BNCM201DET

کاروباری شماریات اور ریاضی-2

(Business Statistics and Mathematics – 2)

بیچلر آف کامرس (بی۔کام۔)

چار سالہ پروگرام

(دوسرا سمسٹر)

مرکز برائے فاصلاتی و آن لائن تعلیم

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

حیدرآباد-32، تلنگانہ، بھارت

Copyright © 2025, Maulana Azad National Urdu University, Hyderabad

All right reserved. No part of this publication may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronically or mechanically, including photocopying, recording or any information storage or retrieval system, without prior permission in writing form the publisher (registrar@manuu.edu.in)

ISBN	:	978-81-994501-6-5
Course	:	(Business Statistics and Mathematics - 2)
First Edition	:	October 2025
Copies	:	500
Price	:	155/- (The price of the book is included in admission fee of distance mode students)

Course Coordinator

Prof. Md. Sadat Shareef,
Professor (Commerce), CDOE, MANUU

Editorial Board/Editors

Name of the Editors	Unit Numbers
Prof. Md. Sadat Shareef, Professor (Commerce), CDOE, MANUU	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
Prof. Khaja Moinuddin Professor Mathematics Dept of Mathematics, MANUU, Hyderabad	8
Dr. Zafar Ahmed (Zafar Gulzar) DTP, Maulana Azad National Urdu University, Hyderabad	Language Editor

Production

Prof. Nikhath Jahan
Professor (Urdu),
CDOE MANUU

Mr. P Habibulla
Assistant Registrar, Purchase & Stores Section, MANUU

Dr. Mohd Akmal Khan,
Assistant Professor (C)/Guest Faculty,
CDOE MANUU

Mohd Abdul Naseer
Section Officer, CDOE MANUU

Shaik Ismail,
UDC, CDOE, MANUU

Syed Faheemuddin, LDC
Purchase & Stores Section, MANUU

On behalf of the Registrar, Published by:

Centre for Distance and Online Education

Maulana Azad National Urdu University

Gachibowli, Hyderabad-500032 (TG), India

*Director:*dir.dde@manuu.edu.in*Publication:*ddepublication@manuu.edu.in

Phone number: 040-23008314 Website: manuu.edu.in

CRC Prepared by the Hafiz Mohammed Rashed Moin Uz Zafar, Computer Operator, CDOE, MANUU

Printed at : Print Time & Business Enterprises, Hyderabad.

فہرست

پیغام	وائس چانسلر، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی	4
پیغام	ڈائرکٹر، مرکز برائے فاصلاتی و آن لائن تعلیم	5
کورس کا تعارف	کورس کوآرڈی نیٹر (اردو)	6

اکائی نمبر	اکائی کا نام	مصنف	صفحہ نمبر
1۔	ہم رشتگی تجزیہ		7
2۔	اسپیرمین درجاتی ہم رشتگی	ڈاکٹر محمد عابد علی	32
3۔	تجزیہ مراجعت	اسسٹنٹ پروفیسر / گیسٹ فیکلٹی (کامرس)، مرکز برائے فاصلاتی اور آن لائن تعلیم، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد	49
4۔	تجزیہ وقتی سلسلہ (حرکتی اوسط)		75
5۔	اعشاری اعداد	Dr. Mohd. Abid Ali	92
6۔	اہم اعشاری اعداد	Assistant Professor / Guest faculty (Commerce), CDOE, MANUU	104
7۔	پاشے اور لیسپیر انڈیکس نمبرز		119
8۔	مقطعات اور نظریہ ماترس	ڈاکٹر وسیم راجا اسسٹنٹ پروفیسر ریاضی، شعبہ ریاضی مانو حیدرآباد Dr.Waseem Raja Assistant Professor, Dept of Mathematics, Manuu, Hyd.	132
	نمونہ امتحانی پرچہ		158
	ٹائٹل پیج (Title Page):	ابراہیم اکرم صدیقی	

پیغام

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی (MANUU) 1998 میں پارلیمنٹ کے ایک ایکٹ کے ذریعے قائم کی گئی۔ یہ ایک مرکزی جامعہ ہے جس نے این اے اے سی کی جانب سے گریڈ +A حاصل کیا ہے۔ اس جامعہ کے قیام کے مقاصد ہیں: (1) اردو زبان کا فروغ، (2) پیشہ ورانہ اور تکنیکی تعلیم کو اردو میڈیم میں قابل رسائی اور دستیاب بنانا، (3) روایتی اور فاصلاتی طریقہ تعلیم کے ذریعے تعلیم فراہم کرنا، اور (4) خواتین کی تعلیم پر خصوصی توجہ دینا۔ یہ وہ نکات ہیں جو اس مرکزی جامعہ کو دیگر تمام مرکزی جامعات سے ممتاز کرتے ہیں اور اسے ایک انفرادیت بخشتے ہیں۔ قومی تعلیمی پالیسی 2020 میں بھی مادری زبانوں اور علاقائی زبانوں میں تعلیم حاصل کرنے پر زور دیا گیا ہے۔

اردو کے ذریعے علم کے فروغ کا مقصد یہی ہے کہ اردو جاننے والے طبقے کے لیے عصری علوم اور مضامین تک رسائی آسان بنائی جائے۔ ایک طویل عرصے تک اردو میں درسی مواد کی کمی رہی ہے۔ اردو یونیورسٹی کے پاس اب اردو میں 350 سے زیادہ کتابوں کا ذخیرہ موجود ہے اور ہر سمسٹر کے ساتھ اس تعداد میں اضافہ ہو رہا ہے۔

اردو یونیورسٹی این ای پی 2020 کے وژن کے مطابق مادری / گھریلو زبان میں تعلیمی مواد فراہم کرنے کے قومی مشن کا حصہ بننے کو اپنے لیے ایک اعزاز سمجھتی ہے۔ مزید یہ کہ اردو بولنے والا طبقہ اردو میں مطالعہ کے مواد کی عدم دستیابی کے سبب نئے اُبھرتے شعبوں اور جدید تر معلومات کے موجودہ میدانوں میں تازہ ترین معلومات و اطلاعات کے حصول سے محروم نہیں رہے گا۔ مذکورہ بالا میدانوں میں مواد کی دستیابی کی بدولت حصولِ معلومات کا نیا شعور بیدار ہوا ہے جو یقیناً اردو داں طبقے کی دانشورانہ ترقی پر اثر انداز ہوگا۔

فاصلاتی اور آن لائن طلبہ کے لیے تعلیم و تدریس کے عمل کو سہل بنانے کے لیے یونیورسٹی کا سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن (CDOE) اردو اور متعلقہ مضامین میں خود اکتسابی مواد (SLM) کی تیاری کو یقینی بناتا ہے۔

MANUU فاصلاتی اور آن لائن لرننگ کے طلبہ کے لیے SLM بلا معاوضہ فراہم کرتا ہے۔ یہ مواد اُردو کے ذریعے علم حاصل کرنے میں دلچسپی رکھنے والے ہر شخص کے لیے برائے نام قیمت پر دستیاب ہے۔ تعلیم تک رسائی کے دائرے کو مزید پھیلانے کے مقصد سے، اردو / ہندی / انگریزی / عربی میں eSLM یونیورسٹی کی ویب سائٹ پر مفت ڈاؤن لوڈ کے لیے دستیاب رکھا گیا ہے۔

مجھے بے حد خوشی ہے کہ متعلقہ فیکلٹی کی محنت اور مصنفین کے مکمل تعاون کی بدولت FYUG بی۔اے، بی۔ایس سی اور بی۔کام کی کتابوں کی اشاعت کا عمل بڑے پیمانے پر شروع ہو گیا ہے۔ فاصلاتی اور آن لائن لرننگ کے طلبہ کی سہولت کے لیے خود اکتسابی مواد (SLM) کی تیاری اور اشاعت کا عمل یونیورسٹی کے لیے اہمیت رکھتا ہے۔ مجھے یقین ہے کہ ہم اپنے خود تعلیمی مواد کے ذریعے اردو جاننے والے ایک بڑے طبقے کی ضروریات کو پورا کرنے کے قابل ہوں گے اور اس یونیورسٹی کے مقصدِ قیام کو پورا کریں گے اور اپنے ملک میں اپنی موجودگی کو جائز ٹھہرا سکیں گے۔

نیک تمناؤں کے ساتھ!

پروفیسر سید عین الحسن
شیخ الجامعہ، مانو

پیغام

موجودہ دور میں فاصلاتی تعلیم کو دنیا بھر میں ایک نہایت مؤثر اور مفید طریقۂ تعلیم کے طور پر تسلیم کیا جاتا ہے اور بڑی تعداد میں لوگ اس طریقۂ تعلیم سے فائدہ اٹھا رہے ہیں۔ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی نے بھی اردو زبان بولنے والے عوام کی تعلیمی ضروریات کو مد نظر رکھتے ہوئے اپنے قیام کے وقت سے ہی فاصلاتی تعلیم کا طریقہ متعارف کرایا۔ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی نے 1998 میں ڈائریکٹوریٹ آف ڈسٹنس ایجوکیشن (نظامتِ فاصلاتی تعلیم) کے ساتھ کام کا آغاز کیا اور 2004 سے باقاعدہ پروگرام شروع ہوئے، اس کے بعد مختلف شعبہ جات قائم کیے گئے۔

یو جی سی نے ملک میں نظام تعلیم کو مؤثر طور پر منظم کرنے میں ایک اہم کردار ادا کیا ہے۔ اوپن اینڈ ڈسٹنس لرننگ (ODL) موڈ کے تحت چلنے والے مختلف پروگرام، جو سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن (CDOE) میں چل رہے ہیں، یو جی سی-ڈی ای بی کے منظور شدہ ہیں۔ یو جی سی-ڈی ای بی نے فاصلاتی اور باقاعدہ تعلیم کے نصاب کو ہم آہنگ کرنے پر زور دیا ہے تاکہ فاصلاتی تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ کے معیار کو بہتر بنایا جاسکے۔ چونکہ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی ایک دُہرے طرز (ڈوئل موڈ) کی یونیورسٹی ہے جو فاصلاتی اور روایتی دونوں طریقۂ تعلیم کی خدمات فراہم کرتی ہے، اس لیے اپنے مقاصد کو یو جی سی-ڈی ای بی کے رہنما خطوط کے مطابق حاصل کرنے کے لیے اس نے چوائس بیسڈ کریڈٹ سسٹم (CBCS) متعارف کرایا گیا جس کا خود اکتسابی مواد (Self Learning Materials) یو جی سی کے قوانین اور کریڈٹ فریم کے مطابق نئے سرے سے تیار کیے جاچکا ہے۔

سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن (CDOE) کل انیس (19) پروگرام پیش کرتا ہے جن میں یو جی، پی جی، بی ایڈ، ڈپلومہ اور سرٹیفکیٹ پروگرام شامل ہیں۔ اس کے ساتھ ساتھ تکنیکی مہارتوں پر مبنی پروگرام بھی شروع کیے جارہے ہیں۔ سی ڈی او ای نے جولائی 2025 سے این ای پی-2020 کے مطابق چار سالہ یو جی پروگرام کا آغاز کیا ہے۔ بی اے، بی ایس سی اور بی کام کے آنرز پروگراموں کو این سی ایف کے مطابق ڈیزائن کیا گیا ہے جس سے طلبہ کو آنرز ڈگری حاصل کرنے میں مدد ملے گی۔ سال 2025-2026 سے ایم بی اے پروگرام او ڈی ایل موڈ میں متعارف کرایا گیا ہے۔

مانو نے طلبہ کی سہولت کے لیے نو ریجنل سنٹرز (بنگلورو، بھوپال، دربھنگہ، دہلی، کولکاتا، ممبئی، پٹنہ، رانچی اور سری نگر) اور چھ سب ریجنل سنٹرز (حیدرآباد، لکھنؤ، جموں، نوح، وارانسی اور امراوتی) کا ایک وسیع نیٹ ورک قائم کیا ہے۔ اس کے علاوہ وجے واڑا میں ایک ایکسٹینشن سنٹر بھی قائم کیا گیا ہے۔ ان ریجنل اور سب ریجنل سنٹروں کے تحت ایک سو پچاس سے زیادہ لرنر سپورٹ سنٹر (LSCs) اور بیس پروگرام سنٹر بیک وقت چلائے جارہے ہیں تاکہ طلبہ کو تعلیمی اور انتظامی سہولیات فراہم کی جاسکیں۔ سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن اپنی تعلیمی اور انتظامی سرگرمیوں میں آئی سی ٹی کا بھرپور استعمال کرتا ہے اور اپنے تمام پروگراموں میں صرف آن لائن موڈ کے ذریعے ہی داخلے فراہم کرتا ہے۔

طلبہ کے لیے سیلف لرننگ میٹیریل (SLM) کی سوفٹ کاپی سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن کی ویب سائٹ پر دستیاب کرائی جاتی ہیں اور آڈیو و ویڈیو ریکارڈنگ کے لنک بھی ویب سائٹ پر فراہم کیے جاتے ہیں۔ اس کے علاوہ طلبہ کو ای۔میل اور واٹس ایپ گروپ کی سہولت بھی فراہم کی جارہی ہے جن کے ذریعے انہیں پروگرام کے مختلف پہلوؤں جیسے کورس رجسٹریشن، اسائنمنٹ، کاؤنسلنگ، امتحانات وغیرہ کے بارے میں مطلع کیا جاتا ہے۔ باقاعدہ کاؤنسلنگ کے علاوہ گزشتہ دو برسوں سے طلبہ کے تعلیمی معیار کو بہتر بنانے کے لیے زائد تدارکی (Remedial) آن لائن کاؤنسلنگ بھی فراہم کی جارہی ہے۔

امید کی جاتی ہے کہ سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن تعلیمی اور معاشی طور پر پسماندہ آبادی کو عصری تعلیم کے دھارے میں شامل کرنے میں ایک اہم کردار ادا کرے گا۔ تعلیمی ضروریات کو مد نظر رکھتے ہوئے نئی تعلیمی پالیسی (NEP-2020) کے مطابق مختلف پروگرامز میں تبدیلیاں کی گئی ہیں اور توقع ہے کہ اس سے اوپن اینڈ ڈسٹنس لرننگ کے نظام کو مزید مؤثر اور کارآمد بنانے میں مدد ملے گی۔

پروفیسر محمد رضا اللہ خان

ڈائرکٹر، سی ڈی او ای، مانو

کورس کا تعارف

کاروباری شماریات اور ریاضی-2 (Business Statistics and Mathematics-2)بی کام چار سالہ (آنرس) کورس (آٹھ سمسٹر) میں پہلا سمسٹر کے تحت ایک مضمون ہے جو روایتی اور فاصلاتی تعلیم میں مشترکہ طور پر پڑھایا جاتا ہے۔اس مضمون کے ذریعہ شماریات اور ریاضی کے بنیادی تصورات اور اس کے اطلاق کے متعلق درکار معلومات حاصل ہوتے ہیں۔خود اکتسابی مواد کی تیاری میں نصاب کے ساتھ ساتھ مضمون کو آسان، قابل فہم، ذوقِ سلیم کی پرورش کو مد نظر رکھا گیا ساتھ ہی کاروباری ذہن کی تخم ریزی ہوتی ہے۔

ہر اکائی میں اکائی کا تعارف، معنی و مفہوم، تمثیلی سوالات اور ان کا حل، اہم نکات، کلیدی الفاظ، اکتسابی نتائج اور مشقی سوالات اور انگریزی اور اردو اصطلاحات بھی دئے گئے ہیں۔یہ کتاب جامعہ ہٰذا کے بی کام کے روایتی و فاصلاتی تعلیم کے متعلمین کے ساتھ ساتھ دیگر جامعات کے کامرس کے طلباء کے لیے بھی کافی مفید ثابت ہوگی۔

مواد کی ترتیب میں تسلسل کو برقرار رکھنے کی عاجزانہ کوشش کی گئی ہے تاہم کوئی بھی کوشش اپنے آپ میں مکمل نہیں ہوتی بلکہ اس میں مزید اصلاح کی ضرورت ہوتی ہے۔یہ کتاب معزز اساتذہ کرام، ذہین و فتین طلباء کی خدمت میں پیش کی جارہی ہے۔اس پس منظر میں مطالعہ کے دوران درپیش مشکلات، حل طلب وضاحتوں کی نشاندہی کرتے ہوئے اپنے صلاح و مشورے سے نوازیں جن کو مستقبل کی اشاعت میں شامل کیا جاسکتا ہے۔آپ اپنے قیمتی آرا و تجاویز dir.dde@manuu.edu.in پر میل کرسکتے ہیں۔تجاویز کے ساتھ فون نمبر، نام اور مکمل پتہ بھی ارسال کرکے شکریہ کا موقع عطا کریں۔

نیک تمناؤں کے ساتھ

پروفیسر محمد سعادت شریف

کورس کوآرڈی نیٹر، سی ڈی او ای، مانو، حیدرآباد

اکائی 1۔ ہم رشتگی تجزیہ

Correlation Analysis

اکائی کے اجزا:

1.0 تمہید (Introduction)

1.1 مقاصد (Objectives)

1.2 ہم رشتگی کے معنی، تعریف اور نوعیت (Meaning, Definition and Nature of Correlation)

1.3 ہم رشتگی کی ضرورت (Need of Correlation)

1.4 ہم رشتگی کے اقسام (Types of Correlation)

1.5 کارل پیرسن ہم رشتگی کی قدر ضریب (Karl Pearson Coefficient of Correlation)

1.6 پیرسن کے کوریلیشن کے مفروضات (Assumptions of Pearson's Coefficient of Correlation)

1.7 کوریلیشن کے ضریب کی تشریح (Interpretation of Coefficient of Correlation)

1.8 تعین کا ضریب (Coefficient of Determination)

1.9 کوریلیشن کے ضریب کی اقل ترین مربعوں کے طریقے سے تحسیب (Calculation of Coefficient of Correlation with Least Square's Method)

1.10 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

1.11 کلیدی الفاظ (Keywords)

1.12 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

1.0 تمہید (Introduction)

شماریات میں اب تک ہم نے صرف ایک متغیر سے متعلق سوالات کا مطالعہ کیا ہے لیکن عملی طور پر ہم ایسے کئی بے شمار مسائل کا سامنا کرتے ہیں جس میں دو یا زائد متغیرات کا استعمال ہوتا ہے۔ اگر دو مقداریں کچھ اس انداز میں حرکت کر رہی ہوں کہ ایک مقدار کی حرکت دوسری مقدار کے برابر / مساوی ہوں / کچھ فرق نہ ہو تب یہ مقداریں ہم رشتہ / ہم آہنگ ہوں گی۔ مثال کے طور پر اگر شوہر اور بیوی کی عمر کے درمیان، کسی شئے کی قیمت اور طلب، ایک نکتہ تک بارش میں اضافہ اور چاول کی پیداوار ٹیلی ویژن لائسنس اور سینما جانے

والوں کی تعداد وغیرہ کے درمیان تعلق پایا جائے، زیر غور متغیرات کے درمیان تعلق کے دائرہ کی پیائش ہم رشتگی کے تجزیہ کے ذریعہ ہوگی۔ ہم رشتگی کی پیائش کو ہم رشتگی کا ضریب یا ہم رشتگی اعشاریہ کہتے ہیں جس کو ایک عدد کی صورت میں رخ اور زاویہ کو ظاہر کیا جاتا ہے۔ ہم رشتگی تجزیہ متغیرات کے درمیان تعلق قربت کی پیائش میں مستعمل ٹیکنکس سے متعلق ہے۔

1.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- ہم رشتگی کے مطالعہ کی اہمیت سے واقف ہو سکیں گے۔
- ہم رشتگی کے مفہوم سے واقف ہو سکیں گے۔
- ہم رشتگی کے مطالعہ کے اسباب و علل سے واقف ہو سکیں گے۔
- ہم رشتگی کے اقسام پر بحث کر سکیں گے۔
- کوریلیشن کے مطالعہ کے طریقوں سے آگاہ ہو سکیں گے۔

1.2 ہم رشتگی کے معنی، تعریف اور نوعیت (Meaning, Definition and Nature of Correlation)

متغیرات کے درمیان ہم رشتگی کی نشاندہی کی جاتی ہے کہ ایک متغیر کی قدر میں تبدیلی ہو رہی ہو تب دوسرا متغیر بھی اسی خصوصی سمت میں تبدیل ہوتا ہے۔ شماریات میں دو متغیرہ تقسیم میں ہم یہ دریافت کرنے میں دلچسپی رکھتے ہیں کہ زیر مطالعہ دو متغیروں کے درمیان کوئی تعلق ہے۔ ہم رشتگی ایک شماریاتی آلہ ہے جو دو متغیروں کے درمیان تعلق کا مطالعہ کرتا ہے اور ہم رشتگی تجزیہ میں دو متغیروں کے درمیان کس حد تک تعلق ہے اس مطالعہ کے لئے مختلف طریقہ اور ٹیکنکس کا استعمال شامل ہے دو متغیروں کو اسی وقت ہم رشتہ سمجھا جاتا ہے جب کہ ایک متغیرے میں تبدیلی کے نتیجے میں دوسرے متغیرے میں تبدیلی ہو۔ اس طرح ہم رشتگی شماریاتی آلہ ہے جو دو یا زائد متغیروں کے درمیان تجزیہ میں ہماری مدد کرتا ہے۔

بعض اوقات ایسا محسوس ہوتا ہے کہ محصلہ مختلف متغیرات کی قدریں باہم تعلق رکھتے ہیں۔ ایسا ممکن ہے کہ ایسا تعلق ہم دو سلسلوں میں حاصل کر سکتے ہیں جیسے ایک گروہ کا قد اور وزن۔ ایسا مشاہدہ کیا جاسکتا ہے قد میں اضافہ کے ساتھ وزن میں اضافہ ہوتا ہے۔ نتیجتاً بلند قامت افراد کم قامت افراد سے زیادہ وزنی ہوتے ہیں۔ اسی طرح اگر ایک شئے کی قیمت اور مختلف قیمتوں پر فروخت کردہ مقدار ان دونوں کی معلومات کو جمع کریں تو دو سلسلے حاصل ہوں گے۔ ایک متغیرہ شئے کی مختلف قیمتوں اور دوسرا متغیرہ ان قیمتوں پر فروخت کردہ مقدار ہوگی۔ نتیجتاً ہم ایسے دو سلسلوں میں کچھ تعلق ضرور پائیں گے۔ شئے کی قیمتوں میں اضافہ کے ساتھ شئے کی فروخت کردہ مقدار گھٹتی جاتی ہے۔ اس طرح ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ قیمت اور طلب میں کچھ تعلق ہے ایسا تعلق کئی سلسلوں میں پایا جاسکتا ہے مثال کے طور پر قیمت اور رسد۔ افراد کا قد اور وزن۔ نیشکر اور شکر کی قیمتیں۔ شوہر اور بیویوں کی عمریں وغیرہ۔

تعریف:

کوریلیشن کی مختلف ماہرین نے اپنے اپنے منفرد انداز میں تعریف کی ہے چند ماہرین کی تعریفات کو ذیل میں پیش کیا گیا ہے۔

1. W.I. King کے مطابق "کوریلیشن کا مطلب اعداد و شمار کا دو سلسلوں یا گروہوں کے درمیان کچھ عارضی تعلق کا وجود ہے"۔

2. Ya Lun Chow نے کوریلیشن کی تعریف یوں کی ہے کہ "کوریلیشن تجزیہ دو متغیرات کے درمیان تعلقات کی ڈگری کے تعین کی کوشش ہے"۔

2. Croxton and Cowder کے مطابق "جب تعلق مقداری نوعیت کا ہو' تعلق کی دریافت کاری اور پیمائش کے لئے موزوں شماریاتی آلہ اور اس کو مختصر اور جامع ضابطہ کوریلیشن کے طور پر جانا جاتا ہے"۔

4. Simpson and Kafka کے مطابق "کوریلیشن تجزیہ دو یا زائد متغیرات کے درمیان ایک بندشِ خیالات جوڑ سے متعلق ہے"۔

5. A.M. Tuttle نے کوریلیشن کی تعریف یوں کی ہے "کوریلیشن دو یا زائد متغیرات کے درمیان حسابی تعلق کا ایک تجزیہ ہے"۔

6. Tippet کے مطابق "ہماری پیشن گوئی میں غیر یقینی کے حدود میں کمی کوریلیشن کا اثر ہے"۔ دو متغیرات کو، کوریلیٹیڈ او وقت کہا جائے گا جبکہ ایک متغیر میں تبدیلی کے نتیجہ میں دوسرے متغیر میں بھی مشابہ / مماثل تبدیلی ہو۔ اس طرح کوریلیشن ایک شماریاتی آلہ ہے جو دو یا دو سے زیادہ متغیرات میں Correlation کے تجزیہ میں ہماری مدد کرتا ہے۔

ہم رشتگی کے حدود (Scope of Correlation)

ہم رشتگی (کوریلیشن) کے مطالعہ کی افادیت طبیعیات کے ساتھ ساتھ سماجی سائنسیس اور دونوں میں بے پایاں افادیت کا حامل ہے تاہم، ہم اپنے آپ کو ہم رشتگی کے مطالعہ کی افادیت کو صرف سماجی سائنسیس تک محدود رکھیں گے۔

1. کوریلیشن کا مطالعہ فیصلہ سازی سے جڑی غیر یقینی کیفیت کی حد کو کم کرتا ہے۔ سماجی سائنسیس میں خصوصاً کاروباری دنیا میں پیش بنی ایک اہم مظہر ہے اور کوریلیشن کا مطالعہ ہمیں پیش بنی پر زیادہ بھروسہ کرنے میں مددگار ہے۔

2. معاشی برتاؤ کو سمجھنے میں کوریلیشن تجزیہ بہت ہی مددگار ہے۔ یہ ہمیں ایسے متغیرات کی نشاندہی میں مدد کرتا ہے جن پر دوسرے متغیرات کا انحصار ہوتا ہے۔ یہ ان عناصر کے مطالعہ میں مددگار ہے جن سے معاشی واقعات متاثر ہوتے ہیں مثال کے طور پر ہم ان عناصر کو معلوم کرسکتے ہیں جو قیمتوں میں اضافہ یا کم پیداواریت کے ذمہ دار ہیں۔

3. کوریلیشن کا مطالعہ ہمیں ایسے عناصر کی نشاندہی میں مددگار ہے جو متاثرہ معاشی حالات کو مستحکم کرسکے۔

4. کوریلیشن کا مطالعہ ہمیں ایک متغیرہ میں متوقع تبدیلی کا تخمینہ کرنے میں مددگار ہے جو اس سے متعلقہ متغیرہ میں یک مخصوص مقدار میں تبدیلی کے ساتھ ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر کوریلیشن کا مطالعہ ہمیں قیمتوں میں تبدیلی سے طلب میں تبدیلی کو معلوم کرنے میں مددگار ہے۔

5. مختلف متغیرات کے درمیان بین تعلقاتی مطالعہ تحقیق کے فروغ اور علم کے نئے ابواب کے آغاز میں ایک بہت ہی مددگار آلہ ہے۔ اس طرح کوریلیشن کے مطالعات مختلف النوع مقاصد کے لئے بہت زیادہ مستعمل اور تشریح کے لئے ایک بنیادی آلہ تصور کیا جاتا ہے۔

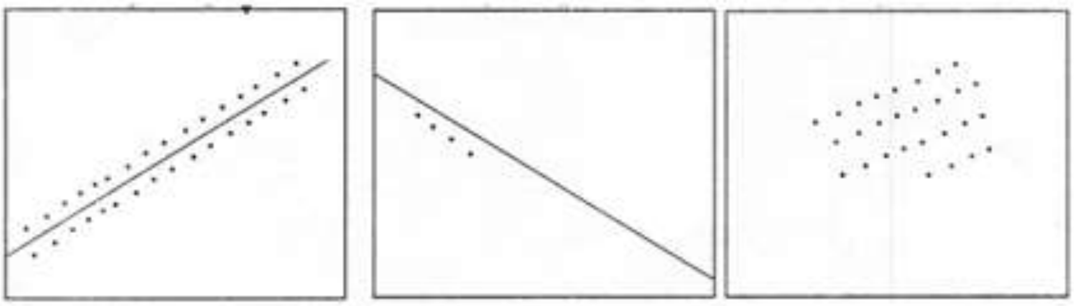
ہم رشتگی یا کوریلیشن کا ضریب (Coefficient of Correlation)

کوریلیشن کے ضریب کی تحسیب دو متغیروں کے درمیان تعلق کے حدود کے مطالعہ کے لئے کی جاتی ہے۔ جیسا کہ پہلے کہا جا چکا ہے یہ حقیقت ہے کہ دو متغیروں کے درمیان کوریلیشن ہے اس کا یہ مطلب نہیں ہوتا کہ یہ تعلق مستقل یا فعال ہے۔ اگر متغیر کی قدر معلوم ہو یہ ممکن نہ ہوگا کہ دوسرے متغیر کی قدر ہو بہو حاصل ہو۔ ایسا صرف اسی وقت کیا جا سکتا ہے جب کہ دو متغیروں کے درمیان خطی تعلق (Linear relationship) پایا جائے۔ کچھ سلسلے ہیں جن میں خطی تعلق (Linear relationship) موجود ہوتا ہے جیسے حقیقی اعداد اور ان کے مربعے یا جذر المربع ہمیشہ خطی تعلق پیش کرتے ہیں۔ اسی طرح خطی تعلق دو سلسلوں میں پایا جا سکتا ہے۔ ایک مختلف دائروں کے قطر سے متعلق دوسرا ان کے رقبوں سے متعلق۔ معاشی اعداد و شمار میں ایسے تعلقات کبھی کبھی پائے جاتے ہیں۔ اس میں کوئی شک نہیں کہ قیمتوں میں اضافہ سے طلب میں کمی واقع ہوگی لیکن تعلق فعال نہیں ہے۔ قیمت اور طلب سے متعلق دو سلسلوں میں تغیر کے درمیان کوئی مستقل تناسب / نسبت نہیں پائی جاتی۔

مکمل کوریلیشن (Perfect correlation): اگر دو متغیروں کے درمیان تعلق ایسا ہو کہ ایک کی قدر میں اضافہ سے دوسرے کی قدر میں اضافہ یا کمی قائم تناسب میں ہو تب ان کے درمیان کوریلیشن مکمل (Perfect correlation) ہوگا۔ اگر دونوں سلسلے ایک ہی سمت میں حرکت پذیر ہوں اور تغیرات / تبدیلی متناسب ہو ان کے درمیان مکمل مثبت کوریلیشن (Perfect positive correlation) ہوگا۔ اگر اس کے برخلاف دو سلسلے معکوس / مخالف سمت میں حرکت پذیر ہوں اور ان کی قدروں کے درمیان تغیر ہمیشہ متناسب ہو یہ مکمل منفی ہم رشتگی (Perfect negative correlation) کی مثال ہوگی۔ ایسا بھی ہو سکتا ہے کہ دو سلسلوں کے درمیان تغیر میں کوئی تعلق نہ ہو ایسی صورت میں ان کے درمیان کوئی کوریلیشن نہ ہوگا۔

جیسا کہ پہلے کہا جا چکا ہے معاشی اعداد و شمار میں مکمل مثبت یا منفی رشتگی یا کوریلیشن عموماً نہیں پایا جاتا چونکہ معاشی سلسلوں کے درمیان تعلق کبھی کبھار فعال ہوتا ہے ایسے اعداد و شمار میں چونکہ متعلقہ سلسلے مکمل طور پر ایک دوسرے پر انحصار نہیں کرتے اس لئے کوریلیشن مکمل نہیں ہوتا۔ پرفیکٹ کوریلیشن اس وقت حاصل ہوتا ہے جب کہ دو سلسلوں کے درمیان مکمل باہمی انحصار پایا جاتا ہو۔

Perfect Positive Correlation Perfect Negative Correlation



(i) (ii) (iii)

مذکورہ بالا گراف سے یہ مشاہدہ کیا جاسکتا ہے کہ x اور y کی قیمتوں کے مقابل قدریں/قیمتیں خط مستقیم میں پائی گئی ہیں۔ شکل نمبر (i) میں x اور y کے درمیان پرفیکٹ پازیٹو کوریلیشن کی نشاندہی کی گئی ہے چونکہ دو سلسلوں کی قیمتوں میں تغیر ہمیشہ قائم متناسب ہے اور وہ ایک ہی سمت میں حرکت پذیر ہیں۔ اس کے برخلاف شکل نمبر (ii) x اور y کے درمیان پرفیکٹ نیگیٹیو کوریلیشن کی نشاندہی کی گئی ہے چونکہ ان کی قیمتوں کے درمیان تغیرات قائم متناسب ہیں اور دونوں معکوس/مخالف سمت میں حرکت پذیر ہیں۔

یہ معلوم ہونے کے بعد یہ ضروری ہے کہ کوریلیشن کی ایسی پیمائش حاصل کی جائے جو مقداری اصطلاح میں کوریلیشن کی ڈگری کی صحیح نشاندہی کرسکے۔ اس کی پیمائش ایسی ہو کہ اس کی انتہائی قیمتیں پرفیکٹ پازیٹو یا پرفیکٹ نیگیٹیو کوریلیشن کی نمائندگی کرے اور درمیان میں کوئی قیمت ہو تو کوریلیشن غیر موجود ہو۔ ایسی پیمائش کوریلیشن کے ضریب نے دی ہے۔

اگلے صفحات میں ہم کوریلیشن کے ضریب پر بحث کرنے جارہے ہیں۔ یہ بحث ہمیشہ مثبت ہم رشتگی اور منفی ہم رشتگی یعنی 1+ اور 1- کے درمیان پھیلی ہوئی ہوگی۔ جب پرفیکٹ کوریلیشن ہوگا اس کی قیمت 1+ اور جب پرفیکٹ نیگیٹیو کوریلیشن ہوگا تب اس کی قیمت 1- ہوگی۔ اس کا درمیانی نکتہ '0' ہے جو کوریلیشن کی غیر موجودگی کو ظاہر کردے گا۔ جیسا کوریلیشن کے ضریب کی قیمت گھٹتی جائے گی دو متغیروں کے درمیان پازیٹو کوریلیشن کی بھی قیمت گھٹتی جائے گی جب یہ قیمت صفر تک پہنچتی ہے یہ اس بات کی نشاندہی کرتی ہے کہ ان کے درمیان ہم رشتگی نہیں ہے۔ اور اگر مزید گھٹتی ہے تو منفی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں یعنی صفر سے کم۔ یہ نیگیٹیو کوریلیشن کی نشاندہی کرتی ہیں جب یہ قیمت 1- تک پہنچتی ہیں تب یہ دو متغیروں کے درمیان پرفیکٹ نیگیٹیو کوریلیشن ہونے کا ثبوت ہے۔

مذکورہ بالا بیان کردہ نکات کا مطالعہ قبل ازیں دیے گئے گراف سے کیا جاسکتا ہے۔ جب متغیرہ کی قیمتیں شکل نمبر (i) میں دی گئی قیمتوں کے مماثل ہوں تب پرفیکٹ پازیٹو کوریلیشن ہوگا یا کوریلیشن کا ضریب 1+ ہے لیکن جب وہ شکل نمبر 1 میں دئے گئے قیمتوں کے مماثل ہوں تب بھی وہ پازیٹو کوریلیشن ہے لیکن مکمل (پرفیکٹ) نہ ہوگا یا کوریلیشن کی قیمت 1+ سے کم ہوگی لیکن 0 سے زیادہ ہوگی۔ جب قیمتیں شکل نمبر 3 کے مماثل ہو تب اعداد و شمار کے درمیان کوئی کوریلیشن نہ ہوگا یا کوریلیشن کے ضریب کی قیمت 0 ہوگی جب قیمتیں شکل نمبر (ii) کے مماثل ہو تب نیگیٹیو کوریلیشن ہوگا اگرچہ کہ پرفیکٹ نہ ہو۔ اس کا مطلب یہ ہوگا کہ کوریلیشن کی قیمت 0 سے زیادہ ہوگی (منفی جانب) لیکن 1- سے کم ہوگی۔ تاہم اگر قیمتیں متغیر ہوں جیسے شکل نمبر 6 میں دیا گیا ہے یہاں پرفیکٹ نیگیٹیو کوریلیشن ہے یا دوسرے الفاظ میں کوریلیشن کے ضریب کی قیمت 1- ہوگی۔

1.3 ہم رشتگی کی ضرورت (Need of Correlation)

کسی بھی ترتیب کو ہم رشتگی ایک معنی عطا کرتی ہے۔ ہم رشتگی کا تجزیہ بنیادی تعلیمی نفسیاتی تحقیق کے لیے ضروری ہے۔ عام طور پر تمام نفسیاتی تحقیقات پر ہم رشتگی کا اطلاق ہوتا ہے۔ اس میں نفسیاتی اور تعلیمی جانچ کا انحصار، بھروسہ اور ہر ایٹم کے تجزیہ پر ہوتا ہے۔ بعض اوقات اعداد و شمار Hypothesis کے مطابق نہیں ہوتے۔ اس کی پیمائش اور جانچ بھی ہم رشتگی کی مناسبت سے کی جاتی ہے۔ ایک معلوم متغیر کی بنیاد پر دوسرے متغیر کی پیش قیاسی کی جاسکتی ہے۔ ہم رشتگی کی بنیاد پر نفسیاتی اور تعلیمی ماڈلس اور نظریات کو آگے بڑھایا جاسکتا ہے۔

اعداد و شمار کی یا متغیروں کی باریک بینی سے گروہ بندی کے لیے بھی ہم رشتگی کو استعمال کیا جاسکتا ہے۔ ہمہ اختلافی شماریاتی ٹیسٹس جیسے فیکٹر اینالا یسیس، ممیز تجزیہ (Discriminant Analysis) کے لیے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ متغیرات کے ایکدوسرے پر اثرات سے الگ رکھنے کے لیے بھی ہم رشتگی کی ضرورت ہوتی ہے۔

1.4 ہم رشتگی کے اقسام (Types of Correlation)

کوریلیشن کی مختلف انداز سے درجہ بندی کی جاسکتی ہے۔ کوریلیشن کی درجہ بندی تین اہم طریقوں سے کی جاتی ہے۔(1) مثبت یا منفی (2) سادہ' جزوی اور بکثرت (3) خطی اور غیر خطی۔

1۔ مثبت یا منفی (Positive and Negative)

کوریلیشن مثبت یا منفی ہو سکتا ہے جب دو متغیرات کی قیمتیں ایک ہی سمت حرکت کر رہی ہوں نتیجتاً ایک متغیرہ کی قیمت میں اضافہ دوسرے متغیرہ کی قیمت میں اضافہ سے منسلک ہو یا ایک متغیرہ کی قیمت میں کمی دوسرے متغیرہ کی قیمت میں کمی کی وجہ سے ہو رہی ہو تو یہ مثبت کوریلیشن ہے اسکے برخلاف متغیرات کی قیمت میں تبدیلی' ایک دوسرے کے متضاد ہو یعنی ایک متغیرہ کی قیمت میں اضافہ ہو رہا ہو تو دوسرے متغیرہ کی قیمت میں کمی واقع ہو رہی ہو تب منفی کوریلیشن تصور کیا جائے گا۔ کچھ اعداد و شمار ایسے ہیں جن کا کوریلیشن مثبت ہوتا ہے وہیں دوسرے اعداد و شمار کے لئے منفی بھی ہوتا ہے اس طرح قیمت اور رسد مثبت انداز میں ہم رشتہ ہیں جب قیمتوں میں اضافہ ہوتا ہے تو رسد میں بھی اضافہ ہوتا ہے اور جب قیمتوں میں کمی ہوتی ہے تو رسد میں بھی کمی ہوتی ہے۔ عموماً قیمت اور طلب میں کوریلیشن منفی ہوتا ہے۔ قیمتوں میں اضافہ طلب میں کمی واقع ہوتی ہے اور قیمتوں میں کمی سے طلب میں بھی اضافہ ہوتا ہے۔

مثبت کوریلیشن:

قیمت	10	15	20	25	40	30	20	10
رسد	100	110	115	130	150	140	115	100

منفی کوریلیشن:

قیمت	10	15	20	25
رسد	60	80	90	100

قیمت	25	20	15	10
رسد	60	80	90	100

مثبت کوریلیشن سلسلے کی چند مثالیں نیچے دی گئی ہیں:

1. قد اور وزن

2. خاندان کی آمدنی اور اشیائے تعیش پر خرچ

3. بارش کی مقدار اور فصل کی پیداوار

4. ایک شئے کی قیمت اور رسد

منفی کوریلیشن سلسلے کی چند مثالیں ذیل میں دی گئی ہیں:

1. ایک شئے کی طلب اور قیمت

2. ایک پرفیکٹ گیس کا حجم اور دباؤ

3. اون کے کپڑوں کی فروخت اور دن کا ٹمپریچر وغیرہ۔

2۔ سادہ مرکب اور جزوی کوریلیشن:

سادہ کوریلیشن میں ہم صرف دو متغیرات کا مطالعہ کرتے ہیں جیسے قیمت اور طلب مرکب کوریلیشن میں ہم تین یا زیادہ عناصر کے درمیان تعلق کا مطالعہ کرتے ہیں۔ جیسے پیداوار' بارش اور کھاد کا استعمال۔ جزوی کوریلیشن میں اگرچیکہ دو عناصر سے زیادہ عناصر ہوتے ہیں لیکن کوریلیشن کا مطالعہ دو عناصر کے درمیان ہوتا ہے دیگر عناصر کو مستقل طور پر فرض کیا جائے گا۔

3۔ خطی اور غیر خطی (کروی لائنز) کوریلیشن:

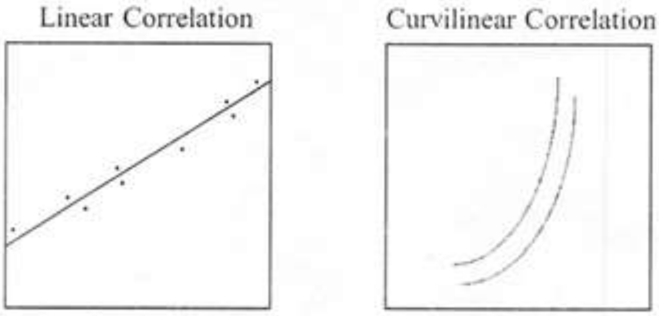
جب دو متغیرات کی قدروں میں تغیر برابر تناسب میں ہوں تب کوریلیشن کو خطی کہا جائے گا اگر ہر دفعہ قیمت میں 10٪ اضافہ ہو تب رسد میں بھی 20٪ اضافہ ہوگا۔ ان دو متغیروں کے درمیان خطی تعلق پایا جاتا ہے۔ ان میں تعلق کی قسم $Y=a+bx$ ہے۔ یہ خط مستقیم کی ایک مساوات ہے۔ اگر مقابل دو ایسے سلسلوں کی قدروں کو گراف پیپر پر مرتسم کریں تو خط مستقیم حاصل کیا جاسکے۔ تاہم معاشی اور سماجی ڈاٹا میں ایسا تعلق بہت نایاب ہوتا ہے۔ ایسا عام طور پر سائنس میں پایا جاتا ہے۔ معاشی اعداد و شمار میں دو متغیرات میں تبدیلی عموماً یکساں یعنی Constant نہیں ہوتی۔ ایسی صورتوں میں دو متغیرات کے مقابل اعداد و شمار سے خط مستقیم حاصل نہ ہوگا کوریلیشن منحنی یا غیر خطی ہوگا۔ اس طرح خطی کوریلیشن وہ ہے جہاں متعلقہ متغیرات میں تغیرات کا تناسب مستقل (Constant) ہوگا۔ اور غیر خطی وہ ہے جہاں یہ تناسب لچکدار ہوگا۔

خطی کوریلیشن:

X	2	4	6	8	10
Y	5	10	15	20	25

غیر خطی کوریلیشن:

X	2	4	6	8	10
Y	5	8	12	15	25



1.5 کارل پیرسن ہم رشتگی کی قدر ضریب (Karl Pearson Coefficient of Correlation)

کارل پیرسن (1867–1936) برطانیہ کا رہنے والا تھا۔ وہ ایک ماہر حیاتیات اور ماہر شماریات تھا۔ اس نے کوریلیشن کے ضریب کا ضابطہ دیا۔ کوریلیشن کی پیمائش کے کئی حسابی طریقے ہیں۔ ان میں سے ایک کو کارل پیرسن کا طریقہ بھی ہے۔ یہ طریقہ Pearson's Coefficient of Correlation کے نام سے مشہور ہے اس ضابطہ کو بہت زیادہ استعمال کیا جاتا ہے۔ پیرسن کے کوریلیشن کے ضریب کو"r"علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ کارل پیرسن کے مطابق دو متغیرات کے کوریلیشن کے ضریب کو دو سلسلوں کے مختلف ایٹمس کے مقابل اعداد کے اوسط حسابیہ سے لئے گئے انحراف کے حاصل ضرب کے مجموعہ کو معیاری انحراف اور زیر مشاہدہ جوڑ کی تعداد سے تقسیم کر کے حاصل کیا جاتا ہے۔ اس طرح اگر x_1, x_2, x_3..............x_n پہلے متغیرہ کے مختلف ایٹمس کے اوسط حسابیہ کے انحراف ہوں اور y_1, y_2, y_3......................y_n دوسرے مقابل متغیرہ کے اوسط حسابیہ کے انحراف ہوں ان مقابل انحراف کے حاصل ضرب کا مجموعہ $\sum xy$ ہو گا۔ اگر دو متغیروں کے معیاری انحراف بالترتیب $\sigma_1\, \sigma_2$ ہوں اور اگر 'n' زیر مشاہدہ جوڑ کی تعداد ہو تب r (کوریلیشن کا ضریب) یوں ہو گا۔

$$r = \frac{\sum xy}{n\sigma_1\sigma_2}$$

مذکورہ بالا ضابطے سے یہ بات واضح ہے کہ اگر $\sum xy$ مثبت (پازیٹو) ہو تب کوریلیشن کا ضریب بھی پازیٹو ہو گا جو دونوں سلسلوں کے کوریلیشن کے مثبت ہونے کی نشاندہی کرے گا۔ اس کے برخلاف اگر $\sum xy$ نیگیٹیو (منفی) ہو تب کوریلیشن کا ضریب بھی منفی ہو گا دونوں سلسلوں کے درمیان کوریلیشن کے نیگیٹیو ہونے کی نشاندہی کرے گا۔ عام طور پر اگر ایک سلسلے کے پازیٹو اور نیگیٹیو انحراف دوسرے سلسلے کے پازیٹو اور نیگیٹیو سے بھی جڑے ہوں تب $\sum xy$ پازیٹو ہو گا۔ عام طور پر اگر ایک سلسلے کے پازیٹو انحراف دوسرے متغیرہ کے نیگیٹیو انحراف سے جڑے ہوں یا برعکس ہوں تب $\sum xy$ کی قدر نگیٹیو ہو گی۔ اگر ایک متغیرہ کے پازیٹو اور نیگیٹیو دوسرے متغیرہ کے انحراف سے بے نیازی / طور پر جڑے ہوں تب $\sum xy$ صفر ہو گا یا اس کے قریب ہو گا اور اس بات کی نشاندہی کرے گا کہ دو سلسلوں کے درمیان کوئی کوریلیشن نہیں ہے۔ کوریلیشن کے ضریب کی قدر ہمیشہ 1 + اور 1 - کے درمیان ہو گی۔ یہ ایک سے زیادہ بھی ہو سکتا۔

کارل پیرسن کا مذکورہ بالا ضابطہ دونوں سلسلوں کے درمیان Covariance کے مطالعہ کی بنیاد پر وضع کیا گیا ہے۔ دونوں سلسلوں کے درمیان Covariance کو یوں لکھا جاتا ہے۔

$$\text{Covariance} = \frac{\sum xy}{x}$$

جہاں x اور y دونوں سلسلوں کے اوسط حسابیہ سے انحراف سے متعلق ہیں کوریلیشن کا مطالعہ کرنے کے لئے دو سلسلوں کے Covariance کو ان کے معیاری انحراف کے حاصل ضرب سے تقسیم کیا گیا ہے لہٰذا

$$r = \frac{\text{Covariance of the two Series}}{\sqrt{(\text{Variance of Series 1})\,(\text{Variance of Series 2})}}$$

$$= \frac{\text{Covariance}}{\sigma_1 \times \sigma_2}$$

$$= \frac{\sum xy}{n\sigma_1\sigma_2}$$

اس فارمولے کو Product Moment formula of Coefficient of Correlation کے طور پر جانا جاتا ہے۔

راست طریقہ (Direct Method)

اس طریقہ میں شامل اقدامات درج ذیل ہوں گے:

1. دونوں سلسلوں کے اوسط حسابیہ (Arithmatic Mean) کو دریافت کریں۔ $(\overline{x}_1\overline{y}_2)$
2. سلسلے کے ہر ایک ایٹم کے لئے اس کے اوسط حسابیہ سے انحراف دریافت کریں (x اور y)۔
   یہاں $x = (x - \overline{x})$ اور $y = (y - \overline{y})$
3. ان انحراف کا مربع معلوم کر کے جمع کریں۔ $(\sum x^2, \sum y^2)$
4. دونوں سلسلوں کے متعلقہ انحرافی اعداد کو ضرب دے کر جمع کریں۔ $(\sum xy)$
5. مذکورہ بالا قیمتوں کو درج ذیل فارمولے کے مطابق لکھ کر مختصر کریں۔

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \times \sum y^2}} \quad \text{یا} \quad r = \frac{\sum xy}{\sqrt[n]{\frac{\sum x^2}{n}} \times \sqrt[n]{\frac{\sum y^2}{n}}} = \frac{\sum xy}{n\sigma_1\sigma_2}$$

تمثیل 1: درج ذیل دس فرمس کے فروخت اور اشتہار کاری کے مصارف کے درمیان کوریلیشن کا ضریب دریافت کیجئے (اعداد 000 میں)

فرمس	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
فروخت	50	50	55	60	65	65	65	60	60	50
اشتہار کاری اخراجات	11	13	14	16	16	15	15	14	13	13

Calculation of Coefficient of Correlation

Sales	Deviation from Mean 58	Deviation Square	اشتہاری اخراجات	Deviation from Mean 14	Devaition Square	Product of deviation, xy
50	−8	64	11	−3	9	24
50	−8	64	13	−1	1	8
55	−3	9	14	0	0	0
60	+2	4	16	+2	4	4
65	+7	49	16	+2	4	14
65	+7	49	15	+1	1	7
65	+7	49	15	+1	1	7
60	+2	4	14	0	0	0
60	+2	4	13	−1	1	−2
50	−8	64	13	−1	1	8
$\sum$x 580 $\sum x=\frac{580}{10}=58$	−27 +27 = 0 $\sum$x	$\sum x^2 = 360$	$\sum$y 140 $\bar{y}\frac{140}{12}=14$	+6 0 -6 $\sum$y	$\sum y^2 = 22$	$\sum xy = 70$

$$\text{Mean of } x = \frac{\sum x}{n} = \frac{580}{10} = 58$$

$$y = \frac{\sum y}{n} = \frac{140}{10} = 14$$

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \times \sum y^2}} = \frac{+70}{\sqrt{360 \times 22}} = \frac{70}{\sqrt{7920}}$$

$$= \frac{+70}{88.9943818}$$

$$= +0.7865$$

تمثیل 2: نیچے پیکنگ کی لاگت اور فروخت کے دیے گئے اعداد کے مطابق کارل پیرسن کے کوریلیشن کے ضریب کی تحسیب کیجئے۔

پیکنگ کی لاگت (000روپیوں میں)	39	65	62	90	82	75	25	98	36	78
فروخت(لاکھوں میں)	47	53	58	86	62	68	60	91	51	84

Calculation of Coefficient of Correlation

پیکنگ کی لاگت (000' روپیوں میں)	Deviation from Mean (65)	Square of Deviation	Sales (in lakh)	Deviation from Mean (65)	Square of Deviation	Product of Deviatious
39	−26	676	47	−19	361	+494
65	+0	0	53	−13	169	0
62	−3	9	58	−8	64	+24
90	+25	625	86	+20	400	500
82	+17	289	62	−4	16	−68
75	+10	100	68	+2	4	+20
25	−40	1600	60	−6	36	+240
98	+33	1089	91	+25	625	+825
36	−29	841	51	−15	225	+435
78	+13	169	84	+18	224	+234
$\sum x = 70$ $x = 10$	$\sum x = 0$	$\sum x^2 = 5398$	$\sum y = 660$ $x\sum 10$	$\sum y = 0$	$\sum y^2 = 2224$	$\sum xy = 2704$

$$\text{Mean of Series } (x) = \frac{\sum x}{n} = \frac{650}{10} = 65$$

$$(y) = \frac{\sum y}{n} = \frac{660}{10} = 66$$

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \times \sum y^2}} = \frac{2704}{\sqrt{(65)^2 (66)^2}} \frac{2704}{\sqrt{5398 \times 2224}} = \frac{2704}{\sqrt{123005152}} = \frac{2704}{3462.84516}$$

$$= 0.78086$$

تمثیل 3: درج ذیل نتائج دو سلسلوں کے درمیان ان کے اوسط حسابیہ سے حاصل کئے گئے ہیں کوریلیشن کا ضریب تحسیب کیجئے۔

	'y'سلسلہ	'y'سلسلہ
ایٹمس کی تعداد	7	7
اوسط حسابیہ	4	8
اوسط حسابیہ سے انحرافی اعداد کے مربعوں کا مجموعہ	28	76
متعلقہ اوسط حسابیہ سلسلہ x اور y کے حاصل ضرب کا مجموعہ	__	46

حل: دیا گیا ہے کہ:

$x = 7, \bar{x} = 4, \bar{y} = 8, \sum x^2 = 28 \; \sum x^2 = 76 \; \sum xy = 46$

کارل پیرسن کی کوریلیشن کا ضریب یا

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \times \sum y^2}} = \frac{46}{\sqrt{28 \times 76}}$$

$$= \frac{46}{\sqrt{2128}} = \frac{46}{46.1302504}$$

$$= 0.997$$

تمثل 4: درج ذیل نتائج سے کوریلیشن کا ضریب تحسیب کیجئے

$$x = 10 \quad \sum x = 100 \quad \sum y = 150$$

$$\sum(x-10)^2 = 180 \quad \sum(y-15)^2 = 215$$

$$\sum(x-10)(y-15) = 60$$

$$\sum(x-10)^2, 180, \sum(y-15)^2 = 215$$

$$\sum(x-10)(y-15) = 60$$

Mean of the first Series or $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{100}{10} = 10$

Second source or $\bar{y} = \frac{\sum x}{n} = \frac{150}{10} = 15$

$$\sum(x-10) = Sum$$

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \times \sum y^2}} = \frac{60}{\sqrt{180 \times 215}} = \frac{60}{196,7213156}$$

$$= +0.305$$

تمثیل5: نیچے دئے گئے اعداد و شمار سے ایٹمس کی تعداد 'n' دریافت کیجئے۔

$$r = +0.5\ \sum xy = 120,\ \sigma_y = 8, \sum x^2 = 90$$

جہاں x اور y انحراف اور حسابیہ سے لئے گئے ہیں۔

حل: دیا گیا ہے $r = +0.5\ \sum xy = 120,\ \sigma_y = 8, \sum x^2 = 90$

$$Now\ \sigma_x^2 = \frac{\sum x^2}{n} = \frac{90}{n}$$

$$r = \frac{\sum xy}{n\sigma_x \times \sigma_y}\ or\ r^2 = (0.5)^2 = 0.25$$

$$0.25 = \frac{(120)^2}{n^2 \times \left(\frac{90}{n}\right) \times 64} = \frac{14400}{n \times 90 \times 64} = \frac{14400}{5760n} = \frac{2.5}{n}$$

$$\frac{0.25}{100} \times \frac{2.5}{n} = 25n = 2.5 + 100$$

$$25n = 250 = n = \frac{250}{25} = 10$$

1. راست طریقہ (Direct method):

کوریلیشن کے ضریب کی تحسیب سلسلوں کے مختلف اعداد / قیمتوں کے اوسط حسابیہ / مفروضہ حسابیہ کے انحراف کے بغیر کی جاسکتی ہے۔ اسکے لئے درج ذیل فارمولہ استعمال کیا جاتا ہے۔

$$r = \frac{N\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{N\sum x^2 - (\sum x)^2}\sqrt{N\sum y^2 - (\sum y)^2}}\ or$$

تمثیل6: درج ذیل اعداد و شمار سے کارل پیرسن کے کوریلیشن کا ضریب تحسیب کیجئے اور اس کی قیمت کی تشریح کیجیے۔

طلباء کا رول نمبر	1	2	3	4	5	
اکاؤنٹنسی میں نشانات	48	35	17	23	47	= 170 ÷ 5 = 34
شماریات میں نشانات	45	20	40	25	45	= 175 ÷ 5 = 35

x	x^2	r	r^2	xy
48	2304	45	2025	2,160
35	1225	20	400	700
17	289	40	1600	680
23	529	25	625	575
47	2209	45	2025	2115
170	6556	175	6,675	6,230

$$N = 5, \quad \sum xy = 6230, \sum x = 170$$

$$\sum xy = 175, \sum x^2 = 6556, \sum y^2 = 6230$$

$$r = \frac{N\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{N\sum x^2 - (\sum x)^2}\sqrt{N\sum y^2 - (\sum y)^2}}$$

$$= \frac{5\times 6230 - (170*175)}{\sqrt{5\times 6556 - (170)^2}\sqrt{5\times 6675 - (175)^2}}$$

$$= \frac{5\times 6230 - (170*175)}{\sqrt{5\times 6556 - (170)^2}\sqrt{5\times 6675 - (175)^2}} = \frac{31{,}150 - 29{,}750}{\sqrt{32{,}780 - 28{,}900}\sqrt{33{,}375 - 30{,}625}}$$

$$= \frac{1400}{\sqrt{3880}\sqrt{2750}}$$

$$= \frac{1400}{62.289646 \times 52.4404424}$$

$$= \frac{1400}{3266.49659}$$

$$= 0.42859$$

تمثیل 7: نیچے دئے گئے اعداد سے راست طریقہ سے کوریلیشن کا ضرب تحسیب کیجئے۔

x:	12	9	8	10	11	13	7
y:	14	8	6	9	11	12	3

x	x^2	y^1	y^2	Xy
12	144	14	196	168
9	81	8	64	72
8	64	6	36	48
10	100	9	81	90
11	121	11	121	121
13	169	12	144	156
7	49	3	9	21
70	728	63	651	676

$$r=\frac{N\sum xy-(\sum x)(\sum y)}{\sqrt{N\sum x^2-(\sum x)^2}\sqrt{N\sum y^2-(\sum y)^2}}$$

$$=\frac{7\times 676-70\times 63}{\sqrt{7428-(70)^2}\sqrt{7\times 651-(63)^2}}=\frac{4732-4410}{\sqrt{5096-4900}\sqrt{4557-3969}}$$

$$=\frac{4732-4410}{\sqrt{5096-4900}\sqrt{4557-3969}}$$

$$=\frac{322}{\sqrt{196}\sqrt{588}}$$

$$=\frac{322}{14\times 24.2487113}$$

$$=\frac{322}{339.481958}$$

$$=0.9485$$

اختصار یا شارٹ کٹ کا طریقہ Shortcut Methods (مفروضہ اوسط حسابیہ یا مبدے کی تبدیلی کے استعمال سے)

راست طریقے میں کوریلیشن کے ضریب کی تحسیب کاری میں دونوں سلسلوں کے حقیقی اوسط حسابیہ کی تحسیب کرنا ہوتا ہے اور ان اوسط حسابیہ سے دو سلسلوں کے مختلف ایٹمس سے انحرافی اعداد کو معلوم کیا جاتا ہے۔ اگر سلسلہ کا اوسط حسابیہ اعشاریہ میں ہو جیسے 80.5 یا 94.08 میں ہو تب انحرافی اعداد کی تحسیب مشقت طلب اور تکلیف دہ ہو جاتی ہے اور یہ کام ذہنی تھکان کا باعث ہوتا ہے کیونکہ جب اعداد اعشاریہ میں ہوں تب انحراف کی تحسیب اور x^2، y^2 اور xy کی تحسیب اکتانے والا کام ہو جاتا ہے۔ ایسی صورت میں یہ مشورہ دیا جاتا ہے کہ اوسط حسابیہ کو فرض کریں اور ضابطہ (فارمولے) میں تبدیلی لائی جس کی وجہ سے انحراف کے معلوم کرنے کا عمل نہایت آسان ہو جاتا ہے۔ فارمولے میں ضروری تبدیلی کے بعد اس کی اصلیت تبدیل ہوتی ہے اور نہ ہی کوریلیشن کے ضریب کی قیمت پر کوئی فرق واقع ہوتا ہے۔ r کی قدر بھی اتنی ہی ہوگی جتنی کہ حقیقی اوسط حسابیہ کے استعمال سے ہوا کرتی تھی۔

حقیقی اوسط حسابیہ کے عدم استعمال کی صورت میں فارمولہ (ضابطہ) درج ذیل ہوگا۔

$$r=\frac{\sum dxdy-\frac{(\sum dx)(\sum dy)}{n}}{\sqrt{\sum dx^2-\frac{(\sum dx)^2}{n}}\sqrt{\sum dy^2-\frac{(\sum dy)^2}{n}}}\quad\text{........(1)}$$

جہاں $\sum dx$ اور $\sum dy$ بالترتیب مفروضہ اوسط حسابیہ سے سلسلہ x اور y کے لئے انحرافی اعداد معلوم کئے جائیں گے۔

$\sum dx^2$ اور $\sum dy^2$ بالترتیب x اور y مربعوں کا مجموعہ ہے۔

$\sum dxdy$ مفروضہ اوسط حسابیہ سے x اور y کے مقابل انحراف کے حاصل ضرب کا مجموعہ ہے۔ مذکورہ بالا فارمولہ یوں بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$r = \frac{\sum dxdy - n\left(\frac{\sum dx}{n}\right)\left(\frac{\sum dy}{n}\right)}{n\sqrt{\frac{\sum dx^2}{n} - \frac{(\sum dx)^2}{n}}\sqrt{\sum dy^2 - \left(\frac{\sum dy^2}{n}\right)}} \text{........(2)}$$

یا یوں بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$r = \frac{\sum dxdy - (\sum dx)(\sum dy)}{\sqrt{(n\sum dx^2 - (\sum dx)^2}\sqrt{n\sum dy^2 - (\sum dy)^2}} \text{........(3)}$$

مذکورہ بالا تمام ضابطوں کے استعمال کی صورت میں r کی قیمت میں کوئی فرق واقع نہ ہو گا۔

اقدامات

(i) x اور y سلسلوں میں کسی ایک عدد کو اوسط حسابیہ فرض کریں۔

(ii) مفروضہ اوسط حسابیہ سے x اور سلسلہ سے انحرافی اعداد معلوم کریں تب ہمیں dx اور dy حاصل ہو گا۔

(iii) dx اور dy کا مربع بنائیں اور ان مربع اعداد کا مجموعہ $\sum dx^2$ اور $\sum dy^2$ معلوم کریں۔

(iv) x اور y سلسلوں کے مقابل انحرافی اعداد کو ایک دوسرے سے ضرب دیں۔(dx اور dy) اور حاصل ضرب کا مجموعہ $\sum dxdy$ کے حصول کا باعث ہو گا۔

مذکورہ بالا فارمولے میں قیمتیں درج کرکے کوریلیشن کا ضریب یا r معلوم کرسکتے ہیں۔

تمثیل 9: نیچے دئے گئے اعداد سے x اور y کی قیمتوں کے درمیان کوریلیشن کا ضریب تحسیب کیجئے۔

x:	15	16	17	18	19	20
y:	80	75	60	40	30	20

حل:

Calculation of Coefficient of Correlation

x	Dev. of x from AM 17 dx	dx^2	y	Dev. of y from AM	Step Dev. 1-5	Dy^2	Dxdy
15	−2	4	80	+40	+8	64	16
16	−1	1	75	+35	+7	49	−7
17	0	0	60	+20	+4	16	0
18	+1	1	40	0	0	0	0
19	+2	4	30	−10	−2	4	−4

20	+3	9	20	−20	−4	16	12
n = 6	$\sum Dx$+3	$\sum dx^2$19	x=6	+65	+13	$\sum dy^2$149	-39

Step Diviation لینے پر فارمولہ میں کسی تطبیق کی ضرورت نہیں ہوتی کیونکہ Scale کی تبدیلی سے کوریلیشن پر کوئی اثر نہیں پڑتا۔

$$r = \frac{\sum dxdy - \frac{(\sum dx)(\sum dy)}{n}}{\sqrt{\sum dx^2 - \frac{(\sum dx)^2}{n}}\sqrt{\sum dy^2 - \frac{(\sum dy)^2}{n}}}$$

$$= \frac{-39-(+3)(+13)}{\sqrt{19-\frac{(3)^2}{6}}\sqrt{149-\frac{(3)^2}{6}}} = \frac{-45.5}{\sqrt{17.5}\sqrt{120.83}}$$

$$= \frac{-45.5}{4.18330013 \times 10.99227} = \frac{-45.5}{45.9839645} = -0.98947$$

1.6 پیرسن کے کوریلیشن کے مفروضات (Assumptions of Pearson's Coefficient of Correlation)

پیرسن کے کوریلیشن کا ضریب درج ذیل مفروضات پر مشتمل ہے۔ پہلا یہ کہ متغیرات کے درمیان خطی تعلق ہوتا ہے یعنی منتشر ڈیاگرام پر دو متغیرات کو مرتسم کیا جائے تو ایک خط مستقیم تشکیل پائے گا اس کو آپ نقاط میں مرتسم کیا ہوا پائیں گے۔ دوسرا یہ کہ حسب معمول (نارمل) تقسیم کی تشکیل کے لئے زیر مطالعہ دو متغیرات کئی خود سر وجوہات سے متاثر ہوں گے۔ متغیرات جیسے قد' وزن' قیمت' طلب' رسد وغیرہ متاثر ہوں گے اور ایسی قوتیں حسب معمول تقسیم کی تشکیل ہو گی۔

دو سلسلوں میں موجود ایٹمس کی تقسیم پر اثر انداز ہونے والی قوتوں کے درمیان وجہ اور اثر کا تعلق ہوتا ہے۔ اگر متغیرات کے درمیان ایسے تعلق کی تشکیل نہ ہو یعنی اگر متغیرات آزاد ہوں تب کوئی کوریلیشن نہ ہوگا۔ مثال کے طور پر آمدنی اور قد کے درمیان کوئی تعلق نہیں ہوگا کیونکہ قوتیں جو ان متغیرات پر اثر انداز ہوتی ہیں وہ عام نہیں ہیں۔

کارل پیرسن کے ضریب کی خوبیاں اور خرابیاں (Merits & Demerits of Coefficient of Correlation)

خوبیاں:

تعلقات کی ڈگری کی پیمائش کے لئے مستعملہ حسابی طریقوں کے مجملہ کارل پیرسن کا طریقہ حد درجہ مشہور ہے۔ کوریلیشن کا ضریب نہ صرف کوریلیشن کی ڈگری کو صرف ایک عدد میں ملخص کرتا ہے بلکہ قیمت کا تعین کرتا ہے کہ کوریلیشن مثبت ہے یا منفی ہے۔

تاہم ضریب کی افادیت کا انحصار اس کے پیمانے کے علم و مفہوم کے ساتھ ساتھ خرابیوں سے بھی واقف ہو۔

خرابیاں:

1. کوریلیشن کے ضریب کا ہمیشہ یہ مفروضہ رہا ہے کہ تعلق خطی ہوتا ہے اس حقیقت سے قطع نظر کہ مفروضہ درست بھی ہے یا نہیں۔

2. Coefficient کی قدر کی تشریح کے دوران غیر معمولی چوکس ہونا ضروری ہے کیونکہ اکثر Coeffient کی قدر کی غلط تشریح کی جاتی ہے۔

3. Coefficient کی قدر پر انتہائی ایٹمس سے حد سے زیادہ اثر انداز ہوتے ہیں۔

4. دوسرے طریقوں کے مقابلے میں یہ طریقہ کوریلیشن کے ضریب کی قدر کو معلوم کرنے میں بہت زیادہ وقت لگتا ہے۔

1.7 کوریلیشن کے ضریب کی تشریح (Interpretation of Coefficient of Correlation)

کوریلیشن کا ضریب دو اعداد کے سیٹس کے درمیان تعلق کے زاویہ کی پیمائش کرتا ہے۔ چونکہ تخمینہ جات پر اعتباریت کا انحصار تعلق کی قربت پر ہوتا ہے۔ کوریلیشن کے ضریب کی قیمت پر تشریح کرنے کے دوران انتہائی احتیاط برتنا لازمی ہے ورنہ گمراہ کن نتائج نکالے جاسکتے ہیں۔

بد قسمتی سے کوریلیشن کے ضریب کی تشریح کا زیادہ تر انحصار تجربہ پر ہوتا ہے۔ r کی اہمیت صرف اسی وقت سمجھ میں آسکتی ہے جب کہ کوریلیشن کے کئی سوالات حل کئے جائیں اور r کی مختلف قیمتوں میں اضافہ اعداد و شمار کی نوعیت کو دیکھنے سے پتہ چلتا ہے۔ محقق کے لئے لازمی ہے کہ وہ اپنے اعداد و شمار سے اچھی طرح واقف رہے تاکہ تشریح و تائید میں کسی بھی غلطی سے پرہیز کیا جاسکے۔ اس کے لئے ضروری ہے کہ وہ اعداد و شمار کے تعلقات اور نظریہ سے واقف ہو یا واقف ہو جانا چاہئے تاکہ اہم متعلقہ امور کو منطقی استدلال اور ذہانتی تحقیق کی بنیاد پر نتائج پر پہنچا جاسکے۔ تاہم درج ذیل میں عام اصول دئے گئے ہیں جو r کی قیمت کی تشریح میں مددگار ہوں گے۔

1۔ جب r کی قیمت 1 + ہو اس کا مطلب متغیرات کے درمیان پرفیکٹ پازیٹو تعلق ہے۔

2۔ جب r کی قیمت 1- ہو اس کا مطلب متغیرات کے درمیان پرفیکٹ نیگیٹو تعلق ہے۔

3۔ جب r کی قیمت 0 ہو اس کا مطلب متغیرات کے درمیان کوئی تعلق نہیں ہے یعنی متغیرات میں کوریلیشن نہیں پایا جاتا ہے۔

4۔ جب 1 + 'r' اور 1- سے قریب ہو متغیرات کے درمیان قربت ہوگی اور اگر r کی قیمت 0 سے قریب ہو تو یہ سمجھا جائے گا کہ تعلق میں قربت نہیں ہے۔

اس قیمت کے پرے جانا پر خطر ہوگا یعنی محفوظ نہ ہوگا۔ r کی مکمل تشریح کا انحصار صورتحال پر ہوگا ان میں سے ایک سیمپل کا سائز ہوگا۔ ایسا کہا جاسکتا ہے کہ جب ایک متغیر کی قیمت دے کر دوسرے متغیر کی قیمت کا تخمینہ کرنا ہو r کی قیمت جتنی زیادہ ہوگی اتنا ہی بہتر ہوگا۔ تعلق کی قربت r کے متناسب نہ ہو۔ اگر r کی قیمت 0.8 ہو تو اس کا مطلب یہ نہ ہوگا کہ اس کا تعلق 0.4 کے دوگنا ہے حقیقت میں یہ ایک دوسرے کے قریب ہیں۔

1.8 تعین کا ضریب (Coefficient of Determination)

دو متغیرات کے درمیان کوریلیشن کے ضریب کی قیمت کی تشریح کا ایک بہت ہی سہولت بخش اور مفید طریقہ کوریلیشن کے ضریب کا مربع بنانا ہے۔ اس کو Coefficient of determination کہا جاتا ہے۔ لہٰذا تعین کا ضریب 'r2' کے برابر ہوتا ہے۔ اگر r کی قیمت 0.9 ہو تب '0.81 'r^2 ہو گا اور اس کا مطلب یہ ہو گا کہ آزاد متغیر (Independent variable) نے تابع متغیر میں 81 فیصد تبدیلی کو واضح کیا ہے۔ 'r^2' کی اعظم ترین قیمت Unity (اکائی) / (ہم آہنگ) ہے کیونکہ 'y' میں تمام تر تبدیلیوں کو واضح کرنا ممکن ہے لیکن اس سے زیادہ واضح کرنا ممکن نہیں۔

Coefficient of determination (r^2) کی تعریف یوں کی جاسکتی ہے کہ مجموعی تبدیلی پر واضح کردہ تبدیلی کا تناسب ہے۔

$$\text{Coefficient of Determination} = \frac{\text{Explained Variation}}{\text{Total Variance}}$$

مجموعی تبدیلی (Total Variance) پر واضح کردہ تبدیلی (Explained Variation) کے تناسب کو اکثر Non-determination کہا جاتا ہے۔ اس کی قیمت کو ایک سے تفریق کیا جائے تو Coefficient of Non-determination حاصل ہوتا ہے اس کو علامتی صورت میں یوں بتایا جاسکتا ہے۔

$$K^2 = 1 - r^2 = 1 - \frac{\text{Explained Variation}}{\text{Total Variance}}$$

$$K^2 = \sqrt{1 - \frac{\text{Explained Variation}}{\text{Total Variance}}}$$

Coefficient of Non-determination کو K^2 سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس کا جذر المربع (Square root) کو Coefficient of Alienation کہا جاتا ہے یا K-K اور K^2 کی قیمتیں بھی دو متغیرات کے درمیان تعلق کی پیمائش کے لئے استعمال کی جائیں گی۔ مثال کے طور پر اگر مجموعی تبدیلی سے غیر واضح تبدیلی (Unexplained variance) زیادہ ہو، تب K2 اور K کی قیمت زیادہ ہو گی۔ تاہم r^2 یا r کوریلیشن کے تجزیہ کے نتائج کی تشریح کرنا سہولت بخش ہو گا۔

"r" کی بہ نسبت r^2 کے مفہوم کو سمجھنا بہت ہی آسان ہے اسلئے کوریلیشن تجزیہ کے نتائج کو پیش کرتے وقت Coefficient of Determination کو ترجیح دی جائے گی۔ Tuttle نے بڑی خوبصورتی سے نشاندہی کی ہے ”کوریلیشن کے ضریب کو حد سے زیادہ بڑھا چڑھا کر پیش کیا اور اس کا استعمال بھی بہت زیادہ ہو گیا ہے۔ اس کا مربع Coefficient of Determination دو متغیرات کے Linear covariation کی پیمائش میں بھی زیادہ مستعمل ہے۔ قاری کو چاہئے کہ وہ Correlated variables کے درمیان خطی تعلق کی حد تک کسی نتیجہ پر پہنچنے سے قبل بیان کردہ یا حوالہ میں دئے گئے ہر کوریلیشن کے ضریب کو مربع میں تبدیل کرنے استعداد پیدا کرلے۔

r اور r^2 کے درمیان تعلق کو نوٹ کیا جائے۔ جیسا ہی r اپنے اعظم ترین قدر سے گھٹ رہی ہو تب r^2 کی قیمت بھی بڑی تیزی سے کم ہو گی۔ اس میں شک نہیں کہ r کی قیمت ہمیشہ r^2 کی قیمت سے بڑی ہوتی ہے تاوقتیکہ $r^2 = 0$ یا '1'، '0' ہو یا جب $r = r^2$ ہو۔

r	r^2	r	r^2
0.90	0.81	0.60	0.36
0.80	0.64	0.50	0.25
0.70	0.49	0.40	0.16

اس طرح کوریلیشن کا ضریب 0.707 ہے جب کہ 'y' میں صرف ویرینس کا نصف 'x' کی وجہ سے ہے۔

یہ بات واضح طور پر ذہن میں رکھی جائے گی کہ دو متغیروں کے درمیان کوریلیشن کی قیمت 0.60 = r ہے اور دوسرے متغیروں کے درمیان کوریلیشن 0.36 = r^2 ہے۔ یہ واضح نہیں ہوتا کہ پہلا کوریلیشن دوسرے کوریلیشن کا دوگنا ہے۔ دونوں کے درمیان دیا گیا تعلق r کی قدروں کو r^2 کی تحسیب کرکے بہتر طور پر سمجھا جاسکتا ہے۔ جیسے جب 0.06 = r اور جب 0.90 = r^2 ہو۔ اس کا مطلب یہ ہوگا کہ پہلی صورت میں مجموعی تغیر کو 36٪ واضح کیا گیا جب کہ دوسری صورت میں مجموعی تغیر کا 90٪ واضح کیا گیا ہے۔ تعین کا ضریب (Coefficient of determination) ایک بہت ہی مفید پیائش ہے تاہم اس کی اکثر غلط تشریح کی جاتی ہے۔ اصطلاح از خود گمراہ کن ہے کہ یہ سمجھا جاتا ہے کہ متغیرہ 'x' متغیرہ 'y' سے موقعتی تعلق کا تعین کرتا ہے لیکن شماریاتی ثبوت از خود ایسے تعلق کی واجبیت کی تردید کرتا ہے۔ شماریاتی ثبوت صرف Covariation کی تعریف کرسکتا ہے کیونکہ یہ اصطلاح مکمل طور پر الگ معنوں میں استعمال کی جاتی ہے۔ چاہے واجبیت ہو یا نہ ہو۔ اگر ہو تو کن معنوں میں استعمال ہوگی اس کا تعین مقداری مشاہدات سے ہٹ کر ثبوت کی بنیاد پر ہوگا۔

تاہم r^2 ہمیشہ ایک مثبت عدد ہوتا ہے۔ اس سے یہ معلوم نہیں ہوتا کہ دو متغیروں کے درمیان تعلق مثبت ہے یا منفی۔ لہٰذا اجذر المربع r2 یعنی $\sqrt{r^2} = \pm r$ کی تحسیب ہوگی تاکہ تعلق کی سمت کی نشاندہی ہو علاوہ ازیں اس کے ساتھ ساتھ تعلق کے زاویہ کی بھی نشاندہی ہوگی۔ چونکہ r^2 کی وسعت 1 سے 0 ہے اس لئے کوریلیشن کا ضریب r کی قیمت بھی $\sqrt{1}$ یا $\sqrt{0}$ کے درمیان تبدیل ہوتی رہے گی۔ r کی قیمت کے ساتھ + مثبت کوریلیشن کی نشاندہی ہوگی جب کہ (-) کا مطلب منفی کوریلیشن ہوگا۔

1.9 کوریلیشن کے ضریب کی اقل ترین مربعوں کے طریقے سے تحسیب

(Calculation of Coefficient of Correlation with Least Square's Method)

اس بات کی نشاندہی کی گئی ہے کہ کارل پیرسن کے کوریلیشن کا ضریب اس مفروضہ کی بنیاد پر ہے کہ زیر مطالعہ متغیروں کے درمیان خطی تعلق پایا جاتا ہے۔ x اور y کے درمیان خطی تعلق کے مطالعہ کے طریقوں میں سے یہ ایک طریقہ ہے کہ y کے مقابل x کی خطی قیمتوں کی خطی قیمتیں دریافت کرنا ہے۔ ایسا Method of least squares کے ذریعہ کیا جاسکتا ہے۔

(i) خط مستقیم کی مساوات

$$y = a + bx$$

(ii) a اور b کی قیمتوں کو دریافت کرنے کے لئے دو نارمل مساوات استعمال کی جاتی ہیں وہ ہیں

$$\sum(y) = n(a) + b(\Sigma x) \quad ..... (i)$$

$$\sum(xy) = a\Sigma(x) + b\Sigma(x^2) \quad ..... (ii)$$

(iii) مذکورہ بالا مساوات میں x اور y کی متعلقہ قیمتوں کو درج کریں تب ہمیں مساوات کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

$$y = a + bx$$

(iv) اس مساوات سے ہم y کی خطی قیمتیں دریافت کرسکتے ہیں جب کہ x کی قیمتیں دی جائیں۔

(v) کوریلیشن کا ضریب y کی خطی قیمتوں کے معیاری انحراف کو y اصل قیمتوں کے معیاری انحراف سے تقسیم کرنے پر حاصل ہوگا۔

$$r = \frac{sy}{ry}$$

جہاں y ، sy کی قیمتوں کے محسوب (خطی) کا معیاری انحراف اور y, sy کی اصل قیمتوں کا معیاری انحراف ہے۔

تمثیل 16: درج ذیل اعداد سے کوریلیشن کا ضریب Method of least squares سے دریافت کیجئے۔

x:	1	2	3	4	5
y:	83	92	71	90	169

حل: y = a + bx مساوات حاصل کرنے کے لئے

x	y	xy	x^2
1	83	83	1
2	92	184	4
3	71	213	9
4	90	360	16
5	169	845	25
$\Sigma x = 15$	$\Sigma y 505$	$\Sigma ay 1685$	$\Sigma x^2 55$

دو حسب معمول مساوات

$$\Sigma(y) = na + b\Sigma(x)$$

$$\Sigma(xy) = a\Sigma(x) + b\Sigma(x^2)$$

مساوات میں قیمتیں درج کرنے پر

$$505 = 5a + 15b \qquad ..... (1)$$

$$16185 = 15a + 55b \qquad .... (2)$$

مساوات نمبر 1 کو 3 سے ضرب دینے پر

$$1515 = 15a + 45b \qquad (3)$$

$$1685 = 15a + 55b \qquad .... (4)$$

$$+170 = \quad +10b$$ تفریق کرنے پر

$$b = 17$$

مساوات نمبر 1 میں b کی قیمت درج کرنے پر ہمیں a کی قیمت حاصل ہو گی۔

$$505 = 5a + 15b$$

$$505 = 5a + 15 \times 17$$

$$505 = 5a + 255$$

$$-5a = 255 - 505$$

$$+5a = +250$$

$$a = \frac{250}{5}$$

$$a = 50$$

اس طرح خط مستقیم کی مساوات

$$y = a + bx$$

$$y = 50 + 34x$$

اب ہم y کی خطی یا محسوبہ قیمتیں دریافت کرسکتے ہیں جب کہ 'x' کی قیمتیں دی جائیں وہ ہوں گی۔

x	y
1	100 + 17 x 1 = 117
2	100 + 17 x 2 = 134
3	100 + 17 x 3 = 151
4	100 + 17 x 4 = 168
5	100 + 17 x 5 = 185

اب ہمیں اصل y سلسلوں اور محسوب سلسلوں کا معیاری انحراف دریافت کرنا ہو گا۔

اصل y	اصل اوسط حسابیہ سے انحراف 101 dy	dy^2	محسوب y	اصل حقیقی اوسط حسابیہ سے انحراف 151	dy^2
83	−18	144	117	−34	1156
92	−9	81	134	−17	289
71	−30	900	151	−0	0
90	−11	121	168	+17	289
169	+68	4621	185	+34	1156
505	∑dy0	5870	755	∑y0	2890

اصل / حقیقی اوسط حسابیہ سے انحراف

$$\sigma y = \sqrt{\Sigma dy^2} = \sqrt{\frac{5870}{5}} = \sqrt{1174} = 34.2636834$$

محسوب y اصل اوسط حسابیہ سے انحراف اصل

اصل / حقیقی y سلسلوں کا معیاری انحراف

$$Sy = \sqrt{\frac{2890}{5}} = \sqrt{578} = 24.0416306$$

کوریلیشن کا ضریب

$$r = \frac{Sy}{\sigma y} = \frac{24.0416306}{34.2636834} = 0.7016$$

کارل پیرسن کا ضابطہ بھی ہمیں وہی نتیجہ دے گا

$$r = \frac{\Sigma xy}{n8_x \sigma y}$$

1.10 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

عملی طور پر ہم ایسے کئی بے شمار مسائل کا سامنا کرتے ہیں جس میں دو یا زاید متغیرات کا استعمال ہوتا ہے۔ اگر دو مقداریں کچھ اس انداز میں حرکت کر رہی ہوں کہ ایک مقدار کی حرکت دوسری مقدار کے برابر ہوں یا کچھ فرق نہ ہو تب یہ مقداریں ہم آہنگ ہوں گی۔ ہم رشتگی کی پیمائش کو ہم رشتگی کا ضریب یا ہم رشتگی اعشاریہ کہتے ہیں۔ متغیرات کے درمیان ہم رشتگی کی نشاندہی کرتی ہے کہ ایک متغیر کی قدر میں تبدیلی ہو رہی ہو تب دوسرا متغیروں کے درمیان کے تجزیہ میں ہماری مدد کرتا ہے۔

تعریف: W.I King کے مطابق کوریلیشن کا مطلب اعداد و شمار کا دو سلسلوں یا گروہوں کے درمیان کچھ عارضی تعلق ہے۔

ہم رشتگی کے اقسام: مثبت یا منفی، سادہ مرکب اور کوریلیشن اور خطی اور غیر خطی کوریلیشن شامل ہیں۔

ہم رشتگی کے مطالعہ کے طریقوں میں منتشر ڈیاگرام، ہم رشتگی ترسیم، ہم رشتگی کا ضریب، ہم رشتگی کے ضریب کے ذریعہ درجاتی تفریق، کانکرنٹ انحراف کا ضریب اور اقل ترین مربعوں کا طریقہ شامل ہیں۔

ہم رشتگی کے ضریب کی تحسیب دو متغیروں کے درمیان تعلق کے حدود کے مطالعہ کے لیے کی جاتی ہے۔

کارل پیرسن برطانیہ کا رہنے والا تھا۔ وہ ایک ماہر شماریات تھا۔ اس نے ہم رشتگی کے ضریب کا ضابطہ دیا۔ ہم رشتگی کی پیمائش کے کئی حسابی طریقے ہیں۔ ان میں ایک کارل پیرسن کا طریقہ بھی ہے۔ یہ طریقہ پیرسن کی ہم رشتگی کے ضریب کے نام سے مشہور ہے۔ اس کی تحسیب راست اور شارٹ کٹ طریقہ سے بھی کی جاسکتی ہے۔ ہم رشتگی کے ضریب کا تعلق خطی اور غیر خطی ہو سکتا ہے۔ ہم رشتگی کے ضریب کو احتمالی خطا کی قیمت کی تشریح میں مددگار ہے۔ احتمالی خطا کی مدد سے ضریب کی قیمت کی اعتباریت کا تعین ممکن ہے۔ دو متغیرات کے

درمیان ہم رشتگی کے ضریب کی قیمت کی تشریح کا ایک بہت ہی سہولت بخش اور مفید ہم رشتگی کے ضریب کا مربع بنانا ہے، اس کو Coefficient of Determination کہتے ہیں۔

1.11 کلیدی الفاظ (Keywords)

1۔ ہم رشتگی(Correlation) : زیر مطالعہ دو متغیروں کے درمیان تعلق کو ہم رشتگی کہتے ہیں۔
2۔ مثبت ہم رشتگی(Positive Correlation): جب دو متغیرات کی قیمتیں ایک ہی سمت حرکت کر رہی ہوں تو یہ مثبت ہم رشتگی ہے۔
3۔ منفی ہم رشتگی(Negative Correlation): متغیرات کی قیمت میں تبدیلی ایک دوسرے کے متضاد ہو تو منفی کوریلیشن ہے۔
4۔ خطی ہم رشتگی(Linear Correlation): جب دو متغیرات کی قدروں میں تغیر برابر تناسب میں ہوں تب ہم رشتگی کو خطی ہم رشتگی کہتے ہیں۔
5۔ غیر خطی ہم رشتگی(Non-Linear Correlation): دو متغیرات میں تبدیلی عام طور پر یکساں نہیں ہوتی اس کو غیر خطی ہم رشتگی کہتے ہیں۔

1.12 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

خالی جگہوں کو پر کیجئے۔

1. ہم رشتگی کی پیمائش کو____________ کہتے ہیں۔ (ہم رشتگی کا ضریب)
2. شئے کی قیمتوں میں اضافہ سے فروخت کی مقدار__________ ہے۔ (گھٹتی جاتی)
3. قربت کے زاویہ کو محسوب کرنے کی بنیاد________ مساوات پر ہے۔ (ریگریشن)
4. ________ مثبت یا منفی ہو سکتا ہے۔ (کوریلیشن)
5. دو متغیرات کی قدروں میں تغیر________ میں ہو تو خطی کوریلیشن کہتے ہیں۔ (برابر تناسب)

صحیح یا غلط جملوں کی نشاندہی کیجیے۔

1. دو متغیرات میں تبدیلی یکساں نہیں ہوتی۔ (صحیح / غلط)
2. دو یا زیادہ متغیروں کے درمیان تعلق ظاہر کرنے کے لیے ترسیم کھینچی جاسکتی ہے۔ (صحیح / غلط)
3. منتشر ڈیاگرام کا کھینچنا نہایت آسان ہے۔ (صحیح / غلط)
4. منتشر ڈیاگرام کا طریقہ دو متغیرات بصری تصویر نہیں دیتا۔ (صحیح / غلط)
5. 1+ پرفیکٹ کوریلیشن کو ظاہر نہیں کرتا۔ (صحیح / غلط)

مختصر جوابات کے حامل سوالات

1. ہم رشتگی سے کیا مراد ہے وضاحت کیجئے۔
2. مثبت اور منفی ہم رشتگی کے مفہوم کو بیان کیجئے۔
3. کارل پیرسن کے ہم رشتگی کی قدر ضریب کے مفروضات بیان کیجئے۔
4. ہم رشتگی کے حدود کو بیان کیجئے۔
5. ہم رشتگی کے خوبیاں بیان کیجئے۔

طویل جوابات کے حامل سوالات

1. ہم رشتگی کے قدر ضریب کو محسوب کرنے کے راست طریقہ کو بیان کیجئے۔
2. درجہ ذیل سے ہم رشتگی کی ضریب دریافت کیجیے۔

x:	10	28	45	60	70	50
y:	100	20	50	40	33	45

جواب: r = 0.98

3. درجہ ذیل سے ہم رشتگی کا ضریب معلوم کیجیے اور احتمالی خطا معلوم کیجیے۔

x:	20	30	40	50	60	70	80
y:	14	25	30	32	40	45	65

جواب: r = 10.96

4. درجہ ذیل سے r کی قیمت معلوم کیجیے۔

x:	4	22	8	14	10	12	12	18	10	14
y:	8	38	12	36	16	32	18	28	20	24

5. درجہ ذیل ہم رشتگی کا ضریب دریافت کیجیے۔

x:	12	9	8	10	11	13	7
y:	14	8	6	9	11	12	3

جواب: 0.94+

6۔ درجہ ذیل سے پیرسن کی ہم رشتگی کا ضریب معلوم کیجیے۔

A:	48	35	17	23	47
B:	45	20	40	25	45

اکائی 2۔ اسپیر مین درجاتی ہم رشتگی

(Spearman's Rank Correlation)

اکائی کے اجزاء:

2.0 تمہید (Introduction)

2.1 مقاصد (Objectives)

2.2 درجاتی ہم رشتگی کے معنی و تعریف (Meaning and Definition of Rank Correlation)

2.3 اسپیر مین کوریلیشن کے ضریب کے خدوخال (Features of Spearman's Coefficient of Correlation)

2.4 رینک کوریلیشن کے فائدے اور نقصانات (Advantages and Disadvantages of Rank Correlation)

2.5 رینک کوریلیشن کے ضریب کے استعمالات (Uses of Coefficient of Correlation)

2.6 باہمی انحراف کا ضریب (Coefficient of Concurrent Deviations)

2.7 کانکرنٹ انحراف کے طریقہ کی خوبیاں اور خرابیاں (Advantages and Disadvantages of Concurrent Deviation)

2.8 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

2.9 کلیدی الفاظ (Keywords)

2.10 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

2.0 تمہید (Introduction)

عزیز طلباء! شماریات میں ہم نے صرف ایک متغیر سے متعلق معلومات حاصل کر چکے ہیں۔ لیکن بعض اوقات ہم عملی طور پر ایسے کئی مسائل کا سامنا کرتے ہیں جہاں دو یا دو سے زاید متغیرات کا استعمال ہوتا ہے۔ جیسا کہ ہم نے پڑھا ہم رشتگی تجزیہ متغیرات کے درمیان تعلق یا قربت کی پیمائش میں مستعمل ٹیکنکس سے متعلق ہے۔ اسی موضوع پر مزید معلومات اس اکائی میں حاصل کریں گے۔

2.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- درجاتی ہم رشتگی کے معنی و مفہوم سے واقف ہو جائیں

- درجاتی ہم رشتگی اور ہم رشتگی کی تحسیب میں فرق کی توضیح کرسکیں
- یکساں رینکس کی صورت میں درجات کی ترتیب کا عملی طریقہ جان سکیں
- درجاتی ہم رشتگی کے فائدہ و نقصانات پر بحث کرسکیں
- باہمی انحراف کے ضریب کے طریقہ سے ہم آہنگ ہوسکیں

2.2 درجاتی ہم رشتگی کے معنی و تعریف (Meaning and Definition of Rank Correlation)

اسپیرمین درجاتی ہم رشتگی دو متغیرات کے درمیان قوت اور سمت (مثبت / منفی) کی جانچ کاری ایک طریقہ ہے۔ شماریات میں درجاتی ہم رشتگی کا ضریب دراصل چارلس ایڈورڈ اسپیرمین کے نام پر لکھا گیا ہے۔ درجاتی ہم رشتگی کا انحصار دو متغیرات کے درمیان درجات یادرجہ کی پیمائش پر ہے۔ دو متغیرات کے درمیان اسپیرمین کی ہم رشتگی ان دو متغیرات کے درمیان درجاتی قدروں کے برابر ہوتی ہے۔ اسپیرمین کی ہم رشتگی ایک جیسے تعلق کا جائیزہ لیتی ہے (خطی یا غیر خطی)۔ اگر سلسلوں کے درمیان ایک ہی عدد کی بار بار تکرار نہ ہو تو اسپیرمین کی مکمل ہم رشتگی (1+) پائی جاتی ہے یا جب متغیرات ایک دوسرے سے مکمل طور پر ایک جیسے نہ ہوں تب (1-) مکمل ہم رشتگی پائی جاتی ہے۔

تعریف (Definition)

اسپیرمین کی ہم رشتگی کے ضریب کی تعریف یوں کی گئی کہ: ”درجاتی متغیرات کے درمیان کارل پیرسن کی ہم رشتگی کہتے ہیں“۔

ویکیپیڈیا (Wikipedia) میں یوں تعریف کی گئی ہے کہ: ”شماریات کے کئی مختلف متغیرات کے درجات کے درمیان تعلق کی پیمائش یا ایک ہی متغیر کے مختلف درجات کی پیمائش کو درجاتی ہم رشتگی کہتے ہیں“۔

بعض اوقات ایسے مسائل سے سامنا ہوتا ہے جہاں ایک سلسلے کے مختلف ایٹمس کو سلسلہ وار ترتیب دیا جاسکتا ہے لیکن ان کی قدر مقداری پیمائش مشکل ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر ایک کلاس میں ٹیچر کے لئے یہ ممکن ہوتا ہے کہ وہ اپنے طلباء کو ذہانت کے اعتبار سے بڑھتی ہوئی اور گھٹتی ہوئی قدر میں ترتیب دے۔ اگرچیکہ ذہانت کی مقداری پیمائش نہیں کی جاسکتی۔ بلاشبہ طلبا کی ذہانت کے بارے میں مقداری مطالعہ امتحان کے انعقاد اور نشانات (Infallible) دے کر کیا جاسکتا ہے لیکن اس طریقہ کو بھی بے خطا نہیں کہا جاسکتا۔ کئی وصف ایسے ہیں جن کی مقداری پیمائش کی جاسکتی ہے مثال کے طور پر ایمانداری' کردار' اخلاق وغیرہ۔ اگر ایسے دو اوصاف کے مطالعہ کی ضرورت محسوس کی جائے جیسے ذہانت اور خوبصورتی کارل پیرسن کے کوریلیشن کے ضریب کی تحسیب نہیں کی جاسکتی کیونکہ ان اوصاف کو ایک قطعی قدر سے متصف نہیں کیا جاسکتا۔ تاہم ایک ایسا طریقہ پایا جاتا ہے جس کی مدد سے ہم ایسے اوصاف کے درمیان کوریلیشن کا مطالعہ کرسکتے ہیں۔ اس طریقہ کو برطانیہ کے ایک ماہر نفسیات چارلس ایڈورڈ اسپیرمین نے 1904 میں ترتیب دیا۔

اس طریقہ میں 'x' اور 'y' متغیروں کو رینک (درجات) A اور B کی صورت میں دئے جاتے ہیں۔ ذہانت اور خوبصورتی کے درمیان کوریلیشن کے مطالعہ کی صورت میں ہم 10 یا 20 افراد کا انتخاب کرکے ان کی ذہانت کے اعتبار سے رینک دے دیں۔ سب سے زیادہ ذہین فرد

کو 1 کا رینک دیں ایسے ہی ہر ایک کو رینک ایک کے بعد دیگرے دیتے ہوئے آخری فرد تک پہنچیں۔ اسی طرح ہم خوبصورتی کو بھی رینک دے سکتے ہیں بہت خوبصورت کو 1 رینک دیں ایسے ہی ہر ایک خوبصورتی کی مناسبت سے رینک دیتے ہوئے آخر تک پہنچیں جو کم سے کم خوبصورت ہے۔

اس طرح ہمارے پاس دو اوصاف کے لئے رینکس کے دو سیٹ ہوں گے اس طریقہ پر 10 افراد کو ترتیب دیا جائے تو ہمارے پاس 1-10 رینک ہوں گے۔ ایک مرتبہ رینک دینے کا کام ہو جائے تب اسپیر مینس رینک کوریلیشن کے ضابطہ سے ان دو سلسلوں کے لئے کوریلیشن کا ضریب معلوم کر سکتے ہیں۔ یہ ضابطہ کچھ یوں ہے

$$r_s = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)} \; or \; 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n^3 - n}$$

r_s اسپیر مینس رینک کوریلیشن اور 'd' ایک فرد کے دو اوصاف کے لئے رینک کے فرق کو ظاہر کرتا ہے اور 'n' جوڑ کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔ ضریب کی قدر کی تشریح ایسے ہی ہوگی جیسے کارل پیرس کے کوریلیشن کے ضریب ہوں گے۔ اس کی قدر کے حدود بھی 1+ اور 1- ہوں گے۔ جب r_s '+' ہو اس کا مطلب یہ ہو گا دو اوصاف ذہانت اور خوبصورتی کے درمیان مکمل یکسانیت ہے اگر کوریلیشن 1- ہو اس کا مطلب یہ ہو گا کہ ذہانت اور خوبصورتی کے درمیان یکسانیت نہیں ہے۔

اس ضریب کی تحسیب کاری کے سوالات دو قسم کے ہیں:

(A) جب کہ حقیقی رینکس دئے جائیں۔ (B) جب کہ حقیقی رینکس نہ دئے جائیں۔

ان دو قسم کے سوالات میں ہر ایک کے لئے مشکلات اس وقت ہوتی ہیں جب کہ دو افراد کے رینکس ایک ہی ہوں۔ ایسے سوالات کے لئے ضابطہ میں تبدیلی کی ضرورت ہوتی ہے۔

A. جب کہ رینکس دئے جائیں

جہاں ایٹمس کے حقیقی رینکس دئے جائیں تب ضریب کو معلوم کرنے کے لئے درج ذیل اقدامات کئے جائیں۔

(i) رینکس کے درمیان فرق معلوم کریں (R_1-R_2) اور ان کی نشاندہی 'd' سے کیجئے۔

(ii) d_2 کی تحسیب کیجئے اور ان کا ٹوٹل کیجئے $\sum d^2$ حاصل ہو گا۔

(iii) ضریب کو معلوم کرنے کے لئے ضابطہ استعمال کیجئے

$$r_s = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n^3 - n}$$

تمثیل 1: 15 طلباء کے ریاضی اور طبیعیات میں نشانات ذیل میں دئے گئے ہیں:

ریاضی میں رینکس	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
طبیعیات میں رینکس	10	7	2	6	4	8	3	1	11	15	9	5	14	12	13

رینک کوریلیشن کے ضریب کو اسپیرمین کے ضابطے کو استعمال کرتے ہوئے کیجئے۔

ریاضی میں رینکس R_1	طبعیات میں رینکس R_2	$(R_1\text{-}R_1)$ d	d^2
1	10	-9	81
2	7	-5	25
3	2	+1	1
4	6	-2	4
5	4	+1	1
6	8	-2	4
7	3	+4	16
8	1	+7	49
9	11	-2	4
10	15	-5	25
11	9	+2	4
12	5	+7	49
13	14	-1	1
14	12	+2	4
15	13	+2	4
$n=15$		$\Sigma d=0$	$\Sigma d^2=272$

$$r_s=1-\frac{6\Sigma d^2}{n^3-n}$$
$$=1-\frac{6\times 272}{(15)^3-15}$$
$$=1-\frac{1632}{1632}$$
$$=1-\frac{1632}{3375-15}$$
$$=1-\frac{1632}{3360}$$
$$=1-0.4857$$
$$=+0.514$$

تمثیل 2: ایک مقابلہ حسن میں تین ججس نے درجے یوں دیئے:

پہلا جج	1	6	5	10	3	2	4	9	7	8
دوسرا جج	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9
تیسرا جج	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7

اسپیرمین کے ضابطہ سے رینک کوریلیشن محسوب کیجئے۔

حل:

R_1	R_2	R_3	$R_1 - R_2$ d_{12}	$R_1 - R_3$ d_{13}	$R_2 - R_3$ d_{23}	d^2 12	d^2 13	d^2 23
1	3	6	-2	-5	-3	4	25	9
6	5	4	+1	+2	+1	1	4	1
5	8	9	-3	-4	-1	9	16	1
10	4	8	+6	+2	-4	36	4	16
3	7	1	-4	+2	+6	16	4	36
2	10	2	-8	0	+8	64	0	64
4	2	3	+2	+1	-1	4	1	1
9	1	10	+8	-1	-9	64	1	81
7	6	5	+1	+2	+1	1	4	1
8	9	7	-1	+1	+2	1	1	4
						200	60	214

$$r_s = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n^3 - n}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 14}{10^3 - 10} = 1 - \frac{1284}{100 - 10}$$

$$= 1 - \frac{284}{990}$$

$$= 1 - 1.2969$$

$$= 0.2896$$

مقابلہ حسن میں پہلے اور دوسرے جج کے درمیان کوریلیشن منفی ہے یعنی ان کی رائے ایک دوسرے سے مختلف ہے۔ اسی طرح دوسرے اور تیسرے جج کی رائے بھی ایک دوسرے سے مختلف ہے۔ لیکن پہلے اور تیسرے جج کی رائے یکساں ہے ان کا کوریلیشن مثبت ہے۔

تمثیل 3: ایک کمپنی کے ڈبنچر کی قیمتوں اور حصص کی قیمتوں کے درمیان میں رینکس کوریلیشن 0.8+ ہے اگر رینک میں فرق کے مربعوں کا مجموعہ 33 ہو تب 'n' کی قدر دریافت کیجئے۔

$$r_S = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n^3 - n} \qquad r_s = 0.8$$

$$\Sigma d^2 = 33$$

$$0.8 = 1 - \frac{6\times 33}{n^3 - n} \ or \ 1 - \frac{198}{n^3 - n}$$

$$0.8 = 1 - \frac{198}{n^3 - n} = 0.2(n^3 - n) = 198$$

$$n^3 - n = \frac{198}{0.2}$$

$n^3 - n = 990$ یا $n^3 - 1000 - n + 10 = 0$ یا

یا $n^3 - 10^3 - (n-10) = 0$ یا $(n-10)(n^2 + 10n + 100) - (n-10) = 10$

$$(n-10)(n^2 + 10n + 99) = 0 \ i.e\, n \times 10 (\because a^3 + b^3) = (a+b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$n^2 + 10n + 99 = 0$$

$$n^2 + 10n = -99$$

$$n^2 + n \ =$$

$$(n+0)[n^2 + 10n + 100 - 1] = 0$$

$$(n-10)[n^2 + 10n + 99] = 0$$

$$n - 10 = 0 \ (or) \ n^2 + 10n + 99 = 0$$

$$n = 10 \ (or) \ n^2 + 10n + 99 = 0$$

33 ہو تب 'n' کی قدر دریافت کیجئے۔

$$r_S = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n^3 - n} \qquad r_s = 0.8$$

$$\Sigma d^2 = 33$$

$$0.8 = 1 - \frac{6\times 33}{n^3 - n} \ or \ 1 - \frac{198}{n^3 - n}$$

$$0.8 = 1 - \frac{198}{n^3 - n} = 0.2(n^3 - n) = 198$$

$$n^3 - n = \frac{198}{0.2}$$

$n^3 - n = 990$ یا $n^3 - 1000 - n + 10 = 0$ یا

یا $n^3 - 10^3 - (n-10) = 0$ یا $(n-10)(n^2 + 10n + 100) - (n-10) = 10$

$$(n-10)(n^2 + 10n + 99) = 0 \ i.e\, n \times 10 (\because a^3 + b^3) = (a+b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$n^2 + 10n + 99 = 0$$

$$n^2 + 10n = -99$$

$$n^2 + n \ =$$

$$(n+0)[n^2 + 10n + 100 - 1] = 0$$

$$(n-10)[n^2 + 10n + 99] = 0$$

$$n - 10 = 0 \ (or) \ n^2 + 10n + 99 = 0$$

$$n = 10 \ (or) \ n^2 + 10n + 99 = 0$$

اس گروہ میں ایٹمس کی تعداد دس ہے۔

تمثیل4: شماریات اوراکاؤنٹنسی میں10 طلباء کے حاصل کردہ نشانات کے رینک کوریلیشن کاضریب0.2 پایاگیا۔بعد میں پایاگیاکہ ایک طالب علم کے دومضامین کے رینکس میں غلطی سے 7 کے بجائے 9 شمار کرلیاگیا۔درست رینک کوریلیشن کاضریب دریافت کیجئے۔

اعداددئے گئے ہیں:

$$n=10 \quad r_s=0.2$$

$$r_s=1-\frac{6\Sigma d^2}{n^3-n}$$

$$0.2=1-\frac{6\Sigma d^2}{10^3-10}$$

$$0.2=1-\frac{6\Sigma d^2}{100-10}=$$

$$0.2=1-\frac{6\Sigma d^2}{990}$$

$$\frac{6\Sigma d^2}{990}=1-0.2$$

$$\frac{6\Sigma d^2}{990}=0.8$$

$$6\Sigma d^2=0.8\times 990$$

$$6\Sigma d^2=792$$

$$\Sigma d^2=\frac{792}{6}$$

$$\Sigma d^2=132$$

صحیح Σd^2 یوں ہوگا $=132-9^2-7^2$

$$=132-81+49$$

$$=100$$

$$correct\ r_s=1-\frac{6\Sigma d^2}{n^3-n}=1-\frac{6\times 100}{100-10}=1-\frac{600}{990}$$

$$=1-0.60606$$

$$=0.39$$

(b) جب کہ رینکس نہ دئے گئے ہوں

درجاتی ہم رشتگی کاضابطہ اس وقت استعمال کیاجاسکتاہے جبکہ ہم متغیرات سے سامنا کررہے ہوں جن کی مقداری پیمائش کی جاسکتی ہے۔اگرہمیں حقیقی اعدادوشمار دئے (رینکس نہ دیں) جائیں تب ہم ان اعداد کورینکس میں تبدیل کرسکتے ہیں۔اعلیٰ سے ادنیٰ تک رینکس دے دیں یعنی پہلے 1 ایک اوراس کے بعد دوسرے اعداد تک رینک دیاجائے۔یہاں رینک بڑھتی ہوئی ترتیب یاپھر گھٹتی ہوئی ترتیب میں دیا

جائے۔ دونوں متغیرات کے لئے یہی طریقہ کار اپنایا جائے۔

تمثیل 5: درج ذیل اعداد سے رینک کوریلیشن کا ضریب تحسیب کریں۔

x:	60	34	40	50	45	41	22	43	42	66	64	46
y:	75	32	34	40	45	33	12	30	36	72	41	57

حل:

X	Rank 1	y	Rank 2	Diff. in Ranks (d)	d^2
60	3	75	1	+2	4
34	11	32	10	+1	1
40	10	34	8	+2	4
50	4	40	6	−2	4
45	6	45	4	+2	4
41	9	33	9	0	0
22	12	12	12	0	0
43	7	30	11	−4	16
42	8	36	7	+1	1
66	1	72	2	−1	0
64	2	41	5	−3	9
46	5	57	3	+2	4
n=12				0	$\sum d^2 48$

$$r_s = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n^3 - n}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 48}{12(12^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{288}{12(144 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{288}{1728 - 12}$$

$$=1-\frac{288}{1716}$$

$$=1-0.16667$$

0.88

(c) یکساں رینکس Equal Ranks

بعض اوقات جہاں ایک سے زائد ایٹمس ہوں جن کی قیمت ایک ہو ایسے ایٹمس کو مشترکہ رینکس دئے جائیں گے۔ یہ رینک۔ رینکس کا اوسط ہو گا جو ایک دوسرے سے کسی قدر مختلف ہو گا۔ جب یہ رینکس دے دئے جاتے ہیں رینک کوریلیشن کے ضریب کو مزید کو ریلیشن کی ضرورت ہو گی کیونکہ مذکورہ بالا ضابطہ مفروضہ کی بنیاد پر ہے مختلف ایٹمس کے رینکس مختلف ہیں اور رینک ایک سے زائد مرتبہ نہیں دیا جاسکتا۔ اگر ایک سلسلہ میں 'm' ایٹمس ہیں جن کا رینک مشترکہ ہے تب رینک کوریلیشن کے ضریب میں تصحیح ہو گی $\frac{1}{2}(m^3-m)$ کو Σd^2 کی قدر میں جوڑا جائے گا۔ اگر ایسے گروپس جن کا رینک مشترکہ ہو اور ایک سے زائد ہوں تب اس قدر کو جوڑتے جانا ہو گا۔ لہٰذا رینک کوریلیشن کے ضابطہ کو درج ذیل طریقہ سے تبدیل کرتے جانا ہو گا۔

$$r=1-\left[\frac{\Sigma d^2+\frac{1}{12}(m^3-m)+\frac{1}{12}(m^3-m).....}{n^3-n}\right]$$

تمثیل 6: درج ذیل اعداد کے لئے رینک کوریلیشن کی تحسیب کیجئے۔

x:	48	33	40	9	16	16	65	24	16	57
y:	13	13	24	6	13	4	20	9	6	19

حل:

X	Rank 1	y	Rank 2	Diff. in Ranks R_1-R_2 d	d^2
48	3	13	5.5	−2.5	6.25
33	5	13	5.5	−0.5	0.25
40	4	24	1	+3.0	9.00
9	10	6	8.5	+1.5	2.25
16	8	15	4	+4.0	16.00
16	8	4	10	−2.0	4.00

65	1	20	2	-1.0	1.00
24	6	9	7	-1.0	1.00
16	8	6	8.5	0.5	0.25
57	2	19	3	1.0	1.00
n=12				0	$\sum d^2=41.00$

مذکورہ بالا جدول میں x سلسلے میں عدد 16 تین مرتبہ آیا ہے ان تمام ایٹمس کا رینک 8 جو 8,7 اور 9 کا اوسط ہے اعداد جن کو یہ رینک دیا گیا ہے اس کا مطلب یہ ہوگا کہ ان قیمتوں میں کچھ فرق پایا گیا ہے۔ y سلسلے میں عدد 13 اور 6 دونوں دو مرتبہ واقع ہوئے ہیں۔ ان کے رینکس بالترتیب 5.5 اور 8.5 ہیں۔ ان مشترکہ رینکس کی وجہ سے رینک کوریلیشن کو درست کرنا ہوگا۔

ان کی تصحیح کے لئے ہمیں $\left[\frac{1}{2}(m^3-m)\right]$ کو Σd^2 کی قدر میں جوڑنا ہوگا۔ x سلسلے میں اس کی قدر $\frac{1}{2}(2^3-2)$ کے برابر ہوگی کیونکہ عدد 16 اس سلسلے میں تین مرتبہ دہرایا گیا ہے۔ y سلسلوں میں مشترکہ رینک رکھنے والے دو ایسے گروپس ہیں۔ پہلے گروپ میں یہ تصحیح $\left[\frac{1}{2}(m^3-m)\right]$ کیونکہ 13 دو مرتبہ دہرایا گیا ہے اور دوسرے گروپ میں تصحیح کی قدر $\frac{1}{2}(2^3-2)$ کے برابر ہوگی کیونکہ اس سلسلے میں عدد 6 دو مرتبہ دہرایا گیا ہے۔

$$r_s=1-\frac{6\left[\Sigma d^2+\frac{1}{12}(m^3-m)+\frac{1}{2}(m^3-m)+\frac{1}{12}(m^3-m)\right]}{n^3-n}$$

$$=1-\frac{6\left[41+\frac{1}{12}(3^3-3)+\frac{1}{2}(2^3-2)+\frac{1}{12}(2^3-2)\right]}{10^3-10}$$

$$=1-\frac{6\left(41+\frac{1}{12}(27-3)+\frac{1}{2}(6-2)+\frac{1}{12}(6-2)\right)}{100-10}$$

$$=1-\frac{6\left(41+\frac{1}{12_1}\overset{2}{24}+\frac{1}{12_1}\times\overset{1}{6}+\frac{1}{12_2}\overset{1}{6}\right)}{100-10}$$

$$=1-\frac{6\left(41+2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}{990}$$

$$=1-\frac{6(44)}{990}$$

$$=1-\frac{264}{990}$$

$$=1-0.2667$$

$$=0.738$$

2.3 اسپیر مین کوریلیشن کے ضریب کے خدوخال (Features of Spearman's Coefficient of Correlation)

1. دو متغیروں کے درمیان رینکس کے فرق کا مجموعہ صفر ہو گا علامتی طور پر $\sum d=0$۔
2. اسپیر مین کا کوریلیشن کا ضریب نان پیر امیٹرک (   ) ہے کیونکہ کسی زیر مشاہدہ نمونہ سے آبادی کی شکل کے بارے میں مشکل مفروضات نہیں لئے جاتے۔
3. اسپیر مین کوریلیشن کے ضریب کچھ اور نہیں بلکہ کارل پیرسن کے کوریلیشن کا ضریب ہے رینکس کے درمیان ہے لہٰذا اس کی تشریح بھی کارل پیرسن کی تشریح کی طرح کی جائے گی۔

2.4 رینک کوریلیشن کے فائدے اور نقصانات (Advantages and Disadvantages of Rank Correlation)

فائدے

1. چونکہ اس طریقے میں $\sum d$ یا R_1 اور R_2 میں فرق ہمیشہ صفر کے برابر ہوتا ہے اس لئے تحسیب پر روک فراہم کرتا ہے۔
2. چونکہ اسپیر مین کے رینک کوریلیشن وہی ہے جو رینکس کے درمیان کارل پیرسن کے کوریلیشن کے ضریب کے برابر ہے اس لئے اس کی تشریح بھی کارل پیرسن کے کوریلیشن کے ضریب کی طرح کی جاتی ہے۔
3. رینک کوریلیشن کارل پیرسن کے کوریلیشن کے ضریب کے برخلاف یونیورس میں نارمل حالات کے متقاضی نہیں ہوتے جس میں سے نمونہ / سیمپل لیا گیا تھا۔
4. رینک کوریلیشن سمجھنے اور اطلاق کے لئے نہایت آسان ہے۔ تاہم پیرسن کا ضریب مکمل معلومات کی بنیاد پر ہوتا ہے جب کہ اسپیر مین کا ضریب صرف رینک کی بنیاد پر ہوتا ہے۔ r کی قیمتیں عموماً دونوں طریقوں میں الگ الگ ہوتی ہیں۔
5. اسپیر مین کے رینک کا طریقہ ہی کوریلیشن کے مطالعہ کا ایک راستہ ہے جو معیاری اعداد و شمار کے درمیان کیا جاتا ہے جس کی پیمائش اعداد میں نہیں کی جاسکتی لیکن سلسلہ نشان میں ترتیب دیا جاسکتا ہے۔

نقصانات

1. یہ طریقہ دوہرے تعددی جدول میں استعمال نہیں کیا جاسکتا۔ یا Bivariate frequency distribution میں کی صورت میں استعمال نہیں کیا جاسکتا۔
2. اس کا استعمال سہولت بخش طریقہ پر صرف اسی وقت کیا جاسکتا ہے جب کہ n چھوٹا ہو ورنہ حساب دہی تکلیف دہ یا مشقت طلب ہو جاتی ہے۔

2.5 رینک کوریلیشن کے ضریب کے استعمالات (Uses of Coefficient of Correlation)

1. ابتدائی اعداد و شمار رینکس کی صورت میں ہوں۔

2. اگر تعداد کم ہو (جیسے 25یا30) بعض اوقات داخلی اعداد و شمار پر Apply کیا جاتا ہے جہاں مشابہت پیدا کرنا ہو جب کہ r کی قیمت کی تحسیب زیادہ وقت طلب ہو۔ اس کے لئے Interval data کو دونوں متغیرات کو رینکس کی ترتیب میں منتقل کیا جاتا ہے۔ اگر N'30 سے زیادہ ہو تو اس کو دس کی رینکنگ مشقت طلب اور اس فارمولے کے ذریعہ متوقع وقت کی بچت کے خلاف ہو جاتی ہے۔

2.6 باہمی انحراف کا ضریب (Coefficient of Concurrent Deviations)

بعض اوقات دو سلسلوں کے درمیان کوریلیشن کا مطالعہ بہت ہی موقعتی انداز میں کرنے کی خواہش ہو تب ایسی صورت میں جہاں تک ہوسکے باقاعدہ طور پر خصوصی توجہ کی ضرورت نہ ہو۔ ایسی صورت میں Coefficient of Concurrent Deviations کی تحسیب کافی ہے۔ اس طریقہ میں کوریلیشن کی تحسیب انحراف کی سمت کے درمیان ہوگی ان کی قدر رمقدار پر نہیں ہوگی۔ اس ضریب کی تحسیب میں صرف انحراف کی سمت کو زیر غور رکھا جاتا ہے اور ان کی مقدار کو نظر انداز کیا جاتا ہے۔

Coefficient of Concurrent Deviations کی تحسیب کے لئے کسی اوسط یا حرکتی اواسط کے طریقہ سے انحراف نہیں کیا جاتا۔ لیکن گذشتہ / پچھلی مدت سے صرف ان کی سمت کو پیش نظر رکھا جاتا ہے، اس کی تحسیب کے لیے ضابطہ ذیل میں دیا گیا ہے۔

$$r_c = \pm\sqrt{\pm\left(\frac{2c-n}{n}\right)}$$

جہاں، rc = Coefficient of Concurrent Deviations

C = The no. of pairs of Concurrent Deviations

n = No. of pairs of Deviations n

Coefficient of Concurrent Deviations کی تحسیب کے لئے کسی اوسط یا حرکتی اواسط کے طریقوں سے انحراف سے نہیں کیا جاتا۔ لیکن گذشتہ رپچھلی مدت سے صرف ان کی سمت کو پیش نظر رکھا جاتا ہے۔ اس کی تحسیب کے لئے فارمولہ ذیل میں دیا گیا ہے۔

اس کوریلیشن کے ضریب کی قیمت بھی ± 1 کے درمیان ہوتی ہے اس فارمولے میں مثبت اور منفی علامات کو ذہن میں رکھا جائے۔ اگر $\frac{2c-n}{n}$ کی قیمت منفی ہو تب اس کا مربع (Square root) تحسیب نہیں کیا جاسکتا اس لئے مربع کی علامت پر منفی علامت لکھی جائے گی تاکہ مربع کی تحسیب کی جاسکے اور منفی کی علامت کوریلیشن کے ضریب کی قیمت سے پہلے لکھی جائے۔

اس ضریب کی تحسیب میں اقدامات یوں ہیں:

1. x متغیر میں تبدیلی کی سمت کو معلوم کریں۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ یہ معلوم کیا جائے کہ اس سلسلہ کا دوسرا عدد پہلے عدد سے بڑا ہے یا نہیں۔ اگر ایسا ہے تب سمت + ہوگی اگر دوسرا عدد پہلے عدد سے چھوٹا ہو تو سمت - ہوگی۔ اگر دونوں اعداد مساوی ہوں تو سمت 0 ہوگی۔

اسی طرح تیسرے عدد کی سمت معلوم کریں کہ وہ دوسرے عدد سے بڑا ہے چوتھا عدد تیسرے عدد سے بڑا ہے یا چھوٹا اس طرح آگے بڑھیں اس کی نشاندہی (dx) سے کریں۔

2. اسی طریقہ پر y متغیر میں سمت کی تبدیلی کو معلوم کریں اس کی نشاندہی (dy) سے کریں۔

3. dx اور dy کو ضرب دیں اور C کی قیمت کا تعین کریں۔ یہ مثبت حاصل ضرب کا عدد ہو گا (+x+) یا (-x-)

4. مذکورہ بالا ضابطہ کو استعمال کریں اور ضریب یا r معلوم کریں۔

تمثیل 7: درج ذیل اعداد سے Coefficient of Concurrent Deviations کی تحسیب کریں۔

x:	1	2	3	4	5	6
y:	25	16	9	5	1	0

حل

x	Deviation from previous value	Y	Deviation from previous value	Dxdy
1	–	25	–	–
2	+	16	–	–
3	+	9	–	–
4	+	5	–	–
5	+	1	–	–
6	+	0		

اس طرح x اور y کے درمیان مکمل منفی تعلق پایا جاتا ہے (چونکہ dxdy=0) اس طرح ان کے درمیان Concurrent deviations نہیں ہے۔

تمثیل 8: نیچے دئے گئے اعداد و شمار کے لئے کانکرنٹ ڈیویشن کا ضریب معلوم کیجئے۔

مزدوروں کی تعداد:	300	350	400	450	500	550
صرف شدہ چاول کی مقدار:	30	32	33	35	40	50

مزدوروں کی تعداد	Deviation from previous figure dx	y	Deviation from previous figure	Dxdy
300	–	30	–	–
350	+	32	+	+
400	+	33	+	+
450	+	35	+	+
500	+	40	+	+
550	+	50	+	+
				$\sum$dxdy=5

$$n = 5 \qquad C = 5$$

$$r_c = \pm\sqrt{\pm\frac{2c-n}{n}}$$

$$= \pm\sqrt{\pm\frac{205-5}{5}}$$

$$= \pm\sqrt{\pm\frac{5}{5}}$$

$$= +1$$

یہاں کانکرنٹ ڈیویشن کا ضریب +1 ہے یہاں dxdy = n جس کا مطلب تمام انحراف ایک ہی سمت میں ہیں۔

2.7 کانکرنٹ انحراف کے طریقہ کی خوبیاں اور خرابیاں

(Advantages and Disadvantages of Concurrent Deviation)

خوبیاں:

کانکرنٹ انحراف کی طریقہ کی خوبیاں درج ذیل ہیں

1۔ تمام طریقوں میں یہ سب سے آسان طریقہ ہے۔

2۔ جب ایٹمس کی تعداد زیادہ ہو جاتی ہے تب پیچیدہ طریقوں کو استعمال کرنے سے قبل ان کے درمیان زاویہ کے بارے بہت جلد بھانپ لینے کے لیے اس طریقہ کو استعمال کیا جا سکتا ہے۔

خرابیاں:

کانکرنٹ انحراف کی طریقہ کی خرابیاں درج ذیل ہیں

1۔ یہ طریقہ چھوٹی اور بڑی تبدیلی میں فرق نہیں کرتا مثال کے طور پر اگر x میں 100 سے 101 تک اضافہ ہو تو علامت + ہوگی اور اگر y میں 60 سے 160 تک ہو تب بھی علامت + ہوگی۔ اس طرح دونوں کا وزن برابر ہوگا جب کہ دونوں سلسلے ایک ہی سمت میں تبدیل ہو رہے ہوں۔

2۔ اس طریقہ سے محصلہ نتائج کوریلیشن کی موجودگی اور غیر موجودگی کا صرف ایک سرسری رجحان دیتے ہیں۔ لیکن قطعی نتیجہ اخذ نہیں کیا جاسکتا۔

2.8 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اسپیرمین درجاتی ہم رشتگی دو متغیرات کے درمیان قوت اور سمت (مثبت / منفی) کی جانچ کاری کا ایک طریقہ ہے۔ اس کی نشاندہی لاطینی زبان کے لفظ (p (rho سے کی جاتی ہے۔ درجاتی ہم رشتگی کا انحصار دو متغیرات کے درمیان درجات کی پیائش پر ہے۔ درجاتی ہم رشتگی درجاتی متغیرات کے درمیان کارل پیرسن کی ہم رشتگی ہے۔ اسپیرمین رینک کوریلیشن کا ضابطہ یوں ہے۔

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)}$$

درجاتی ہم رشتگی میں R_1 اور R_2 میں فرق ہمیشہ صفر کے برابر ہوتا ہے۔ اس لیے تحسیب پر روک فراہم کرتا ہے۔ اسپیرمین رینک کوریلیشن وہی ہے جو رینکس کے درمیان کارل پیرسن کے کوریلیشن کے ضریب کے برابر ہے۔ اس لیے اس کی تشریح بھی کارل پیرسن کے کوریلیشن کے ضریب کی طرح کی جاتی ہے۔ یہ طریقہ دوہرے تعددی جدول میں استعمال نہیں کیا جاسکتا۔ اس طریقہ کا استعمال سہولت بخش طریقہ پر صرف اسی وقت کیا جاسکتا ہے جبکہ "n" چھوٹا ہو ورنہ حساب دہی مشقت طلب ہو جاتی ہے۔

2.9 کلیدی الفاظ (Keywords)

1۔ درجاتی ہم رشتگی Rank Correlation: ترتیب وار متغیرات کے درجات یا یکساں متغیرات یا ایک ہی قسم کے متغیرات کے رینکنگس کے درمیان تعلق کی پیائش درجاتی ہم رشتگی ہے۔

2۔ انحراف کا ضریب Coefficient of Concurrent Deviation: جب ہم کسی دو متغیرات کی مقدار پر سنجیدہ نہ ہوں تب ان کے درمیان ہم رشتگی معلوم کرنے کا سادہ اور موقعتی طریقے کو باہمی انحراف کا ضریب کہتے ہیں۔

2.10 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

معروضی جوابات کے حامل سوالات

1. درجاتی ہم رشتگی کو پیش کرنے والا ماہر شماریات کا نام ________ ہے۔
2. درجاتی ہم رشتگی کا ضابطہ ____________ ہے۔
3. درجاتی ہم رشتگی کو ____________ کے لفظ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔
4. ایک سے زیادہ ایٹمس کی قیمت یکساں ہوں تو ___________ رینکس دیے جاتے ہیں۔
5. یکساں رینک ہونے کی صورت میں ضابطہ ___________ ہے۔
6. درجاتی ہم رشتگی کے تصور کو اسپیر مین نے 1904 میں ترتیب دیا۔ (صحیح / غلط)
7. درجاتی متغیرات کے درمیان کارل پیرسن کی ہم رشتگی ہے۔ (صحیح / غلط)
8. درجاتی ہم رشتگی میں اعلیٰ سے ادنیٰ تک رینکس نہیں دیے جاتے۔ (صحیح / غلط)
9. اگر رینک ایک سے زاید ہو تو کچھ نہیں کیا جاتا۔ (صحیح / غلط)
10. باہمی انحراف کے ضریب میں متغیرات کے بڑھنے، گھٹنے کی سمت دیکھی جاتی ہے۔ (صحیح / غلط)

مختصر جوابات کے حامل سوالات

1. اسپیر مین کے بارے میں لکھیے۔
2. اسپیر مین رینک کوریلیشن کے ضریب کے خدوخال لکھیے۔
3. باہمی انحراف ضریب کیا ہے؟
4. درج ذیل اعداد کے لئے رینک کوریلیشن کی تحسیب کیجئے۔

x:	48	33	40	9	16	16	65	24	16	57
y:	13	13	24	6	13	4	20	9	6	19

5. ہم رشتگی کے مفہوم کو بیان کیجئے۔

طویل جوابات کے حامل سوالات

1. رینک کوریلیشن کیا ہے؟ اس کے فائدے اور نقصانات لکھیے۔
2. باہمی انحراف کا ضریب کیا ہے؟ اس کے فائدے اور نقصانات لکھیے۔

3. اسپیرمین ہم رشتگی کا ضریب دریافت کیجیے۔

تاریخ H	80	78	75	75	68	67	60	59
تاریخ	12	13	14	14	14	16	15	17

4. درجہ ذیل سے اسپیرمین رینک کوریلیشن دریافت کیجیے۔

B:	48	58	72	62	56	45	39	52	25
C:	63	78	65	70	38	54	60	32	28

جواب: $r_s = 0.67$

5. ذیل کے اعداد و شمار سے رینک کوریلیشن تحسیب کیجیے۔

R:	15	20	20	20	50
S:	10	12	60	60	70

جواب: 0.8

6. اسپیرمین ہم رشتگی کا ضریب معلوم کیجیے۔

C:	99	47	68	57	76	61	30	44	82	58
D:	75	63	72	42	71	41	20	64	68	67

جواب: 0.66

اکائی 3۔ تجزیہ مراجعت

Regression Analysis

اکائی کے اجزاء

3.0	تمہید	(Introduction)
3.1	مقاصد	(Objectives)
3.2	تجزیہ مراجعت کا مفہوم، تعریف اور نوعیت	(Meaning, Definition and Nature of Regression)
3.3	مراجعتی تجزیہ کے استعمالات	(Uses of Regression Analysis)
3.4	ہم رشتگی اور تجزیہ مراجعت میں فرق	(Difference Between Correlation and Regression Analysis)
3.5	مراجعت یا ریگریشن کے مطالعہ کے طریقے	(Methods of Studying Regression)
3.6	حسابی اوسط سے انحراف کا طریقہ	(Method of Deviations from Mean)
3.7	اکتسابی نتائج	(Learning Outcomes)
3.8	کلیدی الفاظ	(Keywords)
3.9	نمونہ امتحانی سوالات	(Model Examination Questions)

3.0 تمہید (Introduction)

دو متغیروں کے درمیان اس حقیقت کا انکشاف ہونے کے بعد کہ دونوں میں قریبی تعلق پایا جاتا ہے' ہم اس بات میں دلچسپی رکھیں گے کہ ایک معلوم قیمت دینے کے بعد دوسری نامعلوم قیمت کی پیش بینی کریں۔ مثال کے طور پر اگر ہم جانتے ہیں کہ اشتہار کاری اور فروخت دونوں کوریلیٹیڈ ہیں تب ہم کو دی گئی تشہیر پر خرچ شدہ رقم کی مدد سے فروخت کی رقم معلوم کرسکتے ہیں۔ اسی طرح اگر ہم یہ جانتے ہیں کہ چاول کی پیداوار' بارش دونوں کوریلیٹیڈ ہیں تب ہم معینہ چاول کی پیداوار کے لئے بارش کی مقدار کتنی ہونی چاہئے اس کا اندازہ لگاسکتے ہیں۔ تجزیہ مراجعت دو متغیرات کے درمیان اوسط تعلق کا انکشاف کرتا ہے یہی وہ عنصر ہے جو تخمینہ یا پیش بینی کو ممکن بناتا ہے۔

3.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- تجزیہ مراجعت کی تعریف کرسکیں۔

- تجزیہ ٔمراجعت کے استعمالات سے واقف ہوسکیں۔
- ہم رشتگی اور تجزیہ ٔمراجعت میں فرق کرسکیں۔
- مراجعتی خطوط اور مساوات سے واقف ہوسکیں۔
- تخمینہ کی معیاری خطا کی تحسیب کرسکیں۔
- تجزیہ مراجعت کی خامیوں سے واقف ہوسکیں۔

3.2 تجزیہ ٔمراجعت کا مفہوم، تعریف اور نوعیت (Meaning, Definition and Nature of Regression)

اصطلاح Regression کے معنی ڈکشنری میں "عمل مراجعت" (Act of Returning) واپسی (Going back) کے ہیں۔ اصطلاح Regression کو سب سے پہلے سر فرانسس گالٹن نے 1877 میں باپ اور بیٹوں کے قد کے درمیان تعلق کے مطالعہ کے دوران استعمال کیا۔ اس نے اس لفظ کو اپنے ایک مضمون "Regression towards Mediocrity in Herditary Stature" میں استعمال کیا۔ "قد" کے بارے میں اس کا مطالعہ سے ایک ہزار "باپ اور بیٹوں" سے ایک دلچسپ تعلق کا انکشاف ہوا یعنی لانبے باپ لانبے بیٹے اور پستہ قد باپ کے پستہ قد بیٹے ہوتے ہیں لیکن لانبے قد کے والدین کے گروپ کے بیٹوں کا اوسط قد اپنے والد سے کم نکلا اور پستہ قد والد کے بیٹوں کا قد اپنے والد سے زیادہ تھا۔ وہ خط جو عمل مراجعت کے رجحان یا واپسی کو گالٹن نے "Regression line" کہا ہے۔ یہ اصطلاح آج بھی اس خط کو بیان کرنے کے لئے استعمال کی جاتی ہے جو نقاط کے گروہ کے رواں رجحان کی نمائندگی کے لئے کھینچا گیا ہو لیکن یہ تصور زیادہ دنوں تک باقی نہیں رہا کیونکہ یہ گالٹن کے Stepping back تصور کردہ اصل اثرات کا حامل نہیں تھا۔ ان دنوں جدید مصنفین میں Regression line کے بجائے Estimating line کے استعمال کرنے کے رجحان میں اضافہ ہوا ہے کیونکہ اصطلاح Estimating line اپنے اندر جامعیت رکھتی ہے۔

تعریف:

اصطلاح Regression کا مفہوم اچھی طرح سمجھنے کے بعد اب اس کی تعریف پر ایک اچٹتی ہوئی نظر ڈالیں گے۔ مختلف مصنفین نے اس کی تعریف الگ الگ انداز سے کی ہے۔

1. Taro Yamane کے ریگریشن انالائیسنس کی تعریف ان الفاظ میں کی ہے "دو یا دو سے زیادہ متغیرات کے درمیان موجبانہ تعلق کو دریافت کرنے کے لئے معاشیات اور کاروباری تحقیق میں اکثر استعمال کی جانے والی ٹیکنکس میں سے یہ ایک ہے۔"

2. Ya-Lun Chou کے مطابق Regression Analysis متغیرات کے درمیان تعلقات قائم کرنے کی کوشش ہے جیسے متغیرات کے درمیان تفاعلی تعلق کا مطالعہ ہے اسی وجہ سے پیشن گوئی میکانزم فراہم کرتا ہے۔

مذکورہ بالا تعریفات سے یہ بالکل صاف ہے کہ ریگریشن انالیسیس ایک آلہ ہے جس کی مدد سے ہم معلوم قدر سے دوسری نامعلوم قدر معلوم کرنے کے موقف میں ہوتے ہیں۔ وہ متغیر جس کو نامعلوم متغیر کو پیش بینی کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے اس کو

Explanatory variable یا Independendant variable کہا جاتا ہے اور جس متغیر کو ہم پیش بینی کرنے کی کوشش کر رہے ہیں اس کو Depended variable کو Independendant variable ۔ x کو اور Dependant variable explained variable کہا جاتا ہے۔ y سے تعبیر / موسوم کیا جاتا ہے۔ استعمال کردہ تجزیہ سادہ خطی مراجعتی تجزیہ (Simple linear regression analysis) کہا جاتا ہے۔ یہ سادہ یا آسان اس لئے ہے کہ یہاں صرف ایک ہی پیش گویا آزاد متغیر ہوتا ہے اور خطی (Linear) اس لئے کہ خود منحصر (Depended) اور آزاد متغیرات کے درمیان مفروضہ خطی تعلق ہوتا ہے۔ اصطلاح Linear کا مطلب خط مستقیم کی وہ مساوات ہے جو y=a+bx کو ترتیب دیتی ہے۔ جہاں a اور b اٹل ہیں جن کو دو متغیرات کے درمیان موجود اوسط تعلق کو بیان کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

یہ بات نوٹ کی جائے کہ اصطلاحات Dependent اور Independent دونوں Dependence کے ریاضیاتی اور تفاعلی معنی مفہوم سے متعلق ہیں۔ اس کا مطلب ہر گز یہ نہیں کہ متغیرات کے درمیان کوئی لازمی طور پر وجہ اور اثر کا تعلق ہے اس کا مطلب سادہ طور پر یہ ہے کہ Dependent متغیر y کی قیمتوں کا تخمینہ معلوم کیا جاسکتا ہے بشرطیکہ x Independent variable کی قیمتیں تفاعل ریاضی میں x اور y کو شامل کرکے دی جائیں ایسی صورت میں y کی قیمتوں کا انحصار x کی قیمتوں پر ہوگا۔ چاہے متغیر x ' متغیر y کی تبدیلی باعث ہو یا نہ ہو۔ مثال کے طور پر تشہیر پر خرچ کے اعداد و شمار پر ایک شئے کی فروخت کے تخمینہ کرنے کے دوران فروخت کو عموماً Dependent متغیر کے طور پر لیا جاتا ہے تاہم تشہیر پر خرچ میں تبدیلی کی وجہ سے فروخت میں تبدیلی کے تناظر میں ان دو عناصر میں موقعتی بندش ہو بھی سکتی ہے اور نہیں بھی۔ حقیقت میں بعض صورتوں میں وجہ۔ اثر تعلق بظاہر نظر آنے والے تعلق کے برعکس ہوتا ہے۔ سادہ مراجعتی تجزیہ میں دو متغیرات ہوتے ہیں ایک کو Independent variable یا Regressor یا Predector یا Explanator کہتے ہیں اس متغیر کی قیمتوں کی بنیاد پر دوسرے متغیر کی پیش بینی کی جاتی ہے۔ یہ دوسرا متغیر جس کی قیمتوں کی پیش بینی کی جاتی ہے اس کو Dependent یا Regressed یا Explained متغیر کہا جاتا ہے۔

مراجعت کا مطالعہ صرف دو متغیرات کی حد تک محدود ہو تو اس کو Simple regression اور اگر مراجعتی تجزیہ کا مطالعہ وقت واحد میں دو سے زاید متغیرات پر ہو تو اس کو Multiple regression کہا جاتا ہے۔

3.3 مراجعتی تجزیہ کے استعمالات (Uses of Regression Analysis)

مراجعتی تجزیہ شماریاتی نظریہ کی ایک شاخ ہے جس کا استعمال تمام عصری شعبہ حیات میں زیادہ سے زیادہ استعمال کیا جاتا ہے۔ معاشیات میں معاشی نظریہ اور معاشی زندگی کو ترتیب دینے والے معاشی متغیرات کے درمیان تعلق کی پیمائش کاری یا تخمینہ کاری کے لئے یہ ایک بنیادی ٹیکنک ہے مثال کے طور پر اگر ہم دو متغیرات قیمت x اور طلب y کا ایک دوسرے سے قریبی تعلق ہے تب ہم x کی قیمت دریافت کر سکتے ہیں جب کہ y کی قیمت دی جائے یا y کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں جب کہ x کی قیمت دی جائے۔ ٹھیک اسی طرح اگر ہم ٹیکس اور شئے کی قیمت میں اضافہ کا قریبی تعلق ہو تب ہم ٹیکس کی رقم کو مقدار یا شرح کی مناسبت سے شئے کی متوقع قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔ چنانچہ ریگریشن

کے مطالعہ سے ہمیں پتہ چلتا ہے کہ یہ ماہرین معاشیات اور تاجرین کے لئے کافی مدد گار ہے۔ ریگریشن کے استعمالات صرف ماہرین معاشیات اور تاجرین کے لئے ہی محدود نہیں ہیں بلکہ اس کا اطلاق قدرتی، طبعی اور سماجی سائنس تک ہوتا ہے اس کے فائدے مختصراً ذیل میں دیکھے جاسکتے ہیں۔

1. مراجعتی تجزیہ Dependent متغیر کی تخمینی قیمت Independent متغیر سے فراہم کی جاتی ہے اس تخمینی قیمت کے حصول کے لئے مستعملہ آلہ مراجعتی خط (Regression line) ہے مراجعتی خط x اور y متغیرات کے درمیان موجود وسطی تعلق کو بیان کرتا ہے یعنی یہ y کی دئی گئی قیمتوں کے لئے x کی اوسط قیمتیں نمایاں کرتا ہے۔ اس خط کی مساوات کو مراجعتی مساوات (Regression equation) کہتے ہیں۔ یہ مساوات Dependent متغیر کا تخمینہ فراہم کرتی ہے جب کہ Independent متغیر کو مساوات میں درج کیا جائے۔

2. ریگریشن تجزیہ کا دوسرا استعمال ریگریشن لائین کے بطور اساس استعمال میں در آئیں غلطیوں کا سدباب کرنا۔ اس مقصد کے لئے تخمینہ کی معیاری خطا (Standard error) کی تحسیب کرنا۔

3. ریگریشن کوایفیشینٹس کی مدد سے ہم کوریلیشن کوایفیشینٹ کی تحسیب کرسکتے ہیں کوریلیشن کوایفیشینٹ (r) کا مربع Coefficient of determination کہلاتا ہے۔ یہ دو متغیرات کے درمیان کوریلیشن کے اتحاد کے زاویہ کی پیائش کرتا ہے۔ مراجعتی مساوات کے پیش کردہ Dependent variable کے ویرینس تناسب کا جائزہ لیتی ہے۔ عام طور پر... کی قدر زیادہ ہو تو ارتسام کے لئے بہتر اور Predictive device کے طور پر ریگریشن مساوات اتنی زیادہ بہتر ہو گی۔

3.4 ہم رشتگی اور تجزیۂ مراجعت میں فرق (Difference Between Correlation and Regression Analysis)

کوریلیشن اور ریگریشن تجزیہ دونوں مختلف مفروضات کے تحت ترتیب دئے گئے ہیں۔ یہ مختلف قسم کی معلومات بہم پہنچاتے ہیں لیکن ہمیشہ یہ واضح نہیں ہوتا کہ کونسا پیمانہ دئے گئے حالات کے لئے کب اور کیوں استعمال کیا جائے۔ ان دونوں کے درمیان درج ذیل فرق پایا جاتا ہے۔

1. چونکہ ضریب 'Coefficient' اور 'x' اور 'y' کے درمیان Covariability کے زاویہ کی پیائش ہے ریگریشن تجزیہ کا مقصد متغیرات کے درمیان تعلق کی نوعیت کا مطالعہ ہے تاکہ ہم ایک کی قیمت کی پیشن گوئی دوسری قیمت کی بنیاد پر کرسکیں۔ دو متغیرات کے درمیان جتنا مضبوط تعلق ہوگا اتنا ہی تخمینہ جات پر اعتماد کیا جاسکتا ہے۔

2. کوریلیشن دو متغیرات کے درمیان تعلق کے زاویہ کی دریافت کے لئے صرف ایک آلہ ہے اور اس لئے ہم یہ نہیں کہہ سکتے کہ ایک متغیر وجہ (Cause) اور دوسرا اثر (Effect) ہے۔ مثال کے طور پر ایک مخصوص مدت یا ایک شئے کے لئے قیمت اور طلب کے درمیان کوریلیشن زیادہ ہو تب یہ نہیں کہا جاسکتا کہ قیمت وجہ اور طلب اثر ہے۔ تاہم ریگریشن تجزیہ میں ایک متغیر کو Dependent جب کہ دوسرے کو Independent کے طور پر لیا جاسکتا ہے۔ اس طرح یہاں وجہ اور اثر تعلقات کا مطالعہ ممکن ہے۔ یہاں یہ نوٹ کیا جائے گا کہ اتحاد (Association) کی موجودگی Causation تسبیب کا باعث نہیں لیکن جہاں تسبیب (Causation) ہو وہاں اتحاد لازمی طور پر ہوتا

ہے۔ متغیرات کے درمیان اتحاد کی موجودگی یا غیر موجودگی کا پتہ شماریاتی ثبوت سے لگایا جاسکتا ہے چاہے تسبیب پائی جائے یا نہ پائی جائے۔ اس کا انحصار خالصتاً استدلال (Reasoning) پر ہوتا ہے۔

3. کوریلیشن تجزیہ میں xy سمت کی پیائش اور دو متغیرات x اور y کے درمیان خطی تعلق (Linear relationship) کا زاویہ ہوتا ہے۔ rxy اور ryx متناسب / متشاکل (Symmetric) ہیں۔ ($r_{xy} = r_{yx}$) یعنی x اور y میں کون Dependent متغیر اور کون Independent متغیر ہے کوئی معنی نہیں رکھتا۔ ریگریشن تجزیہ میں ریگریشن ضریب bxy اور byx متناسب Symmetric نہیں ہیں یعنی bxy ≠ byx اور اس لئے یہاں کونسا متغیر Dependent ہے اور کونسا متغیر Independent ہے کافی فرق پڑ جاتا ہے۔

4. کبھی کبھار دو متغیرات کے درمیان بے معنی / مہمل کوریلیشن بھی پایا جاتا ہے جس کا کوئی عملی تعلق نہیں ہوتا۔ جیسے گروپ کی آمدنی میں اضافہ یا وزن میں اضافہ۔ تاہم بے معنی / مہمل ریگریشن نہیں ہوتا۔

5. کوریلیشن کا ضریب پیمانے اور مبدے میں تبدیلی سے آزاد ہوتا ہے۔

ریگریشن اور کوریلیشن تجزیہ میں کچھ مشترکہ ہے تو یہ ہے کہ کوریلیشن کا ضریب (r) اور ریگریشن ضریب (bxy) اور (byx) دونوں کی علامت (r) ایک ہی مشترک ہے۔ اگر دیئے گئے Level of significance پر b کی قدر نمایاں ہو تو اسی سطح پر r بھی نمایاں ہوگا۔

متغیرات میں تعلق خطی (Linear) اور غیر خطی (Non linear) ہو سکتا ہے۔ دو متغیرات میں خطی تعلق اس وقت ہوگا جب کہ Independent variable یعنی x میں ایک اکائی کی تبدیلی ہو تو 'Dependent variable 'y میں بھی اتنی ہی تبدیلی ہوگی۔ جب دو متغیرات میں خطی تعلق ہو تب ریگریشن خطوط کو Dependent variable کی قیمتوں کو دریافت کرنے کے لئے استعمال کیا جاسکتا ہے جب ہم دو متغیرات (x اور y) کو ایک منتشر ڈیاگرام پر مرتسم کرتے ہیں اور دو خطوط کھینچتے ہیں جو مرتسم نقاط سے گذرتے ہیں تو ان خطوط کو Regression lines کہا جاتا ہے۔ Linear Regression میں یہ خط سیدھے ہوتے ہیں یہ خطوط دو مساوات کی بنیاد پر ہوتے ہیں انہیں Regression equations کہتے ہیں۔ یہ مساوات ایک متغیر کی معلوم قیمت سے نامعلوم قیمت کو دریافت کرنے پر صحیح تخمینہ کا باعث ہوتی ہے۔

3.5 مراجعت یا ریگریشن کے مطالعہ کے طریقے (Methods of Studying Regression)

ریگریشن کے مطالعہ کے دو طریقے ہیں:

i) ترسیمی طریقہ (Graphically) ii) الجبریائی طریقہ (Algebraically)

i) ریگریشن کے مطالعہ کے ترسیمی طریقہ (Graphic Study of Regression)

جب ریگریشن کا مطالعہ ترسیمی طریقہ سے کیا جاتا ہے تو ہمیں منتشر ڈیاگرام (Scatter diagram) کھینچنا ہوگا۔ ایک منتشر ڈیاگرام x اور y متغیرات کے ایک جوڑ مقداروں کے لئے ایک پوائنٹ پر مشتمل ہوتا ہے۔ عموماً x متغیر کو افقی پیمانے (Horizontal

اور y متغیر کو عمودی پیمانے (Vertical scale) پر ظاہر کیا جاتا ہے۔ جب تمام متعلقہ قیمتوں / مقداروں کو منتشر ڈیاگرام پر مرتسم کر دیا جاتا ہے تو ہمیں دو ریگریشن خطوط کھینچنے پڑتے ہیں تا کہ متغیرات x اور y کی مقداروں کی پیش گوئی کی جا سکے۔ وہ ریگریشن خط جس کو x کی قیمت / مقدار پر y کی مقداروں کی پیش گوئی کے لئے استعمال کیا جاتا ہے x پر y کا ریگریشن خط (Regression line of y on x) کہلاتا ہے۔ اسی طرح ریگریشن جس کو y کی قیمت / مقدار پر x کی مقداروں کی پیش گوئی کے لئے استعمال کیا جاتا ہے y پر x کا ریگریشن (Regression line of x on y) کہلاتا ہے۔ x اور y کے درمیان کوریلیشن کا ضریب مکمل / کامل ہو یعنی اس کی قیمت 1+ یا 1- ہو تب صرف ایک ریگریشن لائین ہو گی کیونکہ ایسی صورتوں میں دو سلسلوں میں تغیرات ہمیشہ ایک اٹل عدد سے اضافہ یا کم کی صورت میں پائے جاتے ہیں۔

جب ہم Independent variable میں تبدیلیوں کے تناسب Dependent variable میں تبدیلیوں کو ظاہر کر رہے ہوتے ہیں تو سیدھے خطوط کھینچیں گے تب اس کو Linear Regression کہا جاتا ہے۔ تاہم اگر دو متغیرات کے درمیان تعلق خط مستقیم کی طرح نہ ہو بلکہ کوئی دوسرے تفاعلی تعلق ہو جیسے $y = x^2$ ایسی صورت میں متغیرات کے درمیان Non-linear Regression کا ہوتا ہے۔ زیر مطالعہ باب میں ہم صرف Linear Regression کا مطالعہ کر رہے ہیں۔

Linear Regression Lines کو کھینچیں۔ ان خطوط کو یوں کھینچا جا سکتا ہے۔

(a) حسب منشا قوس کا طریقہ (Free hand curve method)

(b) اقل ترین مربعوں کا طریقہ (Method of least squares)

(a) حسب منشا قوس کا طریقہ Free hand Curve Method

اس طریقہ میں ہم x اور y کی قیمتوں کے جوڑوں کو منتشر ڈیاگرام کی شکل میں مرتسم کرتے ہیں۔ قیمتوں کے ایک جوڑ کے لئے ایک پوائنٹ مقرر ہوتا ہے۔ ان خطوط کے مجملہ ایک خط کو کچھ اس انداز سے کھینچا جاتا ہے کہ y سلسلے کے پازیٹیو انحراف جو اس کے اوسط حسابیہ سے لئے جاتے ہیں منفی (Negative) انحراف سے تنسیخ ہو جائے خط کے ایک جانب کے انحرافی اعداد کا مجموعہ دوسری جانب کے انحرافی اعداد کے مجموعے کے برابر / مساوی ہو۔ یہ x پر y کا ریگریشن خط ہو گا۔

دوسری ریگریشن لائین کچھ اس انداز سے کھینچی جائے گی x سلسلے کے پازیٹیو انحرافی اعداد جو اس کے اوسط حسابیہ سے لئے جاتے ہیں منفی (Negative) انحرافی اعداد سے تنسیخ / قطع ہو جائے اس ریگریشن لائین کو y پر x ریگریشن لائین کہا جائے گا۔ یہ دو ریگریشن لائین ایک دوسرے کو اوسط حسابیہ کے نکتہ پر قطع کریں گے۔ دونوں متغیرات کے درمیان کامل پازیٹیو یا نیگیٹیو کوریلیشن ہو تب صرف ایک ہی ریگریشن لائین ہو گی۔

تاہم حسب منشا قوس کے طریقہ سے ریگریشن لائین کھینچنا بہت مشکل ہوتا ہے۔ عموماً منتشر ڈیاگرام میں دھاگہ کے ایک ٹکڑے کو کچھ اس انداز سے مسلسل ایڈجسٹ کیا جاتا ہے کہ پازیٹیو اور نیگیٹو انحرافی اعداد ایک دوسرے کو قطع کریں۔ ایک مرتبہ جب قوسین کھینچ لی

جاتی ہیں تب ہم ریگریشن لائین x پر y کی قیمتوں کی پیش گوئی کی جاسکتی ہے۔اسی طرح x کی قیمتوں کو y پر x ریگریشن لائین سے پیش گوئی کی جاسکتی ہے۔

B) اقل ترین مربع کا طریقہ (Methods of least squares)

حسب منشاء قوس کے طریقہ میں ریگریشن لائین کھینچنے میں حائل دشواریوں سے بچنے کے لئے x اور y سیریز کے حرکات کے درمیان ایک ریاضیاتی تعلق قائم کیا جاتا ہے اور x اور y سلسلوں کے اضافی حرکات کی نمائندگی کے لئے الجبریائی مساوات حاصل کی جاتی ہیں۔ ایسے طریقوں میں ایک طریقہ Method of least squares بھی ہے۔اس طریقہ میں ہم ایک متغیر کی دی گئی قیمتوں کے درمیان انحراف کے مربعوں کے مجموعہ اورلائین آف بیسٹ فٹ کی تخمینی قیمتوں کو کم سے کم کیا جاتا ہے۔x پر y ریگریشن لائین مصرحہ کی قدر ر قیمت کے لئے بہترین تخمینہ دیتی ہے اوراسی طرح y پر x ریگریشن لائین مصرحہ y کی قدر x کے لئے بہترین تخمینہ کا باعث ہے۔

اگر y کی قیمتیں y محور پر مرتسم کی جائیں تب x پر y کی ریگریشن لائین کچھ ایسی ہوگی جو Vertical انحراف کے مربعوں کے مجموعہ کم کرے گی۔اسی طرح اگر x کی قیمتیں x محور پر مرتسم کی جائیں y پر x یگریشن لائین کچھ ایسی ہوگی جو Horizontal انحراف کے مربعوں کے مجموعہ کو کم کرے گی۔

ہم نے میتھڈ آف لیسٹ اسکوائرز پر کوریلیشن کے باب میں مختصر اًبحث کی ہے اور Line of best fit خط مستقیم y=a+bx حاصل ہوگی اور یہ کہ میتھڈ آف لیسٹ اسکوائرز میں اس خط کو درج ذیل حسب معمول مساوات کی مدد سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

اگر x اور y کی قیمتیں مذکورہ بالا مساوات میں درج کی جائیں تو ہمیں a اور b کی قیمتیں حاصل ہوں گی اس کے علاوہ ہمیں x پر y ریگریشن لائین بھی حاصل ہوگی یہاں y Dependent متغیر اور 'x 'Independent' متغیر ہے۔y پر x ریگریشن لائین حاصل کرنے کے لئے ہمیں x کو Dependent متغیر اور y کو Independent متغیر تصور کرنا ہوگا اس طرح ہمیں دو ریگریشن لائینس کے لئے دو مساوات حاصل ہوں گی۔

درج ذیل مثالیں مذکورہ بالا نکات کی توضیح کریں گی۔

تمثیل 1: درج ذیل اعداد و شمار کے لئے ریگریشن لائینس کو مرتسم کیجئے۔

x:	1	2	3	4	5
y:	166	184	142	180	338

خط مستقیم کی مساوات کو حاصل کرنے کے لئے دی گئی قیمتوں کو ہم حسب معمول درج ذیل مساواتوں میں استعمال کریں گے۔

$$\Sigma(y) = na + b(\Sigma x)$$

$$\Sigma(xy) = a\Sigma(x) + b(\Sigma x^2)$$

یہ مساواتیں ہمیں a اور b کی قیمتیں دیں گی ہم خط مستقیم کی مساوات میں درج کریں گے۔

$$y = a + bx$$

یہ ہمیں x پر y ریگریشن لائین دے گی اس سوال میں 100 = a اور 34 = b ہوگی۔ اس طرح مساوات یوں ہوگی:

x	x^2	y	xy	y^2
1	1	166	166	27556
2	4	184	368	33856
3	9	142	246	20164
4	16	180	720	32400
5	25	338	1690	114244
5 - 15	55	1010	3370	228220

$$\Sigma y = na + b(\Sigma x) \quad .... \ (1)$$

$$1010 = 5a + 15b$$

$$202 = a + 3b \quad .... \ (1)$$

$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 \quad .... \ (2)$$

$$3370 = 15a + 55b$$

$$674 = 3a + 11b \quad .... \ (2)$$

مساوات نمبر (1) کو (3) سے ضرب دینے پر

$$3(202) = a + 3b \quad .... \ (1)$$

$$606 = 3a + 96$$

تفریق کرنے پر

$$674 = 3a + 116$$

$$+68 = +2b$$

$$b = \frac{68}{2}$$

$$b = 34$$

b کی قیمت مساوات نمبر (1) میں درج کرنے پر

202 = a + 3 x 34

a = 202 − 202

a = 100

اسی طرح x اور y کا تبادل کرنے پر خط مستقیم کی مساوات ہمیں x اور y کی قیمتیں فراہم کریں گے

x = a + by

اور دو حسب معمول مساواتیں یوں ہوں گی:

$$\Sigma x = na + b(\Sigma y)$$
$$\Sigma(xy) = a\Sigma y + b(\Sigma y^2)$$
ان مساوات کے ساتھ y پر x خط مستقیم کی مساوات
$$\Sigma x = 5a + b1010$$
$$15 = 5a + b1010 \text{ ....(1)}$$
$$3370 = 1010a + b\ 228220 \text{ ....(2)}$$
مساوات نمبر 1 کو 202 سے ضرب دینے پر
$$202(15 = 5a + b\ 1010)$$
$$3030 = 1010a + 204020b \text{ ....(1)}$$
$$\underline{3370 = 1010a + 228220b}$$
$$+340 = +24200b$$
$$b = \frac{340}{24200} = 0.0140$$
b کی قیمت مساوات نمبر 1 میں درج کرنے پر
$$15 = 5a + 0.0140495868 \times 1010$$
$$-5a = 14.190 = 15$$
$$-5a+ = 14.190 = 15$$
$$+5a = +0.8099173$$
$$a = \frac{0.8099173}{5} = 0.162$$
y پر x کی مساوات... x = 0.162 +0.014y

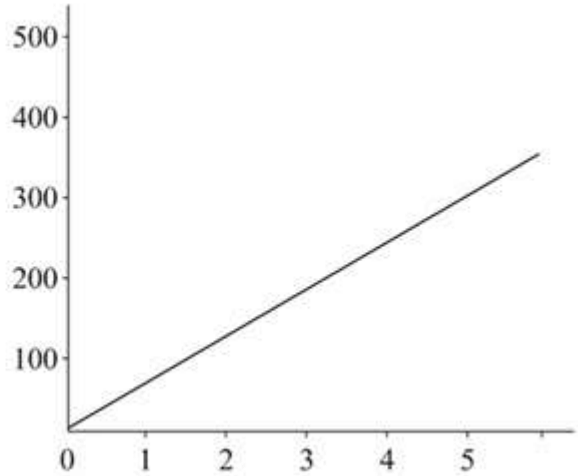
چونکہ 'a' کی قیمت حسب معمول مساوات 0.162 اور 'b' کی 0.014 ہو گی۔

اس طرح خط مستقیم کی مساواتیں یا لائین آف بیسٹ فٹ یوں ہوں گی۔

y = 100 + 34x .... (1)

y = 0.162 + 0.014y .... (2)

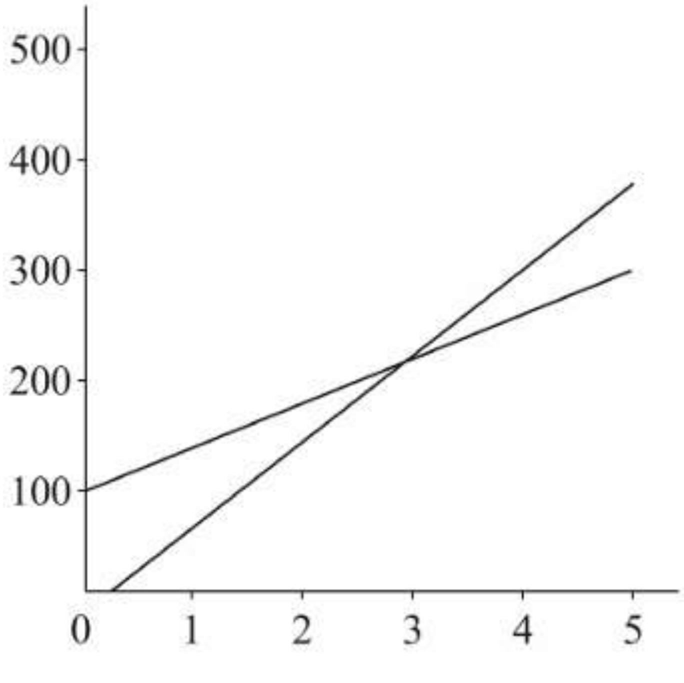
پہلی مساوات سے ہم y کی کوئی دو قیمتیں دریافت کریں گے اور چند x کی قیمتوں کو ترسیمی کاغذ پر y پر x کی ریگریشن لائین حاصل کرنے کے لیے مرتسم کریں گے۔ یہ دو خطوط نکتہ اواسط پر ایک دوسرے کو قطع کرے گے ان خطوط سے درج ذیل ترسیم حاصل ہو گی۔



مذکورہ بالا گراف سے یہ مشاہدہ کیا جاسکتا ہے کہ دو سلسلوں کے اوسط حسابیہ پر دو ریگریشن خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

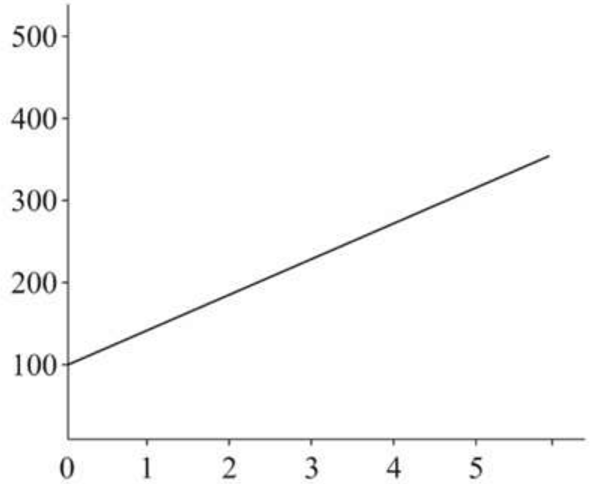
اگر ہم دی گئی x کی قیمت پر y کی کوئی قیمت دریافت کرتے ہیں تب ہم x سلسلہ سے عمودی خط (x کی دی گئی قیمت پر) کھینچیں گے تب x پر y ریگریشن لائین جس نکتہ پر قطع کرے گی وہ نکتہ y کی محسوب کردہ قیمت کی نشاندہی کرے گا جس کو y محور پر پڑھا جاسکے گا۔(x پر y ریگریشن لائین سے x محور پر متوازی خط کو عمودی طور پر اس نکتہ سے کھینچا جائے گا جہاں یہ دونوں ملتے ہوں) تب x = 2 اور 168 'y' ہو گا۔ اسی طرح x سلسلے کی قیمتیں y پر x ریگریشن لائین کو استعمال کرتے ہوئے دریافت کی جاسکتی ہیں۔

جیسا کہ اس سے قبل نشاندہی کی گئی کہ ریگریشن لائین یا لائین آف بیسٹ فٹ وہ ہے جس کو متغیر کی دی گئی قیمتوں اور تخمینی قیمتوں کے درمیان انحرافی مربع کا فرق کم ترین ہو۔ ہماری اس تمثیل میں y سلسلہ عمودی پیمانے پر ہے اس لئے اصل اعداد اور ریگریشن لائین کے درمیان (عمودی پیمانے پر ناپے گئے ہیں) کم ترین ہوں گے۔ x سلسلوں کے لئے افقی پیمانے کے مربعے کم ترین ہوں گے۔ درج ذیل دو گراف اس نکتہ کی وضاحت کریں گے۔



مذکورہ بالا گراف میں x پر y ریگریشن لائین کے ساتھ ساتھ ہم y کے اصل اعداد اور عمود اعداد' اصل اور محسوبہ اعداد کے درمیان انحراف کو ظاہر کرتے ہیں۔ ان انحرافی اعداد کا مجموعہ کم ترین ہو گا جب کہ انحراف ریگریشن لائین کی قیمتوں سے لیا جائے گا۔

درج ذیل گراف بھی y پر x ریگریشن مساوات میں x سلسلے کی قیمتوں اور اصل قیمتوں کے درمیان انحراف کو اسی طرح ظاہر کرتا ہے۔



مذکورہ بالا گراف سے یہ واضح ہے کہ x سلسلوں کے ریگریشن لائین کے انحرافی اعداد کم ترین ہیں اور اسلئے ان کے مربعوں کا مجموعہ بھی کم ترین ہو گا۔ حقیقت میں انحراف کا مجموعہ ہمیشہ صفر ہوتا ہے اس لئے انحرافی اعداد کے مربعے بھی کم ترین ہوتے ہیں۔

ریگریشن لائینس دو ہی کیوں؟

اکثر یہ سوال بہت زیادہ پوچھا جاتا ہے کہ x اور y کی قیمتوں کو حاصل کرنے کے لئے ریگریشن لائینس دو ہی کیوں؟ اور ایک ہی ریگریشن لائین مقصد کی تکمیل کیوں نہیں کرتی؟ جواب نہایت آسان ہے اور وہ یہ ہے کہ جب تک کہ ان کے درمیان پرفیکٹ پازیٹیو یا نیگیٹو کوریلیشن کی نشاندہی نہیں ہو جاتی دونوں x اور y سیریز کے لئے انحرافی اعداد کے مربعوں کا مجموعہ کو کم ترین نہیں کیا جاسکتا۔ پرفیکٹ کوریلیشن کی صورت میں ایک ریگریشن لائین کا ہونا کافی ہوتا ہے کیونکہ x اور y سلسلوں کے ایک ہی قسم کے انحرافی اعداد ہوتے ہیں۔ عموماً سوشیل سائنسس میں شاذ و نادر ہی پرفیکٹ کوریلیشن پایا جاتا ہے۔ اس وجہ سے x سلسلوں کے انحرافی اعداد کے مربعوں کے مجموعہ کو کم ترین کرنے کے لئے ایک ہی لائین کافی ہوتی ہے اور دوسری ریگریشن لائین y سلسلے کے انحرافی اعداد کا لحاظ کرتی ہے مذکورہ بالا کھینچے گئے گراف A اور B سے یہ نکتہ واضح ہو جاتا ہے۔ گراف نے y سلسلوں اور گراف B نے x سلسلوں کے انحرافی اعداد کے مربعوں کو کم ترین کر دیا ہے۔ پہلی صورت انحرافی اعداد کی پیمائش عمودی محور اور دوسرے کو افقی محور پر پیمائش کی جائے گی۔

ریگریشن مساوات (Regression equations) : ریگریشن مساواتیں ریگریشن لائینس کا الجبریائی اظہار ہیں۔ چونکہ دو ریگریشن لائینس ہیں اور دو ریگریشن مساواتیں ہیں۔ y پر x ریگریشن لائین دی گئیں کی y قیمتوں کے لئے x کی ممکنہ حد تک اوسط قیمتیں دیتی ہے اور اسی طرح x پر y ریگریشن لائین دی گئی x کی قیمتوں کے لئے y کی ممکنہ حد تک اوسط قیمتیں دیتی ہے۔ جیسا کہ ریگریشن مساوات y پر

x کو y کی دی گئی تبدیل ہوتی رہی قیمتوں کے لئے x کی قیمتوں میں تغیر کو بیان کرنے کے لئے استعمال ہوگی اور اسی طرح x پر y ریگریشن مساوات x کی دی گئی تبدیل ہوری رہی قیمتوں کے لئے y کی قیمتوں میں تغیر کو بیان کرنے کے لئے استعمال ہوگی۔

x پر y کی ریگریشن مساوات $x = a + by$ اور x پر y کی ریگریشن مساوات $y = a + bx$ ہے۔

یہ خط مستقیم کی مساواتیں ہیں۔ ان مساواتوں میں a اور b کی قیمتیں یکساں ہیں جو ریگریشن لائینس کی جگہ یا مقام کا تعین کریں گی۔ پیرامیٹر a ریگریشن لائین کی سطح کی نشاندہی کرے گا (مبدے کے نیچے یا اوپر کے خط کا فاصلہ)۔ پیرامیٹر b' لائین کے ڈھلان کا تعین کرے گا یعنی y میں فی اکائی تبدیلی کے مقابل x میں تبدیلی یا اس کے برعکس۔

مذکورہ بالا مساوات میں a اور b کی قیمتیں Method of lease squares سے دریافت کی جاسکتی ہیں اس کا حوالہ پہلے دیا جاچکا ہے۔ a اور b کی قیمتیں نیچے دی گئیں سادہ مساوات کی مدد سے معلوم کی جاسکتی ہیں۔

$$\text{(i)}\ \Sigma y = na + b\Sigma x \qquad \text{(ii)}\ \Sigma x = na + b\Sigma y$$

$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 \qquad \Sigma xy = a\Sigma y + b\Sigma y^2$$

ہم ایک تمثیل کے ذریعہ a اور b کی قیمتیں معلوم کرنے کی ٹیکنک معلوم کریں گے اور اس کی مدد سے ریگریشن مساوات بھی حاصل کریں گے۔

تمثیل 2: درج ذیل اعداد و شمار کی مدد سے Method of least squares کو استعمال کرتے ہوئے دو ریگریشن مساوات حاصل کریں گے۔

x:	2	4	6	8	10
y:	5	7	9	8	11

حل:

x	x^2	y	xy	y^2
2	5	10	4	25
4	7	28	16	49
6	9	54	36	81
8	8	64	64	64
10	11	110	100	121
$\sum y=30$	$\sum y=40$	$\sum xy=266$	$\sum y^2=220$	$\sum y^2=340$

Regrassion equation y on x = y = a + bx

a اور b کی قیمتیں معلوم کرنے کے لئے درج ذیل دو مساواتیں استعمال کی جائیں گی۔

$$\sum x = na + b\sum y \quad \text{......} \ (1)$$

$$\sum xy=a\sum x+b\sum x^2 + \quad ...... (2)$$

جدول کی قیمتوں کو مساوات میں درج کرنے پر

$$40 = 5a + 30b \quad ...... (1)$$

$$266 = 30a + 220b \quad ...... (2)$$

مساوات نمبر (1) کو 6 سے ضرب دینے پر

$$240 = 30a + 180b$$

$$\frac{266 = 30a + 220b}{+26 = +40b}$$

$$b = 26 \div 40 = 0.65$$

b کی قیمت کو مساوات نمبر 1 میں درج کرنے پر

$$40 = 5a + 30 \times 0.65$$

$$40 = 5a + 19.5$$

$$-5a = 19.5 - 40$$

$$+a = \frac{20.5}{5}$$

x پر y ریگریشن مساوات میں a اور b کی قیمتیں درج کرنے پر یہ x پر y ریگریشن مساوات ہے

$$y = 4.1 + 0.65x$$

Regression equation y on x = a + by

دو سادہ مساوات ہیں

$$\Sigma x = na + b\Sigma y \quad .... (1)$$

$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 \quad .... (2)$$

ان مساوات میں قیمتیں درج کرنے پر

$$30 = 5a + 40b \quad .... (1)$$

$$266 = 40a + 340b \quad .... (2)$$

مساوات نمبر (1) کو 8 سے ضرب دینے پر

$$240 = 40a + 320b \quad .... (1)$$

$$266 = 40a + 340b \quad .... (2)$$

$$+26 = +20b$$

$$b = \frac{26}{20} = 1.3$$

b کی قیمت کو مساوات نمبر 1 میں درج کرنے پر

$$30 = 5a + 40 \times 1.3 \quad \dots \quad (1)$$

$$30 = 5a + 52$$

$$-5a + 52$$

$$+5a + 52$$

$$a = \frac{-22}{5} = -4.4$$

y پر x ریگریشن مساوات میں a اور b کی قیمت درج کرنے پر

$$x = -4.4 + 1.3y$$

یہ y پر x ریگریشن ہے۔

3.6 حسابی اوسط سے انحراف کا طریقہ (Method of Deviations from Mean)

Method of least squares سے ریگریشن مساوات حاصل کرنے کا طریقہ اکتانے والا اور بہت زیادہ حسابات پر مبنی ہے۔ ریگریشن مساوات کو حاصل کرنے کا آسان طریقہ وہ ہے جس میں x اور y کی حقیقی قیمتیں لینے کے بجائے ان کے حسابی اوسط سے انحراف لیا جائے۔ یہ عمل بہت زیادہ حسابات سے بچائے گا اور وہی رزلٹ حاصل ہوگا جو کہ ہمیں Method of least square سے حاصل ہوتا رہا ہے۔ اس طریقہ کے تحت ریگریشن مساوات کی تحسیب کا ضابطہ / فارمولہ یہ ہے۔

y پر x ریگریشن مساوات ہے۔

$$(x-\bar{x}) = r\frac{\sigma x}{\sigma y} = (y-\bar{y})$$

جہاں $\bar{x}$ ، x سلسلوں کے حقیقی حسابی اوسط کو $\bar{y}$ ، y سلسلوں کے حقیقی حسابی اوسط کو بتاتا ہے۔ r ، x اور y کے درمیان کوریلیشن کے ضریب کو اور σx اور σy ، x اور y سلسلوں کے معیاری انحراف کو بتاتا ہے۔

$r\frac{\sigma x}{\sigma y}$ ، y پر x کا ریگریشن کا ضریب کہلاتا ہے اور اس کی bxy سے نشاندہی کی جاتی ہے۔

اس طرح

$$bxy = r\frac{\sigma x}{\sigma y} = \frac{\Sigma xy}{n\sigma x\sigma y} \times \frac{\Sigma x}{n\sigma x\sigma y} \times \frac{\sigma x}{\sigma y} = \frac{\Sigma xy}{n\sigma y^2}$$

$$= \frac{\Sigma xy}{n \times \frac{\Sigma y^2}{n}} = \frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2}$$

جہاں x اور y حسابی اوسط سے انحراف ہے۔

اس طرح r، σx اور σy کی قیمتوں کو معلوم کرنے کے بجائے ہم راست طور پر bxy کی قیمت x اور y سلسلوں کو ان کے حسابی اوسط سے انحرافی اعداد کے حاصل ضرب کو y سلسلے کے حسابی اوسط سے انحرافی اعداد کے مربعوں کے مجموعہ سے تقسیم کرکے حاصل کرسکتے ہیں۔

x پر y ریگریشن مساوات

$$(y-\bar{y}) = r\frac{\sigma y}{\sigma x}(x-\bar{x})$$

$r\frac{\sigma x}{\sigma y}$ کو x پر کا ریگریشن کا ضریب کہلاتا ہے۔ اس کی قیمت $\frac{\sum xy}{\sum x^2}$ ہے جیسا کہ y پر x ریگریشن مساوات کی صورت میں ثابت کیا گیا تھا۔

اس طرح دو ریگریشن مساوات کی صورت یوں ہو گی۔

i) Regression equation x on y

$$(x-\bar{x}) = \frac{\sum xy}{\sum y^2}(y-\bar{y})$$

ii) Regression equation y on x

$$(y-\bar{y}) = \frac{\sum xy}{\sum x^2}(x-\bar{x})$$

Regression coefficient کی خصوصیات

ریگریشن کے ضریب bxy اور byx کی چند خصوصیات ذیل میں بیان کی گئی ہیں۔

1. bxy اور byx کے جیومٹریائی اوسط کو ریلیشن کے ضریب کی قیمت معلوم کرنے کا باعث ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ $\sqrt{bxy\ x\ byx}$= اس کو یوں ثابت کیا جاسکتا ہے۔

$$bxy = r\frac{\sigma x}{\sigma y} \qquad byx = r\frac{\sigma y}{\sigma x}$$

$$bxy \times byx = r\frac{\sigma x}{\sigma y} \times r\frac{\sigma y}{\sigma x} = r^2$$

$$r = \sqrt{bxy \times byx}$$

2. دونوں ریگریشن کے ضریب کی الجبریائی علامتیں ایک ہی ہوتی ہیں۔ دونوں پازیٹیو ہوں گی یا پھر دونوں نیگیٹو ہوں گی۔

یہ ممکن نہیں کہ ایک کی علامت '+' ہو اور دوسرے کی علامت '-' ہو۔ وجہ یہ ہے کہ اب تک جہاں تک معیاری انحراف کا تعلق ہے یہ ہمیشہ پازیٹیو ہوتے ہیں۔ صرف کوریلیشن کے ضریب پازیٹیو یا نیگیٹیو ہو سکتے ہیں۔ چونکہ $byx = r\frac{\sigma y}{\sigma x}$ اور $bxy = r\frac{\sigma x}{\sigma y}$ اور ان کی الجبریائی علامتوں کا تعین علامت r سے کیا جاتا ہے اگر یہ دونوں پازیٹیوں ہوں تو bxy اور byx بھی پازیٹیو ہوں گے اگر دونوں نیگیٹیو ہوں تو bxy اور byx بھی نیگیٹیو ہوں گے۔

3. bxy اور byx دونوں کی قیمتیں انفرادی طور پر ایک سے زیادہ نہیں ہو سکتیں۔ دونوں میں سے کسی ایک کی قیمت ایک سے زیادہ ہو سکتی ہے لیکن دونوں کی نہیں ہو سکتیں۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ $\sqrt{byx - byx}$ اور اگر دونوں bxy اور byx انفرادی طور پر قیمتیں ایک سے زیادہ ہوں تو کوریلیشن کا ضریب یا r بھی ایک سے زیادہ ہو گا جو کہ ممکن نہیں ہے۔

درج ذیل تمثیل مذکورہ بالا ریگریشن مساواتوں کو حاصل کرنے کے طریقہ کے استعمال کو ظاہر کرے گی۔

تمثیل3: درج ذیل اعداد و شمار کی مدد سے Method of least squares کو استعمال کرتے ہوئے دو ریگریشن مساوات حاصل کریں گے۔

x:	2	4	6	8	10
y:	5	7	9	8	11

حل:

x	$x-\bar{x}$ x	x^2	y	$y-\bar{y}$ y	x^2	xy
2 4 6 8 10	−4 −2 0 +2 +4	16 4 0 4 16	5 7 9 8 11	−3 −1 +1 0 +3	9 1 1 0 9	12 2 0 0 12
Sx 30 Mean 6	Sx 0	Sx^2 40	Sy = 40 Mean 8	Sy 0	Sy 20	Sxy

Regression equation *y* on *x* on *y*

$$x-\bar{x}=r\frac{\sigma y}{\sigma x}(y-\bar{y})$$

$$x-\bar{x}=\frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2}(y-\bar{y})$$

$$x-6=\frac{26}{20}(y-8)$$

$$x-6=1.3(y-8)$$

$$x-6=1.3y-10.4$$

$$x=1.3y-10.4+6$$

$$x=1.3y-4.4$$

Regression equation y on x on y

$$(y-\bar{y}) = r\frac{\sigma y}{\sigma x}(x-\bar{x})$$

$$(y-\bar{y}) = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}(x-\bar{x})$$

$$y-8 = \frac{26}{40}(x-6)$$

$$y-8 = 0.65(x-6)$$

$$y-8 = 0.65x-3.90$$

$$y = 0.65x-3.9+8$$

$$y = 0.65x-4.1$$

یہ مشاہدہ کیا جاسکتا ہے کہ یہ ریگریشن مساوات ویسی ہی ہیں جیسے تمثیل نمبر 2 میں Method of least squares سے حاصل کی گئی تھیں۔

مفروضہ حسابی اوسط سے انحراف Deviations from Assumed Mean

جہاں دو x اور y سلسلوں کا حسابی اوسط اعشاریہ میں ہو ریگریشن مساوات حاصل کرنے کے لئے مذکورہ بالا طریقہ تکلیف دہ / مشقت طلب ہو جاتا ہے ایسی صورت میں انحراف مفروضہ حسابی اوسط سے لیا جائے گا۔ ریگریشن مساوات میں تحسیب کردہ فارمولہ وہی رہے گا تاہم کچھ آسانی ممکن ہے y پر x ریگریشن مساوات یوں ہو گی۔

$$x-\bar{x} = r\frac{\sigma y}{\sigma x}(y-\bar{y})$$

$$bxy \;\; r = r\frac{\sigma x}{\sigma y}\left[\frac{\Sigma dxdy - \frac{(\Sigma dx \times \Sigma dy)}{N}}{\sigma x \;\; \sigma y}\right] \times \frac{\sigma x}{\sigma y}$$

$$bxy = \frac{\Sigma dxdy - \frac{\Sigma dx \times \Sigma dy}{N}}{\sigma y^2}$$

$$bxy = \frac{\Sigma dxdy - \frac{\Sigma dx \times \Sigma dy}{N}}{\Sigma dy^2 - \frac{(\Sigma dy)^2}{N}}$$

اسی طرح x پر y ریگریشن مساوات

$$y-\bar{y} = r\frac{\sigma y}{\sigma x}(x-\bar{x})$$

$$byx \; or \; r\frac{\sigma y}{\sigma x} = \left[\frac{\Sigma dxdy - \frac{(\Sigma dx \times \Sigma dy)}{N}}{\sigma x \times \sigma y}\right] \times \frac{\sigma y}{\sigma x}$$

$$byx = \frac{\Sigma dxdy - \frac{\Sigma dx \times \Sigma dy}{N}}{\sigma x^2}$$

$$byx = \frac{\Sigma dxdy - \frac{\Sigma dx \times \Sigma dy}{N}}{\Sigma dx^2 - \frac{(\Sigma dx)^2}{N}}$$

ایک بار bxy اور byx کی قیمتیں راست (σy اور σx r_1 کی تحسیب کے بغیر) معلوم کر لئے جائیں تب انہیں ریگریشن مساوات کے فارمولے میں درج کیا جاسکتا ہے۔

گروہی اعداد وشمار کی صورت میں دورخی تعددی جدول کو تھوڑا تبدیل کیا جاتا ہے چونکہ کوریلیشن کے ٹیبل میں ہم کو تعددی جاتی ہیں اس لئے ان قیمتوں کو تعدد سے ضرب دیا جاتا ہے۔ دوسری اہم تبدیلی یہ کہ اگر Step deviation لئے گئے ہوں تب y پر x ریگریشن لائین کی صورت میں فارمولے کے ذریعے محصلہ قیمتوں کو $\frac{ix}{iy}$ سے ضرب دیا جائے اور y پر x ریگریشن لائین کی صورت میں $\frac{iy}{ix}$ سے ضرب دیا جائے۔ (ix اور iy اور x سلسلوں کے وقفہ جماعت ہیں) یہ ضروری ہے کیونکہ جب تک کہ کوریلیشن کا ضریب غیر مشابہ نہ ہو ریگریشن کے ضریب پیمانے میں تبدیلی سے متاثر ہوں گے اگرچہ کہ یہ مبداء کی تبدیلی سے متاثر نہیں ہوتے۔

اس طرح گروہی اعداد کی صورت میں

$$bxy \text{ or } r\frac{\sigma x}{\sigma y} = \frac{\Sigma dxdy - \frac{(\Sigma fdx \times \Sigma fdy)}{N}}{\Sigma fdy^2 - \frac{(\Sigma fdy)^2}{N}} \times \frac{ix}{iy}$$

$$byx = r\frac{\sigma y}{\sigma x} = \frac{\Sigma dxdy - \frac{(\Sigma fdx \times \Sigma fdy)}{N}}{\Sigma fdy^2 - \frac{(\Sigma fdy)^2}{N}} \times \frac{iy}{ix}$$

اس کو درج ذیل تمثیل سے سمجھا جاسکتا ہے۔

تمثیل: تمثیل نمبر 2 میں دیئے گئے اعداد وشمار سے x سلسلے سے 5 اور y سلسلے سے 6 کو مفروضہ حسابی اوسط لے کر ریگریشن مساوات ترتیب دیجئے۔

x	Deviation from AM 5 dx	dx²	y	Deviation from AM 6 dy	dy²	dxdy
2	-3	9	5	-1	1	+3
4	-1	1	7	+1	1	1
6	+1	1	9	+3	9	+3
8	+3	9	8	+2	4	+6
10	+5	25	11	+5	25	+25
Sx 30	Sdx 5	Sd² 45	Sy=40	Sdy +10	Sy² 40	Sdxdy +36

$$bxy = \frac{\Sigma dxdy - \frac{\Sigma dx \times \Sigma dy}{N}}{\Sigma dy^2 - \frac{(\Sigma fdy)^2}{N}} = \frac{36 - \frac{5\times 10}{5}}{40 - \frac{(10)^5}{5}} = \frac{26}{20} = +1.3$$

$$byx = \frac{\Sigma dxdy - \frac{\Sigma dx \times \Sigma dy}{N}}{\Sigma dx^2 - \frac{(\Sigma dx)^2}{N}} = \frac{36 - \frac{5\times 10}{5}}{40 - \frac{(5)^2}{5}} = \frac{26}{40} = +0.65$$

bxyاور byxکی قیمتیں وہی ہیں جن کو ہم نے تمثیل نمبر 2اور 3 میں پایا تھا۔

تمثیل 5: نیچے دیئے گئے اعداد و شمار سے Method of least squares سے ریگریشن مساوات کی تحسیب کیجئے۔ دو ریگریشن لائینس کو مرتسم کیجئے اور گراف سے x کی قیمت معلوم کیجئے جب کہ y 110 ہو اور y کی قیمت معلوم کیجئے جب کہ x 23' ہو۔ نتیجہ کی جانچ الجبریائی طریقہ سے کیجئے۔ کوریلیشن کے ضریب کی قیمت بھی معلوم کیجئے۔

x:	10	15	35	40	50
y:	100	30	110	80	120

حل:

x	x^2	y	xy	y^2
10	100	1000	100	10,000
15	90	1350	225	8,100
35	110	3850	1225	12,100
40	80	3200	1600	6,400
50	120	6000	2500	14,400
Sx 150	Sy 500	Sxy 15400	Sx^2 5652	Sy^2 51000

Regression equation y on $x = y = a + by$

Two normal equations are

$\Sigma y = na + b\Sigma x \qquad 150 = 5a + 500b \qquad ....(1)$

$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 \qquad 15400 = 500a + 51000b \; .....(2)$

ہم ایک تمثیل کے ذریعہ a اور b کی قیمتیں معلوم کرنے کی ٹیکنک معلوم کریں گے اور اس کی مدد سے ریگریشن مساوات بھی

مساوات نمبر (1) کو 100 سے ضرب دینے پر

$$15400 = 500a + 50000b \; .....(1)$$

$$15400 = 500a + 51000b \; .....(1)$$

$$+400 = 1000b$$

$$b = +\frac{400}{1000} = 0.4$$

bکی قیمت مساوات نمبر 1 میں درج کرنے پر

$$150 = 5a + 500 \times 0.4$$

$$50 = 5a + 200$$

$$-5a = 200 - 150$$

$$-a = \frac{50}{5}$$

$$a = -10$$

مساوات میں درج کرنے پر

$$x = -10 + 0.4y$$

Regression equation y on $x = y = a + by$

دو حسب معمول مساوات

$$\Sigma y = na + b\Sigma x \qquad 500 = 5a + 150b$$

$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 \qquad 15400 = 150a + 5650b$$

$$500 = 5a + 150b \quad .....(1)$$

$$15400 = 150a + 5650b \quad .....(2)$$

مساوات نمبر(1) کو 30 سے ضرب دینے پر

$$15000 = 150a + 4500b \quad .....(1)$$

$$15400 = 150a + 5650b \quad .....(2)$$

$$+\ 400 = +1150b$$

$$b = \frac{400}{450} = 0.3478 - 0.347826087$$

b کی قیمت مساوات نمبر(1) میں درج کرنے پر

$$500 = 5a + 150b \quad ....(1)$$

$$500 = 5a + 150 \times 0.347826087$$

$$500 = 5a + 52.1739131$$

$$-5a = 52.1739131 - 500$$

$$+5a = +447.826087$$

$$+a = \frac{447.826087}{5} = 89.5652134$$

$$y = 89.5652175 + 0.347826087x$$

اس طرح دو ریگریشن مساوات یوں ہوں گی۔

ان ریگریشن مساوات کو مرتسم کرنے کے لئے ہمیں x کی دو قیمتیں اور کچھ قیمتیں y کی درکار ہیں تا کہ x پر y کی ریگریشن لائین کھینچ سکیں۔ اسی طرح ہمیں y کی دو قیمتیں اور کچھ x کی قیمتیں درکار ہیں تا کہ y پر x کی ریگریشن لائین کھینچ سکیں۔

ہم جانتے ہیں کہ دو ریگریشن لائین x اور y سلسلے کے حسابی اوسط کے نکتہ پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ لہٰذا ہر صورت میں دو نکتوں میں ایک نکتہ سلسلے کی حسابی اوسط قیمت ہو گی۔

Mean x = 30, Mean y = 100

لائینیں کھینچنے کے لئے ہمیں x کی ایک قیمت اور y کی ایک قیمت کی ضرورت ہو گی۔ چلیں x کی قیمت دریافت کرتے ہیں جب کہ y = 70 ہو۔ اس مقصد براری کے لئے ہم y پر x ریگریشن مساوات کا استعمال کریں گے۔ وہ مساوات ہے۔

x = −10 + 0.4y

اگر y کی قیمت 70 ہو تب (x = −10 + (0.4y x 70 = 18)

اس طرح ہمیں x کی دو قیمتیں حاصل ہوئیں جب کہ x = 30 ‘ y = 100 جب کہ y = 70 اور x = 18 ہیں۔

اسی طرح اب ہم y کی قیمت معلوم کریں گے جب کہ x=23 ہو ہم اس مقصد کے لئے x پر y کی ریگریشن مساوات استعمال کریں گے۔

$$y = 89.562174 + 0.3467826087\ x$$

اگر x = 23 ہو تو

$$y = 89.562174 + 0.3467826097 \times 23$$

$$y = 89.562174 + 8 = 97.56$$

اس طرح ہمیں y کی دو قیمتیں حاصل ہوئیں y = 100 جب کہ x = 30' y = 97.56 ، x = 23

ان قیمتوں کے ساتھ ہم دو ریگریشن لائنس کھینچ سکتے ہیں گراف یوں ہو گا۔(صفحہ نمبر 126)

مذکورہ بالا نتائج کی الجبریائی طور پر یوں جانچ کر سکتے ہیں۔

(i) y کی دریافت جب کہ x = 23 ریگریشن مساوات x پر y استعمال کریں۔

$$y = \frac{10{,}300}{115} + \frac{40}{115} \qquad x = 23 \text{ جبکہ}$$

(ii) x کی دریافت جب کہ y = 110 ریگریشن مساوات y پر x استعمال کریں۔ جبکہ y = 10 ہو

$$x = -10 + 0.4y$$

$$= 10 + 0.4 \times 110$$

$$= -10 + 44 = 34$$

الجبریائی مساوات سے گرافی نتائج درست پائے گئے۔

Coefficient of Correlation is $\sqrt{bxy\ x\ byx}$

چونکہ دونوں bxy اور byx پازیٹیو ہیں اس لئے کوریلیشن بھی پازیٹیو ہو گا۔

تمثیل 6: درج ذیل اعداد و شمار سے دو ریگریشن مساوات حاصل کیجئے۔

فروخت	91	97	108	121	67	124	51	73	111	57
خرید	71	75	69	97	70	91	39	61	80	47

Compulation of Regression Euqation

Sales x	Dev. from Mean 90x	x	x^2	Dev. from Mean 70	y^2	xy
91	+1	1	71	+1	1	1
97	+7	49	75	+5	25	35
108	+18	324	69	−1	1	−18
121	+31	961	97	+27	729	+837
67	−23	529	70	0	0	0
124	+34	1156	91	+21	441	714
51	−39	152	39	+21	961	1209
73	−17	289	61	−9	81	153
111	+21	441	80	+10	100	210
57	−33	1089	47	−23	529	759
Sx 900	Sx 0	Sx^2 6360	Sy 700	Sy 0	Sy^2 2868	Sxy 3900

Mean $\bar{x} = \frac{900}{10} = 90$ Mean $\bar{y} = \frac{700}{100} = 70$

$$bxy = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} = \frac{3900}{63900} = 0.6132$$

$$bxy = \frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2} = \frac{3900}{28686} = 1.361$$

Regresrew equation x on $y = x - \bar{x} = bxy\ (y - \bar{y})$

$$= (x - 90) = +1.361(y - 70)$$

$$= (x - 90) = +1.361y - 95.27$$

$$= x = 1.361y - 95.27 + 90$$

$$x = 1.361y - 5.27 \quad .... (1)$$

Regression equation y on x - $(y - \bar{y}) = bxy(x - \bar{x})$

$$(y - 70) = 0.6132(x - 90)$$

$$y - 70 = 0.6132x - 55.188$$

$$y = 0.6132x - 55.188 + 70$$

$$y = 0.6132x + 14.812 \quad .... (2)$$

تمثیل 7: دو ججوں کے ایک پینل C اور D نے ایک خوبصورتی کے مقابلے میں آزادانہ طور پر سات امیدواروں کو درج ذیل نشانات دیئے۔

مظاہرہ:	1	2	3	4	5	6	7
C: کے نشانات	46	42	44	40	43	41	45
D: کے نشانات	40	38	36	35	39	37	41

آٹھویں مظاہرے میں جج D شریک نہ ہوسکے اس لئے جج C نے 37 نشانات دیئے اگر جج D بھی شریک ہوئے ہوتے تو آٹھویں مظاہرے میں ان سے کتنے نشانات کی توقع کی جاسکتی تھی۔

حل: C کی جانب سے دیئے گئے نشانات کی نشاندہی x سے اور جج D کی جانب سے دیئے گئے نشانات y سے کی جائے گی ہمیں y کی قیمت معلوم کرنی پڑے گی جب کہ 37 = x ہو۔ ایسا ریگریشن مساوات x پر y معلوم کرنے پر ہو گا۔

Compulation of Regression Euqation y on x

Sales x	Dev. from Mean 90x	x	y	Dev. from Mean 28 y	y^2	xy
46	+3	9	40	+2	4	+6
42	-1	1	38	0	0	0
44	+1	1	36	-2	4	-2
40	-3	9	35	-3	9	+9
43	0	0	39	+1	1	0
41	-2	4	37	-1	1	+2
45	+2	4	41	+3	9	+6
Sx 301	0	Sx^2 28	Sy 266	0	Sy^2 = 28	Sxy = +21

$$\text{Mean } x \text{ or } \bar{x} = \frac{301}{7} = 43 \quad \text{Mean } y \text{ or } \bar{y} = \frac{266}{7} = 38$$

$$bxy = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} = \frac{+21}{28} = +0.75$$

Regresrew equation x on $y = (y - \bar{y}) = byx\,(x - \bar{x})$

$$y - 38 = 0.75(x - 43)$$

$$y - 38 = 0.75x - 32.25$$

$$y = 0.75x - 32.25 + 38$$

$$y = 0.75x + 5.75$$

اگر x = 37 ہو تو $y = 0.75 \times 37 + 5.75$

$$y = 27.75 + 5.75 = 33.5$$

اس طرح اگر جج D موجود ہوتے تو وہ 33.5 نشانات دیئے ہوتے۔

3.7 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

تجزیہ مراجعت دو متغیرات کے درمیان اوسط تعلق کا انکشاف کرتا ہے۔یہی وہ عنصر ہے جو تخمینہ یا پیش بینی کو ممکن بناتا ہے۔ Chou Ya Lun کے مطابق تجزیہ ٔمراجعت متغیرات کے درمیان تعلقات قایم کرنے کی کوشش ہے، جیسے متغیرات کے درمیان تفاعلی تعلق کا مطالعہ ہے۔اسی وجہ سے پیشن گوئی میکانزم فراہم کرتا ہے۔مراجعتی تجزیہ کے استعمالات میں مراجعتی تجزیہ متغیر کی تخمینی قیمت آزاد متغیر سے فراہم کی جاتی ہے،اور مراجعتی تجزیہ کا دوسرا استعمال مراجعتی خط کے بطور اساس استعمال میں درآئیں غلطیوں کا سدباب کرنا ہے۔ مراجعت کے مطالعہ کے طریقوں میں ترسیمی طریقہ اورالجبرائی طریقہ شامل ہیں۔اقل ترین مربع کا طریقہ یا Method of Least Squared میں ہم ایک متغیر کی دی گئی قیمتوں کے درمیان انحراف کے مربعوں کے مجموعہ اور لائین آف بیسٹ فٹ کی تخمینی قیمتوں کو کم سے کم کیا جاتا ہے۔ریگریشن مساواتیں ریگریشن لائین کا الجبرائی اظہار ہیں، چونکہ دو ریگریشن لائینس ہیں اور دو مراجعتی مساواتیں ہیں۔ مراجعتی مساوات کو حاصل کرنے کا آسان طریقہ وہ ہے جس میں x اور y کی حقیقی قیمتیں لینے کے بجائے ان کے حسابی اوسط سے انحراف لیا جائے۔ یہ عمل بہت زیادہ حسابات سے بچائے گا، اور وہی نتیجہ حاصل ہوگا جو ہمیں Method of Least Squares سے حاصل ہوتا رہا ہے۔مراجعتی مساوات سلسلوں میں اضافی تغیرات کے بارے میں ایک لمحہ ٔفکر دیتی ہے، اور ہمیں اضافی سلسلوں میں تغیر کے بارے میں یکساں مساوی تغیر کے مقابل تبدیلیوں کو ظاہر کرتا ہے۔

3.8 کلیدی الفاظ (Keywords)

1۔ تجزیہ مراجعت (Regression Analysis): دو متغیرات کے درمیان اوسط تعلق کا انکشاف کرتا ہے، یہی وہ عنصر ہے جو تخمینہ یا پیش بینی کو ممکن بناتا ہے۔

2۔ اقل ترین ربعات کا طریقہ (Method of Least Squares): اس طریقہ میں ایک متغیر کی دی گئی قیمتوں کے درمیان انحراف کے مربعوں کے مجموعہ اور لائین آف بیسٹ فٹ کی تخمینی قیمتوں کو کم سے کم کیا جاتا ہے۔

3.9 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

معروضی جوابات کے حامل سوالات

1. ________ متغیروں میں قریبی تعلق پایا جاتا ہے۔ (دو)
2. اصطلاح (Regression) کے معنی ________ ہے۔ (واپسی)
3. ________ نے Regression کو پہلے استعمال کیا۔ (سر فرانسیس گالٹن)
4. مراجعتی تجزیہ ________ کی ایک شاخ ہے۔ (شماریاتی نظریہ)
5. ریگریشن کے مطالعہ کے دو طریقے ایک ترسیمی دوسرا ________ ہے۔ (الجبرائی)

صحیح یا غلط جملوں کی نشاندہی کیجئے۔

1. اصطلاح ریگریشن کو گالٹن نے 1877 میں استعمال کیا۔ (صحیح / غلط)

2. انحراف کا مجموعہ ہمیشہ صفر ہوتا ہے۔ (صحیح / غلط)

3. مراجعتی خطوط الجبریائی اظہار نہیں ہیں۔ (صحیح / غلط)

4. معیاری انحراف ہمیشہ پازیٹیو ہوتا ہے۔ (صحیح / غلط)

5. تخمینی قیمت کے حصولی کے لیے مستعملہ آلہ مراجعتی خط ہے۔ (صحیح / غلط)

مختصر جوابات کے حامل سوالات

1. ریگریشن کے کیا معنی ہیں؟

2. مراجعتی تجزیہ سے کیا مراد ہے؟

3. ترسیمی طریقہ کا کیا مطلب ہے؟

4. الجبریائی طریقہ کیا ہے؟

5. جسب منشاقوس کے طریقہ کے بارے میں کیا جانتے ہو؟

طویل جوابات کے حامل سوالات

1. تجزیہ مراجعت کی تعریف کیجیے اور اس کے استعمالات واضح کیجیے۔

2. کوریلیشن اور ریگریشن تجزیہ کے درمیان فرق کیجیے۔

3. ریگریشن کے مطالعہ کے طریقہ کیا ہیں؟ تفصیل سے بحث کیجیے۔

4. مراجعت کے ضریب کی خصوصیات بیان کیجیے۔

5. ریگریشن مساوات ترتیب دیجیے۔

سال	:	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
انتظمی اخراجات (ہزاروں میں)	Q:	12	13	15	23	24	38	42	48
فروخت (لاکھوں میں)	y:	5.0	5.6	5.8	7.0	7.2	8.8	9.2	9.5

جواب: $y=3.87+0.125x$

.6 ریگریشن مساوات ترتیب دیجیے۔

A:	6	2	10	4	8
B:	9	11	5	8	7

.7 ریگریشن مساوات ترتیب دیجیے۔

M:	15	27	27	30	34	38	46
N:	120	140	150	170	180	200	250

جواب: y on x $y=40.62 + 4.2657\,x$

x on y $k=0.2189\,y-6.8383$

اکائی 4۔ تجزیہ وقتی سلسلہ (حرکتی اوسط)

(Analysis of Time Series-Moving Average)

اکائی کے اجزا

4.0 تمہید (Introduction)

4.1 مقاصد (Objectives)

4.2 وقتی سلسلوں کے تجزیہ کے معنی اور تعریف (Meaning and Definitionof Analysis of Time Series)

4.3 وقتی سلسلوں کی نوعیت اور حدود (Nature and Scope of Time Series)

4.4 وقتی سلسلوں کی افادیت یا اہمیت یا مقاصد (Importance, Objectives & Utility Analysis of Time Series)

4.5 وقتی سلسلوں کے اجزاء (Components of Time Series)

4.8 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

4.9 کلیدی الفاظ (Keywords)

4.10 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

4.0 تمہید (Introduction)

وقتی سلسلے دراصل ایسے سلسلوں سے متعلق ہے جن کا ایک عنصر وقت بھی ہے۔یعنی اگر ہم متواتر ادوار کے لیے تاریخ وار قدروں یا قیمتوں کو ترتیب دیں یہ بھی ایک سلسلہ ہو گا۔ جیسے پیداوار، طلب، رسد، لاگتیں، قیمتیں، قومی آمدنی وغیرہ کا سلسلہ جو دس یا بیس یا زاید برسوں پر مشتمل ہو۔ اسی طرح ہم ہمارے ملک کی آبادی کا سات دہوں کا جائیزہ لیں۔ یہ بھی ایک سلسلہ کی مثال ہو گی۔ ایسی ہی مثالیں دی جاسکتی ہیں۔ ایسے سلسلوں کا تجزیہ وقت سلسلوں کا تجزیہ Analysis of Time Series کہلاتا ہے۔ وقتی سلسلوں کا تجزیہ پیش قیاسی اور ماضی کے مظاہرہ کا جائیزہ لینے کے لیے کیا جاتا ہے۔ تاجر، ماہر شماریات اور ماہر معاشیات، آبادی، قومی آمدنی، اُجرتیں، تنخواہیں اور اشیاء کی قیمتوں وغیرہ کی تخمینہ کاری کے لیے فطرتاً دلچسپی رکھتے ہیں۔ حقیقت میں ماہر معاشیات اور تجّار کی کامیابی اور ناکامی کا انحصار بڑی حد تک درست پیش بینی پر ہوتا ہے۔ مستقبل کے تعلق سے پیش بینی زیر مشاہدہ متغیر کے برتاؤ کے تجزیہ کی بنیاد پر کی جاتی ہے۔ اس طرح کسی شئے کی مستقبل میں طلب یا کسی فرم یا کمپنی کے منافع کے حصول کی پیش بینی گذشتہ برسوں میں کمائے گئے نفع یا طلب کے تجزیہ پر کی جاسکتی ہے۔ لہٰذا کسی ملک کے تمام معاشی مسائل کے مطالعہ کی اہمیت وقتی سلسلوں کے تجزیہ پر ہوتا ہے۔ یہاں یہ بات ذہن نشین کرلیں کہ وقتی سلسلوں

کا تجزیہ صرف تجار، ماہرین معاشیات یا ماہرین شماریات کے لیے ہی فایدہ بخش ہے۔ بلکہ دیگر شعبہ حیات میں بھی کافی اہمیت کا حامل ہے۔ جیسے ماہر سماجیات اگر کسی ملک جرائم اور حادثات سے متعلق صور تحال کا مطالعہ کرنا اور ان کے تدارک کے لیے سفارشات پیش کرنا چاہتا ہو تو اس کے ضروری ہے کہ وہ گذشتہ برسوں میں اس ملک کے امن وضبط اور لا اینڈ آرڈر سے متعلق اعداد وشمار کا جائیزہ لے کر ہی ایسا کر سکتا ہے۔

4.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ

- وقتی سلسلوں کے تجزیہ کے پس منظر معنی و مفہوم کی توضیح کر سکیں۔
- وقتی سلسلوں کی تعریف بیان کر سکیں۔
- وقتی سلسلوں کی افادیت کو واضح کر سکیں۔
- وقتی سلسلوں کے اجزائے ترکیبی کو سمجھا سکیں۔
- وقتی سلسلوں کے تجزیہ کے اقدامات کا خلاصہ کر سکیں۔
- رجحان کی پیائش کے طریقے شمار کر سکیں۔
- رجحان کی پیائش پر سوالات حل کر سکیں۔

4.2 وقتی سلسلوں کے تجزیہ کے معنی اور تعریف

(Meaning and Definitionof Analysis of Time Series)

وقتی سلسلوں کا تجزیہ ایک شماریاتی ٹیکنک ہے جو مختلف ادوار سے متعلق اعداد و شمار یا رجحان کا تجزیہ ہے۔ وقتی سلسلوں میں ایک مخصوص مدت کے اعداد وشمار کا سلسلہ ہوتا ہے۔ اس کا اطلاق اسٹاک مارکٹ کے تجزیہ، زلزلے کی پیش قیاسی، معاشی پیش بینی، مردم شماری وغیرہ بہت زیادہ ہوتا ہے۔ مشاہدات کا یہ سلسلہ جاری رہتا ہے، کبھی تھمتا نہیں۔ مشاہدات کی لگاتار پیائش ہوتی رہتی ہے۔ آج کے عصری دور میں جبکہ دنیا ٹیکنک رُخی ہو گئی ہے۔ یہی وجہ ہے اعداد وشمار کی جمع بندی بھی ٹیکنالوجی کی مدد سے بڑی آسان ہو گئی ہے۔ اگر اس جمع شدہ اعداد وشمار کا تجزیہ کیا جائے تو بیش قیمت نتائج ہاتھ آتے ہیں۔ حالیہ برسوں میں ڈاٹا سائینس اور مشینوں کے ذریعہ اکتساب کا تصور زندگی کے تمام شعبہ جات کا مرکزی رجحان کا مرکز بن چکا ہے۔ پیش بینی کے طریق عمل میں انقلابی تبدیلیاں رونما ہو چکی ہیں۔ شماریاتی ماڈلنگ بھی کم خرچ پر مبنی تشریحی ٹیکنک میں تبدیل ہو چکی ہے۔ وقتی سلسلوں کا تجزیہ کا آغاز خود رجعتی Auto Regression اور حرکتی اوسط Moving Average سے ہوتا ہے۔ اس لیے وقتی سلسلوں کا گہرائی سے مطالعہ آج کے دور میں ضروری ہو گیا ہے۔ یہی وجہ ہے کہ مختلف مفکرین اور مصنفین نے بڑی گہرائی و گیرائی سے جائیزہ لے کر اپنے خیالات کا اظہار کیا ہے۔ ان کو ذیل میں مختصر اور جامع انداز میں پیش کیا جاتا ہے۔

1) Kenny and Keeping کے مطابق "وقت کی بنیاد پر اعداد و شمار کا ایک جوڑ وقتی سلسلہ کہلاتا ہے"۔

2) Croxton and Cowden نے یوں تعریف کی ہے "وقتی سلسلہ تاریخ وارانہ اعداد و شمار کی ترتیب پر مشتمل ہوتا ہے"۔

3) Patterson کے الفاظ میں "وقتی سلسلہ شماریاتی اعداد و شمار پر مشتمل ہوتا ہے جو بغور متواتر افزائش جمع بندی، اندراج کا نتیجہ ہے"۔

4) Maslow نے وقتی سلسلوں کی تعریف یوں کی ہے "وقت سلسلے کو ایک مدت کے دوران ایک مظاہرے میں تبدیلیوں کو ظاہر کرتے ہیں، یعنی تغیرات کی وجہ سے تاریخ وار مقدار میں تبدیلیوں کی شدت"۔

5) Morris Hamburg کے خیال میں "وقتی سلسلے شماریاتی مشاہدات کا تاریخ وار ترتیب کا ایک جوڑ ہے"۔

4.3 وقتی سلسلوں کی نوعیت اور حدود (Nature and Scope of Time Series)

وقتی سلسلوں کے اعداد و شمار کی قدر و خصوصیت ایک جیسی ہونی چاہیے، یعنی اعداد و شمار یکساں ہونے چاہیں۔ ساتھ ہی ساتھ وقتی سلسلوں کی تمام اصطلاحات ایک مظاہر سے متعلق ہونی چاہیے۔ جیسے فی کس آمدنی، قومی آمدنی وغیرہ۔ یہ اعداد و شمار بیس سال، پچیس سال تک درج شدہ حالت میں دستیاب ہونا چاہیے۔ سلسلہ میں شامل مختلف قیمتوں کے درمیان وقفہ مساوی اور یکساں ہو۔ وقتی سلسلے معاشیات اور کاروباری میدان میں زیادہ مددگار ہوتے ہیں، اور ساتھ ساتھ آج کل محققین بھی زیادہ استعمال کر رہے ہیں۔

4.4 وقتی سلسلوں کی افادیت یا اہمیت یا مقاصد

(Importance, Objectives & Utility Analysis of Time Series)

وقتی سلسلوں کی اہمیت، مقاصد اور افادیت درجہ ذیل نکات سے ظاہر ہوتی ہے۔

1۔ پیش قیاسی میں مددگار (Support in Forecasting)

کسی بھی زیر مطالعہ متغیر کے مستقبل میں رویہ کی پیش قیاسی سال گذشتہ کے حالات کے تجزیہ کی بنیاد پر کی جاتی ہے۔ مثال کے طور پر فروخت سے متعلق وقتی سلسلہ کے تجزیہ سے مستقبل میں فروخت کی مقدار کی پیش قیاسی کی جاسکتی ہے۔ یہ اعداد و شمار مستقبل کے لیے لائحہ عمل کی ترتیب میں مددگار ثابت ہوتے ہیں۔ مستحکم معیشت میں منصوبہ کاری کا انحصار زیر مطالعہ مدت کے دوران مختلف متغیرات کے تجزیہ پر ہوتا ہے، تاکہ ملک کی ترقی کی شرح میں اضافہ کیا جاسکے۔

2۔ حصول کامیابی کے جائیزہ میں مددگار (Support in Evaluation of Achievement)

منصوبہ کی ترقی کا جائیزہ اور نظر ثانی وقتی سلسلوں کے اعداد و شمار کی بنیاد پر کی جاتی ہے۔ جیسے پنج سالہ منصوبہ کی ترقی کا فیصلہ خام قومی اشیاء میں سالانہ نشو و نما کی شرح کی روشنی میں کیا جاتا ہے۔ اسی طرح ہمارے ملک میں افراطِ زر اور بڑھتی قیمتوں پر قابو پانے کے طریقۂ

کار کا جائیزہ وقتی سلسلوں کے تجزیہ کی بنیاد پر مختلف اشیاء کی قیمتوں کا مطالعہ کرکے لیا جاتا ہے۔ اس طرح وقتی سلسلے حصول کامیابی میں مددگار ہوتے ہیں۔

3۔ متغیر کے گذشتہ برسوں میں طرزِ عمل کے تجزیہ میں مددگار

(Support in the Analysis of Past Behaviour of a Variable)

کسی زیرِ مشاہدہ متغیر پر مختلف عناصر کے اثرات کا جائیزہ بھی گذشتہ برسوں کے اعدادوشمار کے تجزیہ کے بعد لیا جاسکتا ہے۔ یہ مشاہدات دراصل زیرِ مطالعہ مسئلہ پر مختلف ایک جیسے عناصر کے جوڑ کے اثرات کا تجزیہ کرکے انہیں الگ الگ کرتے ہیں۔ جیسے کسی متغیر پر مختلف موسم کے اثرات کا انکشاف کریں گے اور ٹیکنالوجیائی ترقی یا آبادی میں اضافہ، قومی آمدنی میں تبدیلی کو وقتی سلسلوں کے تجزیہ کے ذریعہ الگ کیا جاسکتا ہے، جبکہ یہ مذکورہ عناصر طویل مدتی ہوتے ہیں۔

4۔ تقابلی مطالعہ میں مددگار (Support in Comparative Studies)

آپ نے وقتی سلسلوں کی تعریف پڑھی ہوگی۔ یہ تاریخ وار اور متواتر ہوتے ہیں۔ جس کی وجہ سے مختلف ادوار اور عناصر کا تقابلی مطالعہ اور تجزیہ بہتر انداز میں کیا جاسکتا ہے۔ وقتی سلسلے تقابل کے لیے عصری بنیاد فراہم کرتے ہیں اور ان اجزاء کے اثرات کو الگ الگ کرتے ہیں۔ اسی بنیاد پر جغرافیائی تقابل بھی کیا جاسکتا ہے۔

4.5 وقتی سلسلوں کے اجزاء (Components of Time Series)

کسی مدت سے متعلق متغیر کی قیمت میں تبدیلیاں کی عناصر کے اثرات کا نتیجہ ہوتی ہے۔ جیسے صارفین کے ذوق میں تبدیلی، عادات میں تبدیلی، پیداواری لاگت میں تبدیلی، قومی آمدنی میں تبدیلی وغیرہ ایک متغیر کی قیمت میں تبدیلی ایسی وقتوں کے آپسی ٹکراؤ کا نتیجہ ہوتی ہے۔ اگر ان قوتوں کی ترکیب میں تبدیلی نہ ہو تو یہ متغیرات کی قدروقیمت میں تبدیلی نہ ہوتی، اگر توازن میں ذرا سا بھی خلل پڑ جائے تو ان کی قیمتوں میں بھی خلل واقع ہوگا، یعنی قدروقیمت میں تبدیلی ہوگی اور پھر توازن میں آجاتے ہیں۔ لیکن حقیقت میں یہ معاملہ اس کے برعکس ہوتا ہے۔ یہ قوتیں توازن میں نہیں ہوتیں بلکہ ان قوتوں کے درمیان مسلسل خلل ہونے پر ایک عرصہ کے بعد متغیرات کی قدروں میں تبدیلی ہوتی ہے۔ ان تبدیلیوں کی شدت کا اندازہ نہیں لگایا جاسکتا۔ ہاں ان کے درمیان تبدیلی کی شدت کا اندازہ اس وقت ہوتا ہے جب ہم متعلقہ متغیرات کی قیمتوں میں تبدیلیوں کا مشاہدہ کرتے ہیں۔ ان قوتوں کے اثرات کی درجہ بندی کی جاسکتی ہے۔ اس زمرہ بندی کو Components of Time Series کہا جاتا ہے۔ ان کی تفصیل درجہ ذیل ہے۔

1۔ طویل مدتی حرکت / سیکولر رجحان — Secular Trend or Long Term Movement (T)

2۔ موسمی تغیرات — Seasonal Variations (S)

3۔ دائری یا چکری تغیرات — Cyclical Variations (C)

4۔ غیر مسلسل تغیرات — Irregular Variations (I)

ایک مظاہر کی قیمت (y) کا کسی وقت مشاہدہ (t) مذکورہ بالا وقتی سلسلوں کے اجزاء کے خالص اثرات ہیں۔ ان اجزاء کی تفصیل ذیل میں دی گئی ہے۔

1۔ سیکولر رجحان / طویل مدتی حرکت (Secular Trend / Long Term Movement)

ایک طویل عرصہ کے دوران وقتی سلسلوں کے اعداد و شمار کے عام رجحان میں کبھی اضافہ، کبھی کمی یا الگ الگ بھی ہو سکتے ہیں۔ اس رجحان کو سیکولر رجحان کہتے ہیں۔ لفظ Secular لاطینی زبان کے لفظ "Speculum" سے اخذ کیا گیا ہے۔ اس کے معنی مہد یا نسل کے ہیں۔ اس طرح سیکولر رجحان کا مطلب کسی مظاہر کا طویل مدتی رجحان ہے۔ سمپسن اور کافکا کے الفاظ میں رجحان کو سیکولر یا طویل مدتی رجحان بھی کہتے ہیں۔ یہ دراصل ایک سلسلہ کا بنیادی رجحان ہے۔ ایک مدت کے دوران رجحان میں اضافہ یا کمی بھی ہو سکتی ہے۔ رجحان کے تصور میں مختصر مدت، اہتزاز شامل نہیں، لیکن ایک طویل مدت کے دوران بتدریج مسلسل حرکت ہے۔

a) سیکولر رجحان اوپر کی طرف یا نیچے کی طرف ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر ہمارے ملک کی آبادی کا اضافی رجحان ہے۔ اسی طرح بچوں کی شرح اموات میں کمی کا رجحان ہے۔ تاہم اس کا ہرگز یہ مطلب نہیں کہ رجحان ہمیشہ اضافی یا کمی کا ہوتا ہے۔ کبھی رجحان اضافی ہو سکتا ہے اور کبھی کمی کا ہو سکتا ہے یا پھر یکساں اور مستحکم ہو سکتا ہے۔ لیکن عمومی طور پر طویل مدت میں رجحان اضافی، کمی اور مستحکم ہو سکتا ہے۔

b) عام طور پر رجحان ایسی قوتوں کا نتیجہ ہوتا ہے جن میں کم و بیش طویل مدت میں بتدریج یا پھر آہستہ تبدیلی عمل میں آتی ہے۔ ان عناصر میں عوام کے ذوق و شوق آبادی اور عادات میں تبدیلیاں، ٹیکنالوجیائی تبدیلیاں، نئے قدرتی وسائل کی دریافت وغیرہ شامل ہیں۔ یہ عناصر بتدریج آہستہ اثر انداز ہوتے ہیں۔

c) اصطلاح طویل مدت ایک اضافی اصطلاح ہے۔ یہ طویل مدت کسی پسِ منظر میں استعمال ہوتی ہے۔ اس کا جواب آسان نہیں ہے۔ لیکن اس جواب کا انحصار زیر مشاہدہ مسئلہ کی نوعیت پر ہوتا ہے، اگر ہم قومی آمدنی، زرعی پیداوار، درآمدات و برآمدات کے چار، پانچ، چھ برس پر مشتمل اعداد و شمار کی ضرورت ہوگی۔ مختصراً ایک عمومی قاعدہ یہ ہے کہ کسی سلسلہ کی مدت طویل ہو تو نتائج بہترین حاصل ہوتے ہیں۔

d) خطی اور غیر خطی رجحانات کا انحصار بھی اعداد و شمار پر ہوتا ہے۔ اگر ہم ان اعداد و شمار کو گراف پر مترسم کریں تو خط سیدھا ہو تو خطی رجحان ہوگا۔ اسی طرح کسی مظاہر کے اعداد و شمار کو مرتسم کرنے پر خط سیدھا نہ ہو تو یہ غیر خطی رجحان ہوگا۔

e) یہ ضروری نہیں کہ وقتی سلسلے ہمیشہ بڑھتے اور گھٹتے رجحان کے حامل ہوں۔ بعض اوقات قیمتوں میں لچک ہو بڑھتے گھٹتے ہوں تو وقت کے گذرنے کے ساتھ اس میں تبدیلی نہیں آتی۔ جیسے درجہ حرارت ہمیشہ تبدیل ہوتا رہتا ہے۔ موسمی حالات ہمیشہ ایک جیسے نہیں رہتے۔ ایسی صورت میں تقابل مشکل ہوتا ہے۔ اس لیے اگر مدت زیادہ ہو تو اعداد و شمار کا ایک سلسلہ ہوتا ہے۔ یہی وجہ ہے کہ ہم دو ادوار پر مبنی سلسلوں کا تقابل آسانی سے کر سکتے ہیں۔ اگر ہم رجحانی قدروں کو مظاہر کی قدروں سے الگ کر دیں تو لچک رہ جاتی ہے۔ جیسے موسمی چکری اور غیر مسلسل۔ اب ہمارے لیے یہ ممکن ہو جاتا ہے کہ ہم مختصر مدتی اس لچک کے سلسلوں کا مشاہدہ کریں۔

2۔ موسمی تغیرات(Seasonal Variations)

موسمی تغیرات وقتی سلسلوں کی ان حرکات سے متعلق ہے جو قوتوں کی وجہ سے جن کی نوعیت متوازن ہم آہنگ اور بالترتیب ہوتی ہے اور ہم موسم میں ایک مدت کے بعد دہرائی جاتی ہیں۔ان کے تغیرات کے درمیان مدت ایک سال سے بھی کم ہوتی ہے۔ان Seasons کی مدت ہفتہ اور ماہوار، سہ ماہی، ششماہی ہو سکتی ہے۔اس کا انحصار مظاہر کی نوعیت پر ہوتی ہے۔یہ ایسے عناصر کا نتیجہ ہوتی ہے جن کی مقدار میں یکساں طور پر یا مسلسل کمی و بیشی ہوتی رہتی ہے۔عام طور پر یہ سلسلہ معاشی اعداد و شمار سے متعلق ہوتا ہے جو تبدیل ہوتے رہتے ہیں۔ جیسے اشیاء کی پیداوار، ان کی قیمتیں، صرف کی مقدار، طلب ورسد کی مقدار وغیرہ۔ان میں تبدیلی موسمی Seasonal ہوتی ہے۔ان تبدیلیوں کو مسلسل اور یکسانیت کے ساتھ دیکھا جاسکتا ہے۔مثال کے طور پر کسی موسم میں پھل یا غذائی اجناس کی پیداوار کاٹی جاتی ہے۔اس موسم میں اس شئے کی قیمتیں کم ہوتی ہیں۔اس کے برخلاف دوسرے موسم میں قیمتیں زیادہ ہوتی ہیں۔ قیمتوں میں، پیداوار میں، طلب اور رسد میں تبدیلی ہمیشہ ہوتی رہتی ہے۔اس کی وجوہات کو ذیل میں دیکھا جاسکتا ہے۔

a) موسمی اثرات جیسے موسمی حالات اور آب و ہوا: یہ عناصر ادواری اور موسمی تغیرات میں بہت بڑا کردار ادا کرتے ہیں۔ جیسے ٹھنڈے مشروبات اور آئیس کریم کی طلب موسم گرما میں بڑھ جاتی ہے۔ موسم برسات میں چھتریوں کی فروخت میں اضافہ ہوتا ہے۔ موسم سرما میں چائے اور گرم ملبوسات کی فروخت میں اضافہ ہوتا ہے۔

b) مقامی رہن سہن: عادات رسم و رواج کا مختلف موسم میں الگ الگ اثر پڑتا ہے۔اسی طرح شادیوں کے سیزن میں عام طور پر سونے کے بھاؤ میں اضافہ ہوجاتا ہے۔ عیدین، رمضان، دیوالی، دسہرہ، کرسمس وغیرہ کے موقع پر کئی اشیاء کی قیمتوں میں اضافہ ہوجاتا ہے۔ سال بہ سال ان کی مقدار طلب و رسد، اشیاء خوردنی وغیرہ کی قیمتوں میں تبدیلی کی پیش قیاسی آسانی سے کی جاسکتی ہے۔ کیونکہ ان عوامل کا اثر مدتی اور مسلسل ہوتا ہے۔

سلسلوں پر مبنی تغیرات کا مشاہدہ و مطالعہ تاجر، صارفین پیدا کنندے، فیصلہ سازی میں مصروف عمل افراد کے لیے مفید ثابت ہوتا ہے۔

3۔ دائیری یا چکری تغیرات(Cyclical Variations)

کسی سلسلے میں چکری تغیرات متوالی تغیرات ہوتے ہیں۔ جن کا دورانیہ ایک سال سے زاید ہوسکتا ہے۔ چکری تغیرات اگرچیکہ مسلسل ہوتے ہیں لیکن ان کے دورانیہ میں یکسانیت نہیں ہوتی۔ ایسا اس لیے ہوتا ہے کہ دورانیہ ہمیشہ یکساں نہیں ہوتا۔ ان تغیرات کا بغور مشاہدہ کیا جائے تو معلوم ہوگا کہ معاشیات اور کاروبار میں چکری تغیرات دراصل کاروباری چکر کا نتیجہ ہوتے ہیں۔کاروباری چکر کا آغاز خوشحالی (Boom) سے ہوتا ہے۔اس کے نیچے کی طرف حرکت کرتا ہے۔ یعنی مراجعت(Recession) کے دور میں آتا ہے۔ مزید نیچے کی طرف حرکت کرنے پر سرد بازاری(Depression) کی طرف آجاتا ہے۔ یوں کاروباری چکر کے چار مراحل ہوتے ہیں۔ خوشحالی، مراجعت، سرد بازاری اور بحالی۔ ان مراحل کو یکساں طور پر دیکھا جاسکتا ہے۔ لیکن دورانیہ مستقل و دایمی نہیں ہوتا۔ماہرین معاشیات کا کہنا ہے کہ بعض اوقات یہ دورانیہ تین سال، چار سال، پانچ سال کبھی سات یا دس سال میں مکمل ہوتا ہے۔

4۔ غیر مسلسل تغیرات(Irregular Variations)

بعض اوقات غیر مسلسل تغیرات مختلف عناصر کی وجہ سے وجود میں آتے ہیں۔ یہ عناصر کبھی کبھار اثرانداز ہوتے ہیں۔ ان کی نوعیت حادثاتی ہوتی ہے۔ جیسے قحط، ہڑتال، تالہ بندی، سیلاب، جنگیں، زلزلے وغیرہ یہ کسی خاص مدت کے دوران وقوع پذیر نہیں ہوتے، بلکہ ہنگامی طور پر سامنے آجاتے ہیں۔ اس لیے انہیں Random Fluctuations یا Chance Fluctuations کہتے ہیں۔ بعض اوقات ان کی شدت اتنی ہوتی ہے کہ چکری لچک میں اضافہ ہوجاتا ہے۔ چونکہ غیر متوالی ہوتے ہیں۔ اس لیے اس نقصانات سے نمٹنے یا تلافی کے بچاؤ اقدامات نہیں کیے جاسکتے۔ ان کے اثرات بھی غیر متوقع اور غیر یقینی ہوتے ہیں۔ لیکن ان کے اثرات کو چکری اور موسمی اثرات سے الگ نہیں کیا جاسکتا۔

وقتی سلسلوں کا تجزیہ(Analysis of Time Series)

وقتی سلسلوں کا تجزیہ دو اہم اقدامات پر مشتمل ہوتا ہے۔ ان کو ذیل میں بیان کیا جاتا ہے۔

1) ان قوتوں کی نشاندہی جن کے تعامل سے وقتی سلسلوں میں تغیرات پیدا ہوتے ہیں۔

2) دیگر عناصر کو برقرار رکھتے ہوئے ان قوتوں کے اثرات کو الگ کرکے تجزیہ اور پیمائش آزادانہ کریں۔

وقتی سلسلوں کے تجزیہ کے لیے ریاضیاتی ماڈلس(Mathematical Models for Analysis of Time Series)

وقتی سلسلوں کے تجزیہ کے لیے کئی ماڈلس ہیں۔ لیکن وقتی سلسلوں سے مختلف اجزاء کے انحلال کے لیے عمومی طور پر دو ماڈلس استعمال کیے جاتے ہیں۔ ان کو ذیل میں بیان کیا جاتا ہے۔

1۔ جمعی ماڈل / پیمانہ(Addition Model)

اس طریقہ کے مطابق وقتی سلسلوں کا انحلال اس مفروضہ پر کیا جاتا ہے کہ مختلف اجزاء کے اثرات کی نوعیت جمعی ہوتی ہے، یعنی

$$y = T + S + C + 1$$

جہاں

y = Time Series

T = Trend

S = Seasonal

C = Cyclical

I = Irregular Variation

اس ماڈل کے مفروضہ کے مطابق وقتی سلسلوں کے چار اجزاء ایک دوسرے سے آزاد ہوتے ہیں۔ کسی ایک عنصر کا باقی تین عناصر پر کوئی اثر نہیں پڑتا۔ یعنی رجحان Trend کا موسمی، چکری، غیر مسلسل تغیر پر اثر نہیں پڑتا۔ اسی طرح یہ بھی فرض کیا جائے کہ موسمی کا

چکری پر اور چکری کا غیر مسلسل تغیر پر کوئی اثر نہیں پڑتا۔ لیکن اس کے برعکس عملی نقطہٗ نظر سے دیکھا جائے تو یہ مفروضہ حقیقت سے بعید ہے۔ یہ عناصر ایکدوسرے پر اثرانداز ہوتے ہیں۔

2۔ ضربی ماڈل (Multiplication Model)

ضربی ماڈل کے مطابق وقتی سلسلوں کا انحلال اس مفروضہ پر کیا جاتا ہے کہ وقتی سلسلوں کے چار اجزاء (T, S, C & I) کے اثرات ایکدوسرے سے الگ نہیں ہوتے۔ حقیقت میں اس ماڈل کا یہ مفروضہ ہے کہ ان کے اثرات باہمی طور پر مربوط ہیں، یعنی

$$y = T \times S \times C \times I$$

C,S اور I اضافی تغیرات ہیں، اور انہیں شرح یا اعشاری اعداد کی صورت میں بتایا جاتا ہے اور یہ عدد ایک سے اوپر اور نیچے قیمت بدلتے رہتے ہیں۔ یہ فرض کیا جاتا ہے کہ C,S اور I کا جیومیٹریائی اوسط ایک ہو گا۔ اس ضربی ماڈل کو Logs کی اصطلاح میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

$$\log y = \log T + \log S + \log C + \log I$$

مذکورہ بالا کا یہ مطلب ہوا کہ دیے گئے وقتی سلسلوں کی قدروں کو logs کی صورت میں ضربی ماڈل جمعی ماڈل ہے۔ کاروبار اور معاشیات میں ضربی ماڈل کو اپناتے ہیں۔ اسی طرح کئی مخلوط ماڈل بھی ہوتے ہیں۔ جیسے

$$y = TCS + I$$

$$y = TC + SI$$

$$y = T + SCI$$

$$y = TS + CI$$

جمعی اور ضربی ماڈل تفریق اور تقسیم کے طریق عمل میں وقتی سلسلوں کے مختلف اجزاء کی قدروں کو حاصل کرنے کے لیے استعمال کرتے ہیں۔ اگر ہمیں رجحانی قدریں معلوم ہوں تو تب جمعی ماڈل کے مطابق

$$y - T = S - C + I$$

ضربی ماڈل میں

$$SxCxI = \frac{y}{T} = \frac{Original\ Value}{Trend\ Values}$$

اگر اعدادوشمار سالانہ ہوں تب اس میں موسمی اتار چڑھاؤ نہ ہوں گے۔

$$y = T \times C \times I$$

یا

$$C \times I = \frac{y}{T}$$

اس طرح وقتی سلسلوں کے تجزیہ کے لیے ہمیں پہلے رجحانی قدریں معلوم کرنا ہو گا۔

تمثیل 1: درجہ ذیل اعداد و شمار کے لیے اختیاری طریقہ سے رجحانی خط مرتسم کیجیے۔

سال	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
آمدنی روپیوں میں	30	40	50	40	55	60	65	60	70	80

2۔ نصف اواسط کا طریقہ (Method of Semi Averages)

اس طریقہ Semi Averages تحسیب کر کے رجحانی قیمتیں معلوم کی جاتی ہیں۔ نصف اوسط کا مطلب سلسلہ کو دو حصوں میں تقسیم کر کے اوسط نکالا جاتا ہے۔ جیسے اگر اعداد و شمار 2011–2020 تک دیے جائیں۔ ہمیں اندازہ ہے کہ یہ اعداد و شمار دس سال پر مشتمل ہیں۔ پہلا نصف 2011–2015 اور دوسرا نصف 2016–2020 ہو گا۔ اوسط کا مطلب حسابی اوسط ہے۔ ان دونوں کا اوسط معلوم کیا جاتا ہے۔ ان اوسط کی دونوں قیمتوں کو ہر نصف کے درمیان میں مرتسم کیا جاتا ہے اور پھر ان دو نقاط کو ایک سیدھی لکیر کے ذریعہ ملا دیا جاتا ہے۔ یہی رجحانی خط ہو گا۔

	پہلا نصف	دوسرا نصف
مدت	2011-2015	2016-2020
نیم/نصف اوسط	$\bar{x}_1 = \frac{y_1+y_2+y_3+y_4+y_5}{5}$	$\bar{x}_2 = \frac{y_6+y_7+y_8+y_9+y_{10}}{5}$
	$\bar{x}_1 = \frac{2011+2012+2013+2014+2015}{5}$	$\bar{x}_2 = \frac{2016+2017+2018+2019+2020}{5}$
	$= \frac{10,065}{5}$	$= \frac{10,090}{5}$
	$= \underline{2013}$	$= \underline{2018}$

تمثیل 2 :نصف / نیم اوسط کو استعمال کرتے ہوئے درجہ ذیل اعداد و شمار سے رجحان کا تعین کیجیے۔

سال	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
نفع	50	47	60	55	40	65	70	65	70	75

اب ترسیمی کاغذ پر 51 کو پہلے پانچ سال کے درمیان میں 50.4 کو اور دوسرے پانچ سال کے درمیان 69 کو مرتسم کیا جائے گا اور ان نقاط کو سیدھی لکیر کے ذریعہ جوڑا جائے گا۔

1۔ نیم اوسط کے طریقہ کے فایدے (Advantages of Semi – Average Method)

نیم اوسط کے طریقہ کے فایدے درجہ ذیل ہیں۔

1) یہ طریقہ نہایت سادہ اور سمجھنے میں آسان ہے۔

2) اس کو پیمائش اقل ترین مربعوں کے طریقہ کے حرکتی اوسط سے تقابل کیا جاسکتا ہے۔

3) اس کا سب سے بڑا فایدہ شخصی فیصلہ پر منحصر نہیں ہوتا۔

4) اس کا اطلاق خطی رجحان یا تقریباً خطی رجحان پر بھی ہوتا ہے۔

2۔ نیم اوسط کے طریقہ کے نقصانات (Disadvantages of Semi – Average Method)

نیم اوسط کے طریقہ کے نقصانات درجہ ذیل ہیں۔

1) یہ طریقہ اس مفروضہ پر ہے کہ خطی رجحان ہوتا ہے، جبکہ یہ صحیح نہیں ہے۔

2) یہ اس وقت موزوں نہیں ہے جبکہ اس کی پیشکشی کا اوسط چھوٹا ہو۔

3) نیم اوسط کے حصول کے لیے اوسط حسابیہ کا استعمال بھی مناسب نہیں، کیونکہ اس کے اسعمال کے نقصانات ہیں۔

3۔ حرکتی اوسط کا طریقہ (Method of Moving Average)

حرکتی اوسط اتار چڑھاؤ کو کم کرنے کا ایک سادہ آلہ ہے۔ ساتھ ہی اس کے نتائج صحیح اور درست ہوتے ہیں۔ اس طریقہ میں حرکتی اوسط کے درمیانی نقطہ کے لیے اوسط نکالا جاتا ہے۔ اس طریقہ کار میں قوس سطح اور ہموار ہوتی ہے اور اتار چڑھاؤ میں بھی کمی کا باعث ہوتی ہے۔ اس طریقہ میں حرکتی اوسط معلوم کرنے کے لیے مدت کے تعلق سے فیصلہ لیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر حرکتی اوسط کے لیے مدت پانچ سال مقرر کی جاتی ہے تب پہلے سال کے ایٹمس کا اوسط نکالا جاتا ہے اور اس کے سامنے لکھ دیا جاتا ہے۔ پھر 2، 3، 4، 5، 6 کے ایٹمس کا اوسط نکال کر اس کے سامنے لکھ دیا جاتا ہے۔ پھر 3، 4، 5، 6، 7 کے ایٹمس کا اوسط نکال کر اس کے سامنے لکھ دیا جاتا ہے۔ اس عمل کو اس وقت تک جاری رکھا جاتا ہے جب تک کہ آخری پانچ ایٹمس شامل نہ ہو جائیں۔ اس کو ایسا بھی بتایا جاسکتا ہے۔

پہلی قدر کا حرکتی اوسط $= \frac{I}{t}(x_1 + x_2 + x_3 \ldots\ldots\ldots\ldots)$

دوسری قدر کا حرکتی اوسط $= \frac{I}{t}(x_2 + x_3 + x_4 \ldots\ldots\ldots\ldots)$

تیسری قدر کا حرکتی اوسط $= \frac{I}{t}(x_3 + x_4 + x_5 \ldots\ldots\ldots\ldots)$

4۔ حرکتی اوسط کے طریقہ کے فایدے (Advantages of Method of Moving Average)

حرکتی اوسط کے طریقہ کے فایدے درجہ ذیل ہیں۔

1) دوسرے طریقوں کے مقابلے میں یہ طریقہ نہایت سادہ اور تحسیب کے لیے آسان ہے۔

2) وقتی سلسلوں کے تجزیہ میں استعمال کیا جاسکتا ہے۔ چاہے وہ رجحانات موسمی ہوں، چکری یا غیر مسلسل اجزا ہوں۔

3) اس کی تحسیب ریاضیاتی تحسیب کی طرح پیچیدہ نہیں ہے۔

3) اس طریقہ میں اوسط کے تعین کے لیے سلسلے کی تمام قیمتوں کو حساب میں لیا جاتا ہے۔

5) یہ ایک معروضی طریقہ ہے، شخصی قیاس اور فیصلوں کی گنجائش نہیں ہوتی۔

5۔ حرکتی اوسط کے طریقہ کے نقصانات (Disadvantages of Method of Moving Average)

حرکتی اوسط کے طریقہ کے نقصانات درجہ ذیل ہیں۔

1) اس طریقہ میں ابتدائی اور اختتامی اعداد کو چھوڑ دینا ہوتا ہے۔

2) اس طریقہ میں چکر یا دیگر حرکات سامنے آسکتے ہیں، جبکہ ان وجود اصل اعداد و شمار میں نہیں ہوتا۔

3) اس طریقہ کے تحت مدت اور متغیرات کی قدر کے درمیان کو تفاعلی تعلق قایم نہیں کیا جاسکتا۔

4) اس طریقہ کے تحت غیر مسلسل تغیرات کا مکمل تعین نہیں کیا جاسکتا۔

تمثیل 3: تین سالہ حرکتی اوسط کے طریقہ سے رجحانی قدریں دریافت کیجیے۔

سال	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
نفع	56	69	73	77	85	92	95

حل:

سال	نفع	تین سالہ حرکتی میزان	تین سالہ حرکتی اوسط	مرکزی قیمت Central Value
2014	56			
2015	69	198	$\frac{198}{3}$=66.0	
2016	73	219	$\frac{219}{3}$=73.0	69.5
2017	77	235	$\frac{235}{3}$378.33	75.5
2018	85	254	$\frac{254}{3}$=84.67	81.5
2019	92	272	$\frac{272}{3}$=90.67	87.67
2020	95			2020

تمثیل 4 : درجہ ذیل اعداد و شمار کے لیے چار سالہ حرکتی اوسط تحسیب کیجیے۔

سال	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
پیداوار (ٹنوں میں)						270	280	285	295	305

حل:

سال	پیداوار	چارسالہ میزان	چارسالہ اوسط
2011	250		
2012	260	250+260+275+235=1120	$\frac{1120}{4}=280.0$
2013	275	260+275+235+255=1025	$\frac{1025}{4}=256.25$
2014	235	275+235+255+270=1035	$\frac{1040}{4}=260.0$
2015	255	235+255+270+280=1040	$\frac{1090}{4}=272.5$
2016	270	255+270+280+285=1090	$\frac{1130}{4}=282.5$
2017	280	270+280+285+295=1130	$\frac{1165}{4}=291.25$
2018	285	280+285+295+305=1165	
2019	295		
2020	305		

4۔ اقل ترین مربعوں کا طریقہ (Least Squares Methods)

رجحانی قدروں کو حاصل کرنے کا سب سے اچھا طریقہ اقل ترین مربعوں کا طریقہ ہے۔ اس طریقہ کو اپنا کر سیدھا رجحانی خط حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ان خطوط کو Line of best Fit کہتے ہیں۔ یہ وہ خط ہے جہاں مختلف نکات سے انحراف کا مجموعہ صفر کے برابر ہوتا ہے۔ یعنی خط ایک جانب مختلف نقاط کا عمودی فاصلہ کی پیائش اور میزان کیا جائے تو حاصل عدد دوسری جانب مختلف نقاط کے فاصلہ کی پیائش اور میزانی کے برابر ہوگا۔ ایسا اس لیے ہوتا ہے کیونکہ ان انحراف کے مربعوں کا مجموعہ دوسرے خطوط کے استعمال سے حاصل انحراف کے مربعوں کے مجموعہ سے کم ہوگا۔ اوسط حسابیہ سے انحراف کا مجموعہ صفر ہوتا ہے اور یہاں لائین آف بیسٹ فِٹ سے انحراف کے مربعوں سے کم ہوتا ہے۔ اسی حقیقی تصور کی بنیاد پر اس طریقہ کو Method of Least Square کہتے ہیں۔

فائدے (Advantages)

اقل ترین مربعوں کے طریقہ کے فایدے درجہ ذیل ہیں۔

1) یہ ایک مقصدی طریقہ ہے جس کے نتائج میں اتار چڑھاؤ نہیں ہوتا۔

2) اس کی تحسیب نہایت آسان ہے۔

3) یہ طریقہ رجحانی قدروں کا تعین کرتا ہے اور موسمی، چکری اور غیر مسلسل تغیرات پر روشنی ڈالنے کا باعث ہے۔

4) چونکہ اس طریقہ میں رجحان کی تحسیب کی بنیاد الجبراء پر ہے، اس لیے یہاں قیاس کے لیے کوئی جگہ نہیں۔

5) یہ ایک لچکدار طریقہ ہے۔ کسی بھی دور کے رجحانی قدریں تحسیب کیجیے جواب بالکل درست ہوتا ہے۔

نقصانات (Disadvantages)

اقل ترین مربعوں کے طریقہ کے نقصانات درجہ ذیل ہیں۔

1) یہ طریقہ مختصر سلسلوں کے لیے موزوں ہے اور ایسے سلسلوں کے لیے غیر ضروری ہے۔

2) مدت / دور (x) اور ایک متغیر (y) کی قیمتوں کے درمیان تفاعلی تعلق قایم نہیں کرتا۔

3) یہ ایک مشقت طلب طریقہ ہے۔ دوسرے طریقوں کی بہ نسبت حسابی عمل زیادہ ہوتا ہے۔

4) یہ صرف مستقبل قریب کی قیمت کا تخمینہ کر سکتا ہے۔ لیکن مستقبل متغائیر کا تخمینہ نہیں کر سکتا۔

'a' اور 'b' کی قدروں کا تخمینہ (Computation of Values of 'a' and 'b')

'a' اور 'b' کی قدروں کو درجہ ذیل دو مساوات کو حل کر کے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\sum y = Na + b\sum x \text{..........1}$$

$$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2 \text{.....2}$$

یہاں 'N' رجحانی قدروں کی مدت ہے اور 'x' وقت کی اکائی ہے۔

اس طرح y کا مطلب حقیقی قدریں ہیں۔ $y_c - na$

مساوات کو بتایا جا سکتا ہے۔

$$y = a + b\,x$$

رجحانی قدروں کے لیے اقل ترین مربعوں کا طریقہ

$$y_c = a + bx$$

$$a = \frac{y}{n}, \quad b = \frac{xy}{x^2}$$

مساوات کی مزید وضاحت اچھی طرح سمجھ لیں۔

$x =$	(انحراف) آزادانہ متغیر
$a =$	y intercept جدارکھنا
$b =$	ڈھلان کی نشاندہی اور 'x' میں تبدیلیوں کو نمایاں کرنا
$n =$	مشاہدہ کی تعداد
$xy =$	x اور y کا حاصل ضرب
$x^2 =$	x کا مربع
$\sum y =$	y کی قدروں کا مجموعہ
$\sum y^2 =$	x کی قدروں کا مربع

تمثیل5: اقل ترین مربعوں کے طریقہ سے رجحانی خطِ مستقیم مرتسم کیجیے۔ اور 2021 میں نفع کی پیش بنی کیجیے۔

سال	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
نفع(روپیوں میں)	80	90	92	83	94	99	92

حل:

رجحانی قدروں کی تخمین

سال	نفع x	x	x^2	xy	رجحانی قدریں Trend Values (y)
2013	80	-3	9	-240	84
2014	90	-2	4	-180	86
2015	92	-1	1	-92	88
2016	83	0	0	0	90
2017	94	+1	1	+94	92
2018	99	+2	4	+198	94
2019	92	+3	9	+276	96
$n = 7$	30	$\sum x = 0$	$\sum x^2$ 28	56	

خطِ مستقیم کی مساوات $y_c = a + bx$

$$a = \frac{\sum y}{n} = \frac{630}{7} = 90, \quad b = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{56}{28} = 2$$

$$y_c = a + bx$$

2013 = 90+2(-3) = 90-6=84

2014 = 90+2(-2) = 90-4=76

2015 = 90+2(-2) = 90-2=88

2016 = 90+2(-1) = 90-0=90

2017 = 90+2(+1) = 90+2=92

2018 = 90+2(+2) = 90+4=94

2019 = 90+2(+3) = 90+6=96

پیش بنی 2021 = 90+2(5) = 90+10=100

4.6 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

وقتی سلسلے دراصل ایسے سلسلوں سے متعلق ہے جن کا ایک عنصر وقت بھی ہے، یعنی اگر ہم متواتر ادوار کے لیے تاریخ وار قدروں یا قیمتوں کو ترتیب دیں تب یہ بھی ایک سلسلہ ہو گا۔ جیسے پیداوار، طلب، رسد، قیمتیں، لاگتیں، قومی آمدنی وغیرہ کا سلسلہ جو دس یا بیس یا زاید

برسوں پر مشتمل ہو۔ اسی طرح ہم ہمارے ملک کی آبادی کا سات دہوں کا جائیزہ لیں۔ یہ بھی ایک سلسلہ کی مثال ہوگی۔ ایسے سلسلوں کا تجزیہ وقتی سلسلوں کا تجزیہ کہلاتا ہے۔

مختلف مصنفین نے وقتی سلسلوں کے تجزیہ کی تعریف کی ہے۔ ان کو ذیل میں دیا گیا ہے۔

Croxton and Cowden کے الفاظ میں ''وقتی سلسلہ تاریخ وارانہ اعداد وشمار کی ترتیب پر مشتمل ہوتا ہے'' اس طرح Kenny and Keeping کے مطابق ''وقت کی بنیاد پر اعداد وشمار کا ایک جوڑ وقتی سلسلہ کہلاتا ہے''۔ سیکولر رجحان، موسمی تغیرات، چکری تغیرات، غیر مسلسل تغیرات وقتی سلسلوں کے اجزاء میں شامل ہیں۔ رجحان کی پیمائش میں اختیاری طریقہ، نصف اواسط کا طریقہ، حرکتی اواسط کا طریقہ اور اقل ترین مربعوں کا طریقہ شامل ہیں۔

4.7 کلیدی الفاظ (Keywords)

1) سلسلہ (Series): ایک مقررہ مدت کے دوران فروخت، نفع، پیداوار، قومی آمدنی، آبادی سے متعلق اعداد وشمار کو سلسلہ کہتے ہیں۔

2) تقابلی مطالعہ (Comparative Study): کسی مخصوص مدت اور رواں مدت کے اعداد وشمار کا مقابلہ کیا جائے تو عمل تقابلی مطالعہ کہلاتا ہے۔

3) موسمی تغیرات (Seasonal Variations): ہر موسم میں ہر شئے کی طلب ورسد مختلف ہوتی ہے۔ اس لیے ان کی فروخت کی مقدار میں بھی تبدیلی ہوتی ہے۔ اس کو موسمی تغیرات کہتے ہیں۔

4) چکری تغیرات (Cyclical Variations): کسی سلسلہ میں چکری تغیر کا مطلب متوالی تغیرات ہیں۔

4.8 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

معروضی جوابات کے حامل سوالات

1) مالیاتی سال ________ مہینے سے شروع ہوتا ہے۔

2) کیلنڈر سال ________ مہینے پر ختم ہوتا ہے۔

3) ________ متوالی تغیرات ہوتے ہیں۔ (چکری تغیرات)

4) غیر مسلسل تغیرات کی مثالیں ________ ہیں۔ (قحط، تالہ بندی، سیلاب، جنگیں)

5) سال کبیسہ میں ________ دن ہوتے ہیں۔ (366)

صحیح اور غلط جملوں کی نشاندہی کیجئے۔

1) آج کی دنیا ٹیکنک رُخی ہے۔ (صحیح / غلط)

2) وقتی سلسلوں کے اعداد وشمار کی خصوصیات یکساں ہونی چاہیے۔ (صحیح / غلط)

3) رجحان کو سیکولر یا طویل مدتی رجحان نہیں کہتے۔ (صحیح / غلط)

4) ہنگامی حالات غیر متوالی ہوتے ہیں۔ (صحیح / غلط)

5) جمعی ماڈل میں اجزا کے اثرات کی نوعیت جمعی نہیں ہوتی۔ (صحیح / غلط)

مختصر جوابات کے حامل سوالات

1) وقتی سلسلوں کا تجزیہ کیا ہے؟

2) وقتی سلسلوں کے تجزیہ کی تعریف کیجیے۔

3) درجہ ذیل پر مختصر نوٹ لکھیے۔

i. سیکولر رجحان ii. موسمی تغیرات iii. چکری تغیرات iv. غیر مسلسل تغیرات

4) جمعی ماڈل کسے کہتے ہیں؟

5) اختیاری طریقہ کیا ہے؟

طویل جوابات کے حامل سوالات

1) وقتی سلسلوں کے تجزیہ کی تعریف کیجیے اور ان کی اہمیت کو واضح کیجیے۔

2) وقتی سلسلوں کے اجزاء کو بیان کیجیے۔

3) ابتدائی تطبیقات کو تفصیل سے بیان کیجیے۔

4) رجحان کی پیمائش کے مختلف طریقوں کو تفصیل سے بیان کیجیے۔

5) درجہ ذیل اعداد و شمار کے رجحان کو اختیاری طریقہ سے گراف کیجیے۔

2019	2018	2017	2016	2015	2014	سال
102	108	105	95	120	100	نفع (روپیوں میں)

6) سادہ نیم اوسط کے طریقہ کے تحت درجہ ذیل اعداد و شمار کے لیے رجحان کا تعین کیجیے۔

2009	2008	2007	2006	2005	2004	2003	2002	2001	سال
25	28	23	12	19	18	20	14	16	پیداوار (ٹنوں میں)

7) نیم اوسط کے طریقہ سے درجہ ذیل اعداد و شمار کے لیے رجحانی خط مرتسم کیجیے۔

2021	2020	2019	2018	2017	2016	سال
200	130	150	140	120	100	فروخت

8) درجہ ذیل اعداد سے تین سالہ حرکتی اواسط (Moving Average) کے طریقہ سے رجحان کا تعین کیجیے۔

سال	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
خرید (ہزاروں میں)	4	12	2	10	6	14	4

9) درجہ ذیل اعداد و شمار کو استعمال کرتے ہوئے تین سالہ حرکتی اواسط کے طریقہ سے رجحان کو مرتسم کیجیے۔

سال	2010	2011	2013	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
نفع	85	80	74	88	90	83	85	80	74	58	70	53

10) درجہ ذیل اعداد و شمار کی مدد سے سیدھا خطی رجحان اقل ترین مربعوں کے طریقہ سے ترتیب دیجیے۔

سال	2015	2016	2017	2018	2019
مدات	45	46	35	46	85

11) اقل ترین مربعوں کے طریقہ سے رجحانی قدروں کی تحسیب کیجیے اور 2012 کے لیے پیداوار کا تخمینہ کیا ہو گا۔

سال	2016	2017	2018	2019	2020
پیداوار (ٹنوں میں)	18	24	28	32	40

12) ذیل میں سالانہ فروخت کی مقدار دی گئی۔

سال	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
فروخت	30	33	40	41	43	44	45

a) اقل ترین مربعوں کے طریقہ سے رجحانی خط مستقیم مرتسم کیجیے۔

b) 2022 کے لیے فروخت کا تخمینہ کیا ہو گا۔

13) درجہ ذیل پیداوار سے متعلق اعداد و شمار کو استعمال کرتے ہوئے اقل ترین مربعوں کے طریقہ سے رجحانی خط مستقیم مرتسم کیجیے اور رجحانی قدروں کی تحسیب کیجیے اور 2022 کے لیے پیداوار کا تخمینہ کیجیے۔

سال	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
پیداوار (ٹنوں میں)	64	60	68	62	66	70	72

اکائی 5۔ اعشاری اعداد

(Index Numbers)

اکائی کے اجزاء

5.0	تمہید	(Introduction)
5.1	مقاصد	(Objectives)
5.2	انڈیکس نمبرز کی تعریف اور مفہوم	(Meaning and Definition of Index Numbers)
5.3	انڈیکس نمبرز کی خصوصیات	(Characteristics of Index Numbers)
5.4	انڈیکس نمبرز (اعشاری اعداد) کے استعمالات	(Uses of Index Numbers)
5.5	انڈیکس نمبرز کی قسمیں	(Types of Index Numbers)
5.6	اعشاری اعداد کی ترتیب میں مسائل	(Problems in the Construction of Index Numbers)
5.7	اکتسابی نتائج	(Learning Outcomes)
5.8	کلیدی الفاظ	(Keywords)
5.9	نمونہ امتحانی سوالات	(Model Examination Questions)

5.0 تمہید (Introduction)

انڈیکس نمبرز عام طور پر مستعمل شماریاتی آلہ ہے جو گروہوں یا گروپس سے متعلق متغیرات میں مشترکہ لچک کی پیمائش کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ بعض مصنفین کی رائے میں اعشاری اعداد کو وقت، جغرافیائی مقام یا دوسری کوئی خصوصیت کی بناء کسی مظاہر Phenomenon کی سطح میں تبدیلی کی پیمائش کا آلہ ہیں۔ انڈیکس نمبرز کا سب سے پہلے استعمال 1764 میں اٹلی کے باشندے Carli نے کیا۔ اس نے اعشاری اعداد کو 1750 کی قیمتوں میں تبدیلی کو 1500 یعنی قیمتوں میں تبدیلی کا تقابل کرنے کے لیے کیا۔ اس طرح یوں کہا جاسکتا ہے کہ ابتداء میں اعشاری اعداد کو قیمتوں کی سطح میں تبدیلی یا زر کی قوت خرید کے مطالعہ کے لیے ڈیزائین کیا گیا۔ آج کوئی ایسا مظہر نہیں جو جہاں اعشاری اعداد استعمال نہ کیا جاتا ہو۔ جہاں کہیں تقابلی مطالعہ کرنا ہو اعشاری اعداد بآسانی دسترس میں ہوتے ہیں۔ حالیہ صورت میں پیداوار، صرف، برآمدات اور درآمدات، کاروبار کی ناکامی اس کے علاوہ دیگر مظاہر کا مطالعہ اعشاری اعداد سے کیا جاتا ہے۔ اعشاری اعداد بار پیما تصور کیے جاتے ہیں جو مظہر کی سطح میں تبدیلی کی پیمائش کرتے ہیں۔ مقداری ٹیکنکس میں ان کی اہمیت کا انکار نہیں کیا جاسکتا۔

5.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ

- اعشاری اعداد کا مفہوم اور تعریف کر سکیں گے۔
- اعشاری اعداد کی خصوصیات بیان کر سکیں گے۔
- اعشاری اعداد کے استعمالات کی توضیح کر سکیں گے۔
- انڈیکس نمبرز کی اقسام بیان کر سکیں گے۔
- انڈیکس نمبرز کی ترتیب پر سوالات حل کر سکیں گے۔
- سوالات کے حل کے لیے موزوں فارمولے کا انتخاب کر سکیں گے۔

5.2 انڈیکس نمبرز کی تعریف اور مفہوم (Meaning and Definition of Index Numbers)

مختلف مصنفین نے انڈیکس نمبرز کی مختلف انداز سے تعریف کی ہے۔ چند اہم تعریفیں ذیل میں دی گئیں ہیں۔

1) Speigal کے مطابق: ”انڈیکس نمبرز ایک شماریاتی پیمائش ہے جو ایک گروہ کے متغیر سے متعلق وقت، جغرافیائی مقامات یا دیگر خصوصیات یا متغیر میں تبدیلیوں کو بتانے کے لیے ترتیب دی گئی ہے“۔

2) A.M. Tuttle کے مطابق: انڈیکس نمبر ایک واحد تناسب / نسبت ہے (عموماً فیصد میں) جو دو مختلف اوقات، مقامات یا حالات کے تحت کئی متغیرات میں مشترکہ (یعنی اوسط) تبدیلی کی پیمائش کرتے ہیں“۔

3) Croxton and Cowden نے یوں تعریف کی ہے کہ: ”انڈیکس نمبر متعلقہ متغیرات کے گروہ کی مقدار میں فرق کی پیمائش کے لیے ایک آلہ ہیں“۔

مذکورہ بالا تعریفوں سے انڈیکس نمبر کی خصوصیات واضح ہوتی ہیں، اور یہ بھی معلوم ہوتا ہے کہ یہ کن اغراض کی تکمیل کرتے ہیں۔ یہ بات صاف ہے کہ انڈیکس نمبرز ایک مقررہ مدت یا جغرافیائی مقامات یا دیگر خصوصیات میں اضافی تبدیلیوں کا مطالعہ کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر اگر ہم یہ کہیں کہ ماہ جنوری 1999 کے مقابل ماہ جنوری 2000 کے لیے ہول سیل قیمتوں کا انڈیکس 112 ہے۔ اس کا مطلب یہ ہو گا کہ سال کے دوران ہول سیل اشیاء قیمتوں میں 12٪ کا اضافہ ہوا ہے۔ کسی ایک سال کے متغیر کو دوسرے برس کے متغیر سے جوڑا جائے یا بنیاد کے طور پر استعمال کیا جائے، اس کو بنیادی مدت (Base Period) کہا جاتا ہے۔ انڈیکس دراصل انڈیکس نمبرز کا آسان کردہ نام ہے جس کو واحد متغیر سے محسوب کیا جاتا ہے۔ اس کو Univariate Index کہتے ہیں۔ جبکہ انڈیکس جو متغیرات کے گروہ سے ترتیب دیا گیا ہے اس کو Composite Index تصور کیا جاتا ہے۔ ہندوستان میں زرعی پیداوار کے انڈیکس نمبرز کمپوزٹ انڈیکس کی ایک اچھی مثال ہو سکتی ہے۔

5.3 انڈیکس نمبرز کی خصوصیات (Characteristics of Index Numbers)

انڈیکس نمبرز کی خصوصیات ذیل میں دی گئیں ہیں۔

1۔ انڈیکس نمبرز وقتی سلسلوں کے مرکزی رجحان کی پیمائش کرتے ہیں۔ ہم پہلے ہی پڑھ چکے ہیں کہ اواسط Averges کو دو یا زاید سلسلوں کا تقابل کرنے کے لیے استعمال کیے جاتے ہیں۔ چونکہ مرکزی رجحانات کی نمائندگی کرتے ہیں، لیکن اواسط کے استعمال میں بہت زیادہ خامیاں پائی جاتی ہیں۔ اواسط کو ان سلسلوں کے تقابل کے لیے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ جن کا اظہار ایک ہی پیمائش کی اکائیوں میں کیا گیا ہو۔ جیسے کلوگرام، لیٹر، روپیے وغیرہ۔ اگر سلسلوں میں مختلف قسم کے مدات پر مشتمل ہوں تو تقابل کے لیے اواسط استعمال نہیں کیے جاسکتے۔ تاہم انڈیکس نمبرز کے آلات ہمیں سلسلوں میں تبدیلیوں کے تقابل میں ہماری مدد کرتے ہیں، جبکہ ان کو مختلف اکائیوں میں ظاہر کیا گیا ہو۔

2۔ انڈیکس نمبرز ان عناصر کا مطالعہ کرتے ہیں جن کی پیمائش راست طور پر نہیں کی جاسکتی۔ شماریاتی سلسلے عموماً مختلف اسباب کی بناء متاثر ہوتے ہیں اور ان اثرات کا الگ الگ مطالعہ آسان نہیں۔ یہی وجہ ہے کہ ایسے عناصر کے اثرات کی راست پیمائش ممکن نہیں ہے۔ جہاں ایک گروہ کے عناصر پر اثرات میں تبدیلیوں کی راست پیمائش مشکل ہو یا جہاں تبدیلیاں / تغیرات راست مقداری مطالعہ کے لائق نہ ہو تب اضافی تغیرات کی پیمائش کی جاتی ہے اور اس طرح عناصر کے اثرات میں تبدیلی کے بارے میں ایک رائے پر پہنچا جاسکتا ہے۔ انڈیکس نمبرز ایسے عناصر / عوامل کے اثرات میں تبدیلیوں کا مطالعہ کرتے ہیں جن کی راست طور پر پیمائش نہیں کی جاسکتی۔ ماہر شماریات باولے کے مطابق "انڈیکس نمبرز کا استعمال راست طور پر مشاہدہ نہ کیے جانے والے عناصر کے اثرات کی پیمائش کے لیے کیا جاتا ہے"۔ مثال کے طور پر ملک میں کاروباری سرگرمیوں میں تبدیلیوں کی راست ذریعہ پیمائش نہیں کی جاسکتی، لیکن ایسے چند ایک عناصر کی قیمتوں میں اضافی تبدیلیوں کا مطالعہ ممکن ہے اور ان کا راست مطالعہ کیا جاسکتا ہے۔

3۔ انڈیکس نمبرز کے گروہی مدات کی مشترکہ خصوصیات کو ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ ہم ایسے عوامل کے اثرات میں تبدیلیوں کا مطالعہ اس لیے کرتے ہیں کیونکہ واقعات مختلف ہوتے ہیں۔ لیکن ان کے اثرات میں کہیں نہ کہیں یکسانیت ہوتی ہے۔ اسی یکسانیت کی وجہ سے ہم عمومی طور پر مطالعہ کی کوشش کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر ملک میں عام قیمتوں کی سطح میں تبدیلیوں کی راست پیمائش نہیں کی جاسکتی، لیکن مختلف اشیاء کی قیمتوں کی سطح میں تبدیلیوں میں یکسانیت کی وجہ سے ہم ایک نتیجہ پر پہنچ سکتے ہیں کہ مختلف اشیاء کی قیمتوں کی سطح میں تبدیلیاں واقع ہوئی ہیں۔ بشرطیکہ ہم مختلف اشیاء کی قیمتوں میں تبدیلیوں کا مطالعہ کریں۔ ہم یہ فرض کرسکتے ہیں کہ عمومی قیمتوں کی کوئی سطح نہیں ہوتی، اس لیے اس کی راست پیمائش کا سوال ہی پیدا نہیں ہوتا۔ عمومی قیمتوں کی سطح ایک فرضی تصور ہے اور یہ کئی وجوہات کی بناء متاثر ہوتا ہے جن کے قطعی اثرات کی درست پیمائش نہیں کی جاسکتی۔ ایسی صورت میں ہم مختلف اشیاء کی قیمتوں کی سطح میں اضافی تبدیلیوں کی پیمائش کرسکتے ہیں اور زیر تحقیق مسئلہ کے بارے میں ایک نتیجہ پر پہنچا جاسکتا ہے۔ یہ دشواری صرف عمومی قیمتوں کی سطح کی پیمائش کی حد تک محدود نہیں ہے۔ دیگر شعبہ جات میں بھی جیسے معیار زندگی اور صنعتی سرگرمی وغیرہ میں بھی ایسی ہی مشکلات پیش آتی ہیں۔ ان کی بھی راست

مقداری پیائش نہیں کی جاسکتی۔ ہم صرف ان عوامل سے جڑے اضافی تبدیلیوں کا مطالعہ کرسکتے ہیں جہاں دیگر عناصر میں تغیرات کا مطالعہ کیا جاسکتا ہو۔

4۔ مذکورہ بالا تبدیلیاں وقت یا مقام سے متعلق ہوتی ہیں۔ مثال کے طور پر چند افراد کے گروہ کی معیار زندگی کسی دو ادوار میں الگ الگ ہو سکتا ہے یا وقت واحد میں دو مختلف مقامات پر معیار زندگی مختلف ہو سکتا ہے۔ دونوں قسم کی تبدیلیوں کی پیائش کے لیے انڈیکس نمبرز کی ٹیکنک کو بروئے کار لایا جاسکتا ہے۔ یہ بات نوٹ کی جاسکتی ہے کہ انڈیکس نمبرز کسی مظاہرہ کی صرف قیمتوں میں اضافی تبدیلیوں کی پیائش کرتے ہیں۔

5.4 انڈیکس نمبرز (اعشاری اعداد) کے استعمالات (Uses of Index Numbers)

انڈیکس نمبرز کے استعمالات کو ذیل میں دیکھا جاسکتا ہے۔

1۔ رجحانات کے مطالعہ میں مددگار

انڈیکس نمبرز ایک مدت کے دوران پھیلے ہوئے سلسلوں کے رجحانات کا مطالعہ کرنے میں بڑے مددگار ہیں۔ انڈیکس نمبرز کی مدد سے برآمدات، درآمدات، ادائیات کا توازن، صنعتی پیداوار، قیمتیں، قومی آمدنی اور دیگر کئی مظاہر کے رجحانات کو معلوم کرنا نہایت آسان ہے۔ اوسط تبدیلی کی پیائش کے طور پر انڈیکس نمبرز مستقبل کے رجحانات کی پیش بینی میں نہایت مفید ہے۔ قیمتوں، طلب اُجرتیں، آمدنی وغیرہ کے انڈیکس نمبرز کی مدد سے کاروباری عہدہ دار فیصلہ سازی کے بہترین موقف اختیار کرنے میں مدد کرتے ہیں کہ نئے بازار کی دریافت یا جہاں پروڈکشن پالیسیوں کے اختیار کرنے اور مروجہ پیداواری، قیمت کاری فیصلوں میں کچھ تبدیلیاں لانے کی ضرورت ہے یا نہیں۔

2۔ پالیسی کی تدوین میں مددگار

جیسا کہ گذشتہ پیراگراف میں ہم نے دیکھا کہ انڈیکس نمبرز مختلف مظاہر کے رجحانات کے مطالعہ میں مدد کرتے ہیں اور یہی رجحانات پالیسی فیصلوں کی بنیاد بنتے ہیں۔ مثال کے طور پر کاسٹ آف لیونگ انڈیکس نمبرز اور کنزیومر پرائیس انڈیکس نمبرز کو حکومت مختلف سرکاری ملازمین کے مہنگائی بھتہ کی شرحوں کے فیصلہ سازی میں بہت زیادہ استعمال کرتی ہے۔ اسی طرح صرف کی فہرستیں حکومت کو ایکسائیز ڈیوٹیز کے بارے میں فیصلہ لینے میں مددگار ہے۔ رسد اور زر کی قوتِ خرید کے انڈیکس نمبرز اور دیگر متعلقہ فہرستوں کے ساتھ کاروباری عہدہ دار کسی شئے کی طلب کی پیش بینی اور مستقبل کے منصوبوں اور پالیسیوں کی تدوین کے لیے استعمال کرتے ہیں۔ حقیقت میں جہاں کہیں مستقبل کے لیے ماضی کے اعداد و شمار اور معلومات مستقبل کے منصوبوں کے لیے ضرورت ہو انڈیکس نمبرز کا استعمال لازمی ہو جاتا ہے اور اس مقصد کے لیے نہایت آسان ذریعہ بھی ہے۔

نہ صرف کاروبار کے میدان میں بلکہ معاشی میدان میں بھی انڈیکس نمبرز کو پالیسی کی تدوین کے لیے انڈیکس نمبرز کو بنیاد کے طور پر استعمال کیا جاتا ہے۔ اسی طرح سماجیات اور نفسیات میں بھی اس کا بہت زیادہ استعمال کیا جاتا ہے۔ ماہر سماجیات انڈیکس نمبرز کی مدد سے آبادی میں تبدیلیوں کا مطالعہ کرکے مستقبل کے لیے موزوں پالیسیوں کی سفارش کرتے ہیں۔ ماہر نفسیات آبادی کی ذہانت کی سطح یا تعلیمی

تحصیل وغیرہ کی سطح کا بھی مدون کردہ سوالناموں کے ذریعہ مطالعہ کرتے ہیں۔

3۔ زر کی قوت خرید کی پیمائش میں مدد گار

انڈیکس نمبرز زر کی باطنی قوت اور علامتی قوت کو معلوم کرنے میں مدد گار ہیں۔ اکثر یہ بیانات پڑھنے کو ملتے ہیں کہ ہندوستانی روپیہ کی قوت خرید میں کمی آئی ہے یا اضافہ ہوا ہے۔ اس کی بنیاد پر حکومت اُجرت سے متعلق پالیسیوں کا تعین کرتی ہے۔ اس سلسلے میں انڈیکس نمبرز نہایت کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔

4۔ مختلف قیمتوں کو اصل قیمت پر بدلنے میں مدد گار

انڈیکس نمبرز مستحکم قیمتوں کی بنیاد پر قومی آمدنی کو برابر کرنے میں یعنی افراطِ زر میں کمی لانے میں کافی مدد گار ہیں۔ یہ عمل ہمیں عوام کی حقیقی آمدنی میں کسی تبدیلی کو معلوم کرنے میں مدد کرتا ہے۔ مروجہ قیمتوں پر قومی آمدنی کے اعداد ہمیشہ عوام کی آمدنی کی سطح کے تعلق سے گمراہ کن معلومات دیتے ہیں جب تک کہ ان قیمتوں کو کم نہ کیا جائے افراطِ زر اور تفریط زر پالیسیوں کو سمجھا نہیں جاسکتا۔ اسی طرح برائے نام فروخت کی بھی کم کرکے حقیقی فروخت اور برائے نام اُجرتوں کو کم کرکے حقیقی اُجرتوں کے بارے میں ایک حقیقی تصور دیا جاسکتا ہے۔

5۔ معاشی بادپیا کے طور پر کام کرتا ہے

اگر ہم انڈیکس نمبرز کے مذکورہ بالا استعمالات کو ذہن میں رکھتے ہیں تب ہم ایک ناگزیر نتیجہ پر پہنچیں گے کہ انڈیکس نمبرز ملک کی معیشت کی رفتار کی پیمائش کرتے ہیں اور یہ معیشت کی عام صورتحال کے نشیب و فراز کو معلوم کرنے کے لیے ایک بادپیا کے طور پر کام کرتے ہیں۔ قیمتوں، پیداوار، بیرونی زرمبادلہ، ذخائیر / محفوظات، بنک ڈپازٹس وغیرہ کی فہرستیں ملک کی کاروباری سرگرمیوں کی سطح میں تغیرات و تبدیلیوں پر روشنی ڈالتے ہیں۔ اور ان فہرستوں کو Combine کرکے Composite Index میں تبدیل کیا جاسکتا ہے، جو بادپیا کے طور پر کام کیا جاتا ہوگا۔ جیسا کہ بادپیا ماحولیاتی دباؤ کی پیمائش کرتا ہے اسی طرح انڈیکس نمبرز بھی معاشی دباؤ کی پیمائش کرتے ہیں اور ملک کی معیشت میں کاروباری رویہ کی بھی پیمائش کرتے ہیں۔ یہی وجہ ہے کہ انڈیکس نمبرز کو معاشی بادپیا کہا جاتا ہے۔

5.5 انڈیکس نمبرز کی قسمیں (Types of Index Numbers)

انڈیکس نمبرز کی درجہ بندی اس مظاہر Phenomeua کی بنیاد پر عمل میں آتا ہے۔ جس کی تبدیلیوں کی یہ پیمائش کرتے ہیں۔ اگرچیکہ انڈیکس نمبرز مختلف قسم کے شعبہ جات میں ترتیب دیے جاتے ہیں جہاں اضافی تبدیلیوں کی پیمائش کے لیے مقداری ٹیکنکس (Quantitative Techniques) استعمال کیے جاتے ہیں۔ ہم اپنی گفتگو کو کاروبار اور معیشت کے شعبہ جات میں ترتیب دیے جانے کی حد تک محدود رکھیں گے۔ یہاں ہم چند اہم انڈیکس نمبرز کی ترتیب پر بحث کریں گے۔ اس بنیاد پر انڈیکس نمبرز کی درجہ بندی چار طرح سے کی جاسکتی ہے۔

1۔ پرائیس انڈیکس نمبرز(Price Index Numbers)

2۔ کوانٹٹی انڈیکس نبرز(Quantity Index Numbers)

3۔ ویلیو انڈیکس نمبرز(Value Index Numbers)

4۔ اسپیشل پرپز انڈیکس نمبرز(Special Purpose Index Numbers)

5.6 اعشاری اعداد کی ترتیب میں مسائل (Problems in the Construction of Index Numbers)

ہول سیل پرائیس انڈیکس نمبرز کی ترتیب میں چند مسائل درپیش ہوتے ہیں۔ان کا حل نکالنا کوئی آسان کام نہیں ہوتا۔ان مسائل کا حل بڑی احتیاط سے نکالنا پڑتا ہے۔تاکہ ترتیب شدہ انڈیکس نمبرز پر اس کا اثر نہ پڑے اور کوئی غلطی نہ ہو جائے۔

1۔ پہلا مسئلہ یہ ہوتا ہے کہ جو بھی آیٹمس کا انتخاب کیا جائے جس سے انڈیکس نمبرز معلوم کرنا ہوتا ہے۔اس لیے یہاں یہ فیصلہ لینا ہوتا ہے کہ منتخبہ ایٹمس کے مختلف مراکز سے پرائیس کوٹیشن حاصل کیے جائیں۔ لہٰذا منتخبہ ایٹمس کے لیے مختلف مراکز سے پرائیس کوٹیشن حاصل کیے جاتے ہیں۔

2۔ قبل ازیں یہ کہا گیا کہ انڈیکس نمبرز مظاہرہ Phenomena کی اضافی تبدیلیوں کی پیمائش کرتے ہیں اور اکثر یہ تبدیلیاں گذشتہ تواریخ میں مظہر Phenomena کی سطح سے متعلق ہوتی ہیں۔عام قیمتوں کی سطح میں تبدیلیاں بھی گذشتہ تواریخ سے متعلق ہوں گی۔ عموماً یہ مدت ایک سال ہوتی ہے اور اس کو انڈیکس نمبرز کا بنیادی سال Base Year کہا جاتا ہے۔بیس ایئر کے انتخاب میں کئی اُمور کو پیشِ نظر رکھا جاتا ہے۔اس طرح انڈیکس نمبرز کی ترتیب میں دوسرا مسئلہ بیس اَیئر کا انتخاب ہوتا ہے۔اس لیے Price Relatives کو کرنٹ پرائیس میں تبدیلی کے لیے بیس اِیئر کی قیمتیں بنیاد ہونگی۔

3۔ ہول سیل پرائیس انڈیکس کی ترتیب میں دوسرا قدم مختلف اشیاء کی Price Relatives کا اوسط معلوم کرنا ہوتا ہے۔ اس مقصد کی تکمیل کے لیے کونسا اوسط استعمال کیا جائے؟ یہ سوال بہت اہم اور معقول ہوتا ہے اور اس طرح تیسرا مسئلہ جس کو ایک ہول سیل پرائیس انڈیکس نمبرز ترتیب دینے سامنا کرتا ہے،یعنی انڈیکس نمبرز ترتیب دینے والے کو تیسرا مسئلہ یعنی موزوں اوسط کا انتخاب ہے۔

4۔ انڈیکس نمبرز کی ترتیب میں استعمال ہونے والے تمام ایٹمس یکساں اہمیت کے حامل نہیں ہوتے اور اگر انڈیکس نمبرز نمایندہ بھی ہوں تب ان کی اہمیت کے اعتبار سے مختلف ایٹمس کو اوزان دینے ہوں گے۔ اس طرح انڈیکس نبرز ترتیب دینے والے کو انڈیکس نمبرز کو اوزان کا دینا اور انڈیکس نمبرز کے لیے موزوں اوزان کا انتخاب بڑا مشکل مسئلہ ہوتا ہے۔

پرائیس کوٹیشن کا انتخاب

1۔ اشیاء کا انتخاب(Selection of the Commodities)

i) ایٹمس کی خصوصیات: ایٹمس کے انتخاب کا مسئلہ اس وقت سامنے آتا ہے جبکہ تمام ایٹمس کا لینا ممکن نہیں ہوتا۔کیونکہ تمام ایٹمس جن کی قیمت میں تبدیلی عمومی مقصد کے لیے ہو اور جسکا ہول سیل پرائیس انڈیکس نمبر نمایندگی کوشش کررہا ہو۔ چونکہ عمومی

مقصد یہ کہ عام طور پر فلور پر ہول سیل پرائیس کی قیمتوں میں تبدیلی کی نمایندگی ہول سیل پرائیس انڈیکس کرتا ہے۔ ٹیکنیکی طور پر اس کی ترتیب کچھ ایسی ہوتی ہے کہ تمام ایٹمس کی قیمتوں میں تبدیلی کا مطالعہ کیا جائے، بلکہ چند نمایاں / اہم ایٹمس کو بڑی تعداد سے منتخب کیا جاتا ہے۔ مختلف ایٹمس کو مختلف جماعتوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ ہر جماعت سے ایک یا دو ایٹمس کا انتخاب کچھ اس ڈھنگ سے کیا جاتا ہے کہ یہ اپنی جماعت کی نمایندگی کے لیے کافی ہو۔ ایک نمایندہ شئے میں درجہ ذیل دو خصوصیات کا ہونا ضروری ہوگا۔

(a) اس کا عوام کی ضروریات، ذوق، عادات، رسم و رواج کا نمایندہ ہونا چاہیے۔ جس کے لیے انڈیکس نمبرز ترتیب دیے جارہے ہوں۔ اگر ایسی اشیاء منتخب کی جائیں جن میں یہ خصوصیات نہ ہوں تو انڈیکس نمبرز کی ترتیب کا مقصد فوت ہو جائے گا، جس کے لیے یہ ترتیب دیے گئے ہوں۔ جنرل ہول سیل پرائیس انڈیکس ملک میں جنرل پرائیس لیول میں تبدیلیوں کے بارے میں ایک آئیڈیا دیتے ہیں، تاکہ مختلف معاشی اور سماجی مسائل پر قیمت کے تغیرات پر اثرات کا موزوں انداز میں مطالعہ ہو سکے۔ اگر منتخبہ ایٹمس سوسایٹی کے ذوق، عادات اور رسم و رواج کا نمایندہ نہ ہوں تو ایسے مطالعہ کے اخذ کردہ نتائج ہرگز نمایندہ نہیں ہو سکتے، اور یہ عوام کے مسائل پر قابل اطلاق نہ ہوں، جس کے لیے انڈیکس نمبرز ترتیب دیے گئے ہوں۔ مثال کے طور پر اگر ملک کے ہول سیل پرائیس انڈیکس نمبر ترتیب دیے گئے ہوں، ایٹمس جیسے اسٹابیری، بیرونی ملک کی شراب، ہیوی مشین، ریفریجریٹر اور مہنگی آٹو موبائیل اشیاء کو شامل کیا جاتا ہے، تاکہ انڈیکس نمبر قیمت میں تبدیلی کی صحیح نمایندگی نہ ہو سکے۔ جیسا کہ اشیاء کی قیمتوں میں تبدیلیاں ہندوستانیوں کی ایک کثیر تعداد پر اس کا کچھ بھی اثر نہ پڑے گا۔ یہ بات یاد رکھنی چاہیے کہ عمومی مقصد کے لیے ہول سیل پرائیس انڈیکس نمبر ایک مخصوص سوسائیٹی کے لیے ہوتے ہیں، جن کے ذوق اور عادات ان کے اپنے ہوتے ہیں۔ انڈیکس نمبر ان تمام عناصر کو ملحوظ رکھے اور اسی کے مطابق ایٹمس کو سیلیکٹ کریں۔

(b) معیار میں استقامت ہو اور ترجیحاً گریڈیڈ ہو (اعلیٰ درجہ کی ہو)۔ اگر ایک شئے معیار کے اعتبار سے صحیح نہ ہو تو اس کو انڈیکس منبرز میں شامل کرنا درست نہ ہوگا۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ انڈیکس نمبر وہی شئے کی قیمت کی سطح میں ہفتہ بہ ہفتہ، ماہ بہ ماہ جیسی بھی صورت ہو تبدیلی کی پیمائش کرنے کے لیے منسوب ہے۔ اگر ایک شئے کی قیمت جب Quote کی جائے، معیار کے اعتبار سے مستحکم نہ ہو تب اس کو ٹیکنیکی اعتبار سے اس قیمت سے رجوع کیا جائیگا، جس کی قیمت کا تعین کچھ عرصہ پہلے کیا گیا تھا۔ اضافی قیمت کی صطح کا تقابل اسی وقت ممکن ہو گا جبکہ شئے کا معیار زیادہ تبدیل نہ ہوتا ہو۔ یہی وجہ ہے کہ انڈیکس نمبرز ترتیب دیے جاتے ہیں۔ ایسی صورت میں یہی بہتر ہو گا کہ ایسی اشیاء کا معیار بہترین ہو۔

2۔ اشیاء / ایٹمس کی تعداد

ایک مثالی انڈیکس نمبر کے لیے اشیاء کی تعداد سے متعلق کوئی مضبوط قاعدہ نہیں ہے۔ نظری طور پر ایٹمس کی تعداد جتنی زیادہ ہو گی اتنا ہی انڈیکس نمبرز کے نتائج درست اور صحیح ہوں گے۔ لیکن اگر ایٹمس کی تعداد غیر معمولی ہو انڈیکس نمبر کی تحسیب میں زیادہ مشکلات درپیش ہوں گی۔ کئی مرتبہ ایسا ہوتا ہے کہ انڈیکس نمبر گمراہ کن ہو جاتے ہیں، جبکہ ایٹمس کی تعداد غیر معمولی ہو یا پھر ان کا نظم بہتر طور پر نہ ہوا ہو۔ یوں کہا جاسکتا ہے کہ ایٹمس کی تعداد اتنی ہو جس سے سہولت بخش طریقہ پر انڈیکس نمبر ترتیب دیے جاسکیں۔ تاہم قیمتوں کے حساس انڈیکس نمبر کی ترتیب میں عموماً ایٹمس کی تعداد کم ہوتی ہے۔ قیمتوں کے حساس انڈیکس نمبر ان اشیاء کی قیمتوں کے انڈیکس نمبرز

میں ایک چھوٹی سی تبدیلی کا بھی حساب رکھا جاتا ہے۔ یہ عمومی مقصدی مطالعہ کے لیے مناسب نہیں ہیں، لیکن ان کی اپنی افادیت ہے۔ ہندوستان میں دوسری جنگ عظیم کے دوران اور جنگ کے بعد بھی Economic Adviser کے آفیس ایسی قیمتوں کے انڈیکس نمبرز شائع کرتے تھے۔

3۔ مختلف اقسام کی اشیاء

ایٹمس کے انتخاب میں اور ان کے نمبر کے بارے فیصلہ کاری میں مختلف قسم کی اشیاء انڈیکس نمبر میں شامل کرتے ہیں، تاکہ انڈیکس نمبر میں موجود مختلف کو 360 اشیاء کا عمومی جائیزہ لیا جائے، تاکہ بہتر طور پر مطالعہ ہوسکے۔ عام طور پر تمام اقسام کی اشیاء جو عمومی استعمال میں ہو ان اشیاء کو شامل کیا جائیگا۔ اس طرح تین یا چار قسم کے گیہوں ہول سیل پرائیس انڈیکس میں شامل کیے جائیں گے۔ اگر ان مختلف اشیاء کی قیمتوں کا اوسط انڈیکس نمبرز میں شامل کرنے سے قبل نکالا جائے گا۔ وہ شئے جس پر سوال کیا گیا ہے کوئی زیادہ اوزان دینے کا باعث نہ ہوگی، لیکن اگر ان تمام اقسام کی اشیاء کو شامل کیا جائے اور ان کی قیمتوں کا اوسط نکالا نہ جائے لیکن علٰحیدہ طور پر داخل کیا جئے، تب ان اشیاء کو جن پر سوال کیا گیا ہے مساوی طور پر اوزان دیے جائیں گے۔ جیسا کہ دوسری اشیاء کو دیا گیا ہے۔ مختلف منتخبہ اشیاء نہ صرف استعمال کی حامل ہوں بلکہ مستحکم بھی ہوں۔ ہم پہلے کہہ چکے ہیں کہ معیار میں استقامت نہ ہو، مختلف ادوار میں قیمتوں کا کوٹیشن کو ٹیکنیکی طور پر مختلف اشیاء سے رجوع کیا جائے گا، اور ان کا تقابل بھی نہ ہوگا۔ اگر اشیاء کی قیمتوں میں کوئی تبدیلی نہ ہو لیکن اگر کوالیٹی تبدیلی ہو رہی ہو تب انڈیکس نمبر بھی تبدیل کو ریکارڈ کرے گا۔ اگر چہ کہ وہ وہاں موجود نہ ہو۔

4۔ ایٹمس کی درجہ بندی (Classification of Items)

اشیاء کے مختلف گروپس کے بارے میں علاحدہ معلومات دینے کی غرض سے منتخبہ ایٹمس کی درجہ بندی گروپس میں کی جاتی ہے اور مختلف گروپس کے لیے علٰحیدہ انڈیکس نمبرز کی تحسیب کی جاتی ہے۔ ایسا کرنے کی وجہ سے مختلف گروپس کی قیمتوں میں تبدیلیوں کا مطالعہ کیا جاتا ہے۔ اس طرح اگر غذائی اشیاء کا ایک گروپ ہو تو اس گروپ کی قیمتوں میں تبدیلیوں کا مطالعہ ممکن ہوگا۔ دوسرے گروپ میں شامل اشیاء کی قیمتوں کی تبدیلیوں کا مطالعہ علٰحیدہ طور پر کیا جائے گا۔ اس قسم کا مطالعہ مفید ہوتا ہے۔ اس طریقہ سے ایٹمس کی درجہ بندی ڈاٹا کی یکسانیت کو بڑھاتی ہے۔ اگر ان گروپس کو ذیلی گروپس میں تقسیم کریں تو ڈاٹا کی یکسانیت میں مزید اضافہ ہوتا ہے اور ایسے میں ذیلی گروپس کی قیمتوں کی سطح میں تبدیلی کا مطالعہ علاحدہ اور تفصیل سے کیا جاسکتا ہے۔ ہمارے ملک میں ایکنامک ایڈوائیزر کے ہول سیل پرائیس انڈیکس نمبر کو نئی درجہ بندی دی۔ اس نے گروپس کو تین حصوں میں تقسیم کیا۔ یہ گروپس یوں ہیں۔

i) پرائمری آرٹیکلس (80 گروپس اور 2 ذیلی گروپس)

ii) ایندھن برقی لائیٹ اور چکناؤ اشیاء (10 اشیاء اور ایک گروپ)

iii) تیار کردہ مال (270 اشیاء اور 11 گروپس)

یہ نئی درجہ بندی اسٹانڈرڈ انڈسٹریل کلاسیفکیشن کی بنیاد پر کی گئی ہے۔ اس کو بین الاقوامی سطح پر اپنا لیا گیا ہے۔

5۔ پرائیس کوٹیشن کا حصول (Obtaining Price Quotation)

i) نمائندہ مقامات اور اشخاص کا انتخاب: اشیاء کا انتخاب اور درجہ بندی کرنے کے بعد دوسرا مسئلہ ان کی قیمتوں کی جمع بندی کا ہوتا ہے۔ شئے کی قیمت مقام بہ مقام الگ الگ ہوتی ہے اور اتنا ہی نہیں ایک مقام پر دکان بہ دوکان قیمتیں الگ الگ ہوتی ہیں۔ جیسا کہ تمام اشیاء کو ایک ہی انڈیکس نمبر میں شامل کرنا ممکن نہیں ہے۔ اسی طرح تمام مقامات سے پرائیس کوٹیشن حاصل کرنا ممکن نہیں۔ جہاں ایک مخصوص شئے خریدی یا فروخت کی جاتی ہے۔ حتیٰ کہ منتخبہ مقامات سے بھی تمام دوکانات سے پرائیس کوٹیشن کو جمع نہیں کیا جاسکتا۔ اس لیے چند نمائندہ مقامات کا انتخاب کر کے ایک نمائندہ شخص اس کام کو انجام دے۔ عموماً ایسے مقامات اس لیے منتخب کیے جاتے ہیں کہ وہاں ایک مخصوص شئے زیادہ مقدار میں خریدی اور فروخت کی جاتی ہے۔ ایسے مقامات پر عموماً جو قیمتیں مروج ہوتی ہیں وہی قیمتیں دوسرے مقامات پر مروج ہوتی ہیں۔ جہاں اشیاء نسبتاً کم مقدار میں خریدی اور فروخت کی جاتی ہیں۔ اس طریقہ پر مقامات چننے کے بعد ان نمائندوں کا تقرر کریں جو وقتاً فوقتاً پرائیس کوٹیشن فراہم کرتے ہوں۔ یہ کام خصوصی عملہ کے تقرر کے ذریعہ کیا جاسکتا ہے یا مخصوص مقامات میں منتخبہ افراد یا اداروں کو سونپا جاسکتا ہے۔ مختلف مقامات پر مروجہ قیمتوں کی تفصیلات کے ساتھ شائع ہونے والے جرنلس اور میگزین کو بھی استعمال کیا جاسکتا ہے۔ پرائس کوٹیشن سربراہ کرنے والے نمائندوں، افراد یا اداروں کو چنتے وقت اس بات کی احتیاط برتنی چاہیے کہ دی گئی معلومات قیاس پر مبنی نہ ہوں، بلکہ صحیح اور درست ہوں، ورنہ یہ نمائندہ یا اعتماد کے قابل نہ ہوں گے۔ اس کی تنقیح کے لیے ایک مقام پر ایک شخص کا تقرر کرنے کے بجائے تین یا چار اشخاص کا تقرر کیا جائے، تاکہ بھروسہ مند اور قابل اعتبار پرائیس کوٹیشن حاصل ہوں۔

6۔ قیمت کیسے درج کی جاتی ہے (How is the Price to be Quoted)

قیمت کے درج کرنے کے طریقہ کار کے تعلق سے فیصلہ لینے کے بعد اور ساتھ ہی قیمت کے حدود کے تعلق بھی فیصلہ کرنا ہوتا ہے۔ قیمت دو طرح سے Quote کی جاسکتی ہے۔ زر کی فی اکائی پر شئے کی مقدار یا شئے کی مقدار پر زر کی مقدار فی اکائی کی صورت میں۔ قیمت Quote کرنے کے دوسرے طریقہ کو قیمت Price اور پہلے طریقہ کو معکوس قیمت Inverse Price کہتے ہیں۔ ان دونوں طریقوں میں کافی فرق پایا جاتا ہے۔ یعنی دونوں کے درمیان معکوس تناسب پایا جاتا ہے۔ اگر پہلی قیمت میں اضافہ ہو رہا ہو تو دوسری قیمت میں کمی دیکھی جاتی ہے۔ دوسری قیمت میں اضافہ ہو تو پہلی قیمت میں کمی واقع ہوتی ہے۔ اس موقع پر ایک بات یاد رکھنی چاہیے کہ ٹھوک پرائیس انڈیکس نمبرز کی ترتیب میں ان کی قیمت فی اکائی قیمت زر کی صورت میں دیکھی جائے۔

7۔ کیا ٹھوک قیمت ہونی چاہیے (Should be Whole Sale)

جہاں تک ٹھوک قیمت پر مبنی اعشاری اعداد کا سوال ہے کسی شئے کی قیمت کا مطلب ٹھوک فروخت کی قیمت ہے۔ ٹھوک قیمت ہی کیوں؟ اس کا جواب آسان ہے، ٹھوک قیمت میں استقامت ہوتی ہے، لیکن مقام بہ مقام، دوکان بہ دوکان چلر فروش الگ الگ قیمت پر فروخت کرتے ہیں۔ حالانکہ شئے ایک ہی ہوتی ہے۔ اس سلسلے میں ایک بات یاد رکھیں کہ ٹھوک قیمت پر طلب اور رسد کے اثرات ہوتے ہیں یا پھر دیگر عناصر ٹھوک قیمت پر اثر انداز ہوتے ہیں۔

8۔ قیمت واری کوٹیشن کی تعداد(Number of Price Quotation)

قیمت واری کوٹیشن پر ان کی تعداد بھی اثر انداز ہوتی ہے۔ یہاں تعداد کے تعلق سے کوئی مخصوص قاعدہ یا اُصول نہیں ہے کہ ہر مہینہ یا ہر ہفتہ یا ہر پندرھواڑہ میں مقررہ مقدار میں ہی کوٹیشنس حاصل ہونے چاہئیں۔ بہتر یہی ہے کہ زیادہ تعداد میں کوٹیشنس حاصل ہونے چاہئیں۔ اتنی بھی نہیں کہ اعشاری اعداد پر ان کے منفی اثرات مرتب ہوں۔ بہر کیف ان کی تعداد میں اعتدال ہونا چاہیے۔

9۔ اساس کا انتخاب(Selection of Base)

اعشاری اعداد مظاہر کی سطح میں اضافی تبدیلی کی پیمائش پچھلے اعشاری اعداد کی سطح کی بنیاد یا اساس پر کی جاتی ہے۔ پچھلی تاریخ یا رواں تغیرات کی بنیاد کو اعشاری اعداد کی بنیاد کہا جاتا ہے۔ اعشاری اعداد کی ترتیب میں اساس انتہائی اہمیت کے حامل ہوتے ہیں۔

10۔ اوسط کا انتخاب(Selection of Average)

اگر ہم کسی ایک شئے کی قیمتوں میں تبدیلیوں کا مشاہدہ یا مطالعہ کر رہے ہوں تو سادہ اضافی قیمت Scope Price Relatives اعشاری اعداد کے لیے بہتر انتخاب ہو گا۔ ایسی صورت میں اوسط کے انتخاب کا مسئلہ درپیش نہ ہو گا۔ لیکن حقیقت میں عمومی قیمتوں کی سطح میں تبدیلیوں کا مطالعہ کرنے کے لیے اعشاری اعداد کی ٹیکنک کو استعمال کیا جاتا ہے اور اس صورت میں ایک سے زیادہ اشیاء کو مشاہدہ و مطالعہ میں شامل کیا جاتا ہے۔ جب ان اشیاء کی اضافی قیمت تحسیب کر لی جائے تو ان اشیاء کے اوسط کو ایک عدد کی صورت میں اوسط نکالنا بھی ایک مسئلہ ہوتا ہے۔ عمومی طور پر اس کو کسی مقصد کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے۔ لیکن عملی طور پر انتخاب صرف اوسطِ حسابیہ، وسطانیہ اور جیومتریائی اوسط سے کسی ایک اوسط کا انتخاب کرنا ہو گا۔ اس انتخاب کے لیے تفصیلی تجزیہ کرنا ہو گا۔ اور کسی ایک اوسط کو منتخب کر کے مسئلہ کا حل تلاش کرنا ہو گا۔

11۔ وزن کاری کے مسائل(Problem of Weighing)

اعشاری اعداد اوزانی ہنا چاہیے یا غیر اوزانی ہونا چاہیے۔ ہم مرکزی رجحان کی پیمائش میں پڑھ چکے ہیں کہ مدات میں شامل ہر مد کی اضافی اہمیت برابر نہیں ہوتی۔ اس لیے اوزانی اوسط، غیر اوزانی اوسط سے زیادہ اچھے نتائج کا حامل ہوتا ہے۔ چونکہ اعشاری اعداد کو New اوزانی ہونا چاہیے، لیکن صحیح اوزان معلوم کرنا اتنا آسان نہیں ہوتا۔ اوزان کو عقلی استدلال کے مطابق بنانا چاہیے۔

12۔ موزوں ضابطہ / فارمولے کا انتخاب(Selection of Suitable Formula)

اعشاری اعداد کی ترتیب کو معلوم کرنے کے لیے کئی ضابطے موجود ہیں۔ لیکن کسی ایک موزوں ترین ضابطہ کو منتخب کرنا چاہیے تاکہ اس ضابطہ کے مطابق اعشاری اعداد کو ترتیب دیا جا سکتا ہے۔ ارونگ فشر نے ایک سو سے زاید ضابطوں کی جانچ کرنے کے بعد ایک مثالی ضابطہ کی وکالت کی۔ اس ضابطہ کو فشر کا مثالی ضابطہ کہا جاتا ہے۔

5.7 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اعشاری اعداد ایک عمومی شماریاتی آلہ ہے جو گروہوں یا گروپس سے متعلق تبدیلی میں مشترکہ لچک کی پیمائش کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ بعض مصنفین نے اعشاری اعداد کو وقت، جغرافیائی مقام یا دوسری کسی خصوصیت کی بناء پر کسی مظاہر Phenomenon کی سطح میں تبدیلی کی پیمائش کا آلہ ہیں۔ انڈیکس نمبرز کا سب سے پہلے استعمال 1764 میں اٹلی کے باشندے Carli نے کیا۔ انڈیکس نمبرز کی تعریف مختلف ماہرین شماریات نے کی ہے جیسے Spiegal کے مطابق "انڈیکس نمبرز ایک شماریاتی پیمائش ہے جو ایک گروہ کے متغیر سے متعلق وقت، جغرافیائی مقامات یا دیگر خصوصیات یا متغیر میں تبدیلیوں کو بتانے کے لیے ترتیب دی گئی ہے"۔ انڈیکس نمبرز کی کئی خصوصیات ہیں جیسے انڈیکس نمبرز مخصوص اوسط ہیں، انڈیکس نمبرز ان عناصر کا مطالعہ کرتے ہیں جن کی پیمائش راست طور پر نہیں کی جاسکتی، گروہی مدات کی مشترکہ خصوصیات کو ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ تبدیلیاں وقت یا مقامات سے متعلق ہوتی ہیں۔

انڈیکس نمبرز کے استعمالات کئی ہیں جیسے رجحانات کے مطالعہ میں مددگار، پالیسی کی تدوین میں مددگار، قوتِ خرید کی پیمائش میں مددگار، مختلف قیمتوں کو اصل قیمت پر بدلنے میں مددگار اور معاشی بادپیما۔

انڈیکس نمبرز کی اقسام میں پرائیس انڈیکس نمبرز، کوانٹٹی انڈیکس نمبرز، ویلیو انڈیکس نمبرز اور اسپیشل پرائیس انڈیکس نمبرز شامل ہیں۔

5.8 کلیدی الفاظ (Keywords)

1. اعشاری اعداد (Index Numbers): معاشی اعداد کی عکاسی قیمت یا مقدار کی صورت میں بمقابلہ معیاری یا اساسی قدر کے۔
2. موزوں ضابطہ (Suitable Formula): اعشاری اعداد میں فشرز کے ضابطہ کو موزوں ضابطہ کہا گیا ہے۔

5.9 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

معروضی جوابات کے حامل سوالات

1) ________ کے ضابطہ کو مثالی ضابطہ کہا جاتا ہے۔ (فشر)

2) اعشاری اعداد ________ ہے۔ (شماریاتی آلہ)

3) انڈیکس نمبر کا استعمال پہلے ______ میں ہوا۔ (اٹلی)

4) کسی برس کو ______ کے طور پر استعمال کیا جائے تو وہ بنیادی مدت ہے۔ (بنیادی مدت)

5) ________ معاشی بادپیما کے طور دیکھا جاتا ہے۔ (انڈیکس نمبرز)

6) اعشاری اعداد کو سب سے پہلے Carli نے استعمال کیا۔ (صحیح / غلط)

7) رجحانات کے مطالعہ میں مددگار ہے۔ (صحیح / غلط)

8) صارف کی خرید نے کی صلاحیت کو قوتِ خرید کہتے ہیں۔ (صحیح / غلط)

9) مثالی انڈکس نمبرز کے لیے اشیاء کی بڑی تعداد ضروری نہیں۔ (صحیح / غلط)

10) کسی شئے کی قیمت کا مطلب تھوک فروخت کی قیمت ہے۔ (صحیح / غلط)

مختصر جوابات کے حامل سوالات

1) کس نے سب سے پہلے انڈیکس نمبرز کا استعمال کیا؟

2) انڈیکس نمبرز کی تعریف کیجیے۔

3) اضافی تبدیلیوں کی پیمائش کیسے ہوتی ہے۔

4) وزن کاری کا کیا مسئلہ ہے؟

5) اساس یا بنیاد کا انتخاب کیسے ہوتا ہے۔

طویل جوابات کے حامل سوالات

1) اعشاری اعداد کی تعریف کیجیے اور اس کی خصوصیات بیان کیجیے۔

2) اعشاری اعداد کے استعمالات بیان کیجیے۔

3) انڈیکس نمبرز کی ترتیب میں مسائل بیان کیجیے۔

4) مدات، ان کے نمبر اور پرائیس کوٹیشن کے انتخاب پر تفصیل سے بحث کیجیے۔

اکائی 6۔ اہم اعشاری اعداد

(Important Index Numbers)

اکائی کے اجزا:

6.0	تمہید	(Introduction)
6.1	مقاصد	(Objectives)
6.2	اہم اعشاری اعداد کے معنی و مفہوم	(Meaning of Important Index Numbers)
6.3	اعشاری اعداد کی ترتیب کے اہم طریقے	(Important Methods of Construction of Index Numbers)
6.4	اکتسابی نتائج	(Learning Outcomes)
6.5	کلیدی الفاظ	(Keywords)
6.6	نمونہ امتحانی سوالات	(Model Examination Questions)

6.0 تمہید (Introduction)

عزیز طلباء!

پچھلی اکائی میں ہم نے اعشاری اعداد کی بنیادی معلومات حاصل کیں۔ جہاں یہ بتایا گیا کہ انڈیکس نمبرز کے استعمال سب سے پہلے کہاں اور کب ہوا۔ ہم نے پڑھا کہ ابتدائی دنوں میں انڈیکس نمبرز کو قیمتوں کی سطح میں تبدیلی اور زر کی قوت خرید کے مطالعہ کے لیے استعمال کیا جاتا تھا، لیکن آج اعشاری اعداد کا استعمال ہر شعبہ حیات میں ہو رہا ہے۔ تقابلی مطالعہ کے لیے اعشاری اعداد از حد ضروری قرار دیے گئے ہیں۔ عصر حاضر میں پیداوار صرف، درآمدات و برآمدات، قومی آمدنی، معیار زندگی، جرائم، کاروبار میں ناکامیاں وغیرہ میں اعشاری اعداد کا استعمال بہت زیادہ ہو گیا ہے۔ ان کی اہمیت سے انکار نہیں کیا جا سکتا۔ اس اکائی میں اہم اعشاری اعداد کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔

6.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ

- اہم اعشاری اعداد کے بارے میں خیالات کا اظہار کر سکیں

- اعشاری اعداد کی ترتیب دینے کے طریقوں سے واقف ہوسکیں
- اعشاری اعداد کی ترتیب کے مختلف طریقوں کے اجزاء کی توضیح کرسکیں
- اعشاری اعداد کی ترتیب کے اوزانی اور غیر اوزانی طریقوں کو درجہ بند کرسکیں
- اوزانی اور غیر اوزانی طریقوں کے تحت سوالات حل کرسکیں

6.2 اہم اعشاری اعداد کے معنی و مفہوم (Meaning of Important Index Numbers)

جیسا کہ آپ جانتے ہیں اعشاری اعداد، متغیرات میں تبدیلیوں کی پیمائش کا اہم آلہ ہے۔ اس کی نوعیت وماہیت پر مختلف مصنفین نے اپنی رائے پیش کی ہے۔ ان کی یہ رائے عملی شکل میں دی گئی ہے۔ عملی شکل کا مطلب ضابطے ہیں، جن کی مدد سے ہم متغیرات کے درمیان اضافی تبدیلیوں کی تحسیب کرسکتے ہیں۔ اعشاری اعداد زر کی قوت خرید، پالیسی کی تدوین اور رجحانات کی پیمائش میں نہایت مددگار ثابت ہوتے ہیں۔ ان کی اہمیت کی مناسبت سے زمرہ بندی بھی کی گئی ہے۔ اب ہم اس اکائی میں چند اہم انڈیکس نمبرز جو کاروبار اور معاشیات میں عمومی طور پر استعمال ہوتے ہیں معلومات حاصل کریں گے۔

6.3 اعشاری اعداد کی ترتیب کے اہم طریقے

(Important Methods of Construction of Index Numbers)

عام طور پر اعشاری اعداد کی تحسیب کے طریقوں کو دو گروہوں میں درجہ بند کیا جاسکتا ہے۔ ان کو ذیل میں دیکھا جاسکتا ہے۔

I) غیر اوزانی اعشاری اعداد (Unweighted Index Numbers)

II) اوزانی اعشاری اعداد (Weighted Index Numbers)

غیر اوزانی اعشاری اعداد میں ہر مد Item کے لیے یکساں اوزان ہوتے ہیں، جبکہ اوزانی اعشاری اعداد کی صورت میں مختلف مدات Items کی اہمیت کے اعتبار سے اوزان دیے جاتے ہیں۔

غیر اوزانی اعشاری اعداد کو ان کی ترتیب کی ٹیکنکس کی بنیاد پر مزید دو حصوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

1) سادہ مجموعی طریقہ (Simple Aggregative Method)

2) سادہ اوسط اضافی طریقہ (Simple Averge of Relatives Method)

ٹھیک اسی طرح اوزانی اعشاری اعداد (Weighted Index Numbers) کو دو زمروں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

1) اوزانی مجموعی طریقہ (Weighted Aggregative Method)

2) اوزانی اوسط اضافی طریقہ (Weighted Average of Relatives Method)

A. غیر اوزانی اعشاری اعداد (Unweighted Index Numbers)

1) سادہ مجموعی طریقہ (Simple Aggregative Method): اعشاری اعداد کی ترتیب کا نہایت سادہ طریقہ ہے۔ یہ طریقہ رواں سال میں تمام اشیاء کی مجموعی قیمت کو بنیادی سال کی کل قیمت کے فیصد پر مشتمل ہے۔

فائدے (Advantages)

سادہ مجموعی طریقہ کے فایدے درجہ ذیل ہیں۔

1) یہ طریقہ نہایت سادہ اور آسان ہے، اس کو آسانی سے اپنایا جاسکتا ہے۔

2) ایک عرصہ تک یا ایک طویل مدت تک تمام اشیاء یکساں اکائیوں کی صورت میں ہوتی ہیں، جس کی وجہ سے اچھے نتائج بر آمد ہوتے ہیں۔

نقصانات (Disadvantages)

سادہ مجموعی طریقہ کے نقصانات درجہ ذیل ہیں۔

1) اگر اکائیوں میں تبدیلیاں ہوں تو اس پر گہرے اثرات مرتب ہوتے ہیں۔ مثال کے طور پر اگر ہم اکائیاں کلو گرام کے سنٹرل ویٹ میں ظاہر کر رہے ہوں تو اعشاری اعداد کی قدر میں بڑی تبدیلیاں سامنے آتی ہیں۔

2) تمام اشیاء کو یکساں یا مساوی اہمیت دی جاتی ہے جو کہ غلط ہے۔ عام طور پر اشیاء ترجیحات کی بنیاد پر استعمال کی جاتی ہیں۔

3) دی گئی قیمت کی اکائی میں تبدیلی کر کے غلط استعمال کیا جاسکتا ہے۔

سادہ مجموعی طریقہ کے تحت انڈیکس نمبرز کی ترتیب کے لیے اقدامات

(Steps in Constructing Index Numbers Under Simple Aggregative Method)

سادہ مجموعی طریقہ کے تحت انڈیکس نمبرز کی ترتیب کے لیے درجہ ذیل اقدامات لیے جاتے ہیں۔

1) رواں سال کے لیے مختلف اشیاء کی قیمتوں کو جمع کیجیے۔ اس میزان کی نمایندگی $\sum P_1$ کے ذریعہ کی جائے گی۔

2) بنیادی سال کے لیے انہی اشیاء کو قیمتوں کو جمع کیجیے۔ اس میزان کی نمایندگی $\sum P_0$ کے ذریعہ کی جائے گی۔

3) $\sum P_1$ کو $\sum P_0$ سے تقسیم کر کے حاصل عدد کو 100 سے ضرب دیں۔ ان تفصیلات کو ضابطہ کی شکل میں یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$P_{01} = \frac{\sum P_1}{\sum P_0} \times 100$$

تمثیل 1: درجہ ذیل اعداد کی مدد سے سادہ مجموعی طریقہ (Simple Aggregative Method) کے ذریعہ انڈیکس نمبرز (اعشاری اعداد) معلوم کیجیے۔

اشیاء	چاول	گیہوں	دالیں	آلو
1990: میں قیمت (روپیوں میں)	162	256	257	132
1991: میں قیمت (روپیوں میں)	171	164	189	145

حل:

اشیاء	1990 میں قیمت	1991 میں قیمت
	P_0	P_1
چاول	162	171
گیہوں	256	164
دالیں	257	189
آلو	132	145
	$\sum P_0$	$\sum P$ 669

$$P_{01} = \frac{\sum P_1}{\sum P_0} x100$$

$$= \frac{669}{807} x100$$

= 82.89

تمثیل 2 : درجہ ذیل اعداد سے سال 2001 کے لیے سادہ مجموعی طریقہ سے انڈیکس نمبرز (اعشاری اعداد) معلوم کیجیے۔

اشیاء	چاول	جواری	گوشت	مچھلی	ایندھن
2000 میں قیمتیں	150	160	175	190	200
2001 میں قیمتیں	155	172	170	205	190

حل: اعشاری اعداد کی ترتیب

اشیاء	2000 میں قیمت	2001 میں قیمت
	P0	P1
چاول	150	155
جواری	160	172
گوشت	175	170
مچھلی	190	205
ایندھن	200	190
	$\sum P_0$ 875	$\sum P_1$ 892

$$P_{01} = \frac{\sum P_1}{\sum P_0} \text{x}100$$

$$= \frac{892}{875} \text{x}100$$

$$= \underline{101.94}$$

تمثیل 3 : 2020 کو بنیادی سال مان کر 2021 کے لیے سادہ مجموعی طریقہ پر انڈیکس نمبرز معلوم کیجیے۔

پھلی	گیہوں	مکئی	اشیاء
150	140	130	2020:میں قیمت
180	160	140	2021:میں قیمت

حل:

2021 میں قیمت	2020 میں قیمت	اشیاء
P_1	P_0	
140	130	مکئی
160	140	گیہوں
180	150	پھلی
$SP_1 480$	$SP_0 420$	

$$P_{01} = \frac{\sum P_1}{\sum P_0} \text{x}100$$

$$= \frac{420}{480} \text{x}100$$

$$= \underline{87.5}$$

تمثیل4: سال2020 کو بنیاد بنا کر سادہ مجموعی طریقہ سے پرائیس انڈیکس تحسیب کیجیے۔

پیاز	دالیں	گیہوں	مکئی	جوار	چاول	اشیاء
50	40	25	10	30	20	2020:میں قیمت(روپیوں میں)
55	45	35	15	30	25	2021:میں قیمت(روپیوں میں)

حل:

اشیاء	2020 میں قیمت	2021 میں قیمت
	P_0	P_1
چاول	20	25
جوار	30	30
مکئی	10	15
گیہوں	25	35
دالیں	40	45
پیاز	50	55
	$\sum P_0$ 175	$\sum P$205

$$P_{01} = \frac{\sum P_1}{\sum P_0} x100$$

$$= \frac{205}{175} x100$$

$$= 1.1714 \text{ x } 100$$

$$= \underline{117.14}$$

.II سادہ اوسط اضافی طریقہ (Simple Average of Relatives Method)

سادہ اوسط اضافی طریقہ میں مختلف مدات کی قیمتیں بنیادی سال کے لیے 100 فرض کر لی جاتی ہیں، اور رواں برس کی قیمتوں کو بنیادی سال کی قیمتوں کے فیصد کے طور پر ظاہر کیا جاتا ہے۔ یعنی رواں برس کی قیمت کو بنیادی سال کی قیمت کی اضافی قیمت کے طور پر بتایا جاتا ہے۔ انڈیکس نمبر معلوم کرنے کے لیے ان اضافی قیمتوں کا اوسط معلوم کیا جاتا ہے۔ استعمال کردہ اوسط جیومٹریائی اوسط یا وسطانیہ یا اوسط حسابیہ ہو سکتا ہے۔ لیکن عام طور پر اوسط حسابیہ اور جیومتریائی اوسط کو زیادہ تر استعمال کیا جاتا ہے۔ سادہ اوسط اضافی طریقہ کا ضابطہ ذیل میں دیا گیا ہے۔

$$P_{01} = \frac{\sum\left(\frac{P_1}{P_0} x100\right)}{N}$$

اس ضابطہ میں 'N' کچھ اور نہیں بلکہ مدّات Items کی تعداد ہے۔ اگر جیومتریائی طریقہ کو استعمال کیا جا رہا ہو تو ضابطہ درجہ ذیل ہو گا۔

$$Log\ P_{01} = \frac{\Sigma \log \left[\frac{P_1}{P_0} x100 \right]}{N}$$

یا

$$P_{01} = Anti \log \left\{ \frac{(\Sigma \log \frac{P_1}{P_0} x100}{N} \right\}$$

نوٹ : اگر P کو $\left(\frac{P_1}{P_0} x100 \right)$ تصور کیا جائے تو

$$P_{01} = Anti \log \frac{\Sigma \log P}{N}$$

سادہ اوسط اضافی طریقہ میں اقدامات

(Steps in Calculation of Simple Average Price Relatives Method)

سادہ اوسط اضافی طریقہ میں درجہ ذیل اقدامات لیے جاتے ہیں۔

1) اضافی قیمتوں کی تحسیب کیجیے۔ اس کی تحسیب رواں برس کی قیمت کو بنیادی برس کی قیمت سے تقسیم کے ذریعہ کی جاتی ہے۔ حاصل شدہ قیمت کو 100 سے ضرب دیا جاتا ہے۔ اس کو ضابطہ کی شکل میں یوں بتایا جاسکتا ہے۔

$$\frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0} x100$$

2) اضافی قیمتوں کا اوسط تحسیب کیجیے۔ اس کا ضابطہ درجہ ذیل ہے۔

$$P_{01} = \frac{\Sigma \left(\frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0} x100 \right)}{N}$$

نوٹ: 'N' کل مدات کے مدات کی نمایندگی کرتا ہے، جس کی اضافی قیمتوں کا اوسط معلوم کرلیا گیا ہو۔

تمثیل 5: ذیل میں دیے گئے اعداد و شمار سے 2021 کے لیے انڈیکس نمبر ترتیب دیجیے۔ سال 2020 کو بنیادی سال تصور کریں اور یہ طریقہ استعمال کریں۔ (i) اوسط حسابیہ (ii) جیومتریائی اوسط۔

اشیاء	جوار	مکئی	چاول	گیہوں	دالیں
2020: میں قیمت	6	2	4	10	8
2021: میں قیمت	10	2	6	12	12

حل:

(i) اوسط حسابیہ استعمال کرکے انڈیکس نمبر معلوم کرنا

اشیاء	2020میں قیمت P_0	2021میں قیمت P_1	Price Relatives $\frac{P_1}{P_0}x100$
جوار	6	10	$\frac{10}{6}x100=166.7$
مکئی	2	2	$\frac{2}{2}x100=100.0$
چاول	4	6	$\frac{6}{4}x100 = 150.0$
گیہوں	10	12	$\frac{12}{10}x100=120.0$
دالیں	8	12	$\frac{12}{8}x100 = 150.0$
			$\sum\left[\frac{P_1}{P_0}x100\right]=686.7$

$$P_{01}=\frac{\Sigma\left(\frac{P_1}{P_0}X100\right)}{N}$$

$=686.7$

$=137.34$

(ii) جیومتریائی اوسط استعمال کرکے انڈیکس نمبر معلوم کرنا

اشیاء	2020میں قیمت P_0	2021میں قیمت P_1	اضافی قیمت Price Relatives	Log P
جوار	6	10	166.7	2.2201
مکئی	2	2	100.0	2.0000
چاول	4	6	150.0	2.1761
گیہوں	10	12	120.0	2.0792
دالیں	8	12	150.0	2.1761
				$\sum\log P = 10.6515$

$$P_{01} = AL\left(\frac{\sum\log P}{N}\right)$$

$$= AL\left(\frac{10.6515}{5}\right)$$

$$= AL\ 2.1303$$

$$= \underline{135.0}$$

سادہ اوسط اضافی طریقہ (Simple Average of Relatives Method) کے فایدے

سادہ اوسط اضافی طریقہ کے فایدے درجہ ذیل ہیں۔

1) انتہائی مدات انڈیکس نمبر ز پر اثر انداز نہیں ہوتے۔ تمام مدات کو مساوی و یکساں اہمیت دیجاتی ہے۔

2) طے شدہ قیمت میں درج شدہ اکائیوں کا بھی انڈیکس نمبر ز پر اثر نہیں ہوتا۔ اضافی اعداد Pure Numbers ہوتے ہیں اور انہیں اصل اکائیوں سے الگ کیا جاسکتا ہے۔ نتیجتاً اضافی طریقہ (Relatives Method) سے تحسیب کردہ انڈیکس نمبر ز کے قطع نظر وہی ہوتے ہیں جس انداز سے قیمتیں درج کی گئیں ہیں۔

3) اس طریقہ پر محسوب کردہ انڈیکس نمبر ز یونٹ ٹسٹ کے تقاضوں کی تکمیل کرتے ہیں۔

سادہ اوسط اضافی طریقہ کے نقصانات (Disadvantages of Relatives Method)

سادہ اوسط اضافی طریقہ کے نقصانات درجہ ذیل ہیں۔

1) موزوں اوسط کے انتخاب کے سلسلہ میں دشواریوں کا سامنا کرنا پڑتا ہے۔ اوسط حسابیہ کو معروف اوسط نہیں سمجھا جاتا، کیونکہ یہ قیاس کو جگہ دیتا ہے۔ اس کے علاوہ جیومتریائی اوسط کی تحسیب میں بھی دشواریاں درپیش ہوتی ہیں۔

2) اضافی طریقہ میں یہ فرض کیا جاتا ہے کہ تمام قیمتوں کو مساوی اہمیت دی گئی ہے۔ یہ دراصل پوشیدہ اوزانی نظام ہے، قابل اعتراض نظام ہے۔ چونکہ چند اضافی اعداد دوسرے اعداد سے زیادہ اہم ہوتے ہیں۔

II. اوزانی اعشاری اعداد (Weighted Index Numbers)

اس طریقہ کے تحت مختلف اشیاء کو اوزان دیے جاتے ہیں جنہیں انڈیکس نمبر ز میں شامل رکھنا ہوتا ہے۔ اوزان اشیاء کے لیے ترجیح کو ظاہر کرتے ہیں کہ کونسی شئے اہم ہے، کونسی شئے غیر اہم ہے۔ اوزانی اعشاری اعداد کی دو قسمیں ہیں۔

1) اوزانی مجموعی اعشاری اعداد (Weighted Aggregative Index Numbers)

2) اوزانی انڈیکس نمبر ز کا اضافی اوسط (Weighted Aggregative Index Numbers)

I. اوزانی مجموعی اعشاری اعداد (Weighted Aggregative Index Numbers)

مختلف ایٹمس کو اوزان دیے جاتے ہیں۔ اوزان اس شئے کی اہمیت کو ظاہر کرتے ہیں۔ اس قسم کے اعشاری اعداد کو الگ الگ انداز سے استعمال کیا جاتا ہے۔ اس کے اہم طریقوں کو ذیل میں بیان کیا گیا ہے۔

1. Laspayres Method
2. Paasche's Method
3. Dorbish and Bowley Method
4. Fisher's Ideal Method
5. Marshal Edgeworth Method
6. Walsh Method
7. Kelly's Method

مذکورہ بالا تفصیل اوزانی مجموعی اعشاری اعداد کی تحسیب کے لیے فراہم ضابطے ہیں، جنہیں مختلف ماہرین نے پیش کیا ہے۔ ہمارے نصاب کی مناسبت سے فشر کا مثالی انڈیکس ہمارے مطالعہ کا مرکز ہوگا۔ فشرز کے مثالی انڈیکس نمبر دراصل Laspayres اور Paasche کے اعشاری اعداد کا جیومتریائی اوسط ہے۔ اس کا ضابطہ درجہ ذیل ہے۔

$$P_{01}\sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} x \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1} x100}$$

فشر نے تقریباً 100 ضابطوں کی جانچ کی، آخر میں مذکورہ بالا ضابطہ پر اطمینان کا اظہار کیا۔ جس کو وہ مثالی Ideal کہتا ہے۔

تمثیل6: درجہ ذیل تفصیلات کی مدد سے فشرز کا مثالی اعشاری اعداد کی تحسیب کیجیے۔

اشیاء	قیمت		مقدار	
	2014	2020	2014	2020
P	16	40	100	120
Q	4	12	30	20
R	2	4	40	50
S	4	10	20	16
T	2	10	80	60

اعشاری اعداد کی ترتیب

اشیاء	p_0	q_0	p_1	q_1	p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
P	16	100	40	120	4000	1600	4800	1920
Q	4	30	12	20	360	120	240	80
R	2	40	4	50	160	80	200	100
S	4	20	10	16	200	80	160	64
T	2	80	10	60	800	160	600	120
					$\sum p_1q_0$ 5520	$\sum p_0q_0$ 2043	$\sum p_1q_1$ 6000	$\sum p_0q_1$ 2284

فشر کا مثالی انڈیکس کی تحسیب

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} x \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1} x100}$$

$$= \sqrt{\frac{5520}{2043} x \frac{6000}{2284} x100}$$

$$= \sqrt{2.7019085x2.626970x100}$$

$$= \sqrt{7.0978325722}x100$$

$$= 2.6641757773 \text{ x } 100$$

$$= \underline{266.41}$$

6.4 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اعشاری اعداد Index Numbers متغیرات میں تبدیلیوں کی پیائش کا ایک اہم آلہ ہے۔ اس کی نوعیت اور ماہیت پر مختلف مصنفین نے اپنی رائے پیش کی ہے۔ ان کی یہ رائے عملی شکل میں دی گئی ہے۔ عملی شکل کا مطلب ضابطے / فارمولے ہیں جن کی مدد سے ہم متغیرات کے درمیان اضافی تبدیلیوں کی تحسیب کرسکتے ہیں۔ اعشاری اعداد زر کی قوتِ خرید، پالیسی کی تدوین اور رجحانات کی پیائش میں نہایت مددگار ثابت ہوتے ہیں۔ اعشاری اعداد کی تحسیب کے طریقوں کو دو گروہوں میں درجہ بند کیا جاسکتا ہے۔

1) غیر اوزانی اعشاری اعداد 2) اوزانی اعشاری اعداد

غیر اوزانی اعشاری اعداد کو ان کی ترتیب کی ٹیکنیکس کی بنیاد پر مزید دو حصوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

1) سادہ مجموعی طریقہ 2) سادہ اوسطِ اضافی طریقہ

اسی طرح اوزانی اعشاری اعداد کو مزید دو زمروں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

1) اوزانی مجموعی طریقہ 2) اوزانی اوسط اضافی طریقہ

6.5 کلیدی الفاظ (Keywords)

1. اعشاری اعداد (Index Numbers): متغیرات میں تبدیلیوں کی پیائش کا آلہ۔

2. سادہ مجموعی طریقہ (Simple Aggregative Method): رواں برس میں تمام اشیاء کی مجموعی قیمت بنیادی سال کی کل قیمت کے فیصد پر مشتمل ہے۔

3. سادہ اوسط اضافی طریقہ (Simple Average of Relative Method): اس طریقہ میں مختلف مدات کی قیمتیں بنیادی کے لیے 100 فرض کرلیا جاتا ہے اور رواں برس کی قیمتوں کو بنیادی سال کی قیمتوں کے فیصد کے طور پر ظاہر کیا جاتا ہے۔

6.6 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

معروضی جوابات کے حامل سوالات

1) ________ کے لیے اعشاری اعداد ضروری ہیں۔ (تقابلی مطالعہ)

2) ________ متغیرات میں تبدیلیوں کی پیائش کا اہم آلہ۔ (اعشاری اعداد)

3) ________ میں ہر ایٹم کے لیے یکسا اوزان ہوتے ہیں۔ (غیر اوزانی اعشاری اعداد)

4) ________ طریقہ سادہ اور آسان ہے۔ (سادہ مجموعی طریقہ)

5) یکساں اکائیوں کی صورت میں ہر اکائی کو ________ اہمیت دی جاتی ہے۔ (یکساں / مساوی)

6) اعشاری اعداد کو زر کی قوت خرید معلوم کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ (صحیح / غلط)

7) اعشاری اعداد متغیرات میں تبدیلیوں کی پیائش کا آلہ نہیں ہے۔ (صحیح / غلط)

8) غیر اوزانی اعشاری اعداد میں ہر ایٹم کے اوزان یکساں نہیں ہوتے۔ (صحیح / غلط)

9) سادہ مجموعی طریقہ آسان ہوتا ہے۔ (صحیح / غلط)

10) سادہ مجموعی طریقہ میں ضابطہ استعمال نہیں ہوتا۔ (صحیح / غلط)

مختصر جوابات کے حامل سوالات

1) اہم اعشاری اعداد کے معنی و مفہوم کو بیان کیجیے۔

2) تبدیلیوں کی پمائش کا آلہ کونسا ہے؟

3) اوزانی اعشاری اعداد پر مختصر نوٹ لکھیے۔

4) سادہ مجموعی طریقہ کیا ہے؟

5) سادہ اوسط اضافی طریقہ کو سمجھائیے۔

طویل جوابات کے حامل سوالات

1) اعشاری اعداد کی درجہ بندی کو بیان کیجیے۔

2) سادہ مجموعی طریقہ کیا ہے۔اس کے فایدے اور نقصانات کیا ہیں۔

3) سادہ اوسط اضافی طریقہ کیا ہے۔اس کے فایدے اور نقصانات کو واضح کیجیے۔

4) درجہ ذیل اعداد و شمار کی مدد سے سادہ مجموعی طریقہ (Simple Aggregative Method) سے اعشاری اعداد (Index Numbers) معلوم کیجیے۔

اشیاء	2020 میں قیمت	2021 میں قیمت
چاول	40	60
جوار	60	90
گیہوں	85	125
مکئ	25	35
دالیں	30	40

(جواب: 145.83)

5) 2019 کو بنیاد مان کر اعشاری اعداد ترتیب دیجیے۔

اشیاء	2019میں قیمت	2020میں قیمت
M	50	70
N	40	60
O	80	90
P	110	120
Q	20	20

(جواب:120)

6) 2018کو بنیاد مان کر2019کے لیے انڈیکس نمبرز معلوم کیجیے۔

اشیاء	2018میں قیمت	2019میں قیمت
E	36	39
F	40	40
G	46	50
H	40	46

(جواب:108.02)

7) درجہ ذیل اعداد و شمار سے سادہ مجموعی طریقہ سے انڈیکس نمبر معلوم کیجیے۔

اشیاء	2017میں قیمت	2018میں قیمت
جوار	162	171
چاول	256	164
مکئی	257	189
گیہوں	132	145

(جواب:82.9)

8) درجہ ذیل میں اشیاء کی قیمتیں دی گئیں ہیں۔Price Relativeطریقہ سے انڈیکس نمبر معلوم کیجیے۔

اشیاء	2015میں قیمت	2016میں قیمت
A	50	70
B	40	60

C	80	90
D	110	120
E	20	20

(جواب:120.9)

9) ذیل میں تین برسوں کے اعداد وشمار دیے گئے ہیں۔2015 کو بنیاد بنا کر 2016 اور 2017 کے لیے انڈیکس نمبر معلوم کیجیے۔

اشیاء	2015 میں قیمت	2016 میں قیمت	2017 میں قیمت
گیہوں	495	504	538
چاول	306	408	526
مکئی	102	152	182
جوار	246	304	258

(جواب:2016 کے لیے 119.06 اور 2017 کے لیے 122.19)

10) درجہ ذیل اعداد وشمار سے قیمت واری اعشاری اعداد Price Relatives کی بنیاد پر اوسط حسابیہ اور جیومتریائی اوسط کو استعمال کرتے ہوئے معلوم کیجیے۔

اشیاء	2012 میں قیمت	2013 میں قیمت
M	45	55
N	60	70
O	20	30
P	50	75
Q	85	90
R	120	130

(جواب: (i) 125.52   (ii) 124.3

11) درجہ ذیل اعداد وشمار سے فشر کے مثالی انڈیکس کی تحسیب کیجیے۔

اشیاء	2010		2020	
	قیمت	مقدار	قیمت	مقدار
جوار	20	8	40	6
چاول	50	10	60	5

مکئی	40	15	50	15
گیہوں	20	20	20	25

(جواب: 121.77)

12) درجہ ذیل اعدادوشمار سے فشر کا آئیڈیل انڈیکس تحسیب کیجیے۔

اشیاء	بنیادی سال		رواں سال	
	قیمت	مقدار	قیمت	مقدار
M	12	10	15	12
N	15	7	20	5
O	24	5	20	9
P	5	16	5	14

(جواب:115.75)

اکائی 7۔ پاسچے اور لیسپیر انڈیکس نمبرز

(Paasche and Laspyeres Index)

اکائی کے اجزا:

7.0 تمہید (Introduction)

7.1 مقاصد (Objectives)

7.2 اہم اعشاری اعداد کے معنی ومفہوم (Meaning of Important Index Numbers)

7.3 پاسچے اور لیسپیر زانڈیکس کی نوعیت اور حدود (Nature and Scope of Paasche and Laspyres Index)

7.4 لیسپیر بمقابلہ پاسچے (Laspeyres Vs Paasche)

7.5 پاسچے انڈیکس کے فایدے اور نقصانات (Advantages and Disadvantages of Paasche Price Index)

7.6 لیسپیر طریقہ کے فایدے (Advantages of Laspayres Method)

7.7 پاسچے کے طریقہ میں اقدامات (Steps in Paasche Method)

7.8 لیسپیر کے طریقہ میں اقدامات (Steps in Laspyres Methos)

7.9 مقداری یا حجمی اعشاری اعداد (Quantity or Volume Index Numbers)

7.10 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

7.11 کلیدی الفاظ (Keywrods)

7.12 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

7.0 تمہید (Introduction)

عزیز طلباء! ہم نے اکائی نمبر 22 میں اوزانی اعشاری اعداد کے تعلق سے پڑھا کہ مختلف مدات یعنی ایٹمس کو اوزان Weights دیے جاتے ہیں، لیکن اوزان دینے کے طریقے مختلف ہوتے ہیں، چند اہم طریقوں کے بارے پڑھ چکے ہیں۔ جیسے لیسپیر ز، پاسچے، ڈاربش اینڈ باولے، فشر زمارش ایجورتھ، والش، کیلی کے طریقے وغیرہ۔ ان طریقوں سے اعشاری اعداد معلوم کیے جاتے ہیں۔ اکائی میں فشرز کے مثالی طریقے کو پڑھ چکے ہیں اور چند سوالات بھی حل کر چکے ہیں۔ اس اکائی میں ہم پاسچے اور لیسپیر زانڈیکس نمبرز کے بارے میں پڑھیں گے۔

7.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ

- پاسچے اور لیپیر ز انڈیکس کے بارے میں جان سکیں۔
- پاسچے اور لیپیر ز انڈیکس کے ضابطوں کی ترکیب واضح کر سکیں۔
- پاسچے اور لیپیر ز انڈیکس کے طریقوں پر سوالات حل کر سکیں۔
- مقداری اعشاری اعداد تحسیب کر سکیں۔

7.2 اہم اعشاری اعداد کے معنی و مفہوم (Meaning of Important Index Numbers)

پاسچے انڈیکس ایک کمپوزٹ پرائیس انڈیکس نمبر ہے جو ایک مدت کے دوران قیمت کی سطح میں تبدیلیوں کی پیائش میں فایدہ مند ہے۔ یہ ضابطہ افراط زر میں کمی وبیشی کی نشاندہی کرتا ہے۔ اُنیسویں صدی میں جرمنی سے تعلق رکھنے والا یہ ماہر شماریات پاسچے ہر من پہلا شخص تھا جس نے قیمتوں کی سطح میں تبدیلیوں کی تحسیب کی۔ اس انڈیکس کو دوسرے نام سے بھی جانا جاتا ہے جیسے Fixed Weight Index، Fixed Basket Index، Current Weight Indexوغیرہ۔ ان ناموں سے اس لیے جانا جاتا ہے کیونکہ اس ضابطہ کے لیے رواں مدت سے متعلق اوزان یا مقدار کو استعمال کیا جاتا ہے۔ حاصل شدہ عدد کو100 سے ضرب دیا جاتا ہے تاکہ ہمیں انڈیکس نمبر حاصل ہو۔ بنیادی سال کو100 تصور کیا جاتا ہے اگر محصلہ عدد100 سے زیادہ ہو، تب یہ افراط زر کی نمایندگی کرے گا اور اگر عدد100 سے کم ہو تب یہ قیمت کی سطحDeflation(قلت زر) کی نمایندگی کرے گی۔ اس طریقہ کو پاسچے نے1874 میں پیش کیا۔

لیسپیر انڈیکس کو لیسپیر نے1871 میں پیش کیا۔ یہ طریقہWeighted Aggregative Index دیتا ہے۔ یہ طریقہ کچھ اور نہیں بلکہConsumer Price Index کی تحسیب کا ایک طریقہ کار ہے۔ لیسپیر ایک ماہر معاشیات تھا۔ اس کا تعلق بھی جرمن سے تھا۔ اس نے بنیادی سال کے مقابلہ میں قیمتوں میں تبدیلی تجزیہ کو پیش کیا۔ اس طریقہ کے تحت انڈیکس100 سے زیادہ ہو تو قیمتوں میں تبدیلی تجزیہ کو پیش کیا۔ اس طریقہ کے تحت انڈیکس100 سے زیادہ ہو تو قیمتوں میں اضافہ تصور کیا جاتا ہے، اور اگر100 سے کم ہو تو قیمتوں میں کمی سمجھا جائے گا۔ اس طریقہ میں بنیادی سال کو'0'صفر فرض کیا جاتا ہے، اور اسی برس کو مشاہدہ کی مدت بھی تصور کیا جاتا ہے۔ عام طور پر اس کو ملک کی معاشی ترقی کے تجزیہ کے لیے ماہرین معاشیات استعمال کرتے ہیں۔ اس سلسلے میں اشیا اور خدمات کی مہنگائی کو پیش نظر رکھا جاتا ہے۔

7.3 پاسچے اور لیسپیر ز انڈیکس کی نوعیت اور حدود

(Nature and Scope of Paasche and Laspyres Index)

پاسچے اور لیسپیر ز دونوں کا تعلق جرمنی سے ہے۔ پاسچے ماہر شماریات اور لیسپیر ماہر معاشیات تھا۔ لیکن دونوں کے نظریات الگ تھے۔ سوچنے کا انداز الگ تھا۔ اس کا اندازہ ان کے پیش کردہ ضوابط سے ہوتا ہے۔ ان کی پیش کردہ فکر رسائی کو Fixed Basket

Approach بھی کہتے ہیں۔ لیسپیر کا نظریہ ہے کہ صارفین کسی شئے کی صرف کی مقدار بنیادی سال کے مطابق ہوتی ہے۔ قیمتوں میں تبدیلی یعنی کمی و بیشی کا صرف پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ فرض کریں کہ کوئی شخص روزانہ 500 گرام آٹے سے بنی روٹیاں استعمال کرتا ہے تو قیمت میں اضافہ کے بعد بھی 500 گرام آٹے سے بنی روٹیاں استعمال کرے گا، یعنی آٹے کی مقدار صرف میں کمی یا اضافہ نہیں ہوگا۔ پاسچے نے لیسپیر کے پیش کردہ نظریہ کے برخلاف اس نے قیمتوں پر اپنی توجہ مرکوز کی اور کہا کہ صارف قیمتوں کی طرف سنجیدہ نہیں ہوتا، بلکہ وہ مقدار صرف کو باقی و برقرار رکھے گا، چہ جائیکہ قیمتوں میں اضافہ ہو کہ کمی۔ بہرکیف دونوں نے اپنی فکر رسائی کو پیش کیا۔ یہاں اس کی تفصیل میں جانے کی ضرورت نہیں۔ مختصراً یہ کہ دو طریقۂ کنزیومر پرایس انڈیکس یا قیمتوں میں تبدیلی کی پیائش کرتے ہیں۔

7.4 لیسپیر بمقابلہ پاسچے (Laspeyres Vs Paasche)

شماریات کے اعشاری اعداد کے میدان میں لیسپیر کا طریقہ پاسچے کے طریقہ پر فوقیت رکھتا ہے۔ کیونکہ لیسپیر کے مطابق اوزان دائمی ہوتے ہیں، جبکہ پاسچے کے مطابق اوزان کا تعین ہر مرتبہ الگ الگ کیا جاتا ہے۔ ہر دفعہ اوزان کا تعین کٹھن کام ہوتا ہے اور کام میں بھی اضافہ ہو جائے گا۔ لیسپیر طریقہ میں انڈیکس نمبر کو زیادہ قیمت پر بتایا جاتا ہے۔ قیمت میں اضافہ کا قیاس بڑھتی ہوئی قیمتوں کے دوران شئے کا صرف متبادل کی طرف منتقل ہو جاتا ہے۔ یعنی کسی شئے کی قیمت میں اضافہ ہونے پر صارفین متبادل شئے استعمال کرنے لگتے ہیں۔ جس کی قیمت نسبتاً کم ہوتی ہے۔ لیکن مہنگی اشیاء اور سستی اشیاء کے اوزان تبدیل نہیں ہوتے۔ جس کی وجہ سے قیاس اضافہ قیمتوں کی طرف کیا جاتا ہے۔ اس کے برخلاف پاسچے میں اس کے برعکس ہوتا ہے۔ قیاس قیمتوں میں کمی کی طرف کیا جاتا ہے۔ تاہم اس کا ہرگز یہ مطلب نہیں کہ لیسپیر کا انڈیکس ہمیشہ پاسچے کے انڈیکس سے زیادہ ہوتا ہے۔

اگر بنیادی مدت سے رواں مدت میں تبدیلی حقیقی نہ ہو تو دونوں اعشاری اعداد اطمینان بخش نتائج کا باعث ہوتے ہیں۔ ان حالات میں لیسپیر کا طریقہ زیادہ مقبول ہوگا۔ کیونکہ یہاں اوزان مستقل ہوتے ہیں، جس کی وجہ سے اعشاری اعداد کو ترتیب دینا بھی آسان ہوتا ہے۔ اگر تمام اشیاء کی قیمتوں میں تبدیلی یکساں شرح میں ہو تو دونوں طریقوں میں انڈیکس نمبرز کی قدر برابر ہوگی، اور اوزانی نظام بے معنی ہو کر رہ جاتا ہے۔ اسی طرح اگر تمام اشیاء کی مقداریں یکساں شرح میں تبدیل ہوں تو دونوں طریقوں کے تحت انڈیکس نمبرز کی قدر برابر ہوگی، کیونکہ q0، q1 کے برابر ہوگا۔

7.5 پاسچے انڈیکس کے فایدے اور نقصانات

(Advantages and Disadvantages of Paasche Price Index)

پاسچے پرائیس انڈیکس کا طریقہ نہایت مقبول عام طریقہ ہے۔ اس طریقہ کے ذریعہ افراطِ زر کی شرح میں کمی و بیشی کا مشاہدہ کیا جاسکتا ہے۔ اس طریقہ کے فایدے ذیل میں دیے گئے ہیں۔

1) یہ طریقہ فراہم اشیاء کی رواں مقدار کی سطح کو پیش نظر رکھتے ہوئے صرف پر توجہ مرکوز کرتا ہے۔

2) اس طریقہ کے تحت اشیاء اور خدمات کا کلی طور پر تجزیہ کیا جاتا ہے، اس تجزیہ میں سستی اور مہنگی اشیاء شامل ہوتی ہیں، کوئی تخصیص نہیں ہوتی۔

3) یہ طریقہ روزمرہ اشیاء اور خدمات پر حکومت کی پالیسی کی عکاسی کرتا ہے۔ کیونکہ ان اشیاء کو ہر دن عوام کی ایک بڑی تعداد استعمال کرتی ہے۔

4) اس طریقہ کے ذریعہ حکومت کو اشیاء کی بڑھتی قیمتوں اور معیار زندگی کی لاگت میں اضافہ پر انتباہ دیے جانے کا باعث ہے، تاکہ حکومت تدارکی اقدامات لے کر عوام کو راحت پہنچائے۔

5) افراطِ زر پر قابو پانے کے لیے مستقبل میں پالیسیوں کی تدوین کے لیے ایک پیمانہ ہے۔

پاسچے طریقہ کے نقصانات (Disadvantages of Paasche Method)

ذیل میں پاسچے پرائیس انڈیکس کے نقصانات دیے گئے ہیں۔

1) قیمتوں میں تبدیلیوں پر گاہک ردعمل ظاہر کرنے سے قبل ہی انڈیکس ان تبدیلیوں کو تاڑ لیتا ہے۔ اس لیے قیمتوں کو کم ظاہر کیا جاتا ہے۔

2) عوام کے ذوق اور ترجیحات میں تبدیلی کو شمار نہیں کیا جاتا۔

3) معیشت کی نشوونما انڈیکس نظر انداز کرتے ہیں۔

4) رواں انڈیکس کے لیے اعداد شمار کا حاصل کرنا انتہائی دشوار ہوتا ہے۔

7.6 لیسپیر طریقہ کے فایدے (Advantages of Laspayres Method)

لیسپیر طریقہ کے فایدے درجہ ذیل ہیں۔

1) لیسپیر طریقہ سمجھنے اور تحسیب میں آسان ہے۔

2) یہ طریقہ نہایت کفایتی ہے، کیونکہ اعداد و شمار آسانی سے دستیاب ہوتے ہیں۔

3) محققین کو آنے والے برسوں کی مقدار تحسیب کی ضرورت نہیں، کیونکہ اس طریقہ میں صرف بنیادی برس کی مقداریں استعمال کی جاتی ہیں۔

4) یہ انڈیکس اشیاء کی موزوں قیمت اور صحیح امیج (شبیہ) دیتا ہے، کیونکہ اس طریقہ میں بنیادی برس کی مقداریں حساب میں لی جاتی ہیں۔ زیر مشاہدہ برس کی مقداریں حساب میں نہیں لی جاتیں۔

5) تقابلی جائیز نہایت شفاف ہوتا ہے، کیونکہ انڈیکس میں تبدیلی کا مطلب قیمتوں میں تبدیلی ہے۔

6) افراطِ زر کے نظم کے لیے پالیسیوں کی تدوین کے لیے انڈیکس سے اخذ کردہ نتائج نہایت مددگار ہوتے ہیں۔

لیسپیر طریقہ کے نقصانات (Disadvantages of Laspyres Method)

لیسپیر طریقہ کے نقصانات درجہ ذیل ہیں۔

1) لیسپیر انڈیکس قیمتوں میں اضافہ کو بڑھا چڑھا کر پیش کر سکتا ہے۔

2) رواں برس کی مقداروں کو یہ طریقہ بروئے خاطر نہیں لاتا۔

3) اس طریقہ میں معیشت کی نشوونما کی بڑھتی ہوئی شرح کو پیش نظر رکھا نہیں جاتا۔ اس کے علاوہ لیسپیر پیداواری سطح میں تبدیلی کو بھی شمار نہیں کرتا، اور بازار میں سرگرم رول ادا کرنے والے اداروں کو بھی نظر انداز کرتا ہے۔

4) لیسپیر سے منسوب انڈیکس معیار یعنی کوالیٹی میں تبدیلی، بازار میں قیمتوں پر اثر پڑتا ہے۔ ایسا واقع ہونے پر بھی حقیقی تصویر سامنے نہیں آتی۔

5) بنیادی برس کو قطعیت دینے میں بھی مشکلات کا سامنا کرنا پڑتا ہے۔

7.7 پاسچے کے طریقہ میں اقدامات (Steps in Paasche Method)

اس طریقہ کے تحت بنیادی برس کے مقابل رواں برس کے مقداروں کو اوزان کے طور پر استعمال کیا جاتا ہے۔ پاسچے کے اس طریقہ میں انڈیکس کی ترتیب کے لیے درجہ ذیل اقدامات لیے جاتے ہیں۔

1) مختلف اشیاء کی رواں برس میں مروجہ قیمت کو رواں برس کے اوزان سے ضرب دیں اور $\sum p_1q_0$ حاصل کریں۔

2) مختلف اشیاء کی بنیادی برس کی مروجہ قیمتوں کو رواں برس کے اوزان سے ضرب دیں اور $\sum p_0q_1$ حاصل کریں۔

3) $\sum p_1q_0$ کو $\sum p_0q_1$ سے تقسیم کریں اور خارج قسمت کو 100 سے ضرب دیں اور درجہ ذیل فارمولے کو استعمال کریں۔

7.8 لیسپیر کے طریقہ میں اقدامات (Steps in Laspyres Methos)

اس طریقہ کو لیسپیر نے 1871 میں وضع اور پیش کیا تھا۔ یہ ایک اوزانی مجموعی اعشاری عدد ہے۔ اس طریقہ میں بنیادی برس کی مقداریں اوزان کا تعین کرتی ہیں۔ اعشاری عدد کی ترتیب میں درجہ ذیل اقدامات لیے جاتے ہیں۔

1) رواں برس کی قیمتوں کو بنیادی برس کے مقداری اوزان سے ضرب دیں اور حاصل ضرب کے طور پر حاصل اعداد کا میزان معلوم کریں۔ اس کی مجموعی قدر $\sum p_1q_0$ ہو گی۔

2) بنیادی برس کی قیمتوں کو بنیادی برس مقداری اوزان سے ضرب دیں اور مجموعی حاصل ضرب معلوم کریں۔ اس کی مجموعی قدر $\sum p_0q_0$ ہو گی۔

3) $\sum p_1q_0$ کو $\sum p_0q_0$ سے تقسیم کر کے خارج قسمت کو 100 سے ضرب دیں۔ یہ عدد رواں برس کا اعشاری عدد ہو گا۔

لیسپیر کا یہ طریقہ عملی طور پر کثیر الاستعمال ہے۔ کیونکہ یہ طریقہ بنیادی برس کے قایم / معینہ اوزان کی بنیاد پر ترتیب دیا گیا ہے۔

اعشاری عدد کی ترتیب میں ہر مرتبہ اوزان کا تعین کرنا کوئی ضروری نہیں۔ یہی اس طریقہ کا اہم فایدہ ہے۔ لیکن یہی فایدہ نقصان میں اس وقت تبدیل ہو جاتا ہے جبکہ اعشاری اعداد کو قیمتوں میں اضافہ ہو رہا ہو، اور صارفین اس شئے کا استعمال کر رہے ہوں۔ اوزان میں ہمیشہ کی طرح اعشاری اعداد کی ترتیب میں کوئی تبدیلی نہیں ہو گی۔ ایسی صورت میں قیاس اضافی رجحان کی طرف ہو گا۔ جب اشیاء کی قیمتوں میں کمی ہونے لگے تب اس کا صرف بڑھے گا۔ اس کے باوجود اوزان معین ہوں گے۔ جیسا کہ قیمتوں میں اضافہ پر مقرر تھے، جبکہ اوزان گھٹتی ترتیب میں ہونا چاہیے تھا۔ چونکہ اوزان میں اشیاء کی قیمتوں میں کمی و بیشی پر کوئی تبدیلی نہیں ہوتی، اس لیے قیاس دوبارہ اضافی رجحان کا حامل ہو گا۔ ضابطہ درجہ ذیل ہو گا۔

$$p_{01} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} \text{x}100$$

اب ہم ان دونوں طریقوں کے تحت سوالات کے حل کے طریقہ پر توجہ مرکوز کریں گے۔

تمثیل 1: درجہ ذیل میں چار اشیاء کی قیمتیں 2019 اور 2020 سے متعلق دی گئی ہیں۔ سال 2020 کے لیے پاسچے اور لیسپیر کے طریقوں سے اعشاری اعداد معلوم کیجیے۔

اشیاء	2019		2020	
	قیمت (روپے)	مقدار (کلو گرام)	قیمت (روپے)	مقدار (کلو گرام)
چاول	5	100	6	150
مکئی	4	80	5	100
جوار	25	60	5	72
گیہوں	120	30	7	33

حل:

اعشاری اعداد کی تحسیب

اشیاء	2019		2020					
	قیمت p_0	مقدار q_0	قیمت p_1	مقدار q_1	$\sum p_1q_0$	$\sum p_0q_0$	$\sum p_1q_1$	$\sum p_0q_1$
چاول	5	100	6	150	600	500	900	750
مکئی	4	80	5	100	400	320	500	400
جوار	25	60	5	72	300	150	360	180
گیہوں	120	30	9	33	270	360	297	396
					$\sum p_1q_0$ 1570	$\sum p_1q_0$ 1330	$\sum p_1q_0$ 2057	$\sum p_1q_0$ 1726

پاسچے کے طریقہ کے تحت اعشاری اعداد کی تحسیب

$$p_{01} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} x100$$

$$= \frac{2057}{1726} x100$$

$$= \frac{205700}{1726}$$

$$= 119.177$$

لیسپیر کے طریقہ کے تحت اعشاری اعداد کی تحسیب

$$p_{01} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} x100$$

$$= \frac{1570}{1330} x100$$

$$= \frac{157000}{1330}$$

= 118.05

پاسچے کے طریقہ کے تحت اعشاری اعداد کی تحسیب

119.177 =

لیسپیر کے طریقہ کے تحت اعشاری اعداد کی تحسیب

118.05 =

تمثیل2: درجہ ذیل معلومات کی بنیاد پر2020 کے لیے قیمت واری اعشاری اعداد2010 کی بنیاد پر لیسپیر اور پاسچے کے طریقہ سے معلوم کیجیے۔

اشیاء	2010		2020	
دالیں باجرہ جوار گیہوں	قیمت(روپے)	مقدار(کلوگرام)	قیمت(روپے)	مقدار(کلوگرام)

حل:

اشیاء	2010		2020					
	قیمت p_0	مقدار q_0	قیمت p_1	مقدار q_1	p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
دالیں	20	8	40	6	320	160	240	120
باجرہ	50	10	60	5	600	500	300	250
جوار	40	15	50	15	750	600	750	600
گیہوں	20	20	20	25	400	400	500	500
					$\sum p_1q_0$	$\sum p_0q_0$	$\sum p_1q_1$	$\sum p_0q_1$
					2070	1660	1790	1470

پاسچے کے طریقہ کے تحت اعشاری اعداد کی تحسیب

$$p_{01} = \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1} x100$$

$$= \frac{1790}{1470} x100$$

$$= \frac{179000}{1470}$$

$$= 121.77$$

لیسپیر کے طریقہ کے تحت اعشاری اعداد کی تحسیب

$$p_{01} = \frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} x100$$

$$= \frac{2070}{1660} x100$$

$$= \frac{207000}{1660}$$

$$= 124.70$$

پاسچے کے طریقہ کے تحت اعشاری اعداد کی تحسیب

121.77 =

لیسپیر کے طریقہ کے تحت اعشاری اعداد کی تحسیب

124.70 =

تمثیل 3 : درجہ ذیل اعداد و شمار سے 2020 کو بنیاد بنا کر لیسپیر اور پاسچے کا پرائس انڈیکس ترتیب دیجیے۔

ایشیاء	2010		2021	
	قیمت (روپیے)	مقدار (کلو گرام)	قیمت (روپیے)	مقدار (کلو گرام)

ایندھن اور کوئلہ	4	2	6	3
باجرہ	3	5	2	1
دالیں	8	2	4	6

حل:

پاسچے کے طریقہ کے تحت اعشاری اعداد کی تحسیب

$$p_{01} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} x100$$

$$= \frac{44}{63} x100$$

$$= \frac{4400}{63}$$

$$= 69.84$$

لیسپیر کے طریقہ کے تحت اعشاری اعداد کی تحسیب

$$p_{01} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} x100$$

$$= \frac{30}{39} x100$$

$$= \frac{3000}{39}$$

$$= 76.92$$

7.9 مقداری یا حجمی اعشاری اعداد (Quantity or Volume Index Numbers)

مقداری اعشاری اعداد مقداروں میں اوسط تبدیلی کی پیمائش کرتے ہیں اور ہمیں تیار کردہ یا فروخت کردہ اشیاء کی مقدار میں تبدیلیوں کا تقابل کرنے میں آسانی کا باعث ہوتے ہیں۔ اعشاری اعداد اضافی طریقہ یعنی سادہ اور اوزانی طریقوں سے ترتیب دیے جاسکتے ہیں، اور ساتھ ہی مجموعی طریقہ سے بھی ترتیب دیے جاسکتے ہیں جہاں اوزان کو پیش نظر رکھا جاسکتا ہے۔ مقداری یا حجمی اعشاری اعداد کے اوزان اشیاء کی قیمتیں ہوتی ہیں۔ اس طرح مقداری اعشاری اعداد کو پرایس انڈیکس نمبرز سے بآسانی اخذ کیا جاسکتا ہے۔ یہاں صرف p کو q میں تبدیل کیا جاتا ہے۔ لیسپیر کے طریقہ کو مقداری اعشاری اعداد کی ترتیب کے لیے یوں دیکھا جاسکتا ہے۔ اس کا ضابطہ نیچے دیا گیا ہے۔

$$Q_{01} = \frac{\Sigma q_1 P_0}{\Sigma q_0 P_0} \times 100$$

جب پاسچے کا فارمولہ استعمال کیا جائے، فارمولہ درجہ ذیل ہو گا۔

$$Q_{01} = \frac{\Sigma q_1 P_1}{\Sigma q_0 P_1}$$

تمثیل4: درجہ ذیل اعداد و شمار کی مدد سے مقداری اعشاری اعداد تحسیب کے لیے لیسپیر کا طریقہ استعمال کیجیے۔

قیمتیں (روپے)	مقدار		خوردنی اشیاء
2018	2019	2018	
15	12.5	15	چنا
20	15.0	10	جوار
10	7.5	5	باجرہ

حل: مقداری اعشاری اعداد کی تحسیب

q_0p_0	q_1p_0	p_0	q_1	q_0	خوردنی اشیاء
225	187.5	15	12.5	15	چنا
200	300.0	20	15.0	10	جوار
50	75.0	10	7.5	5	باجرہ

لیسپیر کے طریقہ کے مطابق مقداری اعشاری اعداد

$$Q_{01} = \frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} x100$$

$$= \frac{562.5}{475} x100$$

$$= \frac{56250}{475}$$

$$= 118.42$$

سال 2018 کے مقابل مقداری اعشاری اعداد میں 18.42 کا اضافہ ہوا۔

تمثیل5: پاسچے کے طریقہ کے تحت 2018 کے لیے مقداری اعشاری اعداد کی تحسیب کیجیے، جبکہ بنیاد 2010 ہو۔

قیمت (روپے)		مقدار		اشیاء
2018	2010	2018	2010	
450	250	75	50	پٹرول
250	160	50	40	دالیں
180	75	36	30	گیہوں
148.5	180	16.5	15	کوئلہ

مذکورہ بالا سوال میں ہمیں اور دیا گیا ہے۔ کی قیمتیں 2010 کی قیمتوں کو 2018 کی مقدار سے تقسیم کرنے پر حاصل ہوں گی۔

پٹرول $= \frac{450}{75} = 6/-$

دالیں $= \frac{250}{50} = 5/-$

گیہوں $= \frac{180}{36} = 5/-$

کوئلہ $= \frac{148.5}{16.5} = 9/-$

پاسچے کے مقداری اعشاری اعداد کی تحسیب

اشیاء	q_0	q_1	p_1	q_1q_1	q_0q_1
پٹرول	50	75	6	450	300
دالیں	40	50	5	250	200
گیہوں	30	36	5	180	150
کوئلہ	15	16.5	9	148.5	135
				1028.5	785

$$Q_{01} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1} x100$$

$$= \frac{1028.5}{785} x100$$

$$= \frac{102850}{785}$$

$$= 131.02$$

7.10 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

پاسچے انڈیکس ایک کمپوزٹ (مرکب) قیمت پر مبنی انڈیکس نمبر ہے جو ایک مدت کے دوران قیمت کی سطح میں تبدیلیوں کی پیمائش میں فایدہ مند ہے۔ یہ ضابطہ افراطِ زر میں کمی و بیشی کی نشاندہی کرتا ہے۔ پاسچے پہلا شخص تھا جس نے قیمتوں کی سطح میں تبدیلیوں کی تحسیب کی۔ لیسپیر انڈیکس کو لیسپیر نے 1871 میں پیش کیا۔ یہ طریقہ دراصل Consumer Price Index کی تحسیب کا ایک طریقہ کار ہے۔ لیسپیر نے بنیادی سال کے مقابلے میں قیمتوں کے تجزیہ کو پیش کیا۔ اس طریقہ کے تحت انڈیکس 100 سے زیادہ ہو تو قیمتوں میں اضافہ تصور

کیا جاتا ہے اور اگر 100 سے کم ہو تو قیمتوں میں کمی تصور کیا جائے گا۔ اس طریقہ میں بنیادی سال کو صفر فرض کیا جاتا ہے اور اسی برس کو مشاہدہ کی مدت بھی تصور کیا جاتا ہے۔ عام طور پر اس کو ملک کی معاشی ترقی کے تجزیہ کے لیے ماہرین معاشیات استعمال کرتے ہیں۔

پاسچے اور لیسپیر دونوں کا تعلق جرمنی سے ہے۔ پاسچے ماہر شماریات تھا اور لیسپیر ماہر معاشیات تھا۔ دونوں کے نظریات اور سوچنے کا انداز مختلف تھا۔ اس کا اندازہ ان کے پیش کردہ ضوابط سے ہوتا ہے۔ ان کی پیش کردہ فکر رسائی کو Fixed Basket Approach کہتے ہیں۔

شماریات کے اعشاری اعداد کے میدان میں لیسپیر کا طریقہ پاسچے کے طریقہ پر فوقیت رکھتا ہے۔ کیونکہ لیسپیر کے مطابق اوزان دائمی ہوتے ہیں، جبکہ پاسچے کے مطابق اوزان کا بار بار تعین مشکل کام ہوتا ہے۔

7.11 کلیدی الفاظ (Keywrods)

1) قلت زر (Deflation) : کسی ملک کی معیشت میں قیمتوں کی عمومی سطح میں کمی کو قلت زر کہتے ہیں۔

2) بنیادی / اساسی سال (Base Year) : وقتی سلسلے کے بنیادی نکتہ کو بنیادی سال کہتے ہیں۔

3) رواں سال (Current Year) : مالی سال کو رواں سال کہتے ہیں۔

4) افراطِ زر (Inflation) : ایک مدت کے دوران قوتِ خرید میں کمی کو افراطِ زر کہتے ہیں۔

5) اوزان (Weights) : کسی ایٹم کی اہمیت کی مناسبت سے ترجیح عدد کی شکل میں دینا اوزان ہے۔

7.12 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

معروضی جوابات کے حامل سوالات

1) پاسچے انڈیکس ایک __________ ہے۔ (کمپوزٹ پرائس انڈیکس)

2) F.B.I. کو پھیلایئے __________۔ (Fixed Basket Index)

3) لیسپیر انڈیکس کو __________ نے پیش کیا۔ (لیسپیر)

4) پاسچے کا تعلق __________ ملک سے تھا۔ (جرمنی)

5) پاسچے __________ تھا۔ (ماہر معاشیات)

6) پاسچے کا ضابطہ افراط زر میں کمی و بیشی کو ظاہر کرتا ہے۔ (صحیح / غلط)

7) لیسپیر نے اپنے انڈیکس کو 1850 میں پیش کیا۔ (صحیح / غلط)

8) لیسپیر ماہر تجارت تھا۔ (صحیح / غلط)

9) پاسچے لیسپیر پر فوقیت نہیں رکھتا۔ (صحیح / غلط)

10) لیسپیر کا طریقہ سمجھنے میں مشکل ہے۔ (صحیح / غلط)

مختصر جوابات کے حامل سوالات

1) افراطِ زر کیا ہے؟

2) اوزان سے کیا مراد ہے؟

3) معاشی تجزیہ کے لیے کیا استعمال کیا جاتا ہے۔

4) قلت زر کیا ہے؟

5) پاسچے اور لیسپیر زانڈیکس کے حدود کیا ہیں؟

طویل جوابات کے حامل سوالات

1) پاسچے اور لیسپیر زانڈیکس کے معنی و مفہوم بیان کیجیے۔

2) لیسپیر بمقابلہ پاسچے۔

3) پاسچے کے طریقہ کے فایدے اور نقصانات بیان کیجیے۔

4) لیسپیر کے طریقہ کے فایدے اور نقصانات بیان کیجیے۔

5) درجہ ذیل میں چار اشیاء کی قیمتیں 2019 اور 2020 سے متعلق دی گئی ہیں۔ سال 2020 کے لیے پاسچے اور لیسپیر کے طریقوں سے اعشاری اعداد معلوم کیجیے۔

اشیاء	2019		2020	
	قیمت (روپیے)	مقدار (کلوگرام)	قیمت (روپیے)	مقدار (کلوگرام)
گنا	5	100	6	150
شکر	4	80	5	100
روئی	25	60	5	72
چاول	120	30	7	33

6) درجہ ذیل اعداد و شمار کی مدد سے مقداری اعشاری اعداد تحسیب کے لیے لیسپیر کا طریقہ استعمال کیجیے۔

خوردنی اشیاء	مقدار		قیمتیں (روپیے)
	2018	2019	2018
چنا	15	12.5	15
جوار	10	15.0	20
باجرہ	5	7.5	10

اکائی 8۔ مقطعات اور نظریہ ماترس

(Matrices & Determinants)

اکائی کے اجزا:

8.0	تمہید	(Introduction)
8.1	مقاصد	(Objectives)
8.2	ماترس کے معنی و مفہوم	(Meaning & Definition of Matrices)
8.3	ماترسوں کے اقسام	(Types of Matrix)
8.4	الجبرائی ماترس	(Algebra of Matrices)
8.5	ماترس کی ضرب	(Multiplication of Matrices)
8.6	ماترس کاٹرانس پور	(Transpose of a Matrix)
8.7	اکتسابی نتائج	(Learning Outcomes)
8.8	کلیدی الفاظ	(Keywords)
8.9	نمونہ امتحانی سوالات	(Model Examination Questions)
8.10	تجویز کردہ اکتسابی مواد	(Suggested Learning Resources)

8.0 تمہید (Introduction)

مربع، مستطیل وغیرہ علم ریاضی کے چند بنیادی پہلوہیں جس کو ہر مضمون میں استعمال کیا جاتا ہے۔قومی وبین الاقوامی کھیل کے مقابلوں کے دوران دیکھتے ہیں کہ کھیل میں مخصوص کھلاڑیوں کی تعداد ہوتی ہے۔ کھیل کی نوعیت کے اعتبار سے قابل باکمال کھلاڑیوں کا ہی انتخاب کیا جاتا ہے۔کھلاڑی دراصل ایک گروپ کی شکل میں رہتے ہیں۔ گاڑیوں کی پارکنگ کے مقام پر گاڑیوں کی پارکنگ کا نظم ہوتا ہے۔ کار، موٹر سائیکل وغیرہ کے لئے علٰحدہ علٰحدہ علاقے مختص ہوتے ہیں جہاں پر ترتیب یا قطار کی شکل میں گاڑیوں کو پارک کیا جاتا ہے اس طرح بازار میں ہر شئے کا علٰحدہ علٰحدہ بازار ہوتا ہے۔ فروٹ بازار، ترکاری بازار، گوشت بازار وغیرہ۔وہاں پر بھی تاجرین ترتیب سے اپنا مقام رکھتے ہیں۔ یہ تمام اپنی ترتیب بناتے ہیں اسی طرح اعداد کی ترتیب علم ریاضی میں کافی اہمیت رکھتی ہے۔اس اکائی میں مقطعات اور نظریہ ماترس کے متعلق معلومات حاصل کریں گے۔

8.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- مصفوفات کے معنی اور مفہوم کی وضاحت کر سکیں گے۔
- مصفوفات کے مختلف اقسام کو بیان کر سکیں گے۔
- مصفوفات کے حسابی طریقہ کار کی وضاحت کر سکیں گے۔
- مصفوفات کے استعمالات کو بیان کر سکیں گے۔

8.2 ماترس کے معنی و مفہوم (Meaning & Definition of Matrices)

علم ریاضی ایک اہم مضمون ہے جس زمانہ قدیم سے مختلف میدانوں میں زیر استعمال ہے۔ابتدامیں اس کو گھریلو وکاروباری میدانوں میں استعمال کیاجاتا تھا۔زمانہ کی ترقی کے ساتھ ساتھ اس کا استعمال بھی وسیع وجامع انداز میں ہونے لگا۔علم ریاضی میں جدید رجحانات،نئے تصورات،نئے ضوابط کے سبب اس مضمون کو طب،سائنس وانجینئرنگ میدان میں بھی استعمال کیاجانے لگا۔ماترس (Matrices) بھی علم ریاضی کاایک اہم موضوع ہے۔عصر حاضر میں اس کی کافی اہمیت ہے۔ماترس کے معنی ومفہوم کی تفہیم کے لیے ذیل کی تعریفات کامطالعہ کیجئے۔

لفظ ماترس (Matrix) دراصل لاطینی لفظ (Matrix) سے ماخوذ ہے جس کے معنی بنیاد یاسانچہ کے ہیں۔

ماترس کے تصور کو 200 قبل مسیح میں چین میں استعمال شروع ہوا۔

لفظ یا اصطلاح Matrix کو 1850ء میں برطانوی ماہر ریاضی جیمس جوزف سلوٹر (James Joseph Sylvester) نے اعداد کو ترتیب میں ظاہر کرنے کے لیے ماترس کو پیش کیا۔اسی کے قریبی دوست برطانوی ماہر ریاضی آتھر کلے (Arther Cayley) نے ماترس کے نظریہ کو کافی ترقی دی اور اس نے ماترس پر 1858ء میں "A Memoir on the Theory of Matrices" عنوان پر اپنا مقالہ پیش کیا جو جدید ماترس کے نظریات کی بنیاد ہے۔

ماترس کے مفہوم اور الجبرا میں اس کے اطلاق کی وضاحت ہوتی ہے اسی لیے انہیں ماترس کا باوا آدم بھی کہتے ہیں۔انہوں نے ماترس کی ترتیب، جمع، تفریق وضرب کے اصولوں کو ترتیب دیا۔

- ماترس (Matrices) علم ریاضی کا ایک اہم پہلو ہے جس میں مشابہ اعداد کو صف اور کالم میں ترتیب دیتے ہوئے انہیں براکٹ میں بتلایا جاتا ہے جس کو ماترس یا مصفوفات کہتے ہیں۔ماترس کو انگریزی جلی حروف A,B یا C سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

Matrices are rectangular arrangements of numbers in rows and columns enclosed within a bracket are called a matrix. It is generally denoted by capital letters A, B, C... etc.

ذیل میں ماترس کے صف اور کالم کو بتلایا گیا ہے۔

In general, the matrix with "m" rows and "n" columns can be written as

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \vdots & \vdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

$$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n},\ i=1,2,3...m\ \ ,\ j=1,2,3...n$$

ایک ماترس کا رتبہ(Order of a Matrix): ماترس میں اعداد کو عمودی شکل میں ترتیب دیتے ہیں جس کو کالم (Column) کہتے ہیں۔ اسی طرح ایسے اعداد جنہیں افقی شکل میں ترتیب دیتے ہوں وہ صف (Row) کہلاتے ہیں۔ جس کو ماترس کے براکٹ کے باہر $m\times n$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اگر کسی ماترس میں سف کی تعداد m اور کالم کی تعداد n ہو تو ماترس کی ترتیب $m\times n$ ہو گی۔

Order of a Matrix: A matrix having m rows and n column are called a matrix of order $m\times n$

ذیل میں امثال کے ذریعہ ماترس کی ترتیب کو بتلایا گیا ہے۔

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

مذکورہ مثال میں دو صف اور دو کالم ہیں اسی لیے اس ماترس کو 2×2 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

(In Matrix (i) there are two rows and two columns. Hence it is called a 2×2 matrix or a matrix of order 2×2)

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

اس مثال میں تین صف اور دو کالم ہیں اس لیے اس ماترس کو 2×3 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

(In Matrix (ii) there are three rows and two columns. This is called a 3×2 matrix or a matrix of order 3×2)

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & -2 \end{bmatrix}$

اس ماترس میں تین صف اور تین کالم ہیں اسی لیے اس ماترس کو 3×3 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

(In Matrix (iii) there are three rows and three columns. This is called a 3×3 matrix or a matrix of order 3×3)

8.3 ماترسوں کے اقسام (Types of Matrix)

ماترس میں اعداد کو صف اور کالم کی شکل میں بتلایا جاتا ہے۔ ان کی تعداد کی بنیاد پر ماترس کے اقسام طے پاتے ہیں۔ ذیل میں ماترس کے چند اہم اقسام کو بتلایا گیا ہے۔

1۔ مربع ماترس 2۔ مستطیلی ماترس 3۔ صف ماترس 4۔ کالم ماترس 5۔ وتری ماترس 6۔ اکائی ماترس 7۔ صفری ماترس

1۔ مربع ماترس (Square Matrix):

ایسا ماترس جس میں صف اور کالم کی تعداد مساوی ہوتی ہو مربع ماترس کہلاتا ہے۔

(**Square Matrix:** A matrix is said to be square matrix if number of rows and columns are equal)

ذیل میں مربع ماترس کی مثالیں بتلائی گئی ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2\times2}, \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 9 \\ 3 & 6 & -2 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

2۔ مستطیلی ماترس (Rectangular Matrix)

ایسا ماترس جو مستطیل کی شکل میں پایا جاتا ہو مستطیلی ماترس کہلاتا ہے۔ اس ماترس میں صف اور کالم کی تعداد مساوی نہیں ہوتی۔

(**Rectangular Matrix:** A Matrix is said to be a rectangular matrix if number of rows is not equal to number of columns.)

ذیل میں مستطیلی ماترس کی مثالیں بتلائی گئی ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}_{3\times2}, \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & -5 & 9 \end{bmatrix}_{2\times4}$$

3۔ صف ماترس (Row Matrix)

ایسا ماترس جس میں صرف ایک ہی صف پایا جاتا ہو لیکن کئی کالمس پائے جاسکتے ہوانہیں صف ماترس کہتے ہیں۔

(**Row Matrix:** A matrix if it is having only one row but may have many columns is said to be row matrix.)

ذیل میں صف ماترس کی مثال بتلائی گئی ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & -9 \end{bmatrix}$$

4۔ کالم ماترس (Column Matrix):

ایسا ماترس جس میں ایک کالم پایا جاتا ہو لیکن کئی صف پائے جاسکتے ہوں کالم ماترس کہلاتا ہے۔

(**Column Matrix:** A matrix if it is having only one column but may have many rows is said to be column matrix.)

ذیل میں کالم ماترس کی مثال بتلائی گئی ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

5۔وتری ماترس(Diagonal Matrix):

ایساماترس جس کے وتر میں اعداد پائے جاتے ہوں اور ماترس کے باقی تمام اعداد صفر ہوں وتری ماترس کہلاتا ہے۔

(**Diagonal Matrix:** A square matrix is called a Diagonal Matrix if all non-diagonal elements are zero.)

ذیل میں وتری ماترس کی مثال بتلائی گئی ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

6۔اکائی ماترس(Identity Matrix):

ایسامربع ماترس جس کے وتر میں 1 عدد ہو اور باقی تمام اعداد صفر ہوں وتری ماترس کہلاتا ہے۔

(**Identity Matrix:** In a diagonal matrix if all the diagonal elements are 1 is called Identity matrix. It is denoted by I.)

ذیل میں اکائی ماترس کی مثال بتلائی گئی ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7۔صفری یاعدیم ماترس(Zero or Null Matrix)

ایساماترس جس کے تمام اعداد صفر ہوں وہ صفری یاعدیم ماترس کہلاتا ہے۔یہ ماترس مربع یا مستطیل نما ہوتا ہے۔اس ماترس کو انگریزی حروف "O" سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس کے صفر کالم کو $O_{m\times n}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اس ماترس کو Null Matrix بھی کہتے ہیں۔

(**Zero or Null Matrix:** If each elements of a matrix are zero then it is called a zero (or) null matrix and it is denoted by O.

ذیل میں صفری ماترس کی مثال بتلائی گئی ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8.4 الجبرائی ماترس (Algebra of Matrices)

ماترس A اور ماترس B دونوں میں موجود صف اور کالم کی تعداد مساوی ہو اور اس میں موجود اعداد بھی مشابہ ہو تب ایسے دونوں ماترس آپس میں مساوی ہوتے ہیں۔ ذیل کے دو مثالوں پر غور کیجئے۔

Algebra of Matrices

(**Equal Matrices:** Two matrices A and B are equal if (i) They have same number of rows and columns. (ii) They have all corresponding elements are equal it is called Algebra of Matrices.)

ذیل میں دو صف اور دو کالم کے ساتھ دو ماترس A اور B کو بتلایا گیا ہے جس کے صف اور کالم اور اس کے اعداد آپس میں مشابہ ہیں اس لیے اس ماترس کو ماترس A، ماترس B کے مساوی ہے کہا جاتا ہے جس کو $A = B$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

In example (i) they are same number of rows and columns and all corresponding elements are same so they are equal $A = B$.

Examples: (i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

اسی طرح ذیل کے مثال میں دو صف اور تین کالم کے دو ماترس P اور Q کو بتلایا گیا ہے جس کے صف اور کالم کی تعداد مساوی ہے لیکن اس میں موجد اعداد ہر اعتبار سے مشابہ نہیں ہے اسی لیے اس ماترس کو ماترس P، ماترس Q کے مساوی نہیں ہے کہا جاتا ہے جس کو اس طرح $P \neq Q$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

In example (ii) they have same number of rows and columns and all corresponding elements are note same so they are not equal $P \neq Q$.

(ii) $P = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix}$; $Q = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 7 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

ماترس کی ضرب (Scalar Multiply of a Matrix)

Scalar Multiply of a Matrix: A Matrix $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ is multiply by a scalar k then each of the elements of a matrix is multiply by scalar k. It is denoted by kA.

Example: $kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$

دوماترس کی جمع (Addition of Two Matrices)

ماترس کے اصول کے مطابق ماترس کو بھی جمع کیا جاتا ہے۔جب کوئی دوماترس کے صف اور کالم مشابہ ہونے پر ہی انہیں جمع کیا جاسکتاہے جس کوذیل کی شکل میں بتلایا جاتا ہے۔

Addition of Two Matrices: When two matrices of same order then the sum of the two matrix are

Let $P=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}, Q=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$

$$P+Q=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}+\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$$

$$P+Q=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{m\times n}$$

مثال 1: ذیل میں دئے گئے دوماترس کے جمع وتفریق کے طریقہ کار کوبتلایا گیاہے غور کیجئے۔

Example. If $P=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 5 & 6 & -2\end{bmatrix}$; $Q=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 5\\ 3 & -2 & 1\end{bmatrix}$

1۔ماترسPاورQکو جمع کیجئے۔ $P+Q$ 2۔ماترسPسے ماترسQکو تفریق کیجئے۔ $P-Q$

1۔ماترسPاورQکو جمع کرنے کاطریقہ یامراحل۔

i۔پہلے ماترس کے صف کے اعداد کودوسرے ماترس کے متعلقہ صف کے اعداد میں جمع کیجئے۔

ii۔حاصل اعداد کوصف کی شکل میں ترتیب دیں۔

(i) $P+Q=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 5 & 6 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 0 & 5\\ 3 & -2 & 1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1+(-1) & 2+0 & 3+5\\ 5+3 & 6+(-2) & -2+1\end{bmatrix}$$

$$P+Q=\begin{bmatrix}0 & 2 & 8\\ 8 & 4 & -1\end{bmatrix}$$

2۔ماترس کی تفریق کاطریقہ کاریامراحل۔

i. پہلے ماترس کے صف کے اعداد میں سے دوسرے ماترس کے متعلقہ صف کے اعداد کو تفریق کریں۔

ii. حاصل اعداد کوحسابی علامات کے ساتھ ماترس کی شکل میں ترتیب دیں۔

(ii) $P-Q=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 5 & 6 & -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 0 & 5\\ 3 & -2 & 1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1-(-1) & 2-0 & 3-5\\ 5-3 & 6-(-2) & -2-1\end{bmatrix}$$

$$P-Q=\begin{bmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 8 & -3\end{bmatrix}$$

مثال2: ذیل میں دو ماترس A اور B دئے گئے ہیں۔

$$A=\begin{bmatrix}5 & -2\\ 3 & 2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 6\end{bmatrix}$$

تب ذیل کو حل کیجئے۔

$5A+3B$ (3) $\quad 4A-2B$ (2) $\quad A+B$ (1)

حل: (1) $A+B$ دو ماترس کو جمع کرنے کے طریقہ کار کو ذیل میں بتلایا گیا ہے۔

$$A+B=\begin{bmatrix}5 & -2\\ 3 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 6\end{bmatrix}$$

$$\text{A+B}=\begin{bmatrix}5+2 & -2+0\\ 3-1 & 2+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -2\\ 2 & 8\end{bmatrix}$$

(2)$4A-2B$ ماترس کی تفریق کو ذیل میں بتلایا گیا ہے۔اس ماترس میں عددی سر کو ماترس کے اعداد سے ضرب دینے کے بعد تفریق کیا جاتا ہے۔

$$\text{(ii) } 4A-2B=4\begin{bmatrix}5 & -2\\ 3 & 2\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}20 & -8\\ 12 & 8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & 0\\ -2 & 12\end{bmatrix}$$

$$\text{4A}-\text{2B}=\begin{bmatrix}20-4 & -8-0\\ 12+2 & 8-12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & -8\\ 14 & -4\end{bmatrix}$$

(3)$5A+3B$ ماترس کو جمع کرنے سے پہلے ماترس کے اعداد کو متعلقہ عددی سر سے ضرب دیا جاتا ہے۔اس کے بعد حاصل اعداد کو ماترس کی شکل میں جمع کیا جاتا ہے۔ذیل کے مثال پر غور کیجئے۔

$$5A+3B=5\begin{bmatrix}5 & -2\\ 3 & 2\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 6\end{bmatrix}$$

$$\text{5A+3B}=\begin{bmatrix}25 & -10\\ 15 & 10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & 0\\ -3 & 18\end{bmatrix}$$

$$\text{5A+3B}=\begin{bmatrix}25+6 & -10+0\\ 15-3 & 10+18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}31 & -10\\ 12 & 28\end{bmatrix}$$

مثال3: ذیل میں ماترس A،B اور C تین ماترس دئے گئے ہیں۔

$$\text{Example: If } A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

تب ذیل کو محسوب کیجئے۔

$2A-B-2C$ (4) $A-C$ (3) $B-C$ (2) $A-B$ (1)

حل: $A-B$ (1)

ماترس A سے ماترس B کے تفریق کے طریقہ کار کو بتلایا گیا ہے۔

ماترس A کے صف کے اعداد سے ماترس B کے صف کے اعداد کو تفریق کیا جاتا ہے۔

حاصل اعداد کو ماترس کی شکل میں بتلایا جاتا ہے۔

$$A-B=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix}1-1 & 4-2\\ -2-3 & 1+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -5 & 2\end{bmatrix}$$

$B-C$ (2)

ماترس B سے ماترس C کو تفریق کے طریقہ کار کو بتلایا گیا ہے۔

1۔ پہلے ماترس کے صف کے اعداد کو دوسرے ماترس کے صف کے اعداد کو تفریق کیا جاتا ہے۔

حاصل اعداد کو ماترس کی شکل میں ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$B-C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

$$\text{B - C}=\begin{bmatrix}1-2 & 2+1\\ 3-3 & -1-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 0 & -3\end{bmatrix}$$

$A-C$ (3)

ماترس A کے صف کے اعداد میں سے ماترس C کے صف کے متعلقہ اعداد کو تفریق کریں۔

حاصل اعداد کو ماترس کی شکل میں ترتیب دیں۔

$$A-C=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

$$\text{A - C}=\begin{bmatrix}1-2 & 4+1\\ -2-3 & 1-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -5 & -1\end{bmatrix}$$

$2A-B-2C$ (4)

i. اس سوال میں پہلے ماترس A کو اس کے عددی سر 2 سے ضرب دینے کے بعد حاصل اعداد میں سے ماترس B کو تفریق کریں۔

ii. ماترس C کو اس کے عددی سر 2 سے ضرب دیں۔

iii. پہلے حاصل ماترس میں سے دوسرے ماترس کو تفریق کیجئے۔ حاصل اعداد کو ماترس کی شکل میں ترتیب دیں۔

$$2A-B-2C=2\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 8\\ -4 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & -2\\ 6 & 4\end{bmatrix}$$

$$2A-B-2C=\begin{bmatrix}2-1+4 & 8-2+2\\ -4-3-6 & 2+1-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 8\\ -13 & -1\end{bmatrix}$$

مثال4: ذیل میں ماترس P اور Q دیا گیا ہے۔

$$P=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 6\\ 7 & 1 & 0\end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 7 & 9 & -5\\ 4 & 6 & 8\end{bmatrix}$$

تب ذیل کو محسوب کیجئے۔

(1) $P+Q$ (2) $5P-7Q$

حل: (1) $P+Q$

1۔ماترس P کے صف کے اعداد کو ماترس Q کے صف کے متعلقہ اعداد میں جمع کریں۔

2۔حاصل اعداد کو ماترس کی شکل میں ترتیب دیں۔

$$P+Q=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 6\\ 7 & 1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 7 & 9 & -5\\ 4 & 6 & 8\end{bmatrix}$$

$$P+Q=\begin{bmatrix}2+1 & 1+3 & 3+2\\ -1+7 & 0+9 & 6-5\\ 7+4 & 1+6 & 0+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 4 & 5\\ 6 & 9 & 1\\ 11 & 7 & 8\end{bmatrix}$$

(2) $5P-7Q$

i. ماترس P کے اعداد کو اس کے عددی سر 5 سے ضرب دیتے ہوئے صف اور کالم میں ماترس تشکیل دیں۔

ii. ماترس Q کے اعداد کو اس عددی سر 7 سے ضرب دیتے ہوئے صف اور کالم میں ماترس تشکیل دیں۔

iii. پہلے حاصل ماترس میں سے دوسرے ماترس کے اعداد کو تفریق کریں۔

$$5P-7Q=5\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 6\\ 7 & 1 & 0\end{bmatrix}-7\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 7 & 9 & -5\\ 4 & 6 & 8\end{bmatrix}$$

$$5P-7Q=\begin{bmatrix}10 & 5 & 15\\ -5 & 0 & 30\\ 35 & 5 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}7 & 21 & 14\\ 49 & 63 & -35\\ 28 & 42 & 56\end{bmatrix}$$

$$5P-7Q=\begin{bmatrix}10-7 & 5-21 & 15-14\\ -5-49 & 0-63 & 30+35\\ 35-28 & 5-42 & 0-56\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -16 & 1\\ -54 & -63 & 65\\ 7 & -37 & -56\end{bmatrix}$$

8.5 ماترس کی ضرب (Multiplication of Matrices)

ایک ماترس کو دوسرے ماترس سے ضرب دینا ماترس کی ضرب کہلاتا ہے۔ ماترس A اور B دو ماترس $m\times p$ اور $p\times n$ کی ترتیب میں ہونے پر ان کا حاصل $m\times n$ ہو گا۔ ذیل کی شرط کے مطابق دو ماترس کو ضرب دیا جاتا ہے۔

ماترس کے ضرب کی شرط: ماترس A کے کالم (Column) کی تعداد دوسرے ماترس کے صف (Rows) کے مساوی ہو۔

Note: If number of columns of first matrix is equal to number of rows in second matrix then only matrix multiplication is applicable.

ذیل میں ماترس A اور ماترس B کے ضرب کے عمل کو بتلایا گیا ہے۔

مثال 5: دیا گیا ہے کہ $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$

تب ذیل کو محسوب کیجئے۔ (1) AB $\quad$ (2) BA

حل: (1) AB:

ماترس A کو ماترس B سے ضرب دیتے ہوئے اس کا حاصل ضرب محسوب کرنا ہے۔ ذیل کے شرط پر غور کیجئے۔

Number of columns of A=2 $\qquad$ Number of rows of B=2.

دیا گیا ہے کہ $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ $\quad A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

پہلے ماترس A کے صف کے اعداد کو ماترس B کے کالم کے اعداد سے ضرب دیں پھر انہیں جمع کریں پھر حاصل اعداد کو ماترس کی شکل میں ترتیب دیں۔ ذیل کے طریقہ عمل پر غور کیجئے۔

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}1\times2+2\times2 & 1\times1+2\times2\\ -1\times2+0\times2 & -1\times1+0\times2\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}2+4 & 1+4\\ -2+0 & -1+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 5\\ -2 & -1\end{bmatrix}$$

(2) BA

BA ماترس B کو ماترس A سے ضرب دیتے ہوئے اس کا حاصل ضرب محسوب کرنا ہے۔ اس ماترس میں پہلے ماترس B اور اس کے بعد ماترس A کو لکھیں۔

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ماترس B کے صف کے اعداد کو ماترس A کے کالم کے اعداد سے ضرب دیتے ہوئے انہیں جمع کیجئے۔ ذیل میں دئے گئے طریقہ عمل پر غور کیجئے۔

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times1+1\times-1 & 2\times2+1\times0 \\ 2\times1+2\times-1 & 2\times2+2\times0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2-1 & 4+0 \\ 2-2 & 4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ذیل میں ماترس AB اور BA کے حاصل ضرب سے حاصل اعداد کو بتلایا گیا ہے۔ غور کیجئے کہ دونوں ماترس کے حاصل ضرب غیر مساوی ہیں۔

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \qquad BA = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

اس لئے ریاضی کی زبان میں غیر مساوی کو اس طرح بتلایا جاتا ہے۔

$$AB \neq BA$$

یعنی ماترس AB کا حاصل ضرب ماترس BA کے حاصل ضرب کے غیر مساوی ہے۔

مثال: ذیل میں ماترس A اور ماترس B دیا گیا ہے۔

$$A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

تب ماترس AB کا حاصل ضرب محسوب کیجئے۔

ماترس کے ضرب کے لیے شرط ہے کہ پہلے ماترس A کے کالم کی تعداد دوسرے ماترس B کے صف کے مساوی ہونا چاہیے۔ اس مثال میں ماترس A میں ایک کالم ہے اور ماترس B میں دو صف ہیں یعنی ماترس A کے کالم کے مساوی ماترس B میں صف نہیں ہے۔ اس صورت میں ان دونوں ماترس کو ضرب نہیں دیا جا سکتا۔ اسی لیے اس صورت کو علم ریاضی میں اس طرح بتلایا جاتا ہے۔

Number of columns of A=1 Number of rows of B=2

Number of columns of A $\neq$ Number of rows of B.

Therefore multiplication of AB is not possible.

8.6 ماترس کاٹرانس پور (Transpose of a Matrix)

معکوس ماترس ایک اہم قسم کا ماترس ہے۔ ایسا ماترس جس میں ماترس A کے صف کو کالم میں یا ماترس A کے کالم کو صف میں تبدیل کیا جاتا ہو معکوس ماترس کہلاتا ہے۔ یعنی اس ماترس میں صف میں موجود اعداد کو کالم میں تبدیل کیا جاتا ہے اور کالم میں ماجود اعداد کو صف میں تبدیل کیا جاتا ہے۔ معکوس ماترس کو A^T یا A' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

(**Transpose of a Matrix:** A matrix obtained by interchanging rows in to columns or columns in to rows. Transpose of matrix A is denoted by A^T or A'.)

مثال: ماترس A کا معکوس ماترس محسوب کیجئے۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

حل: اس ماترس A کے صف میں موجود اعداد 1، 2، 3 کو کالم میں ترتیب دیں اور دوسرے صف میں موجود اعداد 1-، 3، 6 کو دوسرے کالم میں ترتیب دیں۔ اس طرح ذیل میں حاصل معکوس ماترس کو بتلایا گیا ہے۔

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

ماترس کے مقطات (Determinant of a Matrix):

فرض کیجئے کہ ماترس A ایک مربع ماترس ہے تب $|A|$ ماترس A کا جز مقطعات کہلاتا ہے۔

Determinant of a Matrix: Let A be a square matrix then $|A|$ is called determinant of A that is $\det A$.

غیر نادر ماترس (Non-singular Matrix):

اگر $|A| \neq 0$ ہو تب ماترس A غیر نادر ماترس کہلاتا ہے۔

Non-singular Matrix: If $|A| \neq 0$ then matrix A is called non-singular matrix.

نادر ماترس (Singular Matrix)

اگر $|A| = 0$ تب ماترس A نادر ماترس کہلاتا ہے۔

Singular Matrix: If $|A| = 0$ then matrix A is called singular matrix.

نوٹ: اگر ماترس غیر واحد ہو تب A^{-1} موجود ہوتا ہے۔

Note: A^{-1} exist if the matrix is non-singular.

صغیرہ اجزا(Minor of an element):

$A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ ایک مربع ماترس ہے جو $n\times n$ ترتیب میں ہے۔ M_{ij} یہ ماترس A کے تحت ماترس کو ظاہر کرتا ہے جو i^{th} خطار اور j^{th} کالم کو نکالنے سے ملتا ہے جس کا رتب (n-1) x (n-1) ہوتا ہے۔ $\left|M_{ij}\right|$ کو a^{ij} کا صغیرہ کہا جاتا ہے۔

Minor of an element: Let $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ be a square matrix of order $n\times n$. M_{ij} denoted the submatrix of matrix A which s obtained by deleting ith rows and jth column whose order is $(n-1)\times(n-1)$. The determinant of $\left|M_{ij}\right|$ is called the minor of the element a_{ij} of A.

صغیر اجزا:

Cofactor of an element: The cofactor of the element a_{ij} is denoted by

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|.$$

عنصر کا ہم ضربی: عنصر Aij کا ہم ضربی کو $A_{ij}=(-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

Determinant of 2×2 Matrix: Let $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ then

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\left(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\right).$$

Determinant of 3×3 Matrix: Let $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ then determinant of A is $|A|$ and it is evaluated as

$$|A|=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A|=a_{11}.(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})-a_{12}.(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23})+a_{13}.(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})$$

Example: Find the determinant of $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$.

Solution: Given $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$=\left(3\times 7-5\times 2\right)=(21-10)=11$$

مثال6:   ذیل میں دئے گئے ماترس A کے determinant کو اخذ کیجئے۔

Example: Find the determinant of $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & -3 & 0\\ 4 & 2 & -1\end{bmatrix}$

حل:

Solution: $\det A=|A|=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & -3 & 0\\ 4 & 2 & -1\end{vmatrix}$

$$=(-1)^{1+1}.2\begin{vmatrix}-3 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}.(-1)\begin{vmatrix}0 & 0\\ 4 & -1\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}.(3)\begin{vmatrix}0 & -3\\ 4 & 2\end{vmatrix}$$

$$=2(-3\times-1-2\times0)+(0\times-1-4\times0)+3(0\times2-4\times-3)$$

$$=2(3-0)+(0-0)+3(0+12)$$

$$=6+0+36=42.$$

مثال7:   ذیل میں دئے گئے ماترس A کا determinant محسوب کیجئے۔

Example: Find the determinant of $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}$

حل:

Solution: $\det A=|A|=\begin{vmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{vmatrix}$

$$=1\begin{vmatrix}5 & 8\\ 6 & 9\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}2 & 8\\ 3 & 9\end{vmatrix}+7\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 6\end{vmatrix}$$

$$=1(45-48)-4(18-24)+7(12-15)$$

$$=1(-3)-4(-6)+7(-3)$$

$$=-3+24-21=-24+24=0$$

ماترس کا اڈجائنٹ (Adjoint of a Matrix):

اگر ماترس A ایک مربع ماترس ہے تب اس کا ماکوس ماترس کو فیاکٹر کو ماترس A کا Adjoint کہتے ہیں جس کو $Adj\ A$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

Adjoint of a Matrix: If A is an square matrix then the transpose of its cofactor matrix is called its Adjoint of A. It is denoted as $Adj\,A$.

کسی ماترس کا معکوس (Inverse of a Matrix):

اگر ماترس A ایک مربع ماترس ہے۔

$AB = BA = I$ تب B ماترس A کا معکوس کہلاتا ہے جس کو $B = A^{-1}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

Inverse of a Matrix: Let A be a square matrix if there exists a matrix B such that $AB = BA = I$ then B is called the inverse of A so we write $B = A^{-1}$

$\therefore AA^{-1} = A^{-1}A = I$

ماترس کے معکوس کو $A^{-1} = \dfrac{Adj\,A}{|A|}$ ضابطہ کی مدد سے محسوب کیا جاسکتا ہے۔

Inverse of a matrix is also determine by the formula $A^{-1} = \dfrac{Adj\,A}{|A|}$

نوٹ: معکوس ماترس کے لیے ماترس A غیر واحد ہونا چاہیے۔ یعنی $|A| \neq 0$ ۔

Note: Inverse of a matrix A exists if matrix A should be non-singular i.e $|A| \neq 0$.

مثال 8:

ذیل میں دیے گئے تین ماترس کے معکوس ماترس محسوب کیجئے۔

Example: Find the inverse of the matrix.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

حل:

(i) دیا گیا ہے کہ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times 5 - 2 \times 3 = 5 - 6 = -1$$

$\therefore |A| \neq 0$ Inverse exists.

Cofactor of $1 = (-1)^{1+1}(5) = 5$

Cofactor of $3 = (-1)^{1+2}(2) = -2$

Cofactor of $2 = (-1)^{2+1}(3) = -3$

Cofactor of $5 = (-1)^{2+2}(1) = 1$

Cofactor of $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$Adj\ A = [cofactor\ of\ A]^T = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\ A}{|A|} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Let $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ (ii)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\times3 - 6\times1 = 6 - 6 = 0$$

$$\therefore |A| = 0$$

ماترس ایک نادر ماترس ہے اسی لیے اس کا معکوس ماترس اخذ نہیں کیا جا سکتا۔

The matrix is singular so inverse of a matrix does not exists.

Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (iii)

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(3+2) - 2(0+2) - 1(0-2)$$

$=1(5)-2(2)-1(-2)$

$=5-4+2$

$=3\neq 0$

$\therefore |A|\neq 0$ Inverse exists.

Cofactor of element A is

Cofactor of 1 $= a_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix} = (3+2) = 5$

Cofactor of 2 $= a_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix} = -(0+2) = -2$

Cofactor of -1 $= a_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix} = (0-2) = -2$

Cofactor of 0 $= a_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix} = -(6+2) = -8$

Cofactor of 1 $= a_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix} = (3+2) = 5$

Cofactor of -1 $= a_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix} = -(2-4) = 2$

Cofactor of 2 $= a_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix} = (-2+1) = -1$

Cofactor of 2 $= a_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{vmatrix} = -(-1+0) = 1$

Cofactor of 3 $= a_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix} = (1+0) = 1$

Cofactor of $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$

Cofactor of $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2\\ -8 & 5 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

$$Adj\ A = [cofactor\ of\ A]^T = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -8 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -8 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\ A}{|A|} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & -8 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solution of linear equation by matrix method:

ماترس کے طریقہ کے تحت خطی مساواتوں کا حل:

دیے گئے مساوات $\begin{matrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{matrix}$ مساوات کو ماترس کی شکل میں ذیل میں بتلایا گیا ہے۔

The given system of equations $\begin{matrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{matrix}$ can be expressed in matrix form as

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \text{ or}$$

$AX = B$, where A is called as coefficient matrix.

Here $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

If the system of equations is $\begin{matrix} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{matrix}$

Then in matrix form we write

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \text{ or}$$

$AX = B$, where A is called as coefficient matrix.

Here $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$

Note: If A is singular then $|A| = 0$, A^{-1} does not exist.

مثال9:

ذیل میں دیے گئے مساوات کو معکوس ماترس کے طریقے کے تحت حل کیجئے۔ $\begin{array}{l} 2x+3y=4 \\ x-2y=5 \end{array}$

Example: Solve the system of equations using matrix inversion method.

$$\begin{array}{l} 2x+3y=4 \\ x-2y=5 \end{array}$$

حل:

دیے گئے مساوات $\begin{array}{l} 2x+3y=4 \\ x-2y=5 \end{array}$ کو حسب ذیل ماترس کی شکل میں ظاہر کیا جاتا ہے۔

The system of given equations can be written in matrix form as $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ or

$$AX=B \quad \text{--------------------} (1)$$

Where $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

Now $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=(-4-3)=-7\neq 0$

Since Matrix A is non-singular so A^{-1} exists.

From (1) $X=A^{-1}B$ --------------- (2)

Where $A^{-1}=\dfrac{Adj\,A}{|A|}$

Now cofactor of $A=\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$$Adj\,A=[Cofactor\ of\ A]^T=\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}^T$$

$$=\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\,A}{|A|}=\frac{1}{-7}\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Now from (2) $X = A^{-1}B$

So, $X = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$X = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2\times 4+3\times 5 \\ 1\times 4+(-2)\times 5 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 8+15 \\ 4-10 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 23 \\ -6 \end{bmatrix}$$

There for $x = \frac{23}{7}$, $y = \frac{-6}{7}$

مثال10: ماترس معکوس کے طریقہ سے دی گئی ذیل کے مساوات کو حل کیجئے۔

Solve the system of equations using matrix inversion method.

$$2x-3y=5$$
$$4x-6y=10$$

Solution: The system of given equations can be written in matrix form as $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$ or

$AX = B$-------------------- (1)

Where $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$

Now $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = (-12+12) = 0$

Since Matrix A is singular so A^{-1} does not exists.

مثال11: ماترس معکوس کے طریقہ سے دی گئی ذیل کے مساوات کو حل کیجئے۔

Solve the system of equations using matrix inversion method.

$$x+2y+3z=14$$
$$x-2y+z=0$$
$$2x+3y-z=5$$

حل: دیے گئے مساوات کو ذیل کے ماترس کی شکل میں ترتیب دیں۔

The system of given equations can be written in matrix form as

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\ 0\\ 5\end{bmatrix} \text{ or}$$

$AX = B$-------------------- (1)

Where $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & -1\end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}14\\ 0\\ 5\end{bmatrix}$

Now $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}$

$$|A|=(1)\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}+(-2)\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix}$$

$$|A|=(1)(2-3)-2(-1-2)+3(3+4)$$

$$=(1)(-1)-2(-3)+3(7)$$

$$=-1+6+21$$

$$=26\neq 0$$

Since Matrix A is non-singular so A^{-1} exists.

From (1) $X = A^{-1}B$ --- (2)

Where $A^{-1}=\dfrac{Adj\ A}{|A|}$

Cofactor of element A is

Cofactor of $1 = a_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix} = (2-3) = -1$

Cofactor of $2 = a_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix} = -(-1-2) = 3$

Cofactor of $3 = a_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix} = (3+4) = 7$

Cofactor of $1 = a_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix} = -(-2-9) = 11$

Cofactor of $-2 = a_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix} = (-1-6) = -7$

Cofactor of $1 = a_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix} = -(3-4) = 1$

Cofactor of $2 = a_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix} = (2+6) = 8$

Cofactor of $3 = a_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix} = -(1-3) = 2$

Cofactor of $-1 = a_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix} = (-2-2) = -4$

Cofactor of $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$

Cofactor of $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 7\\ 11 & -7 & 1\\ 8 & 2 & -4\end{bmatrix}$

$$Adj\, A = [Cofactor\ of\ A]^T = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 7\\ 11 & -7 & 1\\ 8 & 2 & -4\end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 11 & 8\\ 3 & -7 & 2\\ 7 & 1 & -4\end{bmatrix}$$

Now from (2) $X = A^{-1}B$

So, $X = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} -1 & 11 & 8\\ 3 & -7 & 2\\ 7 & 1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}14\\ 0\\ 5\end{bmatrix}$

$$X = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} -1\times 14 + 11\times 0 + 8\times 5\\ 3\times 14 - 7\times 0 + 2\times 5\\ 7\times 14 + 1\times 0 - 4\times 5\end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} -14+0+40\\ 42-0+10\\ 98+0-20\end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} 26 \\ 52 \\ 78 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26/26 \\ 52/26 \\ 78/26 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

There for $x = 1$, $y = 2, z = 3$ is the solution.

8.7 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

ماترس علم ریاضیات کا ایک اہم پہلو ہے جس میں اعداد کو صف اور کالم میں ترتیب دیتے ہوئے مطالعہ کیا جاتا ہے۔ماترس کو جمع، تفریق، ضرب وغیرہ میں حل کرسکتے ہیں۔ماترس کے عمودی قطار میں موجود اعداد کو کالم (Column) اور افقی قطار میں موجود اعداد کو صف کہتے ہیں۔ماترس کی جمع، تفریق ضرب پر سوالات حل کرسکتے ہیں۔مربع ماترس، مستطیل ماترس، اکائی ماترس، معکوس ماترس، صفری ماترس، نادر ماترس، غیر نادر ماترس وغیرہ ماترس کے چند اہم اقسام ہیں۔ماترس علم ریاضی کے ساتھ ساتھ تجارتی میدان میں بھی کافی استعمال ہوتا ہے۔

8.8 کلیدی الفاظ (Keywords)

1) صف: ماترس کے افقی قطار کو صف کہتے ہیں۔

2) کالم (Column): ماترس کے عمودی قطار کو کالم کہتے ہیں۔

8.9 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

خالی جگہوں کو پر کیجئے۔

i. صغیرہ ماترس کی مثال _____________________ ہے۔

ii. مربع ماترس کی مثال _____________________ ہے۔

iii. مستطیل ماترس کی مثال _____________________ ہے۔

iv. ایسا ماترس جسم کے وتر میں عدد 'I' ہو _____________________ ماترس کہلاتا ہے۔(اکائی ماترس)

v. ماترس میں اوپر سے نیچے اعداد کی قطار کو ____________________ کہتے ہیں۔

مختصر جوابات کے حامل سوالات

1. ماترس سے کیا مراد ہے وضاحت کیجئے۔

2. ماترس کی مختلف اقسام کو بیان کیجئے۔

3. ماترس کے جمع وضرب کے شرائط کو بیان کیجئے۔

4. ذیل کے ماترس کی جمع کرو۔

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

تب A + B محسوب کیجئے۔

5. ذیل کے ماترس کی تفریق کرو۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

تب A – B محسوب کیجئے۔

طویل جوابات کے حامل سوالات

1. ماترس کی تعریف کرتے ہوئے اس کے مختلف اقسام کی وضاحت کیجئے۔

2. معکوس ماترس کسے کہتے ہیں مثال کے ذریعہ وضاحت کیجئے۔

3. ذیل میں دیے گئے مساوات کو معکوس ماترس کے طریقے کے تحت حل کیجئے۔

$$2x + 3y = 4$$
$$x - 2y = 5$$

Solve the system of equations using matrix inversion method.

4. ذیل میں دئے گئے تین ماترس کے معکوس ماترس محسوب کیجئے۔

Find the inverse of the matrix. (i) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

5. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ تب A^{-1} معلوم کیجئے۔

6. ذیل میں دیے گئے مساوات کو معکوس ماترس کے طریقے کے تحت حل کیجئے۔

$$7x + 2y + z = 21$$

$$3y - z = 5$$

$$-3x + 4y - 2z = -1$$

7. ذیل دیے گئے ماترس کا Determinant محسوب کیجیے۔

i. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$ ii. $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 3 & -6 & 5 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

iii. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & 6 & -3 \end{bmatrix}$ iv. $\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

8. Find the Inverse of a Matrix if exist

i. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ ii. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

iii. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

8.10 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Fundamentals of Statistics : Gupta S. C
2. Statistical Methods : Gupta S. P
3. Fundamentals of Statistics : Elhance D. N
4. Statistics : J K Sharma
5. Business Statistics : Bharat Jhunjhunawala

بی۔کام دوسرا سمسٹر

پرچہ: کاروباری شماریات اور ریاضی-2

B.Com 2nd Semester

Paper : BNCM201DET (Business Statistics and Mathematics - 2)

Marks 35 : نشانات **Time : 2 hours وقت:دو گھنٹے**

ہدایات:

یہ پرچہ تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم اور حصہ سوم۔ تمام حصوں سے جواب دینا لازمی ہے۔

1. حصہ اول کے تمام سوالات لازمی ہیں۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ (5 x 1 = 05 Marks)
2. حصہ دوم میں 08 سوالات ہیں۔ طالب علم کو کوئی 05 سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کے لیے 4 نمبرات مختص ہیں۔ (5 x 4 = 20 Marks)
3. حصہ سوم میں 02 سوالات ہیں۔ طالب علم کو کوئی 01 سوال کا جواب دینا ہے۔ ہر سوال کے لیے 10 نمبرات مختص ہیں۔ (1 x 10 = 10 Marks)

حصہ (الف)

I. خالی جگہوں کو پر کیجئے

i. انڈیکس نمبر کا استعمال پہلی مرتبہ ________________ ملک میں ہوا۔

ii. مربع ماترس کی مثال ________________ ہے۔

iii. مستطیل ماترس کی مثال ________________ ہے۔

iv. سال 2024، 2023، 2022، 2021 میں بنیادی سال ________________ سال ہے۔

v. فی کیلو 10 روپے کے حساب سے 1 کنٹل چاول کی قیمت ________________ روپے ہوگی۔

حصہ (ب)

مختصر جوابات کے حامل سوالات

2. ماترس سے کیا مراد ہے وضاحت کیجئے۔

3. ہم رشتگی سے کیا مراد ہے؟ وضاحت کیجئے۔

4. تین سالہ حرکتی اوسط کے طریقہ سے رجحانی قدریں دریافت کیجیے۔

سال	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
نفع	56	69	73	77	85	92	95

5. ذیل میں دیئے گئے دو ماترس کے جمع غور کیجیے۔(1) P+Q $P=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 5 & 6 & -2\end{bmatrix}$; $Q=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 5\\ 3 & -2 & 1\end{bmatrix}$

6. درج ذیل دس فرمس کے فروخت اور اشتہار کاری کے مصارف کے درمیان کوریلیشن کا ضریب دریافت کیجئے(اعداد 000 میں)

فرمس	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
فروخت	50	50	55	60	65	65	65	60	60	50
اشتہارکاری اخراجات	11	13	14	16	16	15	15	14	13	13

7۔ ذیل میں دیئے گئے تین ماترس کے معکوس ماترس محسوب کیجئے۔ Find the inverse of the matrix.

(i) $\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 6 & 3\end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$

8۔ ایک مقابلہ حسن میں تین ججس نے درجے یوں دیئے:

پہلا جج	1	6	5	10	3	2	4	9	7	8
دوسرا جج	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9
تیسرا جج	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7

اسپیرمین کے ضابطہ کی مدد سے رینک کوریلیشن محسوب کیجئے۔

9۔ ہم رشتگی سے کیا مراد ہے؟ اس کے اقسام بیان کیجئے۔

(حصہ ج)

10۔ دیا گیا ہے کہ $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$

تب ذیل کو محسوب کیجئے۔ (1) AB (2) BA

11۔ درجہ ذیل میں چار اشیاء کی قیمتیں 2019 اور 2020 سے متعلق دی گئی ہیں۔ سال 2020 کے لیے پاسچے اور لیسپیر کے طریقوں سے اعشاری اعداد معلوم کیجیے۔

اشیاء	2019		2020	
	قیمت(روپے)	مقدار(کلوگرام)	قیمت(روپے)	مقدار(کلوگرام)
چاول	5	100	6	150
مکئی	4	80	5	100
جوار	25	60	5	72
گیہوں	120	30	7	33

NOTES