BNEC401DET

بنیادی شماریات

(Basic Statistics)

بی۔اے۔(آنرس)

چار سالہ پروگرام

چوتھا سمسٹر (معاشیات)

مرکز برائے فاصلاتی و آن لائن تعلیم

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

حیدرآباد۔32، تلنگانہ، بھارت

Copyright © 2026, Maulana Azad National Urdu University, Hyderabad
All right reserved. No part of this publication may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronically or mechanically, including photocopying, recording or any information storage or retrieval system, without prior permission in writing form the publisher (registrar@manuu.edu.in)

ISBN : 978-81-68324-17-6
Course : Basic Statistics
First Edition : August 2026
Copies : 300
Price : 230/- (The price of the book is included in admission fee of distance mode students)

Course Coordinator

Dr. Fasalurahman P. K., Asst. Prof. (Economics), CDOE, MANUU

Editorial Board/Editors

Dr. Fasalurahman P.K., Assistant Professor, Economics, CDOE, MANUU

Prof. Sadat Shareef, Professor (Commerce), CDOE, MANUU

Language Editor

Dr. Mohammad Haziq, Assistant Professor, Islamic Studies, CDOE, MANUU

Production

Prof. Nikhath Jahan,
Professor (Urdu),
CDOE MANUU

Mr. P Habibulla
Assistant Registrar, Purchase & Stores Section, MANUU

Dr. Mohd Akmal Khan,
Assistant Professor (C), CDOE MANUU

Mohd Abdul Naseer
Section Officer, CDOE MANUU

Shaik Ismail,
UDC, CDOE, MANUU

Syed Faheemuddin, LDC
Purchase & Stores Section, MANUU

On behalf of the Registrar, Published by:
Centre for Distance and Online Education
Maulana Azad National Urdu University
Gachibowli, Hyderabad-500032 (TG), India
Director: dir.dde@manuu.edu.in *Publication:* ddepublication@manuu.edu.in
Phone number: 040-23008314 Website: manuu.edu.in

CRC Prepared by Mohd Waseem, Faculty of Economics, CDOE, MANUU, Hyderabad

Printed at: Print Time & Business Enterprises, Hyderabad

فہرست

پیغام	وائس چانسلر، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی	5
پیغام	ڈائریکٹر، مرکز برائے فاصلاتی و آن لائن تعلیم	6
کورس کا تعارف	کورس کوآرڈی نیٹر (معاشیات)	7

اکائی نمبر	اکائی کا نام	مصنف	صفحہ نمبر
بلاک I:	**شماریات کا تعارف اور وضاحتی شماریات**		
.1	شماریات کا تعارف	جناب محمد وسیم	9
.2	شماریات کے بنیادی تصورات	جناب محمد وسیم	27
.3	مرکزی رجحان کے پیمانے	جناب محمد وسیم	49
.4	انتشار کے پیمانے	جناب محمد وسیم	69
بلاک I:	**نظریہ احتمال اور توزیع احتمال**		
.5	بنیادی احتمال	جناب محمد وسیم	87
.6	توزیعِ احتمال	جناب محمد وسیم	107
.7	منفصل توزیعِ احتمال	جناب محمد وسیم	128
.8	عام توزیع احتمال	جناب محمد وسیم	151
ضمیمہ			
	A: نمونہ امتحانی پرچہ		170
	B: معیاری عام توزیع کے لیے تراکمی احتمال		172
	C: پواسون احتمال جدول		174

مصنفین کی تفصیلات

(Writer's Details)

جناب محمد وسیم، اسسٹنٹ پروفیسر (کانٹریکچول)، مرکز برائے فاصلاتی و آن لائن تعلیم، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد	Mr. Mohd Waseem, Assistant Professor (C), Centre for Distance and Online Education, Maulana Azad National Urdu University, Hyderabad

پروف ریڈرس(Proofreaders):

جناب محمد وسیم، اسسٹنٹ پروفیسر (کانٹریکچول)، مرکز برائے فاصلاتی و آن لائن تعلیم، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد

ڈاکٹر فضل الرحمان پی۔ کے۔، اسسٹنٹ پروفیسر، مرکز برائے فاصلاتی و آن لائن تعلیم، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد

ٹائٹل پیج(Title Page):

جناب ابراہم اکرم صدیقی

پیغام

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی (MANUU) 1998 میں پارلیمنٹ کے ایک ایکٹ کے ذریعے قائم کی گئی۔ یہ ایک مرکزی جامعہ ہے جس نے این اے اے سی کی جانب سے گریڈ +A حاصل کیا ہے۔ اس جامعہ کے قیام کے مقاصد ہیں: (1) اردو زبان کا فروغ، (2) پیشہ ورانہ اور تکنیکی تعلیم کو اردو میڈیم میں قابل رسائی اور دستیاب بنانا، (3) روایتی اور فاصلاتی طریقۂ تعلیم کے ذریعے تعلیم فراہم کرنا، اور (4) خواتین کی تعلیم پر خصوصی توجہ دینا۔ یہ وہ نکات ہیں جو اس مرکزی جامعہ کو دیگر تمام مرکزی جامعات سے ممتاز کرتے ہیں اور اسے ایک انفرادیت بخشتے ہیں۔ قومی تعلیمی پالیسی 2020 میں بھی مادری زبانوں اور علاقائی زبانوں میں تعلیم حاصل کرنے پر زور دیا گیا ہے۔

اردو کے ذریعے علم کے فروغ کا مقصد یہی ہے کہ اردو جاننے والے طبقے کے لیے عصری علوم اور مضامین تک رسائی آسان بنائی جائے۔ ایک طویل عرصے تک اردو میں درسی مواد کی کمی رہی ہے۔ اردو یونیورسٹی کے پاس اب اردو میں 350 سے زیادہ کتابوں کا ذخیرہ موجود ہے اور ہر سمسٹر کے ساتھ اس تعداد میں اضافہ ہو رہا ہے۔

اردو یونیورسٹی این ای پی 2020 کے وژن کے مطابق مادری / گھریلو زبان میں تعلیمی مواد فراہم کرنے کے قومی مشن کا حصہ بننے کو اپنے لیے ایک اعزاز سمجھتی ہے۔ مزید یہ کہ اردو بولنے والا طبقہ اردو میں مطالعے کے مواد کی عدم دستیابی کے سبب نئے اُبھرتے شعبوں اور جدید تر معلومات کے موجودہ میدانوں میں تازہ ترین معلومات و اطلاعات کے حصول سے محروم نہیں رہے گا۔ مذکورہ بالا میدانوں میں مواد کی دستیابی کی بدولت حصولِ معلومات کا نیا شعور بیدار ہوا ہے جو یقیناً اردو داں طبقے کی دانشورانہ ترقی پر اثر انداز ہو گا۔

فاصلاتی اور آن لائن طلبہ کے لیے تعلیم و تدریس کے عمل کو سہل بنانے کے لیے یونیورسٹی کا سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن (CDOE) اردو اور متعلقہ مضامین میں خود اکتسابی مواد (SLM) کی تیاری کو یقینی بناتا ہے۔

MANUU فاصلاتی اور آن لائن لرننگ کے طلبہ کے لیے SLM بلا معاوضہ فراہم کرتا ہے۔ یہ مواد اُردو کے ذریعے علم حاصل کرنے میں دلچسپی رکھنے والے ہر شخص کے لیے برائے نام قیمت پر دستیاب ہے۔ تعلیم تک رسائی کے دائرے کو مزید پھیلانے کے مقصد سے، اردو / ہندی / انگریزی / عربی میں eSLM یونیورسٹی کی ویب سائٹ پر مفت ڈاؤن لوڈ کے لیے دستیاب رکھا گیا ہے۔

مجھے بے حد خوشی ہے کہ متعلقہ فیکلٹی کی محنت اور مصنفین کے مکمل تعاون کی بدولت FYUG بی۔اے، بی۔ایس سی اور بی۔کام کی کتابوں کی اشاعت کا عمل بڑے پیمانے پر شروع ہو گیا ہے۔ فاصلاتی اور آن لائن لرننگ کے طلبہ کی سہولت کے لیے خود اکتسابی مواد (SLM) کی تیاری اور اشاعت کا عمل یونیورسٹی کے لیے اہمیت رکھتا ہے۔ مجھے یقین ہے کہ ہم اپنے خود تعلیمی مواد کے ذریعے اردو جاننے والے ایک بڑے طبقے کی ضروریات کو پورا کرنے کے قابل ہوں گے اور اس یونیورسٹی کے مقصدِ قیام کو پورا کریں گے اور اپنے ملک میں اپنی موجودگی کو جائز ٹھہرا سکیں گے۔

نیک تمناؤں کے ساتھ!

پروفیسر سید عین الحسن
شیخ الجامعہ، مانو

پیغام

موجودہ دور میں فاصلاتی تعلیم کو دنیا بھر میں ایک نہایت مؤثر اور مفید طریقۂ تعلیم کے طور پر تسلیم کیا جاتا ہے اور بڑی تعداد میں لوگ اس طریقۂ تعلیم سے فائدہ اٹھا رہے ہیں۔ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی نے بھی اردو زبان بولنے والے عوام کی تعلیمی ضروریات کو مد نظر رکھتے ہوئے اپنے قیام کے وقت سے ہی فاصلاتی تعلیم کا طریقہ متعارف کرایا۔ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی نے 1998 میں ڈائریکٹوریٹ آف ڈسٹنس ایجوکیشن (نظامتِ فاصلاتی تعلیم) کے ساتھ کام کا آغاز کیا اور 2004 سے باقاعدہ پروگرام شروع ہوئے، اس کے بعد مختلف شعبہ جات قائم کیے گئے۔

یو جی سی نے ملک میں نظام تعلیم کو مؤثر طور پر منظم کرنے میں ایک اہم کردار ادا کیا ہے۔ اوپن اینڈ ڈسٹنس لرننگ (ODL) موڈ کے تحت چلنے والے مختلف پروگرام، جو سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن (CDOE) میں چل رہے ہیں، یو جی سی-ڈی ای بی کے منظور شدہ ہیں۔ یو جی سی-ڈی ای بی نے فاصلاتی اور باقاعدہ تعلیم کے نصاب کو ہم آہنگ کرنے پر زور دیا ہے تاکہ فاصلاتی تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ کے معیار کو بہتر بنایا جاسکے۔ چونکہ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی ایک دُہرے طرز (ڈوئل موڈ) کی یونیورسٹی ہے جو فاصلاتی اور روایتی دونوں طریقۂ تعلیم کی خدمات فراہم کرتی ہے، اس لیے اپنے مقاصد کو یو جی سی-ڈی ای بی کے رہنما خطوط کے مطابق حاصل کرنے کے لیے اس نے چوائس بیسڈ کریڈٹ سسٹم (CBCS) متعارف کرایا گیا جس کا خود اکتسابی مواد (Self Learning Materials) یو جی سی کے قوانین اور کریڈٹ فریم کے مطابق نئے سرے سے تیار کیے جاچکا ہے۔

سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن (CDOE) کل انیس (19) پروگرام پیش کرتا ہے جن میں یو جی، پی جی، بی ایڈ، ڈپلومہ اور سرٹیفکیٹ پروگرام شامل ہیں۔ اس کے ساتھ ساتھ تکنیکی مہارتوں پر مبنی پروگرام بھی شروع کیے جارہے ہیں۔ سی ڈی او ای نے جولائی 2025 سے این ای پی-2020 کے مطابق چار سالہ یو جی پروگرام کا آغاز کیا ہے۔ بی اے، بی ایس سی اور بی کام کے آنرز پروگراموں کو این سی ایف کے مطابق ڈیزائن کیا گیا ہے جس سے طلبہ کو آنرز ڈگری حاصل کرنے میں مدد ملے گی۔ سال 2025-2026 سے ایم بی اے پروگرام او ڈی ایل موڈ میں متعارف کرایا گیا ہے۔

مانو نے طلبہ کی سہولت کے لیے نو ریجنل سنٹرز (بنگلورو، بھوپال، دربھنگہ، دہلی، کولکاتا، ممبئی، پٹنہ، رانچی اور سری نگر) اور چھ سب ریجنل سنٹرز (حیدرآباد، لکھنؤ، جموں، نوح، وارانسی اور امراوَتی) کا ایک وسیع نیٹ ورک قائم کیا ہے۔ اس کے علاوہ وجے واڑا میں ایک ایکسٹینشن سنٹر بھی قائم کیا گیا ہے۔ ان ریجنل اور سب ریجنل سنٹروں کے تحت ایک سو پچاس سے زیادہ لرنر سپورٹ سنٹر (LSCs) اور بیس پروگرام سنٹر بیک وقت چلائے جارہے ہیں تاکہ طلبہ کو تعلیمی اور انتظامی سہولیات فراہم کی جاسکیں۔ سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن اپنی تعلیمی اور انتظامی سرگرمیوں میں آئی سی ٹی کا بھرپور استعمال کرتا ہے اور اپنے تمام پروگراموں میں صرف آن لائن موڈ کے ذریعے ہی داخلے فراہم کرتا ہے۔

طلبہ کے لیے سیلف لرننگ میٹیریل (SLM) کی سوفٹ کاپی سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن کی ویب سائٹ پر دستیاب کرائی جاتی ہیں اور آڈیو و ویڈیو ریکارڈنگ کے لنک بھی ویب سائٹ پر فراہم کیے جاتے ہیں۔ اس کے علاوہ طلبہ کو ای۔ میل اور واٹس ایپ گروپ کی سہولت بھی فراہم کی جارہی ہے جن کے ذریعے انہیں پروگرام کے مختلف پہلوؤں جیسے کورس رجسٹریشن، اسائنمنٹ، کاؤنسلنگ، امتحانات وغیرہ کے بارے میں مطلع کیا جاتا ہے۔ باقاعدہ کاؤنسلنگ کے علاوہ گزشتہ دو برسوں سے طلبہ کے تعلیمی معیار کو بہتر بنانے کے لیے زائد تدارکی (Remedial) آن لائن کاؤنسلنگ بھی فراہم کی جارہی ہے۔

امید کی جاتی ہے کہ سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن تعلیمی اور معاشی طور پر پسماندہ آبادی کو عصری تعلیم کے دھارے میں شامل کرنے میں ایک اہم کردار ادا کرے گا۔ تعلیمی ضروریات کو مد نظر رکھتے ہوئے نئی تعلیمی پالیسی (NEP-2020) کے مطابق مختلف پروگرامز میں تبدیلیاں کی گئی ہیں اور توقع ہے کہ اس سے اوپن اینڈ ڈسٹنس لرننگ کے نظام کو مزید مؤثر اور کارآمد بنانے میں مدد ملے گی۔

پروفیسر محمد رضا اللہ خان

ڈائرکٹر، سی ڈی او ای، مانو

کورس کا تعارف

پیارے طلباء وطالبات،

آپ سب کو بنیادی شماریات کے کورس میں خوش آمدید۔ یہ کورس بی اے معیشت کے طلبا کے لیے نیشنل ایجوکیشن پالیسی 2020 (NEP-2020) کے تحت چار سالہ انڈر گریجویٹ پروگرام کے چوتھے سمسٹر کا ایک انتخابی مضمون ہے، جو 2 کریڈٹس پر مشتمل ہے۔ یہ کورس آپ کو شماریات کے بنیادی تصورات، اور اصولوں سے متعارف کراتا ہے۔

یہ کورس آپ کو شماریات کے اہم تصورات کو سمجھنے میں مدد دے گا، جو آپ کے تعلیمی اور پیشہ ورانہ سفر میں اہم کردار ادا کریں گے۔ میں آپ سب کو اس کورس میں کامیابی کی دعا دیتا ہوں اور امید کرتا ہوں کہ یہ کورس آپ کے لیے معلوماتی اور دلچسپ ثابت ہو گا۔

ڈاکٹر فضل الرحمان پی۔ کے۔

کورس کوآرڈی نیٹر (معاشیات)

بنیادی شماریات

بلاک I: تعارف

اکائی 1: شماریات کا تعارف

(Introduction to Statistics)

اکائی کے اجزا:

1.0 تمہید (Introduction)

1.1 مقاصد (Introduction)

1.2 شماریات کا معنی اور تعریف (Meaning and Definition of Statistics)

1.3 شماریات کا دائرہ کار (Scope of Statistics)

1.4 شماریات کے افعال (Functions of Statistics)

1.5 شماریات کی حدود (Limitations of Statistics)

1.6 شماریات پر عدم اعتماد (Distrust in Statistics)

1.7 وضاحتی شماریات بمقابلہ استنتاجی شماریات (Descriptive vs Inferential Statistics)

1.8 ڈیٹا (Data)

1.9 پیمائش کے پیمانے (Scales of Measurement)

1.10 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

1.11 فرہنگ (Glossary)

1.12 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

1.12.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1.12.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1.12.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1.13 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1.0 تمہید (Introduction)

آج کی ڈیٹا سے چلنے والی دنیا میں، ڈیٹا کو سمجھنے اور تجزیہ کرنے کی صلاحیت کافی اہمیت کی حامل ہے خاص طور پر علم معاشیات میں، جہاں معاشی فیصلے اکثر بڑے ڈیٹا سیٹس میں مشاہدہ کیے گئے نمونوں اور رجحانات کی بنا پر لیے جاتے ہیں۔ چاہے صارفین کے رویے کا اندازہ لگانا ہو، معاشی کارکردگی کا حساب کرنا ہو، یا مستقبل کے رجحانات کی پیشن گوئی کرنا ہو، سب کے لیے ڈیٹا مرکزی کردار ادا کرتا ہے۔ بلکہ جدید معاشی تجزیے کا بڑی حد تک انحصار بڑے اور پیچیدہ ڈیٹا سیٹس کی تشریح پر ہے۔ حکومتیں پالیسیوں کی تشکیل کے لیے، فرمیں طلب کا تخمینہ اور قیمتوں کا تعین کرنے کے لیے اور محققین طویل مدتی معاشی ترقی، عدم مساوات یا افراط زر کو سمجھنے کے لیے ڈیٹا پر انحصار کرتے ہیں۔ ڈیٹا جیسے قیمتیں، آمدنی، پیداوار کی سطح، یا شرح روزگار وغیرہ کا استعمال معاشی تعلقات کا جائزہ لینے، رجحانات کی شناخت کرنے اور شواہد پر مبنی نتائج اخذ کرنے کے لیے کیا جاتا ہے۔

شماریات وہ سائنس ہے جو ہمیں اس ڈیٹا کو سمجھنے کے قابل بناتی ہے۔ یہ عددی معلومات کو جمع کرنے، منظم کرنے، تجزیہ کرنے، تشریح کرنے اور پیش کرنے کا علم ہے۔ بنیادی طور پر، شماریات خام ڈیٹا کو مفید بصیرت میں تبدیل کرنے میں مدد کرتی ہے۔ یہ بڑی مقدار میں معلومات کا سادہ، قابل فہم شکلوں میں خلاصہ کرنے کے طریقے پیش کرتی ہے جبکہ غیر یقینی صورت حال اور مفروضوں کو جانچنے کے لیے مزید جدید تکنیک بھی فراہم کرتی ہے۔ ان طریقوں سے نہ صرف ہم بیان کرنے کے قابل ہوتے ہیں کہ ماضی میں کیا ہوا ہے، بلکہ مستقبل میں کیا ہو سکتا ہے اس کی پیشین گوئی کرنے اور ان پیشین گوئیوں کی صداقت کا جائزہ لینے کے بھی قابل ہوتے ہیں۔ علم معاشیات میں شماریات اس لیے اہم ہے کیونکہ یہ معاشی اکائیوں جیسے افراد، کاروباری ادارے اور حکومتوں کے معاشی رویے کے سمجھنے کے لیے درکار آلات فراہم کرتی ہے۔ معاشی نظریات عموماً اس کی وضاحت کرتے ہیں کہ معاشی اکائیاں مختلف معاشی تبدیلیوں کے رد عمل میں کیسا برتاؤ کرتی ہیں۔ شماریات ماہرین معاشیات کو ان نظریات کی درستگی جانچنے کے قابل بناتی ہے۔ شماریات کا دائرہ کار صرف معاشیات تک ہی محدود نہیں بلکہ انسانی زندگی کے تقریباً ہر شعبے میں اس کا کسی نہ کسی حد تک دخل ہے۔ مثال کے طور پر سائنس دان مفروضوں کو جانچنے کے لیے شماریاتی طریقوں کا استعمال کرتے ہیں، ماہرین نفسیات انسانی رویے کے نمونوں کا تجزیہ کرتے ہیں۔

کتاب کی یہ ابتدائی اکائی شماریات کا تعارف پیش کرتی ہے۔ اس میں ڈیٹا کے بنیادی تصورات اور پیمائش کے مختلف پیمانوں کا تعارف بھی پیش کیا گیا ہے۔

1.1 مقاصد (Introduction)

اس اکائی کے درج ذیل مقاصد ہیں:

- شماریات کا معنی اور تعریف بیان کرنا۔
- شماریات دائرہ کار اور حدود کی وضاحت کرنا۔

- بیاناتی شماریات بمقابلہ استنتاجی شماریات کی وضاحت کرنا۔
- ڈیٹا کی تعریف بیان کرنا اور پیمائش کے پیمانوں کی وضاحت کرنا۔

1.2 شماریات کا معنی اور تعریف (Meaning and Definition of Statistics)

شماریات کو انگیزی میں Statistics کہتے ہیں۔ انگریزی میں Statistics دو معانی میں مستعمل ہے۔ جب Statistics لفظ کو جمع استعمال کیا جاتا ہے تو اس سے مراد عددی معلومات ہوتی ہے جسے اردو میں ڈیٹا یا معطیات یا اعداد و شمار کہہ سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر کسی قصبے کے افراد کی اوسط آمدنی Statistics ہے۔

جب یہ لفظ واحد ہو تو اس کا مطلب شماریاتی طریقے ہوتا ہے۔ اس سے مراد وہ طریقے ہیں جن کو ڈیٹا یا معطیات کو جمع کرنے، ان کا تجزیہ کرنے، اور ان کی شریح کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ اس طرح یہ علم یا سائنس کی ایسی شاخ ہے جو ڈیٹا کی درجہ بندی، عددی شواہد کی جدول بندی اور تجزیہ اور فیصلے لینے سے متعلق ہے۔ اس طرح شماریات کی تعریف عددی ڈیٹا کی جمع، تنظیم، پیشکش، تجزیہ اور تشریح کی سائنس کے طور پر کی جاتی ہے۔

1.3 شماریات کا دائرہ کار (Scope of Statistics)

پچھلی چند دہائیوں میں شماریات تقریباً تمام علوم جیسے زراعت، حیاتیات، کاروبار، سماجیات، انجینئرنگ، طبعی سائنس اور دیگر انسانی سرگرمیوں کے تقریباً ہر شعبے کا لازمی جزو بن چکی ہے۔ شاید ہی انسانی سرگرمی کا کوئی ایسا شعبہ ہو جہاں شماریات کا استعمال نہ کیا جاسکتا ہو۔ شماریات کے اتنے کثیر اور متنوع استعمال ہیں کہ یہ صنعتی شماریات (Industrial Statistics)، حیاتیاتی شماریات (Biostatistics)، زرعی شماریات (Agricultural Statistics)، شماریاتی بائیو انفارمیٹکس (Bioinformatics) وغیرہ جیسے شماریات کی نئی شاخوں کے فروغ کا سبب بنے ہیں۔ ذیل میں وہ بعض اہم شعبے ہیں جو شماریات کے وسیع دائرہ کار کو واضح کرتے ہیں۔

1. شماریات اور حکومت (Statistics and State)

شماریات اور ریاست کے مابین تعلق زمانہ قدیم سے رہا ہے۔ حکومتیں اپنے معاشروں کو سمجھنے اور ان کے نظم و انصرام کے لیے شماریاتی معلومات پر انحصار کرتی رہی ہیں۔ درحقیقت، شماریات کا بالمقابل انگریزی لفظ Statistics لاطینی زبان کے لفظ Status سے ماخوذ ہے، جس کا مطلب ریاست ہے۔ دور حاضر میں شماریات عوامی انتظامیہ اور پالیسی سازی کے لیے ضروری سب سے اہم آلات میں سے ایک ہے۔ شماریات ریاست کو معیشت اور معاشرے کے اہم پہلوؤں کی نگرانی میں مدد کرتی ہے۔ مردم شماری کے اعداد و شمار عوامی اخراجات، بنیادی ڈھانچے کی ترقی، اور انتخابی نمائندگی سے متعلق فیصلوں میں مدد کرتے ہیں۔ معاشیاتی اشاریے جیسے جی ڈی پی، بے روزگاری کی شرح، افراط زر، اور تجارت کے اعداد و شمار حکومتوں کو معیشت کی صحت کا جائزہ لینے اور مناسب مالیاتی اور زری پالیسیوں کی تشکیل میں مدد دیتے ہیں۔

پھر شماریات صرف معاشی اور سماجی پالیسی کی تشکیل میں ہی مدد نہیں کرتی بلکہ ان پالیسیوں کی تاثیر کا جائزہ لینے میں بھی اہم کردار ادا کرتی ہے۔ صحت عامہ، تعلیم کے نتائج، غربت میں کمی، یا ماحولیاتی معیار کے اعداد و شمار کا تجزیہ کر کے، پالیسی ساز اس بات کا اندازہ لگا سکتے ہیں کہ ملک میں کیا صحیح ہو رہا ہے اور کہاں پالیسی مداخلات کی ضرورت ہے۔ اس طرح شماریات اس بات کو یقینی بنانے میں مدد کرتی ہے کہ عوامی وسائل کا موثر استعمال ہو سکے اور عوامی مداخلت اپنے مطلوبہ اہداف کو حاصل کر سکے۔

شفافیت، احتساب، اور بہتر حکمرانی کو فروغ دینے کے لیے شماریات انتہائی اہم ہے۔ درست اور قابل رسائی شماریاتی معلومات شہریوں، محققین اور بین الاقوامی اداروں کو حکومت کی کارکردگی کا جائزہ لینے اور اداروں کو جوابدہ ٹھہرانے میں مدد دیتی ہے۔

2. کاروبار اور انتظام میں شماریات (Statistics in Business and Management)

کاروباری دنیا میں، شماریات فیصلہ سازی، حکمت عملی اور منصوبہ بندی کے لیے ناگزیر ہیں۔ کمپنیاں بازار سے متعلق تحقیقات کے لیے شماریاتی آلات پر انحصار کرتی ہیں۔ شماریات کے استعمال سے انہیں صارفین کی ترجیحات، مسابقت کی حرکیات اور مصنوعات کی طلب کو سمجھنے میں مدد ملتی ہے۔

مثال کے طور پر شعبہ بازار کاری (Market Department) اشیا و خدمات کی تشہیر کے لیے، موجودات کتنی مقدار میں رکھی جائے اس کی منصوبہ بندی وغیرہ کے لیے، متوقع فروخت کے رجحانات کی پیش گوئی کرنے کے لیے شماریاتی آلات کا استعمال کرتا ہے۔ مالیاتی مینیجرز (Financial Managers)، شماریاتی آلات کا استعمال سرمایہ کاری سے متوقع خطرات اور منافع کا اندازہ لگانے کے لیے، اسٹاک بازار کی نقل و حرکت کا تجزیہ کرنے کے لیے، مالیاتی اثاثوں کی قیمتوں اور پورٹ فولیوز کو منظم کرنے کے لیے کرتے ہیں۔ کوالٹی کنٹرول ڈپارٹمنٹس (Quality Control Departments) مصنوعات کے معیار کو پرکھنے، معیار کو برقرار رکھنے اور نقائص کو کم کرنے کے لیے شماریاتی نمونے لیتے ہیں اور پراسیس کنٹرول (Process Control) جیسی تکنیکوں کا استعمال کرتے ہیں۔ انسانی سرمایہ مینیجرز (Human Resource Managers) ملازمین کی کارکردگی، کاروبار کی شرح، اور تربیتی پروگراموں کے اثرات کا مطالعہ کرنے کے لیے شماریاتی طریقوں پر بھی انحصار کرتے ہیں۔ اس طرح کمپنی کا تقریباً ہر شعبہ کارکردگی کو بہتر کرنے اور مسابقتی رہنے کے لیے شماریاتی تجزیے پر انحصار کرتا ہے۔

3. شماریات اور معاشیات (Statistics and Economics)

شماریات اور معاشیات کا گہرا تعلق ہے اور یہ دونوں ایک دوسرے سے جڑے ہوئے شعبے ہیں، کیونکہ معاشی نظریات اور ماڈل توثیق، تجزیہ اور اطلاق کے لیے ڈیٹا پر بہت زیادہ انحصار کرتے ہیں۔ اگرچہ معاشیات یہ سمجھنے کے لیے تصوراتی فریم ورک فراہم کرتی ہے کہ معاشی اکائیاں جیسے افراد اور بازار کس طرح برتاؤ کرتے ہیں، شماریات حقیقی دنیا کی معلومات کا استعمال کرتے ہوئے ان نظریات کو جانچنے کے لیے درکار اوزار پیش کرتی ہے۔ شماریاتی طریقوں کے بغیر، ماہرین معاشیات معاشی تعلقات کی پیمائش کرنے، پالیسی کے اثرات کا جائزہ لینے یا مستقبل کے معاشی حالات کے بارے میں قابل اعتماد پیشن گوئی کرنے سے قاصر ہوں گے۔

معاشی تحقیق میں، اعداد و شمار کا استعمال آمدنی، قیمتوں، پیداوار، روزگار، صرف، اور متعدد دیگر متغیرات سے متعلق ڈیٹا کی بڑی مقدار کو منظم اور خلاصہ کرنے کے لیے کیا جاتا ہے۔ یہ شماریاتی خلاصے ماہرین معاشیات کو ان نمونوں اور رجحانات کی نشاندہی کرنے میں مدد کرتے ہیں جو یہ سمجھنے کے لیے ضروری ہیں کہ معیشت کیسے کام کرتی ہے۔ مثال کے طور پر، ٹائم سیریز کے اعداد و شمار محققین کو طویل مدتی ترقی، افراط زر کے رجحانات، یا کاروباری ادوار کا مطالعہ کرنے کے قابل بناتے ہیں، جب کہ کراس سیکشنل ڈیٹا وقت کی دی گئی اکائی پر آمدنی میں عدم مساوات یا صارفین کے رویے کا تجزیہ کرنے میں مدد کرتا ہے۔ مفروضے کی جانچ، رجعت کا تجزیہ، اور اکانومیٹرک ماڈلنگ جیسی تکنیکیں اس بات کا تعین کرنے میں مدد کرتی ہیں کہ آیا معاشی تعلقات جیسے سرمایہ کاری پر شرح سود کا اثر یا اجرت پر تعلیم کا اثر شماریاتی لحاظ سے اہم ہیں۔

4. شماریات اور قدرتی علوم (Statistics and Natural Sciences)

شماریات قدرتی علوم میں بھی اہم کردار ادا کرتی ہے کیونکہ یہ محققین کو ڈیٹا کا تجزیہ کرنے، مفروضوں کی جانچ کرنے اور تجربات اور مشاہدات سے قابل اعتماد نتائج اخذ کرنے کی اجازت دیتی ہے۔ حیاتیات (Biology)، طبیعیات (Physics)، کیمیا (Chemistry)، ماحولیاتی سائنس (Environmental Science) اور ارضیات (Geology) جیسے شعبے پیچیدہ قدرتی مظاہر کو سمجھنے کے لیے شماریاتی طریقوں پر انحصار کرتے ہیں۔

تجرباتی سائنس (Experimental Science) میں، شماریات تجربات کو ڈیزائن کرنے اور اس بات کو یقینی بنانے کے لیے ضروری ہیں کہ نتائج سائنسی طور پر درست ہوں۔ نمونہ گیری یا سیمپلنگ (Sampling)، رینڈمائزیشن (Randomization)، اور کنٹرول گروپس (Control Groups) جیسے تصورات سائنسدانوں کو تعصب (Bias) کو کم کرنے اور مخصوص متغیرات کے اثر کو الگ کرنے میں مدد کرتے ہیں۔ ڈیٹا اکٹھا کرنے کے بعد، شماریاتی اختبار (Statistical Tests) اس بات کا تعین کرنے کے لیے استعمال کیے جاتے ہیں کہ آیا مشاہدہ شدہ اختلافات یا تعلقات اہم ہیں یا یہ محض اتفاقیہ ہیں۔ یہ عمل محققین کو مفروضوں کی تصدیق یا رد کرنے میں مدد کرتا ہے، سائنسی نتائج کی صداقت اور اعتبار کو بہتر بناتا ہے۔

مشاہداتی اعداد و شمار کا تجزیہ کرنے میں بھی شماریات کا وسیع پیمانے پر استعمال کیا جاتا ہے، جو کہ ماحولیات (Ecology)، فلکیات (Astronomy) اور موسمیاتی سائنس (Meteorology) جیسے شعبوں میں خاص طور پر اہم ہے جہاں کنٹرول شدہ تجربات مشکل یا ناممکن ہو سکتے ہیں۔ شماریاتی ماڈل سائنسدانوں کو انواع (Species) کی آبادی میں رجحانات کا مطالعہ کرنے، موسم کے نمونوں کی پیشین گوئی کرنے، ماحولیاتی تبدیلیوں کی پیمائش کرنے اور پیچیدہ نظاموں کے اندر تعلقات کو دریافت کرنے کی اجازت دیتے ہیں۔

قدرتی علوم میں، شماریات تجرباتی ڈیزائن، ڈیٹا کے تجزیے، اور سائنسی نتائج کی توثیق میں مدد دیتی ہے۔ حیاتیات اور طب میں، اس کا استعمال طبی آزمائش / کلینیکل ٹرائلز (Clinical Trials) کا تجزیہ کرنے، علاج کی تاثیر کی پیمائش کرنے اور آبادی کے جینیات کا مطالعہ کرنے کے لیے کیا جاتا ہے۔ ماحولیاتی سائنسدان آب و ہوا کے نمونوں کو ٹریک کرنے، آلودگی کی سطح کا اندازہ لگانے اور ماحولیاتی تبدیلیوں کو

کی وضاحت کے لیے شماریاتی طریقوں پر انحصار کرتے ہیں۔ طبیعیات اور کیمسٹری میں، احتمال اور شماریاتی میکانکس جوہری اور سالماتی سطح پر مظاہر کی وضاحت کرتے ہیں۔

5. شماریات اور تحقیق (Statistics and Research)

شماریات تحقیق کا ایک بنیادی جزو ہے کیونکہ یہ ڈیٹا کو جمع کرنے، تجزیہ کرنے اور اس کی تشریح کرنے کے لیے منظم اور قابل اعتماد طریقے فراہم کرتا ہے۔ سماجی علوم (Social Sciences)، طبعی علوم (Natural Sciences)، بزنس، طب (Medicine) یا تعلیم میں شماریات اس بات کو یقینی بناتی ہے کہ تحقیق کے نتائج مفروضوں کی بجائے شواہد پر مبنی ہوں۔ یہ محققین کو معلومات کو منظم کرنے، بامعنی تعلقات کی نشاندہی کرنے اور ان کے نتائج کی طاقت کا اندازہ کرنے کی اجازت دیتی ہے۔

تحقیق کے تمام شعبوں میں محققین اسے سروے اور تجربات کو ڈیزائن کرنے، جمع کردہ ڈیٹا کا تجزیہ کرنے اور درست نتائج اخذ کرنے کے لیے استعمال کرتے ہیں۔ سماجی علوم، تعلیم، اور صحت کے علوم میں، شماریاتی تجزیہ اس بات کا تعین کرنے میں مدد کرتا ہے کہ آیا مشاہدہ شدہ اثرات حقیقی ہیں یا اتفاقیہ ہیں۔ مفروضے کی جانچ، اعتماد کے وقفے، اور ارتباط کا تجزیہ تحقیقی نتائج کی تشریح کرنے کے لیے استعمال ہونے والے کچھ اہم آلات ہیں۔

6. شماریات کے دیگر استعمال

درج بالا کے علاوہ، شماریات کو روزمرہ کی زندگی کے متنوع شعبوں میں وسیع پیمانے پر استعمال کیا جاتا ہے۔ کھیلوں میں، کارکردگی کے میٹرکس اور گیم کی پیشین گوئیاں شماریاتی ماڈلنگ پر مبنی ہوتی ہیں۔ ماہر نفسیات رویے کے اعداد و شمار کا تجزیہ کرنے اور نفسیاتی نظریات کو جانچنے کے لیے اعداد و شمار کا استعمال کرتے ہیں۔ تعلیم میں، اعداد و شمار طلبا کی کارکردگی کا جائزہ لینے اور تدریس کی تاثیر کا اندازہ کرنے میں مدد کرتے ہیں۔ زراعت فصل کی پیداوار، بارش اور کیڑوں پر قابو پانے کے لیے شماریاتی پیشین گوئیوں پر انحصار کرتی ہے۔ موسمیات موسم اور آب و ہوا کے واقعات کی پیشین گوئی کے لیے امکانی ماڈلز کا استعمال کرتی ہے۔ مصنوعی ذہانت (Artificial Intelligence) اور مشین لرننگ (Machine Learning) جیسے جدید شعبوں میں شماریاتی طریقے الگورتھم کی ترقی اور ڈیٹا پر مبنی فیصلہ سازی کی ریڑھ کی ہڈی کی حیثیت رکھتے ہیں۔

1.4 شماریات کے افعال (Functions of Statistics)

جیسا کہ ہم نے اوپر بیان کیا، شماریات کا استعمال بہت سے شعبوں میں ہوتا ہے۔ اس کے بنیادی افعال ذیل میں بیان کیے گئے ہیں:

1. ڈیٹا یا اعداد و شمار جمع کرنا (Data Collection)

ڈیٹا جمع کرنا شماریات کے سب سے اہم اور بنیادی افعال میں سے ہے۔ ڈیٹا جمع کرنے میں درستگی اور وثوقیت کو یقینی بنانے کے لیے منظم طریقے سے معلومات جمع کرنا شامل ہے۔ مقصد ایسا ڈیٹا حاصل کرنا ہے جو نمائندہ، مکمل اور غیر جانبدار ہو۔ مناسب ڈیٹا اکٹھا کیے بغیر، پورے شماریاتی عمل سے سمجھوتہ ہو جاتا ہے، کیونکہ نتائج کے معیار کا بہت زیادہ انحصار جمع کیے گئے ڈیٹا کے معیار پر ہوتا ہے۔

2. **ڈیٹا آرگنائزیشن اور پریزنٹیشن** (Data Organization and Presentation)

ڈیٹا جمع کرنے کے بعد، یہ اکثر خام اور غیر ساختہ شکل میں موجود ہوتا ہے، جس کی تشریح کرنا مشکل ہوتا ہے۔ ڈیٹا آرگنائزیشن اور پریزنٹیشن کا کام ڈیٹا کو زیادہ قابل انتظام اور قابل فہم فارمیٹ میں ترتیب دے کر اس مسئلے کو حل کرتا ہے۔

3. **ڈیٹا کا تجزیہ** (Data Analysis)

ڈیٹا کا تجزیہ بامعنی معلومات حاصل کرنے کے لیے منظم ڈیٹا کی جانچ اور پروسیسنگ کا عمل ہے۔ اس عمل میں ڈیٹا سیٹ کے رویے اور خصوصیات کو سمجھنے کے لیے شماریاتی پیمانے جیسے کہ وسیط، اوسط، معیاری انحراف، اور ارتباط کا اطلاق شامل ہے۔ ڈیٹا کے تجزیے کے ذریعے، محققین متغیرات کے درمیان تعلقات کی شناخت کر سکتے ہیں، رجحانات دریافت کر سکتے ہیں، اور مفروضوں کی جانچ کر سکتے ہیں۔

4. **ڈیٹا کی تشریح** (Data Interpretation)

ڈیٹا کا تجزیہ کرنے کے بعد، اگلا اہم کام اس کی تشریح ہے۔ تشریح میں شماریاتی نتائج کی اہمیت کو واضح اور معنی خیز انداز میں بیان کرنا شامل ہے۔ یہ عددی نتائج کو قابل فہم نتائج میں ترجمہ کرنے میں مدد کرتا ہے۔ مثال کے طور پر، اگر کسی مطالعے میں ورزش اور کم فشارِ خون / بلڈ پریشر کے درمیان مضبوط تعلق پایا جاتا ہے، تو تشریح یہ دریافت کرے گی کہ اس تعلق کا عملی لحاظ سے کیا مطلب ہے۔

5. **پیشین گوئی** (Forecasting)

شماریات ماضی اور حال کے اعداد و شمار کی بنیاد پر مستقبل کے نتائج کی پیشین گوئی کرنے میں بھی اہم کردار ادا کرتی ہے۔ شماریات کا یہ فعل ڈیٹا کی بنا پر اندازہ لگاتا ہے کہ بعض حالات میں کیا ہو سکتا ہے۔ مثال کے طور پر، ماہرین معاشیات افراط زر یا روزگار کی شرح کی پیشن گوئی کرنے کے لیے ماضی کے معاشی اشاریوں کا استعمال کرتے ہیں، جب کہ ماہرین موسمیات تاریخی آب و ہوا کے اعداد و شمار کی بنیاد پر موسم کے نمونوں کی پیش گوئی کرتے ہیں۔

6. **فیصلہ سازی** (Decision Making)

شماریات کے سب سے زیادہ عملی کاموں میں سے ایک فیصلہ سازی میں مدد کرنا ہے۔ کاروبار سے لے کر حکومت سے لے کر صحت کی دیکھ بھال تک تقریباً ہر شعبے میں فیصلہ ساز بہترین طریقہ کار کا انتخاب کرنے کے لیے شماریاتی شواہد پر انحصار کرتے ہیں۔ اس میں انتخابات کا موازنہ کرنا، خطرات کا اندازہ لگانا اور ڈیٹا کی بنیاد پر مختلف نتائج کے امکان کا تعین کرنا شامل ہے۔ مثال کے طور پر، کوئی کمپنی یہ فیصلہ کرنے کے لیے فروخت کے ڈیٹا کا استعمال کر سکتی ہے کہ آیا نئی مصنوع متعارف کرائی جائے، یا عوامی صحت کے ادارے نئی پالیسیوں کو لاگو کرنے کے لیے انفیکشن کی شرح کے اعداد و شمار کا استعمال کر سکتی ہے۔

7. **مفروضوں کا اختبار** (Hypothesis Testing)

مفروضوں کی جانچ شماریات کا ایک اہم فعل ہے، جو محققین کو نمونے کی بنیاد پر آبادی کے بارے میں فیصلے کرنے کی اجازت دیتا ہے۔ اس عمل میں، مفروضے کو اس کی صداقت کا تعین کرنے کے لیے شماریاتی طور پر جانچا جاتا ہے۔ مختلف تکنیکوں کا استعمال کرتے ہوئے،

شماریات دان اس بات کا اندازہ لگاتے ہیں کہ آیا مشاہدہ شدہ ڈیٹا مفروضے کی حمایت کرتا ہے یا اس کی تردید کرتا ہے۔ مثال کے طور پر، ایک فارماسیوٹیکل کمپنی نمونے کے گروپ کے نتائج کا تجزیہ کر کے جانچ کر سکتی ہے کہ آیا نئی دوا موجودہ دوا سے زیادہ موثر ہے۔

8. کوالٹی کنٹرول (Quality Control)

شماریات کوالٹی کنٹرول میں بھی اہم کردار ادا کرتی ہے، خاص طور پر مینوفیکچرنگ، انجینئرنگ اور پیداواری صنعتوں میں۔ مختلف شماریاتی طریقوں کے ذریعے، کمپنیاں اس بات کو یقینی بناتی ہیں کہ مصنوعات قائم شدہ معیار پر پورا اترتی ہوں۔ یہ عمل پیداوار کے عمل میں ابتدائی تغیرات یا نقائص کا پتہ لگانے میں مدد کرتا ہے، ضیاع کو کم کرتا ہے اور کارکردگی کو بہتر بناتا ہے۔

1.5 شماریات کی حدود (Limitations of Statistics)

اگرچہ شماریات ڈیٹا یا اعداد و شمار کا تجزیہ کرنے اور فیصلہ سازی میں اہم کردار ادا کرتی ہے لیکن اس کی کچھ حدود ہیں۔ ڈیٹا کی غلط تشریح اور غلط استعمال سے بچنے کے لیے ان حدود کو سمجھنا ضروری ہے۔ ذیل میں شماریات کی کچھ اہم حدود بیان کی گئی ہیں:

1. شماریات صرف مقداری ڈیٹا سے متعلق ہے

شماریات صرف ایسے اعداد و شمار کا تجزیہ کر سکتی ہے جنہیں شمار کیا جا سکتا ہے یا ماپا جا سکتا ہے۔ ایسی خصوصیات جن کا اظہار اعداد میں نہیں کیا جا سکتا ان کا شماریاتی تجزیہ نہیں کیا جا سکتا۔ جیسے جذبات، اخلاقیات، حوصلہ افزائی، یا رائے جیسے معیاری عوامل کا شماریات مؤثر طریقے سے تجزیہ نہیں کر سکتی جب تک کہ ان کا اعداد میں اظہار نہ کیا جائے۔ مثال کے طور پر ایک سروے یہ دکھا سکتا ہے کہ 80% گاہک مخصوص خدمت سے "مطمئن" ہیں، لیکن یہ اس بات کو بیان نہیں کرتا کہ وہ ایسا کیوں محسوس کرتے ہیں، ان کا اطمینان کتنا شدید ہے، یا وہ جذباتی طور پر برانڈ سے جڑے ہوئے ہیں۔ اعداد انسانی جذبات یا محرکات کی مکمل عکاسی نہیں کر پاتے ہیں۔

2. شماریات اسباب کو بیان نہیں کرتی

شماریاتی تجزیہ دو متغیرات کے درمیان ارتباط یا تعلق کو بیان کرتا ہے لیکن سبب و مسبب کا تعلق قائم نہیں کرتا ہے۔ مثال کے طور پر ڈیٹا ویڈیو گیم کے استعمال اور طلبا کی کم تعلیمی کارکردگی کے درمیان مضبوط تعلق دکھا سکتا ہے۔ تاہم، محض ڈیٹا اس بات کی تصدیق نہیں کر سکتا کہ ویڈیو گیمز کم نمبرات کا باعث بنتے ہیں۔ یہ ہو سکتا ہے کہ اسکول میں مشکلات کا سامنا کرنے والے طلبا تناؤ سے بچنے کے لیے ویڈیو گیمز کھیلتے ہوں، یا تیسرا عامل جیسے وقت کا ناقص انتظام دونوں عوامل کو متاثر کرتا ہو۔

3. نتائج گمراہ کن ہو سکتے ہیں یا ان کا غلط استعمال ہو سکتا ہے

متعصب نتائج کی حمایت کے لیے اعداد و شمار کی غلط تشریح کی جا سکتی ہے یا جان بوجھ کر ہیرا پھیری کی جا سکتی ہے۔ ڈیٹا اکٹھا کرنے کے ناقص طریقے، نامناسب شماریاتی تکنیک، یا نتائج کی منتخب پیشکش غلط یا گمراہ کن بصیرت کا باعث بن سکتی ہے، جسے اکثر "ڈیٹا کے ساتھ جھوٹ بولنا" کہا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر ایک کمپنی اشتہار دیتی ہے کہ "ہماری نئی دوا بیماری کے خطرے کو 50% تک کم کرتی ہے"، لیکن کمپنی یہ نہیں بتاتی کہ خطرہ 2% سے کم ہو کر 1% رہ گیا ہے۔ یہ 50 فیصد کی کمی ہے لیکن مطلقاً دیکھا جائے تو یہ کمی کچھ زیادہ نہیں ہے۔ لیکن 50

فیصد کا دعوی حالانکہ درست ہے صارفین کو اس کا احساس کرا سکتا ہے کہ دوا کا فائدہ اصل فائدے سے کہیں زیادہ ہے۔

4. ماہر تشریح کی ضرورت ہوتی ہے۔

ہر ایرا غیرہ شماریات کا درست استعمال نہیں کر سکتا۔ شماریاتی نتائج کی درست تشریح کے لیے مہارت اور تجربے کی ضرورت ہوتی ہے۔ فارمولوں کا غلط استعمال یا تصورات کی غلط سمجھ نمونے میں تعصب اور غلط نتائج کا باعث بن سکتی ہے۔ مثال کے طور پر COVID-19 وبائی مرض کے دوران، ایک سرخی یہ رپورٹ کر سکتی ہے کہ "ملک A میں کیس فیلیٹی ریٹ (CFR) 5% ہے، جبکہ ملک B کا CFR صرف 1% ہے۔" پہلی نظر میں، یہ لگ سکتا ہے کہ ملک A میں حالات کہیں زیادہ خطرناک ہیں۔ تاہم، جانچ کی شرح، صحت کی دیکھ بھال کے بنیادی ڈھانچے، اور آبادیات پر غور کیے بغیر ان اعداد و شمار کی تشریح کرنا گمراہ کن ہو سکتا ہے۔ ملک A نے صرف سب سے زیادہ سنگین کیسز کا تجربہ کیا ہو سکتا ہے جس سے اس کا CFR بڑھا نظر آ سکتا ہے، جبکہ ملک B نے بہت سے ہلکے کیسز کی نشاندہی کرتے ہوئے وسیع پیمانے پر جانچ کی ہو گی۔ سیاق و سباق سے متعلق ان عوامل کو سمجھے بغیر، کوئی بھی ہر ملک میں وبائی مرض کی شدت کے بارے میں غلط نتائج اخذ کر سکتا ہے۔

5. ڈیٹا کے معیار پر منحصر

شماریاتی تجزیہ اتنا ہی اچھا ہوتا ہے جتنا کہ استعمال کیا گیا ڈیٹا۔ اگر ڈیٹا نامکمل، متعصب، پرانا، یا غلط ہے، تو نتائج ناقابل بھروسہ ہوں گے۔ انگریزی کا مشہور مقولہ Garbage in Garbage Out (کچرا اندر، کچرا باہر) اس حد کو نمایاں کرتا ہے۔ مثال کے طور پر آمدنی کی سطح پر کیا گیا مطالعہ غلط نتائج پیش کر سکتا ہے اگر لوگ اپنی آمدنی کے بارے میں درست معلومات دینے کو تیار نہ ہوں یا اگر ڈیٹا غیر نمائندہ نمونے سے آتا ہو (جیسے، صرف شہری علاقوں سے)۔ یہ ناقص پالیسیوں یا یا غیر موثر معاشی فیصلوں کا باعث بن سکتا ہے۔

6. انفرادی معاملات پر لاگو نہیں کیا جا سکتا

شماریات گروہوں یا مجموعوں سے متعلق ہے، افراد سے نہیں۔ اگرچہ شماریات اس بات کی نشاندہی کر سکتی ہے کہ 70% لوگ کسی خاص طریقے سے برتاؤ کرتے ہیں، لیکن یہ ضروری نہیں کہ کسی مخصوص شخص پر بھی یہ لاگو ہو۔ لہذا، شماریات کے اعداد و شمار کی بنا پر وضع کیے گئے عمومیات انفرادی فیصلہ سازی میں مناسب نہیں ہو سکتے ہیں۔ اعداد و شمار دکھا سکتے ہیں کہ ریٹائرمنٹ کی اوسط عمر 62 سال ہے۔ تاہم، ایک فرد صحت کی وجہ سے پہلے یا بعد میں مالی ضروریات کی وجہ سے ریٹائر ہونے کا انتخاب کر سکتا ہے۔

7. مفروضوں اور شرائط سے محدود

شماریاتی طریقے اکثر مخصوص مفروضوں پر انحصار کرتے ہیں جیسے معمول، تصادف، یا مشاہدات کی آزادی۔ اگر یہ مفروضے پورے نہیں ہوتے تو، نتائج غلط ہو سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر ایک کمپنی مستحکم رجحان کو فرض کرتے ہوئے مستقبل کی فروخت کی پیش گوئی کرنے کے لیے خطی رجعت (Linear Regression) کا استعمال کرتی ہے۔ لیکن اگر بازار اچانک گر جائے یا کوئی مدمقابل بازار میں داخل ہو جائے تو خطی تعلق کا مفروضہ ناکام ہو سکتا ہے، اور ماڈل کی پیشین گوئیاں ناقابل اعتبار ہو سکتی ہیں۔

8. وقت طلب اور مہنگا

بڑے ڈیٹا سیٹس کو اکٹھا کرنا اور ان کا تجزیہ کرنا وسائل طلب ہو سکتا ہے۔ اس میں وقت، رقم اور ہنر مند افراد کی ضرورت ہوتی ہے۔ کچھ معاملات میں، خاص طور پر ترقی پذیر ممالک یا چھوٹی تنظیموں میں، قابل اعتماد شماریاتی بنیادی ڈھانچے تک رسائی محدود ہو سکتی ہے۔ مثال کے طور پر قومی صحت کے سروے کے لیے بڑی مالیات، لاجسٹکس اور تربیت یافتہ افراد کی ضرورت ہوتی ہے۔ ترقی پذیر ممالک میں وسائل کی کمی کے نتیجے میں پرانا یا نامکمل ڈیٹا ہو سکتا ہے، جس سے صحت کی پالیسیوں کی کارکردگی متاثر ہوتی ہے۔

1.6 شماریات پر عدم اعتماد (Distrust in Statistics)

شماریات پر عدم اعتماد سے، ہمارا مطلب شماریاتی بیانات اور شماریاتی طریقوں پر اعتماد کی کمی ہے۔ یہ اکثر کہا جاتا ہے کہ شماریات کچھ بھی ثابت کر سکتی ہے۔ برطانوی وزیر اعظم بنجامن ڈزائیلی کے حوالے سے مارک ٹوین کا مشہور مقولہ "جھوٹ کی تین قسمیں ہیں: جھوٹ، کھلا جھوٹ، اور شماریات؛ ان کی سنگینی ان کے نام کی ترتیب کے مطابق ہے" شماریات سے متعلق لوگوں کے شبہات کی عکاسی کرتا ہے۔ شماریات سے متعلق لوگوں کے یہ خیالات مندرجہ ذیل تین اہم وجوہات کی بنا پر ہیں:

اول، شماریاتی اعداد و شمار قائل کرنے والے ہوتے ہیں اور اس وجہ سے لوگ اکثر عددی ڈیٹا کو ان کے ماخذ، درستگی، یا سیاق و سباق پر سوال کیے بغیر قبول کر لیتے ہیں کیونکہ اعداد معروضی اور مستند معلوم ہوتے ہیں۔ مثال کے طور پر ایک خبر میں دعویٰ کیا جاتا ہے کہ "90% لوگ برانڈ X کے ٹوتھ پیسٹ کو ترجیح دیتے ہیں۔" یہ دعوی قائل کرنے والا لگتا ہے۔ تاہم، ممکن ہے کہ سروے میں صرف 10 لوگوں کو شامل کیا گیا ہو، یا تمام جواب دہندگان کو ایک ایسے اسٹور سے منتخب کیا گیا ہو جہاں برانڈ X کو بہت زیادہ فروغ دیا گیا ہو۔ یہ جانے بغیر کہ یہ اعداد و شمار کیسے حاصل کیے گئے، لوگ اس دعوے پر یقین کر سکتے ہیں کیونکہ "90%" نمبر متاثر کن اور قابل اعتماد لگتا ہے۔

دوم، پیشگی نتائج کو ثابت کرنے کے لیے اعداد و شمار میں ہیرا پھیری کی جا سکتی ہے اور کی جاتی ہے۔ پہلے سے طے شدہ دلیل یا نتیجے کی حمایت کے لیے اعداد و شمار کو منتخب طور پر استعمال کیا جا سکتا ہے یا مسخ کیا جا سکتا ہے اور کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر ایک سیاست دان دعوی کرتا ہے کہ "میری حکومت کے تحت بے روزگاری میں کمی آئی ہے،" ایک ایسی رپورٹ کا استعمال کرتے ہوئے جس میں بے روزگاری میں 7.2 فیصد سے 6.8 فیصد تک کی کمی واقع ہوئی ہے۔ تاہم، اس اعداد و شمار میں صرف وہ لوگ شامل ہیں جو فعال طور پر نوکریوں کی تلاش میں ہیں۔ اس میں ان لوگوں کو شامل نہیں کیا گیا جنہوں نے مایوسی کی وجہ سے کام کی تلاش چھوڑ دی ہے، جس کا مطلب ہے کہ اصل میں بے روزگاری میں بہتری نہیں آئی ہے۔ اس میٹرک کا انتخاب تکلیف دہ ڈیٹا کو نظر انداز کرتے ہوئے ایک سازگار بیانیہ کی حمایت کرتا ہے۔

سوم، درست اعداد و شمار بھی گمراہ کن انداز میں پیش کیا جا سکتے ہیں جس سے سامعین کو گمراہ کیا جا سکتا ہے۔ مثال کے طور پر ایک یونیورسٹی اشتہار دیتی ہے کہ "ہمارے گریجویٹس ہر ماہ اوسطاً 100000 روپے تنخواہ حاصل کرتے ہیں۔" اگرچہ یہ دعوی حقیقتاً درست ہے، لیکن یہ اس حقیقت کو چھپا سکتا ہے کہ چند بہت زیادہ کمانے والے گریجویٹس نے اوسط کو بڑھا دیا ہے۔ درحقیقت گریجویٹس کی اکثریت 40000 سے 60000 روپے کے بیچ کماتی ہے۔ وسیط (Median) میڈین کے بجائے اوسط (Mean) کا استعمال کامیابی کا غلط تاثر دیتا ہے۔

لیکن یہ واضح رہنا چاہیے کہ شماریات نہ تو کسی دعوے کو درست ثابت کرتی ہے اور نہ ہی غلط ثابت کرتی ہے۔ یہ محض ایک آلہ ہے۔ دیگر آلات کی طرح، جب اسے درست طریقے سے استعمال کیا جائے، تو یہ بہتر، درست اور باخبر فیصلے لینے میں مدد کر سکتی ہے لیکن جب اس کا غلط استعمال یا غلط تشریح کی جائے، تو یہ الجھن یا نقصان کا باعث بھی بن سکتی ہے۔ لہذا، غلطی خود شماریات کی نہیں ہے، بلکہ یہ کس طرح استعمال کیا جاتا ہے اس میں ہے۔ جس طرح تیز دھار چاقو کو کھانا تیار کرنے اور چوٹ پہنچانے دونوں کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے، اسی طرح شماریاتی آلات کو درست معلومات دینے یا لوگوں گمراہ کرنے دونوں میں استعمال کیا جا سکتا ہے۔ اور یہ مکمل طور پر استعمال کرنے والے کی نیت اور مہارت پر منحصر ہے۔

1.7 وضاحتی شماریات بمقابلہ استنتاجی شماریات (Descriptive vs Inferential Statistics)

شماریات وہ علم ہے جو عددی اعداد و شمار کے جمع کرنے، تجزیہ کرنے، تشریح کرنے اور پیش کرنے سے متعلق ہے۔ یہ بنیادی طور پر مقداری ڈیٹا کا مجموعہ ہے۔ شماریات کو دو حصوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے وضاحتی شماریات اور استنتاجی شماریات۔ وضاحتی شماریات ڈیٹا کو بیان کرتی ہے اور استنتاجی شماریات ہمیں اس ڈیٹا سے پیشین گوئیاں یا تخمینہ لگانے کی اجازت دیتی ہے۔

1. وضاحتی شماریات (Descriptive Statistics)

وضاحتی شماریات شماریات کی وہ شاخ ہے جو ڈیٹا کو بامعنی انداز میں خلاصہ اور پیش کرنے سے متعلق ہے۔ ڈیٹا سیٹ کی اہم خصوصیات کو بیان کرنے کے لیے اس میں عددی پیمانوں جیسے وسیط، اوسط، موڈ، رینج اور معیاری انحراف کا استعمال شامل ہے۔ وضاحتی شماریات میں بار چارٹس، ہسٹوگرام، پائی چارٹس جیسے گرافیکی آلات کا استعمال بھی شامل ہے۔ یہ آلات ڈیٹا کے پیٹرن کو سمجھنے میں مدد کرتے ہیں۔ وضاحتی شماریات کا مقصد نتائج اخذ کرنا یا پیشین گوئیاں کرنا نہیں ہے، ڈیٹا جس حال میں ہے اس کا واضح اور جامع جائزہ فراہم کرنا ہے۔ یہ عام طور پر ڈیٹا کے تجزیے کے ابتدائی مراحل میں بنیادی رجحانات، مرکزی رجحانات، اور اعداد و شمار کے دیے گئے سیٹ کے اندر تغیر کو سمجھنے کے لیے استعمال ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر ایک استاد ریاضی کے امتحان میں 30 طلبا کے نمبرات ریکارڈ کرتا ہے۔ وہ اوسط نمبر کا حساب لگاتا ہے کہ جو 72 ہے، سب سے زیادہ نمبر 95 ہے اور سب سے کم نمبر 45 ہے۔ وہ ایک بار چارٹ بھی بناتا ہے تا کہ یہ دکھایا جا سکے کہ کتنے طلبا نے مخصوص رینج (مثلاً، 70-60، 80-70) میں نمبرات حاصل کیے ہیں۔ یہ عمل وضاحتی شماریات سے متعلق ہے کیونکہ یہ کلاس کے 30 طلبا کے ڈیٹا کا خلاصہ کرتی ہے اور پیش کرتی ہے۔

2. استنتاجی شماریات (Inferential Statistics)

استنتاجی شماریات صرف ڈیٹا کی وضاحت نہیں کرتی بلکہ اس کا تعلق نمونے کی بنیاد پر ایک بڑی آبادی کے بارے میں پیشین گوئیاں یا تخمینہ لگانے سے ہے۔ یہ نمونے سے اخذ کیے گئے نتائج کے قابل اعتماد ہونے کا اندازہ لگانے کے لیے نظریہ احتمال استعمال کرتی ہے۔ استنتاجی شماریات کی کلیدی تکنیکوں میں اختبارِ مفروضہ (Hypothesis Testing)، اعتماد کے وقفے (Confidence Interval)، رجعت کا تجزیہ (Regression Analysis)، اور تغیرات کا تجزیہ (Analysis of Variance-ANOVA) شامل ہیں۔ وضاحتی

شماریات کے برعکس، جو مکمل ڈیٹا پر کام کرتی ہے، تخمینی شماریات اس مفروضے پر کام کرتی ہے کہ ہم ڈیٹا کے صرف ایک حصے کو استعمال کرتے ہوئے پوری آبادی کے بارے میں عمومی فیصلے صادر کر سکتے ہیں۔ یہ اسے سماجی علوم، طب اور کاروبار جیسے شعبوں میں ایک طاقتور آلہ بناتا ہے، جہاں پوری آبادی کا مطالعہ کرنا اکثر غیر عملی یا ناممکن ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر ایک محقق ہندوستان میں کالج کے طلبا کے ماہانہ اوسط اخراجات جاننا چاہتا ہے۔ ہر طالب علم کا سروے کرنے کے بجائے، وہ تصادفی طور پر مختلف ریاستوں سے 1000 طلبا کا نمونہ منتخب کرتا ہے۔ نمونے کی بنیاد پر، وہ 5000 روپے کے اوسط اخراجات کا حساب لگاتا ہے اور ہندوستان کے تمام کالج طلبا کے اوسط کا تخمینہ لگانے کے لیے اعتماد کا وقفہ استعمال کرتا ہے۔ وہ اس بات کا تعین کرنے کے لیے ایک مفروضے کا اختبار بھی کرتا ہے کہ آیا شہری طلبا دیہی طلبا کے مقابلے میں زیادہ خرچ کرتے ہیں۔ یہ استنتاجی شماریات ہے کیونکہ اس میں نمونے کی بنیاد پر ایک بڑی آبادی کے بارے میں نتائج اخذ کرنا اور پیشین گوئیاں کرنا شامل ہے۔

وضاحتی اور استنتاجی بیانات کی کچھ مثالیں درج ذیل ہیں۔

1. تلنگانہ میں 500 سرکاری اسکولوں کے طلبا کے سروے میں اوسط حاضری 82% فیصد پائی گئی (وضاحتی شماریات)۔ اس کی بنیاد پر، حکام کا اندازہ ہے کہ ریاست کے تمام سرکاری اسکولوں میں حاضری تقریباً 85%-80% ہے (استنتاجی شماریات)۔
2. ایمس دہلی میں سروے کیے گئے 1,200 مریضوں میں سے، 35% نے ذیابیطس کی اطلاع دی (وضاحتی شماریات)۔ اس نمونے سے، محققین نے پیش گوئی کی ہے کہ شہر دہلی میں 40%-30% افراد کو ذیابیطس کی شکایت ہو سکتی ہے (استنتاجی شماریات)۔
3. پنجاب میں 300 کسانوں کے ایک نمونے میں، گندم کی اوسط پیداوار 4.5 ٹن فی ہیکٹر تھی (وضاحتی شماریات)۔ اس نتیجے کو استعمال کرتے ہوئے، سائنسدانوں نے پیشن گوئی کی ہے کہ ریاست میں گندم کی کل پیداوار اس سال گزشتہ سال سے زیادہ ہوگی (استنتاجی شماریات)۔
4. بنگلورو کے 50 بڑے چوراہوں سے ٹریفک کے اعداد و شمار سے پتہ چلتا ہے کہ چوٹی کے اوقات میں گاڑیوں کی اوسط رفتار 18 کلومیٹر فی گھنٹہ ہے (وضاحتی شماریات)۔ شہر کے منصوبہ سازوں کا اندازہ ہے کہ بنگلورو میں ٹریفک کی مجموعی حالت سال در سال خراب ہوتی جا رہی ہے (استنتاجی شماریات)۔
5. کولکتہ میں 1,000 گھرانوں کا مطالعہ ظاہر کرتا ہے کہ اوسط ماہانہ اخراجات ₹22,000 ہیں (وضاحتی شماریات)۔ اس سے، ماہرین معاشیات نے شہر کے تمام گھرانوں کے اوسط اخراجات کا تخمینہ تقریباً ₹24,000 − ₹20,000 لگایا ہے (استنتاجی شماریات)۔
6. اتر پردیش میں 10,000 ووٹروں کے ایگزٹ پول سے پتہ چلا ہے کہ 46% افراد نے پارٹی A کی حمایت کی ہے (وضاحتی شماریات)۔ پولسٹرز کا اندازہ ہے کہ پارٹی A ریاست میں سب سے زیادہ سیٹیں جیت سکتی ہے (استنتاجی شماریات)۔

1.8 ڈیٹا (Data)

ڈیٹا سے مراد خام حقائق اور اعداد و شمار ہیں جنہیں جمع کیا جا سکتا ہے، جن کی پیمائش کی جا سکتی ہے اور جن کا تجزیہ کیا جا سکتا ہے۔ کسی

خاص مطالعے میں جمع کیے گئے تمام ڈیٹا کو اس مطالعے کا ڈیٹاسیٹ (Dataset) کہا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر درج ذیل جدول انسانی ترقیاتی اشاریہ کی رپورٹ کے مطابق 10 ممالک کے متعلق ڈیٹا پیش کرتی ہے۔

ملک	انسانی ترقیاتی اشاریہ	پیدائش پر متوقع عمر	متوقع اسکول کے سال	اسکول کے اوسط سال	فی کس خام قومی آمدنی
آئس لینڈ	0.972	82.7	18.9	13.9	69,117
ناروے	0.970	83.3	18.8	13.1	1,12,710
ایران (اسلامی جمہوریہ)	0.799	77.7	14.0	10.8	16,096
چین	0.797	78.0	15.5	8.0	22,029
سری لنکا	0.776	77.5	13.1	10.8	12,616
انڈیا (ہندوستان)	0.685	72.0	13.0	6.9	9,047
نیپال	0.622	70.4	13.8	4.5	4,726
پاکستان	0.544	67.6	7.9	4.3	5,501
صومالیہ	0.404	58.8	7.5	1.9	1,475
جنوبی سوڈان	0.388	57.6	5.6	5.7	688

عنصر (جسے اکائی یا ہستی بھی کہا جاتا ہے) وہ انفرادی شے یا رکن ہے جس پر ڈیٹا اکٹھا کیا جاتا ہے۔ درج بالا جدول میں ہر ملک ایک عنصر ہے۔ اس طرح جدول میں 10 عناصر پیش کیے گئے ہیں۔ متغیر (Variable) وہ خصوصیت یا وصف ہے جسے ہر عنصر کے لیے ماپا جاتا ہے یا جس کا مشاہدہ کیا جاتا ہے۔ جدول میں 5 متغیرات ذکر کیے گئے ہیں۔ 1. انسانی ترقیاتی اشاریہ (Human Development Index)، 2. پیدائش پر متوقع عمر (Life Expectancy at Birth)، 3. متوقع اسکول کے سال (Expected Years of Schooling)، 4. اوسط اسکول کے سال (Mean Years of Schooling)، 5. فی کس خام قومی آمدنی (Per Capita GNI)۔

مشاہدہ (Observation) کسی ایک عنصر کے لیے ریکارڈ کیے گئے تمام متغیرات کی قدروں کا مجموعہ ہے۔ درج بالا جدول میں ہر قطار (Row) ایک مشاہدہ ہے۔ ہر مشاہدے میں واحد ملک کے لیے 5 متغیرات کی قدریں دی گئی ہیں۔ کل 10 مشاہدے ہیں ہر ایک ملک کے لیے ایک مشاہدہ ہے۔ مثال کے طور پر ہندوستان کے لیے پانچ متغیرات کی قدریں ہیں: 0.685، 72.0، 13.0، 6.9، 9,047

1.9 پیمائش کے پیمانے (Scales of Measurement)

پیمائش کے پیمانے (Scales of Measurement) وہ اصول ہیں جو بتاتے ہیں کہ ڈیٹا کیسے ترتیب دیا جاتا ہے اور اس پر کون سے حساب کتاب کیے جاسکتے ہیں۔ انہیں پیمائش کی سطح (Level of Measurement) بھی کہا جاتا ہے۔ پیمائش کے پیمانوں کی چار اہم اقسام ہیں:

1. اسمی پیمانہ (Nominal Scale)

اسمی پیمانے کا استعمال ڈیٹا کی درجہ بندی یا لیبل لگانے کے لیے کیا جاتا ہے۔ اسمی پیمانے پر ماپے جانے والے متغیرات میں صنف،

مذہب اور پسندیدہ رنگ وغیرہ شامل ہیں۔ اسمی ڈیٹا کی اہم خصوصیت یہ ہے کہ اس کی قدریں محض نام یا لیبل ہوتی ہیں، اور ان میں کوئی منطقی ترتیب نہیں ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر، اس بات کا کوئی مطلب نہیں ہے کہ سبز رنگ نیلے سے زیادہ ہے یا کم ہے۔ اسمی پیمانے پیمائش کی کم ترین سطح کی نمائندگی کرتے ہیں اور صرف درجہ بندی کے لیے استعمال ہوتے ہیں۔

2. ترتیبی پیمانہ (Ordinal Scale)

ترتیبی پیمانے میں درجہ بندی کے ساتھ ساتھ ترتیب بھی شامل ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر، "بہت غیر مطمئن"، "کچھ حد تک غیر مطمئن"، "کچھ حد تک مطمئن"، یا "بہت مطمئن" کے طور پر گاہک کی اطمینان کی پیمائش کی درجہ بندی اور موازنہ کیا جاسکتا ہے۔ ایک شخص دوسرے سے زیادہ مطمئن ہو سکتا ہے۔ اگرچہ کہ ترتیبی پیمانے درجہ بندی کو ظاہر کرتے ہیں، لیکن وہ سطحوں کے درمیان مساوی وقفوں کو فرض نہیں کرتے ہیں۔ "بہت غیر مطمئن" اور "کچھ حد تک غیر مطمئن" کے درمیان نفسیاتی فرق ضروری نہیں کہ "کچھ مطمئن" اور "بہت مطمئن" کے درمیان فرق کے مساوی ہو۔

3. وقفی پیمانہ (Interval Scale)

وقفی پیمانے نہ صرف ترتیب فراہم کرتے ہیں بلکہ اقدار کے درمیان برابر وقفے بھی فراہم کرتے ہیں۔ ایک بہترین مثال درجہ حرارت کی ہے۔ $30°C$ اور $40°C$ کے درمیان فرق $80°C$ اور $90°C$ کے درمیان فرق کے برابر ہے۔ چونکہ مساوی وقفہ ہوتا ہے لہذا وقفی پیمانے کے متغیرات کو جوڑا اور گھٹایا جاسکتا ہے۔ تاہم، ان متغیرات کا تناسب نہیں نکالا جاسکتا کیوں کہ وقفی پیمانے میں حقیقی نقطہ صفر نہیں ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر، $0°C$ درجہ حرارت کی غیر موجودگی کی نمائندگی نہیں کرتا ہے۔ نتیجے کے طور پر، آپ دو درجہ حرارت کا تناسب نہیں نکال سکتے۔ مثال کے طور پر آپ نہیں کہہ سکتے کہ درجۂ حرارت $80°C$ درجۂ حرارت $40°C$ سے دوگنا گرم ہے۔ وقفی پیمانے کی ایک اور مثال سال ہے۔ سالوں کے بیچ مساوی وقفہ ہے۔ مثال کے طور پر سال 2000 اور سال 2010 کے بیچ اتنا ہی وقفہ ہے جتنا سال 1950 اور سال 1960 کے بیچ ہے۔ لیکن سال کا مطلق نقطہ صفر نہیں ہے۔ لہذا ان کا تناسب ممکن نہیں۔ آپ نہیں کہہ سکتے کہ سال 2000 سال 1000 کا دوگنا ہے۔ آپ سالوں کو جوڑ سکتے ہیں، گھٹا سکتے ہیں لیکن ان کو تقسیم نہیں کر سکتے۔

4. تناسبی پیمانہ (Ratio Scale)

تناسبی پیمانے پیمائش کی سب سے زیادہ معلوماتی قسم ہیں۔ ان میں پچھلے پیمانوں کی تمام خصوصیات ہوتی ہیں۔ ان کی درجہ بندی کی جاسکتی ہے، ان کی ترتیب دی جاسکتی ہے اور مساوی وقفے ہوتے ہیں۔ نیز ایک حقیقی نقطہ صفر ہوتا ہے جو ماپے جانے والی مقدار کی عدم موجودگی کی نشاندہی کرتا ہے۔ اس کی وجہ سے تناسبی پیمانے کے متغیرات پر تمام ریاضی کے عمل کیے جاسکتے ہیں یعنی جوڑنا، گھٹانا، تقسیم کرنا وغیرہ۔ مثال کے طور پر زر تناسبی پیمانے کا متغیر ہے۔ اگر کسی کے پاس صفر روپے ہیں، تو اس کے پاس کوئی پیسہ نہیں ہے۔ اور اگر ایک کے پاس 50 روپے ہیں اور دوسرے کے پاس 25 روپے ہیں تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ پہلے کے پاس دوسرے کے مقابلے دوگنا روپے ہیں۔ اوپر ہم نے سال کو وقفی پیمانے کا متغیر کہا لیکن یہ تناسبی پیمانہ بھی ہو سکتا ہے جب اس کو کسی نقطہ صفر سے مدت کے طور پر ماپا جائے۔ مثال کے طور پر اس طرح

کے بیان دینا ممکن ہوتا ہے کہ وہ اپنے بھائی سے دوگنی عمر کا ہے۔ وجہ یہ ہے کہ اس صورت میں سال کا مطلق نقطہ صفر پیدائش کا سال ہے۔

درج ذیل جدول چاروں پیمانوں کو دکھاتی ہے۔ WTO ممبر اسمی پیمانہ ہے کیوں کہ ممبر ہونا یا نہ ہونا صرف درجہ بندی ہے۔ ترقی کی سطح ترتیبی پیمانے کا متغیر ہے۔ ترقی کی سطح کی درجہ بندی کی جاسکتی ہے اور ترتیب دی جاسکتی ہے۔ WTO سے جڑنے کا سال وقفی پیمانے کا متغیر ہے جبکہ فی کس جی ڈی پی تناسبی پیمانے کا متغیر ہے۔

ملک	WTO ممبر	ترقی کی سطح	WTO سے جڑنے کا سال	فی کس جی ڈی پی (USD)
ہندوستان	ہاں	ترقی پذیر	1995	2,388
ناروے	ہاں	ترقی یافتہ	1995	89,202
برازیل	ہاں	ابھرتا	1995	9,130
ایتھوپیا	ہاں	کم ترقی یافتہ	2003	1,027
ایران	نہیں	ترقی پذیر	-	5,421

1.10 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی کے مطالعے کے بعد طلبا اس قابل ہیں کہ:

- شماریات کا معنی اور تعریف بیان کر سکیں۔
- شماریات کے دائرہ کار اور حدود کی وضاحت کر سکیں۔
- بیاناتی شماریات اور استنتاجی شماریات میں فرق کر سکیں۔
- ڈیٹا کی تعریف بیان کر سکیں اور پیمائش کے پیمانوں کی وضاحت کر سکیں۔

1.11 فرہنگ (Glossary)

استنتاجی شماریات :Inferential Statistics- شماریات کی وہ شاخ جس میں نمونے کی بنا پر آبادی کے بارے میں نتائج اخذ کیے جاتے اور پیش گوئی کی جاتی ہے۔

اسمی پیمانہ :Nominal Scale- پیمانہ جو بغیر کسی ترتیب کے ڈیٹا کی درجہ بندی کرتا ہے۔

آبادی :Population- زیر مطالعہ مکمل گروپ۔

ترتیبی پیمانہ :Ordinal Scale- پیمانہ جو بامعنی ترتیب کے ساتھ ڈیٹا کی درجہ بندی کرتا ہے۔

تناسبی پیمانہ :Ratio Scale- مساوی وقفوں اور حقیقی صفر کے ساتھ ترتیب شدہ ڈیٹا کا پیمانہ۔

ڈیٹا :Data- تجزیے کے لیے جمع کیے گئے حقائق، اعداد و شمار، یا مشاہدات۔

ڈیٹا :Data-تجزیہ کے لیے جمع کیے گئے خام حقائق یا اعداد و شمار۔

شماریات :Statistics-عددی حقائق اور اعداد و شمار۔ ڈیٹا کا تجزیہ کرنے، ان کی تشریح کرنے اور ان کی بنیاد پر فیصلے کرنے کی تکنیک اور طریقہ کار۔

متغیر :Variable-خصوصیت جو مختلف قدریں لے سکتی ہے۔

نمونہ :Sample-مطالعے کے لیے منتخب کردہ آبادی کا ایک حصہ۔

وضاحتی شماریات :Descriptive Statistics-شماریات کی وہ شاخ جو ڈیٹا کا خلاصہ اور اسے پیش کرنے سے متعلق ہے۔

وقفی پیمانہ :Interval Scale-مساوی وقفوں کے ساتھ ترتیب شدہ ڈیٹا کا پیمانہ جن کا مطلق صفر نہیں ہوتا۔

1.12 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

1.12.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. شماریات کی بہترین تعریف ہے:

(a) جوابات کا اندازہ کرنے کا علم (b) ریاضی افعال کا مطالعہ

(c) ڈیٹا جمع کرنے، ترتیب دینے، تجزیہ اور تشریح کا علم (d) چارٹس اور گرافس کا مطالعہ

2. وضاحتی شماریات میں شامل ہے:

(a) آبادی کے بارے میں پیش گوئی کرنا (b) مفروضوں کی جانچ کرنا

(c) ڈیٹا کا خلاصہ کرنا اور اسے پیش کرنا (d) نمونوں سے نتائج اخذ کرنا

3. نمونے کی بنیاد پر کون سی شماریات فیصلہ سازی میں مدد کرتی ہے؟

(a) وضاحتی شماریات (b) استنتاجی شماریات

(c) اطلاقی ریاضی (d) تجرباتی شماریات

4. درج ذیل میں سے کون سا شماریات کا فعل نہیں ہے؟

(a) ٹیٹا جمع کرنا (b) ڈیٹا کو آرگنائز کرنا

(c) ڈیٹا تباہ کرنا (d) مفروضوں کا اختبار کرنا

5. شماریات کی حدود میں شامل ہے:

(a) یہ کامل پیش گوئی کرتی ہے (b) یہ واقعات کی وجوہات بیان کرتی ہے

(c) اس کی غلط تشریح اور غلط استعمال ہو سکتا ہے (d) یہ ہمیشہ درست جوابات فراہم کرتی ہے

6. درج ذیل میں وضاحتی اور استنتاجی شماریات کے لیے درست بیان ہے:

(a) وضاحتی شماریات چارٹ استعمال کرتی ہے، استنتاجی شماریات ریاضی استعمال کرتی ہے

(b) وضاحتی شماریات ڈیٹا کا تجزیہ کرتی ہے، استنتاجی شماریات ڈیٹا جمع کرتی ہے

(c) وضاحتی شماریات ڈیٹا کا خلاصہ کرتی ہے، استنتاجی شماریات نتائج اخذ کرتی ہے

(d) وضاحتی شماریات آبادی پر کام کرتی ہے، استنتاجی شماریات نمونے پر کام کرتی ہے

7. درج ذیل میں سے شماریات کے افعال میں شامل نہیں ہے:

(a) ڈیٹا جمع کرنا (b) پیش گوئی کرنا

(c) فیصلہ سازی کرنا (d) ڈیٹا کی جعل سازی کرنا

8. درج ذیل میں سے کس میں شماریات کا سب سے زیادہ استعمال ہوتا ہے؟

(a) ادب (b) موسیقی

(c) معاشیات (d) پینٹنگ

9. اختبار مفروضہ کا کیا مقصد ہے؟

(a) اوسطوں کا حساب کرنا

(b) خام ڈیٹا کو آرگنائز کرنا

(c) اس کا تعین کرنا کہ آیا آبادی کے بارے میں نظریے کو نمونے کا ڈیٹا تائید کرتا ہے یا نہیں

(d) گراف اور چارٹ بنانا

10. درج ذیل میں سے کون سا شماریات کے افعال میں سے نہیں ہے؟

(a) ڈیٹا جمع کرنا (b) ڈیٹا کا تجزیہ کرنا

(c) آبادی کی بنا پر نمونے کے بارے میں پیش گوئی کرنا (d) فیصلہ سازی کرنا

1.12.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. شماریات کا معنی اور تعریف بیان کریں۔
2. شماریات کن شعبوں میں استعمال ہوتی ہے؟ کوئی تین مثال بیان کریں۔
3. شماریات کی کوئی تین حدود بیان کریں۔
4. شماریات کے تین افعال بیان کریں۔
5. ڈیٹا کسے کہتے ہیں؟ مع مثال واضح کریں۔

1.12.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. شماریات کیا ہے؟ اس کے دائرہ کار کے بارے میں تفصیل سے لکھیں۔
2. شماریات پر عدم اعتماد پر مضمون تحریر کریں۔
3. وضاحتی اور استنتاجی شماریات پر مضمون تحریر کریں۔

1.13 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Gupta, S. P. (2020). *Statistical methods* (44th ed.). Sultan Chand & Sons.
2. Bhardwaj, R. S. (2011). *Business statistics* (2nd ed.). Excel Books India.
3. Srivastava, T. N., & Rego, S. (2012). *Statistics for management* (2nd ed.). McGraw Hill Education.
4. Sharma, J. K. (2021). *Business statistics* (5th ed.). Vikas Publishing House.

اکائی 2: شماریات کے بنیادی تصورات

(Basic Concepts in Statistics)

اکائی کے اجزا:

2.0 تمہید (Introduction)

2.1 مقاصد (Objectives)

2.2 آبادی اور نمونہ (Population and Sample)

2.3 پیرامیٹر اور شماریہ (Parameter and Statistics)

2.4 ڈیٹا کا خلاصہ کرنا: توزیعِ تعدد (Summarizing Data: Frequency Distribution)

2.4.1 زمروی ڈیٹا کے لیے توزیعِ تعدد (Frequency Distribution for Categorical Data)

2.4.2 مقداری ڈیٹا کے لیے توزیعِ تعدد
(Frequency Distribution for Quantitative Data)

2.5 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

2.6 فرہنگ (Glossary)

2.7 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

2.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

2.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

2.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

2.8 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

2.0 تمہید (Introduction)

اس اکائی میں ہم معاشیات کے بعض بنیادی تصورات متعارف کرائیں گے۔ اس کے بعد ہم اس کا مطالعہ کریں گے کہ تعددی تقسیم کے ذریعے ڈیٹا کو کس طرح تشکیل دیا جا سکتا ہے۔

2.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے درج ذیل مقاصد ہیں:

- آبادی اور نمونوں کے درمیان فرق کرنا۔
- تعدد کی تقسیم اور تراکمی تعدد کی تشکیل اور تشریح کرنا۔

2.2 آبادی اور نمونہ (Population and Sample)

آبادی افراد، اشیا، یا ڈیٹا پوائنٹس کا پورا گروپ ہے جس کے بارے میں آپ مطالعہ کرنے یا نتائج اخذ کرنے میں دلچسپی رکھتے ہیں۔ اس میں ہر وہ ممکنہ مشاہدہ یا پیمائش شامل ہوتی ہے جو معیار کے ایک خاص سیٹ پر فٹ بیٹھتی ہے۔ مطالعے کے دائرہ کار کے لحاظ سے آبادی بڑی یا چھوٹی، محدود یا لامحدود ہو سکتی ہے۔ مثال کے طور پر، آبادی یونیورسٹی کے تمام طلبا یا کسی ملک کے ہر گھر ہو سکتے ہیں۔ آبادی کی وضاحتی خصوصیت یہ ہے کہ یہ زیر تفتیش عناصر کے مکمل سیٹ کی نمائندگی کرتی ہے۔ جب درست اور جامع ڈیٹا کی ضرورت ہو تو پوری آبادی کا مطالعہ کرنا مثالی ہو سکتا ہے۔ تاہم، یہ وقت، لاگت، یا رسائی کی وجہ سے اکثر ناقابل عمل ہوتا ہے۔ اس وجہ سے، محققین آبادی کے بارے میں اندازہ لگانے کے لیے اکثر چھوٹے گروپوں پر انحصار کرتے ہیں، جنہیں نمونہ کہتے ہیں۔

نمونہ آبادی کا ایک چھوٹا، قابل انتظام ذیلی سیٹ ہے جسے تجزیے اور تحقیق کے مقصد کے لیے منتخب کیا جاتا ہے۔ چونکہ پوری آبادی کا مطالعہ کرنا اکثر مہنگا، وقت طلب، یا ناممکن بھی ہوتا ہے، اس لیے نمونے محققین کو زیادہ مؤثر طریقے سے ڈیٹا اکٹھا کرنے کی اجازت دیتے ہیں جس سے بڑے گروپ کے بارے میں بصیرت حاصل کر سکتے ہیں۔

2.3 پیرامیٹر اور شماریہ (Parameter and Statistics)

اصطلاحات پیرامیٹر اور شماریہ کا استعمال ان اقدار کے درمیان فرق کرنے کے لیے کیا جاتا ہے جو آبادی کو بیان کرتی ہیں اور جو نمونے کو بیان کرتی ہیں۔ پیرامیٹر ایک عددی قدر ہے جو پوری آبادی کی خصوصیت کا خلاصہ کرتی ہے۔ مثال کے طور کسی ملک میں تمام بالغ خواتین کی اصل اوسط قد یا کسی مخصوص امیدوار کی حمایت کرنے والے ووٹروں کا صحیح تناسب پیرامیٹر کی مثالیں ہیں۔ پیرامیٹرز اکثر نامعلوم ہوتے ہیں اور ان کی براہ راست پیمائش کرنا مشکل ہوتا ہے کیونکہ پوری آبادی کے ڈیٹا تک رسائی عام طور پر ناقابل عمل ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر ملک کی تمام خواتین کا اصل اوسط قد اخذ کرنے کے لیے آپ کو تمام خواتین کے قد کا حساب کرنے پڑے گا۔ اسی طرح ملک میں کسی پارٹی کے ووٹروں کے تناسب کو جاننے کے لیے آپ کو تمام افراد کا سروے کرنا ہو گا۔ یہ ناممکن نہ سہی مشکل ضرور ہے۔

شماریہ ایسی عددی قدر ہے جو نمونے کی خصوصیت کا خلاصہ کرتی ہے۔ اس کا حساب مشاہدہ شدہ ڈیٹا سے کیا جاتا ہے اور اسے آبادی کے پیرامیٹر کے تخمینے کے طور پر استعمال کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر، اگر محققین 1,000 خواتین کا سروے کرتے ہیں، ان کے قد کو رکارڈ کرتے ہیں جو "5'6 آتا ہے تو وہ یہ شماریہ ہو گا۔ اس شماریے کی بنا پر محققین اندازہ لگا سکتے ہیں کہ آبادی کی تمام خواتین کا بھی اوسط قد اتنا ہو گا۔

چونکہ شماریے نمونوں پر مبنی ہوتے ہیں، اس لیے وہ نمونے لینے کی غلطی کے تابع ہیں، یعنی شماریہ صحیح پیرامیٹر سے مختلف ہو سکتا ہے۔ شماریے کی درستگی کا انحصار اس بات پر ہوتا ہے کہ نمونہ آبادی کی کتنی اچھی نمائندگی کرتا ہے۔ ذیل میں آبادی، نمونہ، پیرامیٹر اور شماریہ کی کچھ مثالیں پیش کی گئی ہیں:

مثال 2.1: ایک یونیورسٹی اپنے تمام طلبا کا اوسط قد جاننا چاہتی ہے۔ اس کا اندازہ لگانے کے لیے، 200 طلبا کا تصادفی نمونہ منتخب کیا جاتا ہے، اور ان کے قد کی پیمائش کی جاتی ہے۔

آبادی: یونیورسٹی کے تمام طلبا

نمونہ: یونیورسٹی سے منتخب کردہ 200 طلبا

پیرامیٹر: یونیورسٹی میں تمام طلبا کی حقیقی اوسط اونچائی

شماریہ: نمونے میں 200 طلبا کی اوسط اونچائی

مثال 2.2: ایک پولنگ تنظیم آئندہ انتخابات کے نتائج کی پیشین گوئی کرنا چاہتی ہے۔ ایسا کرنے کے لیے، وہ تصادفی طور پر منتخب کیے گئے 1,000 ووٹرز کو پول کرتے ہیں اور ان سے پوچھتے ہیں کہ وہ کس امیدوار کو ووٹ دینے کا ارادہ رکھتے ہیں۔

آبادی: ملک میں تمام اہل ووٹرز

نمونہ: منتخب کردہ 1,000 اہل ووٹرز

پیرامیٹر: تمام اہل ووٹرز کا حقیقی تناسب جو کسی مخصوص امیدوار کو ووٹ دیں گے

شماریہ: 1,000 ووٹرز کے نمونے میں ان ووٹر کا تناسب جو اس امیدوار کی حمایت کرتے ہیں

مثال 2.3: ایک کارپوریشن دنیا بھر میں اپنے ملازمین کی اوسط تنخواہ کا تعین کرنا چاہتی ہے۔ مختلف شاخوں سے 100 ملازمین کا تصادفی نمونہ منتخب کیا جاتا ہے، اور ان کی تنخواہیں درج کی جاتی ہیں۔

آبادی: کارپوریشن کے دنیا بھر میں تمام ملازمین

نمونہ: مختلف شاخوں سے منتخب 100 ملازمین

پیرامیٹر: کارپوریشن میں تمام ملازمین کی حقیقی اوسط تنخواہ

شماریہ: نمونے میں 100 ملازمین کی اوسط تنخواہ

2.4 ڈیٹا کا خلاصہ کرنا: توزیعِ تعدد (Summarizing Data: Frequency Distribution)

توزیعِ تعدد یا تقسیمِ تعدد ڈیٹا کا ٹیبلر خلاصہ ہے جس میں ہر ایک میں متعدد غیر متوازی زمروں یا کلاسوں میں مشاہدات کی تعداد (تعدد) ظاہر ہوتی ہے۔ یہ ڈیٹا کو منظم کرنے کا ایک طریقہ ہے یہ ظاہر کرنے کے لیے ہر قدر ڈیٹا سیٹ میں کتنی بار آئی ہے۔ توزیعِ تعدد

زمروی ڈیٹااور مقداری ڈیٹادونوں کے لیے کی جاسکتی ہے۔ ذیل میں ان کی وضاحت کی گئی ہے۔

2.4.1 زمروی ڈیٹاکے لیے توزیعِ تعدد (Frequency Distribution for Categorical Data)

زمروی متغیرات وہ ہوتے ہیں جو کسی خاص صفت کا اظہار کرتے ہیں جیسے بالوں کا رنگ، آنکھوں کا رنگ، مذہب، پسندیدہ فلم، جنس وغیرہ۔ زمروی متغیر کی اقدار عددی ترتیب کو ظاہر نہیں کرتی ہیں۔ مثال کے طور پر متغیر "مذہب" کی قدریں معیار کے لحاظ سے مختلف ہوتی ہیں۔ مذاہب کی کوئی ترتیب نہیں ہوتی۔ زمروی متغیرات کو کبھی کبھی معیاری متغیرات (Qualitative Variables) بھی کہتے ہیں۔

مثال 2.4: فرض کریں کہ آپ نے 40 افراد کا سروے کیا یہ جاننے کے لیے کہ ان کی پسندیدہ آئس کریم کون سی ہے۔ ان کے جوابات درج ذیل ہیں:

ونیلا، چاکلیٹ، اسٹرابیری، ونیلا، چاکلیٹ، ونیلا، منٹ، چاکلیٹ، منٹ، اسٹرابیری،
ونیلا، ونیلا، منٹ، چاکلیٹ، چاکلیٹ، اسٹرابیری، ونیلا، ونیلا، چاکلیٹ، منٹ،
اسٹرابیری، ونیلا، چاکلیٹ، منٹ، ونیلا، چاکلیٹ، ونیلا، اسٹرابیری، ونیلا، منٹ
ونیلا، چاکلیٹ، اسٹرابیری، ونیلا، چاکلیٹ، منٹ، ونیلا، منٹ، ونیلا، ونیلا

درج بالا سے توزیعِ تعدد کی تشکیل کے لیے پہلے زمروں کی شناخت کریں۔ درج بالا میں 4 زمرے ہیں۔ ونیلا (Vanilla)، چاکلیٹ (Chocolate)، اسٹرابیری (Strawberry) اور منٹ (Mint)۔ پھر شمار کریں کہ ہر زمرہ کتنی بار آیا ہے۔ درج ذیل جدول دیکھیں۔

زمرہ (Category)	ٹیلی (Tally)	تعدد (Frequency)
ونیلا (Vanilla)	𝍸 𝍸 𝍸 |	16
چاکلیٹ (Chocolate)	𝍸 𝍸	10
اسٹرابیری (Strawberry)	𝍸 |	6
منٹ (Mint)	𝍸 |||	8
کل (Total)		40

درج بالا توزیعِ تعدد اس کا خلاصہ کرتی ہے کہ 40 افراد کی آئس کریم کو لے کر پسند کس طرح تقسیم ہوتی ہے۔ اس توزیع سے آپ خام ڈیٹا کے مقابلے زیادہ بہتر نتائج اخذ کر سکتے ہیں۔ اس توزیع کو دیکھ کر آپ کہہ سکتے ہیں کہ ونیلا سب سے زیادہ لوگوں کو پسند ہے، چاکلیٹ دوسرے نمبر پر آتی ہے۔ منٹ اور اسٹرابیری فلیور کا نمبر بالترتیب تیسرا اور چوتھا ہے۔

1. اضافی اور فیصد توزیعِ تعدد (Relative and Percent Frequency Distribution)

توزیعِ تعدد یہ دکھاتی ہے کہ ہر مشاہدہ ڈیٹا میں کتنی بار آتا ہے۔ لیکن کبھی کبھی ہمیں اس میں دلچسپی ہوتی ہے کہ ہر زمرے کا تناسب یا فیصد کل کے مقابلے کتنا ہے۔ اضافی توزیعِ تعدد مختلف زمروں کا تناسب دکھاتی ہے۔ اگر کسی ڈیٹا میں n مشاہدات ہوں تو اس کے ہر زمرے

کی اضافی تعدد کے لیے آپ اس زمرے کی تعدد کو کل تعدد سے تقسیم کریں۔ یعنی:

$$\text{Relative Freqyency of a Class} = \frac{\text{Frequency of the Class}}{n}$$

اضافی تعدد کو 100 سے ضرب دے کر فیصد تعدد اخذ کی جاسکتی ہے۔ اضافی توزیعِ تعدد ڈیٹا کا ٹیبلر خلاصہ دیتی ہے اس طرح کہ ہر زمرہ کی اس میں اضافی تعدد دکھائی جاتی ہے۔ فیصد توزیعِ تعدد ہر کلاس کے ڈیٹا کی فیصد تعدد کا خلاصہ کرتی ہے۔ درج بالا ڈیٹا کے لیے اضافی توزیعِ تعدد اور فیصد توزیعِ تعدد ذیل کی جدول میں دی گئی ہے۔

زمرہ (Category)	اضافی تعدد (Relative Frequency)	فیصد تعدد (Percent Frequency)
ونیلا (Vanilla)	$\frac{16}{40} = 0.40$	$0.40 \times 100 = 40\%$
چاکلیٹ (Chocolate)	$\frac{10}{40} = 0.25$	$0.25 \times 100 = 25\%$
اسٹرابیری (Strawberry)	$\frac{6}{40} = 0.15$	$0.15 \times 100 = 15\%$
منٹ (Mint)	$\frac{8}{40} = 0.20$	$0.2 \times 100 = 20\%$
کل (Total)	1.00	100%

درج بالا جدول میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ونیلا کی اضافی تعدد 0.40 ہے، چاکلیٹ کی 0.25 ہے وغیرہ۔ فیصد تعدد سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ونیلا 40 فیصد لوگوں کو پسند ہے، چاکلیٹ 25 فیصد لوگوں کو پسند ہے جب کہ اسٹرابیری سب سے کم فیصد (15%) لوگوں کو پسند ہے۔

2. زمروی ڈیٹا کا گراف (Graphing Categorical Data)

توزیعِ تعدد کو گراف کے ذریعے بھی دکھایا جاسکتا ہے۔ گراف سے ڈیٹا کو سمجھنا اور اس کی تشریح کرنا نسبتاً آسان ہو جاتا ہے۔ ذیل میں زمروی ڈیٹا کے گراف کی دو قسموں کو پیش کیا گیا ہے؛ پائی چارٹ اور بار گراف۔

a. پائی چارٹ (Pie Chart)

پائی چارٹ ایسا دائروی شماریاتی گراف ہے جو اضافی تعدد کو دکھانے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔ پائی کو مختلف حصوں میں تقسیم کیا جاتا ہے اس طرح کہ ہر حصہ ایک زمرے کی نمائندگی کرتا ہے۔ حصے کا سائز زمرے کی اضافی تعدد یا فیصد کو دکھاتا ہے۔

پائی چارٹ کی تشکیل کے لیے سب سے پہلے ڈیٹا کو فیصد توزیع یا تناسبی توزیعِ تعدد کی صورت میں پیش کریں۔ اضافی تعدد کو ڈگری زاویوں میں تبدیل کریں۔ مثال کے طور پر چونکہ دائرہ $360°$ زاویے کا ہوتا ہے اور چونکہ ونیلا کا حصہ 40 فیصد ہے، لہذا ونیلا کی ڈگری 144 ہو گی۔

$$0.40 \times 360 = 160$$

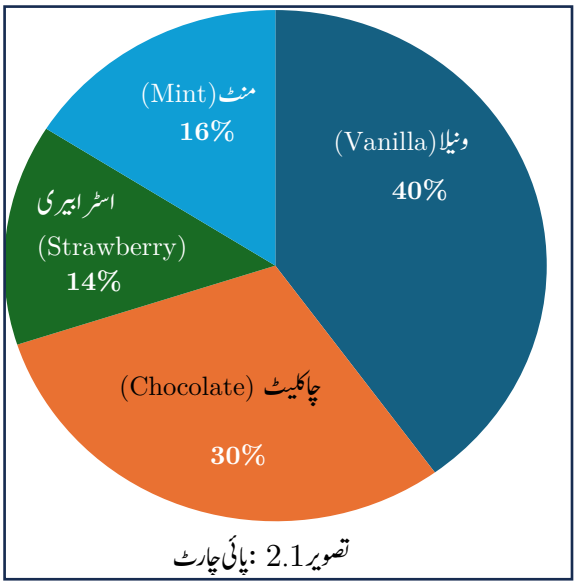
بنیادی طور پر آپ مختلف زمروں کا زاویہ حاصل کرنے کے لیے درج ذیل فارمولا استعمال کر سکتے ہیں:

$$\text{Angle} = \frac{\text{Percentage}}{100} \times 360° \text{ or}$$

$$\text{Angle} = \text{Relative Frequency} \times 360°$$

درج ذیل جدول میں تمام زمروں کے زاویوں کو دکھایا گیا ہے۔

زمرہ (Category)	اضافی تعدد (Relative Frequency)	زاویہ (Angle)
ونیلا (Vanilla)	0.40	$0.40 \times 360° = 144°$
چاکلیٹ (Chocolate)	0.30	$108°$
اسٹرابیری (Strawberry)	0.14	$57.6°$
منٹ (Mint)	0.16	$50.4°$
کل (Total)	1.00	$360°$



تصویر 2.1 :پائی چارٹ



تصویر 2.2:بار گراف

ایک دائرہ بنائیں۔ اس کے مرکز سے پروٹریکٹر کی مدد سے زاویوں سے پائی کے حصے کریں۔ ہر حصے کو زمروں کے حساب سے لیبل دیں۔ بہتر وضاحت کے لیے آپ مختلف رنگوں کا استعمال بھی کر سکتے ہیں۔ تصویر 2.1 میں آئس کریم کی پسند سے متعلق ڈیٹا کا پائی چارٹ دکھایا گیا۔ نوٹ کریں کہ کمپیوٹر سافٹ ویئر کی مدد سے آپ گراف بنا سکتے ہیں۔ تصویر 2.1 میں پیش گراف (MS Excel) کی مدد سے بنایا گیا ہے۔

پائی چارٹ اضافی تعدد دکھانے میں اس وقت موثر ہوتے ہیں جب زمروں کی تعداد کم ہو۔ اگر زمرے بڑی تعداد میں ہوں تو پائی چارٹ کا استعمال الجھن کا سبب بن سکتا ہے۔

b. بار گراف (Bar Graph)

بار گراف زمروں کے تعدد کو مستطیل بار کے ذریعے دکھاتا ہے۔ بار گراف کے ذریعے توزیعِ تعدد، فیصد توزیعِ تعدد اور اضافی توزیعِ تعدد تینوں کو دکھایا جا سکتا ہے۔ بار گراف میں ایک محور (عموماً محور X یا افقی محور) پر زمروں کو دکھایا جاتا ہے جبکہ دوسرے محور (عموماً محور Y یا عمودی محور) پر تعدد کو دکھایا جاتا ہے۔ پھر متعینہ چوڑائی کے بار کو محور X سے زمرے کے تعدد (یا فیصد تعدد یا اضافی تعدد) تک کھینچا جاتا ہے۔ زمروی ڈیٹا کے لیے عموماً بار کے بیچ فاصلہ رکھا جاتا ہے۔ تصویر 2.2 میں درج بالا ڈیٹا کا بار گراف ایکسل کی مدد سے بنایا گیا ہے

2.4.2 مقداری ڈیٹا کے لیے توزیعِ تعدد (Frequency Distribution for Quantitative Data)

جیسا کہ ہم نے اوپر وضاحت کی مقداری متغیرات وہ متغیرات ہیں جن کی پیمائش عددی پیمانے سے کی جاسکتی ہے۔ یہ وہ متغیرات ہیں جن کو نمبرات میں ماپا جاسکتا ہے۔ مقداری متغیرات کی کچھ مثالیں ہیں: لمبائی، وزن، جوتے کا سائز، آمدنی، اخراجات وغیرہ۔ جیسا کہ ہم نے زمروی متغیرات کے ضمن میں ذکر کیا توزیعِ تعدد یہ دکھاتی ہے کہ مختلف زمروں کی تعداد کیا ہے۔ مقداری متغیرات کے لیے بھی یہ تعریف درست ہے۔ توزیعِ تعدد یہ دکھاتی ہے کہ مختلف قدروں کی تعداد کیا ہے۔ مقداری متغیرات کے لیے توزیعِ تعدد دو قسم کی ہو سکتی ہیں۔ منفصل توزیعِ تعدد اور متصل توزیعِ تعدد۔

1. منفصل توزیعِ تعدد (Discrete Frequency Distribution)

منفصل توزیعِ تعدد میں متغیر کی منفرد، قابل شمار قدریں ہوتی ہیں۔ منفصل توزیعِ تعدد دکھاتی ہے کہ ہر قدر کتنی بار آتی ہے۔ منفصل توزیعِ تعدد کا استعمال منفصل متغیرات کی صورت میں کیا جاتا ہے۔ منفصل متغیر کی توزیعِ تعدد کا طریقہ بالکل ویسا ہی ہے جیسا آپ نے زمروی متغیر کی صورت میں دیکھا۔

مثال 2.5: فرض کریں کہ 20 طلبا کا سروے کیا گیا یہ جاننے کے لیے کہ پچھلے ماہ انہوں نے کتنی کتب کا مطالعہ کیا۔ ان کے جوابات ہیں:

0, 1, 2, 2, 1, 3, 0, 1, 2, 3, 1, 4, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 1, 0

مطالعہ کی گئی کتب متغیر ہے جو منفصل اقدار لے سکتی ہے: 0, 1, 2, 3, 4

ان اعداد و شمار سے توزیعِ تعدد اور فیصد توزیعِ تعدد ذیل کی جدول میں دی گئی ہے:

کتاب (Books)	تعدد (Frequency)	فیصد تعدد (Percent Frequency)
0	3	$\frac{3}{20} \times 100 = 15\%$
1	6	30%
2	6	30%
3	4	20%
4	1	5%
کل (Total)	20	100%

منفصل توزیعِ تعدد میں، ہم متغیر کی ہر ممکنہ قدر کو اس کی تعداد کے ساتھ درج کرتے ہیں۔ یہ اس وقت بہتر طور پر کام کرتا ہے جب متغیر الگ الگ قدروں کی ایک چھوٹی تعداد کو لے لیتا ہے، جیسے پڑھی جانے والی کتابوں کی تعداد یا خاندان کے افراد کی تعداد۔ تاہم، جیسے جیسے اقدار کی رینج بڑھتی ہے ممکنہ اقدار کی فہرست بہت لمبی ہو جاتی ہے اور ان کی منفصل توزیعِ تعدد ناقابل عمل ہو جاتی ہے۔ مثال کے طور پر، اگر ہم 100 لوگ کتنے قدم چلتے ہیں کی تعداد کو ریکارڈ کرتے ہیں، جہاں اقدار 0 سے 20,000 تک ہو سکتی ہیں تو ان کی توزیعِ تعدد کرنا ناقابل عمل ہو جاتا ہے۔ یکساں مسئلہ متصل متغیرات، جیسے اونچائی، وزن کی صورت میں بھی پیدا ہوتا۔ یہ متغیرات لامحدود طور پر بہت سی قدریں لے سکتے ہیں (بشمول اعشاریہ)، جس سے ہر ایک کو انفرادی طور پر درج کرنا ناممکن ہو جاتا ہے۔

2. متصل توزیعِ تعدد (Continuous Frequency Distribution)

اس کو حل کرنے کے لیے، ہم قدروں کو وقفوں یا کلاس میں درجہ بند کرتے ہیں، جسے کلاس وقفہ کہتے ہیں، اور شمار کرتے ہیں کہ ہر کلاس میں کتنے مشاہدات آتے ہیں۔ اس سے ہمیں متصل توزیعِ تعدد حاصل ہوتی ہے۔ ذیل میں 20 طلبا کی لمبائی کے اعداد و شمار کو متصل توزیعِ تعدد کی صورت میں دکھایا گیا ہے۔

درج ذیل جدول طلبا کی لمبائی کو پانچ کلاس یا وقفوں میں تقسیم کرتی ہے۔ وہ طلبا جن کی لمبائی 150cm سے لے کر 154cm تک ہے، ایسے طلبا کی تعداد 3 ہے۔ سب سے زیادہ طلبا کی لمبائی 165-160 کے وقفے میں پڑتی ہے۔

قد (cm)	تعدد
150–155	3
155–160	5
160–165	8
165–170	7
170–175	2
Total	40

متصل توزیعِ تعدد کے بناتے وقت درج ذیل کچھ اصولوں کو مد نظر رکھیں۔

1. کلاس یا وقفے کتنے رکھنے ہیں اس کا تعین کریں۔ کتنی کلاس آپ کو رکھنی ہیں یہ بڑی حد تک اس پر منحصر ہے کہ آپ کیا مطالعہ کرنا چاہتے ہیں۔ لیکن کچھ اصول اس ضمن میں آپ کی مدد کر سکتے ہیں۔ اگر مشاہدات کی تعداد کم ہو تو کلاس کی تعداد کم رکھیں، اگر مشاہدات کی تعداد زیادہ ہے تو کلاس کی تعداد زیادہ رکھ سکتے ہیں۔ ذیل کے جدول میں کلاس کی تعداد کے لیے گائیڈ دی گئی ہے۔ یہ صرف رہنمائی کے لیے ہے۔ آپ کو کتنی کلاس انتخاب کرنی ہے، بڑی حد تک آپ کے مطالعے کے مقاصد پر منحصر ہو گا۔

نمونے کا سائز	کلاس کی تعداد
50 سے کم	5-7
50 سے 100	7-8
101-500	8-10
501-1000	10-11
1001-5000	11-14
500 سے زیادہ	14-20

2. کلاس کی چوڑائی کا تعین کریں۔ کوشش کریں کہ تمام کلاس کی چوڑائی مساوی ہو۔ یقیناً بعض حالات میں ضرورتاً غیر مساوی کلاس کی چوڑائی کا استعمال ہو سکتا ہے۔ کلاس کی چوڑائی کے تعین کے لیے درج ذیل فارمولا استعمال کیا جا سکتا ہے:

$$\text{Approx Class Width} = \frac{\text{Largest Observation} - \text{Smallest Observation}}{\text{Number of Classes}}$$

3. کلاس حد (Class Limit) کلاس کی وہ سب سے چھوٹی اور سب سے بڑی قدریں ہیں جنہیں کلاس میں شامل کیا جا سکتا ہے۔ مثال کے طور پر کلاس 30-20 میں سب سے چھوٹی جو قدر آ سکتی ہے وہ 20 ہے اور سب سے بڑی قدر جو آ سکتی ہے وہ 30 ہے۔

کلاس کی ادنی حد (Lower Limit) کلاس کی وہ قدر ہے جس سے چھوٹی قدر کلاس میں شامل نہیں ہو سکتی۔ کلاس کی اعلی حد وہ قدر ہے جس سے بڑی قدر کلاس میں شامل نہیں ہو سکتی۔ اعلی کلاس حد اور ادنی کلاس حد کا فرق کلاس انٹرول یا کلاس وقفہ کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر کلاس 30-20 میں کلاس انٹرول 10 ہے۔ کوشش کریں کہ کلاس انٹرول طاق اعداد جیسے 39 ,11 ,7 ,3 وغیرہ نہ ہوں۔ زیادہ بہتر ہے کہ کلاس انٹرول کو ایسا رکھیں جو 5 کا ضرب ہو۔ لیکن یہ مسلمہ اصول نہیں ہے۔ مثال کے طور پر جب آپ کا ڈیٹا ایسا ہو کہ کلاس انٹرول 5 سے کم ہو تو آپ کلاس انٹرول کی قدر مثال کے طور 1 سے 4 تک کچھ بھی رکھ سکتے ہیں۔

4. کوشش کریں کہ سب سے پہلی کلاس کی نچلی حد کو یا تو صفر رکھیں یا 5 کا ضریب رکھیں۔ مثال کے طور پر، اگر ڈیٹا میں سب سے چھوٹی قدر 23 ہے اور کلاس انٹرول 10 ہے تو پہلی کلاس 33-23 کے بجائے 30-20 رکھیں۔ اسی طرح اگر سب سے چھوٹی قدر 92 ہے اور کلاس انٹرل 5 ہے تو پہلی کلاس 97-92 کی بجائے 95-90 رکھیں۔

5. کلاسیز جامع اور غیر ہم پوش (Non Overlapping) یعنی کلاس ایسی ہونی چاہیے کہ ایک مشاہدہ صرف ایک کلاس میں آئے۔ مثال کے طور کلاسیز ایسی نہیں ہونی چاہیے: 23-19, 25-22۔

کلاس حد کی بنیاد پر کلاس دو طرح کی ہو سکتی ہیں۔ شمولی کلاس اور غیر شمولی کلاس۔

جب ایک کلاس کی اعلی حد دوسری کلاس کی ادنی حد ہوتی ہے تو ایسی کلاس غیر شمولی کلاس (Exclusive Class) کہلاتی ہے۔ مثال کے طور پر درج ذیل جدول دیکھیں:

کلاس (Class)	تعداد (Frequency)	کلاس (Class)	تعداد (Frequency)
10-20	4	40-50	11
20-30	8	50-60	9
30-40	12	60-70	6

اس طریقے میں یہ فرض کیا جاتا ہے کہ اعلی حد کلاس میں شامل نہیں ہوتی۔ اس طرح ڈیٹا میں 20 کی قدر کلاس 20-10 میں نہیں بلکہ کلاس 30-20 میں ہو گی۔ اس کے برعکس شمولی کلاس (Inclusive Class) میں اعلی حد اور ادنی حد دونوں کلاس میں شامل ہوتی ہیں۔ اس کی مثال کے لیے جدول دیکھیں۔

کلاس (Class)	تعداد (Frequency)	کلاس (Class)	تعداد (Frequency)
10-19	4	40-49	11
20-29	8	50-59	9
30-39	12	60-69	6

مثال 2.6: درج ذیل اعداد و شمار 30 فرموں کے منافع کو لاکھ روپے میں دکھاتے ہیں۔

19	27	35	48	29	20	55	58	39	47
65	23	41	64	58	70	42	34	56	54
53	38	52	58	38	59	57	36	22	72

ان اعداد و شمار کی مناسب درجہ بندی کریں۔

حل: ہمارے پاس30مشاہدات ہیں۔ ہم6کلاس بناتے ہیں۔

کلاس کا سائز ہو گا:

$$\text{Approx Class Width} = \frac{\text{Largest Observation} - \text{Smallest Observation}}{\text{Number of Classes}}$$

$$\text{Approx Class Size} = \frac{72-19}{6} = \frac{53}{6} = 8.5$$

کلاس سائز یا کلاس یا انٹرول8.5 آتا ہے۔ آسانی کے لیے ہم کلاس انٹرول10 طے کرتے ہیں۔ ڈیٹا میں سب سے چھوٹی قدر19 ہے۔ لہذا ہم سب سے چھوٹی کلاس15-25 رکھتے ہیں۔ درج بالا ڈیٹا کی توزیعِ تعدد ہو گی:

منافع (Profit)	کمپنی (Companies)
15-25	4
25-35	3
35-45	7
45-55	5
55-65	8
65-75	3
کل (Total)	30

مثال 2.7: درج ذیل میں100 طلبا کے شماریات کے امتحان میں نمبرات دیے گئے ہیں۔ متصل توزیعِ تعدد بنائیں۔

85	12	41	56	35	47	56	47	48	56
75	65	12	35	8	17	56	45	35	90
35	45	55	65	75	95	85	15	25	45
47	48	56	96	80	90	35	18	32	47
51	62	73	84	95	37	84	49	92	46
6	25	35	46	57	68	79	42	47	56
22	45	39	53	65	70	16	19	22	39
45	65	95	42	85	39	44	55	66	67
19	12	9	47	55	65	70	79	85	65
85	89	65	55	42	59	62	65	55	54

حل: کل مشاہدات100 ہیں، ہم10 کلاس تشکیل کرتے ہیں۔ کلاس کی چوڑائی کے لیے:

$$\text{Class Width} = \frac{97-6}{10} = 9.1$$

کلاس سائز9 آتا ہے۔ ہم آسانی کے لیے کلاس سائز10 رکھتے ہیں۔ ڈیٹا میں سب سے چھوٹی قدر6 ہے۔ لہذا سب سے پہلی کلاس $10-0$ ہو گی۔ ڈیٹا کی توزیعِ تعدد ہو گی:

نمبرات کلاس	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	Total
تعدد	3	8	5	11	21	16	13	7	9	7	100

3. تراکمی توزیعِ تعدد (Cumulative Frequency Distribution)

تراکمی توزیعِ تعدد ڈیٹا کی ایسی توزیع ہے جو ہر کلاس یا زمرے تک کی تعدد کو دکھاتا ہے۔ تراکمی تعدد دو قسم کی ہوتی ہیں۔

صعودی تراکمی تعدد (Less Than Cumulative Frequency): اس قسم کی توزیعِ تعدد میں ہر کلاس اس کلاس کی اعلیٰ حد سے چھوٹے مشاہدات کی تعداد کو دکھاتا ہے۔ اس قسم کی تعدد میں ہر کلاس انٹرول کی تعدد کو اوپر سے نیچے تک جوڑا جاتا ہے۔

نزولی تراکمی تعدد (More than Cumulative Frequency): اس قسم کی توزیعِ تعدد میں ہر کلاس اس کلاس کی اعلیٰ حد سے چھوٹے مشاہدات کی تعداد کو دکھاتا ہے۔ اس قسم کی تعدد میں ہر کلاس انٹرول کی تعدد کو اوپر سے نیچے تک جوڑا جاتا ہے۔ دوسرے لفظوں میں، اسے ہر کلاس تعدد کو یکے بعد دیگرے جوڑ کر حاصل کیا جاتا ہے۔

درج ذیل جدول میں تعدد، نزولی تراکمی تعدد اور صعودی تراکمی تعدد کو دکھایا گیا ہے۔

منافع (Profit)	کمپنی (Companies)	صعودی تراکمی تعدد Cumulative Frequency (Less than)	نزولی تراکمی تعدد Cumulative Frequency (More than)
$0-10$	3	3	$97+3=100$
$10-20$	8	$3+8=11$	$89+8=97$
$20-30$	5	$11+5=16$	$84+5=89$
$30-40$	11	$16+11=27$	$73+11=84$
$40-50$	21	$27+21=48$	$52+21=73$
$50-60$	16	$48+16=64$	$36+16=52$
$60-70$	13	$64+13=77$	$23+13=36$
$70-80$	7	$77+7=84$	$16+7=23$
$80-90$	9	$84+9=93$	$7+9=16$
$90-100$	7	$93+7=100$	7
کل (Total)	100		

صعودی تعدد کے لیے کلاس 10-0 کی تعدد 3 ہے۔ اسے صعودی تراکمی تعدد کے کالم میں لکھا۔ کلاس 20-10 کی تعدد 8 ہے۔ چونکہ صعودی تعدد کلاس کی اعلیٰ حد سے نیچے کی قدروں کی تعداد دکھاتی ہے۔ لہٰذا، کلاس 20-10 کی تراکمی تعدد 11 ہوگی۔ ظاہر ہے کہ اس کلاس اور اس سے سابق کلاس کی تمام قدریں اس کلاس کی اعلیٰ حد سے کم ہوں گی۔ لہٰذا ان دونوں کلاس کی قدروں کو جوڑ کر تراکمی تعدد کو حاصل کیا گیا ہے۔ اسی طرح آپ دیگر کلاس کی تراکمی تعدد اخذ کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر کلاس 60-50 کی صعودی تراکمی تعدد 64 ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ 64 مشاہدات ایسے ہیں جن کی قدریں 60 سے چھوٹی ہیں۔

نزولی تعدد کے لیے آپ نیچے سے جوڑنا شروع کریں گے۔ مثال کے طور پر نزولی تعدد کے کالم میں 100-90 کلاس کی تعدد 7 ہے۔ کلاس 90-80 کی تعدد 9 ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ کلاس 90-80 کی ادنیٰ حد یعنی 80 سے بڑی قدریں اس کلاس کی تعدد اور کلاس 100-90 کی تعدد کے مساوی ہوں گی یعنی 16۔ اسی طرح آپ دیگر کلاس کی تراکمی تعدد اخذ کر سکتے ہیں۔ اگر آپ کلاس 60-50 کی نزولی تراکمی تعدد

دیکھیں تو یہ 52 ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ کل 52 مشاہدات ایسے ہیں جن کی قدریں 50 سے بڑی ہیں۔

نوٹ: نزولی تراکمی تعدد کے لیے آپ دوسرا طریقہ یہ اختیار کر سکتے ہیں کہ سب سے اوپر کی کلاس کی تراکمی تعدد کل مشاہدات کے مساوی دکھائیں۔ ہماری مثال میں کل مشاہدات 100 ہیں۔ لہذا، کلاس 10-0 کی نزولی تراکمی تعدد 100 ہو گی۔ اگلی کلاس 20-10 کی تراکمی تعدد کے لیے سابقہ کلاس کی تعدد کو تراکمی تعدد سے منہا کریں۔ اس طرح اس کلاس کی تراکمی تعدد ہو گی: 97=3-100۔ اسی طرح اگلی کلاس یعنی 30-20 کی تراکمی تعدد کے لیے سابقہ کلاس کی تراکمی تعدد 97 سے اس کلاس کی تعدد منہا کریں۔ اس طرح کلاس 30-20 کی تراکمی تعدد ہو گی: 89=8-97۔ یہی عمل آپ تمام کلاس کے لیے دہرائیں گے۔ درج ذیل جدول دیکھیں۔

منافع	کمپنی	نزولی تراکمی تعدد
$\mathbf{0-10}$	3	100
$\mathbf{10-20}$	8	$100-3=97$
$\mathbf{20-30}$	5	$97-8=89$
$\mathbf{30-40}$	11	$89-5=84$
$\mathbf{40-50}$	21	$84-11=73$
$\mathbf{50-60}$	16	$73-21=52$
$\mathbf{60-70}$	13	$52-16=36$
$\mathbf{70-80}$	7	$36-13=23$
$\mathbf{80-90}$	9	$23-7=16$
$\mathbf{90-100}$	7	$16-9=7$
کل (Total)	100	

مثال 2.8: درج ذیل اعداد و شمار سے صعودی تراکمی تعدد اور فیصد تعدد اور فیصد تراکمی تعدد اخذ کریں۔

کلاس وقفہ (Class Interval)	تعدد (Frequency)
100-110	5
110-120	6
120-130	10
130-140	15
140-150	18
150-160	15
160-170	13
170-180	10
180-190	8

حل:

کلاس وقفہ	تعدد	صعودی تراکمی تعدد	فیصد تعدد	فیصد تراکمی تعدد
100-110	5	5	4%	4%
110-120	11	16	9%	13%
120-130	15	31	13%	26%

130-140	17	48	14%	40%
140-150	20	68	17%	57%
150-160	18	86	15%	72%
160-170	15	101	13%	84%
170-180	10	111	8%	93%
180-190	9	120	8%	100%
کل (Total)	120		100%	

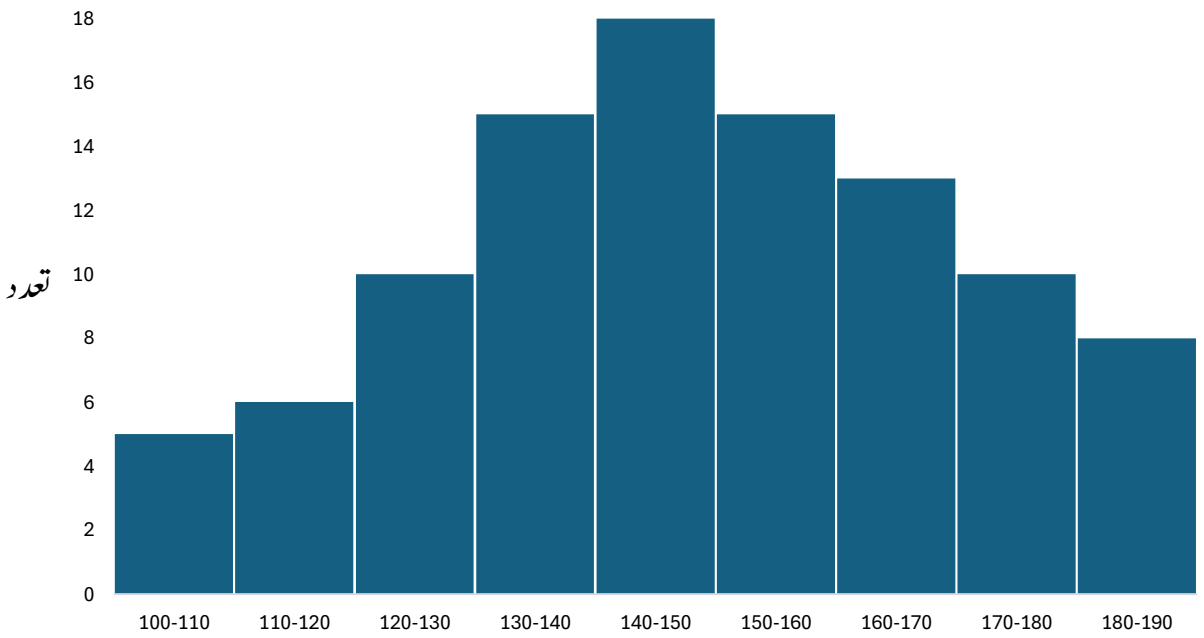
4. ہسٹوگرام (Histogram)

مقداری ڈیٹا کو تصویری شکل میں پیش کرنے کا ایک طریقہ ہسٹوگرام ہے۔ ہسٹوگرام توزیعِ تعدد، فیصد توزیعِ تعدد، تراکمی توزیعِ تعدد سب کے لیے بنایا جاسکتا ہے۔ بنیادی طور پر ہسٹوگرام ایک ایسا گراف ہے جو متصل متغیرات کی توزیعِ تعدد کو دکھانے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔ یہ ملحقہ مستطیل (Bars) پر مشتمل ہوتا ہے اس طرح کہ ہر مستطیل کی چوڑائی کلاس وقفہ کی نمائندگی کرتی ہے، اور اونچائی تعدد کی نمائندگی کرتی ہے۔ بارگراف کے برعکس، ہسٹوگرام میں بار ایک دوسرے کو چھوتے ہیں کیونکہ یہ متصل ڈیٹا دکھاتا ہے۔

ہسٹوگرام بنانے کے لیے متغیر کو محور X پر رکھیں اور اس کی تعدد کو محور Y پر دکھائیں۔ ہسٹوگرام کی چوڑائی کلاس انٹرل کے مساوی رکھی جاتی ہے اور لمبائی تعدد کے مساوی ہوتی ہے۔

مثال 2.9: درج ذیل اعداد و شمار سے ہسٹوگرام بنائیں:

کلاس وقفہ	100-110	110-120	120-130	130-140	140-150	150-160	160-170	170-180	180-190
تعدد	5	6	10	15	18	15	13	10	8



تصویر 2.3: ہسٹوگرام

حل: ہسٹوگرام درج ذیل مراحل سے بنایا جاسکتا ہے۔

سب سے پہلے ہم محور X پر متغیر رکھتے ہیں اور محور Y پر تعدد کو رکھتے ہیں۔ پھر محور X پر کلاس وقفے درج کرتے ہیں۔ اس کے بعد ہر کلاس کے مطابق ملے ہوئے مستطیل بناتے ہیں اس طرح کہ ان کی لمبائی ان کے تعدد کے مساوی ہوتی ہے۔ مثال کے طور تصویر 2.3 میں گراف دیکھیں۔ محور X پر ہم نے کلاس وقفوں کو دکھایا ہے جبکہ محور Y پر ان کے تعدد کو دکھایا ہے۔ چونکہ کلاس وقفہ 110-100 کی تعدد 5 ہے لہذا ہم نے 110-100 وقفے پر 5 لمبائی کا مستطیل بنایا۔

اسی طرح، کلاس 120-110 کا تعدد 6 ہے۔ لہذا، 6 اونچائی کا اس کا مستطیل بنایا۔ اسی طرح آپ دیگر وقفوں کا بھی مستطیل بنا سکتے ہیں۔

5. تعددی کثیر الاضلاع (Frequency Polygon)

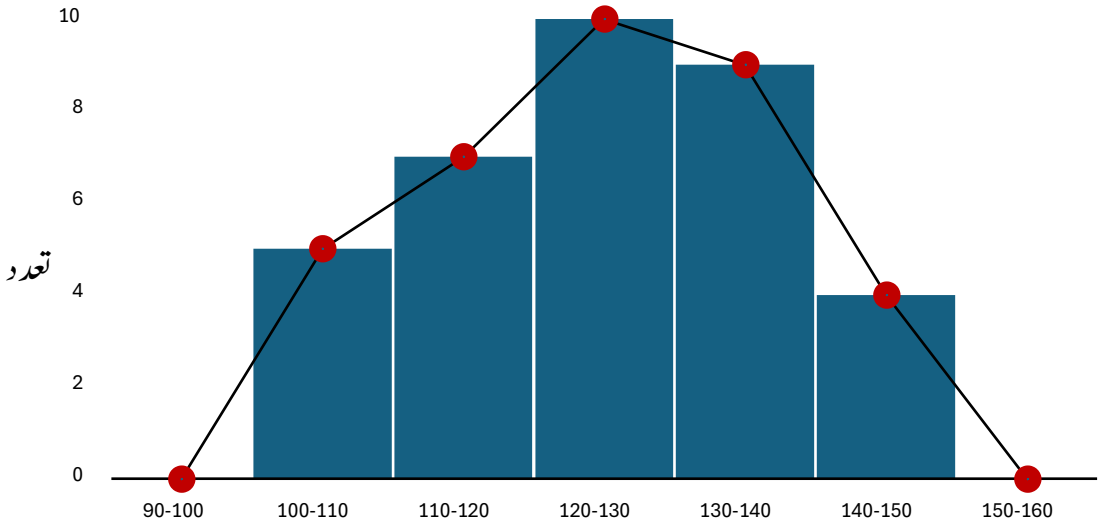
تعددی کثیر الاضلاع ایسا گراف ہے جسے ہسٹوگرام کے مستطیل کے اوپری حصے کے وسطی نقاط کو خطوطِ مستقیم سے جوڑ کر حاصل کیا جاتا ہے۔ تعددی کثیر الاضلاع کو دو طرح سے بنایا جاسکتا ہے۔ ہسٹوگرام سے اور بنا ہسٹوگرام کے۔

پہلا طریقہ: ہسٹوگرام سے تعددی کثیر الاضلاع کی تشکیل

اس طریقے میں سب سے پہلے ہسٹوگرام بنائیں۔ پھر ہسٹوگرام کے ہر مستطیل کے اوپری سطح کے وسط میں نقاط بنائیں۔ یہ نقاط کلاس کے وسطی نقاط کو دکھاتے ہیں۔ پھر ایک دوسرے کے قریب مستطیل کے تمام نقاط کو خطوطِ مستقیم سے جوڑیں۔ ہسٹوگرام کے دونوں طرف 0 تعدد کی خیالی کلاس کے وسط میں محور X پر خط کو ملائیں۔

مثال 2.10: درج ذیل اعداد و شمار سے تعددی کثیر الاضلاع بنائیں۔

کلاس وقفہ	100-110	110-120	120-130	130-140	140-150
تعدد	5	7	10	9	4



تصویر 2.4: ہسٹوگرام اور تعددی کثیر الاضلاع

حل:

پہلے مرحلے میں ڈیٹا سے ہسٹوگرام بنائیں۔ پھر ہسٹوگرام کے ہر مستطیل کے اوپری حصے کے وسط میں نقطہ بنائیں۔ یہ نقاط کلاس کے وسطی قدر کو دکھاتے ہیں۔ مثال کے طور پر کلاس 110-100 کی وسطی قدر 105 ہوگی۔ پھر ان تمام نقاط کو ایک خط سے ملادیں۔ دونوں سروں پر صفر تعدد کے ساتھ خیالی کلاس کے وسطی نقاط کو لے کر X محور سے اس خط کو جوڑ دیں۔ تصویر 2.4 دیکھیں۔

دوسرا طریقہ: بنا ہسٹوگرام کے کثیر الاضلاع کی تشکیل

اس طریقے سے تعددی کثیر الاضلاع کی تشکیل کے لیے سب سے پہلے سبھی کلاسوں کے وسطی نقطے کو اخذ کریں۔ اس کے لیے آپ درج ذیل فارمولا استعمال کر سکتے ہیں۔

$$\text{Mid Point} = \frac{\text{Lower Limit} + \text{Upper Limit}}{2}$$

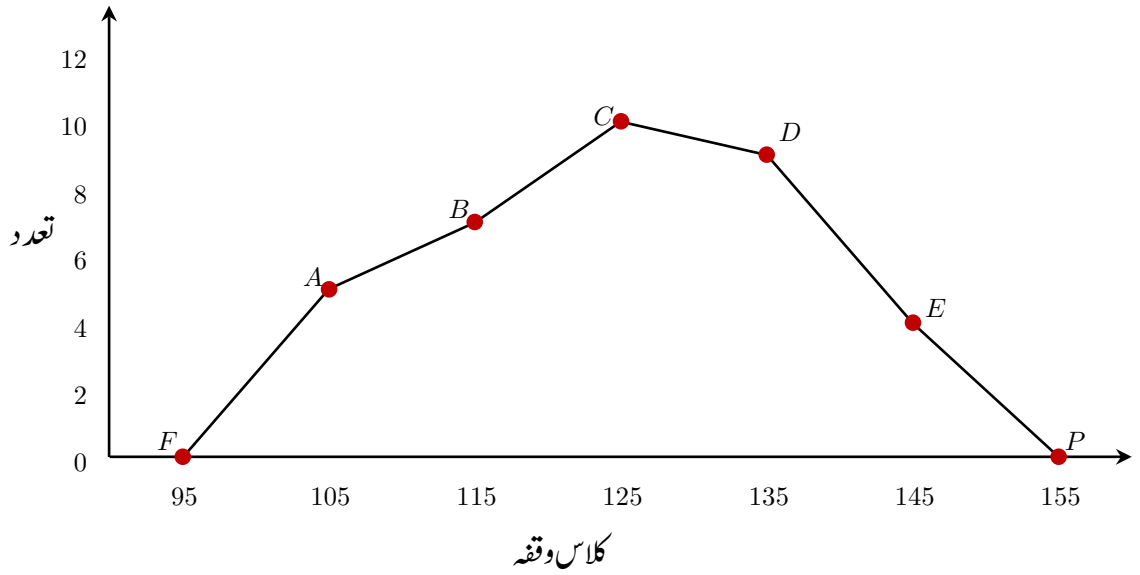
ہماری مثال میں وسطی نقاط ہوں گے:

کلاس وقفہ	کلاس کا وسطی نقطہ	تعدد
100-110	105	5
110-120	115	7
120-130	125	10
130-140	135	9
140-150	145	4

اگلے مرحلے میں محور کھینچیں اور محور X پر وسطی نقاط کو دکھائیں اور محور Y پر تعدد کو دکھائیں۔

پھر وسطی نقطہ اور تعدد کے امتزاج سے حاصل نقاط کو پلاٹ کریں۔

$$(105, 5), (115, 7), (125, 10), (135, 9), (145, 4)$$



تصویر 2.5: تعددی کثیر الاظلاع

پھر ان تمام نقاط کو خط مستقیم سے جوڑ دیں۔

سب سے پہلی کلاس سے پہلے اور آخری کلاس کے برابر صفر تعدد کے ساتھ خیالی کلاس کے وسطی نقاط یعنی $(95, 0)$ اور $(155, 0)$ کو پلاٹ کریں اور خط کو محور X سے ملا دیں۔ تصویر 2.5 دیکھیں۔

6. تعددی خط (Frequency Curve)

تعددی خط توزیعِ تعدد کی ہموار ترسیمی (Graphical) نمائندگی ہے۔ یہ تعدد کے نقاط کو سیدھے خطوط کے بجائے کھلے ہاتھ سے بنائے ہموار خط کے ساتھ جوڑ کر حاصل کیا جاتا ہے۔ بنیادی طور پر تعددی خط تعددی کثیر الاضلاع کی طرح ہے، لیکن اس کے خطوط ہموار اور مسلسل ہوتے ہیں۔

تعددی خط بنانے کے لیے پہلے کلاس کے وسطی نقاط کو اخذ کریں۔

$$\text{Mid Point} = \frac{\text{Lower Limit} + \text{Upper Limit}}{2}$$

کلاس کے وسطی نقاط کو محور X پر دکھائیں اور Y محور پر تعدد دکھائیں۔ پھر نقاط کو پلاٹ کریں اور کھلے ہاتھ سے ان تمام نقاط کو جوڑ دیں۔ پھر تعددی کثیر الاضلاع کی ہی طرح، سب سے پہلی اور آخری کلاس کے برابر صفر تعدد کے ساتھ خیالی کلاس بنائیں اور خط کو محور X سے ملا دیں۔

مثال 2.11: درج ذیل اعداد و شمار سے تعددی خط بنائیں۔

کلاس وقفہ	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14
تعدد	8	14	17	24	18	13	6

حل: سب سے پہلے کلاس کے وسطی نقاط اخذ کریں۔

کلاس وقفہ	وسطی نقاط	تعدد
0-2	1	8
2-4	3	14
4-6	5	17
6-8	7	24
8-12	9	18
12-14	11	13
14-16	13	6

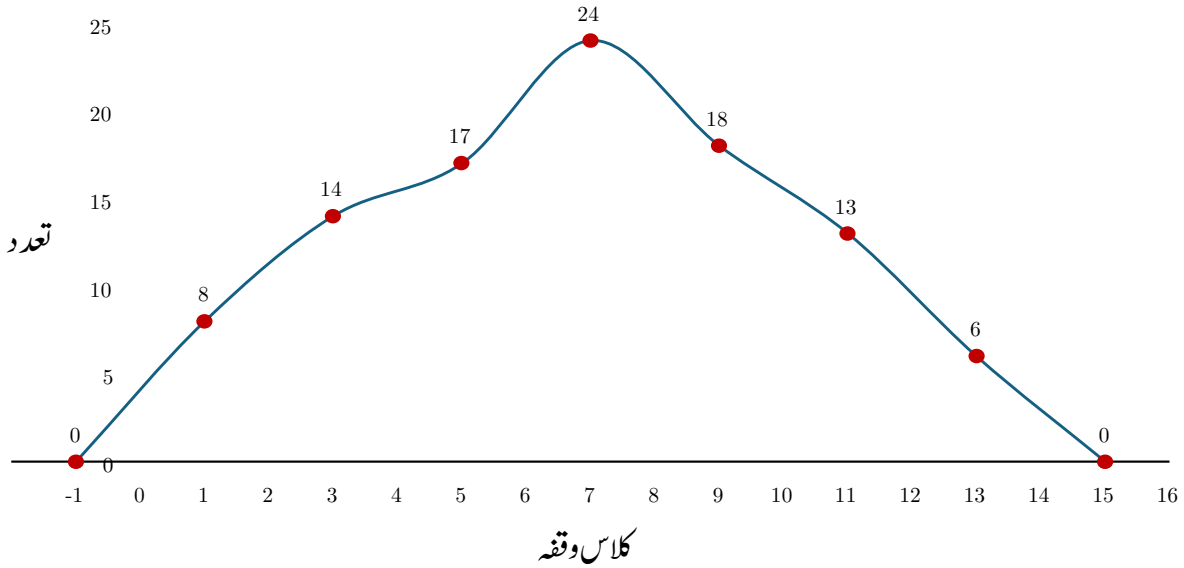
کلاس کے وسطی نقاط کو محور X پر دکھائیں اور Y محور پر تعدد دکھائیں۔ نقاط کو پلاٹ کریں۔

$$(1, 8), (3, 14), (5, 17), (7, 24), (9, 18), (11, 13), (13, 6)$$

کھلے ہاتھ سے ان تمام نقاط کو جوڑ دیں۔

تعددی کثیر الاضلاع کی ہی طرح، سب سے پہلی اور آخری کلاس کے برابر صفر تعدد کے ساتھ خیالی کلاس بنائیں اور خط کو محور X سے ملا دیں۔

7. تراکمی تعدد خط یا آگیو (Cumulative Frequency Curve or Ogive)



تصویر2.6:تعددی خط

تراکمی تعدد خط یا آگیو تراکمی توزیعِ تعدد کا گراف ہے۔اس کا استعمال اس بات کا تعین کرنے کے لیے کیا جا سکتا ہے کہ ڈیٹا سیٹ میں کسی خاص قدر کے اوپر یا نیچے کتنی قدریں ہیں۔تراکمی تعدد خط بنانے کے درج ذیل مراحل ہیں۔

سب سے پہلے تراکمی توزیعِ تعدد جدول بنائیں۔پھر محور بنائیں اور محور X پر کلاس کی حدود بنائیں اور محور Y پر تراکمی تعدد بنائیں۔ کلاس حدود اور ان کے تراکمی تعدد کے جوڑ کے نقاط کو پلاٹ کریں۔اس کے بعد تمام نقاط کو ہموار خط سے جوڑ دیں۔چونکہ تراکمی تعدد نزولی اور صعودی دو قسم کی ہوتی ہیں،اسی حساب سے تراکمی تعدد خط بھی نزولی اور صعودی دو قسم کے ہو سکتے ہیں۔

مثال 2.12: درج ذیل اعداد و شمار سے نزولی اور صعودی تراکمی تعدد خطوط بنائیں۔

کلاس وقفہ (Class Interval)	تعدد (Frequency)
0–10	4
10–20	6
20–30	10
30–40	12
40–50	8

حل: صعودی تراکمی تعدد خط

پہلے مرحلے میں صعودی تراکمی تعدد بنائیں

کلاس وقفہ	تعدد	صعودی تعدد
0–10	4	4
10–20	6	10
20–30	10	20

30–40	12	32
40–50	12	40

کلاس وقفے کی اوپری حد کو محور X پر دکھائیں۔ اوپری حد کی قدریں ہیں: $10,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50$

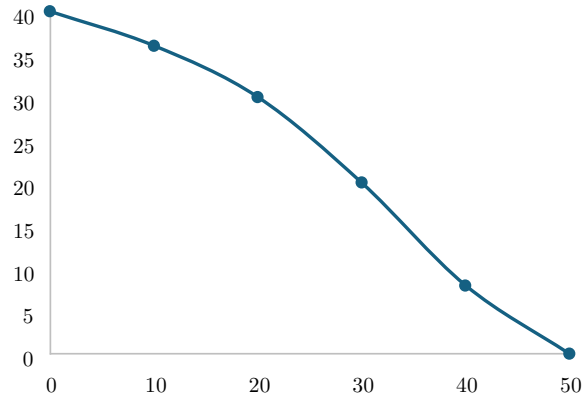
Y محور پر تراکمی تعداد دکھائیں۔

اوپری حد اور تراکمی تعداد کے امتزاج کے نقاط کو پلاٹ کریں۔

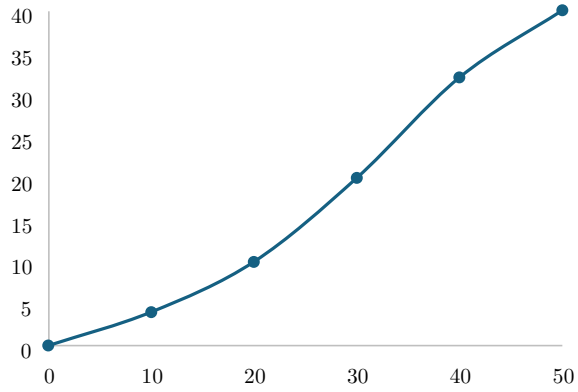
$$(10, 4), (20, 10), (30, 20), (40, 32), (50, 40)$$

صعودی تراکمی تعداد خط کے لیے سب سے چھوٹی کلاس سے پہلے خیالی کلاس کی اوپری حد کو صفر تعداد کے ساتھ پلاٹ کریں۔

تمام نقاط کو جوڑ دیں۔ دیکھیں تصویر 2.7۔



تصویر 2.7: نزولی تراکمی تعداد خط



تصویر 2.8: صعودی تراکمی تعداد خط

نزولی تراکمی تعداد خط

پہلے مرحلے میں نزولی تراکمی تعداد بنائیں

کلاس وقفہ	تعداد	صعودی تعداد
0–10	4	40
10–20	6	36
20–30	10	30
30–40	12	20
40–50	8	8

کلاس وقفے کی ادنی حد کو محور X پر دکھائیں۔ ادنی حد کی قدریں ہیں: $0,\ 10,\ 20,\ 30,\ 40$

Y محور پر تراکمی تعداد دکھائیں۔

ادنی حد اور تراکمی تعداد کے امتزاج کے نقاط کو پلاٹ کریں۔

$$(0, 40), (10, 36), (20, 30), (30, 20), (40, 8)$$

نزولی تراکمی تعداد خط کے لیے سب سے بڑی کلاس سے اگلی خیالی کلاس کی نچلی حد کو صفر تعداد کے ساتھ پلاٹ کریں۔

تمام نقاط کو جوڑ دیں۔ دیکھیں تصویر 2.8۔

آپ ایک ہی گراف پر نزولی تعددی خط اور صعودی تعددی خط بنا سکتے ہیں۔ وجہ یہ ہے کہ ایک کلاس کی اعلی حد دوسری کلاس کی ادنی حد ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر اگر کلاس ہوں: 0-10, 10-20, 20-30

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ پہلی کلاس کی اعلی حد 10 ہے اور دوسری کلاس کی ادنی حد بھی 10 ہے۔ اس سے محور X کے لیے آپ کو دونوں قسموں کے تراکمی تعدد خطوط کے لیے یکساں قدریں ملیں گی۔

مثال 2.13: درج ذیل اعداد و شمار سے نزولی تراکمی تعدد خط اور صعودی تراکمی تعدد خط بنائیں۔

نمبرات کلاس	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	کل
تعدد	3	8	5	11	21	16	13	7	9	7	100

حل: تراکمی توزیعِ تعدد جدول

نمبرات	تعدد	صعودی تراکمی تعدد	نزولی تراکمی تعدد
0-10	3	3	100
10-20	8	11	97
20-30	5	16	89
30-40	11	27	84
40-50	21	48	73
50-60	16	64	52
60-70	13	77	36
70-80	7	84	23
80-90	9	93	16
90-100	7	100	7
کل (Total)	100		

صعودی تراکمی تعدد کے لیے اعلی حد کے ساتھ نقاط ہوں گے:

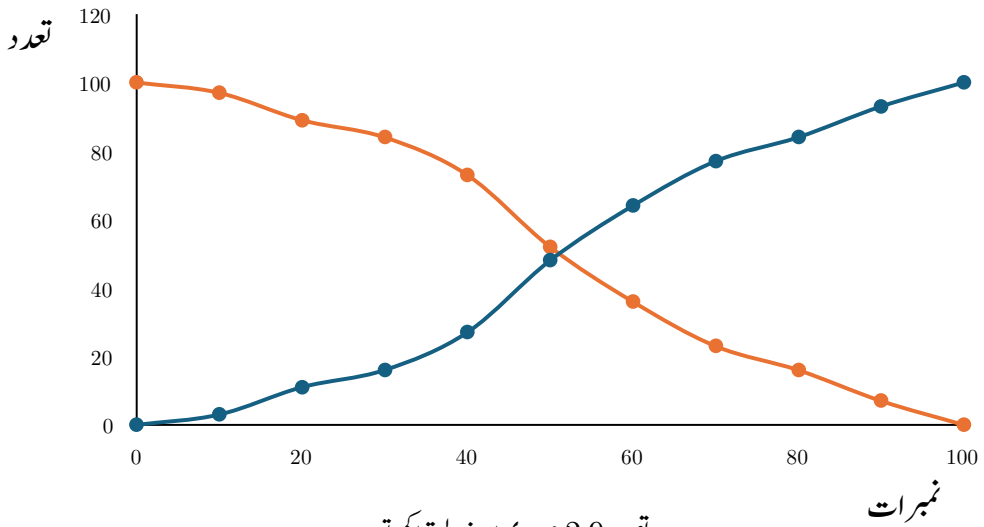
$$(10, 3), (20, 11), (30, 16), (40, 27), (50, 48), 60, 64), (70, 77), (80, 84), (90, 93), (100, 100)$$

ان نقاط کو پلاٹ کریں اور ساتھ ہی سب سے چھوٹی کلاس سے پہلے خیالی کلاس کی اوپری حد کو صفر تعدد کے ساتھ پلاٹ کریں۔ ان تمام نقاط کو ملا دیں۔ اس سے اپ کو صعودی تراکمی تعددی خط حاصل ہو گا۔

اسی طرح نزولی تراکمی تعدد کے لیے ادنی حد کے ساتھ نقاط ہوں گے:

$$(0, 100), (10, 97), (20, 89), (30, 84), (40, 73), (50, 52), 60, 36), (70, 23), (80, 16), (90, 7)$$

ان نقاط کو پلاٹ کریں اور ساتھ ہی سب سے اعلی کلاس سے اگلی خیالی کلاس کی ادنی حد کو صفر تعدد کے ساتھ پلاٹ کریں۔ ان تمام نقاط کو ملا دیں۔ اس سے اپ کو نزولی تراکمی تعددی خط حاصل ہو گا۔ دیکھیں تصویر 2.9۔



تصویر 2.9: صعودی اور نزولی تراکمی تعداد

2.5 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی کے مطالعے کے بعد طلبا اس قابل ہیں کہ:

- شمایارت کے تصورات آبادی، نمونہ، پیرامیٹر اور شماریہ کی وضاحت کر سکیں۔
- توزیعِ تعدد کی وضاحت کر سکیں اور خام ڈیٹا سے توزیعِ تعدد میں ڈیٹا کو درجہ بند کر سکیں۔

2.6 فرہنگ (Glossary)

آبادی :Population-افراد، آئٹم یا ڈیٹا کا پورا گروپ جو مطالعے کا فوکس ہے۔

توزیعِ تعدد :Frequency Distribution-جدول یا گراف جو دکھاتی ہے کہ کوئی مشاہدہ ڈیٹاسیٹ میں کتنی بار آتا ہے۔

نمونہ :Sample-آبادی کا ذیلی گروپ جس کی بنا پر آبادی کے بارے میں پیش گوئی کی جاتی ہے۔

2.7 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

2.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. شماریات میں آبادی کسے کہتے ہیں؟

(a) ڈیٹا کا چھوٹا حصہ (b) مستعمل نمونوں کی تعداد

(c) پورا گروپ جس کا مطالعہ کیا جاتا ہے (d) تصادفی طور پر منتخب نمونہ

2. درج ذیل میں نمونہ ہے:

(a) ہندوستان کے تمام شہری (b) یونیورسٹی سے منتخب 100 طلبا

(c) دنیا کا ہر سیب (d) ملک میں تمام ووٹر

3. ایک محقق ہندوستانی نوجوانوں کے اوسط قد کا مطالعہ کرنا چاہتا ہے۔ اس کے لیے وہ 2000 طلبا کا انتخاب کرتا ہے۔ یہ گروپ کہلاتا ہے:

(a) پیرامیٹر (b) نمونہ

(c) آبادی (d) تعدد

4. توزیعِ تعدد کا استعمال ہوتا ہے:

(a) ڈیٹا کو الجھن دینے کے لیے (b) یہ دکھانے کے لیے کہ ہر قدر کتنی بار آتی ہے

(c) خطا کم کرنے کے لیے (d) نمونے کے سائز کا تعین کرنے کے لیے

5. توزیعِ تعدد کیا دکھاتی ہے؟

(a) نمونے کا اوسط (b) حد

(c) ہر مشاہدہ کتنی بار آتا ہے (d) گراف

6. ہسٹوگرام میں محور X پر عام طور پر دکھایا جاتا ہے:

(a) تعدد کو (b) کلاس انٹرول کو

(c) موڈ کو (d) اوسط کو

7. درج ذیل میں کون توزیعِ تعدد نہیں ہے؟

(a) متصل (b) تراکمی

(c) پائی چارٹ (d) منفصل

8. معاشیات میں پیرامیٹر ہے:

(a) نمونے کی خصوصیت (b) آبادی کی خصوصیات

(c) گراف (d) چارٹ

9. توزیعِ تعدد میں تمام تعدد کا جوڑ ہوتا ہے:

(a) سب سے بڑی قدر (b) آبادی

(c) نمونے کا سائز (d) اوسط

10. متصل توزیعِ تعدد کا استعمال ہوتا ہے جب

(a) کوئی ڈیٹا نہ ہو (b) ڈیٹا کی قدریں بار بار آتی ہوں

(c) ڈیٹا میں جب بہت منفرد قدریں ہوں (d) جب ڈیٹا صرف گرافکل ہو

2.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. نمونہ اور آبادی میں مع مثال فرق واضح کریں۔
2. پیرامیٹر اور شماریہ میں کیا فرق ہے؟
3. توزیعِ تعدد کسے کہتے ہیں؟
4. منفصل توزیعِ تعدد متصل توزیعِ تعدد سے کس طرح مختلف ہے؟
5. درج ذیل سے منفصل توزیعِ تعدد جدول بنائیں۔

5, 6, 8, 7, 9, 5, 6, 7, 9, 8, 8, 7, 8, 6, 9, 5, 7, 8, 6, 7, 8, 6, 6, 7, 9, 7, 9, 6, 7, 9

2.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. درج ذیل اعداد اشمار سے مناسب کلاس انٹرول کے ساتھ توزیعِ تعدد جدول بنائیں۔

58	49	42	55	52	44	61	52	44	48	59	49	54	41	52	51	45	58	59	52
45	50	63	46	52	46	47	61	51	50	47	48	54	55	50	46	53	58	42	48
50	53	51	48	47	40	53	49	57	55	53	53	38	54	66	46	42	58	44	55

2. ہسٹوگرام کسے کہتے ہیں؟ اس کے بنانے کے کیا مراحل ہیں؟ درج ذیل سے ہسٹوگرام بنائیں۔

ماہانہ آمدنی Monthly Income (in Thousand Rupees)	کارکنان کی تعداد (No of Workers)	ماھانہ آمدنی Monthly Income (in Thousand Rupees)	کارکنان کی تعداد (No of Workers)
30-32	10	40-42	310
32-34	40	42-44	200
34-36	135	44-46	70
36-38	300	46-48	40
38-40	380	48-50	15

3. درج ذیل اعداد و شمار سے نزولی تعدد تقسیم اور صعودی تعدد تقسیم اخذ کریں اور ترا کمی تعدد خط سے دکھائیں۔

کلاس وقفہ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
تعدد	4	9	18	20	12	7

2.8 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Gupta, S. P. (2020). *Statistical methods* (44th ed.). Sultan Chand & Sons.
2. Bhardwaj, R. S. (2011). *Business statistics* (2nd ed.). Excel Books India.
3. Srivastava, T. N., & Rego, S. (2012). *Statistics for management* (2nd ed.). Tata McGraw-Hill Education.
4. Sharma, J. K. (2019). *Business statistics* (5th ed.). Vikas Publishing House.

اکائی 3: مرکزی رجحان کے پیمانے

(Measures of Central Tendency)

اکائی کے اجزا:

3.0 تمہید (Introduction)

3.1 مقاصد (Objectives)

3.2 مرکزی رجحان (Central Tendency)

3.2.1 اچھے مرکزی رجحان کی خصوصیات
(Characteristics of a Good Central Tendency)

3.3 حسابی اوسط (Arithmetic Mean)

3.3.1 حسابی اوسط کا حساب (Calculation of Arithmetic Mean)

3.4 وسیط (Median)

3.4.1 وسیط کا حساب (Calculation of Arithmetic Mean)

3.4.2 متعلقہ مقامی قدریں (Related Positional Measures)

3.5 موڈ (Mode)

3.5.1 موڈ کا حساب (Calculation of Mode)

3.6 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

3.7 فرہنگ (Glossary)

3.8 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

3.8.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

3.8.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

3.8.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

3.9 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

3.0 تمہید (Introduction)

سابقہ اکائیوں میں ہم نے ڈیٹا کے اکٹھا کرنے اور اس کو پیش کرنے کے طریقوں پر بات کی تھی۔ ڈیٹا کی درجہ بندی اور جدول بندی کے بعد بھی ڈیٹا میں بسا اوقات اتنی تفصیلات ہوتی ہیں کہ اس ڈیٹا کا استعمال مشکل ہو جاتا ہے۔ اس لیے، ہمیں اکثر جدول بند ڈیٹا کا مزید تجزیہ کرنے کی ضرورت ہوتی ہے۔ تجزیے کا ایک اہم طریقہ یہ ہے کہ ایک ایسی اوسط قدر کا حساب لگایا جائے جو پورے ڈیٹا کی نمائندگی کرے۔

لفظ "اوسط" ہم روزمرہ کی گفتگو میں کثرت سے استعمال کرتے ہیں۔ روزمرہ کی گفتگو میں اوسط کام، اوسط آمدنی، ملازمین کی اوسط عمر وغیرہ جیسے الفاظ ہم استعمال کرتے رہتے ہیں۔ اوسط دراصل ایک ایسی واحد قدر ہے جو کسی دیے گئے ڈیٹا کو سب سے بہتر طریقے سے بیان کرتی ہے۔ یہ قدر نہ تو سب سے چھوٹی ہوتی ہے اور نہ ہی سب سے بڑی، بلکہ ایسی عددی قدر ہوتی ہے جو ڈیٹا کے بیچ کہیں واقع ہوتی ہے۔ اسی وجہ سے اوسط کو مرکزی رجحان کا پیمانہ بھی کہا جاتا ہے۔ مرکزی رجحان کا پیمانہ ایسی مرکزی قدر ہوتی ہے جس کے ارد گرد ڈیٹا اکٹھا ہوتا ہے۔ اس اکائی میں ہم مرکزی رجحان کے تین پیمانوں، اوسط، میڈین یا وسیط اور موڈ کی وضاحت کریں گے۔

3.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے درج ذیل مقاصد ہیں:

- مرکزی رجحان کی وضاحت کرنا۔
- اوسط (Mean)، وسیط (Median)، اور موڈ (Mode) کی تعریف کرنا۔
- غیر مرتب (Ungrouped) اور مرتب (Grouped) ڈیٹا کے لیے اوسط، وسیط اور موڈ کا حساب لگانا۔

3.2 مرکزی رجحان (Central Tendency)

شماریات کا ایک اہم مقصد یہ ہے کہ ایسی عددی قدروں کو دریافت کیا جائے جو کسی توزیعِ تعدد کی بنیادی خصوصیات کو واضح کرتی ہوں۔ اوسط (Averages) ان قدروں میں سے ایک اہم قدر ہے اور اہم پیمانہ ہے۔ اوسط وہ پیمانہ ہے جو عددی ڈیٹا کے ایک بڑے اور پیچیدہ مجموعے کو ایک واحد عددی قدر میں سمیٹ دیتا ہے اور پوری توزیعِ تعدد کی نمائندگی کرتا ہے۔ انسانی ذہن کی یہ محدودیت کہ وہ بڑی مقدار میں عددی ڈیٹا کو یاد نہیں رکھ سکتا، ہمیں چند ایسی اقدار تلاش کرنے پر مجبور کرتی ہے جو پورے ڈیٹا کو بیان کر سکیں۔ اوسط ہمیں ڈیٹا کا خلاصہ فراہم کرتی ہے اور عددی ڈیٹا کے بڑے اور پیچیدہ مجموعے کا ایک سرسری جائزہ فراہم کرتی ہے۔ اوسط وہ مخصوص اقدار ہیں جن کے ارد گرد تقسیم کی دیگر اقدار جمع ہوتی ہیں۔ یہ قدر تقسیم کی دو انتہائی اقدار کے درمیان واقع ہوتی ہے اور ہمیں تقسیم کے مرکزی حصے میں اقدار کے اجتماع کا تخمینہ دیتی ہے۔ اسی وجہ سے انہیں مرکزی رجحان کے پیمانے (Measures of Central Tendency) کہا جاتا ہے۔ اوسط کو مقام کے پیمانے (Measures of Location) بھی کہا جاتا ہے کیونکہ یہ ہمیں کسی تقسیم کی پوزیشن یا مقام کا تعین کرنے میں مدد دیتی ہیں۔ اوسط شماریاتی مستقلات (Statistical Constants) ہیں جو ہمیں ایک ہی قدر میں پورے گروپ کی اہمیت کو سمجھنے کے قابل بناتی

ہیں۔

اوسط یا مرکزی رجحان کی پیمائش کا سب سے اہم مقصد یہ ہے کہ ایک ایسی واحد قدر متعین کی جائے جو ایک متغیر سے متعلق پوری سیریز (Series) کی نمائندگی کر سکے۔ مرکزی رجحان کا دوسرا مقصد ایک گروپ کے اندر یا مختلف گروپس کے درمیان موازنے میں آسانی پیدا کرنا ہے۔ مثال کے طور پر، کسی گروپ کے اراکین کی کارکردگی کا موازنہ دوسرے گروپس کی اوسط کارکردگی سے کیا جا سکتا ہے۔ مرکزی رجحان کا تیسرا مقصد دیگر شماریاتی پیمانوں کی بنیاد بننا ہے۔ مرکزی رجحان کی مدد سے دیگر اہم شماریاتی تصورات جیسے تفرق (Dispersion) عدم توازن (Skewness)، اور چوڑائی (Kurtosis) وغیرہ کا حساب لگایا جاتا ہے۔

3.2.1 اچھے مرکزی رجحان کی خصوصیات (Characteristics of a Good Central Tendency)

ایک اچھا اوسط (یا مرکزی رجحان کا پیمانہ) وہ ہے جو مؤثر طریقے سے ایک واحد، معنی خیز قدر کے ساتھ پورے ڈیٹاسیٹ کی نمائندگی کرتا ہے۔ شماریات گروں نے کئی اہم خصوصیات بیان کی ہیں جو ایک مثالی اوسط میں ہونی چاہیے۔

چونکہ اوسط ایک واحد قدر ہے جو اقدار کے ایک گروپ کی نمائندگی کرتی ہے، اس لیے یہ ضروری ہے کہ ایسی قدر درج ذیل خصوصیات کو پورا کرے۔

1. **اسے سمجھنا آسان ہونا چاہیے:** شماریاتی طریقے پیچیدہ ڈیٹا کو آسان بنانے کے لیے بنائے گئے ہیں۔ اس لیے اوسط ایسا ہونا چاہیے کہ اسے آسانی سے سمجھا جا سکے۔ اگر اسے سمجھنا مشکل ہو تو اس کا استعمال بہت محدود ہو گا۔
2. **حساب کرنا آسان ہونا چاہیے:** اوسط نہ صرف سمجھنے میں آسان ہونا چاہیے بلکہ حساب میں بھی آسان ہونا چاہیے تاکہ اسے بڑے پیمانے پر استعمال کیا جا سکے۔ تاہم، اگرچہ حساب میں آسانی ضروری ہے، لیکن حساب میں آسانی کے لیے دوسرے فوائد کو نظر انداز نہیں کرنا چاہیے۔ مثال کے طور پر اگر زیادہ درستگی کے لیے زیادہ پیچیدہ اوسط کی ضرورت ہو، تو بہتر ہے کہ زیادہ درست آپشن کا انتخاب کیا جائے۔
3. **اسے تمام مشاہدات پر مبنی ہونا چاہیے:** اوسط کو ڈیٹاسیٹ میں ہر ایک مشاہدے پر مبنی ہونا چاہیے۔ یہ یقینی بناتا ہے کہ اگر کوئی مشاہدہ تبدیل ہو جائے یا حذف کر دیا جائے تو اوسط بھی بدل جائے گا۔ یہ خصوصیت اوسط کو صحیح معنوں میں نمائندہ اوسط بناتی ہے۔
4. **اس کی واضح تعریف ہونی چاہیے:** اوسط کو واضح طور پر اس طرح بیان کیا جانا چاہیے کہ اس کی صرف ایک ہی تشریح ہو۔ مثال کے طور پر، اس کی تعریف ایک الجبری فارمولے کے ذریعے کی جانی چاہیے، تاکہ ایک ہی ڈیٹا پر کام کرنے والے مختلف لوگ ایک ہی نتیجے پر پہنچیں اگر وہ کوئی حساب کتاب کی غلطی نہ کریں۔
5. **اسے مزید الجبری استعمال کے قابل ہونا چاہیے:** ایک اچھا اوسط وہ ہوتا ہے جسے مزید شماریاتی حسابات میں استعمال کیا جا سکے۔ مثال کے طور پر، اگر ہمیں دو یا دو سے زیادہ کمپنیوں کے ملازمین کی اوسط آمدنی اور تعداد دی جائے، تو ہمیں مشترکہ اوسط کا حساب آسانی سے کرنے کے قابل ہونا چاہیے۔
6. **اس میں نمونے لینے کا استحکام ہونا چاہیے:** اسے نمونہ گیری استحکام کہتے ہیں۔ اس کا مطلب ہے کہ اگر ہم ایک ہی آبادی سے مختلف نمونے

منتخب کرتے ہیں (مثال کے طور پر، کالج کے طلبا کے دس مختلف گروپ)، ان نمونوں کی اوسط تقریباً ایک جیسا ہونا چاہیے۔ حالانکہ یہ بات قدرتی ہے کہ نمونوں میں کچھ نہ کچھ فرق ہو گا تاہم کم فرق اور اتار چڑھاؤ والے اوسط کو زیادہ قابل اعتماد سمجھا جاتا ہے۔

7. **اسے انتہائی قدروں سے غیر ضروری طور پر متاثر نہیں ہونا چاہیے:** اگرچہ ہر مشاہدے کو اوسط کی قدر پر اثر انداز ہونا چاہیے، لیکن کسی ایک مشاہدے کو اس پر حاوی نہیں ہونا چاہیے۔ اگر ایک یا دو بہت چھوٹی یا بہت بڑی قدریں نمایاں طور پر اوسط کو متاثر کرتی ہیں، تو یہ صحیح معنوں میں نمائندہ اوسط نہیں ہو گا۔ اس طرح کے غلو اوسط کو بگاڑ سکتے ہیں اور اس کی افادیت کو کم کر سکتے ہیں۔

3.3 حسابی اوسط (Arithmetic Mean)

حسابی اوسط مرکزی رجحان کا سب سے عام پیمانہ ہے۔ اس کا حساب تمام مشاہدات کی قدر کو جوڑ کر مشاہدات کے نمبر یا تعداد سے تقسیم کر کے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ آبادی کے اوسط کو یونانی لفظ μ علامت سے دکھاتے ہیں جبکہ نمونے کے اوسط کو X سے دکھاتے ہیں۔ اس طرح آبادی کے حسابی اوسط کا فارمولا ہو گا:

$$\mu = \frac{\Sigma X}{N}$$

جہاں ΣX آبادی کے تمام مشاہدات کی قدروں کا جمع ہے اور N مشاہدات کی تعداد ہے۔ نمونے کے اوسط کا فارمولا ہو گا:

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N}$$

جہاں ΣX نمونے کے تمام مشاہدات کی قدروں کا جمع ہے اور N مشاہدات کی تعداد ہے۔

3.3.1 حسابی اوسط کا حساب (Calculation of Arithmetic Mean)

1. خام ڈیٹا سے اوسط (Mean from Raw Data)

خام ڈیٹا سے اوسط کا حساب (Mean of Raw Data) کرنے کے لیے آپ سبھی مشاہدات کی قدروں کا جوڑ کریں گے اور انہیں ڈیٹا کی تعداد سے تقسیم کر دیں گے۔ اس طرح اگر $X_1, X_2, X_3 \dots, X_N$ کل N آئٹم یا مشاہدات کی قدریں ہیں تو حسابی اوسط $(\overline{X})$ ہو گا:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$$

چونکہ ہم 1 سے لے کر N تک تمام مشاہدات کو جوڑ رہے ہیں اس لیے ہم سپر اسکرپٹ اور سبسکرپٹ کو حذف کر دیتے ہیں اور اوسط کو لکھ سکتے ہیں:

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N}$$

مثال 3.1: چار افراد کی روپوں میں آمدنی 350000, 45000, 40000 اور 50000 ہے۔ اوسط آمدنی اخذ کریں:

$$\text{Mean Income } (\bar{X}) = \frac{40000 + 45000 + 35000 + 50000}{4} = 42500$$

چار افراد کی اوسط آمدنی 42500 روپے ہے۔

مثال 3.2: درج ذیل میں 40 طلبا کے نمبرات دیے گئے ہیں۔ اوسط نمبرات حاصل کریں:

35	46	38	36	43	46	37	41	46	31
35	37	48	32	44	49	30	44	39	31
30	50	44	34	43	40	37	45	30	42
36	38	39	50	50	36	42	46	32	48

یہاں مشاہدات کی تعداد 40 ہے۔ اوسط نمبرات ہوں گے:

$$\text{Average Marks } (\bar{X}) = \frac{35 + 46 + 38 + \cdots 48}{40} = \frac{1600}{40} = 40$$

اوسط نمبرات 40 ہیں۔

2. منفصل توزیعِ تعدد کا اوسط (Mean of Discrete Frequency Distribution)

سابق میں آپ توزیعِ تعدد یا تقسیمِ تعدد کے ذریعے ڈیٹا کو پیش کرنا کا طریقہ پڑھ چکے ہیں۔ منفصل توزیعِ تعدد کی صورت میں آپ مشاہدات (X_i) کو ان کے تعدد (f_i) سے ضرب دیں گے اور پھر ان حاصل ضرب کو جوڑ کر کل تعدد یا مشاہدات کی کل تعداد سے تقسیم کریں گے۔ اس طرح اوسط کا فارمولا ہو گا:

$$\bar{X} = \frac{f_1X_1 + f_2X_2 + f_3X_3 + \cdots + f_NX_N}{N} = \frac{\Sigma fX}{N} = \frac{\Sigma fX}{\Sigma f}$$

مثال 3.3: درج ذیل ڈیٹا سے اوسط اخذ کریں:

X	2	5	6	8	10	12	15
f	7	15	20	25	15	10	8

حل:

X	f	fX
2	7	$2 \times 7 = 14$
5	14	$5 \times 14 = 70$
6	21	$6 \times 21 = 126$
8	25	$8 \times 15 = 200$
10	15	$10 \times 15 = 150$
12	10	$12 \times 10 = 120$
15	8	$15 \times 8 = 120$
	$\Sigma f = 100$	$\Sigma fX = 800$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{N} = \frac{800}{100} = 8$$

اوسط نمبرات 8 ہوں گے۔

مثال 3.4: درج ذیل میں 200 کارکنان کی آمدنی کے اعداد و شمار دیے گئے ہیں۔ اوسط آمدنی اخذ کریں۔

آمدنی	20000	25000	30000	35000	40000	45000	50000
تعداد	20	35	50	40	30	15	10

حل:

آمدنی (X)	تعداد (f)	fX
2000	20	40000
2500	35	87500
3000	50	150000
3500	40	140000
4000	30	120000
4500	15	67500
5000	10	50000
	$\Sigma f = 200$	$\Sigma fX = 655000$

$$\overline{X} = \frac{\Sigma fX}{N} = \frac{655000}{200} = 3275$$

کارکنان کی اوسط آمدنی 3275 روپے ہے۔

3. مفروضہ اوسط طریقہ (Assumed Mean Method)

کبھی کبھی جب قدریں زیادہ بڑی ہوں تو ان کا ضرب حاصل کرنا قدرے مشکل ہو سکتا ہے اگر آپ کے پاس کیلکولیٹر یا کمپیوٹر نہ ہو۔ اس صورت میں آپ اوسط اخذ کرنے کے لیے شارٹ کٹ طریقہ اختیار کر سکتے ہیں۔ اس طریقے میں آپ کسی نمبر کو اوسط فرض کرتے ہیں۔ آپ کسی بھی نمبر کو اوسط فرض کر سکتے ہیں۔ لیکن بہتر یہ ہے کہ آپ بیچ کے یا آس پاس کے کسی نمبر کو اوسط فرض کریں۔ اس سے آپ کے حساب کا عمل کافی کم ہو سکتا ہے۔ اس اوسط کو مفروضہ اوسط (Assumed Mean) کہیں۔ آیئے اسے A سے دکھائیں۔ آپ مشاہدات (X) کی تمام قدروں کو اس مفروضہ اوسط سے منہا کریں اور جو قدر آئے اسے d کہیں اس طرح کہ $(d = X - A)$۔ پھر آپ اوسط درج ذیل فارمولا سے اخذ کر سکتے ہیں:

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma fd}{N}$$

آیئے درج بالا مثال کے اوسط کو اس طریقے سے اخذ کرتے ہیں۔ آیئے 3500 کو اوسط فرض کریں۔

آمدنی (X)	تعداد (f)	$d = X - A$ $d = X - 3500$	fd
2000	20	-1500	-30000
2500	35	-1000	-35000
3000	50	-500	-25000
3500	40	0	0
4000	30	500	15000

15000	1000	15	4500
15000	1500	10	5000
$\Sigma fX = -45000$		$\Sigma f = 200$	

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma fd}{N}$$

$$\bar{X} = 3500 + \frac{-45000}{200} = 3500 - 225$$

$$\bar{X} = 3275$$

4. متصل توزیعِ تعدد کا اوسط (Mean of Continuous Frequency Distribution)

متصل توزیعِ تعدد یا گروپڈ (Grouped Data) ڈیٹا کی صورت میں اوسط کا حساب کرنے کے لیے ہر گروپ کی نمائندگی کے لیے اس گروپ کے وسطی نقطے کو اخذ کریں۔ وسطی نقطہ اخذ کرنے کے لیے گروپ کی اوپری اور نچلی حد کے جمع کو 2 سے تقسیم کریں (یعنی ان کا اوسط اخذ کریں)۔ اس وسطی نقطے کو X فرض کریں اور پھر اوپر ہی کی طرح اوسط اخذ کریں۔

مثال 3.5: درج ذیل اعداد و شمار سے اوسط اخذ کریں:

کلاس وقفہ	100-110	110-120	120-130	130-140	140-150	150-160	160-170	170-180	180-190
تعدد	5	6	10	15	18	15	13	10	8

حل:

کلاس وقفہ (Class Interval)	تعدد (Frequency)	وسطی نقطہ (Mid Point-X)	fX
100-110	5	105	525
110-120	6	115	690
120-130	10	125	1250
130-140	15	135	2025
140-150	18	145	2610
150-160	15	155	2325
160-170	13	165	2145
170-180	10	175	1750
180-190	8	185	1480
	$\Sigma f = 100$		$\Sigma fX = 14800$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{N} = \frac{14800}{100} = 148$$

لہذا، اوسط 148 ہے۔

جیسے منفصل توزیعِ تعدد میں ہم نے شارٹ کٹ فارمولا کا استعمال کیا تھا۔ یہاں بھی آپ شارٹ کٹ طریقہ استعمال کر سکتے ہیں۔ اس طرح مفروضہ اوسط طریقے سے درج بالا مثال کا اوسط اخذ کرنے کے لیے 145 کو اوسط فرض کریں۔

fd	$d = X - 145$	وسطی نقطہ (Mid-Point-X)	تعدد (Frequency)	کلاس وقفہ (Class Interval)
-200	-40	105 (X)	5	100-110
-180	-30	115	6	110-120
-200	-20	125	10	120-130
-150	-10	135	15	130-140
0	0	145	18	140-150
150	10	155	15	150-160
260	20	165	13	160-170
300	30	175	10	170-180
320	40	185	8	180-190
$\Sigma fX = 300$			$\Sigma f = 100$	

$$\overline{X} = A + \frac{fd}{N}$$

$$\overline{X} = 145 + \frac{300}{100} = 145 + 3$$

$$\overline{X} = 148$$

اگر آپ درج بالا جدول پر غور کریں تو دیکھیں گے کہ کالم 4 کی سبھی قدریں 10 کا اضعاف ہیں۔ 10 ہماری مثال میں کلاس کا سائز ہے۔ اگر آپ کالم 4 کی سبھی قدروں کو 10 سے تقسیم کر دیں گے تو آپ کے لیے تعدد (f) سے ضرب ہونے والا عدد اور چھوٹا ہو جائے گا۔ اس طرح اگر ہم d کو فرض کریں کہ:

$$d = \frac{X - A}{i}$$

جہاں i کلاس سائز ہے۔ تو اس صورت میں ہم اوسط درج ذیل فارمولا سے اخذ کر سکتے ہیں:

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma fd}{N} \times i$$

آیئے درج بالا مثال کا اوسط اس طریقے سے اخذ کریں۔ 145 کو مفروضہ اوسط (A) فرض کریں اور کلاس سائز 10 ہے۔

fd	$d = \frac{X - 145}{10}$	وسطی نقطہ (X)	تعدد	کلاس وقفہ
-20	-4	105	5	100-110
-18	-3	115	6	110-120
-20	-2	125	10	120-130
-15	-1	135	15	130-140
0	0	145	18	140-150
15	1	155	15	150-160
26	2	165	13	160-170
30	3	175	10	170-180
32	4	185	8	180-190
$\Sigma fd = 30$			$\Sigma f = 100$	

درج بالا فارمولا کا استعمال کرتے ہوئے اوسط ہو گا:

$$\overline{X} = A = \frac{\Sigma fd}{N} \times i$$

$$\overline{X} = 145 + \frac{30}{100} \times 100 = 145 + 3$$

$$\overline{X} = 148$$

5. حسابی اوسط کی ریاضیاتی خصوصیات (Mathematical Properties of Mean)

1. حسابی اوسط سے تمام مشاہدات کے انحراف (Deviation) کا جوڑ ہمیشہ صفر ہوتا ہے۔ یعنی:

$$\Sigma(X - \overline{X}) = 0$$

مثال کے طور پر نمبرات 10, 20, 30, 40, 50 کا اوسط 30 ہے۔ اوسط سے ان کا انحراف ہو گا:

2. دیگر مرکزی رجحان کے پیمانوں کے مقابلے اوسط سے انحراف کے مربع کا جوڑ سب سے کم ہوتا ہے۔ درج ذیل مثال دیکھیں:

X	$(X - \overline{X})$	$(X - \overline{X})^2$
1	-2	4
2	-1	1
3	0	0
4	1	1
5	2	4
$\Sigma X = 150$	$\Sigma(X - \overline{X}) = 0$	$\Sigma(X - \overline{X}) = 10$

آپ اوسط 3 کے علاوہ کسی بھی قدر سے انحراف لیں۔ ان کے مربع کا جوڑ 10 سے زیادہ ہو گا۔

3. اگر ہمارے پاس دو گروپس کا اوسط ہو تو ہم ان دونوں گروپس کا مشترکہ اوسط درج ذیل فارمولا سے اخذ کر سکتے ہیں:

$$X_{12} = \frac{N_1 X_1 + N_2 X_2}{N_1 + N_2}$$

جہاں، X_{12} مشترکہ اوسط ہے، X_1 گروپ 1 کا اوسط ہے، X_2 گروپ 2 کا اوسط ہے، N گروپ 1 کے مشاہدات کی تعداد ہے، N_2 گروپ 2 کے مشاہدات کی تعداد ہے۔ مثال کے طور پر اگر ایک گروپ کا اوسط 10 اور مشاہدات کی تعداد 40، دوسرے گروپ کا اوسط 15 اور مشاہدات کی تعداد 10 ہو تو دونوں گروپ کا مشترکہ اوسط ہو گا:

$$X_{12} = \frac{40 \times 10 + 15 \times 10}{20 + 10} = \frac{350}{50} = 11$$

6. حسابی اوسط کی خوبیاں و خامیاں

درج بالا میں ہم نے اچھے مرکزی رجحان کی جو 7 خصوصیات ذکر کیں ان میں سے زیادہ تر خصوصیات اوسط میں پائی جاتی ہیں۔ یہ واحد ایسا مرکزی رجحان ہے جس میں اتنی زیادہ خصوصیات پائی جاتی ہیں۔ لیکن اس کی خامی یہ ہے کہ یہ انتہائی قدروں سے متاثر ہوتا ہے۔ اگر ڈیٹا کی توزیع بہت اسکیو (Skew) ہو تو حسابی اوسط نہ درمیانی قدر ہوتی ہے اور نہ سب سے زیادہ واقع ہونے والی قدر ہوتی ہے۔ ایسی صورت میں یہ مرکزی رجحان کا مناسب پیمانہ نہیں ہوتا۔ ایسی توزیع جس میں ڈیٹا مشاہدات ایک طرف دوسری طرف کی نسبت زیادہ مرتکز ہوں اسکیو توزیع

کہلاتی ہے۔

3.4 وسیط (Median)

وسیط مرکزی رجحان کا ایسا پیمانہ ہے جو ڈیٹا سیٹ کی درمیانی قدر کی نمائندگی کرتا ہے جب اقدار کو صعودی یا نزولی ترتیب میں ترتیب دیا جاتا ہے۔ یہ اعداد و شمار کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہے، 50% اس کے نیچے اور 50% اوپر۔ سادہ الفاظ میں، میڈین وہ قدر ہے جو ترتیب شدہ ڈیٹا سیٹ کے بالکل بیچ میں ہوتی ہے۔ اس کی تعریف ایسے نمبر سے کی جاسکتی ہے جس کے آگے اور پیچھے یکساں مقدار میں مشاہدات ہوتے ہیں۔ جہاں حسابی اوسط تمام مشاہدات پر مبنی ہوتا ہے وسیط پوزیشنل (مقامی) اوسط ہے۔ مثال کے طور پر اگر پانچ افراد کی آمدنی 10000، 15000، 18000، 20000، اور 25000 ہو تو وسیط 18000 ہو گا۔ اس کے ارد گرد کی کسی مشاہدے کی قدر بدلنے پر وسیط پر فرق نہیں پڑے گا۔ اس کے برعکس حسابی اوسط مشاہدات کی قدر بدلنے پر بدل جاتا ہے۔

3.4.1 وسیط کا حساب (Calculation of Arithmetic Mean)

1. خام ڈیٹا سے وسیط

وسیط کا حساب کرنے کے لیے مشاہدات کو پہلے گھٹتی یا بڑھتی ترتیب میں رکھیں۔ درمیانی قدر وسیط ہو گی۔ اگر مشاہدات کی تعداد طاق عدد میں ہو تو وسیط کے لیے درج ذیل فارمولا استعمال کریں:

$$Md = \frac{N+1}{2}\text{th item}$$

مثال 3.6: 23, 19, 26, 11, 7, 31, 40, 20, 52 کا وسیط اخذ کریں:

حل:

مشاہدات کو بڑھتی ترتیب میں رکھنے پر: 7, 11, 19, 20, 23, 26, 31, 40, 52

مشاہدات کی تعداد طاق عدد میں ہے ($N=9$)۔ وسیط اس کی درمیانی قدر ہو گی

$\frac{N+1}{2}$ واں آئٹم چونکہ وسیط ہو گا۔ لہذا: $\frac{9+1}{2}th = 5^{th}$۔ یعنی پانچواں آئٹم وسیط ہو گا۔ ڈیٹا میں یہ 23 ہے۔ لہذا وسیط 23 ہو گا۔

اگر مشاہدات کی تعداد جفت میں ہو تو وسیط کے لیے درمیانہ دو قدروں کا اوسط اخذ کریں۔ مثال کے طور پر 12, 18, 14, 20, 25, 13, 27, 9 کا وسیط اخذ کرنے لیے لیے انہیں گھٹتی یا بڑھتی ترتیب میں رکھیں: 9, 12, 13, 14, 18, 20, 25, 27۔

$$\frac{N+1}{2}\text{th item} = \frac{8+1}{2}\text{item} = 4.5 \text{ item}$$

4.5 ویں مشاہدے کی قدر اخذ کرنے کے لیے چوتھے اور پانچویں مشاہدے کی قدروں کا اوسط اخذ کریں:

$$\frac{14+18}{2} = 16$$

$$Md = 16$$

اس کو ایسے بھی کہہ سکتے ہیں کہ جفت مشاہدات کی صورت میں آپ $\frac{N}{2}$th اور $(\frac{N}{2}+1)$th آئٹم کا اوسط لیں گے۔

$$\frac{N}{2}th\ item = 14, \left(\frac{N}{2}+1\right) th\ item = 18$$

$$Md = \frac{14+18}{2} = 16$$

مثال 3.7: درج ذیل سے وسیط اخذ کریں۔

7	3	5	8	5	4	7	5	7	3	7
3	10	4	3	5	7	4	10	9	3	6
6	10	8	5	10	7	8	7	7	8	4

حل:

کل مشاہدات 33 ہیں۔ مشاہدات کو گھٹتی یا بڑھتی ترتیب میں رکھنے پر $\frac{33+1}{2} = 17$ واں آئٹم وسیط ہو گا:

3	3	3	4	4	4	4	5	5
5	6	6	7	7	7	7	**7**	7
8	8	8	8	9	10	10	10	10

17 واں آئٹم 7 ہے۔ لہذا وسیط 7 ہو گا۔

2. توزیع تعدد سے وسیط کا حساب

ہم درج بالا ڈیٹا کو توزیع تعدد کی صورت میں بھی پیش کر سکتے ہیں۔ اسے ذیل میں کیا گیا ہے۔

X	3	4	5	6	7	8	9	10
f	5	4	5	2	8	4	1	4

وسیط اخذ کرنے کے لیے اسے تراکمی تعدد کی صورت میں لکھیں:

X	f	تراکمی تعدد
3	5	5
4	4	9
5	5	14
6	2	16
7	8	24
8	4	28
9	1	29
10	4	33

وسیط وہ قدر ہو گی جس کی تراکمی تعدد مجموعی تعدد صرف اس سے زیادہ یا اس کے برابر ہے:

چونکہ کل مشاہدات 33 ہیں، لہذا $\frac{33+1}{2} = 17$ واں آئٹم وسیط ہو گا۔ وسیط وہ قدر ہو گی جس کی تراکمی تعدد 17 کے مساوی یا اس سے زیادہ ہو۔ تراکمی تعدد کے کالم میں دیکھیں۔ جدول میں 17 سے بڑی تراکمی تعدد 24 ہے۔ اس کے مقابل X کی قدر وسیط ہو گی۔ اس طرح وسیط 7 ہو گا۔

3. متصل توزیع تعدد میں وسیط کا حساب

اگر اعداد و شمار گروپ بندی کی صورت میں دیے گئے ہوں تو سب سے پہلا کام اس درجے یا گروپ کا تعین کرنا ہے جس میں وسیط ہو گا۔ اس کے لیے کل تعداد (N) کو دو سے تقسیم کریں۔ $N/2$ سے بڑی تراکمی تعدد کو دیکھیں۔ جس کلاس میں ہو گا وہ وسیط کی کلاس ہو گی۔ اس کے بعد درج ذیل فارمولا کی مدد سے وسیط کا حساب کریں:

$$Md = L + \frac{N/2 - cf}{f} \times i$$

جہاں، L وسیط کلاس کی نچلی حد ہے، N کل مشاہدات کی تعداد ہے، cf وسیط کلاس سے پچھلی کلاس کا تراکمی تعدد ہے، f وسیط کلاس کی تعدد ہے اور i کلاس وقفہ یا کلاس کا سائز ہے۔

مثال 3.8: درج ذیل اعداد و شمار سے وسیط اخذ کریں۔

کلاس وقفہ	100-110	110-120	120-130	130-140	140-150	150-160	160-170	170-180	180-190
تعدد	5	6	10	15	18	15	13	10	8

حل:

کلاس وقفہ	تعدد	تراکمی تعدد
100-110	5	5
110-120	6	11
120-130	10	21
130-140	15	36
140-150	18	54
150-160	15	69
160-170	13	82
170-180	10	92
180-190	8	100

کل 100 مشاہدات ہیں لہذا ان کا نصف $(N/2)$ 50 ہو گا۔ 50 سے بڑی تراکمی تعدد 54 ہے۔ 54 کے مقابل کلاس 140-150 ہے۔ لہذا کلاس 140-150 وسیط کلاس ہے یعنی وسیط اس کلاس میں ہو گا۔

اس کلاس کی نچلی حد 140 ہے، اس کلاس کا وقفہ 10 ہے، اس کلاس کی تعدد 18 ہے اور اس سے پہلی کلاس کی تراکمی تعدد 36 ہے۔ لہذا وسیط ہو گا:

$$Md = L + \frac{N/2 - cf}{f} \times i$$

$$Md = 140 + \frac{50 - 36}{18} \times 10 = 147.78$$

لہذ وسیط 147.78 ہو گا۔

4. وسیط کی خوبیاں اور خامیاں

بعض پہلوؤں سے وسیط حسابی اوسط کے مقابلے بہتر ہے۔ مثال کے طور پر، یہ اوپن اینڈ توزیع[1] میں خاص طور پر کارآمد ہے۔ پھر اس پر انتہائی قدروں کی موجودگی کا اثر نہیں پڑتا ہے۔ درحقیقت، جب اعداد و شمار میں انتہائی قدریں موجود ہوتی ہیں، تو وسیط کو مرکزی رجحان کا زیادہ بہتر پیمانہ تسلیم کیا جاتا ہے۔

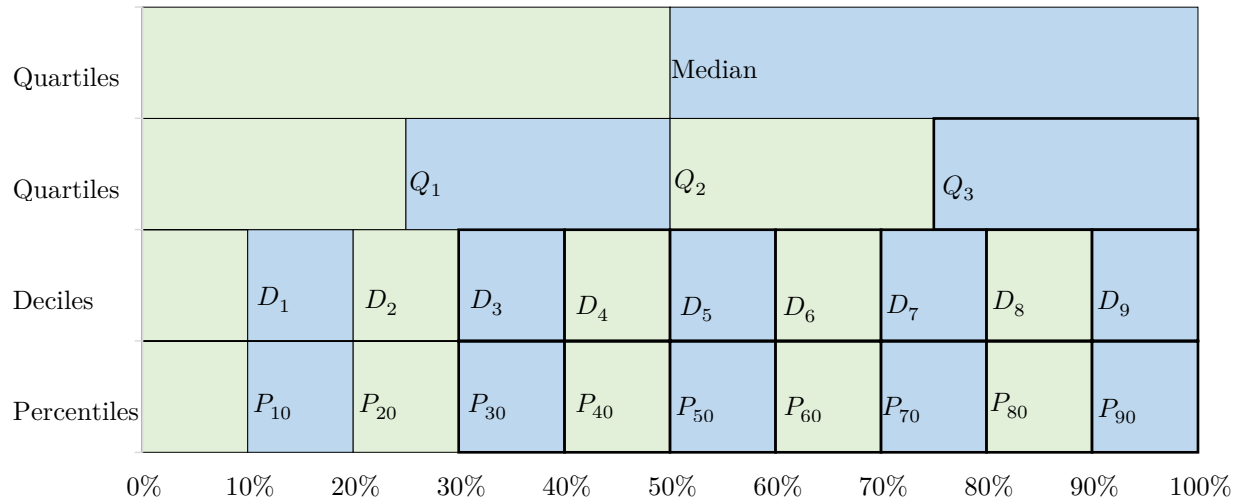
وسیط سے انحراف کا حاصل جمع (منفی نشان کو نظر انداز کرتے ہوئے) سب سے کم ہوتا ہے۔ یعنی وسیط سے انحراف کی مطلق قدروں کا جوڑ سب سے کم ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر 1، 4، 8، 10، 12 کا وسیط 8 ہے۔ تمام مشاہدات کا 8 سے مطلق انحراف ہو گا: 6، 3، 1، 3 اور 7۔ اس طرح ان کا جمع 20 ہو گا۔ کسی دوسرے نمبر سے یہ انحراف اور کم نہیں ہو گا۔ لہذا، ایسی صورتوں میں جہاں مطلق انحراف کو کم کرنا مقصد ہوتا ہے وہاں حسابی اوسط کے مقابلے وسیط کو فوقیت دی جاتی ہے۔ وسیط کو معیاری ڈیٹا کے ساتھ بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔

[1] اوپن اینڈ توزیع (Open End Distribution) ایسی توزیع ہے جس میں پہلی کلاس کی ادنی حد یا آخری کلاس کی اعلی حد نہیں ہوتیں یا دونوں نہیں ہوتیں۔

وسیط کی ایک خامی یہ ہے کہ اسے مزید حساب کتاب کے لیے استعمال نہیں کیا جاسکتا۔ مثال کے طور پر دو گروپ کے الگ الگ وسیط کی صورت میں ان کا مشترکہ وسیط اخذ نہیں کیا جاسکتا۔ وسیط تمام مشاہدات پر مبنی نہیں ہوتا۔

3.4.2 متعلقہ مقامی قدریں (Related Positional Measures)

وسیط ڈیٹا کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ اس کے علاوہ دیگر اور مقامی قدریں ہیں جو ڈیٹا کو مساوی حصوں میں تقسیم کرتی ہیں۔ ربیع یا چارک (Quartile) ڈیٹا کو چار مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ دہک ڈیٹا کو 10 مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ صدک



ڈیٹا کو 100 مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ جیسے ایک نقطہ وسیط ڈیٹا کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے، تین چارک (Quartiles) ڈیٹا کو 4 حصوں میں تقسیم کریں گے۔ 9 دہک ڈیٹا کو 10 حصوں میں تقسیم کریں گے اور 99 صدک ڈیٹا کو 100 حصوں میں تقسیم کریں گے۔ درج ذیل تصویر دیکھیں۔

چارک کو Q سے دکھایا جاتا ہے، دہک کو D سے اور صدک کو P سے دکھایا جاتا ہے۔ ان پر سبسکرپٹ 1,2,3 وغیرہ اس قدر کو دکھاتی ہیں جس کا ہم حساب کرنا چاہتے ہیں۔ مثال کے طور پر Q_1 پہلا چارک ہو گا، Q_2 دوسرا چارک ہو گا، Q_3 تیسرا چارک ہو گا۔ D_1 پہلا دہک ہو گا، S_5 پانچواں دہک ہو گا۔ P_1 پہلا صدک ہو گا، P_{91} اکیاونواں صدک ہو گا وغیرہ۔ معاشیات میں دہک اور صدک کے مقابلے چارک کا زیادہ استعمال ہوتا ہے۔ نوٹ کریں کہ دوسرا چارک (Q_2) وسیط ہوتا ہے کیوں کہ اس کے دونوں جانب پچاس فیصد مشاہدات ہوتے ہیں۔ ان کی قدر اخذ کرنے کا طریقہ وسیط کی ہی طرح ہے۔

1. چارک کا حساب

خام ڈیٹا کی صورت میں Q_1, Q_2 اور Q_3 اخذ کرنے کے لیے:

$$Q_1 = \frac{N+1}{4}\text{th item}$$

$$Q_2 = \frac{2(N+1)}{4}\text{th } item = \text{Median}$$

$$Q_3 = \frac{3(N+1)}{4}\text{th item}$$

مثال 3.9: درج ذیل سے Q_1, Q_2, Q_3 کا حساب کریں۔

2, 5, 7, 8, 12, 15, 20, 24, 27, 31, 33, 36, 41, 46, 50

حل:

$$Q_1 = \frac{N+1}{4}\text{th item} = \frac{15+1}{4}\text{th item} = 4\text{th item}$$

اس طرح پہلا چارک 8 ہو گا۔

$$Q_2 = \frac{2(N+1)}{4}\text{th item} = \frac{N+1}{2}\text{item} = \frac{16}{2}\text{item} = 8\text{th item}$$

دوسرا چارک یا وسیط 8 واں آئٹم یعنی 24 ہو گا۔

$$Q_3 = \frac{3(N+1)}{4}th \text{ item} = \frac{3(15+1)}{4} = 12th \text{ item}$$

تیسرا چارک 12 واں آئٹم یعنی 36 ہو گا۔

منفصل توزیع تعدد کی صورت میں ڈیٹا کو ترا کمی تعدد کا حساب کریں اور درج بالا کی ہی طرح چارک اخذ کریں۔

مثال 3.10: درج ذیل سے Q_1, Q_2, Q_3 کا حساب کریں:

10	9	8	7	6	5	4	3	X
4	1	4	8	2	5	4	5	f

حل:

X	f	ترا کمی تعدد
3	5	5
4	4	9
5	5	14
6	2	16
7	8	24
8	4	28
9	1	29
10	4	33

$$Q_1 = \frac{N+1}{4}\text{th item} = \frac{33+1}{4} = 8.5\text{th item}$$

$$Q_1 = 4$$

$$Q_2 = \frac{2(N+1)}{4}\text{th item} = \frac{2(33+1)}{4}\text{th item} = 17\text{th item}$$

$$Q_2 = 7$$

$$Q_3 = \frac{3(N+1)}{4}\text{th item} = \frac{3(33+1)}{4}\text{th item} = 25.5\text{th item}$$

$$Q_3 = 8$$

اسی طرح، آپ دہک اور صدک کو اخذ کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر:

$$D_1 = \frac{N+1}{10}\text{th item}$$

$$D_7 = \frac{7(N+1)}{10}\text{th item}$$

$$P_1 = \frac{N+1}{100}\text{th item}$$
$$P_{37} = \frac{37(N+1)}{100}\text{th item}$$

2. متصل ڈیٹا کی صورت میں حساب

متصل تراکمی تعدد کی صورت میں آیئے چارک کے ساتھ ساتھ دہک اور صدک کے حساب کا طریقہ بھی دیکھتے ہیں۔

$$Q_j = L + \frac{(jN/4 - cf)}{f} \times i \quad for\ j = 1, 2, 3$$
$$D_k = L + \frac{(kN/10 - cf)}{f} \times i \quad for\ k = 1, 2, 3, \ldots, 9$$
$$P_l = L + \frac{(lN/100 - cf)}{f} \times i \quad for\ l = 1, 2, 3, \ldots, 99$$

مثال 3.11: درج ذیل سے اعداد و شمار سے $Q_1,\ Q_3,\ D_1,\ D_7,\ D_9,\ P_{20},\ P_{95}$ اخذ کریں۔

کلاس	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120
تعدد	20	35	42	65	80	56	37	30	20	15

حل: پہلے ڈیٹا کو تراکمی توزیعِ تعدد کی صورت میں لکھیں:

کلاس	تعدد	تراکمی تعدد
20-30	20	20
30-40	35	55
40-50	42	97
50-60	65	162
60-70	80	242
70-80	56	298
80-90	37	335
90-100	30	365
100-110	20	385
110-120	15	400

$$Q_1 = \frac{N}{4}\text{th item} = \frac{400}{4} = 100\text{th item}$$

100 سے بڑا تراکمی تعدد 162 ہے۔ اس کے بالمقابل کلاس میں Q_1 ہو گا۔ لہذا:

$$Q_1 = + \frac{(N/4 - cf)}{f} \times i$$
$$Q_1 = 50 + \frac{400/4 - 97}{65} \times 10 = 50.46$$
$$Q_3 = \frac{3N}{4} th\ \text{item} = 300\text{th item}$$

300 سے بڑی تراکمی تعدد 335 ہے۔ اس کے بالمقابل کلاس 80-90 ہے۔ لہذا Q_3 اس کلاس میں ہو گا۔

$$Q_3 = L + \frac{(3\,N/4 - cf)}{f} \times i$$
$$Q_3 = 80 + \frac{3(400/4) - 335}{37} \times 10 = 80.54$$
$$D_1 = \frac{N}{10} th\ \text{item} = \frac{400}{10} = 40$$

40 سے بڑی تراکمی تعدد 55 ہے۔ اس کے بالمقابل کلاس 30-40 ہے۔ لہذا D_1 اس کلاس میں ہو گا۔

$$D_1 = L + \frac{N/10 - cf}{f} \times i$$

$$D_1 = 30 + \frac{400/10 - 20}{35} \times 10 = 35.71$$

$$D_7 = \frac{7N}{10} th \text{ item} = 7 \times \frac{400}{10} = 280th \text{ item.}$$

280 سے بڑی ترا کمی تعدد 298 ہے۔ اس کے بالمقابل کلاس 70-80 ہے۔ لہذا D_7 اس کلاس میں ہو گا۔

$$D_7 = L + \frac{(7\,N/10 - cf)}{f} \times i$$

$$Q_3 = 70 + \frac{7(400/10) - 242}{54} \times 10 = 70.70$$

اسی طرح آپ صدکوں کا بھی حساب کر سکتے ہیں۔

$$P_{20} = \frac{20N}{100} \text{item} = 20 \times \frac{400}{100} = 120th \text{ item}$$

P_{20} کلاس 50-60 میں ہو گا۔

$$P_{20} = L + \frac{20N/100 - cf}{f} \times i$$

$$P_{20} = 50 + \frac{120 - 99}{65} \times 10 = 53.23$$

$$P_{95} = \frac{95N}{100} \text{item} = 95 \times \frac{400}{100} = 380th \text{ item}$$

P_{95} کلاس 100-110 میں ہو گا۔

$$P_{97} = L + \frac{97N/100 - cf}{f} \times i$$

$$P_{20} = 100 + \frac{380 - 365}{20} \times 10 = 107.5$$

3.5 موڈ (Mode)

موڈ متغیر کی وہ قدر ہے جس کی تعدد سب سے زیادہ ہوتی ہے۔ یہ تقسیم میں اس قدر کا حوالہ دیتا ہے جو سب سے زیادہ آتی ہے۔ یہ ایک دی گئی قدر کے ارد گرد تعدد کے ارتکاز کا مرکز دکھاتا ہے۔ اس لیے جہاں مقصد سب سے زیادہ ارتکاز کے نقطہ کو جاننا ہو وہاں موڈ کو ترجیح دی جاتی ہے۔ موڈ بھی وسیط کی طرح پوزیشنل پیمان ہے۔

بہت سے حالات میں حسابی اوسط اور وسیط کے مقابلے موڈ کا استعمال بہتر ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر جب ہم سب سے عام اجرت، سب سے عام آمدنی یا سب سے عام لمبائی یا سب سے عام جوتے کے سائز کی بات کرتے ہیں تو اس سے ہم مراد موڈ لیتے ہیں۔

3.5.1 موڈ کا حساب (Calculation of Mode)

غیر درجہ بند ڈیٹا میں موڈ کے حساب کے لیے ڈیٹا کو توزیعِ تعدد میں لکھیں۔ جس عدد کی تعدد سب سے زیادہ ہو گی وہ موڈ ہو گا۔

مثال 3.12: درج ذیل اعداد و شمار سے موڈ اخذ کریں:

7	3	5	8	5	4	7	5	7	3	7
3	10	4	3	5	7	4	10	9	3	6
6	10	8	5	10	7	8	7	7	8	4

حل:

ڈیٹا کو توزیعِ تعدد کی صورت میں رکھنے پر:

10	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	X
4	1	4	8	2	5	4	5	f

سب سے زیادہ تعدد عدد 7 کی ہے۔ لہذا موڈ 7 ہو گا۔

گروپڈ ڈیٹا کی صورت میں موڈ اخذ کرنے کے کے لیے درج ذیل فارمولا استعمال کریں:

$$\text{Mo} = L + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

جہاں،

L موڈ کلاس کی نچلی حد ہے،

f_0 موڈل کلاس سے پچھلی کلاس کی تعدد ہے

f_1 موڈل کلاس کی تعدد ہے

f_2 موڈل کلاس سے اگلی کلاس کی تعدد ہے

i کلاس سائز ہے۔

مثال 3.13: درج ذیل اعداد و شمار سے موڈ اخذ کریں:

کلاس وقفہ	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21
تعدد	12	13	14	15	16	15	14	13	12

حل:

چونکہ سب سے زیادہ تعدد کلاس 11-13 کلاس کی ہے۔ لہذا یہ موڈل کلاس ہو گی۔

$$\text{Mode} = L + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

$$\text{Mode} = 11 + \frac{16 - 15}{2 \times 16 - 15 - 15} \times 2 = 12$$

موڈ 12 ہو گا۔

موڈ کی خوبیاں وخامیاں (Advantages and disadvantages of Mode)

وسیط کی طرح ہی موڈ پر بھی انتہائی قدروں کا اثر نہیں پڑتا۔ موڈ کا استعمال معیاری ڈیٹا کے لیے بھی کیا جاسکتا ہے۔ لیکن موڈ کو ایک واضح پیمانے کے طور پر نہیں لیا جاسکتا، کیونکہ اسے نکالنے کے مختلف طریقے ہیں جو عموماً مختلف نتائج دیتے ہیں۔

3.6 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی کے مطالعے کے بعد طلبا اس قابل ہیں کہ:

- مرکزی رجحان کی وضاحت کر سکیں۔
- اوسط (Mean)، وسیط (Median)، اور موڈ (Mode) کی تعریف بیان کر سکیں۔
- غیر مرتب (Ungrouped) اور مرتب (Grouped) ڈیٹا کے لیے اوسط، وسیط اور موڈ کا حساب لگا سکیں۔
- مرکزی رجحان کے مختلف پیمانوں کی خصوصیات وخامیوں کو سمجھ سکیں۔

3.7 فرہنگ (Glossary)

حسابی اوسط :Arithmetic Mean-تمام مشاہدات کے مجموعے اور مشاہدات کی کل تعداد کا تناسب

مرکزی رجحان :Central Tendency-قدر جو ڈیٹا کا خلاصہ کرتی ہے۔ قدر جس کے ارد گرد ڈیٹا کا کلسٹر ہوتا ہے۔

موڈ :Mode-قدر جو ڈیٹا میں سب سے زیادہ بار آتی ہے۔

وسیط :Median- قدر جو ڈیٹا دو مساوی حصوں میں تقسیم کرتی ہے۔

3.8 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

3.8.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. درج ذیل میں سے کون مرکزی رجحان کا پیمانہ نہیں ہے؟

(a) Mean (b) Median
(c) Mode (d) Range

2. 10, 20, 30 کا حسابی اوسط ہو گا:

(a) 15 (b) 20
(c) 30 (d) 25

3. ڈیٹا میں سب سے زیادہ بار آنے والی قدر کہلاتی ہے:

(a) Mean (b) Median
(c) Mode (d) Midrange

4. انتہائی قدروں کا سب سے زیادہ اثر کس پڑتا ہے؟

(a) Mean (b) Median

(c) Mode (d) درج بالا میں سے کوئی نہیں

5. گروپ ڈیٹا میں موڈ کا حساب اس فارمولا سے کیا جاتا ہے۔

(a) $L + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$ (b) $L + \frac{(N/2) - cf}{f} \times i$

(c) $\frac{\Sigma fX}{\Sigma f}$ (d) درج بالا سبھی

6. گروپ ڈیٹا میں وسیط کلاس وہ ہوتی ہے:

(a) جس کی سب سے زیادہ تعدد ہو (b) جس میں N/2واں مشاہدہ ہو

(c) پہلی کلاس (d) آخری کلاس

7. اگر 7 مشاہدات کا حسابی اوسط 6 ہو تو ان کا جمع ہو گا:

(a) 42 (b) 50

(c) 56 (d) 60

8. حسابی اوسط کا فارمولا ہے:

(a) $L + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$ (b) $L + \frac{(N/2) - cf}{f} \times i$

(c) $\frac{\Sigma fX}{\Sigma f}$ (d) درج بالا سبھی

9. وسیط کا فارمولا ہے:

(a) $L + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$ (b) $L + \frac{(N/2) - cf}{f} \times i$

(c) $\frac{\Sigma fX}{\Sigma f}$ (d) درج بالا سبھی

جوابات	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	d	b	c	a	a	b	a	c	b

3.8.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. حسابی اوسط کسے کہتے ہیں؟ اس کا حساب کیسے کیا جاتا ہے؟
2. توزیعِ تعدد میں وسیط کیسے نکالا جاتا ہے؟
3. ایک اچھے مرکزی رجحان میں کیا خصوصیات ہونی چاہیئے؟ 3 خصوصیات بیان کریں۔
4. 5 نمبروں کا اوسط 20 ہے۔ اگر ان میں سے چار نمبر 18، 22، 19 اور 21 ہو تو 5واں نمبر کیا ہو گا؟

5. گروپ ڈیٹا سے موڈ کیسے اخذ کیا جاتا ہے؟

3.8.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. حسابی اوسط، وسیط اور موڈ کی تعریف بیان کریں۔ ان کا حساب کیسے کیا جاتا ہے؟ مناسب مثال کے ساتھ وضاحت کریں۔

2. درج ذیل سے حسابی اوسط اخذ کریں۔

Class Interval	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800	800-900
Frequency	4	8	12	6	5	3	2

3. درج ذیل سے وسیط اور موڈ اخذ کریں۔

Class Interval	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800	800-900
Frequency	4	8	12	6	5	3	2

3.9 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Gupta, S. P. (2020). *Statistical methods* (44th ed.). Sultan Chand & Sons.
2. Bhardwaj, R. S. (2011). *Business statistics* (2nd ed.). Excel Books India.
3. Srivastava, T. N., & Rego, S. (2012). *Statistics for management* (2nd ed.). Tata McGraw-Hill Education.
4. Sharma, J. K. (2019). *Business statistics* (5th ed.). Vikas Publishing House.

اکائی 4: انتشار کے پیمانے

(Measures of Dispersion)

اکائی کے اجزا:

4.0 تمہید (Introduction)

4.1 مقاصد (Objectives)

4.2 انتشار (Dispersion)

4.2.1 انتشار کی پیمائش کی اہمیت (Significance of Measuring Variation)

4.2.2 انتشار کے اچھے پیمانے کی خصوصیات
(Properties of a Good Measure of Dispersion)

4.3 انتشار کے پیمانے (Measures of Dispersion)

4.3.1 رینج (Range)

4.3.2 بین ربیع رینج یا چوتھائی انحراف (Interquartile Range or Quartile Deviation)

4.3.3 اوسط انحراف (Average Deviation)

4.3.4 معیاری انحراف (Standard Deviation)

4.4 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

4.5 فرہنگ (Glossary)

4.6 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

4.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

4.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

4.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

4.7 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

4.0 تمہید (Introduction)

سابقہ اکائی میں ہم نے مرکزی رجحان کے پیمانوں کا مطالعہ کیا۔ مرکزی رجحان کے پیمانے اس قدر کو دکھاتے ہیں جس کے ارد گرد ڈیٹا کلسٹر کرتے ہیں۔ وہ ڈیٹا کی نمائندگی کرتے ہیں۔ لیکن یہ پیمانے پوری تصویر کی عکاسی نہیں کرتے۔ ان سے یہ نہیں پتا لگتا کہ ڈیٹا کا پھیلاؤ کس طرح کا ہے۔ توزیعِ تعدد کی اس خصوصیت کو عام طور پر انتشار (Dispersion) کہا جاتا ہے۔ ہر سیریز میں تمام ڈیٹا مساوی نہیں ہوتا۔ ان میں فرق یا تغیر ہوتا ہے۔ یہ فرق یا تغیر کتنا ہے اس کا حساب انتشار کے پیمانوں سے کیا جاتا ہے۔ اس اکائی میں ہم انتشار کے مختلف پیمانوں کا مطالعہ کریں گے۔

4.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے درج ذیل مقاصد ہیں:

- انتشار کے مختلف پیمانوں کی وضاحت کرنا۔
- انتشار کے پیمانوں کا حساب کرنے کے طریقوں کو بیان کرنا۔

4.2 انتشار (Dispersion)

انتشار (Dispersion) یا تغیر (Variability) کسی توزیعِ تعدد میں ڈیٹا کا پھیلاؤ ہے۔ اس کی وضاحت کے لیے درج ذیل جدول دیکھیں:

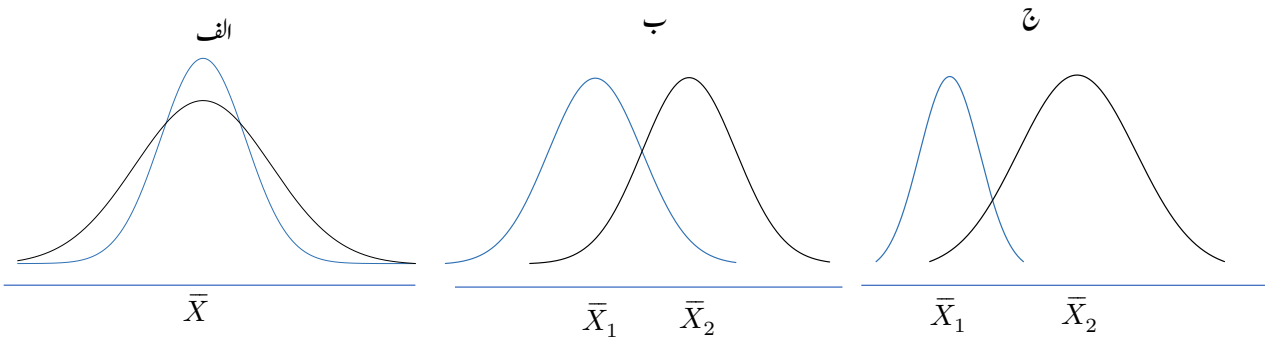
	گروپ الف	گروپ ب	گروپ ج
	50	45	10
	50	49	22
	50	50	45
	50	51	83
	50	55	90
کل (ΣX)	250	250	250
اوسط $(\overline{X})$	50	50	50

درج بالا جدول میں تین الگ الگ کلاس میں 5 طلبا کے نمبرات دیے گئے ہیں۔ تینوں گروپ میں اوسط نمبرات مساوی ہیں۔ اگر آپ صرف اوسط کو دیکھیں تو یہ تاثر مل سکتا ہے کہ تینوں گروپ ایک جیسے ہیں۔ لیکن اگر آپ غور سے دیکھیں تو آپ پائیں گے تینوں گروپ بہت مختلف ہیں۔ گروپ الف کا اوسط تمام طلبا کے نمبرات کی کامل نمائندگی کرتا ہے۔ درحقیقت تمام طلبا کے نمبرات کی نمائندگی اس اوسط سے ہو جاتی ہے۔ لہذا یہاں کوئی تغیر نہیں ہے۔ گروپ ب میں صرف ایک طالب علم کے نمبرات کی اوسط سے کامل نمائندگی ہوتی ہے۔ دوسرے طلبہ کے نمبر اوسط سے کچھ مختلف ہیں۔ یہاں ڈیٹا میں تغیر یا انتشار موجود ہے۔ حالانکہ یہ انتشار گروپ ج کے مقابلے کافی کم ہے۔

گروپ ج میں تمام طلبا کے نمبرات اوسط نمبر سے بہت مختلف ہیں۔ اوسط کسی بھی طالب علم کے نمبرات کی کامل نمائندگی نہیں کرتا۔ بلکہ نمبرات اوسط سے بہت مختلف ہیں۔ اس صورت میں اوسط سے تغیر یا انتشار بہت زیادہ ہے۔ اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ گروپ الف میں کوئی انتشار نہیں ہے۔ گروپ ب میں بہت کم انتشار ہے۔ گروپ ج میں انتشار بہت زیادہ ہے۔ بعض اوقات اہمیت صرف اس کی نہیں ہوتی کہ اوسط کیا ہے بلکہ اس سے بھی زیادہ اس کی ہوتی ہے کہ انتشار کتنا ہے یا انفرادی مشاہدات اوسط سے کتنے مختلف ہیں۔

درج ذیل تصویر میں توزیعِ تعدد کے گراف کے ذریعے اس کی مزید وضاحت کی گئی ہے۔ تصویر کے حصہ الف میں دو خطوط دو الگ الگ گروپ کی توزیعِ تعدد دکھاتا ہے۔ دونوں گروپ کا اوسط یکساں ہے لیکن دونوں کا تغیر یا انتشار مختلف ہے۔ حصہ ب میں دونوں گروپ کا اوسط مختلف ہے لیکن دونوں میں تغیر مساوی ہے۔ حصہ ج میں دونوں گروپ کا اوسط اور تغیر دونوں مختلف ہے۔

اس انتشار یا تغیر یا پھیلاؤ کی پیائش کے لیے استعمال کیے جانے والے پیمانوں کو انتشار کے پیمانے یا تغیر کے پیمانے کہا جاتا ہے۔ چار پیمانے کثرت سے استعمال ہوتے ہیں۔ وہ ہیں رینج، بین ربیع رینج، تفاوت اور معیاری انحراف۔



4.2.1 انتشار کی پیائش کی اہمیت (Significance of Measuring Variation)

انتشار کے پیمانوں کی بنیادی طور پر 4 وجوہات سے ضرورت پڑتی ہے۔

1. **اوسط کا وثوق:** انتشار کے پیمانے یہ بتاتے ہیں کہ اوسط کس حد تک ڈیٹا کی نمائندگی کرتا ہے۔ جب تغیر یا انتشار کم ہوتا ہے تو اوسط ڈیٹا کی بہتر نمائندگی کرتا ہے اس طرح کہ انفرادی ڈیٹا نقاط اوسط کے آس پاس ہوتے ہیں۔ اس صورت میں اوسط کو بہتر نمائندہ تصور کیا جاتا ہے۔ اگر انتشار زیادہ ہوتا ہے تو عموماً اوسط کو بہتر نمائندہ تصور نہیں کیا جاتا۔
2. **تغیر کا کنٹرول:** تغیر یا انتشار کی نوعیت اور وجوہات جان کر تغیر کو کنٹرول کرنا آسان ہو جاتا ہے۔ مثال کے طور پر صحتی خدمات میں درجہ حرارت، نبض کی رفتار، بلڈ پریشر وغیرہ میں تغیرات تشخیص و علاج کے لیے استعمال ہوتے ہیں۔ ان تغیرات کو قابو میں کرنے کے لیے علاج تجویز کیے جاتے ہیں۔ معاشیات میں تغیر عدم مساوات کو ماپنے کا اہم پیمانہ ہے۔ اس کا استعمال پھر عدم مساوات کو کم کرنے کے لیے کیا جاتا ہے۔
3. **دو یا دو زیادہ سیریز کے تغیر کا موازنہ:** بعض اوقات دو سیریز میں موازنے کی ضرورت ہوتی ہے تاکہ ان کی یکسانیت کا اندازہ کیا جا سکے۔

کم انتشار زیادہ یکسانیت کو دکھاتا ہے جبکہ زیادہ انتشار کم یکسانیت کو دکھاتا ہے۔

4. **دوسرے شماریاتی پیمانوں میں استعمال:** شماریات کے دیگر بہت سے پیمانے انتشار کے پیمانوں پر مبنی ہیں۔ مثال کے طور پر ارتباط، اختبار وغیرہ کے لیے انتشار کی پیمائش کی ضرورت ہوتی ہے۔

4.2.2 انتشار کے اچھے پیمانے کی خصوصیات (Properties of a Good Measure of Dispersion)

ایک اچھے پیمانے میں درج ذیل میں سے جتنی ممکن ہوں خصوصیات ہونی چاہیے۔

1. اسے سمجھنا آسان ہونا چاہیے
2. اس کا حساب آسان ہونا چاہیے
3. یہ واضح طور پر بیان ہونا چاہیے۔
4. یہ ہر مشاہدے پر مبنی ہونا چاہیے۔
5. یہ مزید الجبرا کے استعمال کے قابل ہونا چاہیے
6. اس میں نمونہ گیری استحکام ہونا چاہیے۔
7. اس پر انتہائی قدروں کا زیادہ فرق نہیں پڑنا چاہیے۔

4.3 انتشار کے پیمانے (Measures of Dispersion)

اوپر ہم نے ذکر کیا کہ ڈیٹا میں انتشار یا تغیر یا پھیلاؤ کو ماپنے کے لیے جن پیمانوں کو استعمال کیا جاتا ہے انہیں انتشار کے پیمانے کہتے ہیں۔ انتشار کے پیمانے دو قسم کے ہوتے ہیں؛ مطلق اور اضافی۔ مطلق پیمانے اسی اکائی میں ہوتے ہیں جن میں اصل ڈیٹا ہوتا ہے جیسے روپے، کلو گرام، میٹر، ٹن وغیرہ۔ ان پیمانوں کا استعمال دو ڈیٹا گروپ کے تغیر کے موازنے کے لیے تب ہی کیا جا سکتا ہے جب دونوں یکساں اکائیوں میں ہوں اور تقریباً مساوی اوسط ہو۔ اگر دونوں گروپ کا اظہار الگ الگ اکائیوں میں کیا جاتا ہے جیسے کلو گرام اور میٹر اور یا اوسط میں بہت فرق ہوتا ہے جیسے عام مزدور کی آمدنی اور بڑی فرموں کے مینجروں کی آمدنی تو ان کا استعمال موازنے کے لیے نہیں کیا جا سکتا۔ ایسی صورت میں موازنے کے لیے تغیر کے اضافی پیمانوں کا استعمال کیا جاتا ہے۔ عموماً انتشار کے اضافی پیمانے مطلق انتشار کے پیمانے اور اوسط کا تناسب ہوتا ہے۔ اسی لیے انہیں تغیر کا ضریب بھی کہا جاتا ہے۔ کیوں کہ ضریب کا مطلب خالص نمبر ہوتا ہے جو پیمائش کی اکائی سے آزاد ہوتا ہے۔ ذیل میں انتشار کے بعض پیمانوں کو بیان کیا گیا ہے۔

4.3.1 رینج (Range)

رینج تغیر کا سب سے آسان پیمانہ ہے۔ یہ ڈیٹا میں سب سے بڑی قدر اور سب سے چھوٹی قدر کا فرق ہے۔

$$\text{Range } (R) = \text{Largest Value}(L) - \text{Smallest Value}(S)$$
$$R = L - S$$

رینج کے بالمقابل اضافی پیمانہ رینج کا ضریب (Coefficient of Range) ہے۔ اس کا فارمولا درج ذیل ہے:

$$\text{Coefficient of Range} = \frac{L - S}{L + S}$$

مثال 4.1: درج ذیل سے رینج اور رینج کے ضریب کا حساب کریں:

20, 15, 30, 40, 55, 17, 35, 25, 23

حل:

$$\text{Range} = L - S$$
$$L = 55, S = 15$$
$$\text{Range} = 55 - 15 = 40$$
$$\text{Coefficient of Range} = \frac{L - S}{L + S} = \frac{55 - 15}{55 + 15} = \frac{40}{70} = 0.571$$

توزیعِ تعدد میں رینج سب سے چھوٹی کلاس کی نچلی حد اور سب سے بڑی کلاس کی اوپری حد کا فرق ہو گی۔

مثال 4.2: رینج اور رینج کے ضریب کو اخذ کریں:

کلاس	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
تعدد	5	8	17	12	9	2

حل:

$$\text{Range} = L - S$$
$$70 - 10 = 60$$
$$\text{Coefficient of Range} = \frac{L - S}{L + S} = \frac{70 - 10}{70 + 10} = \frac{60}{80} = 0.75$$

رینج کی خوبیاں وخامیاں

انتشار کے سبھی پیمانوں میں رینج سب سے آسان ہے۔ اس کا حساب بھی آسان ہے اور اسے سمجھنا بھی آسان ہے۔ لیکن رینج سبھی مشاہدات پر مبنی نہیں ہوتی۔ انتہائی قدروں کا اس پر بہت اثر پڑتا ہے۔ اوپن اینڈ ڈسٹری بیوشن کی صورت میں رینج کا حساب نہیں لگایا جا سکتا۔ یہ دو انتہائی قدروں کے بیچ ڈیٹا کی کوئی خصوصیت بیان نہیں کرتی۔

4.3.2 بین ربیع رینج یا چوتھائی انحراف (Interquartile Range or Quartile Deviation)

سابقہ اکائی میں آپ چارک یا ربیع کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ آپ نے پڑھا تھا کہ ربیع ڈیٹا کو چار مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ تین ربیع ہوتے ہیں جنہیں Q_1, Q_2, Q_3 سے دکھایا جاتا ہے۔ Q_1 ڈیٹا کے 25 فیصد کو دکھاتا ہے، Q_2 پچاس فیصد پر ڈیٹا کو تقسیم کرتا ہے جبکہ Q_3 ربیع 75 فیصد پر ہوتا ہے۔ اس طرح Q_1 اور Q_3 کے بیچ 50 فیصد ڈیٹا ہوتا ہے۔ بین ربیع انحراف پہلے ربیع اور تیسرے ربیع کا فرق ہے:

$$\text{Interquartile Range} = Q_3 - Q_1$$

بین ربیع رینج کو دو سے تقسیم کرنے پر چوتھائیہ انحراف (Quartile Deviation) حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{Quartile Deviation } (QD) = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

چوتھائیہ انحراف وہ اوسط قدر بتاتا ہے جس قدر سے وسیط سے ربیع سے مختلف ہوتے ہیں۔ چوتھائیہ انحراف انتشار کا مطلق پیمانہ ہے۔اس کے بالمقابل اضافی پیمانہ چوتھائیہ انحراف کا ضریب ہے:

$$\text{Coefficient of } QD = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

آپ سابقہ اکائی میں مختلف قسم کے ڈیٹا سے ربیع کے اخذ کا طریقہ سیکھ چکے ہیں۔ یہاں صرف ایک مثال سے ہم چوتھائیہ انحراف کی قدر اخذ کرتے ہیں۔

مثال 4.3: درج ذیل سے چوتھائیہ انحراف اور چوتھائیہ انحراف کے ضریب کا حساب کریں:

کلاس وقفہ	100-110	110-120	120-130	130-140	140-150	150-160	160-170	170-180	180-190
تعدد	5	6	10	15	18	15	13	10	8

حل:

کلاف وقفہ	تعدد	تراکمی تعدد
100-110	5	5
110-120	6	11
120-130	10	21
130-140	15	36
140-150	18	54
150-160	15	69
160-170	13	82
170-180	10	92
180-190	8	100

$$Q_1 = \frac{N}{4} = \frac{100}{4} = 25^{th} \text{ item}$$

25 سے بڑا تراکمی تعدد 36 ہے۔اس کے بالمقابل کلاس میں Q_1 ہو گا۔لہذا:

$$Q_1 = + \frac{(N/4 - cf)}{f} \times i$$

$$Q_1 = 130 + \frac{100/4 - 21}{15} \times 10 = 132.667$$

$$Q_3 = \frac{3N}{4}\text{th item} = 75\text{th item}$$

75 سے بڑی تراکمی تعدد 82 ہے۔اس کے بالمقابل کلاس 160-170 ہے۔ لہذا Q_3 اس کلاس میں ہو گا۔

$$Q_3 = L + \frac{(3\,N/4 - cf)}{f} \times i$$

$$Q_3 = 160 + \frac{3(100/4) - 69}{13} \times 10 = 164.615$$

$$QD = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{164.615 - 132.667}{2} = 15.974$$

$$\text{Coefficeint of } QD = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{164.615 - 132.667}{164.615 + 132.667} = 0.054$$

چوتھائیہ انحراف کی خوبیاں وخامیاں

بہت سی صورتوں میں یہ رینج سے بہتر ہے۔ اوپن اینڈ توزیع کی صورت میں اس کا استعمال کیا جاسکتا ہے۔ بہت زیادہ اسکیو توزیع میں اس کا استعمال کیا جاسکتا ہے۔ اس پر انتہائی قدروں کا بھی فرق نہیں پڑتا ہے۔ ان خوبیوں کے ساتھ اس کی بعض خامیاں بھی ہیں۔ یہ شروع کے اور آخر کے پچاس فیصد ڈیٹا کو نظر انداز کرتا ہے۔ یہ ڈیٹا کے ہر مشاہدے پر مبنی نہیں ہوتا۔ مزید الجبرا اس پر نہیں لگایا جاسکتا۔ نمونہ در نمونہ اس کی قدر پر اثر پڑتا ہے۔

4.3.3 اوسط انحراف (Average Deviation)

اوسط انحراف مرکزی رجحان سے ہر مشاہدے کے مطلق فرق کا اوسط ہے۔ اس کے حساب کے لیے اوسط یا وسیط سے ہر مشاہدے کا مطلق فرق لیا جاتا ہے اور پھر ان کا اوسط نکالا جاتا ہے۔ اس طرح اوسط انحراف ہوگا:

$$\text{Average Deviation } (AD_{Med}) = \frac{\Sigma|X - \text{Med}|}{N}$$

$$\text{Average Deviation } (AD_{\overline{X}}) = \frac{\Sigma|X - \overline{X}|}{N}$$

اوسط انحراف کے بالمقابل اضافی پیمانہ اوسط انحراف کا ضریب (Coefficient of Average Deviation) ہوگا۔ یہ اوسط انحراف اور مرکزی رجحان کا تناسب ہے۔

$$\text{Coefficient of } AD_{Med} = \frac{AD}{Med}$$

$$\text{Coefficient of } AD_{\overline{X}} = \frac{AD}{\overline{X}}$$

مطلق انحراف لینے کی وجہ یہ ہے کہ اگر مطلق انحراف نہ لیا جائے تو منفی انحراف اور مثبت انحراف ایک دوسرے کو ختم کر دیں گے اور انحراف کی قدر بہت کم آئے گی۔ اوسط انحراف مرکزی رجحان کے کسی بھی پیمانے سے لیا جاسکتا ہے۔ سابقہ اکائی میں ہم نے ذکر کیا کہ وسیط سے مطلق انحراف سب سے کم ہوتا ہے۔ لہٰذا، وسیط سے اوسط مطلق انحراف لینا بہتر ہے۔ لیکن چلن اوسط سے انحراف لینے کا ہے۔

مثال 4.4: درج ذیل اعداد و شمار 5 مزدوروں کی یومیہ اجرت کو دکھاتے ہیں۔ اوسط سے اور وسیط سے اوسط انحراف کا حساب کریں۔

700, 800, 900, 1000, 1200

حل:

$$\text{Mean}(\overline{X}) = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{700 + 800 + 900 + 1000 + 1200}{5} = 920$$

$$\text{Median(Med)} = \frac{N+1}{2}\text{th item} = \text{3rd item}$$

$$\text{Median} = 900$$

اجرت	وسیط سے مطلق انحراف ($\lvert X - \text{Med}\rvert$)	اوسط سے مطلق انحراف ($\lvert X - \bar{X}\rvert$)
700	200	220
800	100	120
900	0	20
1000	100	80
1200	300	280
	$\Sigma\lvert X - Med\rvert = 700$	$\Sigma\lvert X - Med\rvert = 720$

اوسط سے معیاری انحراف:

$$AD_{\bar{X}} = \frac{\Sigma|X - \bar{X}|}{N}$$

$$AD_{\bar{X}} = \frac{720}{5} = 144$$

اوسط سے معیاری انحراف کا ضریب:

$$\text{Coefficient of } AD_{\bar{X}} = \frac{AD_{\bar{X}}}{\bar{X}} = \frac{144}{920} = 0.156$$

وسیط سے معیاری انحراف:

$$AD_{\text{Med}} = \frac{\Sigma|X - \text{Med}|}{N}$$

$$AD_{\text{Med}} = \frac{700}{5} = 140$$

وسیط سے معیاری انحراف کا ضریب

$$\text{Coefficient of } AD_{\text{Med}} = \frac{AD_{\text{Med}}}{\text{Med}} = \frac{140}{900} = 0.155$$

گروپ ڈیٹا کی صورت میں اوسط انحراف کے لیے درج ذیل فارمولا استعمال کریں:

$$AD_{Med} = \frac{\Sigma f|X - \text{Med}|}{N}$$

$$AD_{\bar{X}} = \frac{\Sigma f|X - \bar{X}|}{N}$$

مثال 4.5: درج ذیل ڈیٹا سے اوسط سے اوسط معیاری انحراف کا حساب کریں:

عمر	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
کارکنان	4	12	15	13	6

حل:

عمر	وسطی نقطہ (X)	کارکنان (f)	$d = \frac{X - A}{i} = \frac{X - 45}{10}$	fd	$\lvert X - \bar{X}\rvert$	$f\lvert X - \bar{X}\rvert$
20-30	25	4	-2	-8	21	84
30-40	35	12	-1	-12	11	132

40-50	45	15	0	0	1	15
50-60	55	13	1	13	9	117
60-70	65	6	2	12	19	114
		$\Sigma f = N = 50$		Σfd =5		$\Sigma f\|X - \bar{X}\| = 462$

اوسط سے اوسط انحراف کے لیے سب سے پہلے اوسط اخذ کریں۔ ہم نے شارٹ کٹ طریقے سے اوسط کو اخذ کیا ہے۔ اس طریقے سے اوسط ہو گا:

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma fd}{N} \times i$$

$$\bar{X} = 45 + \frac{5}{50} \times 10 = 46$$

اوسط انحراف ہو گا:

$$AD = \frac{\Sigma f|X - \bar{X}|}{N} =$$

$$AD = \frac{462}{50} = 9.24$$

$$\text{Coefficient of } AD = \frac{AD}{\bar{X}} = \frac{9.24}{46} = 0.2$$

اوسط انحراف کی خوبیاں

اوسط انحراف کا حساب کرنا نسبتاً آسان ہے اور سمجھنا بھی آسان ہے۔ یہ ہر مشاہدے پر مبنی ہوتا ہے۔ انتہائی قدروں کا اس پر کم اثر پڑتا ہے۔ اس کا استعمال مختلف سیریز کے موازنے کے لیے کیا جاسکتا ہے۔

خامیاں

اس پیمانے کی سب سے بڑی خامی یہ ہے کہ یہ انحراف کی علامت کو نظر انداز کرتا ہے۔ اگر علامت کو نظر انداز نہ کیا جائے تو اوسط سے اوسط انحراف ہمیشہ صفر ہو گا۔ وسیط سے بھی اوسط انحراف صفر کے آس پاس ہو گا۔ اس کا استعمال مزید الجبرا حساب کے لیے نہیں کیا جاسکتا۔ اس کا استعمال بہت شاذ ہے۔

4.3.4 معیاری انحراف (Standard Deviation)

معیاری انحراف کا تصور کارل پیئرسن نے 1893 میں متعارف کرایا۔ اس کی اہمیت اس حقیقت میں مضمر ہے کہ یہ ان نقائص سے پاک ہے جن سے مذکور بالا طریقے متاثر ہوتے ہیں اور یہ ایک انتشار کے اچھے پیمانے کی زیادہ تر خصوصیات کو پورا کرتا ہے۔ یہ اس بات کا پیمانہ ہے کہ نمونے میں کتنا "پھیلاؤ" یا "متغیر" موجود ہے۔ اگر نمونے میں تمام اعداد ایک دوسرے کے بہت قریب ہیں، تو معیاری انحراف صفر کے قریب ہو گا۔ اگر اعداد میں پھیلاؤ زیادہ ہو تو معیاری انحراف زیادہ ہو گا۔ معیاری انحراف کو چھوٹے یونانی حرف σ (جسے سگما پڑھا جاتا ہے) سے دکھایا جاتا ہے۔ یہ اوسط سے انحراف کے مربع کے اوسط کا جذر المربع ہے۔ یعنی:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(\Sigma X - \overline{X})^2}{N}}$$

اگر ہم معیاری انحراف کا مربع کرتے ہیں تو ہمیں تفاوت (Variance) حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح:

$$\text{Variance} = \sigma^2, \quad \sigma = \sqrt{\text{Variance}}$$

معیاری انحراف توزیع کے مطلق تغیر کو ماپتا ہے۔ تغیر کی مقدار جتنی زیادہ ہوگی، معیاری انحراف اتنا ہی زیادہ ہوگا، کیونکہ قدروں کے انحراف کی وسعت ان کے اوسط سے زیادہ ہوگی۔ چھوٹے معیاری انحراف کا مطلب ہے مشاہدات میں اعلیٰ درجے کی یکسانیت ہے۔ بڑے معیاری انحراف کا مطلب اس کے بالکل برعکس ہے۔ اس طرح اگر ہمارے پاس یکساں یا تقریباً ایک جیسے اوسط والی دو یا زیادہ سیریز ہوں، تو سب سے چھوٹے معیاری انحراف والی سیریز کا اوسط سیریز کا بہتر نمائندہ ہوگا۔ اسی لیے معیاری انحراف اوسط کی نمائندگی کا اندازہ لگانے میں انتہائی مفید ہے۔

1. معیاری انحراف کا حساب: خام ڈیٹا (Calculation of Standard Deviation: Raw Data)

خام ڈیٹا کی صورت میں معیاری انحراف درج بالا فارمولا سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔ معیاری انحراف کے حساب کے لیے آپ (1) پہلے ڈیٹا کا اوسط اخذ کریں۔ (2) ہر انفرادی مشاہدہ کا اوسط سے انحراف نکالیں اور (3) ان کا مربع کریں۔ (4) تمام مربعوں کا جوڑ کریں اور (5) انہیں مشاہدات کی تعداد سے تقسیم کریں۔ درج ذیل مثال دیکھیں:

مثال 4.6: دیے گئے اعداد و شمار 10 طلبا کے نمبرات کو دکھاتے ہیں۔ ان کا معیاری انحراف اخذ کریں:

طالب علم	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
نمبرات	17	19	14	16	15	16	15	14	16	18

حل:

طالب علم	نمبرات (X)	$X - \overline{X}$	$(X - \overline{X})^2$
A	17	1	1
B	19	3	9
C	14	-2	4
D	16	0	0
E	15	-1	1
F	16	0	0
G	15	-1	1
H	14	-2	4
I	16	0	0
J	18	2	4
	$\Sigma X = 160$		$(X - \overline{X})^2 = 24$

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{160}{10} = 16$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(X-\bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{24}{10}} = 1.549$$

بارہاایساہوتاہے کہ اوسط اعشاریہ میں آتاہے۔ایسی صورت میں درج بالا فارمولاسے معیاری انحراف کاحساب مشکل ہوسکتاہے۔ مثال کے طور پر اگر حسابی اوسط 16.267 آئے تو پھر اس سے مشاہدات کا انحراف نکالنااور ان کا مربع کرنامشکل ہوسکتاہے۔ایسی صورت میں آپ درج ذیل فارمولا بھی معیاری انحراف کے لیے استعمال کرسکتے ہیں:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N} - \left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2} \; or \; \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N} - (\bar{X})^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N} - \left(\frac{\Sigma d}{N}\right)^2}, \text{where } d = X - A$$

آیئے درج بالا مثال کے معیاری انحراف کو ان دونوں فارمولا سے اخذ کرتے ہیں۔پہلے فارمولے کے لیے ہمیں ΣX^2 اور ΣX کا حساب کرناہوگا جبکہ دوسرے فارمولے کے لیے ہمیں Σd^2 اور Σd کا حساب کرناہوگا۔واضح رہے کہ ΣX^2 متغیر X کے مشاہدات کے مربع کا جوڑ ہے جبکہ $(\Sigma X)^2$ متغیر X کے مشاہدات کے جوڑ کا مربع ہوگا۔ان دونوں اصطلاحات میں فرق آپ کو واضح رہناچاہیے۔

طالب علم	نمبرات (X)	X^2	$d = X - 15$	d^2
A	17	289	2	4
B	19	361	4	16
C	14	196	-1	1
D	16	256	1	1
E	15	225	0	0
F	16	256	1	1
G	15	225	0	0
H	14	196	-1	1
I	16	256	1	1
J	18	324	3	9
	$\Sigma X = 160$	$\Sigma X^2 = 2584$	$\Sigma d = 10$	$\Sigma d^2 = 34$

درج بالا مساوات کے فارمولے سے معیاری انحراف:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N} - \left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{2584}{10} - \left(\frac{160}{10}\right)^2} = \sqrt{258.4 - 256}$$

$$\sigma = \sqrt{2.4} = 1.549$$

مساوات کے فارمولے سے معیاری انحراف:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N} - \left(\frac{\Sigma d}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{34}{10} - \left(\frac{10}{10}\right)^2} = \sqrt{3.4 - 1}$$

$$\sigma = \sqrt{2.4} = 1.549$$

2. معیاری انحراف کا حساب: گروپ ڈیٹا (Calculation of Standard Deviation: Grouped Data)

توزیعِ تعدد کی صورت میں، درج ذیل فارمولا سے معیاری انحراف کا حساب کیا جاسکتا ہے۔

ڈائرکٹ طریقہ (Direct Method)	$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f(X-\overline{X})^2}{N}}$
شارٹ کٹ طریقہ (Short-cut Method)	$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fX^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fX}{N}\right)^2}$ or $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fX^2}{N} - (\overline{X})^2}$
مفروضہ اوسط طریقہ (Assumed Mean Method)	$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2}$ where $d = X - A$
مرحلہ انحراف کا طریقہ (Step Deviation Method)	$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2} \times i$, where $d = \frac{X-A}{i}$

درج بالا فارمولوں میں مختلف اجزا کے معنی واضح رہیں۔

$\Sigma f(X-\overline{X})^2$ کا مطلب ہے اوسط سے انحراف کے مربع $(X-\overline{X})^2$ اور تعدد (f) کے حاصل ضرب کا جمع۔ اس کے لیے آپ سب سے پہلے اوسط کا حساب کریں۔ پھر تمام انفرادی مشاہدات اور اوسط کا فرق نکالیں۔ پھر ان کا مربع کریں۔ اس کے بعد ان کے تعدد سے ضرب دیں اور پھر ان کو جوڑ دیں۔

ΣfX^2 کا مطلب ہے کہ X متغیر کے مشاہدات کے مربع اور تعدد کے ضرب کا جمع۔ اس کے لیے پہلے آپ X مشاہدات کا مربع لیں۔ پھر ان کے تعدد سے ضرب دیں اور اس کے بعد ان کو جوڑ دیں۔

$(\Sigma fX)^2$ کا مطلب ہے مشاہدات اور ان کے تعدد کے ضرب کے جمع کا مربع۔ اس کے لیے پہلے مشاہدات کو ان کے تعدد سے ضرب کریں۔ پھر ان کو جوڑ دیں اور پھر ان کا مربع لیں۔

مثال 4.7: درج ذیل اعداد و شمار سے معیاری انحراف اخذ کریں۔

X	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	24-28	28-32	32-36	36-40
f	3	7	11	15	25	16	10	8	5

حل: آیئے درج بالا فارمولوں کے استعمال سے معیاری انحراف اخذ کرتے ہیں۔

ڈائرکٹ طریقے سے:

کلاس	f	وسطی نقطہ (X)	fX	$X-\overline{X}$	$(X-\overline{X})^2$	$f(X-\overline{X})^2$
4-8	4	6	24	-5	256	1024
8-12	7	10	70	-1	144	1008
12-16	11	14	154	3	64	704
16-20	16	18	288	7	16	256

0	0	11	550	22	25	20-24
240	16	15	390	26	15	24-28
640	64	19	300	30	10	28-32
1152	144	23	272	34	8	32-36
1024	256	27	152	38	4	36-40
6048			**2200**		**100**	

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{N} = \frac{2200}{100} = 22$$

$$\sigma = \frac{\Sigma f(X-\bar{X})^2}{N} = \sqrt{\frac{6048}{100}} \approx 7.78$$

شارٹ کٹ طریقے سے:

fX^2	X^2	fX	وسطی نقطہ (X)	f	کلاس
144	36	24	6	4	4-8
700	100	70	10	7	8-12
2156	196	154	14	11	12-16
5184	324	288	18	16	16-20
12100	484	550	22	25	20-24
10140	676	390	26	15	24-28
9000	900	300	30	10	28-32
9248	1156	272	34	8	32-36
5776	1444	152	38	4	36-40
54448		**2200**		**100**	

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{N} = \frac{2200}{100} = 22$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fX^2}{N} - (\bar{X})^2} = \sqrt{\frac{54448}{100} - (22)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{544.48 - 484} \ = \sqrt{60.48}$$

$$\sigma \approx 7.78$$

مفروضہ اوسط طریقے سے:

مفروضہ اوسط 22 لیں۔ پھر، $d = X - A$

fd^2	d^2	fd	$d = X - 22$	f	وسطی نقطہ (X)	کلاس
1024	256	-64	-16	4	6	4-8
1008	144	-84	-12	7	10	8-12
704	64	-88	-8	11	14	12-16
256	16	-64	-4	16	18	16-20
0	0	0	0	25	22	20-24
240	16	60	4	15	26	24-28
640	64	80	8	10	30	28-32
1152	144	96	12	8	34	32-36

1024	256	64		16	4		38	36-40
6048		0						

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma \mathrm{f}d}{N}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{6048}{100} - 0} = \sqrt{60.48}$$

$$\sigma \approx 7.78$$

مرحلہ انحراف کے طریقے سے:

مفروضہ اوسط22فرض کریں۔کلاس چوڑائی4۔لہذا:

$$d = \frac{X - A}{i}$$

fd^2	d^2	fd	$d = (x - 22)/4$	f	X	کلاس
64	16	-16	-4	4	6	4-8
63	9	-21	-3	7	10	8-12
44	4	-22	-2	11	14	12-16
16	1	-16	-1	16	18	16-20
0	0	0	0	25	22	20-24
15	1	15	1	15	26	24-28
40	4	20	2	10	30	28-32
72	9	24	3	8	34	32-36
64	16	16	4	4	38	36-40
378		0				

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma \mathrm{f}d}{N}\right)^2} \times i$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{378}{100} - 0} \times 4$$

$$\sigma = 4\sqrt{3.78} = 4(1.944)$$

$$\sigma \approx 7.78$$

مثال 4.8: درج ذیل اعداد و شمار سے معیاری انحراف کا حساب کریں:

کلاس	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
تعداد	2	5	7	12	8	4	2

حل:

fX^2	X^2	fX	X	f	کلاس
50	25	10	5	2	0-10
1125	225	75	15	5	10-20

4375	625	175	25	7	20-30
14700	1225	420	35	12	30-40
16200	2025	360	45	8	40-50
12100	3025	220	55	4	50-60
8450	4225	130	65	2	60-70
$\Sigma fX^2 = 57000$		$\Sigma fX = 1390$		$\Sigma f = 40$	

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fX^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fX}{N}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{57000}{40} - \left(\frac{1390}{40}\right)^2} = 14.746$$

مثال 4.9: درج ذیل اعداد و شمار سے معیاری انحراف اخذ کریں:

Class	100-110	110-120	120-130	130-140	140-150	150-160	160-170	170-180	180-190
f	8	11	14	16	18	12	9	7	5

حل: فرض کریں:

$$d = \frac{X = 145}{10}$$

Class	f	X	d	fd	d^2	fd^2
100-110	8	105	-4	-32	16	128
110-120	11	115	-3	-33	9	99
120-130	14	125	-2	-28	4	56
130-140	16	135	-1	-16	1	16
140-150	18	145	0	0	0	0
150-160	12	155	1	12	1	12
160-170	9	165	2	18	4	36
170-180	7	175	3	21	9	63
180-190	5	185	4	20	16	80
	100			$\Sigma fd = -38$		$\Sigma fd^2 = 490$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma \mathrm{f}d}{N}\right)^2} \times i$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{490}{100} - \left(-\frac{38}{100}\right)^2} \times 10$$

$$\sigma = 21.807$$

3. تغیر کا ضریب (Coefficient of Variation)

معیاری انحراف انتشار کا مطلق پیمانہ ہے۔ اس کے بالمقابل اضافی پیمانہ تغیر کا ضریب جو معیاری انحراف اور اوسط کا تناسب ہے۔

$$\text{Coefficient of Variaton } (CV) = \frac{\sigma}{\overline{X}}$$

مثال 4.10: ایک سیریز کا معیاری انحراف 5 ہے۔ اس کا اوسط 8 ہے۔ سیریز کا تفاوت اور تغیر کے ضریب کا حساب کریں۔

حل:

$$\text{Variance} = \sigma^2$$
$$\sigma^2 = 5^2 = 25$$
$$CV = \frac{\sigma}{\overline{X}}$$
$$CV = \frac{5}{8} = 0.625$$

4. معیاری انحراف کی خوبیاں وخامیاں

خوبیاں: یہ تمام مشاہدات پر مبنی ہوتا ہے۔ اس کا مزید حساب میں استعمال کیا جاسکتا ہے۔ یہ نمونہ در نمونہ نسبتاً کم تغیر دکھاتا ہے۔ دو یا دو سے زیادہ معیاری انحراف کا مشترکہ معیاری انحراف کا حساب کرنا ممکن ہے۔ انتشار کے دیگر پیمانوں میں ایسا نہیں کیا جاسکتا۔ دو یا زائد گروپ کے تغیر کے موازنے کے لیے تغیر کا ضریب بہتر پیمانہ تصور کیا جاتا ہے۔ یہ پیمانہ اوسط اور معیاری انحراف پر مبنی ہوتا ہے۔ معیاری انحراف کا شماریات کے دیگر تصورات میں کثرت سے استعمال ہوتا ہے۔

حدود: انتشار کے دیگر پیمانوں کے مقابلے اس کا حساب کرنا قدرے مشکل ہے۔ اس پیمانے میں انتہائی قدروں کو زیادہ اہمیت حاصل ہوتی ہے ان قدروں کے مقابلے جو اوسط کے قریب ہوتی ہیں۔ اس کی وجہ قدروں کا مربع کرنا ہے۔ مثال کے طور پر دو عدد ہیں۔ ایک کا اوسط سے انحراف 2 ہے اور دوسرے کا 8 ہے۔ یعنی ان دونوں انحراف کا تناسب 1:4 ہے۔ لیکن ان کے مربع یعنی 4 اور 64 کا تناسب 1:16 ہے۔

4.4 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی کے مطالعے کے بعد طلبا اس قابل ہیں کہ:

- انتشار کے مختلف پیمانوں کی وضاحت کر سکیں۔
- انتشار کے پیمانوں کا حساب کرنے کے طریقوں کو بیان کر سکیں۔

4.5 فرہنگ (Glossary)

رینج :Range-سب سے بڑی قدر اور سب سے چھوٹی قدر کا فرق۔

معیاری انحراف :Standard Deviation-اوسط سے انحراف کے مربع کے جمع کا جذر المربع۔

4.6 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

4.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. درج ذیل میں انتشار کا آسان ترین پیمانہ کون سا ہے؟

(a) تفاوت (b) رینج

(c) اوسط انحراف (d) معیاری انحراف

2. درج ذیل میں سے کون سا پیمانہ تمام مشاہدات پر مبنی ہوتا ہے؟

(a) رینج (b) بین ربیع رینج

(c) اوسط انحراف (d) معیاری انحراف

3. تفاوت کا جذر المربع کہلاتا ہے:

(a) Mean (b) Mode

(c) Standard Deviation (d) Coefficient of Variation

4. درج ذیل میں انتشار کا اضافی پیمانہ کون سا ہے؟

(a) معیاری انحراف (b) اوسط انحراف

(c) رینج (d) تغیر کا ضریب

5. درج ذیل میں معیاری انحراف کے حساب کے لیے درست فارمولا ہے:

(a) $\sqrt{\frac{\Sigma f(X-\bar{X})^2}{N}}$ (b) $\sqrt{\frac{\Sigma fX^2}{N}-\left(\frac{fX}{N}\right)^2}$

(c) $\sqrt{\left(\frac{fX}{N}\right)^2-\frac{\Sigma fX^2}{N}}$ (d) صرف (a) اور (b)

6. اگر دو ڈیٹا سیٹ کی اکائی الگ ہوں تو ان کے انتشار کے موازنے کے لیے کون سا پیمانہ مناسب ہو گا؟

(a) اوسط (b) تفاوت

(c) معیاری انحراف (d) تغیر کا ضریب

7. رینج کے ضریب کا فارمولا ہے:

(a) $\frac{L-S}{L+S}$ (b) $\frac{L}{S}$

(c) $L \times S$ (d) $\frac{L+S}{L-S} \times \bar{X}$

8. درج ذیل میں کون سا پیمانہ درمیانے 50 فیصد مشاہدات پر مبنی ہے؟

(a) ربیع انحراف (b) معیاری انحراف

(c) اوسط انحراف (d) رینج

9. اگر تفاوت 25 ہو تو معیاری انحراف ہو گا:

(a) 5 (b) 25

(c) 50 (d) 625

10. اس اوسط سے تمام انحراف کا جوڑ ہمیشہ صفر ہوتا ہے:

(a) حسابی اوسط (b) وسیط

(c) موڈ (d) صرف (a) اور (b)

4.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. معیاری انحراف کیا ہے؟ یہ انتشار کا بہتر پیمانہ کیوں ہے؟
2. انتشار کے مطلق پیمانوں اور اضافی پیمانوں میں کیا فرق ہے؟ مثال سے بیان کریں۔
3. مشاہدات 4, 8, 6, 10, 12 سے معیاری انحراف کا حساب کریں۔
4. اوسط انحراف کیا ہے؟ یہ معیاری انحراف سے کیسے مختلف ہے؟
5. مشاہدات 12, 18, 23, 35, 40 سے رینج اور رینج کا ضریب اخذ کریں۔

4.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. دس طلبا نے نمبرات حاصل کیے: 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 60, 85, 90۔ اوسط، اوسط انحراف اور معیاری انحراف کا حساب کریں۔
2. درج ذیل سے تغیر کا ضریب کا حساب کریں۔

Class Interval	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
Frequency	1	2	3	4	5	4	1

3. ربیع انحراف اور بین ربیع انحراف کی وضاحت کریں۔ مشاہدات: 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50 سے Q_1، Q_2، Q_3 اور ربیع انحراف کا حساب کریں۔

4.7 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Gupta, S. P. (2020). *Statistical methods* (44th ed.). Sultan Chand & Sons.
2. Bhardwaj, R. S. (2011). *Business statistics* (2nd ed.). Excel Books India.
3. Srivastava, T. N., & Rego, S. (2012). *Statistics for management* (2nd ed.). Tata McGraw-Hill Education.
4. Sharma, J. K. (2019). *Business statistics* (5th ed.). Vikas Publishing House.

بلاک II: بنیادی نظریہ احتمال

اکائی 5: بنیادی احتمال

(Basic Probability)

اکائی کے اجزا:

5.0 تمہید (Introduction)

5.1 مقاصد (Objectives)

5.2 کچھ اہم اصطلاحات اور تصورات (Some Important Terms and Concepts)

5.3 احتمال کی تعریف (Definition of Probability)

5.4 احتمال کے قوانین (Probability Laws)

5.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

5.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

5.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

5.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

5.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

5.0 تمہید (Introduction)

اکثر ہم ایسے جملے کہتے اور سنتے رہتے ہیں: کل بارش ہو سکتی ہے۔ ٹیم A کے میچ جیتنے کے بہت زیادہ امکانات ہیں۔ ایسا نہیں لگتا کہ جناب X صدر بنیں گے۔ جناب Y شاید جناب Z سے ملے تھے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ان تمام بیانات میں عدمِ تیقن کا عنصر شامل ہے۔ مثال کے طور پر پہلے جملے میں ہمیں یقین نہیں ہے کہ کل بارش ہو گی۔ اسی طرح آخری جملے میں، ہم بالکل یقین کے ساتھ نہیں کہہ سکتے کہ جناب Y نے جناب Z سے ملاقات کی یا نہیں۔ کوئی بھی بیان، جس میں کسی واقعے کے وقوع پذیر ہونے کے بارے میں عدم تیقن کا عنصر موجود ہو، اسے احتمالی بیان (Probability Statement) یا احتمالی جملہ کہتے ہیں۔ اس طرح، مندرجہ بالا تمام بیانات احتمالی بیانات ہیں۔

اب اگر کوئی پہلے احتمالی بیان کے سلسلے میں پوچھتا ہے کہ "کل بارش ہونے کا کتنا امکان ہے؟" اس کا جواب یہ ہو سکتا ہے کہ کل

بارش ہونے کے 80 فیصد امکانات ہیں۔ پہلے جملے اور اس جملے میں فرق پر غور کریں۔ اس جملے میں ہم تیقن اور عدم تیقن کی ڈگری بھی بیان کر رہے ہیں یعنی ہمیں بارش ہونے کا 80 فیصد یقین ہے اور بارش نہ ہونے کا یقین 20 فیصد ہے۔ کسی واقعے کے ہونے کا آپ کو یقین 0 فیصد سے 100 فیصد تک ہو سکتا ہے۔ اسی طرح کسی واقعے کے نہ ہونے کا یقین بھی آپ کو 0 فیصد سے 100 فیصد تک ہو سکتا ہے۔ اگر کسی واقعے کے وقوع پذیر ہونے کے بارے میں آپ کو کامل یقین ہے، تو اس کے ہونے کا 100% موقع یا یقین اور 0% غیر موقع یا غیر یقینی صورت حال ہو گی۔ تاہم، ہمیں یہاں نوٹ کرنا چاہیے کہ واقعے کے 100% وقوع (لہذا، 0% غیر وقوع) اور 0% وقوع (لہذا، 100% عدم وقوع) کے دونوں بیانات میں عدم تیقن کا عنصر نہیں ہے اور اس لیے صحیح معنوں میں، احتمالی بیانات نہیں ہیں۔ کسی واقعے کے ہونے کے تیقن کی ڈگری کے اضافی پیمانے کو اس واقعے کا احتمال کہا جا سکتا ہے۔ روایتی طور پر، اس ڈگری کو 1 کے مقابلے میں ماپا جاتا ہے۔ اس طرح، کسی واقعے کے وقوع پذیر ہونے کے 30% امکان کا احتمال 0.3 ہو گا۔ اسی طرح کل بارش کے 75% امکان کو کل بارش کا امکان 0.75 بھی کہا جا سکتا ہے۔ لیکن ہم کسی واقعے کا احتمال کیسے حاصل کر سکتے ہیں؟ اس اکائی میں آپ اس کے بارے میں پڑھیں گے۔ اس کے علاوہ اس اکائی میں احتمال کے ضروری بنیادی تصورات و اصول متعارف کرائے گئے ہیں۔

5.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے درج ذیل مقاصد ہیں:

- احتمال کی اہم اصطلاحات کی تعریف کرنا۔
- احتمال کے اصول اور خصوصیات بیان کرنا۔
- واحد اور متعدد واقعات کے احتمال کا حساب لگانا۔
- آزاد اور غیر آزاد واقعات میں فرق کرنا۔

5.2 کچھ اہم اصطلاحات اور تصورات (Some Important Terms and Concepts)

1. سیٹ نظریے کے عناصر

نظریہ احتمال میں سیٹوں کا کثیر استعمال ہوتا ہے۔ لہذا یہاں ان کی مختصراً وضاحت کی گئی ہے۔

سیٹ: مختلف عناصر یا اشیا کا واضح طور بیان کردہ مجموعہ (Well Defined Collection) سیٹ کہلاتا ہے۔ واضح طور پر بیان کردہ کا معنی یہ ہے کہ اسے اس طرح واضح طور پر بیان کیا گیا ہو کہ اس میں ابہام یا شبہ کی کوئی گنجائش نہ ہو۔ کوئی شے مخصوص بیان کردہ سیٹ سے تعلق رکھتی ہے یا نہیں آپ واضح طور اس کا فیصلہ کر سکتے ہوں۔ مثال کے طور پر انگریزی کے حروف علت (Vowels) سیٹ ہے۔ آپ حرف k کے بارے میں بتا سکتے ہیں کہ یہ انگریزی کے حروف علت کے سیٹ سے تعلق نہیں رکھتا جبکہ حرف a انگریزی کے حروف علت کے سیٹ سے تعلق رکھتا ہے۔ ہندوستان کے 10 سب سے بڑے ماہرین معاشیات کا مجموعہ سیٹ نہیں ہو گا۔ کیوں کہ یہ مجموعہ واضح طور پر بیان کردہ

نہیں ہے۔ مختلف افراد کے لیے سب سے بڑے ماہرین معاشیات مختلف ہو سکتے ہیں۔

سیٹ میں موجود اشیا کو عام طور پر سیٹ کے عناصر یا ممبر یا اراکین کہا جاتا ہے اور ان کے بارے میں کہا جاتا ہے کہ وہ اس سیٹ سے تعلق رکھتے ہیں یا اس سیٹ میں موجود ہیں۔ سیٹ کو عموماً انگریزی کے بڑے حروف جیسے A, B, C, X, Y, Z وغیرہ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور ان کے اراکین کو انگیزی زبان کے چھوٹے حروف جیسے a, b, c, x, y, z وغیرہ سے دکھایا جاتا ہے۔ کوئی عنصر a سیٹ A کا عنصر ہو تو اسے درج ذیل طریقے سے لکھا جاتا ہے:

$$a \in A$$

اس کو ہم کہتے ہیں کہ a سیٹ A سے تعلق رکھتا ہے یا a سیٹ A میں ہے۔ اگر کوئی عنصر جیسے b سیٹ A کا عنصر نہ ہو تو اسے لکھتے ہیں:

$$b \notin A$$

اس کو پڑھتے ہیں کہ b سیٹ A میں نہیں ہے یا b سیٹ A سے تعلق نہیں رکھتا ہے۔

سیٹ کو عام طور پر دو طریقوں میں سے کسی ایک میں بیان کیا جاتا ہے: فہرستی طریقہ اور سیٹ ساز طریقہ۔ فہرستی طریقے (Roaster or Tabulation Method) میں تمام عناصر کو منجھلے قوسین میں لکھتے ہیں اور ہر عنصر کے بعد کومہ لگاتے ہیں۔ عناصر کو کسی بھی ترتیب میں لکھا جا سکتا ہے۔ مثال کے طور پر انگریزی کے حروف علت کا سیٹ ہو گا: $\{a, e, i, o, u\}$۔ 10 سے چھوٹے تین کے ضریب (Multiples) کا سیٹ ہو گا: $\{3,6,9\}$۔

سیٹ ساز شکل (Set Builder Form) میں عناصر کی وہ خاصیت بیان کی جاتی ہے جو سیٹ کے تمام عناصر میں ہوتی ہے اور دیگر عناصر میں نہیں ہوتی ہے۔ مثال کے طور سیٹ $\{a, e, i, o, u\}$ کی خاصیت یہ ہے کہ یہ انگریزی کے حروف علت ہیں۔ ان کے علاوہ کسی حرف میں یہ خاصیت نہیں ہے۔ لہذا ہم اگر اس سیٹ کو اگر V سیٹ کہیں تو اسے درج ذیل سیٹ ساز شکل میں لکھ سکتے ہیں:

$$V = \{x: x \text{ is a vowel in English alphabet}\}$$

اس کو ہم پڑھتے ہیں: تمام x کا سیٹ اس طرح کہ x انگریزی کا حرف علت ہے۔ اسی طرح، 10 سے چھوٹے 3 کے ضریب کے سیٹ X کو لکھ سکتے ہیں:

$$X = \{x: x \text{ is multiple of 3 and } x < 10\}$$

ذیل کے جدول میں فہرستی طریقے اور سیٹ ساز شکل میں سیٹوں کی کچھ مثالیں دی گئی ہیں:

فہرستی شکل	سیٹ ساز شکل
$A = \{1,3,5,7,9\}$	$A = \{a: a \text{ is natural number and } a < 10\}$
$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$	$P = \{p: p \text{ is prime number}, p < 15\}$
$D = \{M\text{onaday}, \text{Tuesday}, \text{Wednesday}, \text{Thursday}, \text{Friday}, \text{Saturday}, \text{Sunday}\}$	$D = \{d: d \text{ is a day of the week}\}$
$S = \{H, T\}$	$S = \{s: s \text{ is outcome of a toss of a coin}\}$
$N = \{(T,T), (H,T), (T,H), (H,H)\}$	$S = \{s: s \text{ is outcome of a toss of 2 coins}\}$

آفاقی سیٹ (Universal Set): آفاقی سیٹ جسے U سے ظاہر کیا جاتا ہے ایسا سیٹ ہے جس میں زیر بحث مسئلے کے تمام عناصر ہوتے ہیں۔ مثال کے طور پر ایک پانسہ پھینکنے کے نتائج زیر بحث ہوں تو ان نتائج کا آفاقی سیٹ ہو گا:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

درج بالا آفاقی سیٹ ہے کیوں کہ یہ سیٹ پانسے کے زیر بحث تمام ممکنہ نتائج کو دکھاتا ہے۔

خالی سیٹ (Empty Set or Null Set): ایسا سیٹ جس میں کوئی عنصر نہیں ہوتا خالی سیٹ کہلاتا ہے۔ مثال کے طور دو سے تقسیم ہونے والے طاق اعداد کا سیٹ خالی سیٹ ہو گا کیوں کہ کوئی بھی طاق نمبر ایسا نہیں ہے جو دو سے تقسیم ہوتا ہو۔ خالی سیٹ کو علامت $\emptyset$ یا $\{\}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ واضح رہے کہ علامت $\emptyset$ یونانی حرف φ یا ϕ نہیں ہے، بلکہ ڈینش اور نارویجین زبانوں کے حرف $\emptyset$ سے ماخوذ ہے۔

ذیلی سیٹ (Subset): اگر سیٹ A کا ہر عنصر سیٹ B کا بھی عنصر ہو تو سیٹ A کو سیٹ B کا ذیلی سیٹ کہا جاتا ہے۔ مثال کے طور درج ذیل دو سیٹ دیکھیں:

$$A = \{1, 2, 4\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سیٹ A کا ہر عنصر سیٹ B کا بھی عنصر ہے۔ لہذا سیٹ A سیٹ B کا ذیلی سیٹ ہو گا۔ اس کو درج ذیل طریقے سے لکھا جاتا ہے:

$$A \subset B$$

یعنی سیٹ A سیٹ B کا ذیلی سیٹ ہے۔

مساوی سیٹس (Equal Sets): دو سیٹس مساوی سیٹس ہوتے ہیں اگر سیٹ A کا ہر عنصر سیٹ B میں ہو اور سیٹ B کا ہر عنصر سیٹ A میں ہو۔ اسے لکھتے ہیں:

$$A = B$$

اگر دو سیٹس مساوی ہوتے ہیں تو لازمی طور پر ہو گا:

$$A \subset B \text{ and } B \subset A$$

یعنی سیٹ A سیٹ B کا ذیلی سیٹ ہو گا اور سیٹ B سیٹ A کا ذیلی سیٹ ہو گا۔

2. سیٹوں پر عمل (Operations on Set)

سیٹس کا اتحاد (Union of Sets): دو سیٹس A اور B کا اتحاد ان تمام عناصر کا سیٹ ہے جو سیٹ A یا سیٹ B یا دونوں میں ہوں۔ اسے $A \cup B$ سے دکھایا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر فرض کریں کہ $A=\{1, 3, 5, 7\}$ ہو اور $B=\{7, ,9, 11, 13\}$ ہو تو $A \cup B$ ہو گا:

$$A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$$

سیٹس کا تقاطع (Intersection of Sets): دو سیٹس A اور B کا تقاطع وہ سیٹ ہے جس میں سیٹ A اور سیٹ B کے مشترکہ عناصر ہوں۔ سیٹ A اور سیٹ B کے تقاطع کو $A \cap B$ سے دکھایا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ اور

$B=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ ہو تو $A \cap B$ ہو گا:

$$A \cap B = \{2, 4, 6\}$$

غیر مشترک سیٹس (Disjoint Sets): سیٹ A اور سیٹ B غیر مشترک سیٹ ہوں گے اگر ان میں کوئی مشترکہ عناصر نہ ہو۔ دوسرے لفظوں میں ان کا تقاطع خالی سیٹ ہو:

$$A \cap B = \emptyset$$

سیٹ کا تکملہ (Complement of Set): اگر سیٹ A آفاقی سیٹ U کا ذیلی سیٹ ہو تو A کا تکملہ U کے ان تمام عناصر کا سیٹ ہو گا جو سیٹ A میں نہیں ہیں۔ سیٹ A کے تکملہ کو A' سے دکھایا جاتا ہے۔ اگر: $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ اور $A=\{3, 4, 5, 6\}$ ہو تو سیٹ A کا تکملہ A' ہو گا:

$$A' = \{1, 2\}$$

سیٹوں کی تفریق (Difference of Sets): سیٹ A اور سیٹ B کی تفریق ان تمام عناصر کا سیٹ ہو گا جو A کے عناصر ہیں، اور B کے عناصر نہیں ہیں۔ سیٹ A اور سیٹ B کی تفریق کو A-B سے دکھاتے ہیں۔ اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ اور $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ہو تو $A - B$ ہو گا:

$$A - B = \{1, 2, 3, 4\}$$

اسی طرح $B - A$ ہو گا:

$$B - A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$$

ضربیہ (Factorial): 1 سے لے کر n تک طبعی اعداد (Natural Numbers) کا ضرب n ضربیہ کہلاتا ہے اور سے $n!$ سے دکھایا جاتا ہے۔

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \times 2 \times 1$$

مثال کے طور پر $5!$ ہو گا:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

مبادلے (Permutations): متعدد اشیا کی ایک خاص ترتیب مبادلہ کہلاتی ہے۔ مبادلے میں ترتیب کی اہمیت ہوتی ہے اس معنی میں کہ ترتیب کے بدلنے سے مبادلہ بھی بدل جاتا ہے۔ اگر n اشیا کا مبادلہ اس طرح لیا جائے کہ r اشیا کی ترتیب دی جائے تو مبادلوں کی تعداد ہو گی:

$${}^{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال کے طور پر تین حروف A, B, C سے تین حروف کے ممکنہ مبادلے 6 ہوں گے:

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

اسی طرح 4 افراد $P,\ Q,\ R,\ S$ کے دو دو کی ترتیب میں 12 مبادلے ہوں گے:

$$^4P_2 = \frac{4!}{(n-r)!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = 12$$

درج ذیل طریقے سے ان کو ترتیب دیا جاسکتا ہے:

$$PQ, PR, PS, QP, QR, QS, RP, RQ, RS, SP, SQ, SR$$

اسی طرح، 4 اعداد 1, 2, 3, 4 سے کتنے نمبر بنائے جاسکتے ہیں اگر اعداد کو دوہرایا نہ جاتا ہو؟

جواب: کل 24 اعداد بنائے جاسکتے ہیں۔ ہمارے پاس اعداد کی تعداد 4 ہے اور 4 کے جوڑے ہم بنا رہے ہیں۔ اس لیے $n = 4$ ہے اور $r = 4$ ہے۔ لہذا:

$$^4P_4 = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{0!} = 24$$

ممکن مبادلے ہوں گے:

1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431,
3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321

اجتماع (Combination): اجتماع اشیا کا ایسا انتخاب ہے جہاں ترتیب سے فرق نہیں پڑتا ہے۔ مبادلے کے برعکس، منتخب اشیا کی ترتیب کو تبدیل کرنے سے کوئی نیا مجموعہ نہیں بنتا۔

اگر n اشیا کا اجتماع اس طرح لیا جائے کہ r اشیا کی ترتیب دی جائے تو اجتماع کی تعداد ہو گی:

$$^nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

مثال 5.1: 5 دوستوں A, B, C, D, E سے کتنے طریقوں سے تین افراد کی ٹیم کا انتخاب کیا جاسکتا ہے؟

دوستوں کی تعداد $(n)=5$، ٹیم کا سائز $(r)=3$۔ کل ممکنہ اجتماع ہوں گے:

$$^5C_3 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

کل 10 ٹیمیں بنائی جاسکتی ہیں۔ ممکنہ ٹیمیں ہوں گی:

ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE

واضح رہیں کہ مبادلے میں ABC اور BAC الگ الگ مبادلے ہوتے لیکن اجتماع میں یہ ایک ہیں کیوں کہ اجتماع میں ترتیب کی اہمیت نہیں ہوتی۔

مثال 5.2: 50 نمبروں سے 3 نمبروں کی لاٹری نکالی جاتی ہے۔ کتنی ممکنہ لاٹری نکل سکتی ہیں؟

کل نمبرات $(n)=50$

نکالے گئے نمبرات $(r)=3$۔ لہذا، کل ممکنہ لاٹریاں ہو سکتی ہیں:

$$^{50}C_3 = \frac{50!}{3!\,(50-3)!} = \frac{50!}{5! \times 45!} = \frac{50 \times 49 \times 48 \times 47!}{3 \times 2 \times 1 \times 47!} = 19600$$

تصادفی تجربہ (Random Experiment): تصادفی تجربہ ایسا تجربہ یا عمل ہے جس کے نتائج کی یقین کے ساتھ پیش گوئی نہیں کی جاسکتی ہے۔ اسے ایسے بھی کہہ سکتے ہیں کہ تصادفی تجربہ ایک ایسا بامعنی عمل یا طریقۂ کار ہے جسے یکساں حالات میں ایک یا ایک سے زیادہ مرتبہ دہرایا جاسکتا ہے، اور جس کے ہر تجربے سے ایک نتیجہ حاصل ہوتا ہے، لیکن اس نتیجے کی پہلے سے یقینی طور پر پیش گوئی نہیں کی جاسکتی۔ تصادفی تجربے کی وضاحتی خصوصیات یہ ہیں:

- تجربہ کو یکساں حالات میں دہرایا جاسکتا ہے۔
- تجربے کے تمام ممکنہ نتائج پہلے سے معلوم ہوتے ہیں۔
- کسی بھی انفرادی ٹرائل کے مخصوص نتائج کی یقین کے ساتھ پیشین گوئی نہیں کی جاسکتی۔

تصادفی تجربے کی بعض مثالیں ہیں:

- ایک منصفانہ سکے کو اچھالنا اور یہ دیکھنا کہ آیا چت (H) آتا ہے یا پٹ (T)۔
- چھ طرفہ پانسے کو پھینکنا اور اوپر آنے والے نمبر کو ریکارڈ کرنا۔
- 52 تاش کے پتوں کی معیاری گڈی سے تصادفی طور ایک پتہ نکالنا۔
- پیداوار لائن سے تصادفی طور پر منتخب کردہ لائٹ بلب کی زندگی کی پیمائش کرنا۔
- تصادفی طور پر منتخب کردہ ہفتے کے دن صبح 09:00 بجے سے صبح 10:00 بجے کے درمیان بینک آنے والے صارفین کی تعداد کو ریکارڈ کرنا۔

واقعہ (Event): تجربے یا آزمائش یا مشاہدے کا نتیجہ ہے۔ سادہ واقعہ (Simple Event) تصادفی تجربے کا واحد ممکنہ نتیجہ ہے۔ یہ ایسا نتیجہ ہے جسے مزید چھوٹے واقعات میں تقسیم نہیں کیا جاسکتا۔ یہ دوسرے واقعات کا مجموعہ نہیں ہوتا۔ اس کے برعکس جب دو یا دو سے زائد واقعات ایک ساتھ واقع ہوتے ہیں تو ان کے مجموعے کو مرکب واقعہ (Compound Event) کہتے ہیں۔ واقعات کو عموماً انگریزی کے بڑے حروف جیسے $A,\ B,\ C$ سے دکھایا جاتا ہے۔

باہم ناشمول واقعات (Mutually Exclusive Events) دو ایسے واقعات ہیں جو ایک ساتھ واقع نہیں ہوسکتے۔ مثال کے طور پر سکہ اچھالنے پر یا تو چت آئے گا یا پٹ آئے گا۔ دونوں واقعات ایک ساتھ نہیں ہوسکتے۔

اجتماعی طور پر مکمل واقعات (Collectively Exhaustive Events): وہ مجموعہ جس میں تمام واقعات ہوتے ہیں۔ ان واقعات کے احتمال کا جوڑ ایک ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر ایک سکے کے اچھالنے پر یا تو چت آئے گا یا پٹ آئے گا۔ ان دونوں واقعات کا مجموعہ اجتماعی طور پر مکمل واقعات ہوں گے۔

تکملہ واقعہ: اگر کسی تصادفی تجربے کا مطلوبہ واقعہ A ہے تو A' یا A کا تکملہ تجربے کے غیر مطلوبہ نتائج ہوں گے۔ اس طرح A اور اس کا تکملہ A' باہمی طور پر ناشمول واقعات ہوں گے اور اجتماعی طور پر مکمل واقعات ہوں گے۔

یکساں طور پر ممکنہ واقعات: واقعات یکساں طور پر ممکنہ کہلاتے ہیں جب ایک واقعہ دوسرے کے مقابلے زیادہ بار نہیں ہوتا۔ مثال کے طور ایک منصفانہ سکے کے اچھالنے پر چت یا پٹ آنے کے امکانات یکساں ہیں۔ اسی طرح تاش کی گڈی سے بادشاہ یا غلام کا پتہ آنے کے امکانات یکساں ہیں۔

تمام ممکنہ نتائج کا سیٹ نمونہ فضا(Sample Space) کہلاتا ہے۔ اس طرح، تصادفی تجربے کے ضمن میں نمونہ فضا آفاقی سیٹ ہو گا۔ مثال کے طور پر سکہ اچھالنا تصادفی تجربہ ہے اور اس کا نمونہ فضا $S = \{H, T\}$ یا S={Head, Tail} ہے۔ اسی طرح ایک پانسہ پھینکنا تصادفی تجربہ ہے اور اس کا نمونہ فضا ہے: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$۔ سال 2025 میں کتنے موبائل فروخت ہوئے اس کا مشاہدہ تصادفی تجربہ ہے، اس کا نمونہ فضا ہو گا: $S = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$۔

جب ہم تصادفی تجربے کو متعدد بار دہراتے ہیں تو ہر ایک کو ہم آزمائش (Trial) کہتے ہیں۔ اس طرح آزمائش تصادفی تجربے کا واحد عمل ہے۔ اس کے نتیجے میں نمونہ فضا کا ایک نتیجہ نکلتا ہے۔

منفصل نمونہ فضا(Discrete Sample Space): ایسا نمونہ فضا جس کے عناصر محدود یا قابل شمار لامحدود ہوں منفصل نمونہ فضا کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر پانسہ پھینکنے پر نتائج کی نمونہ فضا ہو گی:

$$S = 1,2,3,4,5,6$$

نوٹ کریں کہ کل 6 نتائج ہیں اور ہر ایک کا الگ شمار کیا جا سکتا ہے۔

متصل نمونہ فضا(Continuous Sample Space): متصل نمونہ فضا ایسے نتائج پر مشتمل ہوتی ہے جو دی گئی رینج میں کوئی بھی قدر لے سکتے ہیں۔ ممکنہ قدروں کو انفرادی طور پر شمار نہیں کیا جا سکتا کیونکہ کسی بھی دو نقاط کے بیچ لامحدود قدریں ہوتی ہیں۔ مثال کے طور پر فرد کے قد کو لیں۔ اگر قد کو 150 cm اور 200 cm کے بیچ ناپا جائے

$$S = \{x: 150 \leq x \leq 200\}$$

تو فرد کا قد کچھ بھی ہو سکتا ہے۔ فرد کا قد 170 سینٹی میٹر، 170.5 سینٹی میٹر، 170.53 سینٹی میٹر، 170.538 سینٹی میٹر، وغیرہ ہو سکتا ہے۔

تابع اور غیر تابع واقعات(Independent and Dependent Events): جب تجربات اس طرح کیے جاتے ہیں کہ ایک آزمائش میں کسی واقعے کے رونما ہونے کا اس کے بعد کے تجربے کے واقعات پر کوئی اثر نہیں پڑتا ہے، تو ان واقعات کو غیر تابع واقعات کہا جاتا ہے۔ دوسرے لفظوں میں، دو یا دو سے زائد واقعات کو غیر تابع واقعات کہا جاتا ہے اگر کسی ایک واقعے کا وقوع پذیر ہونا دوسرے کے وقوع پذیر ہونے پر منحصر نہ ہو۔ ایسے واقعات جو غیر تابع نہیں ہوتے انہیں تابع واقعات کہتے ہیں۔ تابع واقعات کی صورت میں ایک واقعے کے ہونے

پر دوسرے واقعے کے ہونے کا اثر پڑتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر ہم تاش کی گڈی سے ایک پتہ نکالتے ہیں پھر اس پتے کو واپس رکھ کر ایک اور پتہ نکالتے ہیں تو یہ دونوں واقعات غیر تابع واقعات ہیں کیوں کہ پہلے کا اثر دوسرے پر نہیں پڑتا ہے۔ لیکن اس کے برعکس اگر ہم ایک پتہ نکالتے ہیں اور اسے واپس رکھے بنا دوسرا پتہ نکالتے ہیں تو دوسرا پتہ کیا ہو گا اس پر پہلے پتے کا اثر پڑے گا۔ اس طرح، دوسرے پتے کا نکالنا پہلے پتے پر منحصر ہے۔

5.3 احتمال کی تعریف (Definition of Probability)

1. احتمال کی کلاسیکی تعریف (Classical definition of Probability)

احتمال کی کلاسیکی تعریف، جسے پہلے سے معلوم احتمال (A Priori Probability) بھی کہا جاتا ہے، غیر یقینی صورت حال کو ناپنے کا ایک بنیادی اور منطقی طریقہ ہے۔ اس تعریف کے مطابق، کسی واقعے (Event) کے وقوع پذیر ہونے کا احتمال، موافق نتائج (Favourable Outcomes) کی تعداد اور کل ممکنہ نتائج (Total Possible Outcomes) کے تناسب سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح اگر کسی واقعے A کے موافق نتائج کی تعداد $n(A)$ ہو، اور کل ممکنہ نتائج کی تعداد $n(S)$ ہو، اس طرح کہ تمام ممکنہ نتائج یکساں طور پر ممکنہ ہوں اور محیط ہوں تو اس کا احتمال کہ A واقع ہو گا $P(A)$ ہو گا:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

یہ تعریف مکمل طور پر نظریاتی ہے اور تجرباتی مشاہدات پر انحصار نہیں کرتی۔ یہ تعریف اس مفروضے پر مبنی ہے کہ نمونہ فضا (Sample Space) محدود اور معلوم ہو اور تمام نتائج باہم ناشمول ہوں اور محیط ہوں۔

مثال 5.3: پانسہ ایک بار پھینکنے پر طاق عدد آنے کا کیا احتمال ہے؟

کل ممکنہ نتائج $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = 6$

موافق نتائج $= \{1, 3, 5\} = 3$

$$P(\text{Getting Odd number}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$$

مثال 5.4: یک تھیلے میں 4 سبز اور 6 سرخ گیندیں ہیں۔ تصادفی طور پر ایک گیند نکالنے پر "سبز" آنے کا احتمال کتنا ہے؟

کل ممکنہ نتائج $= 4 + 6 = 10$

موافق نتائج $= 4$

$$P(\text{Green Ball}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 40\%$$

مثال 5.5: تاش کے 52 پتوں کی ایک گڈی سے "بادشاہ" (King) نکالنے کا احتمال کیا ہے؟

کل ممکنہ نتائج $= 52$ پتے

موافق نتائج $= 4$ (بادشاہ♠، بادشاہ♥، بادشاہ♦، بادشاہ♣)

$$P(\text{King}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} = 7.69\%$$

2. احتمال کی شماریاتی یا تجرباتی تعریف (Statistical or Empirical Definition of Probability)

کلاسیکی نظریۂ احتمال اُن واضح اور متعین حالات میں زیادہ مؤثر ہوتا ہے جہاں تمام ممکنہ نتائج معلوم ہوں، جیسے مواقع کے کھیل (مثلاً، جیسے پانسے پھینکنا یا سکہ اچھالنا)۔ لیکن حقیقی زندگی میں، ہمیں اکثر ایسے مسائل کا سامنا کرنا پڑتا ہے جہاں یہ نقطہ نظر بہت اچھی طرح سے فٹ نہیں ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر، ہم اس کا کیسے پتا لگائیں کہ:

- اگلے سال کے اندر 45 سالہ آدمی کے مرنے کے کیا امکانات ہیں؟
- اس بات کا کیا امکان ہے کہ شہر کا کوئی صارف اگلے مہینے کوئی مخصوص مصنوع خریدے گا؟
- اس بات کا کیا امکان ہے کہ مینوفیکچرنگ کا عمل ناقص چیز پیدا کرے گا؟

ان مثالوں میں، ہم آسانی سے تمام ممکنہ نتائج کی فہرست نہیں بنا سکتے یا یہ فرض نہیں کر سکتے کہ تمام نتائج یکساں طور پر ممکنہ ہیں۔ پہلی مثال لیں: 45 سالہ فرد یا تو جیے گا یا مر جائے گا۔ یہ دو نتائج ہیں۔ لیکن ان دونوں نتائج کے امکانات ایک جیسے نہیں ہیں۔ اس کے امکانات زیادہ ہیں کہ وہ شخص زندہ رہے گا۔ لیکن کتنے زیادہ اس کے جینے کے امکانات ہیں؟ اس کے جواب کے لیے، ہمیں حقیقی دنیا کے ڈیٹا کی ضرورت ہے۔ ایسے مواقع پر احتمال کا نسبتی تعدد یا تجرباتی نقطہ نظر استعمال ہوتا ہے۔ یہ نقطہ نظر مشاہدات اور بار بار کیے گئے تجربات پر مبنی ہے۔ اس کے عمل کو سمجھنے کے لیے فرض کریں کہ آپ اس کا امکان جاننا چاہتے ہیں کہ سکے کے اچھالنے پر پٹ آئے۔ آپ سکے کو کئی بار اچھال سکتے ہیں اور گن سکتے ہیں کہ کتنی بار پٹ آتا ہے۔ مثال کے طور پر، اگر آپ اسے 50 بار اچھالتے ہیں اور 20 بار چت حاصل کرتے ہیں، تو آپ کے احتمال کا تخمینہ ہو گا:

$$\frac{20}{50} = 40\%$$

اگر سکہ منصفانہ ہے، تو ہو سکتا ہے کہ آپ کو 50 ٹاس میں سے 25 پٹ نہ مل سکیں۔ لیکن جتنی بار آپ تجربے کو دہرائیں گے، آپ حقیقی امکان کے اتنے ہی قریب پہنچ جائیں گے۔ مثال کے طور پر: 200 بار اچھالنے پر آپ کو 85 پٹ ملتے ہیں:

$$\frac{85}{200} = 42.5\%$$

2000 بار اچھالنے پر آپ کو 980 پٹ ملتے ہیں:

$$\frac{980}{2000} = 49\%$$

جیسے جیسے ٹاس کی تعداد میں اضافہ ہوتا ہے، نتیجہ مستحکم ہوتا ہے اور اصل احتمال (جو ایک منصفانہ سکے کے لیے 0.5 ہونا چاہیے) کے قریب ہو جاتا ہے۔ اس نقطہ نظر کو معروضی امکان کہا جاتا ہے کیونکہ یہ مفروضوں کی بجائے حقیقی اعداد و شمار پر انحصار کرتا ہے۔

اضافی تعدد یا تناسبی تعدد کی تعریف: ممکنہ واقعات کی تعداد اور کسی واقعہ کے ہونے کی تعداد کے تناسب کو تناسبی تعدد کہا جاتا ہے۔

تناسبی تعدد کے لحاظ سے احتمال کی دو تعریفیں دی جاسکتی ہیں: اگر کوئی واقعہ E یکساں آزاد n آزمائشوں میں a بار ہوتا ہے تو واقعہ E کا تجرباتی احتمال ہو گا:

$$P(E) = \frac{a}{n}$$

طویل مدتی استحکام:

جیسے جیسے آپ آزمائشوں کی تعداد میں اضافہ کرتے ہیں، یہ تخمینہ $(\frac{a}{n})$ حقیقی احتمال کے قریب تر ہوتا چلا جاتا ہے۔

$$P(E) \approx \frac{a}{n}$$

جیسے درج بالا مثال میں جیسے جیسے تجربات کی تعداد میں اضافہ ہوتا ہے (50 سے 200 پھر 2000)، تخمینہ شدہ احتمال حقیقی احتمال (50%) کے قریب تر ہوتا جاتا ہے۔

مثال 5.6: اگر 1000 بار ایک سکہ اچھالنے پر "چت" 480 بار آیا ہو، تو چت کا تجرباتی احتمال کیا ہے؟

$$P(H) = \frac{480}{1000} = 48\%$$

مثال 5.7: ایک ہسپتال میں 200 مریضوں پر ایک نئی دوا آزمائی گئی۔ اگر 150 مریضوں نے بہتری محسوس کی ہو، تو دوا کے کامیاب ہونے کا احتمال کتنا ہے؟

$$P(\text{Success}) = \frac{150}{200} = 75\%$$

مثال 5.8: ایک فیکٹری میں 1000 مصنوعات میں سے 25 ناقص نکلتی ہیں۔ کسی تصادفی طور پر منتخب کردہ مصنوع کے ناقص ہونے کا احتمال کیا ہے؟

$$P(\text{Faulty}) = \frac{25}{1000} = 2.5\%$$

3. احتمال کا موضوعی نقطہ نظر (The Subjective Approach)

احتمال کا موضوعی نقطہ نظر کسی فرد کے ذاتی یقین کی ڈگری کی عکاسی کرتا ہے کہ تمام دستیاب معلومات اور فیصلے کی بنیاد پر واقعہ رونما ہو گا۔ یہ نقطہ نظر اس وقت استعمال کیا جاتا ہے جب نہ تو مساوی طور پر ممکنہ نتائج ہوں اور نہ ہی طویل مدتی تعدد دستیاب ہوں مثال کے طور پر، ایک بار ہونے والے واقعات کی صورت میں۔

موضوعی احتمالی بیانات کی مثالوں میں شامل ہیں: 70% امکان ہے کہ کل بارش ہو گی، یا مجھے لگتا ہے کہ اس کے 40% امکان ہیں کہ نئی مصنوع بازار مارکیٹ میں کامیاب ہو گی۔ یہ ذاتی تجزیے ہیں جو ہر فرد کے لحاظ سے مختلف ہو سکتے ہیں۔

5.4 احتمال کے قوانین (Probability Laws)

1. احتمال کا جمع کا قانون (Addition Law of Probability)

احتمال میں جمع کا قانون ہمیں دو واقعات میں سے کم از کم ایک کے ہونے کا احتمال بتاتا ہے۔ یہ قانون دو طرح سے استعمال ہوتا ہے اس پر منحصر ہوتے ہوئے کہ واقعات باہم ناشمول ہیں یا نہیں۔ باہم ناشمول واقعات (Mutually Exclusive Events) وہ واقعات ہوتے ہیں جو ایک ساتھ واقع نہیں ہوسکتے۔ ان واقعات میں کوئی مشترکہ نتیجہ نہیں ہوتا۔ غیر باہم ناشمول واقعات وہ واقعات ہوتے ہیں جو ایک ساتھ ہوسکتے ہیں۔ ان کے مشترکہ نتائج ہوتے ہیں۔

قانون: اگر A اور B دو باہم ناشمول واقعات ہیں تو واقعہ A یا واقعہ B ہونے کا احتمال ان کے انفرادی احتمال کے جوڑ کے مساوی ہوگا:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال 5.8: ایک پانسے کو ایک بار پھینکنے پر 2 یا 5 آنے کا احتمال کیا ہے؟

$$P(2) = \frac{1}{6}$$

$$P(5) = \frac{1}{6}$$

چونکہ 2 اور 5 ایک ساتھ نہیں آسکتے، یہ باہم ناشمول واقعات ہیں لہذا:

$$P(2 \text{ or } 5) = P(2) + P(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

مثال 5.9: ایک کلاس میں 10 لڑکے اور 15 لڑکیاں ہیں۔ تصادفی طور پر ایک طالب علم کا انتخاب کرنے پر لڑکا یا لڑکی کے منتخب ہونے کا کیا احتمال ہوگا؟

$$P(\text{Girl}) = \frac{10}{25}$$

$$P(\text{Boy}) = \frac{15}{25}$$

کوئی بھی شخص ایک وقت میں صرف لڑکا یا لڑکی ہوسکتا ہے، یہ باہم ناشمول واقعات ہیں۔ اس لیے:

$$P(\text{Boy or Girl}) = P(\text{Girl}) + \text{P(Boy)} = \frac{10}{25} + \frac{15}{25} = 1$$

قانون: اگر A اور B دو غیر باہم ناشمول واقعات ہیں تو واقعہ A یا واقعہ B ہونے کا احتمال ان کے انفرادی احتمال کے جوڑ مائنس ان کے دونوں کے ہونے کے احتمال کے مساوی ہوگا:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال 5.10: تاش کے 52 پتوں میں سے حکم (Heart) یا بادشاہ (King) آنے کا احتمال کیا ہے؟

$$P(\text{Heart}) = \frac{13}{52}$$

$$P(\text{King}) = \frac{4}{52}$$

حکم کا پتہ آنا اور بادشاہ کا پتہ آنا باہم ناشمول واقعات نہیں ہیں۔ حکم کا بادشاہ آنے کا احتمال

$$P(\text{King and Heart}) = \frac{1}{52}$$

$$P(\text{King or Heart}) = P(\text{King}) + P(\text{Heart}) - P(\text{King and Heart})$$

$$P(King\ or\ Heart) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

مثال 5.11: ایک جماعت میں 20 طلبا انگریزی جانتے ہیں، 15 اردو جانتے ہیں، اور 5 دونوں زبانیں جانتے ہیں۔ تصادفی طور منتخب ایک طالب علم چننے پر انگریزی یا اردو جاننے والے طالب علم کو منتخب کرنے کا احتمال کیا ہے؟

$$P(\text{English}) = \frac{20}{50}$$

$$P(\text{Urdu}) = \frac{15}{50}$$

$$P(\text{Urdu and English}) = \frac{5}{50}$$

لہذا:

$$P(\text{Urdu or English}) = \frac{20}{15} + \frac{15}{50} + \frac{5}{50} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$$

2. احتمال کا قانون ضرب (Multiplication Law of Probability)

ضرب کا قانون دو یا زیادہ واقعات کے ایک ساتھ یا مشترکہ طور پر وقوع پذیر ہونے کے احتمال کا حساب لگاتا ہے۔ یہ قانون دو صورتوں میں استعمال ہوتا ہے؛ جب واقعات غیر تابع (Independent Events) ہوں اور جب واقعات تابع (Dependent Events) ہوں۔ دو واقعات A اور B غیر تابع ہوتے ہیں اگر ایک واقعے کے وقوع کا اثر دوسرے پر نہ ہو۔ اگر ایک واقعے کے وقوع کا اثر دوسرے پر ہو تو واقعات تابع ہوتے ہیں۔

قانون: اگر دو واقعات A اور B غیر تابع ہوں تو ان کے ایک ساتھ واقع ہونے کا احتمال ان کے انفرادی احتمال کا ضرب ہو گا۔ یعنی:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

مثال 5.12: ایک سکے کو دو بار اچھالا جاتا ہے۔ اس کا احتمال کیا ہو گا کہ دونوں بار پٹ آئے؟

سکے کا پہلی بار اچھالا جانا اور دوسری بار اچھالا جانا غیر تابع واقعات ہیں۔ ایک کا اثر دوسرے پر نہیں پڑتا۔

پہلی بار پٹ آنے کا احتمال: $P(A) = \frac{1}{2}$

دوسری بار پٹ آنے کا احتمال: $P(B) = \frac{1}{2}$

دونوں بار پٹ آنے کا احتمال:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

اس پر قائل ہونے کے لیے کہ مشترکہ احتمال کے لیے انفرادی احتمال کو ضرب دیا جانا چاہیے اس پر غور کریں کہ دو سکوں کے اچھالنے پر 4 ممکن نتائج ہوں گے: {HH, HT, TH, TT}۔ دو پٹ یعنی HH آنے کا احتمال $\frac{1}{4}$ ہے۔ جو ہمارے درج بالا میں حساب کردہ احتمال کے مساوی ہے۔

مشروط احتمال (Conditional Probability)

مشروط احتمال وہ احتمال ہے جو کسی واقعے کے وقوع پذیر ہونے کا اندازہ لگاتا ہے جب کہ دوسرا واقعہ پہلے سے ہو چکا ہو۔ اس طرح واقعہ B ہونے کا احتمال جب کہ واقعہ A ہو چکا ہو واقعہ B کا مشروط احتمال ہو گا اور اسے $P(B/A)$ سے دکھایا جاتا ہے جس کا مطلب ہے: واقعہ B کا احتمال، بشرطیکہ واقعہ A پہلے ہو چکا ہو۔ لہذا:

$$B = P(B/A) \text{ کا مشروط احتمال جب } A \text{ ہو چکا ہو}$$

$$A = P(A/B) \text{ کا مشروط احتمال جب } B \text{ ہو چکا ہو}$$

قانون: دو واقعات A اور B کے بیک وقت (مشترکہ طور پر) واقع ہونے کا احتمال ان میں سے کسی ایک کے ہونے کے احتمال اور دوسرے کے پہلے پر مشروط احتمال کے ضرب کے مساوی ہے۔ یعنی:

$$P(A \cap B) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$$

یا $$P(A \cap B) = P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B)$$

مثال: ایک تھیلے میں 3 سرخ اور 2 نیلی گیندیں ہیں۔ اگر بغیر واپس رکھے دو گیندیں نکالی جائیں، تو دونوں کے سرخ ہونے کا احتمال کیا ہے؟

حل: پہلی گیند سرخ: (A)

$$P(A) = \frac{3}{5}$$

دوسری گیند سرخ پہلی سرخ نکالنے کے بعد (B/A):

$$P(B/A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

مشترکہ احتمال:

$$P(A \cap B) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

مثال 5.13: تاش کے 52 پتوں میں سے پہلے دونوں بادشاہ (King) نکالنے کا احتمال کیا ہے (اگر پہلا پتہ واپس نہ رکھا جائے)؟

پہلا پتہ بادشاہ ہونے کا احتمال: $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

اگر پہلا بادشاہ نکال لیا جائے، تو اب 51 پتے باقی ہیں جن میں 3 بادشاہ ہیں۔

دوسرا پتہ بھی بادشاہ ہونے کا احتمال: $P(B/A) = \frac{3}{51} = \frac{1}{17}$

دونوں پتوں کے بادشاہ ہونے کا احتمال:

$$P(\text{King and King}) = \frac{1}{13} \times \frac{1}{17} = \frac{1}{221}$$

3. تکمیلی واقعات کا احتمال (Probability of Compliments)

درج بالا میں ہم سیٹ کے تکملہ کی تعریف بیان کر چکے ہیں۔ کسی واقعہ A کے ہونے کے احتمال کا تکملہ یا تکمیلی احتمال واقعہ A کے نہ ہونے کا احتمال ہے۔ واقعہ A اور اس کا تکملہ باہم ناشمول واقعات ہوتے ہیں اور اجتماعی طور پر محیط ہوتے ہیں۔ واقعہ A کے تکملہ کو A' یا A^C یا $\bar{A}$ سے دکھایا جاتا ہے۔ اگر واقعہ A کے ہونے کا احتمال $P(A)$ ہو تو اس کے تکملے کا احتمال ہو گا:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

درج بالا سے ہم کہہ سکتے ہیں:

$$P(A) + P(A') = 1$$

تکمیلی احتمال کا استعمال کم سے کم ایک واقعے کے ہونے یا کسی واقعے کے نہ ہونے کے احتمال جیسے مسائل کو حل کرنے میں مدد کرتا ہے۔ اس کے لیے ہم مطلوبہ واقعے کے مقابل (تکمیلی واقعے) کے وقوع کا احتمال نکالتے ہیں۔

کم سے کم ایک واقعے کے ہونے کا احتمال (Probability of Happening at Least One Event)

فرض کریں کہ A اور B دو غیر تابع واقعات ہیں۔ اگر A کے ہونے کا احتمال p_1 ہو اور B کے ہونے کا احتمال p_2 ہو تو $1 - p_1$ واقعہ A کے نہ ہونے کا احتمال ہو گا اور $1 - p_2$ واقعہ B کے نہ ہونے کا احتمال ہو گا۔ دونوں واقعات کے نہ ہونے کا احتمال ہو گا:

$$(1 - p_1)(1 - p_2)$$

کم از کم ایک واقعے کے ہونے کا احتمال ہو گا:

$$P(\text{at least one}) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)$$

اسی طرح، اگر n واقعات ہوں تو کم سے کم ایک کے ہونے کا احتمال ہو گا:

$$P(\text{at least one}) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \ldots (1 - p_n)$$

مثال 5.14: تین پانسے ایک ساتھ پھینکے جاتے ہیں۔ کم از کم ایک پانسے پر 1 آنے کا احتمال کیا ہو گا؟

ایک پانسے پر 1 نہ آنے کا احتمال:

$$P(\text{Not 1}) = \frac{5}{6}$$

تینوں پانسوں پر 1 نہ آنے کا احتمال:

$$P(\text{Not 1 in any die}) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$$

کم از کم ایک 1 آنے کا احتمال:

$$P(\text{at least } 1) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

آپ بنا تکمیلی احتمال کا استعمال کیے بھی درج ذیل کو حل کر سکتے ہیں لیکن اس کے لیے آپ کو زیادہ حساب کرنا ہو گا۔ اس کے لیے آپ کو تین حالات کے احتمال کو جوڑنا ہو گا:

1. صرف ایک پانسے پر 1 آئے
2. ، دو پانسوں پر 1 آئے،
3. تینوں پانسوں پر 1 آئے

صرف ایک پانسے پر 1 آئے: تین پانسوں میں سے کسی ایک پر 1 آئے۔ یعنی ایک پانسے پر 1 آئے اور باقی پر 1 کے علاوہ کچھ بھی آئے (یعنی 2, 3, 4, 5, 6)۔ تین پانسوں میں سے 1 تین طرح سے آ سکتا ہے:

پہلے پانسے پر ایک ہو اور دوسرے اور تیسرے پر نہ ہو،

دوسرے پانسے پر ایک ہو، پہلے اور تیسرے پر ایک نہ ہو،

تیسرے پانسے پر ایک ہو، پہلے اور دوسرے پر ایک نہ ہو۔

$$^3C_1 = \frac{3!}{1!\,(3-1)!} = 3$$

پہلا پانسہ 1 ہو اس کا احتمال ہو گا: $\frac{1}{6}$

دوسرا پانسہ 1 نہ ہو اس کا احتمال ہو گا: $\frac{5}{6}$

تیسرا پانسہ 1 نہ ہو اس کا احتمال ہو گا: $\frac{5}{6}$

ترتیب کا احتمال ہو گا:

$$\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{216}$$

تین طرح سے یہ ترتیب ہو سکتی ہے لہذا کل احتمال ہو گا:

$$3 \times \frac{25}{216} = \frac{75}{216}$$

دو پانسوں پر 1 آئے: دو پانسوں پر 1 تین طرح سے آ سکتا ہے:

پہلے اور دوسرے پانسے پر ایک ہو اور تیسرے پر نہ ہو،

دوسرے اور تیسرے پانسے پر ایک ہو، پہلے پر ایک نہ ہو،

پہلے اور تیسرے پانسے پر ایک ہو، اور دوسرے پر ایک نہ ہو۔

$$^3C_2 = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = 3$$

دو پانسوں پر 1 ہو اس کا احتمال ہو گا: $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$

تیسرا پانسہ ایک نہ ہو اس کا احتمال ہو گا: $\frac{5}{6}$

ترتیب کا احتمال ہو گا:

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{216}$$

تین طرح سے یہ ترتیب ہو سکتی ہے لہذا کل احتمال ہو گا:

$$3 \times \frac{5}{216} = \frac{15}{216}$$

دو پانسوں پر 1 آئے: تین پانسوں پر 1 ایک ہی طرح آ سکتا ہے:

$$^3C_3 = \frac{3!}{3!\,(3-3)!} = 1$$

تینوں پانسوں پر ایک آنے کا احتمال ہو گا:

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

کم سے کم ایک پانسے پر 1 آنے کا احتمال ہو گا:

$$\frac{75}{216} + \frac{15}{216} + \frac{1}{216} = \frac{91}{216}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ براہ راست طریقے سے احتمال کا حساب لگانے کے لیے آپ کو زیادہ حساب کرنا پڑا۔

مثال 5.15: احمد، فاطمہ، رمیش اور پوجا کے شماریات کے ایک مسئلے کو حل کرنے کے احتمالات بالترتیب $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ اور $\frac{1}{5}$ ہیں۔ کیا احتمال ہے کہ کم از کم ایک شخص یہ مسئلہ حل کر لے گا؟

ہر شخص کے مسئلہ حل نہ کرنے کا احتمال ہو گا:

احمد (A)

$$P(A') = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

فاطمہ (F)

$$P(F') = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

رمیش (R)

$$P(R') = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

پوجا(P)

$$P(P') = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

کسی کے بھی مسئلہ حل نہ کرنے کا احتمال ہو گا:

$$P(\text{No one Solves}) = P(A') + P(F') + P(R') + P(P') = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

کم سے کم ایک کے حل کرنے کا احتمال:

$$P(\text{Problem is solved}) = 1 - (\text{No one solves}) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

مسئلہ حل ہو گا اس کا امکان $\frac{4}{5}$ ہے یا 80 فیصد ہے۔

5.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

5.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. کسی واقعے کے ہونے کے امکان کی قدر ہوتی ہے:

(a) -1اور1 کے بیچ (b) 0اور1 کے بیچ

(c) $-\infty$ اور ∞ کے بیچ (d) -1اور100 کے بیچ

2. ایک منصفانہ سکہ اچھالا جاتا ہے۔ چت آنے کا احتمال ہو گا:

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{2}$

(c) $\frac{1}{4}$ (d) 1

3. پانسہ پھینکنے پر 4 کے آنے کا احتمال ہو گا:

(a) 1/6 (b) 2/6

(c) 3/6 (d) 4/6

4. دستک سے کیا مراد ہے۔

(a) کل لاگت اور پیداوار کا تناسب (b) ایک اضافی اکائی پیدا کرنے کی لاگت

(c) فی اکائی قائم لاگت (d) متغیر لاگت اور قائم لاگت کا فرق

5. تصادفی تجربے کے تمام ممکنہ نتائج کا جمع ہوتا ہے:

(a) 0 (b) 0.5

(c) 1 (d) تجربے پر منحصر ہے

6. دو سکے ایک بار اچھالے جاتے ہیں۔ ایک چت آنے کا امکان ہو گا:

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$

(c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{2}{3}$

7. ناممکن واقعے کا احتمال ہوتا ہے:

(a) 0 (b) 1

(c) -1 (d) غیر متعین

8. یقینی واقعے کا احتمال ہوتا ہے:

(a) 1/2 (b) $\frac{1}{3}$

(c) 2/3 (d) 5/6

9. 1 سے 10 کے بیچ ایک نمبر منتخب کیا جاتا ہے۔ پرائم نمبر آنے کا احتمال ہو گا:

(a) 2/3 (b) 3/10

(c) ½ (d) 7/10

10. ایک سکہ تین بار اچھالا جاتا ہے۔ تینوں بار چت آنے کا امکان ہو گا:

(a) 1/5 (b) ½

(c) 2/5 (d) 4/5

جوابات	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	c	c	b	b	c	b	b	b	d	b

5.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. ایک سکہ دو بار پھینکا جاتا ہے۔ اس کا نمونہ فضا لکھیں۔ کم از کم ایک چت ملنے کا کیا امکان ہے؟
2. ایک پانسہ ایک بار پھینکا جاتا ہے۔ اس کا احتمال کا حساب کریں کہ نمبر طاق نمبر ہو گا، نمبر 4 سے کم ہو گا۔
3. ایک کارڈ 52 کارڈز کے معیاری ڈیک سے تصادفی طور پر نکالا جاتا ہے۔ درج ذیل حاصل کرنے کا کیا امکان ہے:

(i) بادشاہ، (ii) سرخ کارڈ؟

4. مشروط احتمال کسے کہتے ہیں؟
5. تصادفی تجربے اور واقعے کی تعریف بیان کریں۔

5.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. ایک بیگ میں 3 سفید، 3 سیاہ اور 2 سرخ گیندیں ہیں۔ ایک گیند تصادفی طور پر نکالی جاتی ہے۔ امکان تلاش کریں کہ یہ ہے:

(i) سفید ہو گی (ii) سیاہ ہو گی، (ii) سرخ ہو گی۔ احتمال کی تعریف کا استعمال کرتے ہوئے مرحلہ وار حل لکھیں۔

2. ایک پتہ 52 پتوں کی گڈی سے تصادفی طور پر نکالا جاتا ہے۔ اس کا احتمال کیا ہو گا کہ پتہ:

(i) حکم ہو

(ii) چہرے والا پتہ (باشاہ، ملکہ، غلام) ہو

(iii) نہ دل ہو اور نہ بادشاہ ہو

3. 30 طلبا کی کلاس میں، 12 ریاضی کا مطالعہ کرتے ہیں، 88 طبیعیات کا مطالعہ کرتے ہیں، اور 5 ریاضی اور طبیعیات دونوں کا مطالعہ کرتے ہیں۔ اگر ایک طالب علم کا انتخاب تصادفی طور پر کیا جاتا ہے تو اس امکان کا حساب کریں کہ طالب علم پڑھتا ہے:

(i) ریاضی یا طبیعیات،

(ii) ریاضی لیکن طبیعیات نہیں،

(iii) نہ ریاضی اور نہ ہی طبیعیات

5.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Gupta, S. P. (2020). *Statistical methods* (44th ed.). Sultan Chand & Sons.
2. Bhardwaj, R. S. (2011). *Business statistics* (2nd ed.). Excel Books India.
3. Srivastava, T. N., & Rego, S. (2012). *Statistics for management* (2nd ed.). Tata McGraw-Hill Education.
4. Sharma, J. K. (2019). *Business statistics* (5th ed.). Vikas Publishing House.

اکائی 6: توزیعِ احتمال

(Probability Distribution)

اکائی کے اجزا:

6.0 تمہید (Introduction)

6.1 مقاصد (Objectives)

6.2 تصادفی متغیر اور توزیع احتمال (Random Variable and Probability Distribution)

6.3 توزیعِ احتمال (Probability Distribution)

6.3.1 منفصل توزیع احتمال (Discrete Probability Distribution)

6.3.2 احتمال کمیت تفاعل (Probability Mass Function)

6.3.3 تراکمی کمیت تفاعل (Cumulative Mass Function)

6.3.4 متصل توزیع احتمال (Continuous Probability Distribution)

6.4 اوسط، متوقع قدر اور معیاری انحراف
(Mean, Expected Value and Standard Deviation)

6.5 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

6.6 فرہنگ (Glossary)

6.7 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

6.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

6.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

6.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

6.8 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

6.0 تمہید (Introduction)

سابقہ اکائی میں آپ دیکھ چکے ہیں کہ احتمال غیر یقینی صورت حال کی ریاضی ہے۔ اس سے ہمیں یہ اندازہ لگانے میں مدد ملتی ہے کہ

واقعات کے ہونے کے کیا امکانات ہیں۔ حقیقی زندگی میں بہت سے ایسے حالات ہیں جن میں ہمیں غیر یقینی نتائج کا سامنا کرنا پڑتا ہے۔ مثال کے طور پر پانسہ پھینکنے پر کیا نمبر آئے گا؟ مشین خراب ہونے سے پہلے کتنے وقت تک کام کرے گی؟ یہ سب تصادفی نتائج ہیں اور ہر نتیجے کے واقع ہونے کے الگ امکانات ہیں۔ اس طرح کی غیر یقینی صورت حال کو منظم طریقے سے سمجھنے کے لیے، ہم توزیعِ احتمال پر انحصار کرتے ہیں۔

توزیعِ احتمال بتاتی ہے کہ تصادفی متغیرات کی قدروں کی توزیع و تقسیم کیسے ہوتی ہے۔ یعنی یہ بتاتی ہے کہ ہر نتیجے کے آنے کے امکانات کیا ہوتے ہیں۔ اس سے ہمیں کسی خاص صورت حال سے وابستہ تصادفیت کی مکمل تصویر حاصل ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر، اگر آپ ایک منصفانہ سکے کو اچھالتے ہیں، تو توزیع احتمال آپ کو بتاتی ہے کہ چت آنے کا 50% امکان ہے اور پٹ آنے کا 50% امکان ہے۔ توزیع احتمال کا نظریہ احتمال اور شماریات کا ایک بنیادی تصور ہے۔ یہ استنتاجی شماریات میں، نتائج اخذ کرنے، فیصلہ سازی میں خطرے کا اندازہ لگانے کے لیے کثرت سے استعمال ہوتا ہے۔ یہ اکائی توزیع احتمال سے متعلق بنیادی تصورات کو متعارف کراتی ہے۔

6.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے درج ذیل مقاصد ہیں:

- تصادفی متغیر کی وضاحت کرنا اور منفصل اور متصل متغیر کے مابین فرق بیان کرنا۔
- احتمال کمیت تفاعل اور احتمال کثافت تفاعل کی وضاحت کرنا۔
- تراکمی توزیع تفاعل کی وضاحت کرنا
- متوقع قدر (اوسط) اور تفاوت کی وضاحت کرنا۔

6.2 تصادفی متغیر اور توزیع احتمال (Random Variable and Probability Distribution)

توزیعِ احتمال کی وضاحت سے پہلے تصادفی متغیر (Random Variable) کو سمجھتے ہیں۔ تصادفی متغیر ایسا متغیر ہے جس کی قدر تصادفی تجربے پر منحصر ہوتی ہے۔ دوسرے لفظوں میں تصادفی متغیر تصادفی عمل کا عددی نتیجہ (Outcome) ہے۔ مثال کے طور سکہ اچھالنا ایک تصادفی عمل یا تجربہ ہے کیوں کہ اس کا نتیجہ تصادفی ہے۔ سکہ اچھالنے کے عمل کے نتیجے کو اگر ہم متغیر X کہیں تو اس متغیر کی دو ممکنہ قدریں ہو سکتی ہیں؛ چت یا پٹ۔ X تصادفی متغیر ہے۔ اسی طرح پانسہ پھینکنے پر جو نتیجہ آتا ہے اسے اگر Y متغیر کہیں تو اس کے چھ ممکنہ نتائج یعنی 1، 2، 3، 4، 5، 6 ہو سکتے ہیں۔ Y تصادفی متغیر ہے۔ تصادفی متغیر کو انگریزی کے بڑے حروف جیسے X اور Y سے دکھایا جاتا ہے۔ چھوٹے حرفوں جیسے x اور y سے ان متغیرات کی قدروں کو دکھایا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر فرض کریں کہ X تین منصفانہ سکوں کو اچھالنے پر پٹ کی تعداد ہے۔ اس صورت میں نمونہ فضا ہو گی:

$$S = \{TTT, THH, HTH, HHT, HTT, THT, TTH, HHH\}$$

x یعنی متغیر X کی ممکنہ قدریں ہو سکتی ہیں:

$$x = 1, 2, 3$$

یعنی کہ تین سکوں کو اچھالنے پر 1 پٹ آسکتا ہے، یا دو پٹ آسکتے ہیں یا 3 پٹ آسکتے ہیں۔ غور کریں کہ اس صورت میں نتائج کا شمار کیا جاسکتا ہے۔ ایسے متغیر کو منفصل تصادفی متغیر کہتے ہیں جس کی قدروں کا شمار کیا جاسکتا ہے۔ متغیر کی دوسری قسم متصل تصادفی متغیر ہے جس کی قدروں کا شمار نہیں کیا جاسکتا۔ ان کی مزید تفصیل درج ذیل ہے:

منفصل تصادفی متغیر (Discrete Random Variable): یہ ایسا متغیر ہے جس کی محدود یا قابل شمار ممیز لامحدود قدریں ہو سکتی ہیں۔ مثال کے طور پر اگر پانسے کا نمبر متغیر X ہے تو اس کی ممکنہ قدریں ہو سکتی ہیں:

$$x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

آپ متغیر X کی قدروں کا شمار کر سکتے ہیں۔ اس لیے یہ منفصل متغیر ہے۔

اسی طرح چار سکے اچھالنے پر چت کی تعداد اگر متغیر Y ہو تو اس کی ممکنہ قدریں ہو سکتی ہیں:

$$Y = 0, 1, 2, 3, 4$$

یعنی متغیر Y کی چار ممکنہ قدریں ہو سکتی ہیں۔ یعنی چار سکے اچھالنے پر ممکن ہے کہ صرف ایک سکے پر چت ہو، یا دو سکوں پر چت ہو، یا تین سکوں پر چت ہو یا چاروں سکوں پر چت ہو۔ چوں کہ کتنے سکوں پر چت ہو گا اس کا شمار کیا جاسکتا ہے لہذا متغیر Y منفصل متغیر ہے۔

گھر میں بچوں کی تعداد اگر متغیر Z ہو تو اس کی ممکنہ قدریں ہو سکتی ہیں:

$$Z = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$$

گھر میں صفر بچے ہو سکتے ہیں، 1 بچہ ہو سکتا ہے، دو ہو سکتے ہیں وغیرہ۔ کتنے بچے ہو سکتے ہیں اس کا شمار کیا جاسکتا ہے اس لیے متغیر Z منفصل متغیر ہے۔

ایک پانسہ تب تک پھینکا جائے جب تک 6 نہ آجائے۔ یہ پانسہ جتنی بار اچھالا جائے گا اگر وہ متغیر X ہے تو اس کی ممکنہ قدریں ہو سکتی ہیں:

$$X = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots$$

ظاہر ہے کہ پانسے کو پہلی بار اچھالنے پر ہی 6 آسکتا ہے۔ اس صورت میں X کی قدر 1 ہو گی۔ ایسا بھی ہو سکتا ہے کہ 10 بار پانسہ پھینکنے کے بعد 6 آئے۔ اس صورت میں X کی قدر 10 ہو گی۔ یہ بھی ممکن ہے کہ آپ پانسہ پھینکتے رہیں لیکن کبھی 6 نہ آئے۔ یعنی نظریاتی طور پر X کی لامحدود قدریں ہو سکتی ہیں۔ لیکن ان قدروں کو شمار کیا جاسکتا ہے۔ اس لیے یہ منفصل تصادفی متغیر ہے۔

متصل تصادفی متغیر (Continuous Random Variable): متصل تصادفی متغیر وہ متغیر جو دی گئی رینج میں کوئی بھی قدر لے سکتے ہے۔ منفصل متغیر کے برعکس متصل متغیر کی لامحدود قدریں ہوتی ہیں جن کو شمار نہیں کیا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر کلاس میں ایک طالب علم کا قد اگر متغیر X ہو تو یہ متصل متغیر ہو گا۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ ہمارا پیمانہ کتنا درست ہے اس پر منحصر ہوتے ہوئے قد کی قدریں لامحدود

ہوں گی۔ طالب علم کے قد کی (سینٹی میٹر میں) کچھ ممکنہ قدریں ہو سکتی ہیں 170.0000001 ,170.51 ,170.5 ,170 وغیرہ۔ ان قدروں کا شمار نہیں کیا جا سکتا۔ اس لیے متغیر X متصل متغیر ہے۔

مزید آسان مثال کے لیے دو حقیقی نمبر (Real Number) لیں جیسے 2 اور 3۔ ان دو نمبروں کے بیچ حقیقی نمبروں کی تعداد کو متغیر R کہیں۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ ان دونوں نمبروں کے بیچ کتنے نمبر ہو سکتے ہیں؟ ان کے بیچ لامحدود نمبر ہو سکتے ہیں اور ان کا شمار نہیں کیا جا سکتا۔ یہ نمبر ہو سکتے ہیں:

$$1.1, 1.2, 1.23, 1.23000001, 1.5, 1.59999999000001 \ldots$$

آپ دیکھ سکتے ہیں ان دو نمبروں کے بیچ لامحدود نمبر ہو سکتے ہیں اور اس کا شمار آپ نہیں کر سکتے کہ کتنے نمبر ہوں گے۔ لہذا متغیر Y متصل متغیر ہو گا۔

متصل متغیر کو منفصل سے فرق کرنے کے لیے آیئے ایک اور مثال لیتے ہیں۔ دو نمبروں کے بیچ قدرتی نمبر یعنی Natural Numbers کی تعداد اگر متغیر X ہو تو یہ منفصل متغیر ہے۔ آپ بتا سکتے ہیں کہ 2 اور 3 کے بیچ صفر قدرتی نمبر ہیں۔ 10 اور 30 کے بیچ 20 قدرتی نمبر ہیں۔ 100 اور 300 کے بیچ 200 قدرتی نمبر ہیں۔ 1000 اور 1005 کے بیچ 4 قدرتی نمبر ہیں۔ یعنی دو نمبروں کے بیچ قدرتی نمبروں کا آپ شمار کر سکتے ہیں۔ لیکن آپ دو نمبروں کے بیچ حقیقی نمبروں کی تعداد کا شمار نہیں کر سکتے۔

چونکہ متصل تصادفی متغیر کی لامحدود قدریں ہو سکتی ہیں لہذا کسی ایک قدر (مثلاً a) کا احتمال صفر ہوتا ہے۔

$$P(X = a) = 0$$

اس کی کیا وجہ ہے؟ آپ سابقہ اکائی میں پڑھ چکے ہیں کہ کسی نتیجے کا احتمال ہوتا ہے:

$$P(X = a) = \frac{\text{Faourable Outcome}}{\text{Total Equaly Likely Outcomes}}$$

اب چونکہ کل نتائج کی تعداد لامحدود ہوتی ہے، لہذا عملی طور پر a کے آنے کا احتمال صفر ہو گا۔

مثال کے طور پر دو حقیقی نمبر 2 اور 3 کے بیچ لامحدود حقیقی نمبر ہو سکتے ہیں۔ اگر سوال یہ ہو کہ اس کا کیا احتمال ہے کہ تصادفی طور پر منتخب ایک نمبر 2.45 ہو۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تصادفی طور پر منتخب کردہ نمبر 2.45 ہو اس کا احتمال صفر ہو گا۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ اس کا احتمال کہ منتخب کردہ نمبر 2.45 ہو صفر ہے۔ یعنی:

$$P(X = 2.45) = 0$$

اس طرح متصل متغیر کی صورت میں اس کا احتمال کہ متغیر کوئی مخصوص قدر لے صفر ہوتا ہے۔

6.3 توزیعِ احتمال (Probability Distribution)

توزیع احتمال ایسی توزیع ہے جو تصادفی متغیر کی قدروں اور ان کے احتمال کو بیان کرتی ہے۔ یہ بتاتی ہے کہ تصادفی متغیر کے نتائج کی تقسیم و توزیع کیسے ہوتی ہے۔ توزیع احتمال ہمیں یہ بتاتی ہے کہ کتنے نتائج ممکن ہیں اور ہر نتیجے کا احتمال کیا ہے۔ توزیع احتمال کی دو قسمیں ہیں۔

منفصل توزیع احتمال اور متصل توزیع احتمال۔

6.3.1 منفصل توزیع احتمال (Discrete Probability Distribution)

منفصل توزیع احتمال منفصل تصادفی متغیر کی ہر قدر کے وقوع پذیر ہونے کے احتمال کو بیان کرتی ہے۔ منفصل توزیع احتمال تصادفی متغیر کی ہر ممکنہ قدر کے غیر صفر امکانات یا احتمال کو بیان کرتی ہے۔ منفصل توزیع احتمال کو اکثر جدول کی شکل میں پیش کیا جاتا ہے۔ تین سکوں کے اچھالنے کی درج بالا مثال کو دیکھیں۔ آپ نے دیکھا کہ نمونہ فضا تھی

$$S = \{TTT, THH, HTH, HHT, HTT, THT, TTH, HHH\}$$

اگر چت (Heads) کی تعداد متغیر X ہو تو اس کے نتائج کو ذیل کی طرح لکھا جا سکتا ہے:

ممکنہ نتائج	X کی قدر (x)	X کا احتمال $P(X = x)$
TTT	0	$\frac{1}{8}$
TTH, THT, HTT	3	$\frac{3}{8}$
THH, HTH, HTT	3	$\frac{3}{8}$
HHH	1	$\frac{1}{8}$

درج بالا جدول متغیر X کی منفصل توزیع احتمال دکھاتا ہے۔ یہ جدول چت کی تعداد اور ہر تعداد کے احتمال کو بیان کرتی ہے۔ مثال کے طور پر ایک چت آنے کا احتمال $\frac{1}{8}$ ہے، دو چت آنے کا احتمال $\frac{3}{8}$ ہے وغیرہ۔

منفصل توزیع احتمال کی درج ذیل دو اہم خصوصیات ہوتی ہیں۔

1. ہر نتیجے کا احتمال صفر اور ایک کے بیچ ہوتا ہے یعنی:

$$0 \leq P(X) \leq 1$$

2. تمام احتمال کے جمع کی قدر ایک ہوتی ہے۔ یعنی

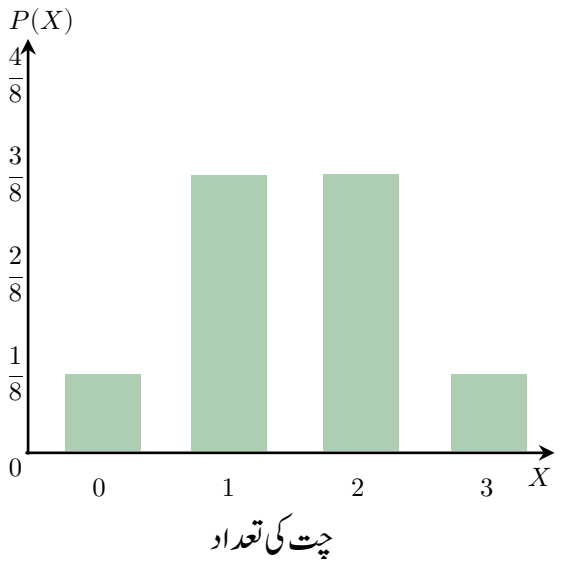
$$\Sigma P(X) = 1$$

درج بالا جدول میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ متغیر X کی تمام قدروں کا احتمال صفر اور ایک کے بیچ ہے۔ اسی طرح آپ ثابت کر سکتے ہیں کہ تمام احتمال کا حاصل جمع ایک ہے۔

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

منفصل توزیع احتمال کو گراف کی مدد سے بھی دکھایا جا سکتا ہے۔ متغیر کو محور



تصویر 6.1: تین سکوں کے اچھالنے پر چت آنے کی توزیع احتمال

X پر دکھائیں اور اس کی قدروں کو محور Y پر دکھائیں۔ اس طرح ہماری درج بالا سکوں کی مثال کی توزیع کا گراف تصویر 6.1 میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 6.1: ایک بینک 100 صارفین کا سروے کرتا ہے تاکہ یہ معلوم کیا جاسکے کہ ہر شخص کتنے کریڈٹ کارڈز کا مالک ہے۔ اگر X متغیر ہے جو صارف کے پاس کریڈٹ کارڈز کی تعداد دکھاتا ہے۔ صارفین کے پاس کریڈٹ کارڈز کی ممکنہ تعداد ہیں $x = 0,1,2,3,4$۔

X	$P(x)$	$x.P(x)$
0	$P(X=0) = \frac{10}{100} = 0.10$	$0 \times 0.10 = 0$
1	$P(X=1) = \frac{35}{100} = 0.35$	$1 \times 0.35 = 0.35$
2	$P(X=2) = \frac{30}{100} = 0.30$	$2 \times 0.30 = 0.60$
3	$P(X=3) = \frac{15}{100} = 0.15$	$3 \times 0.15 = 0.45$
4	$P(X=4) = \frac{10}{100} = 0.10$	$4 \times 0.10 = 0.40$
		$\Sigma[X.P(X)] = 1.4$

مثال 6.2: ایک ریٹیل اسٹور ریکارڈ کرتا ہے کہ صارفین ایک وزٹ کے دوران کتنی مصنوعات خریدتے ہیں۔ وہ 200 صارفین کا ریکارڈ کرتا ہے۔ فرض کریں کہ متغیر X ایک وزٹ میں خریدی گئی اشیا کی تعداد ہے۔

ممکنہ قدریں: $0,1,2,3,4,5$

X	$P(x)$
0	$P(0) = \frac{8}{200}$
1	$P(1) = \frac{44}{200}$
2	$P(2) = \frac{92}{200}$
3	$P(3) = \frac{36}{200}$
4	$P(4) = \frac{16}{200}$
5	$P(5) = \frac{4}{200}$

6.3.2 احتمال کمیت تفاعل (Probability Mass Function)

احتمال کمیت تفاعل (Probability Mass Function-PMF) وہ تفاعل ہے جو یہ بیان کرتا ہے کہ منفصل تصادفی متغیر کسی خاص قدر کے برابر ہو گا اس کا کیا امکان ہے۔ احتمال کمیت تفاعل کو تعددی تفاعل یا تفاعلِ تعدد (Frequency Function) بھی کہا

جاتا ہے۔ اس تفاعل کو جدول سے، گراف سے یا فارمولے سے دکھایا جاسکتا ہے۔ احتمال کمیت تفاعل کی تعریف اس طرح کی جاسکتی ہے کہ یہ احتمال ہے اس کا کہ منفصل متغیر کسی مخصوص قدر کو لے گا۔ دوسرے لفظوں میں، احتمال کمیت تفاعل منفصل تصادفی متغیر کی ہر قدر کو احتمال تفویض کرتا ہے۔

فرض کریں کہ X ایک منفصل تصادفی متغیر ہے، تو احتمال کمیت تفاعل $f(x)$ قدر x پر ہو گا:

$$f(x) = P(X = x)$$

اس کا مطلب ہے کہ اس کا امکان کہ X مخصوص قدر x کے مساوی ہو گا۔

مثال 6.3: فرض کریں کہ X سکے کے دو اچھالوں میں چت کی تعداد ہے۔

$$X = \text{No of Heads in Two Tosses}$$

اس کے ممکنہ نتائج ہو سکتے ہیں:

0 چت (TT)

1 چت (HT, TH)

2 چت (HH)

لہذا، احتمال کمیت تفاعل ہو گا:

$$P(X = 0) = \frac{1}{4}$$
$$P(X = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
$$P(X = 2) = \frac{1}{4}$$

مثال 6.4: فرض کریں کہ X ایک 6 سائڈ والے پانسے کو پھینکنے کا نتیجہ ہے۔ اس کے ممکنہ نتائج ہو سکتے ہیں: 1, 2, 3, 4, 5, 6 ان میں سے ہر ایک نتیجے کا احتمال $\frac{1}{6}$ ہے۔

$$P(X = x) = \frac{1}{6}, \text{for } x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

1. احتمال کمیت تفاعل کی خصوصیات (Properties of PMF)

فرض کریں کہ X ایک تصادفی متغیر ہے، اور $P(X = x)$ احتمال کمیت تفاعل ہے۔ اس کی درج ذیل خصوصیات ہونی چاہیے۔

1. غیر منفی: احتمال کبھی منفی نہیں ہو سکتا:

$$P(X = x) \geq 0, \text{for all possible values of } x$$

مثال کے طور پر پانسہ پھینکنے پر 3 آنے کا احتمال ہو گا:

$$P(X = 3) = \frac{1}{6} \geq 0$$

2. تمام احتمال کی قدر 1 ہوتی ہے۔

$$\sum_{\text{all } x} P(X = x) = 1$$

مثال کے طور پر سکے کے اچھالنے پر:

$$P(X = \text{Head}) + P(X = \text{Tail}) = 0.5 + 0.5 = 1$$

3. احتمال کمیت تفاعل تصادفی متغیر کی مخصوص قابل شمار قدروں کا ہوتا ہے۔

$$P(X = x)$$

احتمال کمیت تفاعل کو جدول یا گراف کی مدد سے دکھایا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر دو سکوں کو اچھالنے کی مثال لیں۔ اگر X تصادفی متغیر کی تعداد کی نمائندگی کرتا ہے تو اس تجربے کا نمونہ فضا ہے: {HH, HT, TH, TT}۔ اس سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ متغیر X کی قدریں 0 ہو سکتی ہے، 1 ہو سکتی ہے اور 2 ہو سکتی ہے۔ ہر ایک کا احتمال آپ اخذ کر سکتے ہیں:

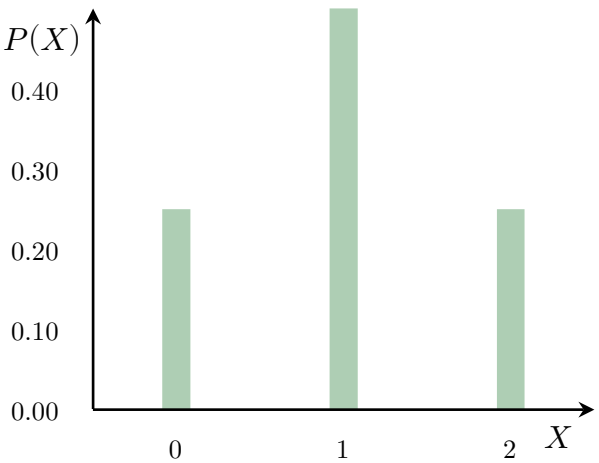
$$P(X = 0) = \frac{1}{4}$$
$$P(X = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
$$P(X = 2) = \frac{1}{4}$$

ان کو درج ذیل جدول سے دکھایا جاسکتا ہے:

x	$P(X = x)$
0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$

اس طرح احتمال کمیت تفاعل $P(X = x)$ متغیر X کے 0 صفر ہونے کا احتمال $\frac{1}{4}$ دیتا ہے۔

احتمال کمیت تفاعل کو گراف سے بھی دکھایا جاسکتا ہے۔ احتمال کمیت تفاعل کا گراف ہر تصادفی متغیر کی ہر ممکنہ قدر کے احتمال کو دکھاتا ہے۔ درج بالا سکے اچھالنے کی مثال کو بار گراف سے دکھایا جاسکتا ہے۔ دیکھیں تصویر 6.2۔



تصویر 6.2: تین سکوں کے اچھالنے پر چت کا احتمال کمیت تفاعل

مثال 6.5: فرض کریں کہ ایک جانب دار پانسہ پھینکا جاتا ہے۔ اس کا احتمال کمیت تفاعل درج ذیل ہے:

$$P(X=x)=\frac{x}{21}, x=1,2,3,4,5,6$$

کیا یہ درست احتمال کمیت تفاعل ہے؟اس کا کیا احتمال ہو گا کہ نمبر4سے بڑا ہو؟

حل:

تمام احتمالات کی قدر ہو گی:

$$\sum_{x=1}^{6}\frac{x}{21}=\frac{1+2+3+4+5+6}{21}=\frac{21}{21}=1$$

چونکہ تمام احتمالات کا جوڑ ایک ہے لہذا یہ درست احتمال کمیت تفاعل ہے۔

اس کا احتمال کہ پانسے کا نمبر4سے بڑا ہو:

$$P(X=5)+P(X=6)=\frac{5}{21}+\frac{6}{21}=\frac{11}{21}$$

مثال 6.6: فرض کریں کہ ایک متغیر X کا احتمال کمیت تفاعل درج ذیل ہے:

$$P(X=x)=\begin{cases}0.1 & \text{if } x=-2\\ 0.4 & \text{if } x=0\\ 0.3 & \text{if } x=1\\ 0.2 & \text{if } x=2\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

احتمال کمیت تفاعل کو بار گراف سے دکھائیں۔ معلوم کریں $P(X\leq 1)$۔

حل:

درج بالا تفاعل کا بار گراف تصویر6.3میں دیا گیا ہے:

$$P(X\leq 1)=P(-1)+P(0)+P(1)=0.1+0.4+0.3=0.8$$

مثال 6.7: فرض کریں کہ:

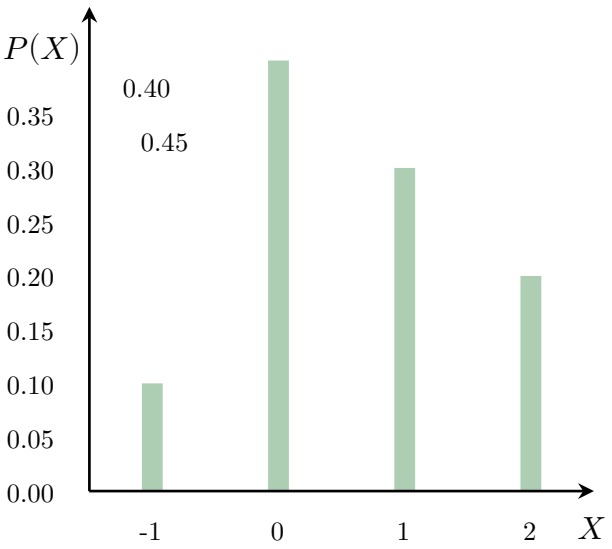
$$P(X=0)=0.2,$$
$$P(X=1)=0.5,$$
$$P(X=2)=p$$

p کی قدر اخذ کریں اور تصدیق کریں کہ یہ درست احتمال کمیت تفاعل ہے۔

حل:

کل احتمال ایک ہونا چاہیے:

$$0.2+0.5+p=1$$
$$p=0.3$$



تصویر6.3

چونکہ تمام احتمال کی قدریں مثبت ہیں اور تمام قدروں کا جوڑ ایک ہے۔ لہذا یہ درست احتمال کمیت تفاعل۔

مثال 6.8: فرض کریں کہ

$$P(X = x) = kx \text{ for } x = 1,2,3,4$$

k کی قدر اخذ کریں اس طرح کہ یہ درست احتمال کمیت تفاعل ہو۔

حل:

مجموعی احتمال کو ایک ہونا چاہیے

$$k(1 + 2 + 3 + 4) = 1$$
$$k(10) = 1$$
$$k = \frac{1}{10}$$

لہذا،

$$P(X = x) = \frac{x}{10}$$

6.3.3 تراکمی کمیت تفاعل (Cumulative Mass Function)

تراکمی کمیت تفاعل ایسا تفاعل ہے جو اس کا احتمال بیان کرتا ہے کہ منفصل متغیر کی قدر دی گئی قدر سے کم یا اس کے مساوی ہے۔ آسان لفظوں میں یہ وہ تفاعل ہے جو بیان کرتا ہے کہ تصادفی تجربے کا نتیجہ کسی متعینہ قدر x کے مساوی یا اس سے کم ہو گا۔ ریاضیاتی طور پر:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k \leq x} P(X = k)$$

مثال 6.9: ایک پانسے کو پھینکا جاتا ہے۔ اگر پانسے کا نمبر متغیر X ہے تو اس تجربے کا احتمال کمیت تفاعل اور تراکمی کمیت تفاعل ہو گا:

X	$P(X = x)$	$F(x) = P(X \leq x)$
1	1/6	$\frac{1}{6} = 0.167$
2	1/6	$\frac{2}{6} = 0.333$
3	1/6	$\frac{3}{6} = 0.5$
4	1/6	$\frac{4}{6} = 0.667$
5	1/6	$\frac{5}{6} = 0.833$
6	1/6	$\frac{6}{6} = 1$

ہم نے اوپر بیان کیا کہ تراکمی کمیت تفاعل متغیر X کی قدر کے x کے مساوی یا کم ہونے کا احتمال بیان کرتا ہے۔ اس طرح پانسہ پھینکنے پر 1 یا اس سے کم قدر آنے کا احتمال $P(X \leq x)$ ہو گا:

$$F(1) = P(X \leq 1) = \frac{1}{6}$$

اسی طرح 3 یا اس سے کم آنے کا احتمال ہو گا:

$$F(3) = P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0.5$$

مثال 6.10: دو سکے اچھالنے پر اگر چت کی تعداد متغیر X ہو تو احتمال کمیت تفاعل اور تراکمی کمیت تفاعل ہوں گے:

X	$P(X = x)$	$F(x) = P(X \leq x)$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$

مثال 6.11: چار سکے اچھالے جاتے ہیں۔ اگر چت کی تعداد متغیر X ہو تو چار نتائج ممکن ہیں۔ صفر چت ہوں، ایک چت ہوں، دو چت ہوں، تین چت ہوں یا چاروں سکوں پر چت ہوں۔ کل 16 ممکنہ نتائج ہو سکتے ہیں۔ اس تجربے کا احتمال کمیت تفاعل بیان کرے گا کہ متعینہ قدر کا احتمال کیا ہو گا۔

X	اجتماع	$P(X = x)$
0	$1(TTTT)$	$\frac{1}{16}$
1	$4(HTTT, THTT, TTHT, TTTH)$	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$
2	$6(HHTT, HTHT, HTTH, THHT, THTH, TTHH)$	$\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$
3	$4(HHHT, HHTH, HTHH, THHH)$	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$
4	$1(HHHH)$	$\frac{1}{16}$

تراکمی کمیت تفاعل ہو گا:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$X \leq x$	تراکمی کمیت تفاعل کا حساب	$P(X \leq x)$
$X \leq 0$	$P(X = 0)$	$\frac{1}{16}$
$X \leq 1$	$P(X = 0) + P(X = 1)$	$\frac{1}{16} + \frac{4}{16} = \frac{5}{16}$
$X \leq 2$	$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$	$\frac{5}{16} + \frac{6}{16} = \frac{11}{16}$
$X \leq 3$	$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$	$\frac{11}{16} + \frac{4}{16} = \frac{15}{16}$
$X \leq 4$	All Probabilities	$\frac{15}{16} + \frac{1}{16} = 1$

6.3.4 متصل توزیع احتمال (Continuous Probability Distribution)

اوپر ہم بیان کر چکے ہیں کہ متغیر X متصل تصادفی متغیر ہوتا ہے اگر یہ متغیر دی گئی حد میں لا محدود قدریں لے سکتا ہے۔ مثال کے طور پر، کلاس میں طلبا کا قد متصل تصادفی متغیر ہے کیونکہ کسی بھی طالب علم کا قد کوئی بھی نمبر ہو سکتا ہے اس پر منحصر ہوتے ہوئے کہ ہمارا پیمانۂ پیائش کتنا درست ہے۔ اسی طرح درجہ حرارت متصل متغیر ہے کیونکہ درجہ حرارت کسی بھی دو عدد کے درمیان کسی بھی عددی قدر کو لے سکتا ہے۔

اوپر ہم دیکھ چکے ہیں کہ متصل متغیر کے کسی مخصوص قدر کو لینے کا احتمال صفر ہوتا ہے۔ لہذا ہم متصل متغیر سے متعلق اس کا احتمال اخذ کرتے ہیں کہ اس کا کیا احتمال ہے کہ متغیر دو مخصوص قدروں کے درمیان کوئی قدر لے گا۔ مثال کے طور پر اس کا احتمال کہ دو نمبرات 2 اور 3 کے بیچ کسی ایک مخصوص نمبر کو اخذ کریں۔ اس کا احتمال صفر ہے۔ لیکن ہم یہ کہ سکتے ہیں کہ اس کا احتمال کہ ہم 2.4 اور 2.6 کے بیچ کوئی نمبر اخذ کریں 20 فیصد ہے۔ اسی طرح ہم اس کے احتمال کا بھی حساب کر سکتے ہیں کہ ہمارا نمبر مثال کے طور پر 2.5 سے چھوٹا ہو۔ اسی طرح اس کا احتمال بھی اخذ کیا جا سکتا ہے کہ نمبر مثال کے طور پر 2.8 سے بڑا ہو۔

درج بالا سے ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ منفصل متغیر کی طرح متصل متغیر کی توزیع احتمال کو اخذ نہیں کیا جا سکتا۔ لیکن متصل متغیر کی صورت میں اس کا احتمال اخذ کیا جا سکتا ہے کہ متغیر کی قدر دو قدروں کے بیچ آئے۔ یعنی ہم کہ سکتے ہیں:

$P(a < X < b)$ (اس کا احتمال کہ متغیر X وقفہ (a, b) کے بیچ کوئی قدر لے گا)

$P(X > c)$ (س کا احتمال کہ متغیر X کی قدر c سے بڑی ہو)

$P(X < d)$ (س کا احتمال کہ متغیر X کی قدر d سے چھوٹی ہو۔)

چونکہ کسی ایک مخصوص قدر اخذ کرنے کا احتمال صفر ہوتا ہے یعنی:

$$P(X = a) = 0, P(X = b) = 0$$

لہذا ہم احتمال کو درج ذیل کی طرح بھی لکھ سکتے ہیں:

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b)$$
$$P(X > c) = P(X \geq c)$$
$$P(X < d) = P(X \leq d)$$

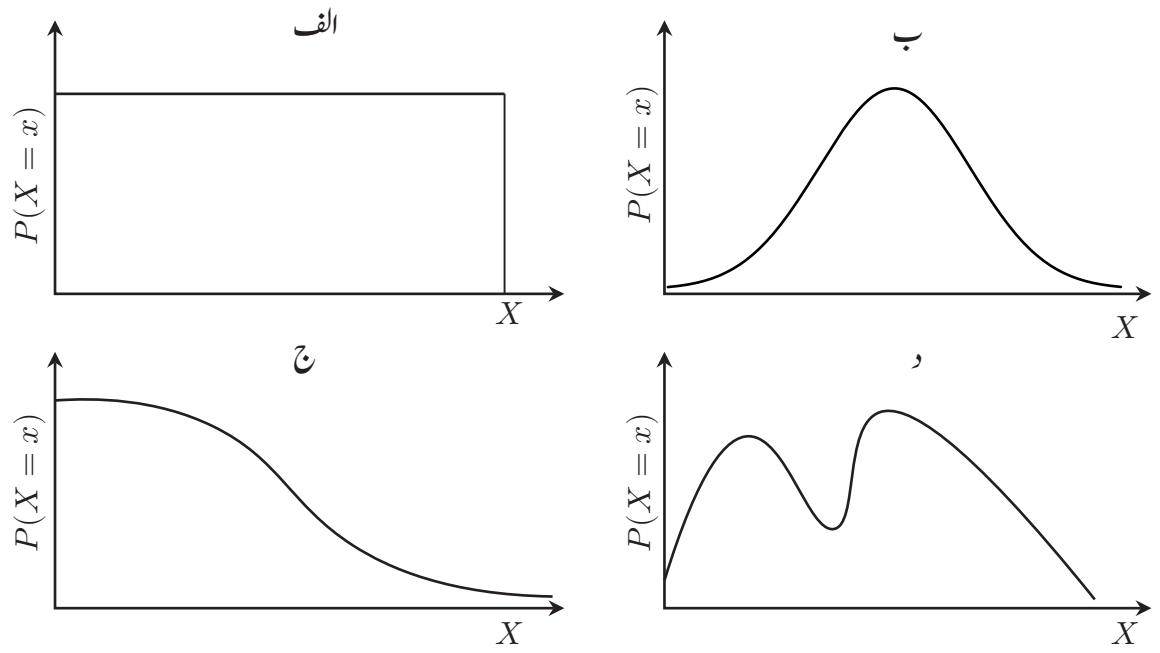
اس طرح متصل توزیع احتمال متصل تصادفی متغیر کے تمام ممکنہ نتائج کو بیان کرتی ہے۔ چونکہ متصل متغیر کی لا محدود طور پر بہت ساری ممکنہ قدریں ہو سکتی ہیں، اس لیے ہم انفرادی نقاط کو کوئی امکان تفویض نہیں کرتے ہیں۔ اس کے بجائے، ہم متغیر کی قدر کے ایک رینج یا حد میں آنے کے احتمال کو بیان کرتے ہیں۔

1. احتمال کثافت تفاعل (Probability Density Function-PDF)

متصل توزیع احتمال کو احتمال کثافت تفاعل (Probability Density Function-PDF) تفاعل سے دکھایا جا سکتا ہے۔

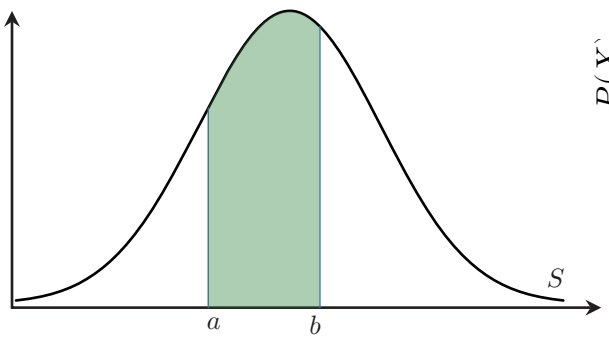
یہ تفاعل توزیع کی شکل کو بیان کرتا ہے۔ احتمال کثافت تفاعل دی گئی حد کے اندر تصادفی متغیر کی قدر لینے کے امکان کو بیان کرتا ہے۔ یہ بنیادی طور پر اس بات کا خاکہ پیش کرتا ہے کہ تصادفی متغیر کی اقدار کس طرح پوری رینج میں تقسیم ہوتی ہے، اور اس طرح توزیع کی شکل کی ایک بصری عکاسی فراہم کرتا ہے، جیسے کہ آیا یہ ہموار ہے، اسکیو ہے، یا چوٹی والی ہے۔

احتمال کثافت تفاعل کو گراف میں خط کے ذریعے بھی دکھایا جاسکتا ہے۔ یہ خط کئی مختلف شکلیں اختیار کر سکتا ہے۔ بعض شکلیں تصویر 6.4 میں دکھائی گئی ہیں۔

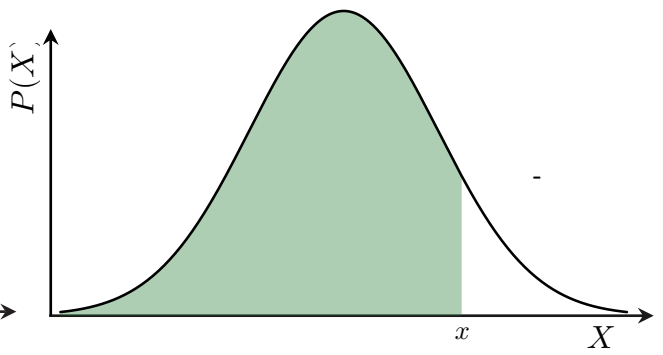


تصویر 6.4: احتمال کثافت تفاعل خطوط

متصل تصادفی متغیر کے قدروں کے احتمال کا حساب ان خطوط کے نیچے کے رقبے سے کیا جاسکتا ہے۔ چونکہ احتمالات مثبت ہوتے ہیں لہذا کثافت تفاعل کا گراف متعلقہ وقفہ (a, b) کے بیچ ہمیشہ محور X کے اوپر ہو گا۔ اسی طرح، چونکہ تمام احتمال کی جمع 1 ہوتی ہے لہذا خط کے نیچے کا کل رقبہ 1 ہو گا۔ اس طرح، تصویر 6.4 میں ہر خط کے نیچے کا کل رقبہ 1 ہو گا۔ اس کے احتمال کا حساب کرنے کے لیے کہ متغیر دو



تصویر 6.5: احتمال کثافت تفاعل



تصویر 6.6: تراکمی کثافت تفاعل

قدروں a اور b کے درمیان کوئی قدر لے گا، محور X پر $X = a$ اور $X = b$ کے بیچ خط کے نیچے کا رقبہ اخذ کریں۔ علامتی زبان میں:

$$P(a \leq x \leq b) = \text{area under the curve between } X = \text{a and } X = \text{b and above the X} - \text{axis}$$

مثال کے طور پر تصویر 6.5 دیکھیں۔ تصویر میں S توزیع احتمال خط ہے۔ اس کا احتمال کہ متغیر X قدر a اور قدر b کے بیچ کوئی قدر لے رنگین رقبہ ہو گا۔

2. تراکمی توزیع احتمال (Cumulative Distribution Function-CDF)

متصل متغیر کا تراکمی توزیع احتمال آپ کو یہ امکان بتاتا ہے کہ متغیر کسی خاص قدر سے کم یا اس کے برابر ہے۔ ریاضی کے لحاظ سے:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

اسے تراکمی تفاعل کہا جاتا ہے کیونکہ یہ احتمالات کو بائیں سے x تک جمع کرتا ہے۔ دیکھیں تصویر 6.6۔ تصویر میں رنگ بھرا حصہ اس کے احتمال کو دکھاتا ہے کہ متغیر X کی قدر x یا اس سے کم ہو گی۔

6.4 اوسط، متوقع قدر اور معیاری انحراف

(Mean, Expected Value and Standard Deviation)

آپ اکائی 3 میں اوسط اور معیاری انحراف کا مطالعہ کر چکے ہیں۔ تصادفی متغیر کا اوسط یا متوقع قدر اس متغیر کا طویل مدتی اوسط ہوتا ہے۔ نظریہ احتمال میں، طویل مدتی اوسط (جسے متوقع قدر بھی کہا جاتا ہے) سے مراد وہ اوسط نتیجہ ہے جس کی کسی تصادفی تجربے سے آپ توقع کرتے ہیں جب اس تجربے کو کئی بار دہرایا جائے۔ مثال کے طور پر اگر آپ ایک سکے کو 1000 بار اچھالیں تو آپ توقع کریں گے کہ 500 بار چت آئے یعنی چت آنے کا احتمال 0.5 ہو گا۔ طویل مدتی کا لفظ اس لیے کہ قلیل مدتی نتائج سے فرق کیا جا سکے۔ مثال کے طور پر سکے کو 10 بار اچھالنے پر ممکن ہے کہ آپ کو صرف تین چت ملیں جس سے اوسط 0.3 ہو گا۔ لیکن اسی سکے کو 1000 بار اچھالنے پر آپ کا نتیجہ 500 چت کے آس پاس ہو گا۔ کارل پیرسن نے ایک سکے کو 24000 بار اچھالا اور چت 12012 بار آیا جو 12000 چت کے نظریاتی احتمال سے بہت قریب ہے۔

متوقع قدر اخذ کرنے کے لیے آپ تصادفی متغیر کی ہر قدر کو اس کے احتمال سے ضرب دیں اور انہیں جوڑ دیں۔ یعنی:

$$E(X) = \sum [x.\, P(X = x)]$$

مثال کے طور پر درج بالا کریڈٹ کارڈ کی مثال میں متوقع قدر ہو گی:

x	$P(X = x)$	$x.\, P(X = x)$
0	0.10	$0 \times 0.10 = 0$
1	0.35	$1 \times 0.35 = 0.35$
2	0.30	$2 \times 0.30 = 0.60$
3	0.15	$3 \times 0.15 = 0.45$
4	0.10	$4 \times 0.10 = 0.40$
		$\Sigma[\text{X. P(X)}] = 1.8$

صارفین کے پاس اوسطاً 1.8 کریڈٹ کارڈ ہوں گے۔

تصادفی متغیر کا معیاری انحراف یہ بتاتا ہے کہ تصادفی متغیر کی قدروں کا پھیلاؤ اس کی متوقع قدر کے ارد گرد کیسا ہے۔ معیاری انحراف کی قدر زیادہ ہونے کا مطلب ہے کہ متغیر کی قدروں کا پھیلاؤ زیادہ ہے۔ اس کی قدر کم ہونے کا مطلب ہے کہ متغیر کی قدروں کا پھیلاؤ کم ہے۔ معیاری انحراف ہو گا:

$$\sigma = \sqrt{\Sigma[(X - E(X))^2 P(X)]}$$

درج بالا مثال کا معیاری انحراف ہو گا:

x	$P(X = x)$	$x.P(X = x)$	$x - E(X)$	$(x - E(X))^2$
0	0.10	$0 \times 0.10 = 0$	-1.8	3.24
1	0.35	$1 \times 0.35 = 0.35$	-0.8	0.64
2	0.30	$2 \times 0.30 = 0.60$	0.2	0.04
3	0.15	$3 \times 0.15 = 0.45$	1.2	1.44
4	0.10	$4 \times 0.10 = 0.40$	2.2	4.84
		$\Sigma[\mathrm{X.P(X)}] = 1.8$		

$$\sigma = \sqrt{0.324 + 0.224 + 0.012 + 0.216 + 0.484} = 1.12$$

سابق میں آپ تفاوت کے بارے میں بھی پڑھ چکے ہیں۔ تفاوت تصادفی متغیر کی قدروں کی اس کی متوقع قدر سے انحراف کے مربع کے اوسط کی پیمائش کرتا ہے۔ منفصل توزیع احتمال کا تفاوت ہوتا ہے:

$$\sigma^2 = \sum[X - E(X)]^2 P(X)$$

نوٹ کریں کہ معیاری انحراف متغیر کا مثبت جذر المربع ہے:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

تفاوت کو درج ذیل فارمولا سے بھی اخذ کیا جا سکتا ہے:

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

جہاں ہے:

$$E(X^2) = \sum X^2 P(X)$$

اس طرح، معیاری انحراف ہو گا:

$$\sigma = \sqrt{E(X^2) - [E(X)]^2}$$

معیاری انحراف کے دونوں طریقے ایک ہی نتیجہ دیتے ہیں۔ تاہم توزیع احتمال کی صورت میں شارٹ کٹ فارمولا اکثر زیادہ آسان ہوتا ہے۔

مثال 6.12: ایک تصادفی متغیر X کی توزیع احتمال درج ذیل ہے:

x	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0.10	0.20	0.40	0.20	0.10

متوقع قدر $E(X)$ اخذ کریں۔

حل:

سب سے پہلے تصدیق کریں کہ احتمالات کا جوڑ 1 ہے۔

$$0.10 + 0.20 + 0.40 + 0.20 + 0.10 = 1.00$$

متوقع قدر ہو گی:

$$E(X) = \Sigma X.\, P(x)$$
$$E(X) = 1(0.10) + 2(0.20) + 3(0.40) + 4(0.20) + 5(0.10)$$
$$E(X) = 0.10 \ + 0.40 + 1.20 + 0.80 + 0.50$$
$$E(X) = 3.00$$

مثال 6.13: ایک دکاندار نے 200 گھنٹوں کے دورانیے میں فی گھنٹہ آنے والے گاہکوں کی تعداد درج کی:

صارفین (X)	0	1	2	3	4
تعداد	20	60	70	40	10

گاہکوں کی فی گھنٹہ متوقع تعداد کیا ہو گی؟

حل:

سب سے پہلے تعداد کو احتمال میں تبدیل کریں۔ اس کے لیے تمام تعداد کو 200 سے تقسیم کریں۔

x	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	0.10	0.30	0.35	0.20	0.05

$$E(X) \ = \ 0(0.10) + 1(0.30) + 2(0.35) + 3(0.20) + 4(0.05)$$
$$E(X) = 0 \ + 0.30 + 0.70 + 0.60 \ 0.20$$
$$E(X) = 1.80$$

دکاندار فی گھنٹہ اوسطاً 1.8 گاہکوں کی آمد کی توقع کر سکتا ہے۔

مثال 6.14: ایک کھلاڑی ایک منصفانہ پانسہ پھینکتا ہے۔ اگر نتیجہ 1 یا 2 آئے، تو وہ ₹10 ہارے گا۔ اگر نتیجہ 3 یا 4 آئے، تو وہ نہ جیتے گا اور نہ ہی ہارے گا۔ اگر نتیجہ 5 یا 6 آئے، تو وہ ₹15 جیتے گا۔ فی گیم متوقع فائدہ تلاش کریں۔

حل:

X سے فائدے کو دکھائیں۔

نتیجہ	x	$P(X = x)$
آئے 2 یا 1 پانسے پر	-10	$2/6 \ = 1/3$
آئے 4 یا 3 پانسے پر	0	$2/6 \ = 1/3$

آئے 6 یا 5 پانسے پر	$+15$	$2/6 = 1/3$

$$E(X) = (-10)\left(\frac{1}{3}\right) + (0)\left(\frac{1}{3}\right) + (15)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$E(X) = -\frac{10}{3} + 0 + \frac{15}{3}$$

$$E(X) = \frac{5}{3}$$

فی گیم متوقع قدر 1.67 روپے ہے۔ مثبت متوقع قدر کا مطلب ہے کہ گیم اوسطاً کھلاڑی کے حق میں ہو گا۔ بہت سے گیمز کھیلنے پر، کھلاڑی تقریباً 1.67 روپے فی راؤنڈ حاصل کرنے کی توقع کر سکتا ہے۔

مثال 6.15: ایک تصادفی متغیر کی توزیع درج ذیل ہے:

x	2	4	6	8
$P(X = x)$	0.30	0.40	0.20	0.10

اخذ کریں: متوقع قدر $(E(X))$، تفاوت $(\mathrm{Var}(X))$ اور معیاری انحراف $(\mathrm{SD}(X))$۔

حل:

x	$P(X = x)$	$x \cdot P(X = x)$	x^2	$x^2 \cdot P(X = x)$
2	0.30	0.60	4	1.20
4	0.40	1.60	16	6.40
6	0.20	1.20	36	7.20
8	0.10	0.80	64	6.40
Total	1.00	4.20		21.20

$$E(X) = 4.20$$

$$E(X^2) = 21.20$$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 21.20 - (4.20)^2 = 21.20 - 17.64 = 3.56$$

$$\mathrm{SD}(X) = \sqrt{3.56} \approx 1.887$$

اوسط نتیجہ 4.20 ہے اور قدریں عام طور پر اس اوسط کے ارد گرد تقریباً 1.89 اکائیاں پھیلی ہوئی ہیں۔

مثال 6.16: ایک فیکٹری ایسے ڈبے فروخت کرتی ہے جن میں سے ہر ایک میں 3 اشیا ہوتی ہیں۔ ماضی کے اعداد و شمار کی بنیاد پر، فی باکس خراب اشیا کی تعداد X درج ذیل توزیع کی پیروی کرتی ہے:

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0.60	0.25	0.10	0.05

(a) فی باکس خراب اشیا کی متوقع تعداد تلاش کریں۔

(b) معیاری انحراف تلاش کریں۔

(c) اگر ہر خراب شے پر دوبارہ کام کرنے میں فیکٹری کو 50 روپے کی لاگت آتی ہے، تو فی باکس دوبارہ کام کی متوقع لاگت معلوم کریں۔

حل:

(a) متوقع قدر

x	$P(X=x)$	$x \cdot P(X=x)$	$x^2 \cdot P(X=x)$
0	0.60	0.00	0.00
1	0.25	0.25	0.25
2	0.10	0.20	0.40
3	0.05	0.15	0.45
کل	1.00	0.60	1.10

$$E(X) = 0.60$$

فی باکس 0.60 خراب اشیا ہوں گی۔

(b) معیاری انحراف

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1.10 - (0.60)^2 = 1.10 - 0.36 = 0.74$$
$$SD(X) = \sqrt{0.74} \approx 0.860$$

معیاری انحراف 0.860 ہے۔

(b) دوبارہ کام کرنے کی اوسط لاگت

فرض کریں کہ ایک شے پر دوبارہ کام کی لاگت C ہے۔ لہذا X اشیا پر کام کرنے کی کل لاگت ہو گی:

$$C = 50X$$
$$E(C) = 50 \cdot E(X) = 50 \times 0.60 = 30$$

فیکٹری ہر باکس پر دوبارہ کام پر اوسطاً 30 روپے خرچ کرنے کی توقع کر سکتی ہے۔

6.5 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی کے مطالعے کے بعد طلبا:

- تصادفی متغیر کی وضاحت کر سکتے ہی اور منفصل اور متغیر متغیر کے مابین فرق بیان کر سکتے ہیں۔
- احتمال کمیت تفاعل اور احتمال کثافت تفاعل کی وضاحت کر سکتے ہیں۔
- تراکمی توزیع تفاعل کی وضاحت کر سکتے ہیں۔
- متوقع قدر (اوسط) اور تفاوت کی وضاحت کر سکتے ہیں۔

6.6 فرہنگ (Glossary)

احتمال کثافت تفاعل :Probability Density Function- تفاعل جو نسبتی امکان بتاتا ہے کہ متصل تصادفی متغیر مخصوص قدریں

لے گا۔

احتمال کمیت تفاعل :Probability Mass Function- تفاعل جو یہ احتمال دیتا ہے کہ منفصل تصادفی متغیر کوئی مخصوص قدر لے گا۔

تراکمی توزیع تفاعل :Cumulative Distribution Function (Probability Distribution Function)- تفاعل جو بتاتا ہے اس کا احتمال کہ تصادفی متغیر X کی قدریں مخصوص قدر سے کم یا مساوی ہوں گی۔

تصادفی متغیر :Random Variable- متغیر جو تصادفی عمل پر مبنی مختلف قدریں لے سکتا ہے۔

توزیع احتمال :Probability Distribution- اس کی ریاضیاتی وضاحت کہ تصادفی متغیر کی قدریں کیسے تقسیم ہوتی ہیں یا پھیلی ہوتی ہیں۔

متوقع قدر :Expected Value- تصادفی متغیر کی طویل مدتی قدر یا مرکزی قدر

6.7 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

6.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. کون سا متغیر صرف قابل شمار قدروں کو لے سکتا ہے؟

(a) متصل تصادفی متغیر (b) منحصر متغیر

(c) منفصل تصادفی متغیر (d) وقفہ متغیر

2. تفاعل جو منفصل تصادفی متغیر کی ہر قدر کے لیے احتمالات تفویض کرتا ہے کہلاتا ہے:

(a) تراکمی تفاعل (b) احتمال کمیت تفاعل

(c) توزیع خط (d) احتمال کثافت تفاعل

3. احتمال کمیت تفاعل کی تمام احتمال کی قدروں کا جوڑ ہوتا ہے:

(a) 0 (b) کوئی بھی مثبت نمبر

(c) 1 (d) متغیر پر منحصر ہوتا ہے

4. متصل متغیر کے لیے اس کا احتمال کہ یہ کوئی مخصوص قدر لے گا ہوتا ہے:

(a) 1 (b) 0اور1 کے بیچ

(c) اس نقطے پر PDF کے مساوی (d) 0

5. درج ذیل میں سے احتمال کمیت تفاعل کے لیے درست نہیں ہے:

(a) $P(X = x) \geq 1$ (b) Total Probability $= 1$

(c) متغر کا متصل ہونا ضروری ہے (d) صرف منفصل متغیر کے لیے ہوتا ہے

6. متصل متغیر کے لیے احتمال کمیت تفاعل ہمیشہ ہوتا ہے:

(a) 1 سے بڑا (b) منفی

(c) غیر منفی (d) 0 سے کم

7. تصادفی متغیر کی متوقع قدر سے مراد ہے:

(a) وسیط (b) موڈ

(c) اوسط نتیجہ (d) سب سے اعلیٰ ترین ممکنہ قدر

8. توزیع کا معیاری انحراف بتاتا ہے:

(a) مرکزی رجحان (b) مڑاو

(c) پھیلاؤ یا تغیر (d) اونچائیوں کی تعداد

9. درج ذیل میں سے کون سی تراکمی کثافت تفاعل کی خاصیت نہیں ہے؟

(a) یہ غیر تقلیل ہوتا ہے (b) یہ صفر سے ایک کے بیچ ہوتا ہے

(c) یہ دیتا ہے $P(X = x)$ (d) اس کا اطلاق تمام تصادفی متغیرات پر ہوتا ہے

10. کس صورت میں احتمال کمیت تفاعل کی قدر ایک سے بڑی ہوتی ہے؟

(a) ہمیشہ (b) صرف تب جب کل رقبہ ایک سے زیادہ ہو

(c) کبھی نہیں (d) صرف یونیفارم توزیع میں

6.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. تصادفی متغیر کی وضاحت کریں اور ایک مثال دیں۔

2. ایک تصادفی متغیر X کی توزیع احتمال درج ذیل ہے:

X	1	2	3	4
$P(X = x)$	0.20	0.30	p	0.10

p کی قدر معلوم کریں۔

3. دو ضروری خصوصیات بیان کریں جنہیں ایک درست احتمال کمیت تفاعل کو پورا کرنا چاہیے۔

4. متوقع قدر کسے کہتے ہیں؟ معیاری انحراف کیا ہے؟

5. کیا احتمال کثافت تفاعل کی قدر کبھی منفی ہو سکتی ہے؟ کیوں یا کیوں نہیں؟

6.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. احتمال کمیت تفاعل اور احتمال کثافت تفاعل اور تراکمی توزیع تفاعل کے مابین فرق کو وبالتفصیل بیان کریں۔
2. منفصل متغیر کی متوقع قدر اور تفاوت کی مع مثال وضاحت کریں۔
3. ایک تصادفی متغیر X کا احتمال کمیت تفاعل درج ذیل ہے:

$$p(1) = 0.2, p(2) = 0.3, p(3) = 0.4, p(4) = 0.1$$

معلوم کریں:

(a) $E(X)$

(b) $E(X^2)$

(c) $\mathrm{Var}(X)$

(d) $\mathrm{SD}(X)$

6.8 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Gupta, S. P. (2020). *Statistical methods* (44th ed.). Sultan Chand & Sons.
2. Bhardwaj, R. S. (2011). *Business statistics* (2nd ed.). Excel Books India.
3. Srivastava, T. N., & Rego, S. (2012). *Statistics for management* (2nd ed.). Tata McGraw-Hill Education.
4. Sharma, J. K. (2019). *Business statistics* (5th ed.). Vikas Publishing House.

اکائی 7: منفصل توزیعِ احتمال

(Discrete Probability Distribution)

اکائی کے اجزا:

7.0 تمہید (Introduction)

7.1 مقاصد (Objectives)

7.2 دور قمی کلیہ (Binomial Theorem)

7.3 دور قمی توزیع احتمال (Binomial Probability Distribution)

7.3.1 دور قمی توزیع احتمال کا اوسط اور تفاوت
(Mean and Variance of Binomial Distribution)

7.3.2 دور قمی توزیع کو فٹ کرنا (Fitting Binomial Distribution)

7.4 توزیعِ پواسون (Poisson Distribution)

7.5 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

7.6 فرہنگ (Glossary)

7.7 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

7.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

7.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

7.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

7.8 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

7.0 تمہید (Introduction)

سابقہ اکائی میں، آپ نے توزیع احتمال کے بنیادی تصورات اور غیر یقینی واقعات کو بیان کرنے کے لیے تصادفی متغیرات کو کس طرح استعمال کیا جا سکتا ہے یہ سیکھا۔ آپ نے توزیع احتمال کی خصوصیات جیسے ان کا احتمال کمیت تفاعل، متوقع قدر اور تفاوت کا مطالعہ کیا۔ اس اکائی میں ہم دو سب سے اہم اور وسیع پیمانے پر استعمال ہونے والی منفصل توزیع احتمال یعنی دور قمی توزیع احتمال اور توزیعِ پواسون کا مطالعہ

کریں گے۔

یہ دونوں توزیع حقیقی زندگی کے بہت سے حالات میں پیدا ہوتی ہے۔ دورقمی توزیع کا استعمال اس وقت ہوتا ہے جب ایک تجربہ بار بار ہونے والے ٹرائلز پر مشتمل ہوتا ہے جس میں صرف دو ممکنہ نتائج ہوتے ہیں، جیسے کہ کامیابی یا ناکامی۔ دوسری طرف، پوئیسن احتمال کا استعمال وقت یا جگہ کے ایک مقررہ وقفہ میں ہونے والے تصادفی واقعات کی تعداد کو ماڈل کرنے کے لیے کیا جاتا ہے، خاص طور پر جب واقعات نایاب ہوتے ہیں۔ اس اکائی میں اس کا مطالعہ کریں گے کہ یہ توزیع کیا ہوتی ہیں، ان کا حساب کیسے کیا جاتا ہے اور عملی زندگی میں ان کے کیا استعمالات ہیں۔

7.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے درج ذیل مقاصد ہیں:

- دورقمی توزیع احتمال کی وضاحت کرنا۔
- پوئیسن توزیع احتمال کی وضاحت کرنا۔
- دیے گئے پیرامیٹرز کے ساتھ ہر توزیع کے ساتھ احتمال کا حساب کرنا۔
- دورقمی توزیع احتمال اور پوئیسن توزیع احتمال کے درمیان تعلق کی وضاحت کرنا۔

7.2 دورقمی کلیہ (Binomial Theorem)

دورقمی توزیعِ احتمال کا مطالعہ کرنے سے پہلے، آیئے پہلے دورقمی کلیہ کا مختصراً مطالعہ کرتے ہیں۔ دورقمی کلیہ ایسا الجبری طریقہ ہے جس کی مدد سے ہم $(a+b)^n$ کی توسیع کر سکتے ہیں۔

جب ہم $(a+b)^2$ کو حل کرتے ہیں تو ہمیں $a^2+2ab+b^2$ حاصل ہوتا ہے۔ جب ہم $(a+b)^3$ کی توسیع کرتے ہیں تو ہمیں $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ملتا ہے۔ جیسے جیسے قوت نما (n) بڑا ہو جاتا ہے اس عمل کو کرنا مشکل ہوتا جاتا ہے۔ دورقمی کلیہ ہمیں n کی کسی بھی قدر کے ساتھ دورقمی توسیع کا فارمولا دیتا ہے۔ دورقمی کلیے کے مطابق:

$$(a+b)^n = \sum {}^nC_x a^x b^{n-x}$$

جہاں جوڑ $x=0$ سے $x=n$ تک جاتا ہے، اور ضریب ${}^nC_x$ جو ہوتا ہے:

$${}^nC_x = \frac{n!}{x!\cdot(n-x)!}$$

اس طرح $(a+b)^n$ ہوگا:

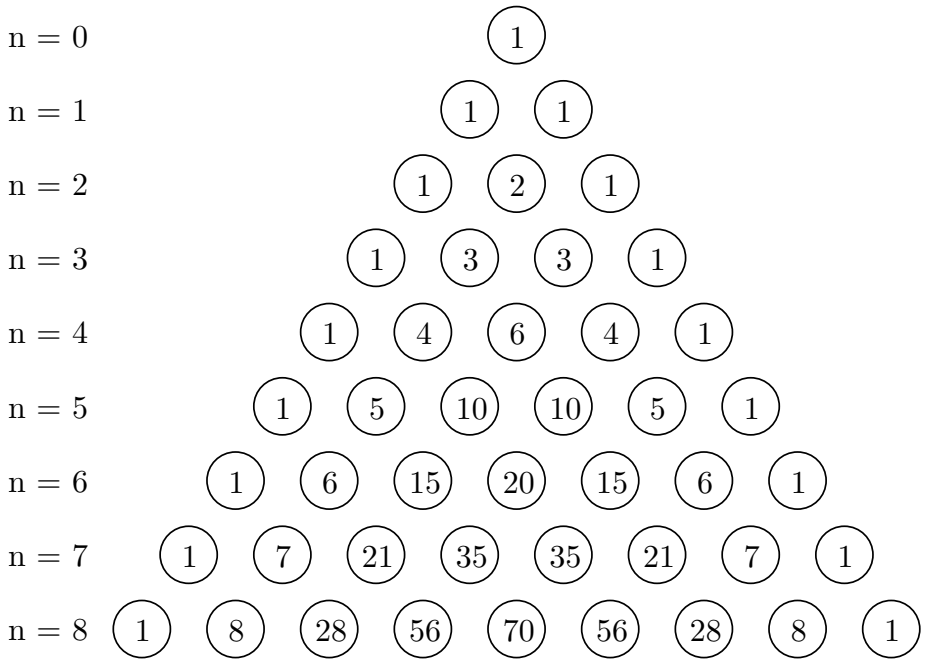
$$(a+b)^n = {}^nC_0\cdot a^n + {}^nC_1\cdot a^{n-1}b + {}^nC_2\cdot a^{n-2}b^2 + \ldots + {}^nC_n\cdot b^n$$

دورقمی ضریب ${}^nC_x$ ترتیب کی پرواہ کیے بغیر n اشیا میں سے x اشیا کو منتخب کرنے کے طریقوں کی تعداد شمار کرتا ہے۔ اس کو بہتر سمجھنے کے لیے درج ذیل کچھ قدروں کو دیکھیں۔

n	x	${}^nC_x = \frac{n!}{x! \cdot (n - x)!}$	قدر
4	0	$\frac{4!}{0! \cdot 4!}$	1
4	1	$\frac{4!}{1! \cdot 3!}$	4
4	2	$\frac{4!}{2! \cdot 2!}$	6
4	3	$\frac{4!}{3! \cdot 1!}$	4

غور کریں کہ قدریں متشاکل ہیں یعنی ${}^nC_x = {}^nC_{n-x}$ ہے۔ 4 میں سے 2 اشیا کا انتخاب کرنا 2 کو ترک کرنے کے مساوی ہے۔

1. پاسکل کا مثلث



تصویر 7.1: پاسکل کا مثلث

دور قمی ضریب ایسا خوبصورت پیٹرن بناتے ہیں جسے پاسکل کا مثلث کہا جاتا ہے۔ اس مثلث میں ہر نمبر اس کے اوپر کے دو نمبروں کا مجموعہ ہوتا ہے۔ ہر قطار متعلقہ توسیع کا ضریب دیتی ہے۔ مثال کے طور پر، $n = 4$ کے لیے قطار 1، 4، 6، 4، 1 ضریب دیتی ہے۔ پاسکل کا مثلث n کی چھوٹی قدروں کے لیے ضربیات (Factorials) کا حساب کیے بغیر ضریب اخذ کرنے کا ایک تیز طریقہ ہے۔

مثال کے لیے $(a + b)^5$ کی توسیع کریں۔

پاسکل کے مثلث کی $n = 5$ قطار سے $(1,5,10,10,5,1)$ سے قدروں کا استعمال کرتے ہوئے:

$$(a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$

2. احتمال میں دور قمی کلیے کی اہمیت

دور قمی توزیع احتمال میں، ہم n آزاد آزمائش ہوتی ہیں جن میں سے ہر ایک کی کامیابی کا امکان p اور ناکامی کا امکان $q = 1 - p$ ہوتا ہے۔ n آزمائشوں میں x کامیابیوں کے امکان میں بالکل وہی اجزا ہوتے ہیں جو دور قمی کلیے میں ہیں:

^nC_x ضرب n آزمائشوں میں x کامیابیوں کے انتظامات کی تعداد کو شمار کرتا ہے۔

p^x کل x کامیابیوں کا امکان دیتی ہے۔

q^{n-x} بقیہ $(n-x)$ ناکامیوں کا امکان فراہم کرتی ہے

7.3 دور قمی توزیع احتمال (Binomial Probability Distribution)

دور قمی توزیع احتمال ایسے احتمالی تجربے سے حاصل کی جاتی ہے جسے دور قمی تجربہ کہا جاتا ہے۔ دور قمی تجربہ وہ تجربہ ہے جو درج ذیل شرائط کو پورا کرتا ہو:

1. تجربے کو مقررہ اور محدود تعداد (n) میں دہرایا جاتا ہے۔
2. ہر آزمائش دوسری آزمائش سے آزاد ہوتی ہے، یعنی کسی خاص آزمائش کے نتیجے کے احتمال کا اثر دوسری آزمائش کے نتائج سے متاثر نہیں ہوتا۔ یعنی نتائج آزاد ہوتے ہیں۔
3. ہر آزمائش کے دو باہمی ناشمول ممکنہ نتائج ہوتے ہیں، جیسے کامیابی یا ناکامی، اچھا یا عیب دار، ہاں یا نہیں، ہٹ یا مس وغیرہ۔ نتائج کو عام طور پر سہولت کے لیے کامیابی اور ناکامی کہا جاتا ہے۔
4. کامیابی کا احتمال (p) یکساں رہتا ہے۔ اسی طرح ناکامی کا احتمال $(q = 1 - p)$ بھی یکساں رہتا ہے۔

مثال کے طور پر تین سکوں کو اچھالنے کا عمل دور قمی تجربہ ہے کیوں کہ یہ چاروں شرائط کو پورا کر رہا ہے۔

1. تجربے کو محدود تعداد میں دہرایا گیا ہے۔ $(n = 3)$
2. تجربے کے نتائج ایک دوسرے سے آزاد ہیں کیوں کہ کیوں کہ ایک سکے کے اچھال کا دوسرے سکے کے اچھال کے نتیجے پر اثر نہیں پڑتا۔
3. ہر آزمائش کے بس دو ہی نتائج ہیں۔ چت یا پٹ۔ سیاق و سباق پر منحصر ہوتے ہوئے، چت اور پٹ میں سے کسی کو بھی کامیابی یا ناکامی کہا جا سکتا ہے۔
4. اگر چت کو کامیابی کہیں تو اس کے احتمال کی قدر $1/2$ ہے اور یہ تبدیل نہیں ہوتی۔ اسی طرح پٹ کا احتمال بھی $1/2$ جو تبدیل نہیں ہوتا۔

پانسے کو مثال کے طور پر 4 بار پھینکنا دور قمی تجربہ نہیں ہوگا کیوں کہ اس کے 6 ممکنہ نتائج ہیں۔ لیکن اسے دور قمی تجربے میں بدلا

جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر ہم نمبر 6 آنے کو کامیابی کہیں اور باقی نمبروں کے آنے کو ناکامیابی کہیں تو یہ دور قمی تجربہ ہو گا۔ اس صورت میں:

1. تجربے کو محدود تعداد میں دہرایا گیا ہے۔ $(n = 4)$
2. تجربے کے نتائج ایک دوسرے سے آزاد ہیں کیوں کہ ایک بار پانسے کے پھینکنے پر آئے نتیجے کا اثر دوسری بار پانسہ پھینکنے پر آئے نتیجے پر نہیں پڑتا۔
3. ہر آزمائش کے بس دو ہی نتائج ہیں۔ 6 کا آنا یا 6 کا نہ آنا۔ 6 کا آنا کامیابی ہو گا اور 6 کا نہ آنا ناکامی ہو گا۔
4. ہر بار پانسے کے پھینکنے پر کامیابی کا احتمال $1/6$ ہو گا اور ناکامی کا احتمال $5/6$ ہو گا۔

اس وضاحت کے بعد اب درج ذیل جدول دیکھیں۔ اگر یہ سوال کیا جائے کہ تین سکوں کے اچھالنے پر صفر کامیابی (چت) اور 3 ناکامی (پٹ) آنے کا کیا احتمال ہے؟

ممکنہ نتائج	X کی قدر (x)	X کا احتمال $P(X = x)$
TTT	0	$\frac{1}{8}$
TTH, THT, HTT	3	$\frac{3}{8}$
THH, HTH, HTT	3	$\frac{3}{8}$
HHH	1	$\frac{1}{8}$

جدول میں آپ دیکھ چکے ہیں کہ یہ احتمال $1/8$ ہے۔ کیوں کہ کل 8 تجربات میں سے ایک میں ممکن ہے تینوں پٹ کا آنا۔ اسے ایسے بھی کہہ سکتے ہیں کہ ایک سکے پر پٹ کے آنے کا احتمال $q = \frac{1}{2}$ ہے۔ تینوں سکوں پر پٹ آنے کے احتمال کے لیے آپ احتمال کے ضرب کے قانون کا استعمال کریں گے۔ لہذا تینوں سکوں پر پٹ آنے کا احتمال $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ ہو گا۔ اسے ہم لکھ سکتے ہیں:

$$P(X = 0) = qqq = q^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

اسی طرح ایک کامیابی اور دو ناکامیوں کا احتمال $\frac{3}{8}$ ہے۔ تین سکوں کے اچھالنے پر کیوں کہ ایسی تین صورتیں ممکن ہیں جن میں ایک سکے پر چت آئے۔ جدول کی تیسری لائن کو دیکھیں۔ ایک چت ان طریقوں سے آسکتا ہے: TTH, THT, HTT۔ اس کو لکھ سکتے ہیں:

$$P(X = 1) = qqp + qpq + pqq = 3pq^2 = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

اسی طرح:

$$P(X = 2) = qpp + pqp + ppq = 3p^2q = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 3) = ppp = p^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

اس نتیجے کو عام کریں تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ n دور قمی تجربے میں x کامیابی اور $n-x$ ناکامی کا احتمال ہو گا:

$$P(x) = {}^nC_x p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

درج بالا $P(x)$ کو دور قمی توزیع کا تفاعل کہا جاتا ہے جس کے پیرامیٹر n اور p ہیں۔ یہ تفاعل n دور قمی آزمائش میں x کامیابی اور $n-x$ ناکامیوں کا احتمال بیان کرتا ہے۔ اگر n آزمائش ہوں تو دور قمی توزیع احتمال میں $(n+1)$ اجزا ہوں گے جن کے مسلسل ضریب ہوں گے:

$${}^nC_0,\ {}^nC_1,\ {}^nC_2,\ {}^nC_3, \ldots,\ {}^nC_n$$

مثال کے طور تین آزمائش کی درج بالا مثال میں توزیع کے اجزا کے ضریب ہیں:

$$1,3,3,1$$

اسی طرح تمام ضریبوں کا جمع 2^n ہو گا۔ جو بنیادی طور پر اجتماع (Combination) کو دکھاتا ہے۔ تین سکوں کی مثال میں ضریبوں کا جوڑ 8 ہے جو مساوی ہے 2^3 کے۔

$$1+3+3+1 = 8 = 2^3$$

مثال 7.1: ایک سکے کو چار بار اچھالا جاتا ہے۔ اس کا احتمال اخذ کریں کہ تین چت اور ایک پٹ آئیں۔

کیوں کہ سکہ 4 بار اچھالا گیا ہے لہذا $n=4$ ہو گا۔ چت آنے کا احتمال $\frac{1}{2}$ ہے اور پٹ آنے کا احتمال بھی $\frac{1}{2}$ ہے۔ چونکہ سوال تین چت آنے کا ہے لہذا $x=3$ ہو گا۔ لہذا:

$$P(3\text{ Heads}) = {}^4C_3 p^3 q$$

$$P(3\text{ Heads}) = \frac{4!}{3!\,(4-3)!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4\times3\times2\times1}{3\times2\times1(1)}\times\frac{1}{16}$$

$$P(3\text{ Heads}) = \frac{1}{4}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ نتیجہ اکائی 6 میں پیش مثال 6.11 جیسا ہی ہے۔

مثال 7.2: ایک پانسے کو تین بار پھینکا جاتا ہے۔ اس کا احتمال بتائیں کہ ایک 5 آئے۔

حل: چونکہ پانسے کو تین بار پھینکا جاتا ہے لہذا $n=3$ ہو گا۔ اگر پانسے پر 5 آنا کامیابی ہے تو اس کا احتمال $\frac{1}{6}$ ہو گا۔ 5 نہ آنے کا احتمال $1-\frac{1}{6}$ یا $\frac{5}{6}$ ہو گا۔ چونکہ کامیابی ایک 5 کا آنا ہے لہذا $x=1$ ہو گا $n-x=2$ ہو گا۔ اس طرح

$$P(\text{One }5) = {}^3C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$= 3\times\frac{1}{6}\times\frac{25}{36} = \frac{25}{72}\text{ or }0.3472$$

یعنی پانسے پر ایک 5 آنے کا امکان تقریباً 34 فیصد ہے۔

مثال 7.3: ایک تیر انداز 80 فیصد بار تیر نشانے پر لگاتا ہے۔ اگر وہ 5 بار تیر چلاتا ہے تو اس کے کیا امکانات ہیں کہ وہ تیر چار بار نشانے پر لگے

گا؟

حل: اس مثال میں $n = 5$ ہے $x = 4$ ہے، $p = 0.8$ ہے اور $q = 0.2$ ہے۔

$$P(\text{Success}) = {}^5C_4 p^4 q$$

$$P(\text{Success}) = \frac{5!}{(5-4)!\,4!} \times (0.8)^4 \times (0.2)$$

$$P(\text{Success}) = 5 \times 0.4096 \times 0.2 = 5 \times 0.08192 = 0.4096$$

مثال 7.4: ایک سوال کے دو ممکنہ نتائج ہوتے ہیں: درست یا غلط۔ اگر کسی طالب علم کے پاس کسی سوال کا صحیح جواب دینے کا 0.7 کا امکان ہے، تو اس امکان کو تلاش کریں کہ طالب علم 5 میں سے 3 سوالوں کا صحیح جواب دے گا۔

حل:

$$n = 5, \quad x = 3, \quad p = 0.7, \quad q = 0.3$$

$$P(X = 3) = {}^5C_3 p^3 q^2$$

$$P(X = 3) = 10(0.7)^3(0.3)^2$$

$$P(X = 3) = 10(0.343)(0.09)$$

$$P(X = 3) = 0.3087$$

طالب علم کا 5 میں 3 سوالوں کے صحیح جواب دینے کا امکان 38.87% ہے۔

مثال 7.5: ایک مشین 0.02 امکان کے ساتھ خراب اشیا بناتی ہے۔ اگر 10 آئٹمز کو آزادانہ طور پر منتخب کیا گیا ہے، تو اس امکان کو تلاش کریں کہ ان میں سے کوئی بھی خراب نہیں ہے۔

حل: فرض کریں کہ X خراب اشیا کی تعداد ہے۔

$$n = 10, \quad x = 0, \quad p = 0.02, \quad q = 0.98$$

$$P(X = 0) = {}^{10}C_0 p^0 q^{10}$$

$$P(X = 0) = {}^{10}C_0 (0.02)^0 (0.98)^{10}$$

چونکہ:

$${}^{10}C_0 = 1, \quad (0.02)^0 = 1$$

$$P(X = 0) = (0.98)^{10}$$

$$P(X = 0) \approx 0.8171$$

اس طرح، 10 آئٹمز میں سے کسی بھی آئٹم کے خراب نہ ہونے کا امکان تقریباً 0.8171 یا 81.71% ہے۔

مثال 7.6: درج بالا مثال میں اس کا احتمال اخذ کریں کہ 10 میں سے کم سے کم ایک آئٹم خراب ہے۔

حل: بجائے اس کے کہ ہم حساب کریں:

$$P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \ldots + P(X = 10)$$

ہم تکملہ کا استعمال کر سکتے ہیں۔ اس طرح:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

سابقہ مثال سے:

$$P(X = 0) = 0.8171$$

لہذا:

$$P(X \geq 1) = 1 - 8171$$
$$P(X \geq 1) \approx 0.1829$$

کم از کم ایک آئٹم کے خراب ہونے کا احتمال تقریباً 18.29% ہے۔

مثال 7.7: اس بات کا احتمال کہ ایک بائع گاہک کو فروخت کر پائے گا 0.4 ہے۔ اگر بائع 6 گاہکوں سے رابطہ کرتا ہے، تو زیادہ سے زیادہ 2 کو فروخت کرنے کا احتمال کیا ہو گا؟

حل: فرض کریں کہ X فروخت کی تعداد ہے۔

$$n = 6, \quad p = 0.4, \quad q = 0.6$$

زیادہ سے زیادہ 2 کا مطلب ہے:

$$P(X \leq 2)$$

لہذا:

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

ہر ایک کا حساب ہو گا:

$$P(X = 0) = {}^6C_0(0.4)^0(0.6)^6 = 0.0467$$
$$P(X = 1) = {}^6C_1(0.4)^1(0.6)^5 = 0.1866$$
$$P(X = 2) = {}^6C_2(0.4)^2(0.6)^4 = 0.3110$$

لہذا:

$$P(X \leq 2) = 0.0467 + 0.1866 + 0.3110 = 0.5443$$

لہذا، زیادہ سے زیادہ 2 فروخت کرنے کا احتمال 54.43% ہے۔

7.3.1 دور قمی توزیع احتمال کا اوسط اور تفاوت (Mean and Variance of Binomial Distribution)

دور قمی توزیع احتمال کا اوسط کامیابی کا طویل مدتی اوسط ہے جس کی آپ امید کرتے ہیں اگر آپ تجربے کو کئی بار دہراتے ہیں۔ اس کو سمجھنے کے لیے فرض کریں کہ آپ 10 سکوں کو ایک بار اچھالتے ہیں اور چت کی تعداد کا شمار کرتے ہیں۔ یہ ایک تجربہ ہوا۔ آپ یہ تجربہ فرض کریں کہ 1000 بار کرتے ہیں۔ کچھ تجربوں میں آپ کو 4 چت ملیں گے کچھ میں 6 ملیں گے۔ کچھ میں 7 یا 3 چت بھی ہو سکتے ہیں۔ اس کے بھی امکانات ہیں کہ آپ کو کسی تجربے میں صفر چت ملیں یا 10 کے 10 چت ملیں۔ لیکن اوسطاً آپ توقع کریں گے کہ ایک تجربے میں آپ کو 5 چت ملیں۔ آپ نے 10 سکوں کو اچھالا اور ہر ایک سکے پر چت آنے کا احتمال 0.5 ہے لہذا 10 سکوں کے اچھالنے پر اوسطاً آپ کو 5 چت ملیں گے $(10 \times 0.5 = 5)$۔ اس طرح دور قمی توزیع احتمال کا اوسط آپ کو بتاتا ہے کہ تجربے کو متعدد بار دہرانے پر آپ کو اوسطاً کیا حاصل

ہو گا۔ اس کی کوئی ضمانت نہیں کہ ایک تجربے میں آپ کو 5 چت ملیں گے لیکن اس تجربے کو متعدد بار دوہرانے پر اوسطاً آپ کو فی تجربہ 5 چت حاصل ہوں گے۔

اسی طرح، دور قمی توزیع احتمال کا معیاری تفاوت یہ بتاتا ہے کہ اوسط کے ارد گرد تغیر یا پھیلاؤ کتنا ہے۔ اگر معیاری انحراف کم ہے تو اس کا مطلب ہو گا کہ تجربے کے نتائج اوسط کے آس پاس زیادہ ہوں گے۔ مثال کے طور پر درج بالا مثال میں معیاری انحراف کم ہونے کی صورت میں یقیناً اوسط 5 ہے لیکن 4 اور 6 کے آنے کے امکانات بھی کافی زیادہ ہیں لیکن صفر اور 10 آنے کے امکانات بہت کم ہیں۔ معیاری انحراف کے زیادہ ہونے کی صورت میں تجربے کے نتائج اوسط سے زیادہ دور ہوں گے یعنی ان کا پھیلاؤ زیادہ ہو گا۔ مثال کے طور پر اوسط تو 5 ہے لیکن 3 یا 7 آنے کے بھی امکانات بہت ہیں۔

دور قمی توزیع کا اوسط، تفاوت اور معیاری انحراف ہوتا ہے:

$$\text{Mean} = E(X) = \mu = np$$
$$\text{Variance} = \sigma^2 = npq$$
$$\text{Standard Deviation} = \sigma = \sqrt{npq}$$

اس کا مطلب ہے کہ n تجربوں میں آپ اوسطاً np کامیابی حاصل کریں گے۔ جبکہ n تجربات میں معیاری انحراف $\sqrt{npq}$ ہو گا۔

مثال 7.8: ایک رقمی توزیع کا اوسط اور معیاری انحراف بالترتیب 12 اور 2 ہے۔ n اور p اور q کی قدریں اخذ کریں۔

حل: دور قمی توزیع کا اوسط اور معیاری انحراف np اور $\sqrt{npq}$ ہوتے ہیں۔ ہمیں دیا گیا ہے

$$np = 12, \sigma = \sqrt{npq} = 2 \Rightarrow npq = 4$$

لہذا:

$$12q = 4$$
$$q = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$
$$p = 1 - q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

اسی طرح:

$$np = 12 \Rightarrow n \times \frac{2}{3} = 12 \ \Rightarrow n = 18$$

لہذا:

$$n = 18, \qquad p = \frac{2}{3}, \qquad q = \frac{2}{3}$$

مثال 7.9: دو پانسوں کے ایک جوڑے کو 5 بار پھینکا جاتا ہے۔ اگر ایسے نمبرات حاصل کرنا جن کا ضرب 6 کامیابی ہو تو اس کا کیا احتمال ہے کہ کم سے کم 4 کامیابیاں حاصل ہوں؟

حل: دو پانسوں کے کل نتائج 36 ہوتے ہیں۔ ہمیں دو پانسوں پر نمبرات کے ایسے امتزاج چاہیے جن کا ضرب 6 ہو۔ دو پانسوں میں ایسے چار امتزاج ممکن ہیں:

$$(1,6), (6,1), (2,3), (3,2)$$

لہذا، 36 نتائج میں سے 4 کامیاب نتائج ہیں۔ لہذا کامیابی کا احتمال (p) ہو گا:

$$p = P(\text{Success}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

لہذا ناکامی کا احتمال q ہو گا:

$$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

چونکہ پانسوں کو 5 بار اچھالا جاتا ہے لہذا $n = 5$ ہو گا۔

ہمیں اس کا احتمال اخذ کرنا ہے کہ کم سے کم چار کامیاب نتائج ہوں۔ یہ دو صورتوں میں ممکن ہے۔ 4 کامیابیاں ہوں یا 5 کامیابیاں ہوں۔ یعنی:

$$P(X \leq 4) = P(X = 4) + P(X = 5)$$

$X = 4$ کا احتمال ہو گا:

$$P(X = 4) = P(\text{Success}) = {}^5C_4 p^4 q$$
$$P(X = 4) = \frac{5!}{(5-4)!\,4!} \times \left(\frac{1}{9}\right)^4 \times \left(\frac{8}{9}\right)$$
$$P(X = 4) = 5 \times \frac{1}{9^4} \times \frac{8}{9} = 5 \times \frac{8}{9^5} = \frac{40}{9^5}$$

$X = 5$ کا احتمال ہو گا:

$$P(X = 5) = P(\text{Success}) = {}^5C_4 p^4 q$$
$$P(X = 5) = \frac{5!}{(5-5)!\,5!} \times \left(\frac{1}{9}\right)^5$$
$$P(X = 5) = \frac{5}{9^5}$$

لہذا:

$$P(X \leq 4) = P(X = 4) + P(X = 5)$$
$$P(X \leq 4) = \frac{40}{9^5} + \frac{5}{9^5} = \frac{45}{9^5}$$
$$P(X \leq 4) = \frac{40}{59049} = 0.000677$$

مثال 7.10: اگر X دور قمی توزیع کی پیروی کرتا ہے اس طرح کہ n=20 ہے اور p=0.3 ہے تو اوسط (E(X))، تفاوت (Var(X)) اور معیاری انحراف (SD(X)) کا حساب کریں۔

حل: دور قمی توزیع کے لیے:

$$E(X) = np$$

لہذا:

$$E(X) = 20(0.3) = 6$$

تفاوت:

$$\text{Var}(X) = npq$$
$$q = 1 - p = 0.7$$
$$\text{Var}(X) = 20(0.3)(0.7) = 4.2$$

معیاری انحراف:

$$SD(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{4.2}$$
$$SD(X) \approx 2.049$$

7.3.2 دور قمی توزیع کو فٹ کرنا (Fitting Binomial Distribution)

دور قمی توزیع احتمال کو فٹ کرنے کا مطلب یہ طے کرنا ہے کہ آیا مشاہدہ شدہ ڈیٹا دور قمی ماڈل کے ذریعے معقول طور پر بیان کیا جا سکتا ہے، اور اگر ایسا ہے تو اس ماڈل کے پیرامیٹرز کیا ہوں گے۔ بہت سے حقیقی زندگی کے حالات میں، ہم کئی بار بار کیے گئے تجربات میں کامیابیوں کی گنتی کا مشاہدہ کرتے ہی۔ مثال کے طور پر، پانچ مصنوعات کے گروپوں میں کتنی ناقص مصنوعات نکلتی ہیں، یا کتنے طلبا متعدد بار لیے گئے ٹیسٹ میں پاس ہوتے ہیں۔

دور قمی توزیع میں فٹ ہونے کے لیے، ہم سب سے پہلے تصدیق کرتے ہیں کہ صورت حال دو قمی تجربے کی تمام شرائط کو پورا کرتی ہے یعنی ہر آزمائش کے صرف دو نتائج (کامیابی یا ناکامی) ہوں، ہر تجربے میں آزمائشوں کی تعداد مقرر ہو، کامیابی کا امکان مستقل ہو، اور ہر آزمائش ایک دوسرے سے آزاد ہو۔ اگر یہ شرائط ڈیٹا پر ہوتی ہیں تو ہم دور قمی دوزیع احتمال کے پیرامیٹرز (n, p) کا تخمینہ کر سکتے ہیں۔

n کو تجربے کے ڈیزائن سے جانا جاتا ہے، اور p کا اندازہ کامیابیوں کے نمونے کے تناسب سے لگایا جاتا ہے۔ ایک بار n اور p معلوم ہو جانے کے بعد، ہم دور قمی احتمال کے فارمولے کا استعمال کرتے ہوئے کامیابیوں کی ہر ممکنہ تعداد کے لیے متوقع تعداد کا حساب لگاتے ہیں۔ یہ متوقع تعداد اس بات کی نمائندگی کرتے ہیں کہ ڈیٹا کیسا نظر آنا چاہیے اگر یہ ایک دور قمی توزیع کی پیروی کرتا ہے۔ اس دور قمی توزیع کو مشاہدہ شدہ اعداد و شمار پر فٹ کرنے کے لیے درج ذیل طریقہ اختیار کیا جا سکتا ہے۔

اول، p اور q کی قدر اخذ کریں۔ اگر کسی ایک کی قدر معلوم ہو تو دوسرے کی قدر $p = (1 - q)$ اور $q = (1 - p)$ سے اخذ کی جا سکتی ہے۔ جب p اور q مساوی ہوتے ہیں تو توزیع متشاکل (Symmetric) ہوتی ہے۔ p کے 0.5 سے کم ہونے پر توزیع مثبت طور پر اسکیو ہوتی ہے اور p کے 0.5 سے زیادہ ہونے پر توزیع منفی طور پر اسکیو ہوتی ہے۔

دوم، $0, 1, 2, 3, \ldots, n$ کامیابیوں کا احتمال $(q + p)^n$ دور قمی توسیع سے اخذ کی جا سکتی ہے۔ اس طرح x کامیابیوں کا احتمال ہو گا:

$$P(x) = {}^nC_x p^x q^{n-x}$$

پھر اگر تجربے کو n بار دہرایا جاتا ہے تو x کامیابیوں کی تعداد (Frequency) حاصل کرنے کے لیے اسے N سے ضرب دیں:

$$N \times P(x) = N \times {}^nC_x p^x q^{n-x}$$

اس طرح اگر $x = 0,1,2,3, \ldots n$ رکھنے پر ہمیں دور قمی توزیع کی تجزیاتی تعداد حاصل ہو گی۔ جیسے جدول دیکھیں:

X کی قدر	متوقع تجزیاتی تعداد $(N \times P(x))$
0	Nq^3
1	$N \times {}^nC_1 p^x q^{n-1}$
2	$N \times {}^nC_2 p^x q^{n-2}$
X	$N \times {}^nC_x p^x q^{n-x}$
N	$N \times {}^nC_n p^n$

مثال 7.11: فرض کریں کہ ایک استاد طلبا کے بہت سے گروپوں کو 3 سوالوں پر مشتمل ایک مختصر سوال نامہ دیتا ہے اور یہ ریکارڈ کرتا ہے کہ کتنے طلبا (تین سوالات کے ہر گروپ میں) 0، 1، 2، یا 3 درست جوابات لکھتے ہیں۔ اس طرح کے 100 گروپوں کے بعد، استاد مندرجہ ذیل مشاہدہ شدہ تعددات حاصل کرتا ہے:

صحیح جوابات کی تعداد	0	1	2	3
مشاہدہ شدہ تعدد	18	42	32	8

حل: ہم یہ دیکھنا چاہتے ہیں کہ آیا یہ ڈیٹا $n = 3$ کے ساتھ دور قمی توزیع پر فٹ بیٹھتا ہے۔ سب سے پہلے، فرض کریں کہ ہر طالب علم ایک سوال کا صحیح یا غلط جواب دیتا ہے (دو نتائج)، ہر سوال نامے میں 3 سوال ہیں (یعنی $n = 3$ ہے)، فی سوال کامیابی کا امکان مستقل ہے، اور ہر سوال کے جواب کا نتیجہ ایک دوسرے سے آزاد ہے۔ p کا اندازہ لگانے کے لیے، ہم کامیابیوں کی کل تعداد کا حساب لگاتے ہیں:

$$\text{Total successes} = 0(18) + 1(42) + 2(32) + 3(8) = 130$$

چونکہ کل 100 گروپس ہیں، ہر ایک میں 3 ٹرائلز ہیں، اس لیے ٹرائلز کی کل تعداد 300 ہو گی۔

لہذا کامیابی کا تخمینہ شدہ احتمال ہو گا:

$$\hat{p} = \frac{\text{Total Successes}}{\text{Total Trials}} = \frac{130}{300} = 0.433$$

$$\hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0.433 = 0.5667$$

$n = 3$ اور $p = 0.433$ کا استعمال کرتے ہوئے ہم متوقع دور قمی توزیع احتمال اخذ کر سکتے ہیں۔

چونکہ یہاں 4 اجزا ہیں، لہذا x کی چار متوقع قدریں ہوں گی۔ 0,1,2,3 کامیابیوں کا احتمال درج ذیل دور قمی توسیع سے اخذ کیا جا سکتا ہے:

$$(q + p)^3 = q^3 + 3pq^2 + 3p^2q + p^3$$

$$P(X = x) = {}^nC_x p^x (1 - p)^{n-x}$$

$$P(X=0) = q^3 = 0.5667^3 \approx 0.182$$
$$P(X=1) = 3pq^2 = 3(0.4333)(0.5667)^2 \approx 0.418$$
$$P(X=2) = 3p^2q = 3(0.4333)^2 0.5667 \approx 0.319$$
$$P(X=3) = p^3 = (0.4333)^3 \approx 0.081$$

متوقع تعدد کو اخذ کرنے کے لیے تمام اجزا کو N سے ضرب دیں۔

x	(مشاہداتی تعدد) Observed frequency (f)	نظریاتی احتمال (Theoretical probability) $P(X=x)$	نظریاتی تعدد (Theoretical frequency) $NP(X=x)$
0	18	0.182	18.2
1	42	0.418	41.8
2	32	0.319	31.9
3	8	0.081	8.1
کل	100	1.000	100.0

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مشاہدہ شدہ تعدد متوقع تعدد کے بہت قریب ہے۔

مثال 7.12: ایک تجربے کے نتائج ذیل میں دیے گئے ہیں:

x	0	1	2	3	4
f	8	32	34	24	5

درج بالا اعداد و شمار پر دور قمی توزیع فٹ کریں۔

حل:

$$np = \frac{0(8)+1(32)+2(34)+3(24)+4(5)}{103}$$
$$np = \frac{0+32+68+72+20}{103} = \frac{192}{103} = 1.864$$
$$p = \frac{\text{Mean}}{n} = \frac{1.864}{4} = 0.466, \qquad q = 1-p = 0.534$$

چونکہ یہاں 5 اجزا ہیں، لہذا $n=4$ ہو گا۔ 0,1,2,3,4 کامیابیوں کا احتمال درج ذیل دور قمی توسیع سے اخذ کیا جا سکتا ہے:

$$(q+p)^n = (0.534+0.466)^4$$
$$p^4 + {}^nC_1 p^3 q^1 + {}^nC_2 p^2 q^2 + {}^nC_3 p^1 q^3 + q^4$$
$$= (0.534)^4 + 4(0.534)^3(0.466) + 6(0.534)^2(0.466)^2 + 4(0.534)(0.466)^3 + (0.466)^4$$

متوقع تعدد کو اخذ کرنے کے لیے ہر جز کو N سے ضرب دیں:

$$N(p+q)^n$$
$$= 103(0.534)^4 + 4(0.534)^3(0.466) + 6(0.534)^2(0.466)^2 + 4(0.534)(0.466)^3 + (0.466)^4$$

اس طرح متوقع تعدد ہوں گی:

x	0	1	2	3	4

f	8	29	38	22	5

مثال 7.13: ایک مخصوص مشین کے ذریعے تیار کردہ پیچ (Screw) کو 7 کے نمونے میں نقائص کی تعداد کی جانچ کر کے چیک کیا گیا۔ مندرجہ ذیل جدول 128 نمونوں کی توزیع کو ان میں موجود ناقص پیچ کی تعداد کے مطابق دکھاتا ہے:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	Total
f	7	6	19	35	30	23	7	1	128

دور قمی توزیع فٹ کریں اور متوقع تعدد تلاش کریں اگر مشین کے خراب ہونے کا امکان $1/2$ ہے۔ فٹ توزیع کا اوسط اور معیاری انحراف اخذ کریں۔

حل: چونکہ خراب پیچ کا احتمال $1/2$ ہے۔ لہذا $p = \frac{1}{2}, \quad q = (1-p) = \frac{1}{2}, \ N = 128$

چونکہ توزیع میں 8 جز ہیں لہذا $n = 7$ ہو گا۔

اس کا احتمال کہ 0, 1, 2, 3, ..., 7 پیچ خراب ہوں گے دور قمی توسیع سے اخذ کی جا سکتی ہے:

$$\begin{aligned}(p+q)^n &= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^7 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^7 + {}^7C_1\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^1 + {}^7C_2\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + {}^7C_1\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ &\quad + {}^7C_1\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}^7C_1\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^7 (1+7+21+35+35+35+21+7+1)\end{aligned}$$

متوقع تعدد اخذ کرنے کے لیے تمام اجز کو N یعنی 128 سے ضرب دیں:

$$\begin{aligned}128\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^7 &= 128 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 (1+7+21+35+35+35+21+7+1) \\ &= (1+7+21+35+35+35+21+7+1)\end{aligned}$$

لہذا، متوقع تعدد ہوں گی:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	Total
f	1	7	21	35	35	21	7	1	128

فٹ توزیع کا اوسط اور معیاری انحراف ہو گا:

$$Mean = np = 7 \times \frac{1}{2} = 3.5$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{7 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = 1.32$$

7.4 توزیع پواسون (Poisson Distribution)

توزیع پواسون (Poisson Distribution)) بھی منفصل توزیع کی ایک قسم ہے۔ اس کا نام فرانسیسی ماہر ریاضیات ایس

پواسون (Simeon Denis Poisson) کے نام پر رکھا گیا ہے۔ توزیع پواسون ایسی منفصل توزیع احتمال ہے جو مخصوص وقفے جیسے وقت، جگہ، فاصلہ، یا رقبہ میں واقع ہونے والے واقعات کی دی گئی تعداد کے احتمال کو بیان کرتی ہے، جب یہ واقعات ایک دوسرے سے آزادانہ طور پر اور ایک مستقل اوسط شرح پر واقع ہوتے ہوں۔ یہ عموماً تصادفی اور بہت کم واقع ہونے والے واقعات کو ماڈل کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔ مثال کے طور ایک دن میں ٹریفک چوراہے پر حادثات کی تعداد، فی گھنٹہ کال سینٹر پر آنے والی فون کالز کی تعداد، یا دھات کی شیٹ میں نقائص کی تعداد۔ ان واقعات کے واقع ہونے کا احتمال بہت کم یا نہ کے برابر ہوتا ہے۔ ایسے واقعات کے لیے توزیع پواسون کا استعمال کیا جاتا ہے۔ اس توزیع احتمال کے پیچھے کلیدی خیال یہ ہے کہ حالانکہ انفرادی واقعات غیر متوقع طور پر ہوتے ہیں لیکن ان کا طویل مدتی اوسط معلوم ہوتا ہے۔ یہ خاص طور پر ایسے حالات میں مفید ہوتا ہے جہاں انفرادی واقعات تصادفی ہوتے ہیں لیکن مجموعی پیٹرن استحکام کو ظاہر کرتا ہے۔

1. توزیع پواسون کی شرائط

توزیع پواسون کے لیے چند شرائط ہیں۔

سب سے پہلے، واقعات کو آزادانہ طور پر وقوع پذیر ہونا چاہیے، یعنی ایک واقعے کا وقوع پذیر ہونا دوسرے واقعے کے احتمال کو متاثر نہیں کرتا ہو۔ دوسرا، واقعات اکیلے ہونے چاہئیں نہ کہ جھرمٹ میں۔ دوسرے لفظوں میں، ایک انتہائی چھوٹے وقفے میں ایک سے زیادہ واقعات کے ہونے کا امکان عملی طور پر صفر ہو۔ تین، واقعے ایک مستقل اوسط شرح پر ہوں (تاکہ وقفے میں اوسط نمبر λ وقفے کی لمبائی کے متناسب ہو)۔ اس کا مطلب ہے کہ اگر آپ وقفے کو دوگنا کرتے ہیں تو اوسط بھی دوگنی ہو جاتی ہے۔ جب یہ شرائط پوری ہوتی ہیں، تو پواسوں کی توزیع کسی دیے گئے وقفے میں رونما ہونے والے واقعات کی تعداد کو درست طور پر بیان کرتی ہے اور واقعات کی تغیر پذیری اور تعدد کے بارے میں بامعنی پیش گوئیاں فراہم کرتی ہے۔

2. احتمال کمیت تفاعل (Probability Mass Function)

تصادفی متغیر X توزیع پواسون کی پیروی کرتا ہے جب یہ کوئی بھی غیر منفی عددی قدر $(0,1,2,3,...)$ لے سکتا ہے اور ایک مقررہ وقفے میں بالکل x واقعات کا مشاہدہ کرنے کا امکان بذریعہ دیا جاتا ہے:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, x = 0,1,2, ...$$

جہاں، λ وقفے میں واقعات کی اوسط تعداد کی نمائندگی کرتا ہے اور توزیع کا اوسط اور پیرامیٹر ہے، e قدرتی لوگارتھم کی بنیاد ہے (جس کی قدر تقریباً 2.7183 ہوتی ہے)۔ $e^{-\lambda}$ کی قدر معیاری ریاضیاتی جدولوں یا کیلکولیٹروں سے حاصل کی جا سکتی ہے۔ جب بنیادی عمل توزیع پواسون کی شرائط کو پورا کرتا ہے تو یہ تفاعل بالکل x واقعوں کے حاصل کرنے کا امکان فراہم کرتا ہے۔

3. توزیع پواسون کی خصوصیات (Properties of the Poisson Distribution)

توزیع پواسون کی کئی اہم خصوصیات ہیں جو اسے ایک مقررہ وقفہ میں ہونے والے تصادفی واقعات کی تعداد بیان کرنے میں کار آمد بناتی ہیں۔

اس کی اہم خصوصیات میں سے ایک یہ ہے کہ توزیع کا اوسط اور تفاوت دونوں برابر ہوتے ہیں یعنی دونوں پیرامیٹر λ کے برابر ہوتے ہیں۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ اگر، اوسطاً، λ واقعات ایک وقفے میں ہوتے ہیں، تو ڈیٹا کے پھیلاؤ یا تغیر کا تعین بھی λ سے ہوتا ہے۔ درحقیقت یہ واحد منفصل توزیع احتمال ہے جس کا اوسط اس کے تفاوت کے مساوی ہوتا ہے۔

$$\text{Mean } (\overline{X}) = \lambda$$
$$\text{Variance } \sigma^2 = \lambda$$
$$\text{Standard Deviation } \sigma = \sqrt{\lambda}$$

ایک خاص طور پر مفید خصوصیت اضافی خاصیت ہے: اگر دو آزاد توزیع پواسون تصادفی متغیرات کے پیرامیٹرز ہوں λ_1 اور λ_2، تو ان کا مجموعہ بھی پیرامیٹر $(\lambda_1 + \lambda_2)$ کے ساتھ توزیع پواسون کی پیروی کرتا ہے۔

4. دورقمی توزیع احتمال سے تعلق

توزیع پواسون احتمال کا دورقمی توزیع احتمال سے گہرا تعلق ہے اور اسے دورقمی توزیع احتمال کی محدود شکل کے طور پر دیکھا جا سکتا ہے۔ جب دورقمی تجربے میں آزمائشوں n کی تعداد بہت زیادہ ہو جائے، اور کامیابی کا امکان p ہر ٹرائل میں بہت چھوٹا ہو جاتا ہے، لیکن ان کا ضرب یعنی np مستقل رہتا ہے، تو یہ پیرامیٹر $\lambda = np$ کے ساتھ توزیع پواسون تک پہنچتا ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ جب واقعات نایاب ہوتے ہیں اور نمونے کا سائز بڑا ہوتا ہے تو توزیع پواسون دورقمی توزیع احتمال کا آسان تخمینہ فراہم کرتی ہے، جس سے حساب بہت آسان ہو جاتا ہے۔ اس تعلق کی وجہ سے، توزیع پواسون کو اکثر ایسے حالات میں استعمال کیا جاتا ہے جہاں دورقمی توزیع ماڈل مناسب ہوتا ہے لیکن n اور p کی قدریں درست حساب کتاب کو مشکل بناتی ہیں۔ np کو متعین فرض کرتے ہوئے n کے بڑھنے اور p میں کمی کے ساتھ توزیع پواسون دورقمی توزیع احتمال کے قریب قریب زیادہ درست ہو جاتا ہے۔ ریاضیاتی طور پر، توزیع پواسون دورقمی توزیع احتمال کی محدود شکل ہے جب:

1. $n \to \infty$ یعنی ٹرائلز یا آزمائیشوں کی تعداد بہت زیادہ ہو۔
2. $p \to 0$ کامیابی کا احتمال نہ کے برابر یا صفر کے قریب تر ہو۔
3. $np = \lambda$ یعنی توزیع کا اوسط متعین ہو۔

مثال 7.14: فرض کریں کہ پرنٹنگ کے نقائص ایک صفحہ پر 1.5 نقائص فی صفحہ کی اوسط شرح سے پائے جاتے ہیں۔ تصادفی طور پر منتخب کردہ صفحہ پر X کو نقائص کی تعداد ہونے دیں۔ پھر X پیرامیٹر $\lambda=1.5$ کے ساتھ توزیع پواسون پوسن کی پیروی کرتا ہے۔ بالکل 2 نقائص تلاش کرنے کا امکان ہو گا:

$$P(X = 2) = \frac{e^{-1.5}1.5^2}{2!}$$

درج بالا کو آپ براہ راست بھی حل کر سکتے ہیں اور جدول سے اس کی قدر بھی اخذ کر سکتے ہیں۔ اگر آپ براہ راست حل کرنا چاہیں تو:

$$P(X=2)=\frac{2.71828^{-1.5}1.5^2}{2!}=\frac{0.22313(1.5^2)}{2!}$$
$$P(X=2)=0.2510$$

اگر آپ جدول کی مدد سے حل کرنا چاہیں تو کتاب کے آخر میں دی گئی جدول میں دیکھیں۔$\lambda=1.5$اور$X=2$کے ساتھ قدر اخذ کریں۔

$$P(X=2)=0.2510$$

یعنی ایک صفحے پر بالکل دو نقائص دیکھنے کا امکان0.2510ہے۔

مثال 7.15: ایک کال سینٹر میں اوسطاً فی گھنٹہ10کال آتی ہیں۔ اگرXاگلے گھنٹے میں آنی والی کال کی تعداد کو دکھاتا ہے تو8کال آنے کا احتمال اخذ کریں۔

$$\lambda=10,\qquad x=8$$
$$P(X=8)=\frac{e^{-10}10^8}{8!}$$
$$P(X=8)=0.1126$$

مثال 7.16: ایک ویب سائٹ کو روزانہ اوسطاً2صارفین کی شکایات موصول ہوتی ہیں۔ اس امکان کو تلاش کریں کہ کسی خاص دن کوئی شکایت موصول نہیں ہو گی۔

$$\lambda=2,\qquad x=0$$
$$P(X=0)=\frac{e^{-2}2^0}{0!}$$

چونکہ$2^0=1$اور$0!=1$، لہذا:

$$P(X=0)=e^{-2}$$
$$P(X=0)\approx 0.1353$$

اس طرح، کوئی شکایت موصول نہ ہونے کا امکان تقریباً13.53%ہے۔

مثال 7.17: ایک مشین ہر ماہ اوسطاً3خرابیوں کا تجربہ کرتی ہے۔ اس امکان کو تلاش کریں کہ اسے کسی خاص مہینے میں بالکل5خرابیوں کا سامنا کرنا پڑتا ہے۔

$$\lambda=3,\qquad x=5$$
$$P(X=5)=\frac{e^{-3}(3)^5}{5!}$$
$$P(X=5)=\frac{e^{-3}(243)}{120}$$
$$P(X=5)\approx 0.1008$$

اس طرح، احتمال تقریباً10.08%ہے۔

مثال 7.18: ایک دکان پر فی گھنٹہ اوسطاً 6 گاہک آتے ہیں۔ اس امکان کو تلاش کریں کہ کسی خاص گھنٹے کے دوران کم از کم ایک گاہک آئے۔

حل: کم از کم کا مطلب ہے:

$$X \geq 1$$

ایسی صورت میں تکملہ کا استعمال زیادہ آسان ہے۔

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$
$$\lambda = 6, \qquad x = 0$$

لہذا:

$$P(X = 0) = \frac{e^{-6}(6)^0}{0!} = e^{-6}$$
$$P(X \geq 1) = 1 - e^{-6}$$
$$P(X \geq 1) \approx 0.9975$$

لہذا، اس بات کا احتمال کہ کم سے کم ایک گاہک آئے تقریباً 99.75% ہے۔

مثال 7.19: ایک ہاسپٹل کے ایمرجنسی ڈیپارٹمنٹ فی گھنٹہ اوسطاً تین مریض آتے ہیں۔ اس کا احتمال اخذ کریں کہ کسی مخصوص گھنٹے میں زیادہ سے زیادہ 2 مریض آئیں۔

زیادہ سے زیادہ کا مطلب ہے:

$$X \leq 2$$

اس کا مطلب ہے کہ آپ کو $0,\ 1,\ 2$ افراد کے آنے کا احتمال اخذ کرنا ہے۔

لہذا:

$$P(X \leq 2) == P(X = 0) + P(X = 1) + +P(X = 2)$$
$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$\lambda = 3$ کا استعمال کرتے ہوئے:

$$P(X = 0) = e^{-3} \approx 0.0498$$
$$P(X = 1) = \frac{e^{-3}(3)^1}{1!} \approx 0.1494$$
$$P(X = 2) = \frac{e^{-3}(3)^2}{2!} \approx 0.2240$$

لہذا

$$P(X \leq 2) = 0.0498 + 0.1494 + 0.2240$$
$$P(X \leq 2) \approx 0.4232$$

لہذا، زیادہ سے زیادہ دو مریض آنے کا احتمال 42.32% ہے۔

مثال 7.20: فرض کریں کہ ایک دوکان پر آنے والے افراد کی تعداد پواسون کی توزیع احتمال کی پیروی کرتے ہیں جہاں $\lambda = 3$ ہے۔ دریافت کریں:

$$P(X \leq 2)$$

حل: اس کا مطلب ہے کہ آپ کو $0, 1, 2$ افراد کے آنے کا احتمال اخذ کرنا ہے۔

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$
$$P(X \leq 2) = 0.0498 + 0.1494 + 0.2240 = 0.4232$$

مثال 7.21: ایک پرنٹنگ مشین فی 1000 صفحات اوسطاً 5 نقائص پیدا کرتی ہے۔ 1000 صفحات کے تصادفی طور پر منتخب کردہ گروپ میں 2 اور 4 کے درمیان نقائص آنے کا احتمال اخذ کریں۔

حل: دیا گیا ہے: $\lambda = 5$

2 اور 4 کے بیچ کا مطلب ہے:

$$2 \leq X \leq 4$$

لہذا:

$$P(2 \leq X \leq 4) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$
$$P(X = 2) = \frac{e^{-5}5^2}{2!} \approx 0.0842$$
$$P(X = 3) = \frac{e^{-5}5^3}{3!} \approx 0.1404$$
$$P(X = 4) = \frac{e^{-5}5^4}{4!} \approx 0.1755$$

لہذا:

$$P(2 \leq X \leq 4) = 0.0842 + 0.1404 + 0.1755$$
$$P(2 \leq X \leq 4) \approx 0.4001$$

دو اور چار کے بیچ نقائص کا احتمال تقریباً 40.01% فیصد ہے۔

مثال 7.22: ایک کال سینٹر فی گھنٹہ اوسطاً 12 کالیں وصول کرتا ہے۔ 10 منٹ کی مدت میں ٹھیک 2 کالز موصول ہونے کا احتمال تلاش کریں۔

حل: اوسط شرح اسی وقفہ کے مطابق ہونی چاہیے جس پر غور کیا جا رہا ہے۔ ایک گھنٹے میں 10 منٹ کے چھ ادوار ہوتے ہیں۔ لہذا:

$$\lambda = \frac{12}{6} = 2$$

لہذا، 10 منٹ کے وقفے کے لیے:

$$\lambda = 2, \qquad x = 2$$

,

$$P(X=2) = \frac{e^{-2}(2)^2}{2!} = \frac{4e^{-2}}{2}$$
$$P(X=2) \approx 0.2707$$

لہٰذا، 10 منٹ میں ٹھیک 2 کالز کا احتمال تقریباً 27.07 فیصد ہے۔

مثال 7.23: کسی خاص چوراہے پر پیش آنے والے حادثات کی تعداد ہر ماہ اوسطاً 2 حادثات کے ساتھ پوا سون کی توزیع احتمال کی پیروی کرتے ہیں۔ تلاش کریں: اوسط، تفاوت، اور معیاری انحراف.

حل: پوسوان کی توزیع میں:

$$E(X) = \lambda$$

اور تفاوت:

$$\mathrm{Var}(X) = \lambda$$

لہٰذا:

$$E(X) = 2$$
$$\mathrm{Var}(X) = 2$$

اور معیاری انحراف:

$$SD(X) = \sqrt{\lambda} = \sqrt{2}$$
$$SD(X) \approx 1.414$$

لہٰذا:

$$(E(X) = 2,\ \mathrm{Var}(X) = 2,\ SD(X) \approx 1.414)$$

7.5 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی کے مطالعے کے بعد طلبا اس قابل ہیں کہ:

- دور قمی توزیع احتمال کی وضاحت کر سکیں۔
- پوئیسن توزیع احتمال کی وضاحت کر سکیں۔
- دیے گئے پیرامیٹرز کے ساتھ ہر توزیع کے ساتھ احتمال کا حساب کر سکیں۔
- دور قمی توزیع احتمال اور پوئیسن توزیع احتمال کے درمیان تعلق کی وضاحت کر سکیں۔

7.6 فرہنگ (Glossary)

احتمال کمیت تفاعل :Probability Mass Function (PMF)- تفاعل جو اس کا احتمال امکان دیتا ہے کہ ایک منفصل تصادفی متغیر ایک مخصوص قدر لیتا ہے۔

آزمائش :Trial- کسی تجربے کی ایک بار تکرار۔

پواسون کی توزیع احتمال:Poisson Probability Distribution-توزیع جو وقت یا جگہ کے ایک مقررہ وقفہ میں رونما ہونے والے تصادفی، آزاد واقعات کی تعداد کو ماڈل کرتی ہے۔

ترا کمی احتمال : Cumulative Probability-اس کا احتمال کہ تصادفی متغیر ر کسی خاص قدر سے کم یا اس کے برابر ہو۔

تصادفی متغیر :Random Variable-متغیر جو تصادفی تجربے کے نتائج سے متعین عددی قدریں لیتا ہے۔

دور قمی توزیع : Binomial Distribution-منفصل توزیع جو ایک مقررہ تعداد میں آزاد ٹرائلز میں کامیابیوں کی تعداد کو بیان کرتی ہے، ہر ایک میں کامیابی کے یکساں امکانات ہوتے ہیں۔

کامیابی :Success-نتیجہ جو دور قمی تجربے میں سازگار کے طور پر بیان کیا گیا ہو۔

منفصل تصادفی متغیر :Discrete Random Variable-متغیر جو صرف مخصوص، قابل شمار قدریں لے سکتا ہے جیسے $0، 1، 2، \ldots$

ناکامی :Failure-کوئی بھی نتیجہ جسے کامیابی نہیں سمجھا جاتا۔

نایاب واقعات : Rare Events-واقعات جو کبھی کبھار ہوتے ہیں۔

7.7 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

7.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. دور قمی توزیع احتمال کے لیے درج ذیل میں کون سی شرط ہے؟

(a) نتائج کی بڑی تعداد (b) کامیابی کا متعین احتمال

(c) واقعات وقت یا جگہ میں واقع ہوں (d) اوسط تفاوت کے مساوی ہو

2. دور قمی توزیع میں n پیرامیٹر دکھاتا ہے:

(a) کامیابی کا احتمال (b) ٹرائل کی تعداد

(c) اوسط شرح (d) اوسط

3. پواسون توزیع احتمال مناسب ہوتا ہے جب:

(a) ڈیٹا متصل ہو (b) نایاب واقعات کے لیے

(c) دو نتیجہ ٹرائیل کے لیے (d) معمول ڈیٹا کے لیے

4. پواسون توزیع میں اوسط ہوتا ہے:

(a) ہمیشہ صفر (b) np

(c) λ (d) n/p

5. اگر $X \sim \text{Poisson}(4)$ ہو تو $P(X=0)$ ہو گا:

(a) $4e^{-4}$ (b) e^{-4}

(c) $1-e^{-4}$ (d) $\frac{4^0}{0!}$

6. ایک دور قمی تجربے میں $p=0.4$ ہے اور $n=10$ ہے۔ کامیابی کی متوقع تعداد ہو گی:

(a) 4 (b) 6

(c) 10 (d) 20

7. درج ذیل میں کون سی پواسون توزیع کی خاصیت نہیں ہے؟

(a) واقعات آزادانہ واقع ہوتے ہیں (b) واقعات انفراداً واقع ہوتے ہیں

(c) کامیابی کا احتمال بہت زیادہ ہوتا ہے (d) متعین شرح اوسط

8. پوئیسن توزیع احتمال دور قمی توزیع احتمال کے قریب تر ہوتی ہے جب:

(a) n چھوٹا ہو اور p بڑا ہو (b) n بڑا ہو اور p چھوٹا ہو

(c) n چھوٹا ہو اور p چھوٹا ہو (d) n بڑا ہو اور p بڑا ہو

9. دور قمی توزیع احتمال میں بالکل x کامیابیوں کا احتمال ہوتا ہے:

(a) $\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ (b) $p^x q^{n-x}$

(c) ${}^nC_x p^x q^{n-x}$ (d) npq

10. اگر λ دو ہو تو پواسون توزیع احتمال کا تفاوت ہو گا:

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) 4

7.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. دور قمی توزیع احتمال کی کیا شرائط ہیں؟
2. دور قمی توزیع احتمال کے اوسط اور تفاوت کو بیان کریں۔
3. دور قمی توزیع احتمال اور پواسون توزیع احتمال کے احتمال کمیت تفاعل کو لکھیں۔
4. پواسون توزیع احتمال کیا ہے؟ دور قمی توزیح احتمال کب اس کے قریب تر ہوتی ہے؟
5. دور قمی دوزیع احتمال اور پواسون توزیع احتمال کے پیرامیٹر کی وضاحت کریں۔

7.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. دور قمی توزیع احتمال کو تفصیل سے بیان کریں۔ اس کے مفروضوں، پیرامیٹرز، اور احتمال کمیت تفاعل کی وضاحت کریں۔
2. پواسون توزیع احتمال کو تفصیل سے بیان کریں۔ اس کے مفروضوں، پیرامیٹرز، اور احتمال کمیت تفاعل کی وضاحت کریں۔
3. ایک کال سینٹر فی 10 منٹ میں اوسطاً 6 کالز وصول کرتا ہے۔
   i. اس بات کا کیا امکان ہے کہ اسے اگلے 10 منٹ میں بالکل 4 کالیں موصول ہوں گی؟
   ii. کیا امکان ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ 3 کالیں موصول ہوں گی؟
   iii. اس بات کا کیا امکان ہے کہ اسے کم از کم 5 کالیں موصول ہوں گی؟

7.8 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Gupta, S. P. (2020). *Statistical methods* (44th ed.). Sultan Chand & Sons.
2. Bhardwaj, R. S. (2011). *Business statistics* (2nd ed.). Excel Books India.
3. Srivastava, T. N., & Rego, S. (2012). *Statistics for management* (2nd ed.). Tata McGraw-Hill Education.
4. Sharma, J. K. (2019). *Business statistics* (5th ed.). Vikas Publishing House.

اکائی 8: عام توزیع احتمال

(Normal Probability Distribution)

اکائی کے اجزا:

8.0 تمہید (Introduction)

8.1 مقاصد (Objectives)

8.2 عام توزیع احتمال (The Normal Probability Distribution)

8.2.1 عام توزیع کے پیرامیٹرز (Parameters of Normal Distribution)

8.2.2 عام توزیع کی خصوصیات (Characteritics of Normal Distribution)

8.3 معیاری عام توزیع (Normal Standard Distribution)

8.4 مثالیں (Examples)

8.5 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

8.6 فرہنگ (Glossary)

8.7 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

8.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

8.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

8.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

8.8 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

8.0 تمہید (Introduction)

سابقہ اکائی میں آپ نے منفصل متغیر کی صورت میں بعض توزیع احتمال کا مطالعہ کیا۔ منفصل توزیع احتمال کا استعمال ان صورتوں میں ہوتا ہے جب نتائج منفصل اور قابل شمار ہوں۔ لیکن حقیقی دنیا میں بہت سے مظاہر ایسے ہیں جن کی وضاحت منفصل توزیع احتمال سے نہیں کی جاسکتی۔ لمبائی (قد)، وزن وغیرہ ایسی مقداریں ہیں جو متصل ہیں۔ متصل متغیر ناقابل شمار قدریں لے سکتا ہے۔ ایسے مظاہر یا متغیرات جو متصل ہوں، ان کی صورت میں ہم متصل توزیع احتمال کا استعمال کرتے ہیں۔

متصل توزیع احتمال کئی قسموں کی ہو سکتی ہیں۔ ان میں عام توزیع احتمال شاید شماریات میں سب سے اہم مقام رکھتی ہے۔ اس کا سڈول گھنٹی کے جیسا خط بہت سے طبعی، حیاتیاتی اور سماجی عملوں میں ظاہر ہوتا ہے اور یہ کئی شماریاتی تکنیکوں جیسے اعتماد وقفہ (Confidence Interval)، اختبارِ مفروضہ (Hypothesis Testing)، اور رجعت کا تجزیہ (Regression Analysis) وغیرہ کی بنیاد بھی ہے۔

اس اکائی میں عام توزیع احتمال (Normal Distribution) کا تعارف کرایا گیا ہے۔ عام توزیع احتمال کی شکل اس کے پیرامیٹرز اور استعمال بھی اس اکائی کا موضوع ہیں۔ اس میں اس کی بھی وضاحت کی گئی ہے کہ کیسے معیاری اقدار (Z-scores) کا استعمال کر کے احتمال کی قدر اخذ کی جاسکتی ہے۔

8.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے درج ذیل مقاصد ہیں:

- عام توزیع احتمال کی وضاحت کرنا۔
- عام توزیع کی کلیدی خصوصیات بیان کرنا۔
- اعداد و شمار اور حقیقی دنیا میں عام توزیع کے اطلاق کو بیان کرنا۔
- معیاری عام تصادفی متغیرات کے لیے Z-اسکور کا حساب لگانا اور اس کی تشریح کرنا۔

8.2 عام توزیع احتمال (The Normal Probability Distribution)

عام توزیع احتمال جسے گاسین توزیع (Gaussian Distribution) بھی کہا جاتا ہے ایسی متصل توزیع احتمال ہے جس کی خاصیت گھنٹی کی شکل کا سڈول خط ہے۔ اس کی وضاحت دو پیرامیٹر یعنی اوسط (μ) اور معیاری انحراف (σ) سے ہوتی ہے۔ μ توزیع کا مرکز بھی ہوتا ہے جبکہ σ توزیع کے انحراف کو یعنی قدروں کا پھیلاؤ اوسط کے ارد گرد کیسا ہے کو بیان کرتا ہے۔ یہ توزیع ایسے تصادفی متغیر کو بیان کرتی ہے جس کی قدریں مرکزی نقطے کے ارد گرد مرتکز ہوتی ہیں (مرکز کے ارد گرد قدروں کا تعدد زیادہ ہوتا ہے اور قدروں کا تعدد کم ہوتا جاتا ہے جیسے جیسے قدریں مرکز سے دور ہوتی جاتی ہیں)۔ شماریات میں شاید یہ سب سے اہم توزیع احتمال ہے کیوں کہ یہ بہت سے قدرتی مظاہر کی درست وضاحت کرتی ہے۔ مثال کے طور پر افراد کا قد، بلڈ پریشر، آئی کیو اسکور (IQ Score) وغیرہ عام توزیع کی پیروی کرتے ہیں۔

عام توزیع کا احتمال کثافت تفاعل (Probability Density Function-PDF) ہوتا ہے:

$$y = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{8.1}$$

جہاں:

y = x کی خاص قدر پر عام خط کی اونچائی ہے

σ = معیاری انحراف ہے

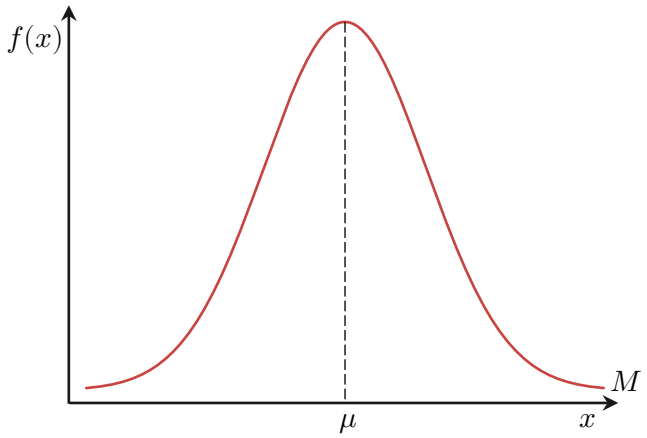
π = مستقل ہے جس کی قدر تقریباً 3.1416 ہے

e = مستقل ہے جس کی قدر تقریباً 2.7183 ہے۔ یہ قدرتی لوگارتھم کے نظام کی بنیاد ہے

μ = توزیع کا اوسط ہے

اگر تصادفی متغیر X عام توزیع کی پیروی کرتا ہو تو اسے علامتی زبان میں درج ذیل کی طرح لکھا جاتا ہے:

$$X \sim N(\mu, \sigma) \tag{8.2}$$



تصویر 8.1: عام خط

اور اسے پڑھتے ہیں: متغیر X اوسط μ اور معیاری انحراف σ کے ساتھ عام توزیع کی پیروی کرتا ہے۔ اگر ہم عام توزیع کو گراف پر پلاٹ کریں تو ہمیں عام خط (Normal Curve) حاصل ہو گا جس کی شکل گھنٹی جیسی ہوتی ہے۔ دیکھیں تصویر 8.1۔ تصویر میں خط M عام توزیع خط ہے۔ عام خط متشاکل (Symmetric) خط ہوتا ہے اور اس کا نقطہ عروج اوسط پر ہوتا ہے اور خط کے نیچے کا رقبہ 1 ہوتا ہے جو 100 فیصد احتمال کی نمائندگی کرتا ہے۔ خط کے رقبے کے ایک ہونے کا مطلب یہ ہے کہ تمام تعداد کا جوڑ ایک ہو گا۔ مساوات میں $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ اس بات کو یقینی بناتا ہے کہ تعداد کا جوڑ ایک ہو۔[1]

8.2.1 عام توزیع کے پیرامیٹرز (Parameters of Normal Distribution)

دیگر توزیع احتمال کی طرح، عام توزیع کے پیرامیٹرز اس کی شکل اور احتمال بیان کرتے ہیں۔ عام توزیع کے دو پیرامیٹرز ہیں، اوسط اور معیاری انحراف۔ عام توزیع کی شکل ان پیرامیٹر کی قدروں سے متعین ہوتی ہے۔

1. اوسط (μ)

یہ مقامی پیرامیٹر ہے۔ یہ عام توزیع کا مرکزی نقطہ بھی ہوتا ہے اور اس قدر پر عام خط سب سے اونچا ہوتا ہے۔ اسی وجہ سے عام

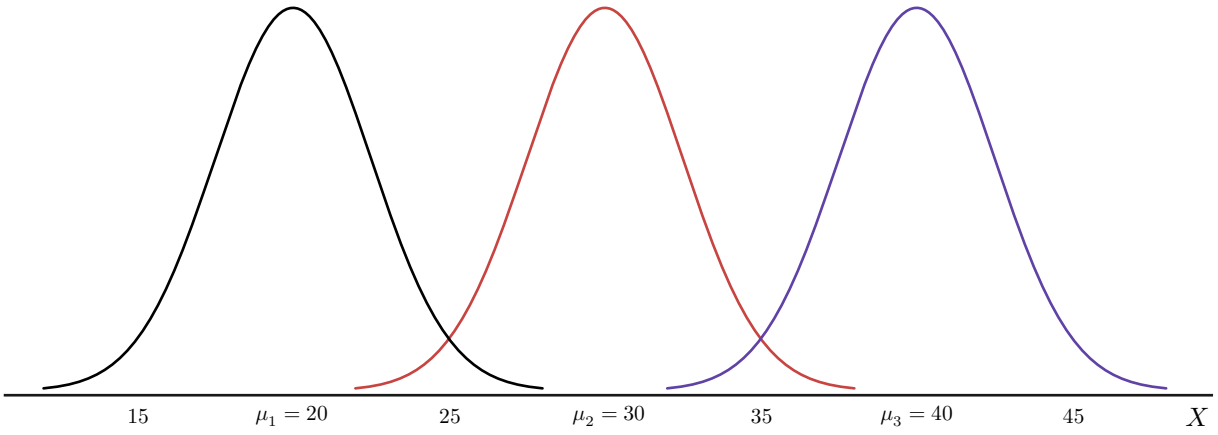
---

[1] دیگر عام توزیع کے خط کے لیے آپ درج ذیل فارمولا استعمال کر سکتے ہیں:

$$y = f(x) = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

جہاں N توزیع کا تعداد ہے۔ $\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ اعلی ترین y کی قدر کا تعین کرتا ہے جو ہمیشہ توزیع کے اوسط پر واقع ہوتا ہے۔

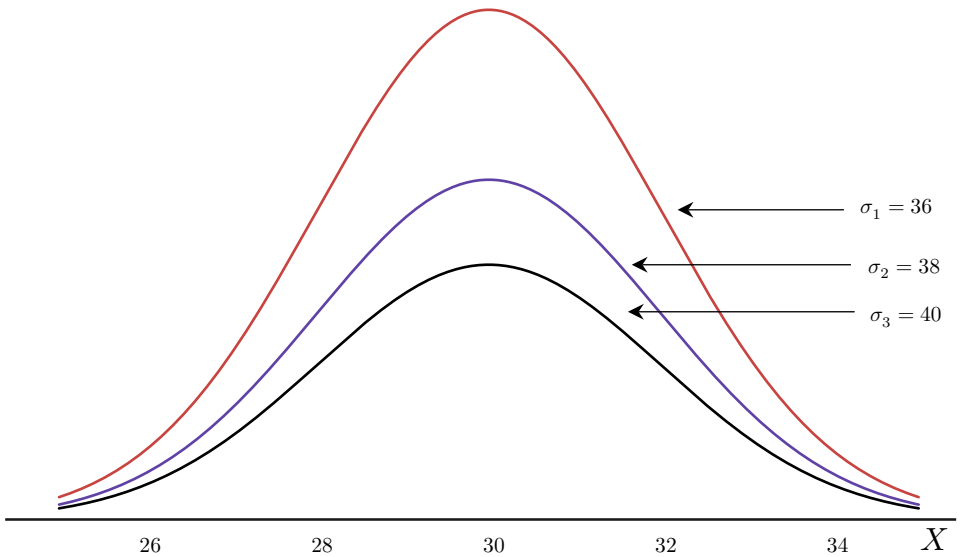
توزیع کا اوسط، وسیط اور موڈ مساوی ہوتے ہیں۔ μ کی قدر تبدیل ہونے پر پورا خط منتقل ہو جاتا ہے۔ مثال کے طور پر تصویر 8.2 میں تین الگ اوسطوں کے ساتھ تین عام خطوط دکھائے گئے ہیں۔



تصویر 8.2: تین مختلف اوسطوں کے ساتھ عام خطوط

2. معیاری انحراف (σ)

معیاری انحراف جسے σ سے دکھایا جاتا ہے توزیع کے پھیلاو یا تغیر کو دکھاتا ہے۔ یہ اس کا تعین کرتا ہے کہ گھنٹی کی شکل کا خط کتنا چوڑا یا تنگ ہو گا۔ چھوٹا σ اونچا اور تنگ خط پیدا کرتا ہے۔ اس خط میں قدریں اوسط کے ارد گرد زیادہ مرتکز ہوتی ہیں۔ σ کی بڑی قدر ایسا خط بناتا ہے جو کم قامت ہوتا ہے اور چوڑا ہوتا ہے۔ اس توزیع میں قدریں زیادہ پھیلی ہوئی ہوتی ہیں۔ تصویر 8.3 میں متعین اوسط اور تین مختلف معیاری انحراف کے ساتھ تین عام خطوط کو دکھایا گیا ہے۔



تصویر 8.3: مختلف معیاری انحراف کے ساتھ عام خطوط

8.2.2 عام توزیع کی خصوصیات (Characteritics of Normal Distribution)

عام توزیع کی کئی ایسی خصوصیات ہوتی ہیں جو اسے شماریات میں اسے ایک اہم اور مفید توزیع احتمال بناتی ہیں۔ یہ خصوصیات توزیع کی شکل

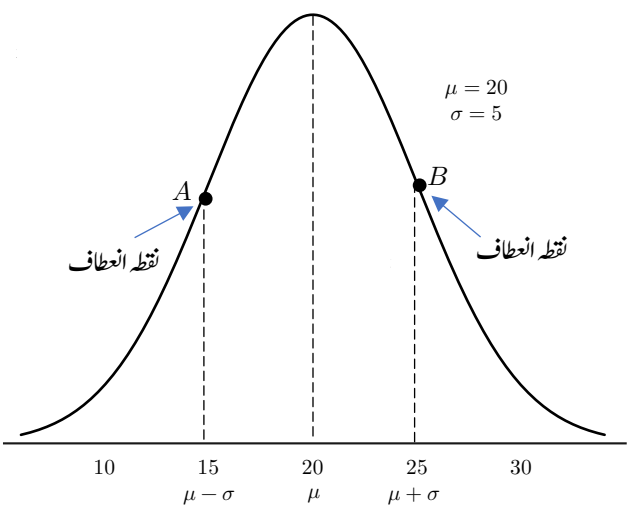
اور طرز عمل دونوں کو بیان کرتی ہیں۔

1. عام توزیع کا گراف ایک ہموار، مسلسل، گھنٹی کے سائز کا خط بناتا ہے۔ یہ شکل اس بات کی عکاسی کرتی ہے کہ زیادہ تر مشاہدات مرکز یا اوسط کے ارد گرد متر کز ہوتے ہیں۔ قدروں کے مرکز سے کسی بھی سمت میں منتقل ہونے پر کم مشاہدات ہوتے ہیں۔ انتہائی اعلی یا کم قدریں نایاب ہوتی ہیں۔ چونکہ یہ خط متشاکل ہوتا ہے لہذا اوسط سے کم قدروں اور اوسط سے بڑی قدروں کی تعداد مساوی ہوتی ہے۔ اسی بنا پر اس توزیع میں اوسط اور وسیط مساوی ہوتے ہیں۔
2. عام خط وسط پر متشاکل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ مرکزی نقطے کے دونوں اطراف توزیع یکساں نظر آتی ہے۔ اس کی وجہ سے، اوسط، وسیط، اور موڈ سب مساوی ہوتے ہیں اور خط کے مرکز میں واقع ہوتے ہیں۔ عام توزیع کا صرف ایک موڈ ہوتا ہے۔ مزید بر آں، اوسط کے بائیں اور دائیں یکساں فاصلے مساوی احتمال دکھاتے ہیں۔ مثال کے طور پر:

$$P(\mu - 5 < X < \mu) = P(\mu < X < \mu + 5)$$

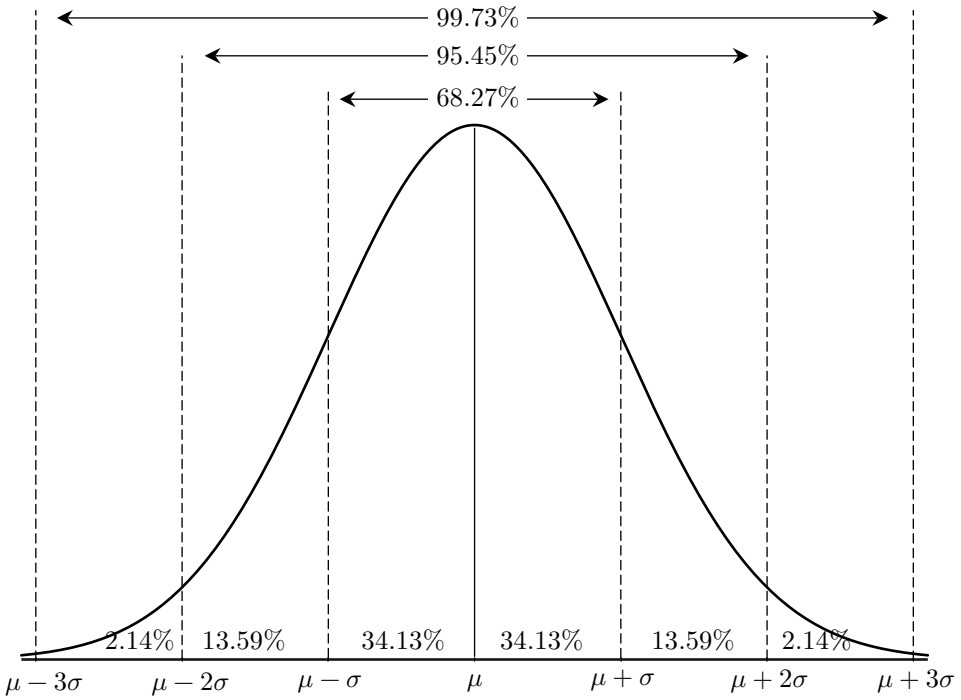
یعنی اوسط (μ) اور اوسط سے نیچے 5 اکائیوں کے درمیان کا احتمال (رقبہ) اوسط اور اوسط سے اوپر 5 اکائیوں کے درمیان احتمال (رقبہ) کے مساوی ہو گا۔

3. عام خط تقاربی ہوتا ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ خط محور X کے قریب ہوتا جاتا ہے لیکن کبھی اسے چھوتا نہیں ہے۔ یہ تقارب اس کی عکاسی کرتی ہے کہ اگرچہ انتہائی اعلی یا انتہائی کم اقدار ممکن ہیں، ان کا امکان بہت کم ہوتا ہے۔ حقیقی دنیا میں، ہم نایاب انتہائی نتائج کا مشاہدہ کر سکتے ہیں، لیکن وہ اوسط سے جتنا دور ہوتے ہیں ان کے ہونے کا امکان کم ہوتا جاتا ہے۔
4. عام توزیع کی ایک بنیادی خاصیت یہ ہے کہ خط کے نیچے کا کل رقبہ 1 کے برابر ہوتا ہے، جو 100% احتمال کی نمائندگی کرتا ہے۔ متصل تصادفی متغیر کی ہر ممکنہ قدر اس رقبے میں آجاتی ہے۔
5. معیاری انحراف خط کے پھیلاؤ کا تعین کرنے میں ایک اہم کردار ادا کرتا ہے۔ جب معیاری انحراف چھوٹا ہوتا ہے، تو خط اونچا اور تنگ ہو جاتا ہے، جس سے ظاہر ہوتا ہے کہ قدریں وسط کے ارد گرد زیادہ مرتکز ہوتی ہیں۔ جب معیاری انحراف بڑا ہوتا ہے، تو خط وسیع اور نسبتاً مسطح ہو جاتا ہے، یہ ظاہر کرتا ہے کہ ڈیٹا زیادہ منتشر ہے۔ چوڑائی میں ان فرقوں کے باوجود، خط کی گھنٹی جیسی شکل برقرار رہتی ہے، کیونکہ تمام عام خطوط کا ایک سا ہی بنیادی ڈھانچہ ہوتا ہے۔
6. ایک اور اہم خصوصیت نقاطِ انعطاف (Inflection Points) کی موجودگی ہے، جو 1 معیاری انحراف پر اوسط کے دائیں اور بائیں واقع ہوتے ہیں۔ یعنی نقاط انعطاف



($\mu - \sigma$ اور $\mu + \sigma$) پر واقع ہوتے ہیں۔ یہ وہ نقاط ہیں جہاں خطوط اپنے گھماؤ کو تبدیل کرتا ہے یعنی اس نقطے پر خط محدب سے مقعر یا مقعر سے محدب ہو جاتا ہے۔

7. عام توزیع معروف تجرباتی اصول کی پیروی کرتی ہے، جسے بعض اوقات 99.7-95-68 اصول کہا جاتا ہے۔ اس اصول کے مطابق، تمام اقدار کا تقریباً 68% اوسط کے ایک معیاری انحراف کے اندر آتا ہے، تقریباً 95% دو معیاری انحراف میں آتا ہے، اور تقریباً 99.7% تین معیاری انحراف کے اندر آتا ہے۔



تصویر 8.4: 99.7–95–68 اصول

8.3 معیاری عام توزیع (Normal Standard Distribution)

معیاری عام توزیع ایسی عام توزیع ہے جس کا اوسط 0 اور معیاری انحراف 1 ہو۔ معیاری عام توزیع کے حامل تصادفی متغیر کو معیاری عام تصادفی متغیر (Standard Normal Random Variable) کہتے ہیں اور اسے انگریزی کے حرف z سے دکھایا جاتا ہے۔ اس کا احتمال کثافت تفاعل (PDF) ہوتا ہے:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \tag{8.3}$$

معیاری معمول توزیع کا خط صفر قدر پر متشاکل اور گھنٹی کی شکل کا ہوتا ہے اور دیگر عام خطوط جیسا ہو ہوتا ہے۔ جو بات اسے منفرد بناتی ہے وہ یہ ہے کہ اس کے پیرامیٹرز متعین ہوتے ہیں یعنی اوسط صفر ہوتا ہے اور معیاری انحراف 1 ہوتا ہے۔ نتیجے کے طور پر، کسی بھی عام توزیع کے کسی بھی مشاہدے کو تبدیل کیا جا سکتا ہے، یا معیاری بنایا جا سکتا ہے۔ ایک بار معیاری ہونے کے بعد، اس قدر سے وابستہ امکان ز-

جدول (Z-Table) سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

عام توزیع کی پیروی کرنے والے تغیرات کے ساتھ کام کرتے وقت ایک مسئلہ یہ ہو سکتا ہے کہ، ہر توزیع کا اپنا الگ اوسط μ اور معیاری انحراف σ ہو سکتا ہے۔ اگر ہم ہر بار عام کثافت تفاعل سے براہ راست احتمال کا حساب کرنے کی کوشش کی تو ہمیں پیرامیٹرز کے ہر نئے سیٹ کے لیے پیچیدہ تکامل (Integrals) کا جائزہ لینے کی ضرورت ہو گی۔ اس سے مسائل کو حل کرنا مشکل ہو جائے گا۔ اس سے بچنے کے لیے، ہم ایک زیادہ موثر اور آفاقی طریقہ استعمال کرتے ہیں یعنی ہر عام توزیع کو معیاری عام توزیع میں تبدیل کرنا، جس کا مطلب اسے ایسے عام متغیر میں تبدیل کرنا جس کا اوسط صفر اور معیاری انحراف ایک ہو یعنی $N\sim(0,1)$۔ اصل متغیر کو معیاری متغیر میں تبدیل کر کے، ہم ز-جدول استعمال کر سکتے ہیں۔ کسی بھی عام توزیع کو معیاری عام توزیع میں تبدیل کیا جاسکتا ہے چاہے۔ اس تبدیلی سے تمام عام توزیعوں کا ان کے اصل اوسط یا معیاری انحراف سے قطع نظر مشترکہ پیمانے کا استعمال کرتے ہوئے کا موازنہ کیا جاسکتا ہے۔ ایسا کرنا شماریات کے بہت سے حسابات کو آسان بنا دیتا ہے۔ ہر ممکنہ عام توزیع کے لیے علیحدہ جدول رکھنے کے بجائے، ہم ایک واحد جدول استعمال کرتے ہیں، جسے معیاری عام جدول (Standard Normal Table) یا ز-جدول کہا جاتا ہے، جس میں معیاری عام خط سے وابستہ امکانات ہوتے ہیں۔

1. طریقہ کار (Procedure)

X قدر کو Z قدر میں تبدیل کرنے کے لیے X قدر میں سے اوسط کو منہا کریں اور نتیجے کو معیاری انحراف سے تقسیم کریں۔ جو قدر حاصل ہو گی وہ ز-قدر ہو گی جو اس کی نشاندہی کرے گی کہ X اوسط سے کتنے معیاری انحراف دوری پر ہے۔ علامتی زبان میں:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \tag{8.4}$$

اور یہ معیاری عام تقسیم کی پیروی کرتا ہے یعنی $X\sim N(0,1)$۔ X کو اس کے متعلقہ Z قدر میں تبدیل کرنے کے بعد ہم ز-قدر سے عام خطوط کے نیچے مطلوبہ رقبہ اور اس طرح متعلقہ احتمال کا تعین کرنے کے لیے معیاری عام احتمالات کا جدول استعمال کر سکتے ہیں۔

بعض اوقات معیاری عام توزیع سے حاصل امکان یا اہم قدر حاصل کرنے کے بعد، نتیجے کو پیمائش کی اصل اکائیوں میں تبدیل کرنا ضروری ہو سکتا ہے۔ Z متغیر سے اصل متغیر حاصل کرنے کے لیے ہم درج ذیل فارمولا استعمال کر سکتے ہیں۔

$$X = Z\sigma + \mu \tag{8.5}$$

یہ فارمولا ہمیں اس قابل بناتا ہے کہ ہم کسی بھی معیاری قدر کو مسئلہ کے اصل پیمانے میں تبدیل کر سکیں۔ اس طرح، ہم امکانات کا حساب لگاتے وقت معیاری اکائیوں میں کام کر سکتے ہیں، لیکن پھر بھی اپنے نتائج کی اصل متغیر کے تناظر میں تشریح کرتے ہیں۔

چونکہ معیاری عام توزیع میں 1 کا معیاری انحراف ہوتا ہے، ایک ز-اسکور صرف یہ ظاہر کرتا ہے کہ اوسط سے کتنے معیاری انحرافات ہیں۔ 2 کے Z اسکور کا مطلب ہے کہ اس کی متعلقہ قدر X اوسط سے دائیں پر بالکل 2 معیاری انحراف کی دوری پر ہے، جبکہ Z=-1 کا اسکور اس کی نشاندہی کرتا ہے کہ X اوسط سے بائیں ایک معیاری انحراف کی دوری پر ہے۔ اگر $Z = 0$ ہو تو قدر اوسط کے مساوی ہے۔ یہ معیاری تشریح نہ صرف دی گئی توزیع میں بلکہ مختلف عام توزیعات میں قدروں کا موازنہ کرنا آسان بناتی ہے۔

2. عام توزیع جدول (Standard Normal Table)

عام توزیع جدول وہ جدول ہے جو عام معیاری توزیع کے احتمال کو دکھاتا ہے۔ اس نصابی کتاب میں ز-قدر کا جو جدول دیا گیا ہے وہ دی گئی ز-قدر کے بائیں جانب معیاری عام خط کے نیچے کا رقبہ دکھاتا ہے۔ دوسرے لفظوں میں، یہ اس سوال کا براہ راست جواب دیتا ہے: اس بات کا کیا امکان ہے کہ ایک معیاری عام متغیر Z ایسی قدر لے جو z سے کم یا اس کے برابر ہو۔ اس جدول کو تراکمی جدول (Cumulative Table) کہا جاتا ہے کیونکہ یہ بائیں انتہا سے نقطہ z تک کے تمام رقبوں کو جمع کرتا ہے۔ دو حقائق اس ضمن میں ذہن نشین رہیں۔ اول، پورے خط کے نیچے کے کل رقبے کی قدر 1 ہو گی۔ دوم، یہ خط $z = 0$ پر متشاکل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہو گا:

$$P(Z \leq 0) = 0.5000$$

آپ ان دو حقائق کو ز- جدول کی قسم کی جانچ کے لیے استعمال کر سکتے ہیں: اپنے جدول میں $z = 0.00$ تلاش کریں۔ اگر جدول اس کی قدر 0.5000 دکھاتا ہے، تو آپ کے پاس اس کتاب میں دی گئی جدول جیسی جدول ہے۔

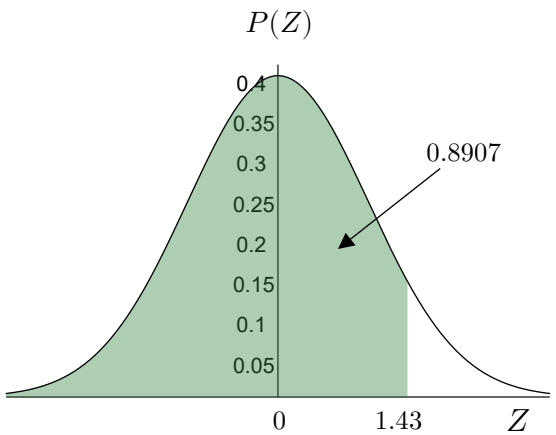
z	0	0.01	0.02	0.03
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732

تصویر 8.5: ز-جدول سے احتمال اخذ کرنا

آپ نے اوپر دیکھا کہ کسی بھی عام تصادفی متغیر کو معیاری متغیر Z میں بدلا جا سکتا ہے۔ ایک بار آپ کو z کی قدر حاصل ہو جائے تو آپ اس قدر سے متعلق احتمال کی قدر اس جدول سے اخذ کر سکتے ہیں۔ ز-قدر کے پہلے دو عددوں کو قطار سے دکھایا جاتا ہے جبکہ کالم تیسرے عدد (اعشاریہ کے بعد کے دوسرے عدد) کو دکھاتا ہے۔ اس خانے کی قدر جہاں قطار اور کالم آپس میں ملتے ہیں z کے بائیں طرف کا مجموعی رقبہ دکھاتا ہے۔ مثال کے طور پر $z = 1.43$ کے لیے قطار میں 1.4 دیکھیں اور کالم میں 0.03 دیکھیں۔ آپ کو جدول میں قدر 0.936 حاصل ہو گی (دیکھیں تصویر 8.5)۔ اس کا مطلب ہو گا:

$$P(Z < 1.43) = 0.9236$$

یعنی 0.9236 (یا 92.36%) امکان ہے کہ معیاری عام توزیع سے تصادفی طور پر منتخب کردہ قدر $z = 1.43$ سے کم یا اس کے مساوی



$Z \leq 1.45$: تصویر 8.6

ہو گی۔ یا دوسرے لفظوں میں، معیاری عام توزیع میں 92.36% قدریں $z = 1.43$ سے کم ہوں گی۔ تصویر 8.6 میں اس امکان کو رنگ بھرے رقبے سے دکھایا گیا ہے۔ کسی بھی قدر کو جدول میں تلاش کرنے سے پہلے ہمیشہ خط بنائیں اور مطلوبہ حصے کو رنگ دیں۔ اس ایک چھوٹی سی عادت سے بہت سی غلطیوں سے بچا جا سکتا ہے۔

ذیل میں ز-قدر کے کچھ معیاری سوالات پیش کیے گئے ہیں جن کو آپ کو حل کرنا پڑ سکتا ہے۔

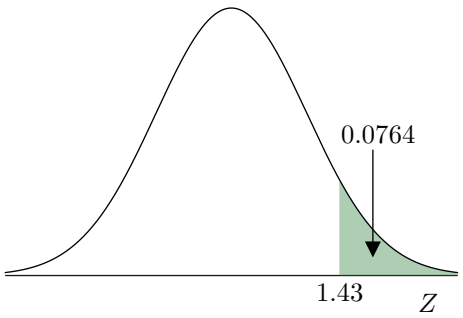
i. **مثبت z کے بائیں طرف کا رقبہ**

اسے آپ براہ راست جدول سے اخذ کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر اس کا احتمال کیا ہو گا کہ متغیر Z کی قدر 1.43 کے مساوی یا اس سے کم ہو؟

$$P(Z \leq 1.43)$$

درج بالا مثال میں آپ اس صورت کو دیکھ چکے ہیں۔ اس کے لیے آپ نے جدول میں $z = 1.43$ کی قدر دیکھی جو 0.9236 ہے۔ یعنی احتمال تقریباً 92.36% ہے۔ ایسی صورتوں کا جواب آپ براہ راست جدول سے دے سکتے ہیں۔ جدول کا جواب حتمی جواب ہو گا۔

ii. **مثبت z کے دائیں طرف کا رقبہ:**



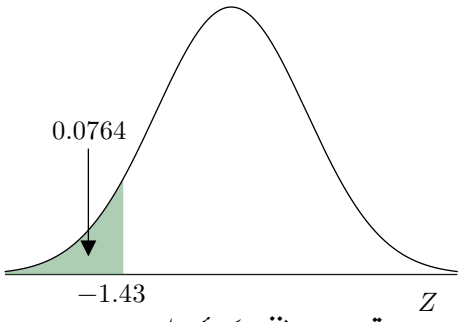
تصویر 8.7: مثبت z کے دائیں طرف کا رقبہ

اس کے لیے آپ 1 سے جدول کی قدر کو منہا کریں گے۔ مثال کے طور پر اس کا احتمال کیا ہو گا کہ متغیر Z کی قدر 1.43 کے مساوی یا اس سے زیادہ ہو؟

$$P(Z \geq 1.43) = 1 - P(Z \leq 1.43) = 1 - 0.9236 = 0.0764$$

چونکہ خط کے نیچے کا کل رقبہ 1 ہوتا ہے، دائیں جانب (دائیں دم) کا رقبہ حاصل کرنے کے لیے جدول کی قدر کو 1 سے گھٹائیں۔

iii. **منفی z کے بائیں طرف کا رقبہ**



تصویر 8.8: منفی z کے بائیں طرف کا رقبہ

اسے بھی آپ براہ راست جدول سے اخذ کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر اس کا احتمال کیا ہو گا کہ متغیر Z کی قدر 1.43- کے مساوی یا اس سے کم ہو؟

$$P(Z \leq -1.43) = 0.0764$$

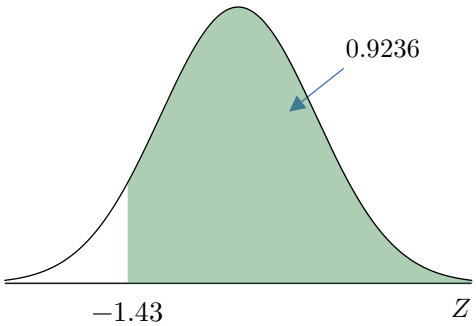
یہاں بھی کسی خاص اصول کی ضرورت نہیں۔ منفی ز-قدر کو مثبت قدروں کی طرح براہ راست جدول سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔ قدریں اس صورت میں 0.5000 سے کم ہوں گی۔

غور کریں کہ $P(Z \leq -1.43)$ اور $P(Z \leq 1.43)$ کو جمع کرنے پر ہمیشہ 1 حاصل ہوتا ہے، کیونکہ عام خط مرکز کے دونوں طرف یکساں یا منشاکل ہوتا ہے۔ اسی طرح آپ دیکھ سکتے ہیں کہ منفی z کے بائیں اور مثبت z کے دائیں طرف کی قدریں یکساں ہیں۔

iv. **منفی z کے دائیں طرف کا رقبہ**

اس کے لیے آپ 1 سے جدول کی قدر کو منہا کریں گے۔ مثال کے طور پر اس کا احتمال کیا ہو گا کہ متغیر Z کی قدر -1.43 کے مساوی یا اس سے زیادہ ہو؟

$$P(Z > -1.43) = 1 - P(Z \leq -1.43) = 1 - 0.0764 = 0.9236$$



تصویر 8.9: منفی z کے دائیں طرف کا رقبہ

v. **دو z-قدروں کے درمیان کا رقبہ**

یہ سب سے عام حقیقی مسئلہ ہے۔ ز-قدر کی علامات سے قطع نظر اصول ہمیشہ ایک جیسا رہے گا۔

$$P(a \leq Z \leq b) = \text{table}(b) - \text{table}(a)$$

یعنی چھوٹی قدر کو بڑی قدر سے منہا کریں۔ ذیل کی تین مثالیں دیکھیں:

a. **دونوں ز-قدریں مثبت ہوں**

$$P(1.00 \leq Z \leq 1.43) = 0.9236 - 0.8413 = 0.0823$$

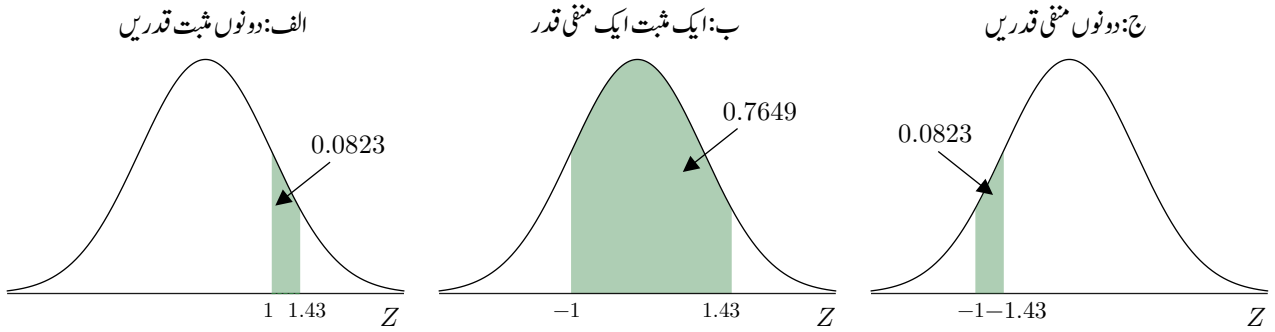
b. **ایک ز-قدر مثبت ہو اور ایک منفی**

$$P(-1.00 \leq Z \leq 1.43) = 0.9236\ 0.1587 = 0.7649$$

c. **دونوں ز-قدریں منفی ہوں**

$$P(-1.43 \leq Z \leq -1.00) = 0.1587 - 0.0764 = 0.0823$$

نوٹ کریں کہ فارمولا کبھی تبدیل نہیں ہوتا ہے۔ ایک بار جب آپ کو دو ز-قدریں معلوم ہو جائیں، تو آپ ہمیشہ چھوٹی قدر کو بڑی قدر سے منہا کرتے ہیں۔ متعلقہ گراف کے لیے تصویر 8.10 دیکھیں۔

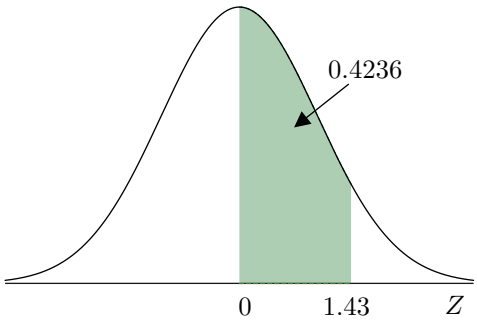


تصویر 8.10: دو z-قدروں کے درمیان کا رقبہ

اس صورت کی مزید دو خاص قسمیں ہیں۔

d. صفر اور مثبت z کے بیچ کا رقبہ

اس کے لیے آپ جدول کی قدر میں سے 0.5000 کو منہا کریں گے۔ وجہ یہ ہے کہ عام خط کے متشاکل ہونے کی وجہ سے صفر کے دونوں جانب کا احتمال 0.5000 ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر اس کا احتمال کیا ہو گا کہ متغیر Z کی قدر اوسط (صفر) اور 1.43 کے بیچ ہو؟

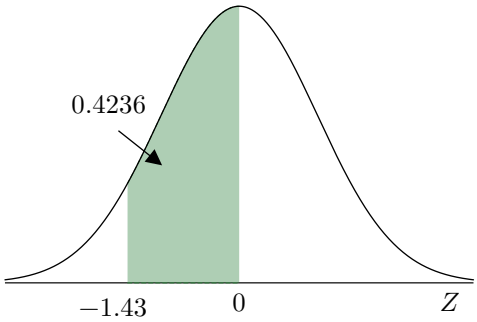


تصویر 8.11: صفر اور مثبت z کے بیچ کا رقبہ

$$P(0 < Z < 1.43) = 0.9236 - 0.5000 = 0.4236$$

e. صفر اور منفی z کے بیچ کا رقبہ

اس کے لیے آپ جدول کی ز قدر کو 0.5000 میں سے منہا کریں۔ مثال کے طور پر اس کا احتمال کیا ہو گا کہ متغیر Z کی قدر 1.43- اور صفر کے بیچ ہو؟



تصویر 8.12: صفر اور منفی z کے بیچ کا رقبہ

$$P(-1.43 < Z < 0) = 0.5000 - 0.0764 = 0.4236$$

اہم ہدایت

آپ کو اس کتاب میں دی گئی جدول سے مختلف ز-جدول دیکھنے کو مل سکتی ہیں۔ بہت ممکن ہے کہ آپ کوئی مختلف درسی کتاب اٹھائیں یا آن لائن تلاش کریں اور جو ز-جدول آپ کو ملے وہ اس کتاب میں دیے گئے جدول جیسا نہ ہو۔ عام استعمال میں تین اہم قسم کی ز-جدول آتی ہیں اور سب ہی یکساں معلومات پر مشتمل ہیں۔

قسم A: رقبہ 0 سے z تک: یہ مرکز (0) اور مثبت ز-قدر کے درمیان کا رقبہ دیتا ہے، لہذا اس جدول میں قدریں 0 سے 0.5 تک ہوتی ہیں۔ اگر آپ دیکھتے ہیں کہ جدول میں $z = 0$ کی قدر 0.0000 اور $z = 1.00$ کی قدر 0.3413، ہے تو وہ اس قسم کا جدول ہو گا۔ اس کتاب کی جدول کے مساوی قدر اخذ کرنے کے لیے آپ اس جدول کی قدر میں 0.5000 جوڑ دیں۔ مثال کے طور پر $z = 1$ کی قدر 0.3413 میں 0.5000 جوڑنے پر آپ کو اس کتاب میں پیش جدول میں $z = 1$ کی قدر 0.8413 حاصل ہو گی۔

قسم B: $-\infty$ سے z تک مجموعی رقبہ: یہ اس کتاب میں بیان کردہ جدول ہے۔ یہ منفی اور مثبت دونوں قدروں کے لیے z کے بائیں طرف کا رقبہ دیتا ہے۔ قدروں کی حد 0 سے 1 تک ہوتی ہے، $z = 0$ کی قدر 0.5000 ہوتی ہے منفی z کی قدریں 0.5000 سے کم ہوتی ہیں۔ یہ جدید نصابی کتب اور تمام بڑے شماریاتی سافٹ ویئر میں پائی جاتی ہے۔

قسم C: دائیں جانب کا (z سے $+\infty$ تک): یہ جدول امکان دیتا ہے کہ Z دی گئی قدر سے زیادہ ہے۔ z بڑھنے پر قدریں کم ہوتی ہیں، اور $z = 0$ کی قدر 0.5000 ہوتی ہے۔ کچھ انجینئرنگ اور کوالٹی کنٹرول حوالوں میں اس جدول کا استعمال ہوتا ہے۔ اس جدول کی قدروں کو ہماری جدول کی قدروں میں تبدیل کرنے کے لیے ان قدروں کو 1 سے گھٹائیں۔

ہمیشہ یقینی بنالیں کہ آپ کے پاس کس قسم کا جدول ہے۔ اس کے لیے دیکھیں کہ $z = 0.00$ اور $z = 1.00$ کی کیا قدریں ہیں۔ ایک بار جب آپ جدول قسم کی شناخت کر لیں تو قدروں کو اخذ کرنا آسان کام ہے۔

8.4 مثالیں (Examples)

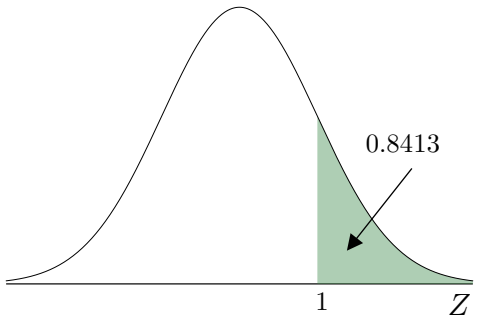
مثال 8.1: ایک عام توزیع کا اوسط $\mu = 50$ اور معیاری انحراف $\sigma = 10$ ہے۔ احتمال معلوم کریں کہ $X > 60$ ہو۔

حل: ز-قدر ہو گی:

$$z = \frac{60 - 50}{10} = 1.00$$

لہذا:

$$P(X > 40) = P(Z > 1)$$



ز-جدول سے: $P(Z \leq 1.00) = 0.8413$

لہذا، z کے دائیں جانب کا رقبہ ہو گا

$$P(Z > 1.00) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

اس کا احتمال کہ قدر 60 سے بڑی ہو 15.87 فیصد ہے۔

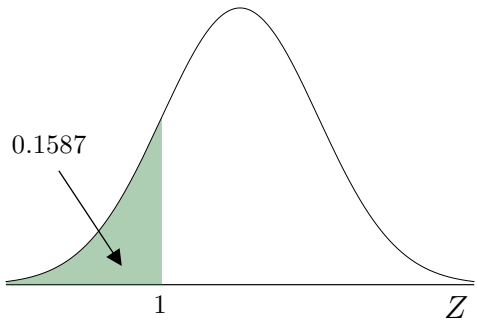
مثال 8.2: اگر $\mu = 50$ اور $\sigma = 10$ ہو تو $P(X < 40)$ معلوم کریں۔

حل:

$$z = \frac{40 - 50}{10} = -1.00$$

لہذا:

$$P(X < 40) = P(Z <= -1)$$



ز-جدول سے:

$$P(Z \leq 1.00) = 0.1587$$

لہذا:

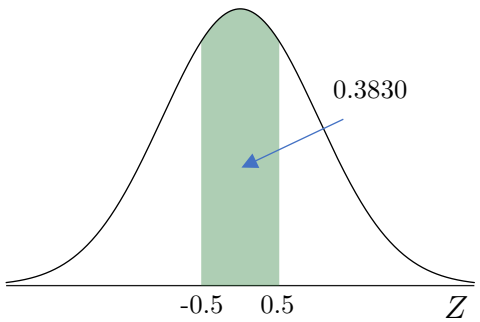
$$P(Z < -1.00) = 0.1587$$

اس کا احتمال کہ قدر 60 سے چھوٹی ہو 15.87 فیصد ہے۔

مثال 8.3: اگر $\mu = 50$ اور $\sigma = 10$ ہو تو X کے 45 اور 55 کے درمیان ہونے کا احتمال معلوم کریں۔

حل:

$$z_1 = \frac{45 - 50}{10} = -0.5$$
$$z_2 = \frac{55 - 50}{10} = 0.5$$



لہذا:

$$(45 < X < 55) = P(-0.5 < Z < 0.5)$$

ز-جدول سے:

$$P(Z \leq 0.5) = 0.6915$$

$$P(Z \leq -0.5) = 0.3085$$

لہذا:

$$P(-0.5 < Z < 0.5) = 0.6915 - 0.3085$$
$$P(45 < X < 55) = 0.3830$$

X کے 45 اور 55 کے بیچ ہونے کا احتمال 38.30 فیصد ہو گا۔

مثال 8.4: اگر $P(Z < z) = 0.9772$ ہو تو z کی قدر معلوم کریں۔

حل: جدول میں 0.9772 قدر تلاش کریں:

$$P(Z < z) = 0.9772$$

$$z = 2.00$$

ز کی قدر ہو گی: $z = 2$

مثال 8.5: اگر $P(Z > z) = 0.1587$ ہو تو z کی قدر معلوم کریں۔

حل: جدول میں 0.1587 قدر تلاش کریں:

$$P(Z > z) = 0.1587$$

چونکہ ز-جدول بائیں جانب کا رقبہ دیتا ہے۔ لہذا، دائیں جانب کے رقبے کے لیے 1 سے منہا کریں:

$$P(Z < z) = 1 - 0.1587 = 0.8413$$

لہذا، ز کی قدر ہو گی: $z = 1$

مثال 8.6: اگر $P(0 < Z < z) = 0.4772$ ہو تو z کی قدر معلوم کریں۔

حل: چونکہ $z = 0$ کے بائیں جانب کا رقبہ 0.5 ہوتا ہے۔ لہذا

$$P(Z < z) = 0.5000 + 0.4772 = 0.9772$$

ز-جدول سے

$$z = 2.00$$

لہذا، ز کی قدر ہو گی: $z = 2$

مثال 8.7: طلبہ کا اوسط قد 170 سینٹی میٹر اور معیاری انحراف 10 سینٹی میٹر ہے۔ احتمال معلوم کریں کہ قد 185 سینٹی میٹر سے زیادہ ہو۔

حل:

$$z = \frac{185 - 170}{10} = 1.50$$

لہذا:

$$P(X > 185) = P(Z > 1.50)$$

ز-جدول سے بائیں جانب کا رقبہ ہے:

$$P(Z \leq 1.50) = 0.9332$$

دائیں جانب کا رقبہ ہو گا:

$$P(Z > 1.50) = 1 - 0.9332 = 0.0668$$

اس کا احتمال کہ قد $185\ \text{cm}$ سے زیادہ ہو 6.68% ہو گا۔

مثال 8.8: اوسط سے دو معیاری انحراف کے اندر قدروں کا فیصد معلوم کریں۔

حل: دو معیاری انحراف کے مابین قدروں کے فیصد کا مطلب ہے:

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$$

z قدریں ہوں گی:

$$z_1 = -2, \quad z_2 = 2$$

ز-جدول سے

$$P(Z < 2.00) = 0.9772$$
$$P(\leq Z < 2) = 2(0.4772) = 0.0228$$

لہذا:

$$P(-2 < Z < 2) = 0.9772 - 0.0228 = 0.9544$$

اوسط سے دو معیاری انحراف کے درمیان قدروں کا فیصد 95.44 ہو گا۔

مثال 8.9: اگر نمبروں کی توزیع کا اوسط 60 اور معیاری انحراف 8 ہو، تو اس بات کا احتمال معلوم کریں کہ نمبر 52 اور 72 کے درمیان ہوں۔

حل:

$$z_1 = \frac{52 - 60}{8} = -1.00$$
$$z_2 = \frac{72 - 60}{8} = 1.50$$

لہذا:

$$P(52 < X < 72) = P(-1 < Z < 1.5)$$

ز-جدول سے:

$$PP(Z \leq 1.50) = 0.9332$$
$$P(Z \leq -1.00) = 0.1587$$

لہذا:

$$P(-1 < Z < 1.5) = 0.9332 - 0.1587 = 0.7745$$

اس کا احتمال کہ نمبر 52 اور 72 کے درمیان ہو 77.45 فیصد ہے۔

مثال 8.10: ایک بلب کی اوسط عمر 1200 گھنٹے اور معیاری انحراف 100 گھنٹے ہے۔ احتمال معلوم کریں کہ بلب 1350 گھنٹے سے زیادہ چلے۔

حل:

$$z = \frac{1350 - 1200}{100} = 1.50$$

لہذا:

$$P(X > 1350) = P(Z > 1.50)$$

ز-جدول سے:

$$P(Z \leq 1.50) = 0.9332$$

ہمیں دائیں جانب کا رقبہ چاہیے:

$$P(Z > 1.50) = 1 - 0.9332$$
$$P(X > 1350) = 0.0668$$

اس کا احتمال کہ بلب 1350 سے زیادہ گھنٹے چلے 6.68 فیصد ہے۔

مثال 8.11: x کی قدر اخذ کریں اگر

$$P(X < x) = 0.975$$

اور $\mu = 100$، $\sigma = 15$ ہوں۔

حل: ز-قدر تلاش کریں جو

$$P(Z < z) = 0.975$$

ز-جدول سے:

$$z \approx 1.96$$
$$x = \mu + z\sigma = 100 + (1.96)(15) = 129.4$$

لہذا، x کی قدر 129.4 ہے۔

مثال 8.12: ایک امتحان میں طلبا کے نمبروں کا اوسط 70 اور معیاری انحراف 8 ہے۔ وہ نمبر معلوم کریں جس سے 90% طلبا کے نمبر کم ہوں۔

حل: ہمیں x کی ایسی قدر چاہیے کہ:

$$P(X < x) = 0.90$$

ز-جدول سے:

$$P(Z < 1.28) = 0.8997$$

لہذا:

$$z \approx 1.28$$

$$x = z\sigma + \mu$$
$$x = 1.28 \times 8 + 70 = 80.24$$

لہٰذا تقریباً 90% طلبہ کے نمبر 80.24 سے کم ہیں۔

مثال 8.13: ایک متغیر کا اوسط 100 اور معیاری انحراف 15 ہے۔ وہ دو قدریں معلوم کریں جن کے درمیان مشاہدات کا مرکزی 95% حصہ واقع ہو۔

حل: اگر 95% مرکز میں ہے تو بقیہ 5% دونوں جانب مساوی طور پر تقسیم ہو گا:

$$\frac{(1 - 0.95)}{2} = 0.025$$

لہٰذا، ز کی اعلیٰ قدر کے بائیں جانب رقبہ ہو گا:

$$1 - 0.025 = 0.975$$

ز-جدول سے:

$$z = 1.96$$

چوں کہ عام خط متشاکل ہوتا ہے لہٰذا، ادنیٰ قدر بھی 1.96 ہو گی۔

اس طرح:

$$P(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95$$

اعلیٰ قدر:

$$x = 100 + (1.96)(15) = 129.4$$

نچلی قدر:

$$x = 100 - (1.96)(15) = 70.6$$

لہٰذا تقریباً 95% مشاہدات 70.6 اور 129.4 کے درمیان ہوں گے

8.5 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی کے مطالعے کے بعد طلبا اس قابل ہیں کہ:

- عام توزیع احتمال کی وضاحت کر سکیں۔
- عام توزیع کی خصوصیات بیان کر سکیں۔
- معیاری عام تصادفی متغیرات کے لیے ز-قدر کا حساب لگا سکیں اور اس کی تشریح کر سکیں۔

8.6 فرہنگ (Glossary)

ز-اسکور :Z-Score-قدر کا اوسط سے معیاری انحراف کی اکائیوں میں فاصلہ

عام توزیع :Normal Distribution-ایک قسم کی متصل احتمال توزیع جو گھنٹی کی شکل کی اور متشاکل ہوتی ہے۔

معیاری عام توزیع :Standard Normal Distribution-عام توزیع جس کا اوسط صفر اور معیاری انحراف ایک ہو۔

8.7 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

8.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. عام توزیع خط ہوتا ہے:

(a) دائیں جانب مڑا ہوا (b) بائیں جانب مڑا ہوا

(c) اوسط پر متشاکل (d) غیر معیاری

2. عام توزیع کے اوسط، وسیط اور موڈ ہوتے ہیں:

(a) مختلف (b) Mean > Median > Mode

(c) Mode > Median > Mean (d) مساوی

3. عام خط کے نیچے کا کل رقبہ ہوتا ہے:

(a) 1 (b) 0

(c) 0.5 (d) اوسط پر منحصر

4. معیاری عام توزیع میں معیاری انحراف ہوتا ہے:

(a) 1 (b) 0

(c) 2 (d) -1

5. ز-قدر دکھاتی ہے:

(a) ڈیٹا کی اصل قدر (b) ڈیٹا کا اوسط

(c) اوسط سے معیاری انفراف کی تعداد (d) ڈیٹا کا تفاوت

6. ز-قدر اخذ کرنے کا فارمولا ہے:

(a) $z = \frac{x+\mu}{\sigma}$ (b) $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

(c) $z = \frac{\mu - x}{\sigma}$ (d) $z = x - \mu$

7. مشاہداتی اصول کے مطابق، ڈیٹا کا تقریباً 68% فیصد پڑتا ہے

(a) $\pm 1\sigma$ معیاری انحراف کے درمیان (b) $\pm 2\sigma$ معیاری انحراف کے درمیان

(c) $\pm 3\sigma$ معیاری انحراف کے درمیان (d) $\pm 2.5\sigma$ معیاری انحراف کے درمیان

8. عام توزیع میں احتمال کو دکھایا جاتا ہے:

(a) خط کی اونچائی سے (b) خط کی چوڑائی سے

(c) خط کے نیچے کے رقبے سے (d) خط کی لمبائی سے

9. عام توزیع کے لیے درج ذیل میں سے درست ہے:

(a) اوسط بدلنے سے خط کی شکل بدل جاتی ہے (b) معیاری انحراف بدلنے سے پھیلاو بدلتا ہے

(c) رقبہ معیاری انحراف پر منحصر ہوتا ہے (d) خط متشاکل نہیں ہوتا ہے۔

10. اگر زاسکور منفی ہو تو قدر ہو گی:

(a) اوسط سے دائیں جانب (b) اوسط سے بائیں جانب

(c) اوسط پر (d) توزیع سے باہر

8.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. عام توزیع احتمال کسے کہتے ہیں؟ اس کی کوئی دو خصوصیات تحریر کریں۔
2. معیاری عام توزیع کیا ہے؟ یہ عام توزیع سے کس طرح مختلف ہے؟
3. ز-قدر کیا ہے؟ اس کا فارمولا تحریر کریں۔
4. عام توزیع خط کے نیچے کا رقبہ کیا دکھاتا ہے؟ اگر $P(0 < Z < 1.50) = 0.4332$ ہو تو پتہ کریں: $P(Z < 1.50)$۔
5. اگر ایک عام توزیع کا اوسط 50 اور معیاری انحراف 5 ہو تو ز-قدر اخذ کریں جب $X = 60$ ہو۔ کیا احتمال ہو گا کہ X کی قدر 40 سے کم ہو۔

8.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. عام توزیع احتمال کی وضاحت کریں۔ اس کی اہم خصوصیات بیان کریں اور گراف سے وضاحت کریں۔
2. طلبا کا قد عام توزیع کی پیروی کرتا ہے۔ اگر اوسط 170cm اور معیاری انحراف 10 cm ہو تو اس کا احتمال اخذ کریں کہ:
   - طالب علم کا قد 180 cm سے زیادہ ہو۔
   - طالب علم کا قد 160 cm اور 180 cm کے درمیان ہو۔
3. احتمال اخذ کرنے کے لیے ز-جدول کا استعمال کیسے کیا جائے؟ مع مثال واضح کریں اور دکھائیں کہ:
   - دائیں جانب (دائیں دم) کا احتمال کیسے اخذ کریں۔
   - بائیں جانب (بائیں دم) کا احتمال کیسے اخذ کریں
   - دو قدروں کے درمیان کا احتمال کیسے اخذ کریں۔

8.8 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Gupta, S. P. (2020). *Statistical methods* (44th ed.). Sultan Chand & Sons.
2. Bhardwaj, R. S. (2011). *Business statistics* (2nd ed.). Excel Books India.
3. Srivastava, T. N., & Rego, S. (2012). *Statistics for management* (2nd ed.). Tata McGraw-Hill Education.
4. Sharma, J. K. (2019). *Business statistics* (5th ed.). Vikas Publishing House.

ضمیمہ

(Appendix)

A: نمونہ امتحانی پرچہ

Maulana Azad National Urdu University
Department of Economics
BA Economics, IV Semester Examination
Basic Statistics

Time: 2 hrs. Marks: 35

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لیے لفظوں کی تعداد اشارۃ ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. حصہ اول میں 05 سوالات ہیں جو معروضی جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 01 نمبر مختص ہے۔ $(5 \times 1 = 05 \text{ marks})$
2. حصہ دوم میں 08 سوالات ہیں۔ ان میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا تقریباً 200 لفظوں پر مشتمل ہو۔ ہر سوال کے لیے 04 نمبرات مختص ہیں۔ $(5 \times 4 = 20 \text{ marks})$
3. حصہ دوم میں 02 سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی ایک سوال کا جواب دینا ہے۔ ہر سوال تقریباً 500 لفظوں پر مشتمل ہو۔ سوال کے لیے 10 نمبرات مختص ہیں۔ $(1 \times 10 = 10 \text{ marks})$

حصہ اول

سوال 1.

I. شماریات کی بہترین تعریف ہے:

(a) جوابات کا اندازہ کرنے کا علم (b) ریاضی افعال کا مطالعہ

(c) ڈیٹا جمع کرنے، ترتیب دینے، تجزیہ اور تشریح کا علم (d) چارٹس اور گرافس کا مطالعہ

II. ایک محقق ہندوستانی نوجوانوں کے اوسط قد کا مطالعہ کرنا چاہتا ہے۔ اس کے لیے وہ 2000 طلبا کا انتخاب کرتا ہے۔ یہ گروپ کہلاتا ہے:

(a) پیرامیٹر (b) نمونہ

(c) آبادی (d) تعدد

III. اس اوسط سے تمام انحراف کا جوڑ ہمیشہ صفر ہوتا ہے:

(a) حسابی اوسط (b) وسیط

(c) موڈ (d) صرف (a) اور (b)

IV. تفاعل جو منفصل تصادفی متغیر کی ہر قدر کے لیے احتمالات تفویض کرتا ہے کہلاتا ہے:

(a) تراکمی تفاعل (b) احتمال کمیت تفاعل

(c) توزیع خط (d) احتمال کثافت تفاعل

V. پی ایم ایف کی تمام احتمال کی قدروں کا جوڑ ہوتا ہے:

(a) 0 (b) کوئی بھی مثبت نمبر

(c) 1 (d) متغیر پر منحصر ہوتا ہے

حصہ دوم

سوال 2. شماریات کا معنی اور تعریف بیان کریں۔

سوال 3. شماریات کن شعبوں میں استعمال ہوتی ہے؟ کوئی تین مثال بیان کریں

سوال 4. پیرامیٹر اور شمار یہ میں کیا فرق ہے؟

سوال 5. تعددی تقسیم میں وسیط کیسے نکالا جاتا ہے؟

سوال 6. انتشار کے مطلق پیمانوں اور اضافی پیمانوں میں کیا فرق ہے؟ مثال سے بیان کریں۔

سوال 7. دو ضروری خصوصیات بیان کریں جنہیں ایک درست PMF کو پورا کرنا چاہیے۔

سوال 8. اگر پی ایم ایف کی تعریف کی گئی ہے۔

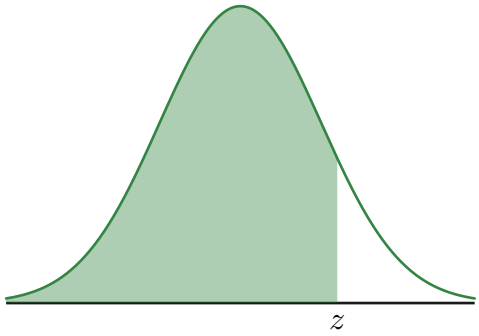
سوال 9. معیاری انحراف کیا ہے؟ یہ انتشار کا بہتر پیمانہ کیوں ہے؟

حصہ سوم

سوال 10. حسابی اوسط، وسیط اور موڈ کی تعریف بیان کریں۔ ان کا حساب کیسے کیا جاتا ہے؟ مناسب مثال کے ساتھ وضاحت کریں۔

سوال 11. احتمال کمیت تفاعل اور احتمال کثافت تفاعل اور تراکمی توزیع تفاعل کے مابین فرق کو وبالتفصیل بیان کریں۔

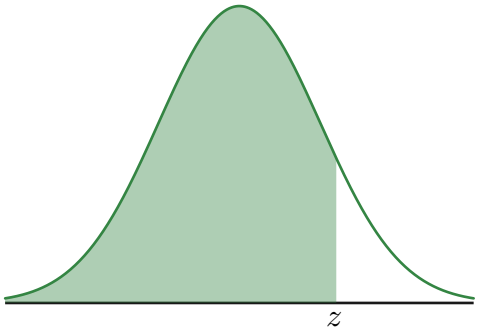
B: معیاری عام توزیع کے لیے تراکمی احتمال



درج ذیل جدول میں دی گئی قدریں عام خط کے نیچے z کی قدر کے بائیں جانب کا رقبہ دکھاتی ہیں۔ مثال کے طور پر، $z = 1.25$ کے لیے تراکمی احتمال 0.8944 ہے۔

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0005	0.0005
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0007
-3.2	0.0007	0.0007	0.0007	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0009	0.0009	0.0009
-3.1	0.0010	0.0010	0.0010	0.0011	0.0011	0.0011	0.0012	0.0012	0.0013	0.0013
-3.0	0.0013	0.0014	0.0014	0.0015	0.0015	0.0016	0.0016	0.0017	0.0018	0.0018
-2.9	0.0019	0.0019	0.0020	0.0021	0.0021	0.0022	0.0023	0.0023	0.0024	0.0025
-2.8	0.0026	0.0026	0.0027	0.0028	0.0029	0.0030	0.0031	0.0032	0.0033	0.0034
-2.7	0.0035	0.0036	0.0037	0.0038	0.0039	0.0040	0.0041	0.0043	0.0044	0.0045
-2.6	0.0047	0.0048	0.0049	0.0051	0.0052	0.0054	0.0055	0.0057	0.0059	0.0060
-2.5	0.0062	0.0064	0.0066	0.0068	0.0069	0.0071	0.0073	0.0075	0.0078	0.0080
-2.4	0.0082	0.0084	0.0087	0.0089	0.0091	0.0094	0.0096	0.0099	0.0102	0.0104
-2.3	0.0107	0.0110	0.0113	0.0116	0.0119	0.0122	0.0125	0.0129	0.0132	0.0136
-2.2	0.0139	0.0143	0.0146	0.0150	0.0154	0.0158	0.0162	0.0166	0.0170	0.0174
-2.1	0.0179	0.0183	0.0188	0.0192	0.0197	0.0202	0.0207	0.0212	0.0217	0.0222
-2.0	0.0228	0.0233	0.0239	0.0244	0.0250	0.0256	0.0262	0.0268	0.0274	0.0281
-1.9	0.0287	0.0294	0.0301	0.0307	0.0314	0.0322	0.0329	0.0336	0.0344	0.0351
-1.8	0.0359	0.0367	0.0375	0.0384	0.0392	0.0401	0.0409	0.0418	0.0427	0.0436
-1.7	0.0446	0.0455	0.0465	0.0475	0.0485	0.0495	0.0505	0.0516	0.0526	0.0537
-1.6	0.0548	0.0559	0.0571	0.0582	0.0594	0.0606	0.0618	0.0630	0.0643	0.0655
-1.5	0.0668	0.0681	0.0694	0.0708	0.0721	0.0735	0.0749	0.0764	0.0778	0.0793
-1.4	0.0808	0.0823	0.0838	0.0853	0.0869	0.0885	0.0901	0.0918	0.0934	0.0951
-1.3	0.0968	0.0985	0.1003	0.1020	0.1038	0.1056	0.1075	0.1093	0.1112	0.1131
-1.2	0.1151	0.1170	0.1190	0.1210	0.1230	0.1251	0.1271	0.1292	0.1314	0.1335
-1.1	0.1357	0.1379	0.1401	0.1423	0.1446	0.1469	0.1492	0.1515	0.1539	0.1562
-1.0	0.1587	0.1611	0.1635	0.1660	0.1685	0.1711	0.1736	0.1762	0.1788	0.1814
-0.9	0.1841	0.1867	0.1894	0.1922	0.1949	0.1977	0.2005	0.2033	0.2061	0.2090
-0.8	0.2119	0.2148	0.2177	0.2206	0.2236	0.2266	0.2296	0.2327	0.2358	0.2389
-0.7	0.2420	0.2451	0.2483	0.2514	0.2546	0.2578	0.2611	0.2643	0.2676	0.2709
-0.6	0.2743	0.2776	0.2810	0.2843	0.2877	0.2912	0.2946	0.2981	0.3015	0.3050
-0.5	0.3085	0.3121	0.3156	0.3192	0.3228	0.3264	0.3300	0.3336	0.3372	0.3409
-0.4	0.3446	0.3483	0.3520	0.3557	0.3594	0.3632	0.3669	0.3707	0.3745	0.3783
-0.3	0.3821	0.3859	0.3897	0.3936	0.3974	0.4013	0.4052	0.4090	0.4129	0.4168
-0.2	0.4207	0.4247	0.4286	0.4325	0.4364	0.4404	0.4443	0.4483	0.4522	0.4562
-0.1	0.4602	0.4641	0.4681	0.4721	0.4761	0.4801	0.4840	0.4880	0.4920	0.4960
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359

B: معیاری عام توزیع کے لیے تراکمی احتمال (جاری)



درج ذیل جدول میں دی گئی قدریں عام خط کے نیچے z کی قدر کے بائیں جانب کا رقبہ دکھاتی ہیں۔ مثال کے طور پر، $z = 1.25$ کے لیے تراکمی احتمال 0.8944 ہے۔

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

C: پواسون احتمال جدول

درج ذیل جدول x کی منتخب قدروں کے لیے احتمال $P(X = x)$ دکھاتا ہے، جہاں X پواسون تصادفی متغیر ہے جس کا اوسط λ ہے۔

$\lambda =$		0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
$x =$	0	0.6065	0.3679	0.2231	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067
	1	0.3033	0.3679	0.3347	0.2707	0.2052	0.1494	0.1057	0.0733	0.0500	0.0337
	2	0.0758	0.1839	0.2510	0.2707	0.2565	0.2240	0.1850	0.1465	0.1125	0.0842
	3	0.0126	0.0613	0.1255	0.1804	0.2138	0.2240	0.2158	0.1954	0.1687	0.1404
	4	0.0016	0.0153	0.0471	0.0902	0.1336	0.1680	0.1888	0.1954	0.1898	0.1755
	5	0.0002	0.0031	0.0141	0.0361	0.0668	0.1008	0.1322	0.1563	0.1708	0.1755
	6	0.0000	0.0005	0.0035	0.0120	0.0278	0.0504	0.0771	0.1042	0.1281	0.1462
	7	0.0000	0.0001	0.0008	0.0034	0.0099	0.0216	0.0385	0.0595	0.0824	0.1044
	8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0009	0.0031	0.0081	0.0169	0.0298	0.0463	0.0653
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0009	0.0027	0.0066	0.0132	0.0232	0.0363
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0008	0.0023	0.0053	0.0104	0.0181
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0007	0.0019	0.0043	0.0082
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0006	0.0016	0.0034
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0006	0.0013
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0005
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002
$\lambda =$		5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0
$x =$	0	0.0041	0.0025	0.0015	0.0009	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000
	1	0.0225	0.0149	0.0098	0.0064	0.0041	0.0027	0.0017	0.0011	0.0007	0.0005
	2	0.0618	0.0446	0.0318	0.0223	0.0156	0.0107	0.0074	0.0050	0.0034	0.0023
	3	0.1133	0.0892	0.0688	0.0521	0.0389	0.0286	0.0208	0.0150	0.0107	0.0076
	4	0.1558	0.1339	0.1118	0.0912	0.0729	0.0573	0.0443	0.0337	0.0254	0.0189
	5	0.1714	0.1606	0.1454	0.1277	0.1094	0.0916	0.0752	0.0607	0.0483	0.0378
	6	0.1571	0.1606	0.1575	0.1490	0.1367	0.1221	0.1066	0.0911	0.0764	0.0631
	7	0.1234	0.1377	0.1462	0.1490	0.1465	0.1396	0.1294	0.1171	0.1037	0.0901
	8	0.0849	0.1033	0.1188	0.1304	0.1373	0.1396	0.1375	0.1318	0.1232	0.1126
	9	0.0519	0.0688	0.0858	0.1014	0.1144	0.1241	0.1299	0.1318	0.1300	0.1251
	10	0.0285	0.0413	0.0558	0.0710	0.0858	0.0993	0.1104	0.1186	0.1235	0.1251
	11	0.0143	0.0225	0.0330	0.0452	0.0585	0.0722	0.0853	0.0970	0.1067	0.1137
	12	0.0065	0.0113	0.0179	0.0263	0.0366	0.0481	0.0604	0.0728	0.0844	0.0948
	13	0.0028	0.0052	0.0089	0.0142	0.0211	0.0296	0.0395	0.0504	0.0617	0.0729
	14	0.0011	0.0022	0.0041	0.0071	0.0113	0.0169	0.0240	0.0324	0.0419	0.0521
	15	0.0004	0.0009	0.0018	0.0033	0.0057	0.0090	0.0136	0.0194	0.0265	0.0347
	16	0.0001	0.0003	0.0007	0.0014	0.0026	0.0045	0.0072	0.0109	0.0157	0.0217
	17	0.0000	0.0001	0.0003	0.0006	0.0012	0.0021	0.0036	0.0058	0.0088	0.0128
	18	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0005	0.0009	0.0017	0.0029	0.0046	0.0071
	19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004	0.0008	0.0014	0.0023	0.0037
	20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0006	0.0011	0.0019