کا جائزہ لیتے ہوئے مزید واضح کیا جا سکتا ہے۔ شکل (18.10) میں ایک شیشے کی سطح پر نور کی ایک غیر مقطب شعاع کے انعکاس کو دکھایا گیا ہے۔ اس سے پہلے بتایا جا چکا ہے کہ واقع ہونے والی نور کی شعاع کے برقی سمتیے کو اس کے دو اجزا میں تحلیل (Resolve) کیا جا سکتا ہے۔ شکل میں نقاط (Dots) ایسے ارتعاشوں کو ظاہر کرتے ہیں جو کاغذ کی سطح سے انتصابی سمت میں واقع ہیں اور تیر کے نشان ان ارتعاشوں کو ظاہر کرتے ہیں جو شکل کو سطح میں واقع ہیں۔ عام طور پر ان دونوں اجزا کے حیطہ

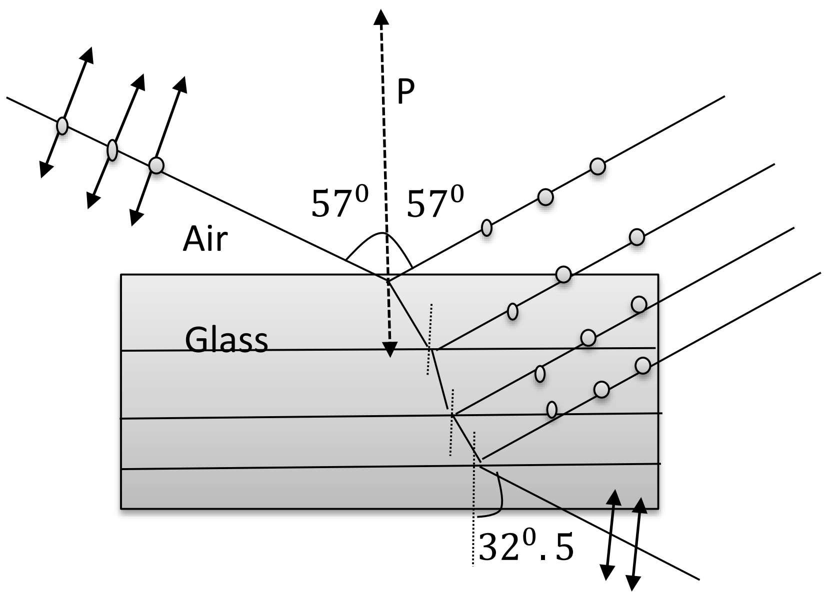
ارتعاش مساوی ہوتے ہیں۔

اس تجربات کے ذریعہ یہ پتہ چلا ہے کہ ایک مخصوص زاویہ وقوع OP پر صرف وہ ارتعاش منعکس ہوتے ہیں جن کو نقاط کے ذریعہ دکھایا گیا ہے۔ جب کہ دوسرا جز مکمل طور پر منعطف (Refract) ہو جاتا ہے۔ ظاہر ہے کہ منعکس شدہ شعاع کی حدت کم ہو گی۔ یہ شعاع مستوی مقطب ہوتی ہے اور یہ زاویہ وقوع θ_p تقطیب کا زاویہ کہلاتا ہے۔

18.5.2 انعطاف کے ذریعہ تقطیب (Polarization by Refraction)

انعطاف کے ذریعہ تقطیب: جب غیر منقطب شعاع شیشے کی تختی سے منعطف ہوتی ہے تو منعطف شدہ شعاع میں عمودی منقطب حصہ زیادہ ہوتا ہے اور تھوڑا سا حصہ افقی منقطب شعاع کا ہوتا ہے۔

منعکس شدہ مستوی مقطب شعاع کی حدت کو شیشے کے مزید پلیٹوں کے استعمال سے بڑھایا جا سکتا ہے جیسا کہ شکل (18.11) میں بنایا گیا ہے۔ اس شعاع کو جب بار بار شیشے کی تختیوں سے منعطف کیا جاتا ہے تو یہ شعاع تقریباً مکمل طور پر عمودی منعطف ہو جاتی ہے۔ اس کے لیے شیشے کی متوازی تختیوں کو استعمال کیا جائے گا۔ کیوں کہ درکار زاویہ وقوع 57^o ہے اس لیے شعاعِ وقوع اور تختیوں کی سطح کے درمیان زاویہ 32.9^o بنایا جاتا ہے۔

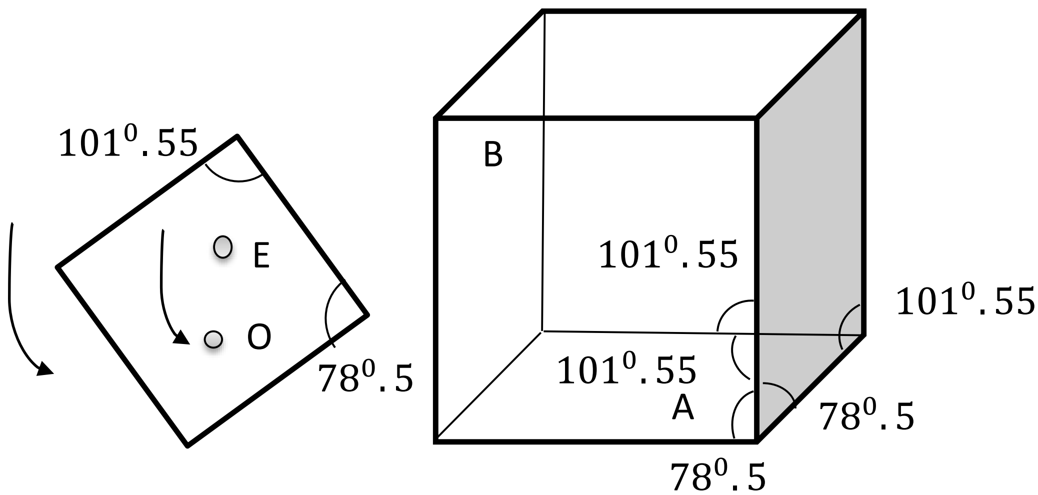


شکل (18.11)

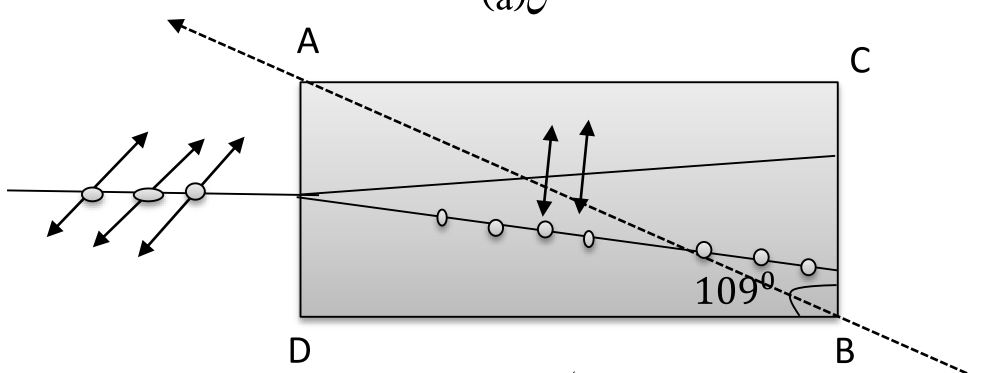
جب غیر منقطب شعاع شیشے کی پہلی تختی پر واقع ہوتی ہے تو اس کا کچھ حصہ منعطف اور کچھ حصہ منعکس ہو جاتا ہے۔ منعطف شدہ شعاع کا بیشتر حصہ عمودی منقطب ہوتا ہے۔ اس کو مکمل طور پر عمودی منقطب کرنے کے لیے بار بار شیشے کی تختیوں سے گزارا جاتا ہے۔ بالآخر یہ شعاع مکمل طور پر منقطب ہو جاتی ہے۔ اس شعاع کو شکل (18.11) میں دوہرے تیروں کے ساتھ دکھایا گیا ہے۔

کیلسائیٹ کرسٹل(قلم)(Geometry of Calcite Crystal)

شکل(18.12) دراصل کیلسائیٹ کرسٹل(قلم)کا ایک خاکہ ہے۔کیلسائیٹ($CaCo_3$) کو ائس لینڈ اسپار(Iceland Spar) بھی کہا جاتاہے۔یہاں کرسٹل کے ہر کونے A اور B پر تین سطحوں کے تقاطع سے بننے والے زاویے یکساں ہوتے ہیں یعنی ہر زاویہ 101.55^o کا ہوتاہے جیسی شکل(18.12) میں دکھایا گیاہے۔



شکل(a)



شکل(b)

شکل(18.12)

ایک خط جو A یا B پر اس طرح کھینچا گیاہے کہ وہ تینوں منقاطع کناروں سے مساوی زاویئے بناتاہے،وہ کرسٹل کا مناظری محور ہوتا ہے۔معمولی اور غیر معمولی شعاعوں کے ارتعاشوں کی سمتیوں کو اب مناظری محور کے لحاظ سے متعین کیا جاسکتاہے۔

کرسٹل کا مناظری محور(Optical axis)

کیلسائیٹ کرسٹل میں دوہرا انعطاف سوائے ایک سمت کے باقی تمام سمتوں میں دیکھا جاسکتاہے۔اس ایک مخصوص سمت کو اس

کرسٹل کا مناظری محور(Optic Axis) کہا جاتا ہے۔اس سے یہ نتیجہ نکالا جاسکتا ہے کہ اس سمت میں نور کی دونوں شعاعوں کی رفتاریں یکساں ہوتی ہیں۔

تراش اصلی(Principal Section) :کیلسائیٹ کے کرسٹل میں ایک مستوی تراش کو دکھاتی ہے۔اس تراش میں مناظر ہی محور واقع ہے اور یہ تراش کرسٹل کے مقابل رخوں پر عمود وار ہے اس تراش کو اصلی(Principal Section) کہا جاتا ہے۔

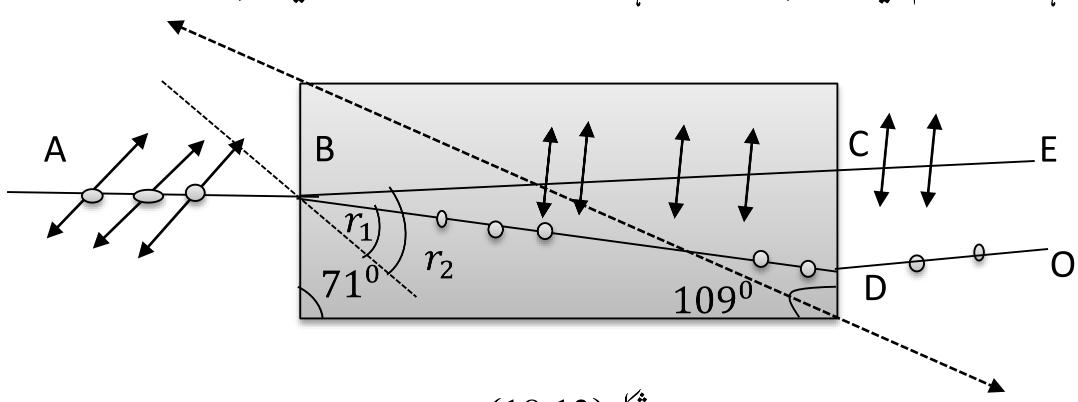
شکل(18.12) کیلسائیٹ کے کرسٹل میں ایک مستوی تراش(Plane Section) کو دکھاتی ہے۔اس تراش میں مناظری محور واقع ہے اور یہ تراش کرسٹل کے مقابل رخوں پر عمود وار ہے۔ غیر مقطب نور کی ایک باریک شعاع جو اس مستوی تراش، تراش اصلی(Principal Section) میں سے گزرتی ہے، دو شعاعوں میں بٹ جاتی ہے اور کرسٹل سے دو متوازی شعاعوں کی شکل میں باہر نکلتی ہے۔ان میں ہر شعاع خطی مقطب(Linearly Polarized) ہوتی ہے۔ معمولی شعاع میں سمت ارتعاش تراش اصلی کی مستوی کے علی القوائم ہوتی ہے۔ غیر معمولی شعاع کی ارتعاش سمت یاتو تراش اصلی کی مستوی کے متوازی پھر اسی میں واقع ہوتی ہے۔

18.5.3 دوہرے انطاف کے ذریعہ تقطیب (Polarization by Double Refraction)

ایسا مادہ جس کی طبعی خصوصیات ہر سمت میں یکساں ہوتی ہیں غیر طرفی مادہ(Isotropic Material) کہلاتا ہے اور اگر کسی مادے کی طبعی خصوصیات کسی مخصوص سمت میں مختلف پائی جاتی ہو تو اس کو ایک رخی مادہ(Anisotropic Material) کہا جاتا ہے۔

شیشہ ایک غیر طرفی مادہ ہے کیوں کہ اس کی طبعی خصوصیات(یعنی روشنی کی رفتار) ہر سمت میں یکساں رہتی ہے اور شیشے میں موجود کسی نقطی مبداء سے نکلنے والے موجی محاذ سب ہم مرکز اور کروی شکل کے ہوتے ہیں۔ لیکن کوارٹز کیا لسائیٹ اور گارے کا شیشہ یہ سب ایک رخی مادے کی مثالیں ہیں کیوں کہ ان کی طبعی خصوصیات ہر سمت میں یکساں نہیں ہوتی۔ایسے واسطے میں موجود کسی نقطی مبدا سے نکلنے والے موجی محاذ ہم مرکز مگر بیضوی ہوتے ہیں کیوں کہ ان کی طبعی خصوصیات ایک مخصوص سمت میں مختلف پائی جاتی ہیں۔ لیکن اس سمت کے انتصابی سطح کی تمام سمتوں میں یکساں پائی جاتی ہے۔اس مخصوص سمت کو ایک رخی مادے کا محور کہا جاتا ہے۔

دوہرا انعطاف: کیالسائیٹ کوارٹز یا گارے کے شیشے کے کندے میں جب غیر منقطب شعاع داخل ہوتی ہے تو یہ دو حصوں میں تقسیم ہو جاتی ہے۔ شعاعی تقسیم کا یہ واقع دوہرا انعطاف کہلاتا ہے۔اس طرح کے واسطے کی طبعی خصوصیات ہر سمت میں یکساں نہیں ہوتیں۔



شکل(18.13)

انعطاف نما کی بھی دو قسمیں ہوتی ہیں۔ایک معمولی(Ordinary)اور دوسرے غیر معمولی(Extra Ordinary)اس مناسبت سے ایک شعاعِ وقوع کے لیے دو منطف شدہ شعاعیں بنتی ہیں۔ جس شکل(18.13) میں دکھایا گیا ہے کہ کیلسائیٹ کی ایک کرسٹل کے کسی ایک رخ پر نور کی ایک باریک شعاع عمودوار واقع ہو رہی ہے۔اس کرسٹل سے نکلنے والے نور کے راستے میں رکھے ہوئے ایک پردے پر دو نقاط(E اور O) دیکھے جا سکتے ہیں۔اب اگر نور کی شعاع کے متوازی سمت میں کرسٹل کو گھمایا جائے تو نقطہ 'O' اپنی جگہ ساکن رہتا ہے جب کہ دوسرا نقطہ E محور کے گرد گھومتا ہے۔اس طرح ایک واحد ساع واقع دو مختلف شعاعوں کو وجود میں لاتی ہے۔ان میں ایک شعاع 'O' ایسی شعاع کو ظاہر کرتی ہے جو کسی مادے نے جیسے شیشے سے معمول مطابق گزر جاتی ہے۔ یہ شعاع جو انعطاف کے عام کلیات کی پابندی کرتی ہے معمولی سعاع(Ordinary ray) کہلاتی ہے۔جب کہ دوسری شعاع E غیر معمولی شعاع(Extra ordinary) کہلاتی ہے۔

معمولی شعاع اسنیل(Snell) کے کلیہ کی پابندی ہوتی ہے۔یعنی

$$\mu_0 = \frac{\sin i}{\sin r}$$

شعاع غیر معمولی کے لیے μ کی قیمت زاویہ وقوع پر منحصر ہوتی ہے۔

$$\mu_e = \frac{\sin i}{\sin r}$$

جہاں i=زاویہ وقوع اور r=زاویہ انعطاف ہے۔

شعاع 'O' کے لیے استقلال نسبت(Constancy of Ratio) یہ ظاہر کرتا ہے کہ ایک واسطے میں نور کی رفتار تمام سمتوں میں یکساں ہوتی ہے۔اس کے برعکس شعاع E کے لیے اس نسبت کا عدم استقلال یہ بتاتا ہے کہ اس کرسٹل میں نور کے اس جز(E) کی رفتار مختلف سمتیوں میں مختلف ہوتی ہے۔ اس طرح دوسری مثال پر غور کریں۔ کیالسائیٹ کا شیشہ کو کاغذ پر بنے ہوئے کسی نشان پر رکھ کر دیکھا جائے تو اس شیشے میں سے اس کے دو نشانات دکھائی دیتے ہیں۔ان میں سے ایک نشان معمولی شعاع 'O' کی وجہ سے اور دوسرا نسان غیر معمولی شعاع 'E' کی وجہ سے بنتا ہے۔اگر شیشے کو کاغذ پر رکھ کر گھمایا جائے تو محسوس ہو گا کہ عکس ٹھہرا ہوا ہے اور دوسرا اس کے اطراف گھوم رہا ہے۔ اگر دو ہم تال شعاعیں منقطب ہوں تو بھی تداخل واقع ہو گا مگر ان منقطب شعاعوں کی سطح تقطیب ایک دوسرے کے متوازی ہونا ضروری ہے۔اگر منقطب شعاعوں کی سطح تقطیب ایک دوسرے کے عمود اًہوں تو ان کے درمیان تداحل ممکن نہیں۔خواں یہ شعاعیں ہم تال بھی ہو۔تاہم ضرورت کے مطابق کسی بھی خطی منقطب شعاع کی سطح تقطیب کو بدلا جا سکتا ہے۔ مثلاً اگر کوئی افقی منقطب شعاع کسی سطح تقطیب توافق کے بجائے کسی دوسرے زاویئے پر موڑ دیا جا سکتا ہے۔ایسا کرنے کے لیے اس شعاع تو بھری فعال مائع(Optically active liquid)سے گزارنا ہو گا۔

شکل(18.13) میں ایک کیالسائیٹ(Calcite) کا منشور دکھایا گیا ہے۔ کیوں کہ یہ ایک رخی مادے سے بنا ہے لہٰذا دوہرے انطاف کا مظاہرہ کر سکتا ہے۔AB ایک غیر منقطب شعاع وقوع سے اس مادے کی انعطاف نما کی دو مختلف قیمتوں کی وجہ سے زاویہ انعطاف کی بھی دو قیمتوں ہوتی ہیں اور یہ شعاع دو حصوں میں بٹ جاتی ہے۔ معمولی شعاع(O-ray)زاویہ انعطاف r_1 بناتی ہوئی BD کے راستے پر اور غیر معمولی شعاع(e-ray)زاویہ انعطاف r_2 بناتی ہوئی BC کے راستے پر آگے بڑھتی ہیں۔

معمولی شعاع 'O' ہر سمت میں یکساں رفتار سے آگے بڑھتی ہے اور ان تمام موجوں کے لیے انعطاف نما کی قیمت بھی یکساں یعنی ملا رہتی ہے۔ان شعاعوں کے لیے موجی محاذ کروی ہوتے ہیں اور شعاعیں اسنیل کے کلیے کی پابندی کرتے ہیں۔

$$\mu_0 = \frac{\sin i}{\sin r_1}$$

غیر معمولی (e-ray) ایک مخصوص سمت میں معمولی شعاع کی رفتار سے آگے بڑھتی ہے۔یہ سمت اس ایک رخی مادے کے محور پر ہوتی ہے اور اس محور کے انتصابی سطح کی تمام سمتیوں میں یہ غیر معمولی شعاع یکساں مگر مختلف رفتار سے آگے بڑھتی ہے۔اس لیے غیر معمولی شعاع کے موجی محاذ بیضوی ہوتے ہیں۔یہ شعاعیں اسنیل کے کلیے کی پابندی نہیں کرتی ہیں۔

$$\mu_r = \frac{\sin i}{\sin r_2}$$

کرسٹل اشیا میں دوہرے انعطاف کے مظہر کو دیکھا جاسکتا ہے۔ان کرسٹل اشیا کو دو قسموں میں بتایا جاسکتا ہے۔

(1) یک محوری (Uniaxial) (2) دو محوری (Biaxial)

(1) یک محوری (Uniaxial): یک محوری کرسٹلوں میں صرف ایک سمت ہوتی ہے۔

مثال: کیلسائیٹ، کوانز (Quartz)، ٹورملین (Tourmaline)، اپاٹائیٹ (Apatite) سوڈے کا نائٹریٹ، سوریکس (Sorax)

(2) دو محوری (Bi-axial): دو محوری کرسٹلوں میں دو سمتیں ہوتی ہیں جن میں 'O' اور 'E' شعاعیں ایک ہی رفتار سے گزرتی ہیں۔

مثلاً: ابرق (Mica)، سیلینئیٹ (Selenite)، ٹوپاز (Topaz)، اور اکاگونائیٹ (Agaonite)

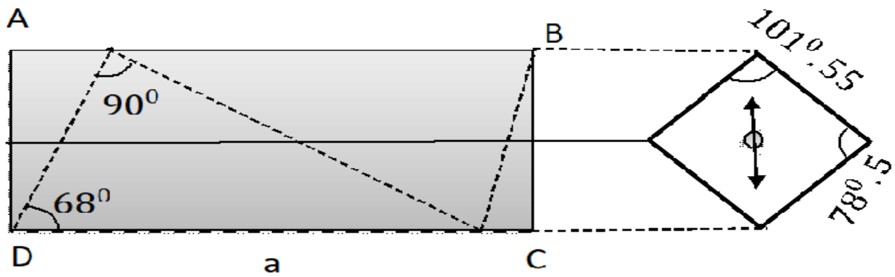
18.5.3.1 نکول پرزم (Nicolprism)

اصول: ایک دوہرے انعطافی کرسٹل میں معمولی اور غیر معمولی لہریں، باہمی عمودی سمتیوں میں خطی تقطیب شدہ ہوتی ہیں اور معمولی لہر میں برقی ویکٹر نوری محور کے ساتھ زاویہ قائمہ بناتا ہے۔لہٰذا اگر ہم کسی ذریعہ سے ایک لہر کو دوسری سے علاحدہ کرسکیں تو ایک دوہرا انعطافی کرسٹل ایک تقطیب کار (Polarizer) کی طرح استعمال کیا جاسکتا ہے۔اسے بہت سے طریقے ہیں جن سے یہ علیحدگی حاصل کی جاسکتی ہے۔ ان دو اجزا کو علاحدہ کرنے کا ایک طریقہ نکول پرزم (Nicolprism) یا اس کی کوئی ترمیم ہے۔

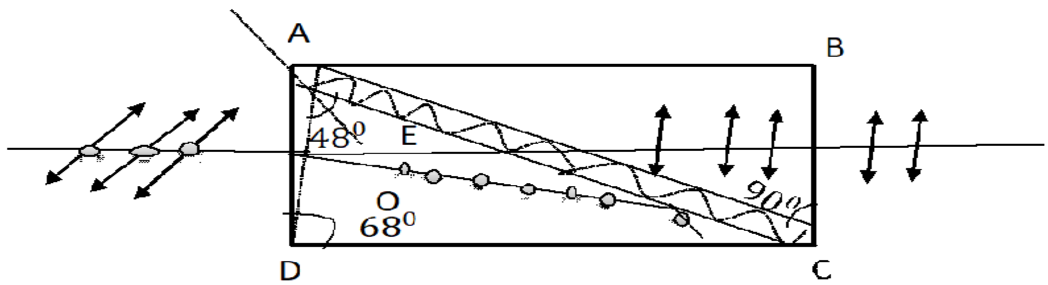
Construction: کیلسائیٹ کی کرسٹل کو ایک اور شکل میں ڈھال کر اسے تقطیب گر یا تجزیہ گر کے طور پر استعمال کیا جاسکتا ہے۔اس کے لیے مستقلہ مقطب شعاعوں میں سے ایک کو زائل کر دیا جاتا ہے۔اس طریقہ کار کو شکل (18.14) میں دکھایا گیا ہے۔اس کے سروں کے رخوں کو اس طرح تراشا جاتا ہے کہ تراش اصلی میں زاویہ 71^o سے گھٹ کر 68^o ہوجائے۔اس کے بعد کرسٹل کو وتر AC کے ساتھ تراش اصلی کی سطح سے عمود وار دو نصف حصوں میں کاٹا جاتا ہے۔اب ان دو نصف حصوں کو شفاف کیناڈا بالسم (Canada Balsam) (سمٹ) سے جوڑ دیا جاتا ہے۔اس طرح تیار کیا ہوا مناظری آلہ نکو متشور (Nicol prism) کہلاتا ہے۔

کیلسائیٹ کے لیے معمولی شعاع کا انعطاف نما 1.66 ہے اور کیناڈا بالسم کے لیے 1.55 ہے۔کیناڈا بالسم کی سطح پر معمولی شعاع کا زاویہ وقوع زاویہ فاصل (CarticalAngle) سے بڑا ہوتا ہے۔چنانچہ یہ شعاع کلی داخل انعکاس کے تحت منعکس ہوجاتی ہے۔کیلسائیٹ

میں غیر معمولی شعاع کاانعطاف شعاع کی گزرنے کی سمت پر منحصر ہوتا ہے۔نکول منشور میں ممکنہ سمتیوں کے لیے E شعاع کاانطاف نما تقریباً 1.49 ہوتا ہے۔ لہٰذا یہ شعاع کیناڈا بالسم میں سے گزر جاتی ہے اور منشور سے اس طرح خارج ہوتی ہے جیسا کہ شکل(18.14) میں دکھایا گیا ہے۔



شکل(a)



شکل(b)

شکل(18.14)

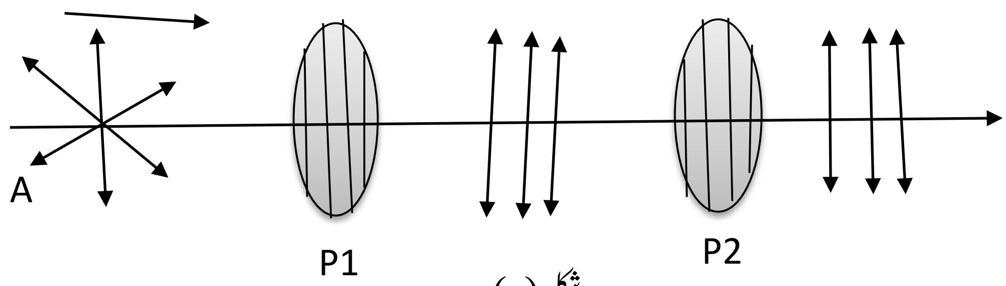
مناظری آلات میں نکول منشور کو تجزیہ گراور تقطیب گر کے طور پر استعمال کیا جاتا ہے۔اس منشور سے گزرنے والا نور اس کے اختتامی رخ(End face) کے چھوٹے وتر کے متوازی سمت میں ارتعاش کرتا ہے۔

Action:اس طرح جب نکول منشور پر غیر مقطب نور واقع ہوتا ہے تو اس سے مستوی مقطب نور پیدا ہوتا ہے۔ جس کی سمت منشور کے اختتامی رخ کے چھوٹے وتر کے متوازی ہوتی ہے۔نکول منشور کی اس خصوصیت کو خطی مقطب نور کے حصول کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔یہ منشور اپنے چھوٹے وتر کے متوازی سمت میں ارتعاش کرنے والے مستوی مقطب نور کو اپنے اندر سے گزرنے دیتا ہے اور اپنے اختتامی رخ کے چھوٹے وتر سے عمودی سمت میں ارتعاش کرنے والے خطی مقطب نور کو مکمل طور پر کاٹ دیتا ہے۔اس کی یہ خصوصیت تقطیب شدہ نور کے تجزیے کے لیے استعمال کی جاتی ہے۔

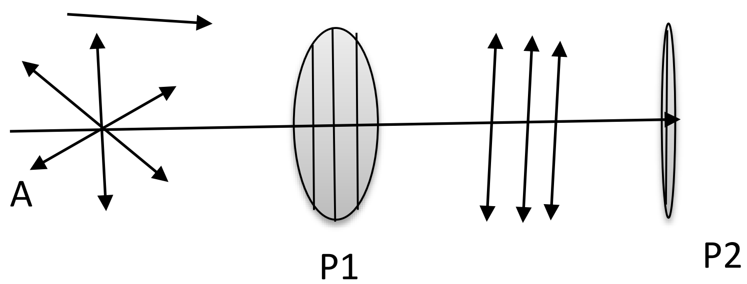
18.6 مقطب (Polaroid's)

ٹارمالین ایک قدرتی تقطیب گر(Polarizer) ہے اگر اس کے محور کے عموداً کوئی منقطب شعاع اس پر واضح ہو تو یہ شعاع

معمولی اور غیر معمولی شعاعوں میں منقسم ہو جاتی ہے۔ معمولی شعاع اس ٹارمالین کی تختی میں جذب ہو جاتی ہے اور غیر معمولی شعاع باہر نکل جاتی ہے۔ اس واقعہ کو (Dichasium) کہتے ہیں۔



شکل (a)



شکل (b)

شکل (18.15)

مصنوعی طور پر بنائے گئے تقطیب گر مقطب کہلاتے ہیں۔ یہ نامیاتی قلموں سے بنی ہوئی تختی نما شغاف پرت ہوتی ہے۔ جو عموماً (Polyrryl alcohol) کے طویل سالماتی رنجیر پر مشتمل ہوتی ہے۔ یہ تمام سالمات ایک دوسرے کے متوازی ہو کر ایک مخصوص سمت کو محور بناتے ہیں۔ یہ ایک رخی مادے کا بھری محور بنتا ہے۔

مقطب کے استعمالات:

a. ان کو دھوپ کے شیشوں کی طرح بکثرت استعمال کیا جاتا ہے۔

b. مقطب کی تختیاں (Polaroid films) تھری ڈی فلم بنی میں استعمال ہوتی ہیں۔

c. تجربات میں ان کو تقطیب گر اور تشریح گر کی طرح استعمال کیے جاتے ہیں۔

d. جزیے کے لیے استعمال کی جاتی ہے۔

18.7 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

ایک غیر منقطب شعاع ایک بعد دیگرے گزرتی ہے۔ یہ تقطیب گر اور تشریح گر کی طرح عمل کرتی ہیں۔ اگر ان کے محور ایک دوسرے پر 30^0 کا زاویہ بناتے ہوں تو بتائیے کہ شعاعِ وقوع کی حدت کا کتنا حصہ ان سے منتقل ہوتا ہے۔

حل: دیا گیا ہے کہ $\theta = 30^0$ لہذا $\mathrm{Cos}^2\, 30^0 = {}^3\!/_4$

کیوں کہ جب غیر منقطب شعاع تقطیب گر پر واقع ہوتی ہے تو اس کی صرف نصف حدت آگے بڑھتی ہے۔اس لیے

$$I = I_0\, \mathrm{Cos}^2\, 30^0$$

$$I = \frac{I_m}{2} \times \frac{3}{4}$$

$$I = \frac{3}{8} \times I_m$$

حل شدہ مثال2

دو تقطیب گر ایک دوسرے کے متوازی کھلے ہوئے ہیں جن کے محور ایک دوسرے پر 34° کا زاویہ بناتے ہیں۔ پہلے تقطیب گر پر ایک مستوی منقطب شعاع اس طرح واقع ہوتی ہے کہ اس کی سطح محور سے 17° کا زاویہ بناتی ہے۔ دونوں تقطیب گروہ سے باہر نکلنے والی شعاع میں حدت شعاع وقوع کی حدت کا کتنا گھٹ جائے گا۔

حل: فرض کیجیے کہ شعاعِ وقوع کی حدت I_0 تقطیب گر سے باہر نکلنے والی شعاع حدت I_1 دوسرے تقطیب گر سے نکلنے والی شعاع حدت I_2 ہے۔ کیوں کہ شعاعِ وقوع کی سطح تقطیب اور تقطیب گر کے محور میں 17° کا زاویہ ہے اس لیے

$$I_1 = I_0\, \mathrm{Cos}^2\, 17^0$$

کیوں کہ وہ تقطیب گروہ کے محوروں کے درمیان 34° کا زاویہ ہے اس لیے

$$I_2 = I_1\, \mathrm{Cos}^2\, 34^0$$

$$I_2 = I_0\, \mathrm{Cos}^2\, 17^0 . \mathrm{Cos}^2\, 34^0$$

$$I_2 = I_0 (0.956)^2 . (0.829)^2$$

$$I_2 = 0.628 I_0$$

یعنی نور کی حدت میں 37.2% کمی آئے گی۔

18.8 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- نور کی تقطیب اس کے عرضی موج کے ہونے کی تصدیق کرتی ہے۔ کسی شعاع میں اگر برقی سمتیہ صرف ایک سطح میں مرتعش ہوتا ہے تو یہ شعاع منقطب شعاع کہلاتی ہے۔ قدرتی غیر منقطب ہوتی ہے۔ کیوں کہ اس کے برقی سمتیے تمام سمتیوں میں مرتعش ہوتے ہیں۔
- غیر منقطب شعاع جب منعکس ہوتی ہے تو منعکس شدہ شعاع کچھ حد تک افقی منقطب ہو جاتی ہے۔ اگر ایسے انعکاس میں زاویہ وقوع کو اتنا رکھا جائے کہ شعاعِ منعکس اور شعاعِ منعطف ایک دوسرے کے عموداً ہوں تب یہ دونوں شعاعیں ترتیب وار مکمل افقی منقطب اور مکمل عمودی منقطب ہو جائیں گی۔ ایسی مکمل تقطیب کے لیے درکار زاویہ وقوع کو بیر یو لیسٹر (Breaster's) کا زاویہ کہا جاتا ہے۔ اس زاویہ کا مماس (Tanged) دو واسطوں کے انعطاف نا کسی نسبت کے مساوی ہوتا ہے۔

- کیالسائیٹ، ٹارمالین، گاراوغیرہ کی قلمیں قدرتی تقطیب گر کی مثالیں ہیں جن میں سے غیر منقطب شعاعوں کو گزارنے پر منقطب ہو جاتی ہیں۔ ان میں دوہراانعطاف بھی واقع ہوتا ہے۔ یعنی ان اشیاء میں جب نور کی شعاع داخل ہوتی ہے تو یہ معمولی شعاع اور غیر معمولی شعاع میں تقسیم ہو جاتی ہے معمولی شعاع اسنیل کے کلیے کی پابند ہوتی ہے۔ مگر غیر معمولی اشعاع نہیں ہوتی۔ جب کوئی شعاع تقطیب گر سے گزرتی ہے تو اس کی حدت نصف ہو جاتی ہے اور اگر کوئی شعاع دو ایسے تقطیب گروں سے گزرتی ہو جس کے محور کچھ زاویہ θ بناتے ہوں تو اس شعاع کی حدت $I = I_0 \cos^2 \theta$ ہو جاتی ہے۔
- جب کیلسائیٹ کرسٹل کی سطح پر عام نور کی ایک شعاعی پنسل واقع ہوتی ہے تو وہ دو شعاعوں میں بٹ جاتی ہے اور کرسٹل سے یہ دو شعاعیں خارج ہوتی ہیں۔ ان میں ایک کو معمولی 'O' اور دوسری تو غیر معمولی 'E' شعاع کہا جاتا ہے۔ 'O' شعاع اسنیل کے کلیہ کی پابندی کرتی ہے جب کہ E شعاع ایسا نہیں کرتی۔ کیلسائیٹ کی طرح کی قلموں میں عام کا دو شعاعوں میں ہٹ جانا، دوہراانعطاف کہلاتا ہے۔
- کسی کرسٹل میں شعاع 'E' کی رفتار کا انحصار اس سمت پر ہوتا ہے جس میں وہ سفر کر رہی ہے۔ مناظری محور پر 'O' اور 'E' شعاعوں کی رفتاریں مساوی ہوتی ہیں۔
- ایک محوری کرسٹل میں 'O' اور 'E' شعاعوں کی رفتاریں صرف ایک ہی سمت میں مساوی ہوتی ہیں۔ لیکن دو محوری کرسٹلوں میں ایسی دو سمتیں ہوتی ہیں۔

18.9 کلیدی الفاظ (Keywords)

- **خطی منقطب شعاع:** کس شعاع میں اگر برقی سمتیہ صرف ایک سطح میں مرتعش ہوتا ہے۔
- **غیر منقطب:** برقی سمتیے تمام سمتوں میں مرتعش ہوتے ہیں۔

18.10 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

18.10.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. موج کا برقی سمتیہ ہمیشہ xy سطح میں رہتا ہے اس شعاع کو۔۔۔ کہلاتی ہے۔

a) منقطب   b) غیر منقطب   c) خطی منقطب   d) None

2. موج کا برقی سمتیہ ہمیشہ مختلف سمتوں میں رہتا ہے اس شعاع کو۔۔۔۔۔ کہلاتی ہے۔

a) منقطب   b) غیر منقطب   c) خطی منقطب   d) None

3. موج کا برقی سمتیہ ہمیشہ ایک مخصوص سمت میں رہتا ہے اس شعاع کو۔۔۔۔۔ کہلاتی ہے۔

a)منقطب b)غیر منقطب c)خطی منقطب None (d

4. مالس کا کلیہ قوت I=...........

$I_0 \text{Cos}^2\,\theta$(a $I_0 \text{Cos}\,\theta$(b $I_0 \sin\theta$ (c $I_0 \sin^2\theta$(d

5. شیشے کے لیے جہاں انعطاف نما 1.5 ہو تب بریوسیسٹر کا زاویہ۔۔۔

90^o(a 60^o(b 270^o (c 57^o (d

6. مقطب سے کیا مراد ہے؟
7. ایک کرسٹل کا مناظری محور کس کو کہتے ہیں۔
8. ایک محوری (Uniaxial) اور دو محور (Biaxial) کرسٹلوں میں کیا فرق ہوتا ہے۔
9. معمولی شعاع (O-ray) سے کیا مراد ہے؟
10. غیر معمولی شعاع (E-ray) سے کیا مراد ہے؟
11. معمولی (Ordinary) اور غیر معمولی (Extraordinary) شعاعوں میں کیا فرق ہوتا ہے۔

18.10.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. دوہرے انعطاف کو سمجھائے۔
2. تقطیب نور کے اطلاقات کیا ہیں؟
3. مالس (Mauls) کے کلیہ کو بیان کیجیے اور اس کی وضاحت بھی کیجیے۔
4. نکول منشور پر ایک نوٹ لکھیئے۔
5. مقطب نور سے کیا مراد ہے؟ اس کے اطلاقات کیا ہیں۔
6. انعطاف کے ذریعہ تقطیب کو سمجھائے۔
7. انعکاس کے ذریعہ کس طرح مستوی منقطب شعاع حاصل کی جاتی ہے۔ سمجھایئے۔

18.10.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. انعکاس اور انعطاف کے ذریعہ کس طرح غیر منقطب شعاع کو مستوی منقطب بنایا جاسکتا ہے۔
2. انعکاس کے ذریعہ غیر مقطب نور سے مستوی مقطب نور کے اصول کے تجربی طریقہ کو بیان کیجیے۔
3. دوہرے انعطاف کو سمجھایئے اور نکول منشور کس طرح تیار کیا جاتا ہے سمجھایئے۔
4. دوہرے انعطاف کو سمجھایئے اور بائیسوٹس پولار سکوپ حصول کے تجربی طریقہ کو بیان کیجیے۔

18.10.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. ایک واسطے کا زاویائی فاصل 45^o ہے۔اس کے لیے بروسٹر کا زاویہ کتنا ہوگا۔
2. ایک مستوی شیشے کی سطح پر غیر منقطب شعاع 58^o کا زاویہ بتاتے ہوئے واقع ہوتی ہے اور منعکس شدہ شعاع مکمل طور پر منقطب ہو جاتی ہے۔(a)شعاعِ منعکس کے لیے زاویہ انعطاف کتنا ہوگا(b) شیشے کا انعطاف نما کتنا ہوگا۔
3. اگر ایک ایسے شیشہ کے پلیٹ کو تقطیب گر(Polarizer) کے طور پر استعمال کیا جائے جس کا انعطاف نما 1.55 ہے تو اس کا زاویہ انعطاف معلوم کیجیے۔
4. ایک غیر منقطب شعاع 1.4 انعطاف نما والے مائع کی سطح پر اس طرح واقع ہوتی ہے کہ منعطف شدہ موج مکمل منقطب ہو جاتی ہے تو زاویہ انعطاف معلوم کیجیے۔

18.11 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Aziz, W A, and Mashood Ahmad. Millenium Science Dictionary, Physics - Chemistry & Mathematics, English - English - Urdu. Mumbai: Saifee Book Agency, 2003.
2. Bleaney, B I, and B Bleaney. Electricity and Magnetism. Oxford: Oxford University Press, 2013.
3. Duffin, W J. Electricity and Magnetism. Cottingham: W.J. Duffin, 2001.
4. Gaur, R.K. &Gupta, S.L.Engineering Physics.Dhanpat Rai Publication.
5. Kurrelmeyer, Bernhard, and Walter H. Mais. Electricity and Magnetism. Princeton, N.J: Van Nostrand, 1967.
6. Peck, Edson R. Electricity and Magnetism. , 2013.
7. Plonsey.R&Collin.R.E.Principles and Application of Electromagnetic Field. Tata Mc Graw Hill Publication. New Delhi.
8. Purcell, Edward M, and David J. Morin. Electricity and Magnetism. , 2013.
9. Resnic.R&Halliday.D.Physics Part-I&Part-II.Wiley Eastern Pvt.Ltd.New Delhi.
10. Resnick, Robert, David Halliday, and Kenneth S. Krane. Physics. New York: Wiley,202.

MAULANA AZAD NATIONAL URDU UNIVERSITY

B.Sc. (M.P.C / M.P.CS) II Semester Examination

(Physics)

(BSPH201CCT) (Electricity and Magnetism)برقی اور مقناطیسیت

Total Marks 70:کل نمبرات　　　　Time 3 Hoursوقت:3 گھنٹے

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے۔ حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارۃ ہے۔ تمام حصوں سے سوالات کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. حصہ اول میں 10 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات / خالی جگہ پر کرنا / مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لئے 1 نمبر مختص ہے۔ **(10x01=10 Marks)**
2. حصہ دوم آٹھ سوالات پر مبنی ہیں، اور اس میں طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دو سو (200) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لئے 6 نمبرات مختص ہیں۔ **(05x06=30 Marks)**
3. حصہ سوم میں پانچ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو (500) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لئے 10 نمبرات مختص ہیں۔ **(03x10= 30Marks)**

(حصہ اول)

1. سوال نمبر

i. ایک میزانی میدان (Scalar field) کا گراڈ (Gradient) __________ ہوتا ہے۔

ii. گاؤس ڈائیورجنس تھیورم (Guass's Divergence Theorem) کا استعمال ________ کے لیے ہوتا ہے۔

iii. تھیورم (Stoke's Theorem) کو بیان کریں۔

iv. الکٹرک فلکس (electric flux) کی تعریف کریں۔

v. برقی میدان اور برقی قوہ کے درمیان رشتہ کے لیے ضابطہ لکھیں۔

vi. ڈائی مقناطیسی مادے، پیرامقناطیسی مادوں سے کیسے الگ ہیں۔ لکھیے۔

vii. فیرو مقناطیسی مادوں کی مثالیں لکھیے۔

viii. ایک Solenoid کی ذاتی امالیت معلوم کیجیے جبکہ اس کی لمبائی 5 میٹر، رقبہ $0.01m^2$ اور ٹرنس 100 ہوں۔

ix. ایک ذوبرقی واسطہ (Dielectric Medium) میں برقی مقناطیسی موجوں کی رفتار _______ ہے۔

x. xبرقی مقناطیسی موجوں (E M Waves) کی تقطیب (Polarization) سے کیا مراد ہے۔

(حصہ دوم)

2. خطی، رقبی اور حجمی تکملات سے کیا مراد ہے۔ گاؤس ڈائیور جینس تھیورم کو بیان کریں۔
3. برقی قوہ(Electrical Potential) کی تعریف کریں۔ اور برقی میدان میں ایک نقطہ کے لیے برقی قوہ معلوم کیجئے۔
4. گاؤس تھیورم کو ڈفرینشیل فارم(Differential Form) میں اخذ کریں۔
5. برقی ڈائپول سے کیا مراد ہے۔ برقی ڈائپول کی وجہہ سے برقی قوہ کے لیے ضابطہ اخذ کریں۔
6. برقی رو سے لیز ایک خطی وئیر کی وجہ سے مقناطیسی میدان کے لیے ضابطہ اخذ کریں۔
7. مقناطیسی میدان میں محفوظ توانائی کے لیے ضابطہ اخذ کیجئے۔
8. پوائنٹنگ ویکٹر(Pointing Vector) کے لئے ضابطہ اخذ کیجئے۔
9. خلاء میں برقی مقناطیسی موجوں کے لیے مساوات کو اخذ کریں۔

حصہ سوم

10. ایک برقائے ہوئے کرّہ(sphere) کی وجہ سے وہ نقطہ پر برقی میدان کی حدت(Electric Field) کے ضابطے اخذ کریں جو کرہ کی سطح پر کرہ سے باہر اور کرہ کے اندر ہو۔
11. مکشفہ اور اس کی گنجائش کی تعریف کیجئے۔ ایک مکشفہ میں محفوظ توانائی کے لیے ضابطہ اخذ کریں۔
12. برقی سکونیات میں تقطیب اور ڈسپلیز منٹ منٹ ویکٹر پر ایک نوٹ لکھیے۔
13. برقی مقناطیسی امالیہ(EM Induction) سے کیا مراد ہے۔ کوئی دو تجربات سے تفصیلاً سمجھائیں۔
14. ثابت کریں کے میکس ویل نے ایمپیئر لاء کیسے تبدیل کیا اور نقل مکانی برقی رو(Displacement Current) کی اہمیت کو سمجھائیں۔

☆☆☆

BSPH250CCP

لیب مینول

(Lab Manual)

اکائی 19۔ ملٹی میٹر

(Multimeter)

اکائی کے اجزا

19.0 تمہید (Introduction)

ملٹی میٹر ایک الیکٹرانک ڈیوائس ہے جو AC اور DC وولٹیج، AC اور DC برقی رو اور مزاحمت جیسے مختلف پیمائش کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ اسے ہی ملٹی میٹر کہتے ہیں۔ کیوں کہ یہ ایک وولٹ میٹر، ایم میٹر اور اوہم میٹر سے جوڑا جاتا ہے اور یہ ملٹی میٹر کو ڈایڈ ڈ ٹیسٹ، ٹرانجسٹر ٹیسٹ، TLG ٹیسٹ میں بھی استعمال کرتے ہے۔

اس تجربہ کو مکمل کرنے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ ملٹی میٹر کے ذریعہ مزاحمت، AC اور DC وولٹیج، DC رو کی تخمین کر سکیں۔

19.1 مقاصد (Objectives)

ملٹی میٹر کو استعمال کرتے ہوئے:

- مزاحمت(Resistance) کی تخمین کریں۔
- ACاور ڈی سی وولٹیج کی تخمین کریں۔
- DCبرقی رو کی تخمین کر سکیں۔
- ڈایڈ کی تصدیق کریں۔

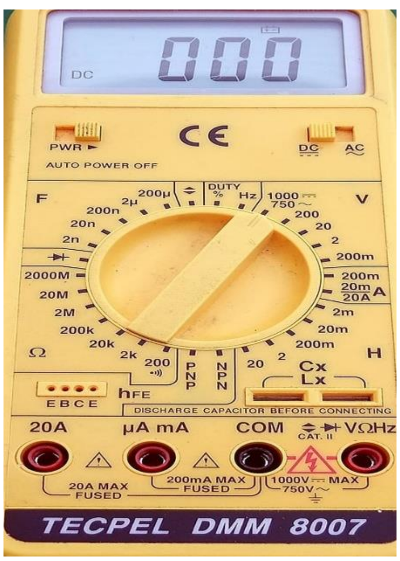
19.2 آلات (Apparatus)

ملٹی میٹر، AC کا مبدا(Source) ،

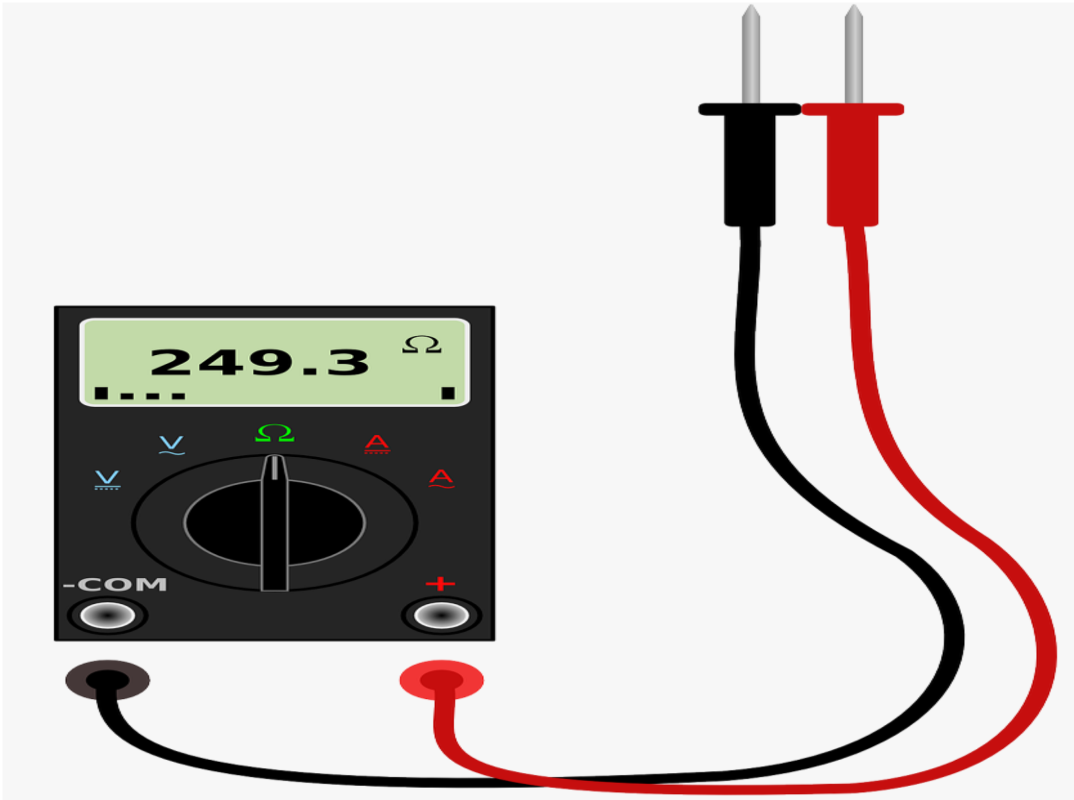
مزاحمت، ڈایڈ

19.2.1 تشریح آلات (Apparatus Explanation)

ملٹی میٹر ایک الیکٹرانک ڈیوائس ہے جو ACاور DC وولٹیج، ACاور DCرو اور مزاحمت جیسے مختلف پیمائش کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔اسے ہی ملٹی میٹر کہتے ہیں۔ کیوں کہ یہ ایک وولٹ میٹر، ایم میٹر اور اوہم میٹر سے جوڑا جاتا ہے اور یہ ملٹی میٹر کو ڈایڈ ٹیسٹ، ٹرانجسٹر ٹیسٹ، TLGٹیسٹ میں بھی استعمال کرتے ہے۔



شکل(19.1)



شکل(19.2)

ملٹی میٹر کے تین حصے ہوتے ہے۔

1. ڈسپلے(Display)
2. سلیکشن نوب(Selection Knob)
3. پورٹس(Ports)

ڈسپلے: اس میں عام طور پر چار ڈجیٹ ہوتے ہیں اور منفی علامت(Negative sign)ظاہر کرنے کی قابلیت ہوتی ہے۔

سلیکشن نوب: اس کے ذریعہ رو(mA)،وو لٹیج(V)اور مزاحمت(Ω)کو معلوم کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔

پورٹس: 10Aایک خاص پورٹ ہے جو رو(200mAسے زیادہ)معلوم کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ mA, V, Ω پورٹ رو،وو لٹیج(V)اور مزاحمت(Ω)کو معلوم کیا جاتا ہے۔

ملٹی میٹر کے اگلے حصے میں دو پروبس(Probes)میں تحقیقات پلگ ہوتے ہیں۔ایک پلگ 'Com'کو ظاہر کرتا ہے۔Comکا معنے Common یہ ہمیشہ گرائونڈ یا کسی سرکیوٹ سے جڑتے ہے۔Com تحقیقات طور پر blockہوتا ہے لیکن رنگ کے علاوہ Blockپروب اور Redپروب میں کوئی فرق نہیں ہے۔

ان پٹ جیک: Blockلیڈ کو ہمیشہ Comٹرمینل میں اور Redلیڈ کو 10Aمیں پلگ کیجیے۔جیک کو(300mAسے زیادہ)پلگ کو دی

جاتی ہے جب زیادہ برقی رو کی پیمائش کر سکتے ہے۔اگر جیک کو(300mA سے کم) پلگ دی جاتی ہے تب300mA سے کم برقی رو کو معلوم کرنے میں استعمال کرتے ہے۔

رینج فکسنگ: پہلی بار میٹر کو آن کیا جائے جب آٹو رینج کو فکس کریں اور وولٹیج V کو (AC, DC, AAC, ADC) بیچ حد میں طئے کیا جائے۔

19.3 نظریہ (Theory)

ملٹی میٹر کے تین حصے ہوتے ہے۔

1. ڈسپلے(Display)
2. سلیکشن نوب(Selection Knob)
3. پورٹس(Ports)

ڈسپلے: اس میں عام طور پر چار ڈجیٹ ہوتے ہیں اور منفی علامت(Negative Sign) ظاہر کرنے کی قابلیت ہوتی ہے۔

سلیکشن نوب: اس کے ذریعہ رو(mA)،وولٹیج(V)اور مزاحمت(Ω) کو معلوم کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔

پورٹس: 10A ایک خاص پورٹ ہے جو رو(200mA سے زیادہ) معلوم کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ mA, V, Ω پورٹ رو،وولٹیج(V)اور مزاحمت(Ω) کو معلوم کیا جاتا ہے۔

19.4 طریقہ عمل (Procedure)

1. مزاحمت کی تخمین:

i. مثبت(Red (Positive) ٹیسٹ لیڈ کو V/mA جیک ساکٹ سے اور منفی کو(سیاہ)'Com' جیک سائٹ کی طرف جوڑ دیا جائے۔

ii. سیلکٹر کو اوہم (Ω) پر لٹیسٹ کریں۔

iii. مزاحمت کی تخمین کرنے کے لیے مبدا کو بند کریں۔

iv. پیمائش سے پہلے تمام مکثفہ کو ڈس چارج کر دیا جائے۔

v. مزاحمت کی پیمائش کرنے کے لیے سرکیوٹ کو ٹیسٹ لیڈ سے جوڑ دیا جائے۔

vi. مزاحمت کی قیمت ڈیجیٹل ڈسپلے پر ظاہر ہوتی ہے۔اس کو مشاہدہ نوٹ کیا جائے۔

2. وولٹیج کی تخمین:

i. مثبت Red ٹیسٹ لیڈ V/mA جیک ساکٹ سے اور منفی کو Com جیک ساکٹ کی طرف جوڑ دیا جا ئے۔

ii. سلیکٹر کو وولٹیج V (mv, ac, dc.....) پر ٹیسٹ کیا جائے۔

iii. پیمائش کرنے والی سرکیوٹ پر پور سپلائی کو ٹرن ان کریں۔

iv. وولٹیج کی قیمت ڈیجیٹل ڈسپلے پر ظاہر ہوتی ہے اس کو نوٹ کیا جائے۔

3. رو کی تخمین:

i. ٹیسٹ لیڈ کو V/mA مثبت red پر اور منفی (سیاہ) Com لیڈ سے جوڑ دیا جائے۔

ii. سیلکٹر کو (A/mA/Aμ) پر ٹیسٹ کریں۔

iii. پمائش کرنے والی سرکیوٹ کو کھلا (Open) اور سلسلہ میں جوڑ دیجیے۔

iv. پور سپلائی کو ٹرن آن کریں۔

v. رو کی قیمت ڈیجیٹل ڈسپلے میں ظاہر ہوتی ہے اس کو مشاہدہ نوٹ کیا جائے۔

4. ڈایڈ کی تخمین:

i. مثبت red ٹیسٹ لیڈ V/mA جیک ساکٹ پر اور منفی (سیاہ) Com جیک ساکٹ کی طرف جوڑ دیا جائے۔

ii. سیلکٹر کو ⟷ کی پوزیشن پر ٹیسٹ کریں۔

iii. پیمائش کرنے والی سرکٹ پر پور کو ٹرن آن کریں۔

iv. اس کی قیمت ڈیجیٹل ڈسپلے پر ظاہر ہوتی ہے۔اس کو مشاہدہ نوٹ کیا جائے۔

19.5 مشاہدہ اور تحسیب (Observations and Analysis)

مزاحمت کی تخمین:

جدول (5.1)

Difference $R - R_M$	Multimeter Reading R_M	Resistance R as indicated in Resistance box	SI.No

وولٹیج کی تخمین:

جدول(5.2)

Multimeter Reading for Voltage	Resistance R in Circuit	SI.No

رو کی تخمین:

جدول(5.3)

Multimeter Reading for Voltage	Resistance R in the circuit	SI.No

ڈایڈڈ کی تخمین:

جدول(5.4)

Multimeter Reading for Diode	Resistance R in the Circuit	SI.No

19.6 احتیاطی تدابیر (Precautions)

- اگر میٹر یا ٹیسٹ لیڈ خراب ہوئے دکھائی دیں تو میٹر کو کبھی بھی استعمال نہ کریں۔
- جب پور کا استعمال ہوتا ہے تو کبھی بھی سرکٹ میں مزاحمت کی پیائش نہ کریں۔
- 10A یا 300mA رو کی جانچ ٹیسٹ کی لیڈ ان پٹ میں پلگ ہو تو کبھی بھی وولٹیج مبداء کے پر بس کو جانچ نہ کریں۔
- مطلوبہ پیائش کے لیے ٹیسٹ لیڈ اور روٹری سوئچ صحیح پوزیشن میں رہیں۔
- آپ ایک عمدہ اور تازہ وولٹیج کے منبع کو استعمال کریں۔ جب اس کو دور میں جوڑا جائے تو یہ بہنے نہ لگے۔
- تجربے میں استعمال کیے جانے والے مزاحمت کے ڈبے عمدہ کوالٹی کے ہونے چاہئیں۔
- دور کے جوڑ صحیح طور پر جوڑیں۔ کوئی جوڑ ڈھیلا نہ رہنے پائے۔

19.7 روزمرہ زندگی میں اس تجربے کی اہمیت

(Significant of Experiment in Domestic Life)

- ❖ اس تجربے کے ذریعے کسی بھی سرکیوٹ کے مزاحمت، رو، اور وولٹیج کی قیمت آپ تخمین کر سکتے ہیں۔
- ❖ اس میٹر کے ذریعے ڈایڈ ٹیسٹ، TLG ٹیسٹ کی تخمین بھی کر سکتے ہیں۔

19.8 تجربی نتائج (Experimental Results)

نتائج:

R(Resistance)مزاحمت=..Ohm

AC اور ڈی سی وولٹیج

V_{AC} = ...Volt

V_{DC} = ...Volt

DC برقی رو اور

I_{DC} = ...Amp

ڈایڈ کو تصدیق=..

19.9 کلیدی الفاظ (Keywords)

- **وولٹ (Volt):** ایک وولٹ برقی قوۃ کی وہ قدر ہے جہاں پر 1 کولم برقی بار کو لتناہی سے لانے کے لیے ایک جول کا کام واقع ہوتا ہو۔
- **ایمپئر (Ampere):** کسی موصل سے گزرنے والی برقی روایک ایمپئر اس وقت کہلاتی ہے۔ جب کہ ایک سکنڈ کے عرصہ میں اس موصل میں اس موصل کی کسی بھی عرضی تراشی رقبے سے ایک کولم برقی بار گزرے۔
- **مزاحمت گر (Resistor):** مزاحمت گر (Resistor) ایک ایسا آلہ ہے جو برقی رو کی مخالفت کرتا ہے۔

اپنی معلومات کی جانچ کیجیے (Check your Information Questions)

1. وولٹیج کی اکائی کیا ہے؟
2. ملٹی میٹر کو بیان کرو۔
3. مزاحمت کو بیان کرو۔
4. رو کی SI اکائی کیا ہے؟
5. ملٹی میٹر میں کتنے حصہ ہے بیان کرو۔

اکائی 20۔ آر سی سرکیوٹ ہم سلسلہ کی خصوصیات

(Characteristics of a Series R.C Circuit)

اکائی کے اجزا

20.0 تمہید (Introduction)

آر سی سرکیوٹ ہم سلسلہ کو R اور C کو اہتزازیہ کے ساتھ ہم سلسلہ میں جوڑ دیا جائے تو اس سلسلہ کو آر سی سرکیوٹ ہم سلسلہ دور کہتے ہے۔

20.1 مقاصد (Objectives)

آر سی سرکیوٹ ہم سلسلہ کی خصوصیات کا مطالعہ کرنا۔

- چارجنگ وولٹیج کے ذریعہ آر سی وولٹیج وقت مستقل کی پیمائش کریں۔
- ڈس چارجنگ وولٹیج کے ذریعہ آر سی وولٹیج وقت مستقل کی تخمین کریں۔

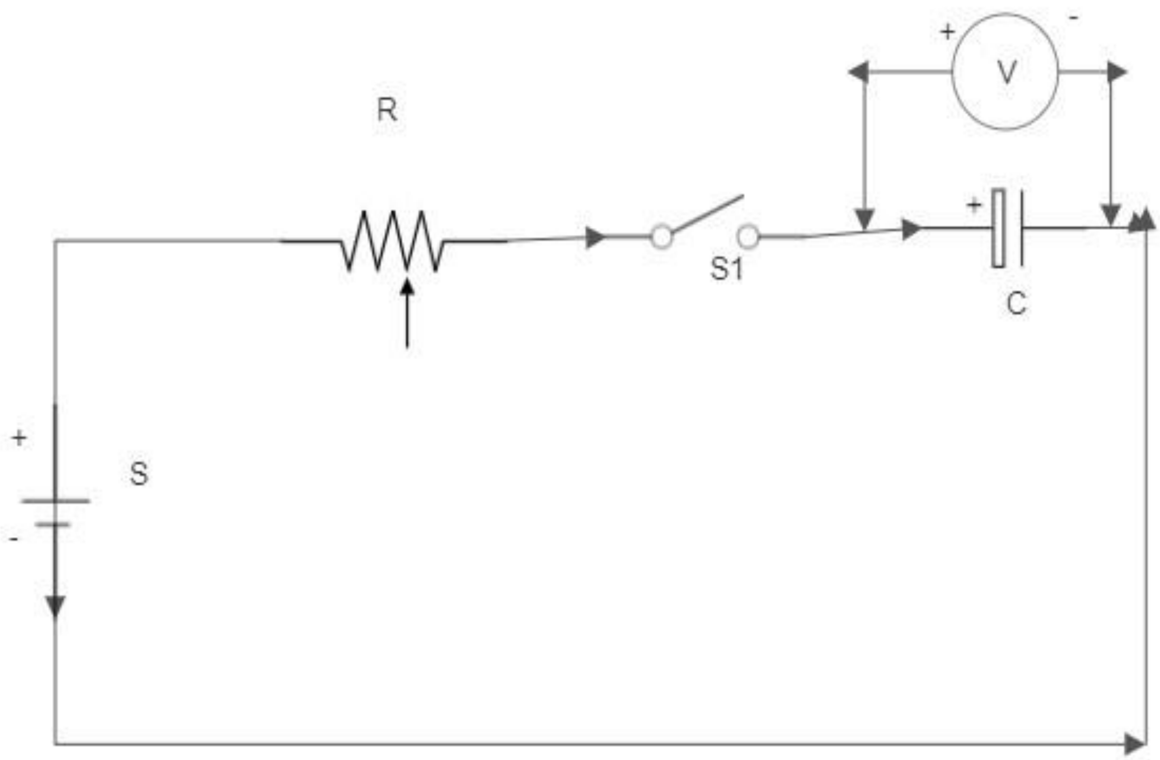
20.2 آلات (Apparatus)

پاور سپلائی(Power Supply)،مزاحمت(Resistance)،
مکثفے(Capacitor)،وولٹ میٹر(Volt Meter)،
اسٹاپ واچ(Stop Watch)، کمیوٹوٹر(Commutator)
کاربن کے مزاحم (Carbon resistors)وولٹ کی بیاٹری(Volt Battery)،
ڈاٹ کنجی(key)،

20.2.1 تشریح آلات(Apparatus Explanation)

ہم سلسلہ آر سی دور(Series RC Circuit)

Rاور Cکو اہتزازیہ کے ساتھ ہم سلسلہ جوڑ دیا جاتا ہے جیسا کہ شکل(20.1)میں دکھایا گیا ہے۔



شکل(20.1):RCہم سلسلہ دور کا خاکہ

مزاحمت(R): دو سروں والی مزاحمت میں برقی توانائی یا مقناطیسی توانائی محفوظ نہیں رہ سکتی۔ایک مزاحمت میں برقی رو اور اس پر عائد کردہ اے

سی(AC)وولٹیج ہم بیت نہیں ہوتے۔

مکثفہ(C): دوسروں والامکثفہ اپنے اندر برقی توانائی محفوظ کرسکتاہے جب وولٹیج عائد کیاجاتاہے توچارجنگ کے عمل کی وجہ سے مکثفے کی دودھاتی تختیوں کے درمیان الکٹران کی دوبارہ تقسیم عمل میں آتی ہے۔یہ چارجنگ کا عمل اس وقت تک چارج ہوتاہے جب تک کہ مکثفہ پر عائد کردہ وولٹیج مبداء(Source) کے وولٹیج کے برابرنہ ہوجائے۔مکثفہ سے اس کا اظہار ہوتاہے کہ مکثفے کے اندر توانائی کو محفوظ کیاجاسکتاہے۔ایک مکثفہ اے سی(AC)وولٹیج کے مبداء کے پہلے نصف سائیکل کے دوران اس سے برقی توانائی حاصل کرکے اسے ذخیرہ کرتاہے اور دوسرے نصف سائیکل میں اس توانائی کواے سی(AC)وولٹیج کے مبداء کوواپس کرتاہے۔اگرمکثفے کی برقی مکثفہ(C)ہوتواس میں محفوظ توانائی ½ cv^2 کے مساوی ہوتی ہے۔

20.3 نظریہ (Theory)

ہم سلسلہ آرسی دور (Series RC Circuit)

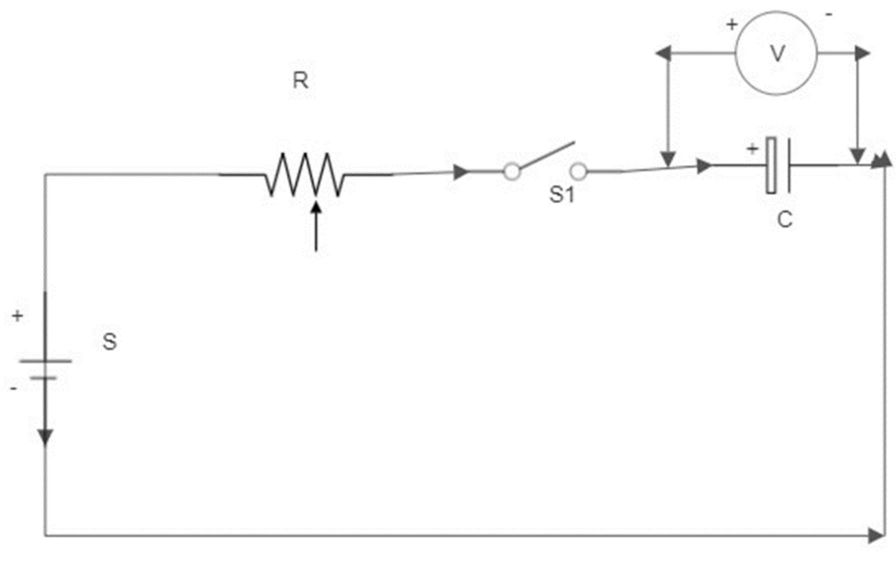
مکثفہ کے دوران چارجنگ وولٹیج $V = V_0\ (1-e^{-t/rc})$ دیاجاتاہے اور

مکثفہ پرڈی سی چارجنگ وولٹیج $V= V_0e^{-t/RC}$ ہوتاہے۔

یہاں پر $t=RC$ وقت مستقل

R مزاحمت، C مکثفہ

R اور C کواہتزازیہ کے ساتھ ہم سلسلہ جوڑدیاجاتاہے جیساکہ شکل(20.2) میں دکھایاگیاہے۔



شکل(20.2) RC ہم سلسلہ دورکاخاکہ

20.4 طریقہ عمل (Procedure)

1. R اور C کو اہتزازیہ کے ساتھ ہم سلسلہ میں جوڑ دیا جائے جیسا کہ شکل (20.1) میں دکھایا گیا ہے۔
2. وولٹیج کو مکثفہ کے درمیان جوڑ دیا جائے۔
3. مکثفہ کے دوران وولٹیج کو چارجنگ اور ڈس چارجنگ کے ساتھ معلوم کریں گے۔

I. چارجنگ کے تور پر وولٹیج کی جانچ

i. پاور سپلائی کو اس طرح ترتیب دیجیے کہ وقت کے ساتھ مکثفہ میں تبدیلی رہے۔

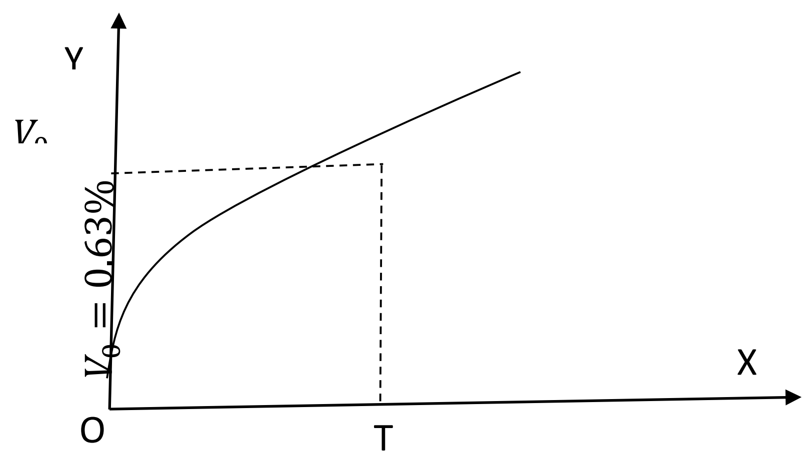
ii. پاور سپلائی کے ذریعہ مکثفہ میں برقی رو کو آعید کریں کی مکثفہ چارجنگ ہو۔

iii. چارجنگ کو (برقی رو) تبدیلی کرنے پر وقت کے ساتھ ساتھ مکثفہ کی درمیانی وولٹیج میں تبدیلی کو ظاہر کریں۔

iv. ہر 5sec وقت کے لیے اسٹاپ واچ کی مدد سے وولٹیج کو نوٹ کی جائے۔

v. اس وولٹیج کو مشاہدات جدول (20.1) میں درج کیجیے۔

vi. **گراف:** وقت (T) کو محور-X پر اور وولٹیج (V) کو محور-Y پر لے کر ان کے مابین ایک گراف کھینچے۔ گراف کے ذریعہ RC وقت مستقل (RC Time Constant) کی قیمت کو معلوم کریں اور اس کی قیمت نظریاتی قیمت کے برابر یعنی 63% ہوتی ہے۔



شکل (20.3) چارجنگ کے تور پر وقت t، وولٹیج کا خاکہ

II. ڈس چارجنگ کے تور پر وولٹیج کی جانچ:

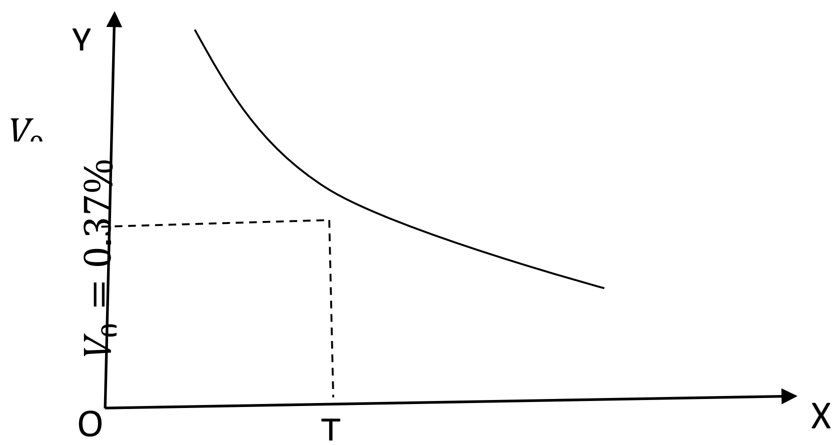
i. پاور سپلائی کو ڈس کنیکٹ کر دیجیے تاکہ وقت کے ساتھ مکثفہ میں تبدیل رہے۔

ii. ڈس چارجنگ کے دوران وقت کے ساتھ ساتھ مکثفہ کے درمیان وولٹیج کی تبدیلی کو ظاہر کریں۔

iii. ہر 5sec وقت کے لیے اسٹاپ واچ کی مدد سے وولٹیج کو نوٹ کی جائے۔

iv. اس وولٹیج کو مشاہدات جدول (20.2) میں درج کریں۔

v. **گراف:** وقت (T) کو محور-X پر اور وولٹیج (V) کو محور-Y پر لیے کر ان کے مابین ایک گراف کھینچے۔ گراف کے ذریعہ RC وقت مستقل (RC Time Constant) کی قیمت کو معلوم کریں اور اس کی قیمت نظریاتی قیمت کے برابر یعنی 37% ہوتی ہے۔



شکل (20.4) ڈس چارجنگ کے تور پر وقت۔ وولٹیج کا خاکہ

20.5 مشاہدہ اور تحسیب (Observations and Analysis)

جدول: وقت اور وولٹیج کا گراف (Voltage Versus Time Graph)

I. چارجنگ کے تور پر وولٹیج کی جانچ:

جدول (20.1)

Capacitance,C	Resistance,R Ohm	Charging	Average
C_1			
C_1			
C_1			

C_1			
C_2			
C_2			
C_2			
C_2			
$C_{eq} = Series$			

II. ڈس چارجنگ کے تور پر وولٹیج کی جانچ:

جدول(20.2)

Capacitance C	Resistance R Ohm	Discharging	Average
C_1			
C_1			
C_1			
C_1			
C_2			
C_2			
C_2			
C_2			
$C_{eq} = Series$			

جدول(20.3)

	C_1	C_2	$C_{eq} = Series$
Experimental			

Theoretical			

20.6 احتیاطی تدابیر (Precautions)

- وولٹیج کی پیمائش نہایت درستگی سے کرنا چاہیے۔
- گرتی ہوئی وقت کے دوران مشاہدات وولٹیج کو نوٹ کرنا چاہیے۔
- آپ ایک عمدہ اور تازہ وولٹیج کے منبع کو استعمال کریں۔ جب اس کو دور میں جوڑا جائے تو یہ بہنے نہ لگے۔
- تجربے میں استعمال کیے جانے والے مزاحمت اور مزاحمت کے ڈبے عمدہ کوالٹی کے ہونے چاہیے۔
- دور کے جوڑ صحیح طور پر جوڑیں۔ کوئی جوڑ ڈھیلا نہ رہنے پائے۔

20.7 روزمرہ زندگی میں اس تجربے کی اہمیت

(Significant of Experiment in Domestic Life)

- ❖ اس تجربے کو فوٹو فلیش مکثفہ میں فوٹو گرافک کیمروں کے فلیش گین میں استعمال کیا جاتا ہے۔
- ❖ RC ہم سلسلہ سرکیوٹ کو ڈیکریٹو بلب میں استعمال کیا جاتا ہے۔
- ❖ مکثفہ کے دو قسم کو بھی فلٹر اور تبدیلی الیکٹرانک آلات میں استعمال کر سکتے ہیں۔

20.8 تجربی نتائج (Experimental Results)

نتائج:

i. چارجنگ وولٹیج کے ذریعہ آر سی وولٹیج

مکثفہ کے دوران چارجنگ وولٹیج $V = V_0\,(1-e^{-t/Rc})$

V=...Volts

ii. ڈس چارجنگ وولٹیج کے ذریعہ آر سی وولٹیج

مکثفہ پر ڈی سی چارجنگ وولٹیج $V= V_0e^{-t/RC}$

V=..Volts

20.9 کلیدی الفاظ (Keywords)

- **ہم سلسلہ مکثفے:** مکثفوں کو ہم سلسلہ میں جوڑنے کے لیے۔
- **Farad:** Farad ایک بہت بڑی اکائی ہے۔ یہ برقی گنجائش کی SI اکائی ہے۔
- **مکثفے (Capacitor):** دو موصل برق کے پرزے جو ایک غیر موصل کے ذریعہ ایک دوسرے سے جدا ہوئے ہو،

اپنی معلومات کی جانچ کیجیے (Check your Information Questions)

1. وقت مستقل (Time Constant) کو بیان کرو۔
2. چارج کی وضاحت کرو۔
3. چارج کی SI اور CGS اکائی کیا ہیں؟
4. مزاحمت کی SI اکائی کیا ہے؟
5. اوہم کلیہ کو بیان کرو۔
6. سرکیوٹ میں سلسلہ اور متوازی رابطے کیا ہیں۔
7. مکثفہ کی اکائی کیا ہے؟
8. Pico Faraday کو μ F میں تبدیل کرو۔
9. RC سرکیوٹ کے مستقل کے تعین کے لیے فارمولا لکھیں۔

اکائی 21۔ ہم سلسلہ یل سی آر گمکی دور

(LCR Series Resonance Circuit)

اکائی کے اجزا

21.0 تمہید (Introduction)

ہم سلسلہ یل سی آر دور میں C,L اور R کو اہتزازیہ کے ساتھ ہم سلسلہ جوڑدیا جاتا ہے تو اس سلسلہ کو ہم سلسلہ یل سی آر (LCR) دور کہتے ہے۔

21.1 مقاصد (Objectives)

ہم سلسلہ یل سی آر دور کے تعدد کے تاثر (Response) کا مطالعہ کرنا اور اس کے کیفی جز (Quality Factor) کی قیمتوں کو محسوب کرنا۔

- تعداد اور گملی دور سے گزرنے والی برقی دور کے درمیان ترسیم کھینچنا۔

- گملی تعدد کی تخمین کرنا۔
- ان کے کیفی جز(Quality Factor)کو محسوب کرنا۔
- یہ ثابت کرنا کہ گملی تعدد کا انحصار صرف Lاور C کی قیمتوں پر ہوتا ہے۔
- یہ ثابت کرنا کہ گملی تعدد پر احالیت اور گنجائش کی متعاملتیں(Reactance)ماوی ہوتی ہیں۔

21.2 آلات (Apparatus)

(10Hz to, 1 MHz)کا اہتزازیہ،

L=6.85mHکی احالیت،

C= 8.55kpfاور C= 377 Pf کے مکشفے،

10 Ω اور 100Ωکی 1Wکی مزاحمتیں،

0-50DCمائیکروایم پیا، DC B_2 راست گر،

21.2.1 تشریح آلات (Apparatus Explanation)

مزاحمت(R): دوسروں والی مزاحمت میں برقی توانائی یا مقناطیسی توانائی محفوظ نہیں رہ سکتی۔ایک مزاحمت میں برقی رو اور اس پر عائد کردہ اے سی(ac)وولٹیج ہم ہیت نہیں ہوتے۔

مکثفہ(C): دوسروں والا مکثفہ اپنے اندر برقی توانائی محفوظ کر سکتا ہے جب وولٹیج عائد کیا جاتا ہے تو چارجنگ کے عمل کی وجہ سے مکشفے کی دو دھاتی تختیوں کے درمیان الکٹران کی دوبارہ تقسیم عمل میں آتی ہے۔ یہ چارجنگ کا عمل اس وقت تک جاری رہتا ہے جب تک کہ مکثفہ پر عائد کردہ وولٹیج مبدا کے وولٹیج کے برابر نہ ہو جائے۔ گنجائش سے اس کا اظہار ہوتا ہے کہ مکشفے کے اندر توانائی کو محفوظ کیا جاسکتا ہے۔اگرچیکہ ایک مکشفے سے گزرنے والی برقی رو اور اس پر عائد کردہ وولٹیج کے تعدد ایک ہی ہوتے ہیں لیکن باعتبار ہیت، برقی رو وولٹیج سے بقدر 90آگے رہتی ہے۔ مکثفہ پر عائد کردہ وولٹیج V_C اور اس سے گزرنے والی برقی رو(I_C) کے درمیان جو نسبت ہوتی ہے وہ مکشفے کی متعاملیت X_C کہلاتی ہے یہ مکشفے کی متعاملیت مکشفے کی گنجائش (C)اور اس پر عائد کردہ وولٹیج کے تعداد (f) کے ساتھ معکوس مناسب رکھتی ہے اس طرح کم گنجائش والا ایک مکثفہ اس سے بننے والی رو کے لیے زیادہ مزاحمت کا ہوتا ہے اس طرح سے جیسے جیسے تعدد میں کمی ہوتی جاتی ہے تو مکثفہ کی متعاملیت میں اضافہ ہوتا جاتا ہے۔اور دور سے گزرنے والی رو کے لیے مزاحمت میں اضافہ ہو جاتا ہے۔ایک مکشفے سے ڈی سی(DC)برقی رو نہیں گزرتی۔

ایک مکثفہ اے سی(AC)وولٹیج کے مبدا کے پہلے نصف سائیکل کے دوران اس سے برقی توانائی حاصل کر کے اسے ذخیرہ کرتا ہے اور دوسرے نصف سائیکل میں اس توانائی کو اے سی(AC)وولٹیج کے مبدا کو واپس کرتا ہے اگر مکشفے کی برقی گنجائش (C)ہو تو اس میں محفوظ توانائی $\frac{1}{2}\ cv^2$ کے مساوی ہوتی ہے۔

امالیت(L): دو سروں والی امالیت اپنے مقناطیسی میدان میں برقی توانائی کا ذخیرہ کرتا ہے۔تانبے کے بنا کیے ہوئے (Enameled)تار کو ایک غیر موصل شے پر لچھوں کی شکل میں لپیٹ کر امالی لچھا تیار کیا جاتا ہے۔امالی لچھے سے گزرنے والی رو میں جب تغیرات ہوتے ہیں اس سے متعلہ مقناطیسی میدان میں بھی تبدیلیاں واقعے ہوتی ہیں۔ایک امالی لچھا اے سی (ac)میں وولٹیج کے پہلے نصف سائیکل کے دوران توانائی کو ذخیرہ کرلیتا ہے اور دوسرے نصف سائیکل کے دوران اسے اے سی وولٹیج کے مبداء کو واپس کرنا ہے۔اگر لچھے کی امالیت (L)ہو تو اس میں ذخیرہ ہونے والی توانائی کے $\frac{1}{2}Li^2$ کے مساوی ہوتی ہے۔

امالیت متبادل برقی رو کے بہاؤ کے لیے مزاحمت پیش کرتی ہے۔اس کو امالی متعاملیت (Reactance Inductive) (X_L) کہتے ہیں۔

یہ متعاملیت (X_L)امالیت کی قیمت (L)اور عائد کردہ اے سی وولٹیج کے تعداد (f)کے ساتھ تناسب رکھتی ہے $(X_L = 2\pi fL)$ جیسے جیسے امالیت کی متعاملیت میں اضافہ ہوتا جاتا ہے برقی رو میں کمی ہوتی جاتی ہے۔عائد کردہ وولٹیج کے تعدد میں اضافے کے ساتھ لچھے کی امالی متعاملیت میں بھی اضافہ ہوتا ہے۔

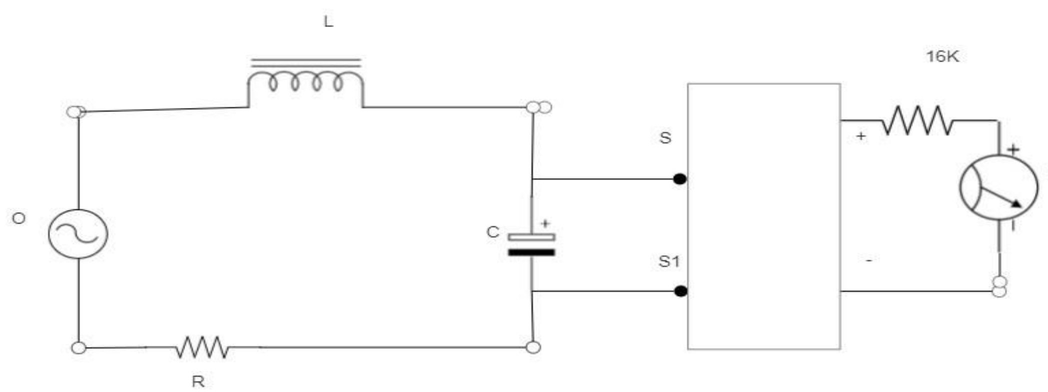
اگرچیکہ برقی رو اور وولٹیج کے تعدد مساوی ہوتے ہیں لیکن برقی رو ہیت میں وولٹیج سے بقدر $90°$ کے پیچھے رہتی ہے۔

یل سی آر سرکٹ میں گمکی: مکثفے کی متعاملیت اور امالی لچھے کی متعاملیت ایک دوسرے کی مخالف سمت میں عمل کرتے ہیں۔تعددوں پر مکثفہ کی متعاملیت زیادہ اور امالی لچھے کی متعاملیت کی قیمت کم رہتی ہے۔عائد کردہ وولٹیج کے تعدد میں اضافے سے مکثفے کی گنجائش کی وجہ سے اس کی متعاملیت میں کمی ہو جاتی ہے اور امالی لچھے کی امالیت کی وجہ سے اس کی متعاملیت میں اضافہ ہو جاتا ہے۔ایک خاص تعدد پر گنجائش کی وجہ سے مکثفہ کی متعاملیت (X_C)اور امالی لچھے کی وجہ سے اس کی متعاملیت (X_L) گمکی تعدد (f_0) (Resonance Frequency) کہلاتا ہے۔اس گمکی تعدد کی قیمت کا انحصار صرف (L)اور (C)اور اس کو فارمولے $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ سے حاصل کیا جاتا ہے جہاں (L)،C فیراڈ میں اور f_0 کو ہرٹز میں ظاہر کیا جاتا ہے۔

ایک دور میں (L)اور (C) کو ہم سلسلہ جوڑا جاسکتا ہے۔

ہم سلسلہ یل سی آر دور میں گمک (Resonance In Series LCR Circuit)

C,Lاور R کو اہتزازیہ کے ساتھ ہم سلسلہ جوڑ دیا جاتا ہے جیسا کہ شکل (21.1) میں دکھایا گیا ہے۔



شکل(21.1)

21.3 نظریہ (Theory)

ہم سلسلہ یل سی آر دور میں گمک (Resonance In Series LCR Circuit)

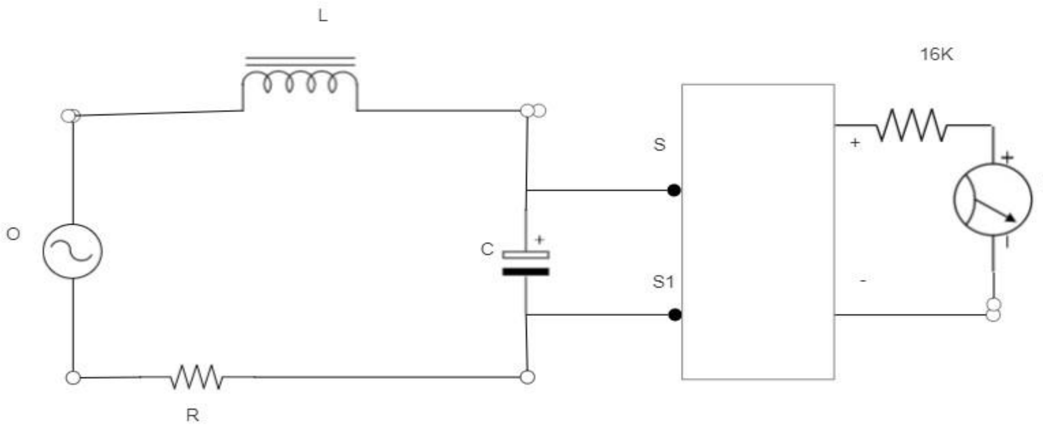
C,L اور R اہتزازیہ کے ساتھ ہم سلسلہ جوڑ دیا جاتا ہے جیسا کہ شکل (21.2) میں دکھایا گیا ہے۔

ایک ہم سلسلہ گمکی دور میں گمکی تعدد پر گنجائش کی وجہ سے متعاملیت اور امالی لچھے کی متعاملیت باہم مخالفت ہوتے ہیں جس کی وجہ سے دور میں برقی رو کا انحصار صرف مزاحمت (R) کی قیمت پر ہوتا ہے برقی رو اور وولٹیج ایک ہی ہیت میں رہتے ہیں اگر مزاحمت کم ہو تو برقی رو کی قیمت زیادہ ہوتی ہے۔

اگر عائد کردہ وولٹیج کا تعدد اور دور کا طبعی تعدد آپس میں مساوی ہو جائیں تو گمک واقع ہوتی ہے اور برقی رو اعظم ترین ہو جاتی ہے۔

امالی لچھے کے گرد کے وولٹیج اور عائد کردہ وولٹیج کے مابین پائی جانے والی نسبت $\left(\frac{X_L}{R}\right)$ یا گنجائش کے گرو کے وولٹیج اور عائد کردہ وولٹیج کے مابین پائی جانے والی نسبت $\left(\frac{X_C}{R}\right)$ دور کا تکبری جز (Magnification Factor) یا کیفی جز Q (Quality Factor) کہلاتا ہے۔

اگر کیفی جز زیادہ ہو تو دور کی مزاحمت کم ہو جاتی ہے اور توانائی کے نقصانات بھی کم ہو جاتے ہیں اور گمک تیز (Sharp) ہو جاتی ہے جیسا کہ شکل (21.3) میں دکھایا گیا ہے تعددوں f_1 اور f_2 پر برقی رو کی قیمت گمک کے وقت کی برقی رو کی قیمت کا 70.7% ہوتی ہے۔ ان دونوں تعددوں کے فرق ($f_2 - f_1$) کو پٹی کی چوڑائی (band width) کہتے ہیں تنگ چوڑائی والی پٹی کے لیے ہم آہنگی (Tunning) حساس رہتی ہے کیفی جز (Q) کی تحسیب ضابطے $\frac{f_0}{f_2-f_1}$ سے کی جاتی ہے۔



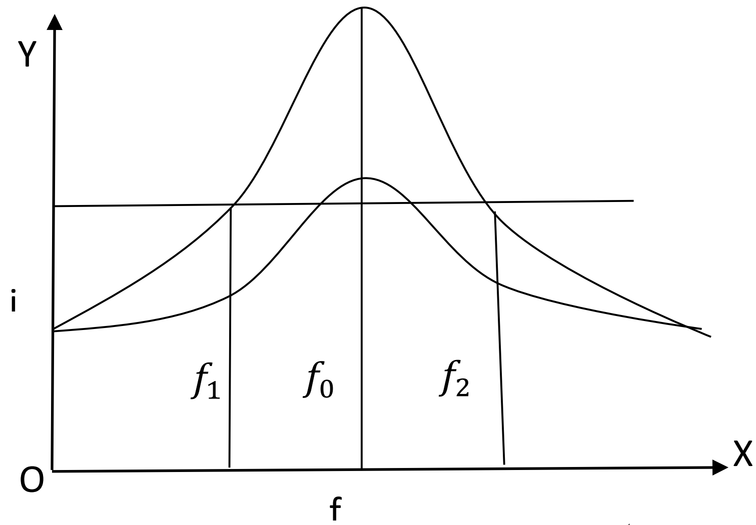
LCR ہم سلسلہ گمکی دور کا خاکہ (21.2)

O۔اہتزاز گر ، L، ۔امالی لچھا ، C۔مکثفہ

R۔مزاحمت ، B۔برج راست گر ، I۔مائیکرو ایم میٹر

ہم سلسلہ یل سی آر دور کو استعمال کرتے ہوئے مختلف تعددوں والی امواج آمیزں کے منجملہ صرف ان موجوں کو علاحدہ کیا جاسکتا ہے یا قبول کیا جاسکتا ہے جن کے تعدد گمکی تعدد کے مساوی ہوں اس لیے ہم سلسلہ یل سی آر (LCR) دور کو قبول کنندہ دور

(Acceptor) بھی کہتے ہیں۔ان ادوار میں برقی رو اعظم ترین ہوتی ہے۔ یل سی آر ادوار کو ریڈیو کے ہوائیہ (aerial) کے ساتھ بطور ہم آہنگی ادوار (Tunning Circuit) کے استعمال کیا جاتا ہے۔



شکل (21.3) ہم سلسلہ یل سی آر دور میں تعدد کا تاثر

f_0۔ گمکی تعدد L۔6.85 ملی ہنری

C۔8.55 P f اور R=10Ω

$2R = 100\Omega$

21.4 طریقہ عمل (Procedure)

ہم سلسلہ یل سی آر دور:

1. مناسب قیمتوں والے امالی لچھے، مکثفے اور مزاحمت کا انتخاب کیجیے یعنی C=8.55kpf,L=6.8mH اور R=10Ω
2. C,L اور R کو اہتزاز گر کے ساتھ ہم سلسلہ جوڑ دیجیے اور اہتزاز گر کے سوئچ کو ایسا ترتیب دیجیے کہ وہ (Sine) موجیں پیدا کرے۔
3. مکثفہ کے سروں کو برج راست گر کے ان پٹ سرو ہ سے جوڑ دیجیے اور اس کے آوٹ پٹ سروں کو ڈی سی (DC) مائیکر وایم پیا اور 16Ω کی مزاحمت کے ساتھ ہم سلسلہ جوڑ دیجیے۔
4. $X10KHz$ تعدد کے رینج کا انتخاب کیجیے۔ نفیس ترتیب دینے والے ناب (Knob Fine Adjustment) کو اس طرح مرتب کیجیے کہ بالکلیہ $10KHz$ کی (Sine) موجیں پیدا ہو جائے۔
5. تعدد میں $10KHz$ سے $30KHz$ تک $1KHz$ کے وقفہ سے اضافہ کیجیے کے اضافے سے سرکٹ کی برقی رو میں بھی اضافہ ہوتا ہے جس سے مائیکر وایم میٹر میں انصراف اس کے پیمانے کے باہر چلا جا سکتا ہے۔

6. اس وقت اہتزاز گر کے وولٹیج میں کمی کیجیے جو کہ اہتزاز گر کے قوۃ پیما سے کی جاسکتی ہے یہ کمی اس وقت تک کی جانی چاہیے جب تک کہ مائیکر وایم پیما میں انصراف $45\mu A$ نہ ہو جائے۔ ہر مشاہدہ کے وقت اس عمل کو دہراتے رہیے تاکہ مائکر وایم پیما کی ریڈ نگ اسکیل کے اندر ہی رہے۔

7. اہتزاز گر کے تعدد کو $10KHz$ پر ترتیب دیجیے اور مائکر وایم پیما کے مشاہدات نوٹ کیجیے اور انہیں ذیل میں دیے گئے جدول میں درج کیجیے۔

8. تعدد کو ایک KHz کے وقفے سے بڑھاتے جائیے اور متعلقہ برقی رو کو نوٹ کرتے جائیے۔ان مشاہدات کو جدول (21.1) میں درج کیجیے۔ابتدا میں اضافے کے ساتھ برقی رو کی ریڈ نگ میں اضافہ ہوتے جاتا ہے اور وہ ایک اعظم ترین قیمت تک پہنچ جاتی ہے۔ تعدد کو مزید بڑھائیں تو برقی رو کی ریڈ نگ میں کمی ہوتے جاتی ہے اور رفتہ رفتہ صفر تک پہنچ جاتی ہے۔

9. جدول (21.1) کے مشاہدات کو استعمال کرتے ہوئے تعدد کو x۔ محور اور برقی رو کو y۔ محور پر لے کر ایک ترسیم کھینچئے۔ یہ ترسیم شکل (21.3) کے مماثل ہو گی۔اعظم ترین برقی رو کے تناظر کا تعدد ہم سلسلہ یل سی آر گمکی تعدد (f_0) ہوتا ہے۔

10. y۔ محور کے ساتھ اعظم ترین برقی رو کے 0.707 گنا پر واقع نقطہ سے x۔ محور کے متوازی ایک خط کھینچئے جو شکل (21.3) منحنی کو دو مقامات پر قطع کرتا ہے۔پہلے نقطہ نقطع کے تناظر کا تعدد (f_1) گمکی تعدد سے کم اور دوسرے نقطہ تقاطع کے تناظر کا تعدد (f_2) گمکی تعدد سے زیادہ ہوتا ہے۔ان دونوں تعددوں کا فرق معلوم کیجیے۔اور ضابطہ $Q = \frac{f_0}{f_2 - f_1}$ استعمال کرتے ہوئے دور کے کیفی جز کو محسوب کیجیے۔

11. اہتزاز گر کے وولٹیج L اور C کی قیمتیں تبدیل کیے بغیر اور 10 کی مزاحمت کو 100 کی مزاحمت سے بدل کر تجربے کو دہرائیے۔ ہر تعدد پر برقی رو کی ریڈ نگ نوٹ کیجیے اور انہیں جدول (21.1) میں درج کیجیے۔ان مشاہدات کے لیے ایک ترسیم کھینچئے ایک چھوٹی منحنی جیسا کہ شکل (21.3) میں دکھایا گیا ہے حاصل ہوتی ہے اس منحنی کے لے گمکی تعدد کو نوٹ کیجیے اور دیکھیں کے دونوں منحنیوں کے لیے یہ ایک ہی ہے۔

12. گمکی تعدد پر امالی لچھے کی متعاملیت ضابطہ $X_L = 2\pi f_0 C$ سے اور مکثفہ کی متعالیت کو ضابطہ $X_C = \frac{1}{2\pi f_0 C}$ سے معلوم کیجیے۔ دونوں قیمتیں ایک ہی ہوں گی۔

13. ضابطہ $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ کو استعمال کرتے ہوئے گمکی تعدد کو محسوب کیجیے۔ گمکی تعدد کی محسوب قیمت اور گراف سے تخمینہ قیمت مساوی ہوں گی۔

21.5 مشاہدہ اور تحسیب (Observations and Analysis)

جدول (21.1)

L=6.85mH امالیت, C=8.55kpf گنجائش

R=100chms برقی رو(i)μAمیں	R=10 Ohms برقی رو(i)μAمیں	تعدد(f) KHZمیں	سلسلہ نشان
		10	1
		11	2
		.	3
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
		30	30

21.6 احتیاطی تدابیر (Precautions)

- امالیت کی قیمت(L)ہنر میں برقی گنجائش کی قیمت(C)فیراڈس میں LCR کے ذریعہ بالکل صحیح طور پر پیمائش کرنا چاہیے صرف ایسی ہی صورت میں f_0 کی تجربی قیمتیں ایک دوسرے سے منطبق ہوں گی۔
- اہتزاز گر کے آؤٹ پٹ وولٹیج کو بتدریج بڑھایا جائے ورنہ مائیکروایم پیماز یادہ برقی رو کے پہنچنے سے خراب ہو جائے گا۔
- ہم نوازی یل سی آر دور میں مبدا کی مزاحمت کو زیادہ رکھنا چاہیے اس لیے اہتزاز گر کے ساتھ 200تا600اوہم کی مزاحمت کو ہم سلسلہ جوڑا جانا چاہیے۔
- آپ ایک عمدہ اور تازہ وولٹیج کے منبع کو استعمال کریں۔ جب اس کو دور میں جوڑا جائے تو یہ بہنے نہ لگے۔

- تجربے میں استعمال کیے جانے والے مزاحمت کے ڈبے عمدہ کوالٹی کے ہونے چاہئیں۔
- دور کے جوڑ صحیح طور پر جوڑیں۔ کوئی جوڑ ڈھیلا نہ رہنے پائے۔

21.7 روز مرہ زندگی میں اس تجربے کی اہمیت

(Significant of Experiment in Domestic Life)

- ہم سلسلہ LCR سرکٹ ریڈیو میں ہم آہنگی (Tunning) کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ یہ سرکٹ صرف مطلوبہ ریڈیو نشریات کو حاصل کرتا ہے بلکہ کمزور سگنلوں کی تکبیر بھی کرتا ہے۔
- ہم سلسلہ سرکٹس کو بطور فلٹر استعمال کیا جاتا ہے۔

21.8 تجربی نتائج (Experimental Results)

نتائج:

i. عملی تعدد کی تخمین

$$X_L = 2\pi f_0 C = \cdots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots mH$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi f_0 C} = \cdots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots .. Pf$$

ii. ان کے کیفی جز (Quality factor) $Q = \frac{f_0}{f_2 - f_1}$

Q=...

21.9 کلیدی الفاظ (Keywords)

- **مزاحمت (Resistance)**: جس سے برقی رو کے گزرنے پر مزاحمت پیدا ہوتی ہے۔
- **مکثفے (Capacitor)**: دو موصل برق کے پرزے جو ایک غیر موصل کے ذریعہ ایک دوسرے سے جدا ہوئے ہو، **ہم سلسلہ مکثفے**: مکثفوں کو ہم سلسلہ میں جوڑنے کے لیے
- **مکثفی اثر (X_c)**: مکثفے میں سے اعظم ترین برقی رو یا چوٹی والی برقی ہے۔
- **امالی اثر [Inductive reactance (X_L)]**: تب ہم یہ دیکھیں گے کہ Lw متبادل برقی رو میں امالہ کی مزاحمت ہو

اپنی معلومات کی جانچ کیجیے (Check your Information Questions)

1. مزاحمت کیا ہوتی ہے؟
2. مکثفہ کیا ہوتا ہے؟
3. امالی لچھا کیا ہوتا ہے؟
4. کیا ایک مزاحمت برقی توانائی کا ذخیرہ کر سکتی ہے۔
5. دور کے کس جز میں برقی رو کی ہیت وولٹیج سے آگے رہتی ہے۔
6. ہم سلسلہ یل سی آر سرکٹ میں کون سی مقدار میں آپس میں مساوی لیکن مخالف ہوتی ہیں۔
7. ہم سلسلہ یل سی آر سرکٹ میں برقی رواور ہیت کا تفاوت کتنا ہوتا ہے۔
8. ہم سلسلہ یل سی آر سرکٹ میں برقی روا عظم ترین کیوں ہوتی ہے؟
9. ہم سلسلہ یل سی آر سرکٹ میں پٹی کی چوڑائی کی تخمین کس طرح کی جاتی ہے۔
10. ہم سلسلہ یل سی آر سرکٹ کے استعمالات کیا ہوتے ہیں۔
11. ہم سلسلہ یل سی آر سرکٹ میں مقاومت کی کیا قیمتیں ہوتی ہیں۔
12. فلٹرس کیا ہوتے ہیں؟

اکائی 22۔ ہم متوازی یل سی آر گمکی دور

(LCR Parallel Resonance Circuits)

اکائی کے اجزا

22.0 تمہید (Introduction)

ہم متوازی یل سی آر دور میں C,L اور R کو اہتزازیہ کے ساتھ ہم متوازی میں جوڑ دیا جاتا ہے تو ہم متوازی یل سی آر دور کہتے ہے۔

22.1 مقاصد (Objectives)

ہم متوازی یل سی آر دور کے تعدد کے تاثر (Response) کا مطالعہ کرنا اور اس کے کیفی جز (Quality Factor) کی قیمتوں کو محسوب کرنا۔

- تعدد اور گمکی دور سے گزرنے والے برقی رو کے درمیان ترسیم کھینچنا۔
- گمکی تعدد کی تخمین کرنا۔

- ان کے کیفی جز(Quality factor)کو محسوب کرنا۔
- یہ ثابت کرنا کہ گمکی تعدد کا انحصار صرف Lاور C کی قیمتوں پر ہوتا ہے۔
- یہ ثابت کرنا کہ گمکی تعدد پر امالیت اور گنجائش کی متعاملتیں(Reactance)مساوی ہوتی ہیں۔

22.2 آلات (Apparatus)

(10Hz to, 1 MHz)کا اہتزازیہ

L=6.85mHکی امالیت

، C= 8.55kpf اور C= 377 Pf کے مکثفے

10 Ω اور100Ωکی 1Wکی مزاحمتیں۔

22.2.1 تشریح آلات (Apparatus Explanation)

مزاحمت(R): دوسروں والی مزاحمت میں برقی توانائی یا مقناطیسی توانائی محفوظ نہیں رہ سکتی۔ایک مزاحمت میں برقی رو اور اس پر عائد کردہ اے سی وولٹیج ہم ہیت نہیں ہوتے۔

مکثفہ(C): دوسروں والا مکثفہ اپنے اندر برقی توانائی محفوظ کر سکتا ہے جب وولٹیج عائد کیا جاتا ہے تو چارجنگ کے عمل کی وجہ سے مکثفے کی دو دھاتی تختیوں کے درمیان الکٹران کی دوبارہ تقسیم عمل میں آتی ہے۔ یہ چارجنگ کا عمل اس وقت تک جاری رہتا ہے جب تک کہ مکثفہ پر عائد کردہ وولٹیج مبداکے وولٹیج کے برابر نہ ہو جائے۔ گنجائش سے اس کا اظہار ہوتا ہے کہ مکثفے کے اندر توانائی کو محفوظ کیا جا سکتا ہے۔اگرچیکہ ایک مکثفے سے گزرنے والی برقی رو اور اس پر عائد کردہ وولٹیج کے تعدد ایک ہی ہوتے ہیں لیکن باعتبار ہیت، برقی رو وولٹیج سے بقدر 90آگے رہتی ہے۔ مکثفہ پر عائد کردہ وولٹیج V_C اور اس سے گزرنے والی برقی رو(I_C)کے درمیان جو نسبت ہوتی ہے وہ مکثفے کی متعاملیت X_C کہلاتی ہے یہ مکثفے کی متعاملیت مکثفے کی گنجائش (C)اور اس پر عائد کردہ وولٹیج کے تعداد(f)کے ساتھ معکوس مناسب رکھتی ہے اس طرح کم گنجائش والا ایک مکثفہ اس سے بننے والی رو کے لیے زیادہ مزاحمت کا ہوتا ہے۔اس طرح سے جیسے جیسے تعدد میں کمی ہوتی جاتی ہے تو مکثفہ کی متعاملیت میں اضافہ ہوتا جاتا ہے۔اور دورسے گزرنے والی رو کے لیے مزاحمت میں اضافہ ہو جاتا ہے۔ایک مکثفے سے ڈی سی(DC)برقی رو نہیں گزرتی۔

ایک مکثفہ اے سی(AC)وولٹیج کے مبدا کے پہلے نصف سائیکل کے دوران اس سے برقی توانائی حاصل کر کے اسے ذخیرہ کرتا ہے اور دوسرے نصف سائیکل میں اس توانائی کو اے سی(AC)وولٹیج کے مبدا کو واپس کرتا ہے اگر مکثفے کی برقی گنجائش(C)ہو تو اس میں محفوظ توانائی $\frac{1}{2}cv^2$ کے مساوی ہوتی ہے۔

امالیت(L): دوسروں والی امالیت اپنے مقناطیسی میدان میں برقی توانائی کا ذخیرہ کرتا ہے۔تانبے کے بنا کیے ہوئے (Enameled)تار کو ایک غیر موصل شے پر لچھوں کی شکل میں لپیٹ کر امالی لچھا تیار کیا جاتا ہے۔امالی لچھے سے گزرنے والی رو میں جب تغیرات ہوتے ہیں اس سے

متعلہ مقناطیسی میدان میں بھی تبدیلیاں واقع ہوتی ہیں۔ایک امالی لچھا اے سی میں وولٹیج کے پہلے نصف سائیکل کے دوران توانائی کو ذخیرہ کرلیتاہے اور دوسرے نصف سائیکل کے دوران اسے اے سی وولٹیج کے مبداء کو واپس کرتا ہے۔اگر لچھے کی امالیت (L) ہو تو اس میں ذخیرہ ہونے والی توانائی کے $\frac{1}{2}Li^2$ کے مساوی ہوتی ہے۔

امالیت متبادل برقی رو کے بہاؤ کے لیے مزاحمت پیش کرتی ہے۔اس کو امالی متعاملیت (X_L) (Reactance Inductive) کہتے ہیں۔یہ متعاملیت (X_L) امالیت کی قیمت (L) اور عائد کردہ اے سی وولٹیج کے تعداد (f) کے ساتھ تناسب رکھتی ہے $(X_L = 2\pi f L)$ جیسے جیسے امالیت کی متعاملیت میں اضافہ ہوتا جاتا ہے برقی رو میں کمی ہوتی جاتی ہے۔عائد کردہ وولٹیج کے تعدد میں اضافے کے ساتھ لچھے کی امالی متعاملیت میں بھی اضافہ ہوتا ہے۔

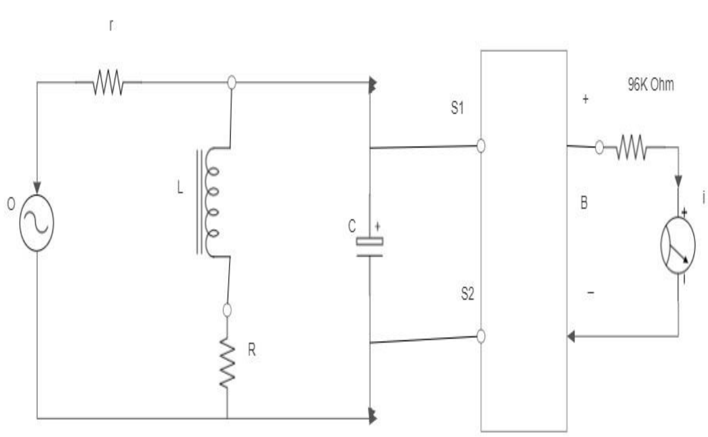
اگرچہ کہ برقی رو اور وولٹیج کے تعدد مساوی ہوتے ہیں لیکن برقی رو ہیت میں وولٹیج سے بقدر $90°$ کے پیچھے رہتی ہے۔

یل سی آر سرکٹ میں گمکی:

مکثفے کی متعاملیت اور امالی لچھے کی متعاملیت ایک دوسرے کی مخالف سمت میں عمل کرتے ہیں۔تعددوں پر مکثفہ کی متعاملیت زیادہ اور امالی لچھے کی متعاملیت کی قیمت کم رہتی ہے۔عائد کردہ وولٹیج کے تعدد میں اضافے سے مکثفے کی گنجائش کی وجہ سے اس کی متعاملیت میں کمی ہو جاتی ہے اور امالی لچھے کی امالیت کی وجہ سے اس کی متعاملیت میں اضافہ ہو جاتا ہے۔ایک خاص تعدد پر گنجائش کی وجہ سے مکثفہ کی متعاملیت (X_C) اور امالی لچھے کی وجہ سے اس کی متعاملیت (X_L) گمکی تعدد (f_0) (Resonance Frequency) کہلاتا ہے۔اس گمکی تعدد کی قیمت کا انحصار صرف (L) اور (C) اور اس کو فارمولے $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ سے حاصل کیا جاتا ہے جہاں (L)، C فیراڈ میں اور f_0 کو ہرٹز میں ظاہر کیا جاتا ہے۔

ایک دور میں (L) اور (C) کو ہم متوازی جوڑا جا سکتا ہے۔

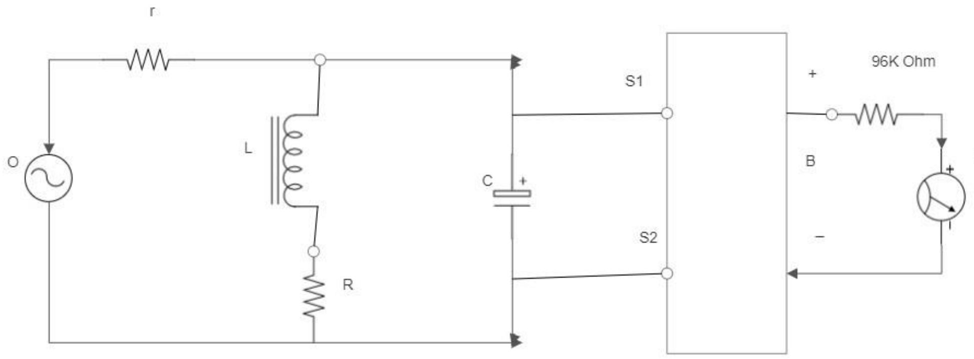
ہم متوازی یل سی آر دور میں گمک (Resonance in LCR Circuit)



شکل(22.1)

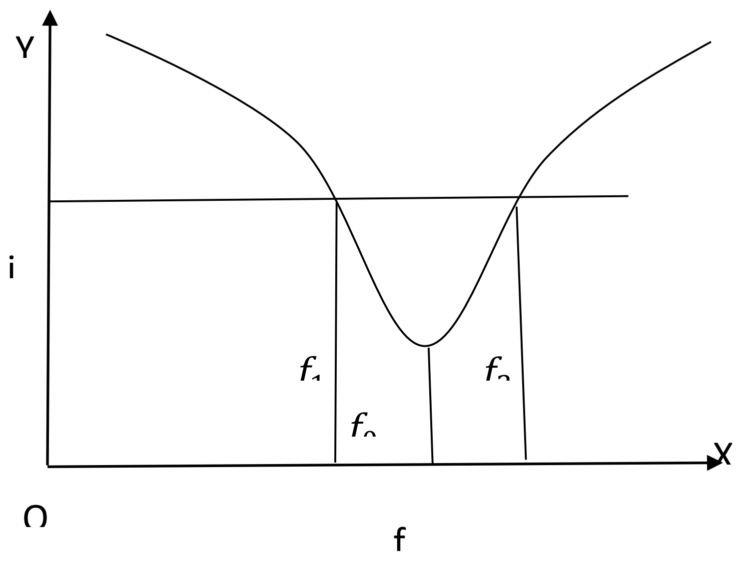
22.3 نظریہ (Theory)

ہم متوازی یل سی آر دور میں گمک(Resonance in LCR Circuit)



شکل(22.2)

اس دور میں امالی لچھے اور مکثفہ C کو اہتزاز گر کے متوازی جوڑا جاتا ہے جیسا کہ شکل(22.2) میں دکھایا گیا ہے۔ جب (L) اور (C) کو ہم متوازی جوڑ دیا جاتا ہے تو بلحاظ عائد کردہ اے سی AC وولٹیج کے امالی لچھے میں برقی رو کی ہیت بقدر 90° اس سے پیچھے رہتی ہے اور مکثفہ میں برقی رو کی ہیت تعد 90° آگے رہتی ہے لہذا ان دونوں برقی رووں میں تفاوت ہیت 180° ہوتا ہے اور وہ ایک دوسرے کی مخالفت بھی کرتے ہیں۔ اگرچیکہ امالی لچھے اور مکثفے سے زیادہ بڑی روئیں گزرتی ہیں لیکن دور کی اصلی رو بہت کم رہتی ہے اور یہ مزاحمت R سے گزرنے والی برقی رو کے مساوی ہوتی ہے جیسا کہ شکل(22.2) میں دکھایا گیا ہے گمکی تعدپر برقی رو اقل ترین رہتی ہے۔



شکل(22.3) ہم متوازی یل سی آر دور میں تعدد کا تاثر

ہم متوازی یل سی آر کی گمک کے برقی دور کا خاکہ

L=امالی لچھا, R=مزاحمت, C=مکثفہ, O=اہتزاز گر V=بڑی مزاحمت, B=برج راست گر

Pf 377=C , mHz6.85=L

f_0 گمکی تعدد 2R=100Ω,1-R=10.Ω

ہم متوازی یل سی آر دور میں متعاملیت زیادہ ہوتی ہے اور برقی رو کم اس لیے اس دور کو مسترد دور (Rejecter Circuit) کہا جاتا ہے۔ان ادوار کو بطور فلٹر ادوار اور اہتزازی ادوار استعمال کیا جاتا ہے۔ متوازی ادوار کے لیے کیفی جز کی پیائش اسی طرح کی جاتی ہے جیسا کہ ہم سلسلہ یل سی آر ادوار کے لیے کی جاتی ہے۔

22.4 طریقہ عمل (Procedure)

1. امالیت گنجائش اور مزاحمت کی مناسب قیمتوں کا انتخاب کیجیے۔ R=10Ωاور C=377Pf L=6.85mH
2. امالی لچھے، مکثفے اور مزاحمت کو اہتزاز گر کے ساتھ متوازی شکل (22.1) کے مطابق جوڑ دیجیے۔
3. $X100KHz$ تعدد کے رینج کا انتخاب کیجیے۔اہتزاز گر آؤٹ پٹ (Output) وولٹیج کو اس طرح ترتیب دیجیے جیسا کہ ہم سلسلہ دور کی صورت میں سمجھایا گیا ہے تاکہ تعدد کی $100KHz$ سے $500KHz$ تبدیلی کے دوران برقی رو کی ریڈنگ ہمیشہ مائیکر وایم پیا کے اسکیل کے اندر ہی رہے۔(یعنی $45\mu A$)
4. تعدد کو $10KHz$ کے وقفہ سے $100KHz$ سے $500KHz$ تک بڑھاتے جایئے اور تعدد کی ہر تبدیلی کے لیے رو کی قیمت نوٹ کیجیے اور مشاہدات کو جدول (22.1) میں درج کیجیے۔
5. ابتداً تعدد میں جب اضافہ ہوتا ہے تو برقی رو میں کمی ہوتی جاتی ہے اور یہ ایک اقل ترین قیمت تک پہنچ جاتی ہے تعدد کے مزید اضافے سے برقی کی ریڈنگ بھی اقل ترین قیمت سے بڑھتی جاتی ہے۔
6. تعدد کو X۔ محور اور برقی رو کو Y۔ محور پر لیتے ہوئے جدول (22.3) کے مشاہدات کے مابین ایک ترسیم کھینچیے یہ ترسیم شکل (22.3) کے مماثل ہوتی ہے۔ برقی رو کے اقل ترین قیمت کے متناظر تعدد کو نوٹ کیجیے۔یہ تعدد گمکی تعدد f_0 کہلاتا ہے۔
   a. ضابطے $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ سے گمکی تعدد کی تحسیب کیجیے۔
   L۔ ہنریس اور C۔ فیراڈ کی پیائش میں کیجیے۔
   f_0 کی یہ دونوں قیمتیں آپس میں مساوی ہونی چاہیے۔
7. برقی رو کی اقل ترین قیمت $\frac{1}{0.707}$ گنا قیمت کو محسوب کیجیے محور۔Y پر اس قیمت والے محدوے محور۔X کے متوازی ایک خط کھینچیے یہ خط منحنی کو دو نقاط پر قطع کرتا ہے پہلے نقطہ تقاطع کا تناظر تعدد f_1 گمکی تعدد سے کم اور دوسرے نقطہ تقاطع کا تناظر تعدد f_2 گمکی تعدد سے زیادہ ہوتا ہے۔
   ضابطے $Q = \frac{f_0}{f_2-f_1}$ کو استعمال کرتے ہوئے دو کے کیفی جز (Q) کی قیمت محسوب کیجیے۔

8. گمکی تعدد پر ضابطے $X_L = 2\pi f_0 C$ سے امالی لچھے کی متعاملیت اور ضابطے $X_C = \frac{1}{2\pi f_0 C}$ سے مکثفے کی متعاملیت کو محسوب کیجیے۔ یہ دونوں قیمتیں مساوی ہوتی ہیں۔

9. برقی گنجائش، امالیت، اہتزاز گر کا آؤٹ پٹ وولٹیج تبدیل کیے بغیر 10Ω کی مزاحمت کے بجائے 100Ω کی مزاحمت استعمال کرتے ہوئے تجربے کو دہرائیے۔ کھینچی گئی ترسیم سے گمکی تعدد کی قیمت معلوم کیجیے گمکی تعدد ان ہر دو صورتوں میں مساوی رہے گا۔

22.5 مشاہدہ اور تحسیب (Observations and Analysis)

جدول (22.1)

امالیت L=6.85mH, برقی گنجائش C=377Pf

R=100Ohms برقی رو i, μA میں	R=10 Ohms برقی رو i, μA میں	تعدد (f) KHz میں	سلسلہ نشان
		100	1
		110	2
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
		.	.
			.
		500	41

22.6 احتیاطی تدابیر (Precautions)

- امالیت کی قیمت (L)ہنریس میں برقی گنجائش کی قیمت (C) فیراڈس میں LCR کے ذریعہ بالکل صحیح طور پر پیمائش کرنا چاہئے صرف ایسی ہی صورت میں f_0 کی تجربی قیمتیں ایک دوسرے سے منطبق ہوں گی۔
- اہتزاز گر کے آوٹ پٹ وولٹیج کو بتدریج بڑھایا جائے ورنہ مائیکرو ایم پیما زیادہ برقی رو کے پہنچنے سے خراب ہو جائے گا۔
- ہم متوازی یل سی آر دور میں مبدا کی مزاحمت کو زیادہ رکھنا چاہیے اس لیے اہتزاز گر کے ساتھ 200تا600اوہم کی مزاحمت کو ہم سلسلہ جوڑا جانا چاہیے۔
- آپ ایک عمدہ اور تازہ وولٹیج کے منبع کو استعمال کریں۔ جب اس کو دور میں جوڑا جائے تو یہ بہنے نہ لگے۔
- تجربے میں استعمال کیے جانے والے مزاحمت کے ڈبے عمدہ کوالٹی کے ہونے چاہئیں۔
- دور کے جوڑ صحیح طور پر جوڑیں۔ کوئی جوڑ ڈھیلا نہ رہنے پائے۔

22.7 روزمرہ زندگی میں اس تجربے کی اہمیت

(Significant of Experiment in Domestic Life)

- ❖ ہم متوازی LCR سرکٹ، ایک اہتزاز گر میں بطور ٹینک سرکٹ میں استعمال کیا جاتا ہے۔
- ❖ ہم متوازی سرکٹس کو بطور فلٹر میں استعمال کیا جاتا ہے۔

22.8 تجربی نتائج (Experimental Results)

نتائج:

.iii عملی تعداد کی تخمین

$$X_L = 2\pi f_0 C = \cdots \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots mH$$
$$X_C = \frac{1}{2\pi f_0 C} = \cdots \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots Pf$$

.iv ان کے کیفی جز $Q = \frac{f_0}{f_2 - f_1}$ (Quality factor)

Q=..

22.9 کلیدی الفاظ (Keywords)

- **گمک والی تعداد (z):** اس تعدد پر LCR گھیرے کا انسداد عقل ترین ہوگا جو R کے مساوی ہو۔ اس تعداد پر برقی رو کی قیمت LCR گھیرے میں اعظم ترین ہوگی۔ اس تعداد کو گمک والی تعداد کہتے ہیں۔

- $\mathbf{F_o}$ **:** گمک کی تعدد $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ گمک پر LCR ہم سلسلہ دور میں برقی روا عظم ترین ہوتی ہے۔
- **متوازی مکثفے:** مکثفوں کو متوازی میں جوڑنے کے لیے

اپنی معلومات کی جانچ کیجیے (Check your Information Questions)

1. کیا ایک مکثفہ برقی توانائی کا ذخیرہ کر سکتا ہے۔
2. ہم متوازی LCR سرکٹ کے اطلاقات (Applications) کیا ہیں۔
3. کیا ہم متوازی LCR سرکٹ میں برقی روا عظم ترین ہوتی ہے۔
4. ایک دور کے کیفی جز (Quality factor) سے کیا مراد ہے؟
5. (a) مکثفے (b) امالی لچھے میں ذخیرہ کردہ توانائی کی مقدار کتنی ہونی چاہئے۔

اکائی 23۔ نٹ ورک کے مسئلوں کی تصدیق

(Verification of Network Theorems)

اکائی کے اجزا

23.0 تمہید (Introduction)

تھیوینن اور نارٹن کے مسئلوں کو کسی بھی پیچیدہ نٹ ورک (Network) کے متبادل دور کو حاصل کرنے کے لیے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ تھیوینن کا مسئلہ یہ بیان کرتا ہے کہ مزاحمتوں (Resistors) اور بیاٹریوں پر کوئی بھی نٹ ورک جو دو برآمدی سرے رکھتا ہے کے ایک ایسے مساوی وولٹیج کے منبع V_{Th} کے طور پر گھٹایا جاسکتا ہے جو ایک مساوی مزاحمت R_{Th} دور میں ہم سلسلہ رکھتا ہے۔ مساوی، برآمدی سروں پر وولٹیج کے مساوی ہوتا ہے جب کہ لوڈ (Load) کی رو صفر ہوتی ہے۔ مساوی مزاحمت برآمدی سروں پر مزاحمت کے مساوی ہوتی ہے جب کہ بیاٹریاں صفر مزاحمت سے بدل دی گئی ہوں۔

23.1 مقاصد (Objectives)

آپ کو اس سے واقف کرانا ہے کہ ایسے پیچیدہ الکٹرانی ادوار کو کس طرح آسان شکل میں پیش کریں جن کی وولٹیج۔رو-(Voltage-Current) کی خصوصیات ایسی ہی ہوتی ہیں جیسی کہ اصل دور کی۔

- اس تجربے میں تھیونین اور نارٹن کے مسئلوں کو استعمال کرتے ہوئے ایک متبادل نٹ ورک (Equivalent Network) کے ذریعہ پیچیدہ الکٹرانی جال کا تجزیہ کریں۔
- اس تجربے میں تھیونین اور نارٹن کے مسئلوں کو استعمال کرتے ہوئے ایک متبادل نٹ ورک (Equivalent Network) کے ذریعہ پیچیدہ الکٹرانی جال کا تجزیہ کریں۔

23.2 آلات (Apparatus)

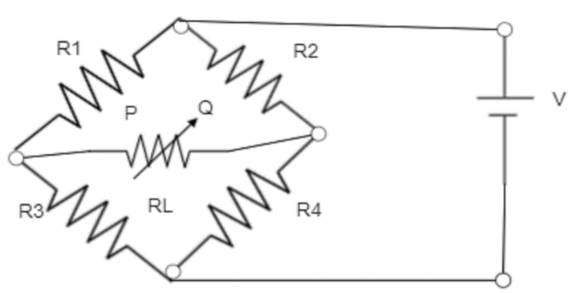
کاربن کے مزاحمت (Carbon Resistors) ڈاٹ کنجی،

کثیر پیما(Multi meter)،مزاحمت کا ڈبہ،

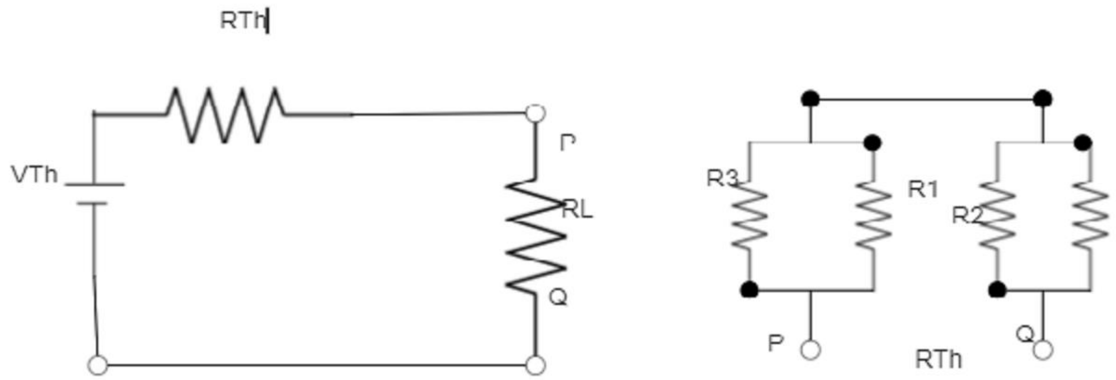
1.5 وولٹ کی بیاٹری،

23.2.1 تشریح آلات (Apparatus Explanation)

تھیوینن اور نارٹن کے مسئلوں کو کسی بھی پیچیدہ نٹ ورک (Network) کے متبادل دور کو حاصل کرنے کے لیے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ تھوینن کا مسئلہ یہ بیان کرتا ہے کہ مزاحموتوں (Resistors) اور بیاٹریوں پر کوئی بھی نٹ ورک جو دو برآمدی سرے رکھتا ہے کے ایک ایسے مساوی وولٹیج کے منبع V_{Th} کے طور پر گھٹایا جاسکتا ہے جو ایک مساوی مزاحمت R_{Th} دور میں ہم سلسلہ رکھتا ہے۔ مساوی، برآمدی سروں پر وولٹیج کے مساوی ہوتا ہے جب کہ لوڈ (Load) کی رو صفر ہوتی ہے۔ مساوی مزاحمت برآمدی سروں پر مزاحمت کے مساوی ہوتی ہے جب کہ بیاٹریاں صفر مزاحمت سے بدل دی گئی ہوں۔ مثال کے طور پر بموجب شکل (23.1) وہیٹ اسٹون کے پل کے نٹ ورک (Wheatstone bridge Network) پر غور کیجیے (23.2) میں اس کا متبادل تھیوینن کا دور بتایا گیا ہے۔



شکل (23.1) وہیٹ اسٹون کے پل کا نٹ ورک



شکل(23.2)وہیٹ اسٹون کے پل کے لیے تھیوینن کا متبادل دور

23.3 نظریہ (Theory)

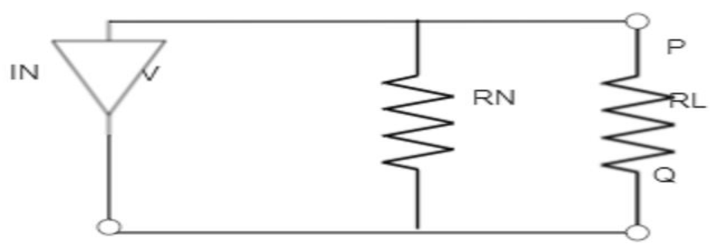
مساوی مزاحمت R_{Th} اس طرح بتایا جاتا ہے۔

$$R_{Th} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} R_3 + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} R_4 \qquad (23.1)$$

برآمدی سروں پر کھلے دور کا وولٹیج P اور Q کے درمیان تفاوت قوۃ ہے۔ R_4 کے گرد IR کی گراوٹ کو R_3 کے گرد IR کی گراوٹ میں سے تفریق کر کے اس تفاوت قوۃ کو حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$V_{Th} = \frac{V}{R_1 + R_3} . R_3 + \frac{V}{R_2 + R_4} . R_4 \qquad (23.2)$$

اسی وہیٹ اسٹون کے پل کے نٹ ورک کا تجزیہ نارٹن کے مسئلہ کو بھی استعمال کر کے کیا جاسکتا ہے۔ نارٹن کا مسئلہ بیان کرتا ہے کہ بیاٹریوں اور مزاحمتوں کے کسی بھی نٹ ورک جس میں دو برآمدی سرے سے ہوں رو کے منبع I_N اور مساوی مزاحمت R_N کے ایک متوازی ترکیب (Combination) سے بدلا جاسکتا ہے۔ رو کا منبع I_N قصر دور (Short Circuit) ہے یعنی لوڈ (Load) کی رو ہے جب کہ لوڈ کی مزاحمت صفر ہو۔ وہیٹ اسٹون کے پل کے نٹ ورک کے متبادل نارٹن کے دور میں مساوی مزاحمت $R_N = R_{Th}$ کو شکل (23.3) میں دکھایا گیا ہے۔



شکل(23.3)وہیٹ اسٹون کے پل کے لیے نارٹن کا متبادل دور

نارٹن کی متبادل رو

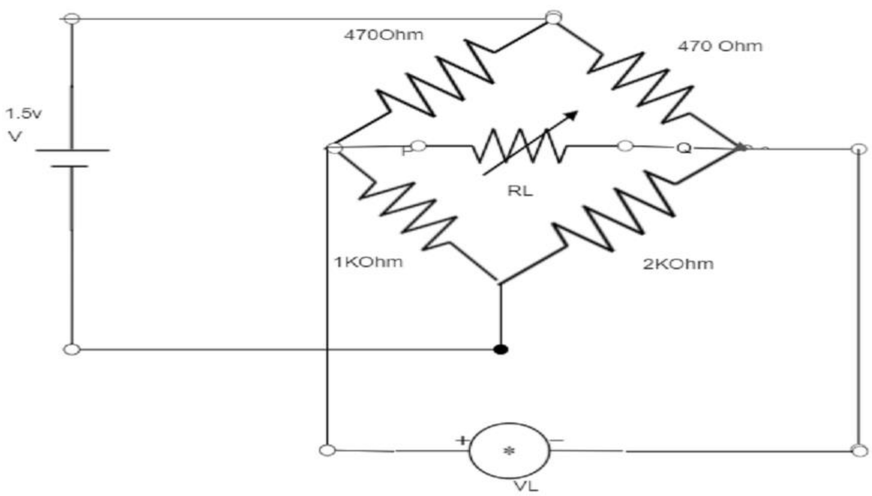
$$I_N = \frac{V_{Th}}{R_{Th}} \quad (23.3)$$

جہاں $V_{Th}=R_n$ ہے۔

23.4 طریقہ عمل (Procedure)

i. تھیوینن کے مسئلے کی جانچ:

پل کے دور کو بموجب شکل(23.4)جوڑیئے۔ایک مزاحمتی ڈبے کولوڈ مزاحمت R_L کے طور پر جوڑیئے۔آپ شکل(23.4) میں دکھائی گئی قیمتوں والے مزاحمت استعمال کر سکتے ہیں یا R_4, R_3, R_2, R_1 کے لیے دستیاب کوئی بھی مزاحمت کام میں لا سکتے ہیں۔اب آپ R_L کے گرد وولٹیج V_L کی پیمائش کیجیے اور ڈاٹا(23.1)کی جدول میں جدول بندی کیجیے۔



شکل(23.4)تھیوینن کے مسئلے کی جانچ کے لیے دور

K۔ڈاٹ کنجی V_L ملی روپیا (Millimeter)

R_L کو X - محور پر اور V_L کو Y- محور پر لیتے ہوئے V_L ہم قابل R_L کی ایک ترسیم بنایئے۔جب R_L لا متناہی قیمت کی طرف بڑھتا ہے تو V_L کی قیمت V_{Th} حاصل ہوتی ہے۔اس قیمت کو ترسیم سے معلوم کیجیے۔مساوات(23.2)کو بھی استعمال کر کے V_{Th} کو محسوب کیجیے ان دونوں قیمتوں کا تقابل کیجیے۔آپ ایک ملی ایم پیا (Milli Ammeter) کے استعمال سے P اور Q کے درمیان وولٹیج کی پیمائش کر کے اور R_L کو غیر مربوط کر کے V_{Th} کی راست طور پر قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔اب ان قیمتوں کا تقابل کیا ظاہر کرتا ہے؟آیئے نتائج کا تجزیہ کیجیے۔

نتائج:

(V_{Th}) ترسیم$= (V_{Th})_{graph} =$

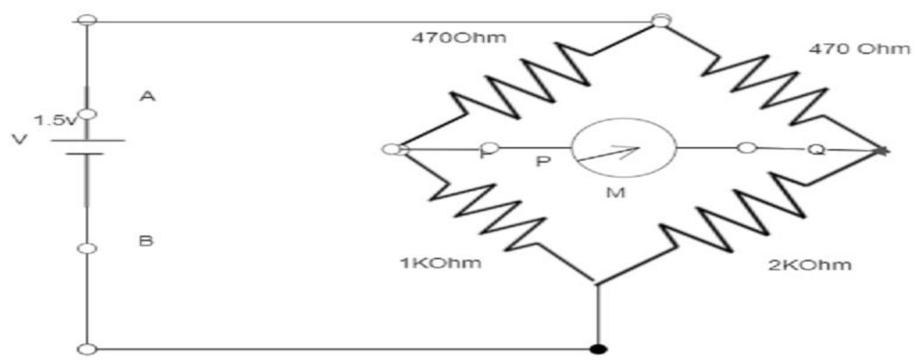
تحسیب$= (V_{Th})_{cal}$

راست$= (V_{Th})_{direct}$

تجزیہ:

ii. نارٹن کے مسئلے کی جانچ:

پل کے دور سے R_L کو منقطع کر دیجیے اور بموجب شکل(23.5) جب R=0 ہو تو قصر دور(Short Circuit) کی رو کی پیمائش کیجیے۔ اس قیمت سے I_N حاصل ہوگا۔ I_N کی پیمائش کے دوران رو کے رینج میں ملی ایم پیما کو استعمال کیجیے۔



شکل(23.5) نارٹن کے مسئلے کی جانچ کے لیے دور K۔ڈاٹ کنجی۔M ملی ایم پیما

P اور Q کے درمیان سے ایم پیما(ملی ایم پیما) کو ہٹا دیجیے۔ بیاٹری کو منقطع کر دیجیے اور (AB کو قصر دور کرتے ہوئے) A اور B کو تار کے ایک چھوٹے ٹکڑے سے جوڑیئے۔ تب مزاحمت کے رینج میں کثیر پیما (Multi Meter) استعمال کرتے ہوئے P اور Q کے درمیان مزاحمت کی پیمائش کیجیے۔ یہ مزاحمت $R_{Th} = R_N$ کے مساوی ہوتی ہے۔

(23.3) مساوات یعنی $I_N = \frac{V_{Th}}{V_N}$ کو استعمال کرتے ہوئے R_{Th}, I_N کو محسوب کیجیے۔

اس قیمت کا تقابل تجربی طور پر حاصل ہونے والی قیمت سے کیجیے اور اس کا تجزیہ کیجیے۔

نتیجہ:

تجربی$= (I_N)_{exp} =$

تحسیبی$=(I_N)_{cal} =$

تجزیہ:

23.5 مشاہدہ اور تحسیب (Observations and Analysis)

جدول (23.1)

V_L (V)	R_L (Ω)	سلسلہ نشان

23.6 احتیاطی تدابیر (Precautions)

- آپ ایک عمدہ اور تازہ وولٹیج کے منبع کو استعمال کریں۔ جب اس کو دور میں جوڑا جائے تو یہ بہنے نہ لگے۔
- تجربے میں استعمال کیے جانے والے مزاحمت اور مزاحمت کے ڈبے عمدہ کوالٹی کے ہونے چاہئیں۔
- دور کے جوڑ صحیح طور پر جوڑیں۔ کوئی جوڑ ڈھیلا نہ رہنے پائے۔

23.7 روزمرہ زندگی میں اس تجربے کی اہمیت

(Significant of Experiment in Domestic Life)

- تھیوینن اور نارٹن کے مسئلوں کو استعمال کر کے برقی انجینئرنگ(Engineering)اور الکٹرانیات کے کئی ایک پیچیدہ نٹ ورک (Network)کا تجزیہ کیا جاسکتا ہے۔
- نٹ ورک کے ان دو آسان مسئلوں کی مدد سے پیچیدہ ادوار کے نٹ ورک کے جال میں ہر ایک نٹ ورک کی کارکردگی کو علحدہ سے سمجھنے میں آسانی ہوتی ہے۔

23.8 تجربی نتائج (Experimental Results)

نتائج:

(V_{Th})ترسیم$= (V_{Th})_{graph} =$

تحسیب$= (V_{Th})_{cal}$

راست$= (V_{Th})_{direct}$

تجزیہ:

نتائج:

تجربی$= (I_N)_{exp} =$

تحسیبی$=(I_N)_{cal} =$

تجزیہ:

23.9 کلیدی الفاظ (Keywords)

- **کلیہ اوم(Ohm's Law)**: جارج سیمن اوم نے کلیہ اوم بیان کیا۔ طبعی حالات (جیسے ابعاد تپش اور میکانیکی بگاڑ وغیرہ) مستقل ہوں تب کسی موصل میں برقی رو کی حدت اس کے سروں پر عائد کردہ تفاوت قوۃ کے راست تناسب ہوتی ہے۔ یعنی $i \propto V$
- **اوم(Ohm)**: کسی موصل کی مزاحمت ایک اوم (1Ω) اس وقت کہلاتی ہے جب کہ اس میں سے گزرنے والی برقی رو ایک ایمپیر ہو جب کہ اس کے کناروں پر ایک وولٹ تفاوت قوۃ عائد کی جائے۔
- **مزاحمت(Resistance)** : کسی موصل کی مزاحمت کو اس کے سروں پر عائد کیا گیا تفاوت قوۃ 'V' اور اس میں سے گزرنے والی برقی رو (i) کی نسبت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اپنی معلومات کی جانچ کیجیے (Check your Information Questions)

1. نارٹن کی روح کی پیائش میں جو ایم پیا آپ نے استعمال کیا ہے وہ بھی مزاحمت رکھتا ہے جس کو نظر انداز نہیں کیا جاسکتا تو کیا آپ بالکل درست نتائج حاصل کر سکتے ہیں؟
2. دو پیچیدہ نٹ ورک میں ایک خلا کردہ نلیوں (Vacuum Tubes) پر اور دوسرا ٹرانسسٹر (Transistors) پر مشتمل ہے۔ آپ تھیوینن کے مسئلے کا اطلاق کس نٹ ورک پر کریں گے؟ اور نارٹن کے مسئلے کو کس نٹ ورک کے ضمن میں استعمال میں لائیں گے؟ اس کی وضاحت کیجیے۔
3. ایک سمعی سگنل جنریٹر (Audio Signal Generator) رو کا ایک منبع ہے یا وولٹیج کا؟

اکائی 24۔ سپرپوزیشن اور اعظم ترین پاور ٹرانسفر مسئلہ کی تصدیق

(Verification of Superposition and Maximum Power Transfer Theorem)

اکائی کے اجزا

24.0 تمہید (Introduction)

ایک برقی نٹ ورک کی تشریح بہ آسانی کی جاسکتی ہے اگر اس نٹ ورک کو ہم سلسلہ یا ہم متوازی میں تبدیل کر دیا جائے لیکن بعض نٹ ورک کو ہم سلسلہ یا ہم متوازی ترتیب میں تبدیل نہیں کیا جاسکتا اس موقع پر اس پیچیدہ نٹ ورک کی تشریح سپر پوزیشن کے ذریعے کی جاتی ہے۔

ایک خطی سرکیوٹ میں جو ایک سے زائد آزاد توانائی کے ذرائیوں پر مشتمل ہو تمامی رد عمل (وولٹیج یا کرنٹ) سرکیوٹ کے کس شاخ میں ہو تو وہ دوذرائیورں کو حرکت میں رکھتے ہوئے ہر ایک آزادانہ طور پر حرکت کرنے والے ذرائیوں کے سفجملہ ایک رد عمل کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔

24.1 مقاصد (Objectives)

- سپر پوزیشن نظریہ کے ذریعہ سرکیوٹ میں کرینٹ کی تخمین کرنا۔
- اعظم ترین پاور ٹرانسفر مر کی تصدیق کیجیے۔

24.2 آلات (Apparatus)

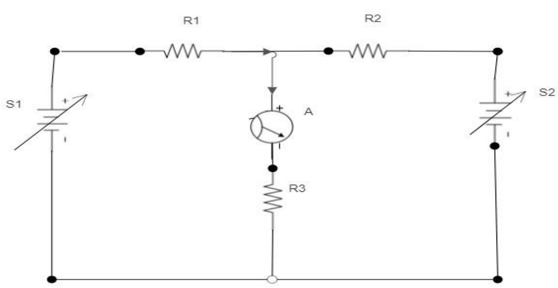
کاربن کی مختلف مزاحمتیں،	وولٹیج، ملٹی میٹر،	
جوڑنے والے تار،	پلگ چابی،	
1.5V کا مبداء،	ڈاٹ کنجی،	مزاحمت کا ڈبہ،

24.2.1 تشریح آلات (Apparatus Explanation)

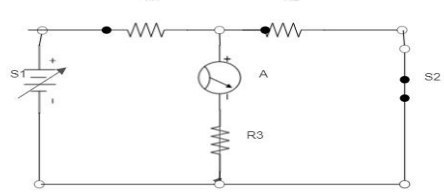
ایک برقی نٹ ورک کی تشریح بہ آسانی کی جاسکتی ہے اگر اس نٹ ورک کو ہم سلسلہ یا ہم متوازی میں تبدیل کر دیا جائے لیکن بعض نٹ ورک کو ہم سلسلہ یا ہم متوازی ترتیب میں تبدیل نہیں کیا جاسکتا اس موقع پر اس پیچیدہ نٹ ورک کی تشریح سپر پوزیشن کے ذریعے کی جاتی ہے۔

I. **سپر پوزیشن کا اصول:**

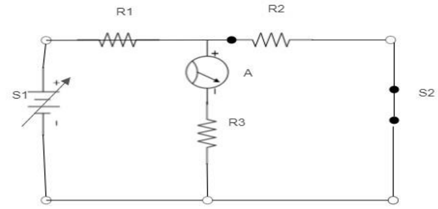
ایک خطی سرکیوٹ میں جو ایک سے زائد آزاد توانائی کے ذرائیوں پر مشتمل ہو تمامی رد عمل (وولٹیج یا کرنٹ) سرکیوٹ کے کس شاخ میں ہو تو وہ دو ذرائیوں کو حرکت میں رکھتے ہوئے ہر ایک آزادانہ طور پر حرکت کرنے والے ذرائیوں کے سفجملہ ایک رد عمل کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔



شکل(24.1)



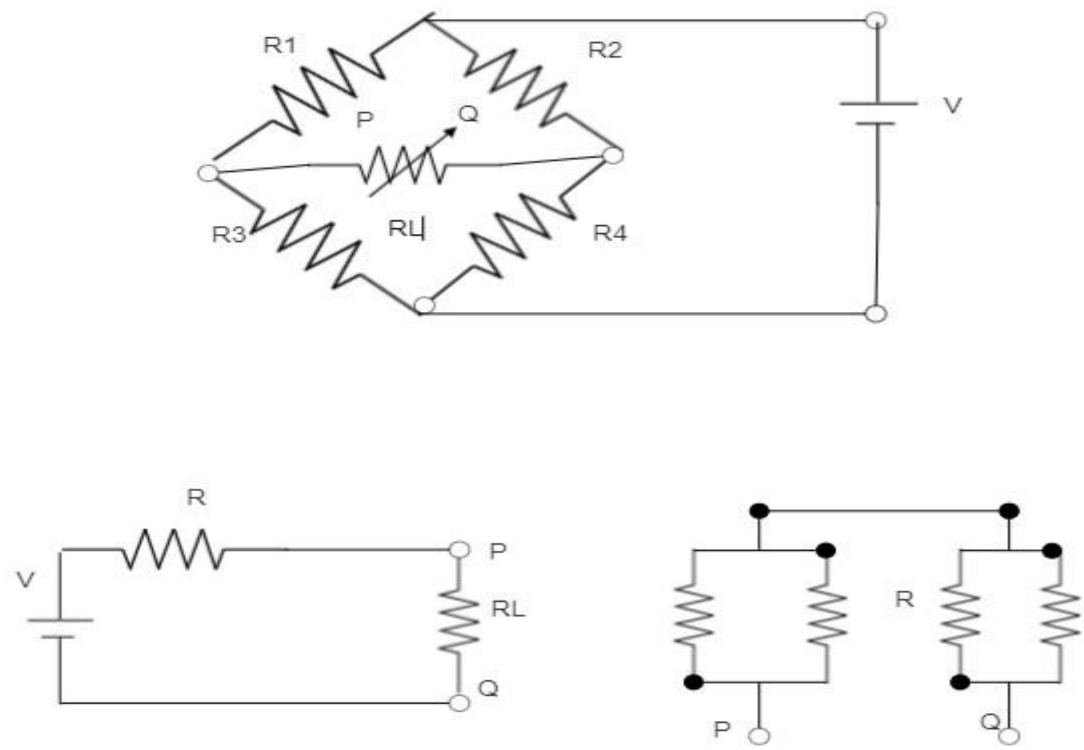
شکل(24.2)



شکل(24.3)

II. اعظم ترین پاور ٹرانسفر مسئلہ:

برقی سرکیوٹ مثلاریڈیوٹرانسمیٹر یافوٹو گراف افزوں گر میں یہ ضروری ہے کہ سرکیوٹ سے برقی پاور کی اعظم ترین مقدار لوڈ مزاحمت کو جو کہ antenna یالاؤڈاسپیکر ہوتاہے ایصال کی جائے اعظم ترین پاور ٹرانسفر کلیے کے بموجب ایک مبداء کالوڈ کوایصال کیاہوا پاور اعظم ترین ہوتاہے جب کہ لوڈ مزاحمت مساوی ہو مبداء کی داخلی مزاحمت (Internal Resistance) کے اس کلیے کی تصدیق کے لیے ویٹ اسٹون پل کے نٹ ورک پر غور کیجیے جیسا کہ شکل (24.4) میں دکھایا گیاہے۔



شکل (24.4)

24.3 نظریہ (Theory)

اعظم ترین پاور ٹرانسفر مسئلہ:

اعظم ترین پاور ٹرانسفر مسئلہ کے تصدیق کے لیے سرکیوٹ لوڈ R_L کو ایصال کیا جانے والا پاور مساوی ہوگا۔

$$P = I^2 R_L$$

$$\left(\because I = \frac{V}{R + R_L}\right) \qquad P = \left(\frac{V}{R + R_L}\right)^2 . R_L = \frac{V^2}{R_L\left(1 + \frac{R}{R_L}\right)^2}$$

یہ مساوات کی روسے لوڈ کو ایصال کیا جانے والا پاور صفر ہوگا اگر لوڈ مزاحمت کی قیمت کم ہو یا قیمت زیادہ ہو لہذا لوڈ مزاحمت کی قیمت

واجبی ہونی چاہیئے۔تاکہ پاور اعظم ترین ہو۔فرض کرو کہ یہ پاور P_L ہے۔تب

$$\frac{dP_L}{dR_L} = 0 \Rightarrow \frac{dP_L}{dR_L} = \frac{d}{dR_L}\left[V^2 {R_L}^{-1}\left(1+\frac{R}{R_L}\right)^{-2}\right] = 0$$

$$= \frac{d}{dR_L}\left[V^2 {R_L}^{-1}\left(1+\frac{R}{R_L}\right)^{-2}\right] = 0$$

$$= V^2\left[\left(1+\frac{R}{R_L}\right)^{-2}(-1){R_L}^{-2} + {R_L}^{-1}(-2)\left(1+\frac{R}{R_L}\right)^{-3}\left(\frac{-R}{{R_L}^2}\right)\right] = 0$$

$$\frac{2R}{{R_L}^3}\frac{1}{\left(1+\frac{R}{R_L}\right)^3} - \frac{1}{{R_L}^2\left(1+\frac{R}{R_L}\right)^2} = 0$$

$$\frac{2R}{R_L\left(1+\frac{R}{R_L}\right)^{-1}} = 0$$

$$\frac{2R}{R_L\left(1+\frac{R}{R_L}\right)} = 1 \Rightarrow \frac{2R}{R_L} = 1 + \frac{R}{R_L}$$

$$1 + \frac{R}{R_L} = 1 \Rightarrow R = R_L$$

یہ مساوات سے یہ ظاہر کرتی ہے کہ لوڈ کو ایصال کردہ پاور اس وقت اعظم ترین ہوتا ہے جب کہ لوڈ مزاحمت مساوی ہوتی ہے نٹ ورک کے داخلی مزاحمت کے جب لوڈ مزاحمت داخلی مزاحمت کے مساوی ہوتی ہے تب یہ کہا جاتا ہے کہ لوڈ سرکٹ سے ملاپ (Match) کرتا ہے۔

24.4 طریقہ عمل (Procedure)

I. سپرپوزیشن نظریہ:

1. سرکیوٹ کو شکل (24.2) کے مطابق جوڑ دیجیے۔
2. مبداء کو آید کرتے ہوئے پلگ (Plug) چابی کو بند کیجیے۔
3. S_1 اور S_2 مبداء کے وولٹیج کو خاص طور پر سیٹ کریں۔
4. ایم میٹر کی رڈینگ کو نوٹ کرتے ہوئے (I) کی پیمائش کیجیے۔
5. S_2 مبداء کو ڈس کنیکٹ کریں اور S_1 (Source) مبداء کو سرکیوٹ میں آید کرتے ہوئے ایم میٹر کی رڈینگ کے ذریعہ I'

کو معلوم کیجیے۔

6. اسی طور پر S_1 کو ڈس کنیکٹ کریں اور S_2 مبداء کو سرکیوٹ میں آید کرتے ہوئے ایم میٹر کی رڈینگ کے ذریعے I'' کو نوٹ کریں۔

7. I''، I' قیمتیں کے ذریعہ کو سپر پوزیشن نظریہ کو معلوم کریں۔

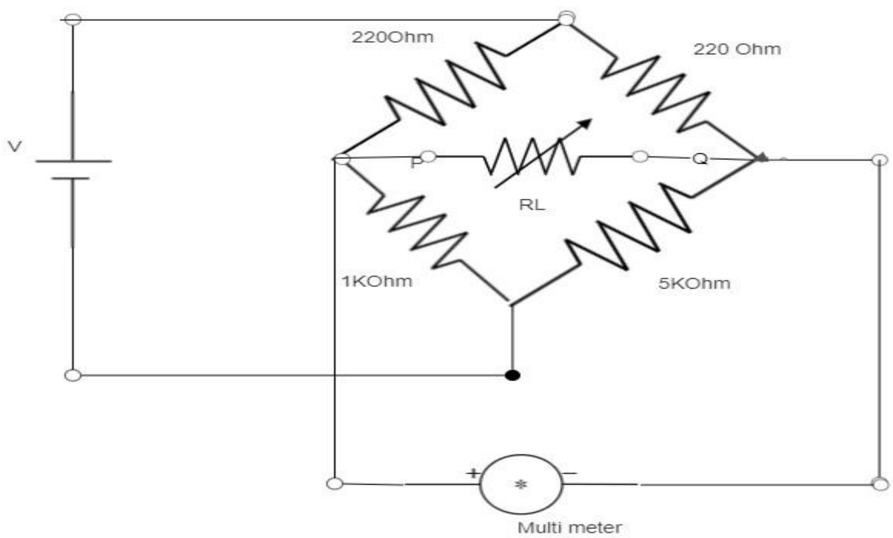
8. $I = I' + I''$

9. اس نتائج کو جدول (24.1) میں درج کیجیے۔

10. اس طرح مختلف وولٹیج پر تجربہ کو دہرائیے۔

II. اعظم ترین پاور ٹرانسفر مسئلہ کی تصدیق:

برج سرکیوٹ کو شکل (24.5) کے مطابق جوڑ دیجیے۔



شکل (24.5) اعظم ترین پاور ٹرانسفر مسئلہ کی تصدیق کے لیے سرکیوٹ

نقاط P اور Q کے درمیان صندوقچہ مزاحمت کو جوڑ دیجیے اور لوڈ مزاحمت R_L پر مختلف مزاحمت R_L کی قیمت کے لیے ملٹی میٹر کے ذریعہ وولٹیج کی پیمائش کیجیے نتائج کو جدول (24.2) میں درج کیجیے۔

P اور R_L کے درمیان ایک ترسم کھینچئے۔

ترسم کے ذریعے P کی اعظم ترین قیمت پر R_L کی قیمت معلوم کیجیے جو کہ $R_{L,} P_{max}$ ہوگا۔ برج نیٹ ورک جو پاور ایصال کررہا ہے اس کی داخلی مزاحمت مساوات کے ذریعہ معلوم کرسکتے ہے۔

$$R = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}$$

24.5 مشاہدہ اور تحسیب (Observations and Analysis)

1. سپر پوزیشن نظریہ:

جدول (24.1)

S_2 کی عید پر I'' قیمت (amps)	S_1 عید پر I' کی قیمت (amps)	S_1 اور S_2 مبداء عید پر I کی قیمت (amps)	وولٹیج		نشان سلسلہ
			S_2	S_1	

2. اعظم ترین پاور ٹرانسفر مسئلہ کی تصدیق:

جدول (24.2)

$P = I^2 R_L$	$I = \frac{V_L}{R_L} Amp$	V_L Volts	R_L Ohm	نشان سلسلہ
				1 2 3

24.6 احتیاطی تدابیر (Precautions)

- برقی رو یا وولٹیج کی ملٹی میٹر کے ذریعے پیائش کرتے وقت برقی رو اور وولٹیج کی قیمت نوٹ کیجیے۔
- جو مبداءِ وولٹیج آپ استعمال کر رہے ہیں وہ اچھی حالت میں ہونا چاہئے۔
- تمام جوڑ اچھی طرح لگائیے جوڑ ڈھیلا نہ رہنے پائے۔
- آپ ایک عمدہ اور تازہ وولٹیج کے منبع کو استعمال کریں۔ جب اس کو دور میں جوڑا جائے تو یہ بہنے نہ لگے۔
- تجربے میں استعمال کیے جانے والے مزاحمت اور مزاحمت کے ڈبے عمدہ کوالٹی کے ہونے چاہئیں۔
- دور کے جوڑ صحیح طور پر جوڑیں۔ کوئی جوڑ ڈھیلا نہ رہنے پائے۔

24.7 روزمرہ زندگی میں اس تجربے کی اہمیت

(Significant of Experiment in Domestic Life)

- ❖ الیکٹرانکس آلات کی عمدہ کارکردگی کے لیے مقاومت کی (Matching) ایک اہم مسئلہ ہے۔ اعظم ترین پاور ٹرانسفر مسئلہ کے بموجب داخلی مزاحمت اور لوڈ مزاحمت کو آپس میں مساوی رکھتے ہوئے مقاومت کی میاچنگ بہ آسانی حاصل کی جاسکتی ہے۔
- ❖ اس تجربے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ سپر پوزیشن نظریہ کو استعمال کرتے ہوئے رو کی تصدیق کر سکیں۔

24.8 تجربی نتائج (Experimental Results)

نتائج:

i. سپر پوزیشن نظریہ کے ذریعہ سرکیوٹ میں کرینٹ کی تخمین

I=..Amp

ii. اعظم ترین پاور ٹرانسفر مر کی تصدیق

P=.. Watts

24.9 کلیدی الفاظ (Keywords)

- **اعظم ترین رو کی قیمت(Maximum Value of Current)**: کسی متبادل رو میں گزرنے والی برقی رو کی سب سے اعظم ترین قیمت جو ایک لمحے کیلیے رہتی ہے۔
- **اوسط قیمت(Average Value)**: یہ کسی نقطہ سے نصف دور کے دوران سے گزرنے والے برقی بار کی Sine موج کے تمام قیمتوں کا اوسط ہے۔
- **جذر اوسط مربع قیمت(rms Value)**: یہ ایک مکمل دور کی تمام لمحاتی قیمتوں کے مربعوں کے اوسط کا جذر ال مربع ہوتی ہے۔

اپنی معلومات کی جانچ کیجیے (Check your information questions)

1. ایک لوڈ پاور کے ایصال کے لیے ایک جنریٹر کی اعظم ترین کارکردگی(Maximum) کیا ہے۔
2. برج سرکٹ میں آپ مبداء وولٹیج کے لیے 1.5V برقی خانہ استعمال کرتے ہیں۔
3. سرکٹ کے دوسرے اجزا پر اس مبداء کی داخلی مزاحمت کا کیا اثر ہوتا ہے؟

MAULANA AZAD NATIONAL URDU UNIVERSITY

B.Sc. (Physics) II Semester Examination

Practical Model Paper

Paper: BSPH250CCP

Total Marks 50:کل نمبرات　　　　Time 3 Hours وقت:3 گھنٹے

1. ملٹی میٹر کا استعمال کرتے ہوئے۔(a)۔مزاحمت　　(b)۔ڈائیوڈ کی تصدیق کریں۔
2. ملٹی میٹر کی مدد سے۔　　(a)۔AC اور DC وولٹیج　　(b)۔DC برقی رو کی تصدیق کریں۔
3. RC سرکیوٹ ہم سلسلہ میں جوڑ کر چارجنگ وولٹیج کے ذریعہ آر سی وولٹیج اور وقت مستقل کی پیمائش کیجئے۔
4. RC سرکیوٹ ہم سلسلہ میں جوڑ کر ڈس چارجنگ وولٹیج کے ذریعہ آر سی وولٹیج اور وقت مستقل کی تخمین کریں۔
5. سلسلہ یل سی آر دور کے تعدد کے تاثر(Response)کا مطالعہ کریں اور اس کے کیفی جز(Quality Factor) 'Q' کی قیمتوں کو محسوب کریں۔
6. ہم سلسلہ یل سی آر دور کی مدد سے تعدد اور گمکی دور سے گزرنے والی برقی دور کے درمیان ترسیم کھینچیے۔اور گمکی تعدد کی تخمین کریں۔ان کے کہفی جز کو محسوب کیجئے۔
7. ہم متوازی یل سی آر دور کے تعدد کے تاثر(Response)کا مطالعہ کریں اور اس کے کیفی جز(Quality Factor) 'Q' کی قیمتوں کو محسوب کیجئے۔
8. ہم متوازی یل سی آر دور کے مدد سے کیفی جز(Quality Factor)کو معلوم کیجئے۔
9. تھیونین کے مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے ایک تبادل نیٹ ورک(Equivalent Network)کے ذریعہ کسی پیچیدہ الکٹرانی جال کا تجزیہ کیجئے۔
10. نارٹن کے مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے ایک تبادل نٹ ورک(Equivalent Network)کے ذریعہ کسی پیچیدہ الکٹرانی جال کا تجزیہ کیجئے۔
11. سپریوزیشن نظریہ کو استعمال کرتے ہوئے رو کی تصدیق کریں۔
12. اعظم ترین پاور ٹرانسفرمر کی تصدیق کیجئے۔

☆☆☆

یہ کتاب مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کے ڈی ٹی پی سیل کاؤنٹر پر دستیاب ہے۔

ملنے کا پتہ:

ڈی ٹی پی سیل کاؤنٹر، ڈائرکٹوریٹ آف ٹرانسلیشن اینڈ پبلی کیشنز

مولانا آزاد نیشنل اُردو یونیورسٹی، گچی باؤلی، حیدرآباد-500032 (تلنگانہ)

DTP Sale Counter, Directorate of Translation & Publications

Room No. G-09, H. K. Sherwani Centre for Deccan Studies
Maulana Azad National Urdu University, Gachibowli,Hyderabad-500032
M: 9394370675, 9966818593, Email: directordtp@manuu.edu.in

Account Name: DTP Sale Counter **Account No.:** 187901000009349
Bank Name: Indian Overseas Bank **IFSC:** IOBA00001879
Branch: Gachibowli, Hyderabad

Counter Timings

Monday To Friday
09:30 a.m. To 05:30 p.m.

کتابوں کی قیمت پر رعایت کی شرح:

1۔عام قارئین کے لیے 25%   2۔طلبا، کالجز اور دیگر اداروں کے لیے 30%

کتابیں ڈاک سے بھی منگوائی جاسکتی ہیں۔

نوٹ: -/500 روپے سے زائد کے بل پر ڈاک خرچ نہیں لیا جائے گا۔