BNMT302DET

جزوی تفرقی مساوات کا تعارف

(Introduction to Partial Differential Equations)

بی۔ایس سی۔(آنرس)

چار سالہ پروگرام

تیسرا سمسٹر (ریاضی)

مرکز برائے فاصلاتی و آن لائن تعلیم

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

حیدرآباد۔32، تلنگانہ، بھارت

Copyright © 2025, Maulana Azad National Urdu University, Hyderabad
All right reserved. No part of this publication may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronically or mechanically, including photocopying, recording or any information storage or retrieval system, without prior permission in writing form the publisher (registrar@manuu.edu.in)

ISBN	:	978-81-68324-34-3
Course	:	Introduction to Partial Differential Equations
First Edition	:	August, 2026
Copies	:	600
Price	:	120/-(The price of the book is included in admission fee of distance mode students)

Course Coordinator

Dr. Khaja Moinuddin, Professor, Dept. of Mathematics, School of Sciences, MANUU

Editorial Board/Editors

Dr. Khaja Moinuddin, Professor, Dept. of Mathematics, School of Sciences, MANUU

Dr. Kashif Khan, Assistant Professor Contractual (Mathematics), Centre for Distance and Online Education, MANUU

Production

Prof. Nikhath Jahan, Professor (Urdu), CDOE MANUU

Mr. P Habibulla, Assistant Registrar, Purchase & Stores Section, MANUU

Dr. Mohd Akmal Khan, Assistant Professor (C), CDOE MANUU

Mohd Abdul Naseer, Section Officer, CDOE MANUU

Shaik Ismail, UDC, CDOE, MANUU

Syed Faheemuddin, LDC, Purchase & Stores Section, MANUU

On behalf of the Registrar, Published by:
Centre for Distance and Online Education
Maulana Azad National Urdu University
Gachibowli, Hyderabad-500032 (TG), India
*Director:*dir.dde@manuu.edu.in*Publication:*ddepublication@manuu.edu.in
Phone number: 040-23008314 Website: manuu.edu.in

CRC Prepared by Dr. Kashif Khan, Faculty of Mathematics, CDOE, MANUU

Printed at: Print Time & Business Enterprises, Hyderabad

فہرست

پیغام	وائس چانسلر، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی	4
پیغام	ڈائرکٹر، مرکز برائے فاصلاتی و آن لائن تعلیم	5
کورس کا تعارف	کورس کوآرڈی نیٹر	6

اکائی نمبر	اکائی کا نام	مصنف	صفحہ نمبر
1۔	جزوی تفرقی مساوات-I	ڈاکٹر کاشف خان	7
2۔	جزوی تفرقی مساوات-II	ڈاکٹر کاشف خان	25
3۔	خطی جزوی تفرقی مساواتوں کے حل (لگرانج کا طریقہ)	ڈاکٹر کاشف خان	37
4۔	غیر خطی جزوی تفرقی مساواتوں کے حل (چارپٹ کا طریقہ)	ڈاکٹر کاشف خان	52
	نمونہ امتحانی پرچہ		69
	لیب مینول		71
1۔	جزوی تفرقی مساوات	ڈاکٹر کاشف خان	72
2۔	لگرانج اور چارپٹ کے طریقے سے جزوی تفرقی مساواتوں کے حل	ڈاکٹر کاشف خان	88
	نمونہ امتحانی پرچہ		106
	تصدیق نامہ		107

مصنف کی تفصیل (Writer's Details)

ڈاکٹر کاشف خان، ریاضی، مرکز برائے فاصلاتی و آن لائن تعلیم، مانو، حیدر آباد	Dr. Kashif Khan, (Mathematics), Centre for Distance and Online Education, MANUU

پروف ریڈرس: 1. ڈاکٹر کاشف خان 2. ڈاکٹر خواجہ معین الدین

ٹائٹل پیج: ابراہیم اکرم صدیقی

پیغام

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی (MANUU) 1998 میں پارلیمنٹ کے ایک ایکٹ کے ذریعے قائم کی گئی۔ یہ ایک مرکزی جامعہ ہے جس نے این اے اے سی کی جانب سے گریڈ A+ حاصل کیا ہے۔ اس جامعہ کے قیام کے مقاصد ہیں: (1) اردو زبان کا فروغ، (2) پیشہ ورانہ اور تکنیکی تعلیم کو اردو میڈیم میں قابل رسائی اور دستیاب بنانا، (3) روایتی اور فاصلاتی طریقۂ تعلیم کے ذریعے تعلیم فراہم کرنا، اور (4) خواتین کی تعلیم پر خصوصی توجہ دینا۔ یہ وہ نکات ہیں جو اس مرکزی جامعہ کو دیگر تمام مرکزی جامعات سے ممتاز کرتے ہیں اور اسے ایک انفرادیت بخشتے ہیں۔ قومی تعلیمی پالیسی 2020 میں بھی مادری زبانوں اور علاقائی زبانوں میں تعلیم حاصل کرنے پر زور دیا گیا ہے۔

اردو کے ذریعے علم کے فروغ کا مقصد یہی ہے کہ اردو جاننے والے طبقے کے لیے عصری علوم اور مضامین تک رسائی آسان بنائی جائے۔ ایک طویل عرصے تک اردو میں درسی مواد کی کمی رہی ہے۔ اردو یونیورسٹی کے پاس اب اردو میں 350 سے زیادہ کتابوں کا ذخیرہ موجود ہے اور ہر سمسٹر کے ساتھ اس تعداد میں اضافہ ہو رہا ہے۔ اردو یونیورسٹی این ای پی 2020 کے وژن کے مطابق مادری/گھریلو زبان میں تعلیمی مواد فراہم کرنے کے قومی مشن کا حصہ بننے کو اپنے لیے ایک اعزاز سمجھتی ہے۔ مزید یہ کہ اردو بولنے والا طبقہ اردو میں مطالعہ کے مواد کی عدم دستیابی کے سبب نئے اُبھرتے شعبوں اور جدید تر معلومات کے موجودہ میدانوں میں تازہ ترین معلومات واطلاعات کے حصول سے محروم نہیں رہے گا۔ مذکورہ بالا میدانوں میں مواد کی دستیابی کی بدولت حصولِ معلومات کا نیا شعور بیدار ہوا ہے جو یقیناً اردو داں طبقے کی دانشورانہ ترقی پر اثرانداز ہوگا۔
فاصلاتی اور آن لائن طلبہ کے لیے تعلیم وتدریس کے عمل کو سہل بنانے کے لیے یونیورسٹی کا سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن (CDOE) اردو اور متعلقہ مضامین میں خود اکتسابی مواد (SLM) کی تیاری کو یقینی بناتا ہے۔

MANUU فاصلاتی اور آن لائن لرننگ کے طلبہ کے لیے SLM بلامعاوضہ فراہم کرتا ہے۔ یہ مواد اُردو کے ذریعے علم حاصل کرنے میں دلچسپی رکھنے والے ہر شخص کے لیے برائے نام قیمت پر دستیاب ہے۔ تعلیم تک رسائی کے دائرے کو مزید پھیلانے کے مقصد سے، اردو/ہندی/انگریزی/عربی میں eSLM یونیورسٹی کی ویب سائٹ پر مفت ڈاؤن لوڈ کے لیے دستیاب رکھا گیا ہے۔

مجھے بے حد خوشی ہے کہ متعلقہ فیکلٹی کی محنت اور مصنفین کے مکمل تعاون کی بدولت FYUG بی۔اے، بی۔ایس سی اور بی۔کام کی کتابوں کی اشاعت کا عمل بڑے پیمانے پر شروع ہو گیا ہے۔ فاصلاتی اور آن لائن لرننگ کے طلبہ کی سہولت کے لیے خود اکتسابی مواد (SLM) کی تیاری اور اشاعت کا عمل یونیورسٹی کے لیے اہمیت رکھتا ہے۔ مجھے یقین ہے کہ ہم اپنے خود تعلیمی مواد کے ذریعے اردو جاننے والے ایک بڑے طبقے کی ضروریات کو پورا کرنے کے قابل ہوں گے اور اس یونیورسٹی کے مقصدِ قیام کو پورا کریں گے اور اپنے ملک میں اپنی موجودگی کو جائز ٹھہرا سکیں گے۔

نیک تمناؤں کے ساتھ!

پروفیسر سید عین الحسن
شیخ الجامعہ، مانو

پیغام

موجودہ دور میں فاصلاتی تعلیم کو دنیا بھر میں ایک نہایت مؤثر اور مفید طریقۂ تعلیم کے طور پر تسلیم کیا جاتا ہے اور بڑی تعداد میں لوگ اس طریقۂ تعلیم سے فائدہ اٹھا رہے ہیں۔ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی نے بھی اردو زبان بولنے والے عوام کی تعلیمی ضروریات کو مد نظر رکھتے ہوئے اپنے قیام کے وقت سے ہی فاصلاتی تعلیم کا طریقہ متعارف کرایا۔ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی نے 1998 میں ڈائریکٹوریٹ آف ڈسٹنس ایجوکیشن (نظامتِ فاصلاتی تعلیم) کے ساتھ کام کا آغاز کیا اور 2004 سے باقاعدہ پروگرام شروع ہوئے، اس کے بعد مختلف شعبہ جات قائم کیے گئے۔

یو جی سی نے ملک میں نظام تعلیم کو مؤثر طور پر منظم کرنے میں ایک اہم کردار ادا کیا ہے۔ اوپن اینڈ ڈسٹنس لرننگ (ODL) موڈ کے تحت چلنے والے مختلف پروگرام، جو سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن (CDOE) میں چل رہے ہیں، یو جی سی-ڈی ای بی کے منظور شدہ ہیں۔ یو جی سی-ڈی ای بی نے فاصلاتی اور باقاعدہ تعلیم کے نصاب کو ہم آہنگ کرنے پر زور دیا ہے تاکہ فاصلاتی تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ کے معیار کو بہتر بنایا جاسکے۔ چونکہ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی ایک دُہرے طرز (ڈوئل موڈ) کی یونیورسٹی ہے جو فاصلاتی اور روایتی دونوں طریقۂ تعلیم کی خدمات فراہم کرتی ہے، اس لیے اپنے مقاصد کو یو جی سی-ڈی ای بی کے رہنما خطوط کے مطابق حاصل کرنے کے لیے اس نے چوائس بیسڈ کریڈٹ سسٹم (CBCS) متعارف کرایا گیا جس کا خود اکتسابی مواد (Self Learning Materials) یو جی سی کے قوانین اور کریڈٹ فریم کے مطابق نئے سرے سے تیار کیے جاچکا ہے۔

سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن (CDOE) کل انیس (19) پروگرام پیش کرتا ہے جن میں یو جی، پی جی، بی ایڈ، ڈپلومہ اور سرٹیفکیٹ پروگرام شامل ہیں۔ اس کے ساتھ ساتھ تکنیکی مہارتوں پر مبنی پروگرام بھی شروع کیے جارہے ہیں۔ سی ڈی اوای نے جولائی 2025 سے این ای پی-2020 کے مطابق چار سالہ یو جی پروگرام کا آغاز کیا ہے۔ بی اے، بی ایس سی اور بی کام کے آنرز پروگراموں کو این سی ایف کے مطابق ڈیزائن کیا گیا ہے جس سے طلبہ کو آنرز ڈگری حاصل کرنے میں مدد ملے گی۔ سال 2025-2026 سے ایم بی اے پروگرام او ڈی ایل موڈ میں متعارف کرایا گیا ہے۔

مانو نے طلبہ کی سہولت کے لیے نو ریجنل سنٹرز (بنگلورو، بھوپال، دربھنگہ، دہلی، کولکاتا، ممبئی، پٹنہ، رانچی اور سری نگر) اور چھ سب ریجنل سنٹرز (حیدر آباد، لکھنؤ، جموں، نوح، وارانسی اور امراوتی) کا ایک وسیع نیٹ ورک قائم کیا ہے۔ اس کے علاوہ وجے واڑا میں ایک ایکسٹینشن سنٹر بھی قائم کیا گیا ہے۔ ان ریجنل اور سب ریجنل سنٹروں کے تحت ایک سو پچاس سے زیادہ لرنر سپورٹ سنٹر (LSCs) اور بیس پروگرام سنٹر بیک وقت چلائے جارہے ہیں تاکہ طلبہ کو تعلیمی اور انتظامی سہولیات فراہم کی جاسکیں۔ سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن اپنی تعلیمی اور انتظامی سرگرمیوں میں آئی سی ٹی کا بھرپور استعمال کرتا ہے اور اپنے تمام پروگراموں میں صرف آن لائن موڈ کے ذریعے ہی داخلے فراہم کرتا ہے۔

طلبہ کے لیے سیلف لرننگ میٹیریل (SLM) کی سوفٹ کاپی سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن کی ویب سائٹ پر دستیاب کرائی جاتی ہیں اور آڈیو و ویڈیو ریکارڈنگ کے لنک بھی ویب سائٹ پر فراہم کیے جاتے ہیں۔ اس کے علاوہ طلبہ کو ای۔ میل اور واٹس ایپ گروپ کی سہولت بھی فراہم کی جارہی ہے جن کے ذریعے انہیں پروگرام کے مختلف پہلوؤں جیسے کورس رجسٹریشن، اسائنمنٹ، کاؤنسلنگ، امتحانات وغیرہ کے بارے میں مطلع کیا جاتا ہے۔ باقاعدہ کاؤنسلنگ کے علاوہ گزشتہ دو برسوں سے طلبہ کے تعلیمی معیار کو بہتر بنانے کے لیے زائد تدارکی (Remedial) آن لائن کاؤنسلنگ بھی فراہم کی جارہی ہے۔

امید کی جاتی ہے کہ سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن تعلیمی اور معاشی طور پر پسماندہ آبادی کو عصری تعلیم کے دھارے میں شامل کرنے میں ایک اہم کردار ادا کرے گا۔ تعلیمی ضروریات کو مد نظر رکھتے ہوئے نئی تعلیمی پالیسی (NEP-2020) کے مطابق مختلف پروگرامز میں تبدیلیاں کی گئی ہیں اور توقع ہے کہ اس سے اوپن اینڈ ڈسٹنس لرننگ کے نظام کو مزید مؤثر اور کارآمد بنانے میں مدد ملے گی۔

پروفیسر محمد رضا اللہ خان

ڈائرکٹر، سی ڈی اوای، مانو

کورس کا تعارف

زیر نظر کتاب، جزوی تفرقی مساوات کا تعارف(Introduction to Partial Differential Equations) کے موضوعات سے متعلق ہے اور یہ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کے بی ایس سی کورس کے تیسرے سمسٹر کے نصاب پر مشتمل ہے۔ جزوی تفرقی مساوات ریاضی، سائنس اور انجینئرنگ میں بنیادی حیثیت رکھتا ہے۔ یہ کتاب طلبا کو جزوی تفرق کے بنیادی تصورات کو سمجھنے اور اپنی زندگی اور اطراف میں اس کا استعمال کرنے کا ایک بہترین موقع فراہم کرتی ہے۔ اس کتاب کی نمایاں خصوصیت یہ ہے کہ اس میں مواد کو سہل طریقے سے آسان زبان میں مثالوں کے ذریعہ سمجھایا گیا ہے، تاکہ طلبا اپنے مضمون کو از خود سمجھ سکیں۔

کتاب کو دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ جس میں پہلا حصہ نظریات (تھیوری) پر مبنی ہے اور دوسرا حصہ پریکٹکل (تجربوں) پر مخصر ہے۔ پہلا حصہ چار (4) اکائیوں پر مشتمل ہے۔ اکائی 1 اور اکائی 2 میں جزوی تفرقی مساوات کی تعریف اور اس کی تشکیل کرنے کے طریقے مثالوں کے ساتھ سمجھائے گئے ہیں۔ اکائی 3 لگرانج کے طریقہ کار سے متعلق ہے اور اس کے متعلقہ مسائل پر مبنی ہے۔ چوتھی اکائی میں جزوی تفرقی مساوات کو حل کرنے کے چارپٹ کے طریقہ کو مثالوں کے ذریعے سمجھایا گیا ہے۔

طلبا سے توقع کی جاتی ہے کہ وہ عملی کلاسوں میں شرکت کریں اور کونسلر کی رہنمائی میں تجرباتی مینول میں دیے گئے مسائل کو حل کرنے کی مہارت حاصل کریں۔

طلبا کی مسئلہ حل صلاحیت کو بہتر بنانے کے لیے اس مینول میں دو اکائیوں کا تجرباتی حصہ دیا گیا ہے۔ طلبا کی طرف سے کیے گئے کام کا ریکارڈ وہ عملی امتحان کے وقت جمع کریں۔

اس کتاب کی تدوین میں مصنفین، تدریسی و غیرہ تدریسی وانتظامی عملے کے تعاون کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ کتاب کو معیاری اور قابل عمل و فہم بنانے کی ممکن کوشش کی گئی ہے، تاہم کوئی بھی کوشش اپنے آپ میں مکمل نہیں ہوتی۔ اس ضمن میں اساتزہ اکرام، ماہرین طلبا کی آرا و مشوروں کا خیر مقدم کیا جائے گا۔

ڈاکٹر خواجہ معین الدین

کورس کوآرڈی نیٹر

اکائی 1۔ جزوی تفرقی مساوات-I

(Partial Differential Equations - I)

اکائی کے اجزا

1.0		تمہید
1.1		مقاصد
1.2		جزوی تفرقی مساواتیں
	1.2.1	جزوی تفرقی مساوات کا رتبہ اور درجہ
	1.2.2	خطی اور غیر خطی جزوی تفرقی مساواتیں
	1.2.3	جزوی تفرقی مساواتوں کی درجہ بندی
	1.2.4	جزوی تفرقی مساواتوں کی تشکیل
	1.2.4.1	اختیاری مستقل کے اخراج سے تشکیل
1.3		اکتسابی نتائج
1.4		کلیدی الفاظ
1.5		نمونہ امتحانی سوالات
	1.5.1	معروضی جوابات کے حامل سوالات
	1.5.2	مختصر جوابات کے حامل سوالات
	1.5.3	طویل جوابات کے حامل سوالات

1.0 تمہید(Introduction)

جزوی تفرقی مساواتوں کو مختلف اقسام کے مظاہر کی وضاحت کرنے کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے، جیسے آواز، حرارت، ڈفیوزن، الیکٹروڈائنامکس، الاسٹی سٹی اور کوانٹم میکانکس۔ اس لیے یہ ضروری ہو جاتا ہے کہ وہ تکنیک تیار کی جایے جس کی مدد سے جزوی تفرقی مساواتوں کی وسیع اقسام کا حل حاصل کیا جا سکے۔

1.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- جزوی تفرقی مساوات اور اس کی مختلف اقسام سے متاعرف ہو سکیں۔
- کسی دیے گئے ضابطے سے اختیاری مستقلات کو ساقط کر کے جزوی تفرقی مساواتوں کو تشکیل دے سکیں۔

1.2 جزوی تفرقی مساواتیں(Partial Differential Equations)

تعریف: وہ مساوات جس میں دو یا زیادہ غیر تابع(Independent) متغیرات (Variables) کے کسی تفاعل کے ایک یا زیادہ جزوی مشتقات(Derivatives) موجود ہوں، جزوی تفرقی مساوات کہلاتی ہے۔ درجہ ذیل جزوی تفرقی مساوات کی کچھ مثالیں دی گئی ہیں:

1. $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z + xy$
2. $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 2x\frac{\partial z}{\partial x}$
3. $z\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = x$
4. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = xyz$
5. $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right)^{1/2}$
6. $y\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\} = z\frac{\partial z}{\partial y}$

1.2.1 جزوی تفرقی مساوات کا رتبہ اور درجہ(Order and Degree of Partial Differential Equations)

تعریف: کسی جزوی تفرقی مساوات میں موجود اعظم ترین جزوی مشتق کے رتبے کو اس جزوی تفرقی مساوات کا رتبہ کہتے ہیں۔ مثال کے لیے مساوات 1، 3، 4 اور 6 پہلے رتبے کی جزوی تفرقی مساوات ہیں، جب کہ مساوات 5 دوسرے رتبے کی اور مساوات 2 کا رتبہ تین ہے۔

تعریف: کسی جزوی تفرقی مساوات کو ریشن لائز (Rationalize) کرنے کے بعد اس میں موجود اعظم ترین رتبہ کے مشتق کی قوت (Power) کو اس جزوی تفرقی مساوات کا درجہ (Degree) کہتے ہیں۔ مثال کے لیے مساوات 1، 2، 3 اور 4 پہلے درجے کی جزوی تفرقی مساوات ہیں، جب کہ مساوات 5 اور 6 کا درجہ دو ہے۔

1.2.2 خطی اور غیر خطی جزوی تفرقی مساواتیں (linear & Nonlinear Partial Differential Equations)

تعریف: اگر کسی جزوی تفرقی مساوت میں موجود تابع متغیر (Dependent Variable) اور اس کے جزوی مشتق کا درجہ ایک ہو اور وہ ضرب کی شکل میں بھی موجود نہ ہوں، تب اس طرح کی مساوات کو خطی جزوی تفرقی مساوات کہتے ہیں۔ اگر جزوی تفرقی مساوات خطی نہ ہو تو اس مساوات کو غیر خطی جزوی تفرقی مساوات کہتے ہیں۔

مثال کے لیے مساوات 1 اور 4 خطی جزوی تفرقی مساوات ہیں، جب کہ مساوات 2، 3، 5 اور 6 غیر خطی جزوی تفرقی مساوات ہیں۔

نوٹ: اس اکائی میں ہم دو غیر تابع متغیرات x اور y کو تمام جگہ استعمال کریں گے اور z کو تابع متغیر کی طرح ہی استعمال کریں گے۔ کچھ علامتی اظہار درجہ ذیل ہیں جو اس اکائی میں استعمال ہوں گے:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}, r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

اگر n غیر تابع متغیرات $x_1, x_2, \cdots, x_n$ کا کوئی انجان (Unknown) تفاعل جس کا تابع متغیر z ہو اس کے لیے درجہ ذیل علامتی اظہار استعمال ہوں گے:

$$p_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1}, p_2 = \frac{\partial z}{\partial x_2}, p_3 = \frac{\partial z}{\partial x_3}, \cdots, p_n = \frac{\partial z}{\partial x_n}$$

یا کچھ جگہ یہ علامتی اظہار بھی استعمال کیے جاتے ہیں

$$u_x = \frac{\partial z}{\partial x}, u_y = \frac{\partial z}{\partial y}, u_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

1.2.3 جزوی تفرقی مساواتوں کی درجہ بندی (Classification of Partial Differential Equations)

a) خطی جزوی تفرقی مساوات (Linear Partial Differential Equations): اگر کسی مساوات $\varphi(x, y, z, p, q) = 0$ میں p, q, z خطی ہوں تو اس مساوات کو خطی جزوی تفرقی مساوات کہتے ہیں۔ دوسرے الفاظ میں خطی جزوی تفرقی مساوات اس شکل میں ہوتی ہے

$$\eta(x, y)p + \zeta(x, y)q = \chi(x, y)z + \psi(x, y)$$

مثال کے لیے $yxp + y^2q = xyz + 2x^2$ اور $p + 3q = z + \cot(y - 3x)$ دونوں پہلے رتبے کی خطی جزوی تفرقی مساوات ہیں۔

b) نصف خطی جزوی تفرقی مساوات (Semi-Linear Partial Differential Equations): پہلے رتبے کی جزوی تفرقی مساوات $\varphi(x, y, z, p, q) = 0$ میں اگر p اور q خطی ہوں اور p اور q کے ضریب x اور y کے ہی تفاعل ہوں تو اس مساوات کو نصف خطی جزوی تفرقی مساوات کہتے ہیں۔ دوسرے الفاظ میں نصف خطی جزوی تفرقی مساوات اس شکل میں ہوتی ہے

$$\eta(x, y)p + \zeta(x, y)q = \chi(x, y, z)$$

مثال کے لیے $xp + yq = xyz$ اور $yp + xq = xyz^2(x + y)(x - y)$ دونوں پہلے رتبے کی نصف خطی جزوی تفرقی مساوات ہیں۔

c) قواصی خطی جزوی تفرقی مساوات(Quasi-Linear Partial Differential Equations): پہلے رتبے کی جزوی تفرقی مساوات $\varphi(x, y, z, p, q) = 0$ قواصی خطی جزوی تفرقی مساوات کہلاتی ہے اگر یہ p اور q میں خطی ہوں اور وہ اس شکل میں ہو

$$\eta(x, y, z)p + \zeta(x, y, z)q = \chi(x, y, z)$$

مثال کے لیے $xzp + yzq = xy$ اور $(x^2 - y^2 - z^2)p + 2xyq = 2xz$ دونوں پہلے رتبے کی قواصی- خطی جزوی تفرقی مساوات ہیں۔

d) غیر خطی جزوی تفرقی مساوات(Non-Linear Partial Differential Equations): پہلے رتبے کی جزوی تفرقی مساوات $\varphi(x, y, z, p, q) = 0$ غیر خطی جزوی تفرقی مساوات کہلاتی ہے اگر یہ p اور q میں خطی نہ ہو۔

مثال کے لیے $y^2p^2 + x^2q^2 = x^2y^2z^2$, $p + q = zpq$ اور $q = 3p^2$ سبھی پہلے رتبے کی غیر خطی جزوی تفرقی مساوات ہیں۔

1.2.4 جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل(Formation of Partial Differential Equations)

1.2.4.1 اختیاری مستقل کے اخراج سے تشکیل(Formation by Elimination of Arbitrary Constant)

فرض کرو کہ $\varphi(x, y, z, A, B) = 0$ کوئی مساوات ہے، جہاں A اور B اختیاری مستقلات ہیں۔ فرض کرو کہ z دو غیر تابع متغیرات x اور y کا ایک تفاعل ہے۔ اب

$$\varphi(x, y, z, A, B) = 0 \qquad .....(1)$$

مساوات(1) کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی طور پر(Partially) الگ الگ تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + p\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \qquad ...(2a)$$ یا

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + q\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \qquad ...(2b)$$ اور اسی طرح

مساوات(1) اور (2a)، (2b) کی مدد سے اختیاری مستقلات A اور B کو ہٹا کر درجہ ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\phi(x, y, z, p, q) = 0 \qquad .....(3)$$

جو کہ پہلے رتبے کی جزوی تفرقی مساوات ہے۔

نوٹ: یہاں پر ہمارے سامنے درجہ ذیل تین صورتیں پیدا ہو سکتی ہیں:

I. جب کسی مساوات میں غیر تابع متغیر کی تعداد اختیاری مستقلات سے زیادہ ہوتی ہے تو ہمیں ایک سے زیادہ پہلے رتبے کی جزوی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہیں۔ مثال کے لیے اگر B کوئی اختیاری مستقل ہو اور

$$z = x + By \qquad \text{.....(1)}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = B$$

مساوات(1)میں B کی جگہ $\frac{\partial z}{\partial y}$ رکھنے پر

$$z = x + y\frac{\partial z}{\partial y}$$

مساوات $z = x + y\frac{\partial z}{\partial y}$ اور $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$ دی گئی مساوات کے لیے پہلے رتبے کی جزوی تفرقی مساواتیں ہیں۔

II. جب کسی مساوات میں غیر تابع متغیر کی تعداد اختیاری مستقل کی تعداد کے برابر ہوتی ہے تو ہمیں پہلے رتبے کی یکتا (Unique) جزوی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ مثال کے لیے اگر A اور B اختیاری مستقلات ہوں اور

$$z = Ax^3 + By^3 \qquad \text{.....(1)}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = 3Ax^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3By^2$$

$$\Rightarrow \qquad x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 3(Ax^3 + By^3) = 3z$$

اس لیے $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 3z$ دی گئی مساوات کے لیے یکتا جزوی تفرقی مساوات ہے۔

III. جب کسی مساوات میں غیر تابع متغیر کی تعداد اختیاری مستقلات کی تعداد سے کم ہوتی ہے تو ہمیں ایک سے زیادہ رتبہ کی جزوی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ مثال کے لیے اگر A، B اور C اختیاری مستقلات ہوں اور

$$z = Ax^2 + Bxy + Cy^2 \qquad \text{.....(1)}$$

اس مساوات کو دو بار بہ لحاظ x اور دو بار بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2Ax + By \qquad \text{.....(2)}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2A \qquad \text{.....(3)}$$

اور

$$\frac{\partial z}{\partial y} = Bx + 2Cy \qquad \text{.....(4)}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2C \qquad \text{.....(5)}$$

مساوات(2) کو بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = B \qquad \text{.....(6)}$$

مساوات(1) میں مساوات(3)، (5) اور (6) سے مستقلات کی قیمتیں درج کرنے پر

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2Ax^2 + 2Cy^2 + 2Bxy = 2z$$

اس طرح ہمیں دوسرے رتبے کی جزوی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

مثال1۔ ضابطہ $z = Ax + (2 - A)y + B$ سے اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کریے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$z = Ax + (2 - A)y + B \quad .....(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A$$

اور

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2 - A$$

اس لیے

$$2 - \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2$$

اس طرح اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کرنے پر جزوی تفرقی مساوات $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial x}$ حاصل ہوتی ہے۔

مثال2۔ اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کر کے ضابطہ $Az = A^2x + y - B$ کے لیے جزوی تفرقی مساوات تشکیل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$Az = A^2x + y - B \quad .....(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A$$

اور

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{A}$$

ان دونوں مساواتوں سے A کو ساقط کرنے پر

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 1$$

جو کہ دی گئی مساوات کے لیے پہلے رتبے اور پہلے درجے کی جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال3۔ ضابطہ $z = Ax + A^2y^2 + B$ سے اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کریے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$z = Ax + A^2y^2 + B \quad .....(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A \quad .....(2)$$

اور

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2A^2 y \qquad \ldots.(3)$$

مساوات(2)سے A کی قیمت مساوات(3)میں درج کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 y$$

اس طرح اختیاری مستقلات Aاور B کو ساقط کرنے پر جزوی تفرقی مساوات $2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 y = \frac{\partial z}{\partial y}$ حاصل ہوتی ہے۔

مثال4۔ اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کرکے $z = Ax + By + A^3 + B^3$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل دیجیے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$z = Ax + By + A^3 + B^3 \qquad \ldots..(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ xاور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A$$

اور

$$\frac{\partial z}{\partial y} = B$$

ان مساواتوں سے Aاور B کی یہ قیمتیں مساوات(1)میں درج کرنے پر

$$z = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^3 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^3$$

جو کہ دی گئی مساوات کے لیے پہلے رتبےاور پہلے درجے کی جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال5۔ اختیاری مستقلات Aاور B کو ساقط کرکے $z^2 = Ax^3 + By^3 + AB$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$z^2 = Ax^3 + By^3 + AB \qquad \ldots..(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ xاور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$2z\,\frac{\partial z}{\partial x} = 3Ax^2 \Rightarrow A = \frac{2z}{3x^2}\frac{\partial z}{\partial x} \qquad \ldots..(2)$$

اور

$$2z\frac{\partial z}{\partial y} = 3By^2 \Rightarrow B = \frac{2z}{3y^2}\frac{\partial z}{\partial y} \qquad \ldots.(3)$$

Aاور B کی قیمتیں مساوات(1)میں درج کرنے پر

$$z^2 = x^3\left(\frac{2z}{3x^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + y^3\left(\frac{2z}{3y^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(\frac{2z}{3x^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{2z}{3y^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 9x^2y^2z^2 = 6x^3y^2z\frac{\partial z}{\partial x} + 6x^2y^3z\frac{\partial z}{\partial y} + 4z^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 9x^2y^2z = 6x^3y^2\frac{\partial z}{\partial x} + 6x^2y^3z\frac{\partial z}{\partial y} + 4z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

جو کہ دی گئی مساوات کے لیے ضروری جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال6۔ مساوات $(x-A)^2+(y-B)^2+z^2=r^2$ سے اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کریے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(x-A)^2+(y-B)^2+z^2=r^2 \qquad .....(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$2(x-A)+2z\,\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$\Rightarrow \qquad (x-A)=-z\,\frac{\partial z}{\partial x}$$

اور

$$2(y-B)+2z\,\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

$$\Rightarrow \qquad (y-B)=-z\,\frac{\partial z}{\partial y}$$

$x-A$ اور $y-B$ کی یہ قیمتیں مساوات(1) میں درج کرنے پر

$$\left(-z\,\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(-z\,\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+z^2=r^2$$

$$\Rightarrow \qquad z^2\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1\right\}=r^2$$

جو کہ اختیاری مستقلات h اور k کو ساقط کرنے پر حاصل جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال7۔ مساوات $z=(x^2+A)(y^2+B)$ سے اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کریے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$z=(x^2+A)(y^2+B) \qquad .....(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x(y^2+B)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2x}\frac{\partial z}{\partial x}=y^2+B$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2y(x^2+A)$$

اور

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2y}\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+A$$

x^2+A اور y^2+B کی یہ قیمتیں مساوات(1) میں درج کرنے پر

$$z=\left(\frac{1}{2y}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{2x}\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad 4xyz=\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

اس طرح اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کرنے پر جزوی تفرقی مساوات $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 4xyz$ حاصل ہوتی ہے۔

مثال8۔ اختیاری مستقلات c اور p کو ساقط کر کے $z = ce^{pt}\sin px$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$z = ce^{pt}\sin px \qquad .....(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ t دو بار جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial x} = cpe^{pt}\cos px$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -cp^2e^{pt}\sin px$$

اور

$$\frac{\partial z}{\partial t} = cpe^{pt}\sin px$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = cp^2e^{pt}\sin px$$

اس طرح

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

جو کہ دی گئی مساوات کے لیے مطلوبہ جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال9۔ اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کر کے $z = Ae^{-B^2t}\cos Bx$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$z = Ae^{-B^2t}\cos Bx \qquad .....(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ t دو بار جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -ABe^{-B^2t}\sin Bx$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -AB^2e^{-B^2t}\cos Bx$$

اور

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -AB^2e^{-B^2t}\cos Bx$$

اس طرح

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

جو کہ دی گئی مساوات کے لیے مطلوبہ جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال10۔ اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کر کے مساوات $e^{\left(\frac{1}{z-\frac{x^2}{y}}\right)} = \frac{Ax^2}{y^2} + \frac{B}{y}$ سے جزوی تفرقی مساوات حاصل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$e^{\left(\frac{1}{z-\frac{x^2}{y}}\right)} = \frac{Ax^2}{y^2} + \frac{B}{y} \qquad .....(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y دو بار جزوی تفرق کرنے پر

$$-e^{\left(\frac{1}{z-\frac{x^2}{y}}\right)}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{2x}{y}\right)\left(\frac{1}{z-\frac{x^2}{y}}\right)^2 = 2A\left(\frac{x}{y^2}\right) \qquad .....(2)$$

اور

$$-e^{\left(\frac{1}{z-\frac{x^2}{y}}\right)}\left(\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{x^2}{y^2}\right)\left(\frac{1}{z-\frac{x^2}{y}}\right)^2 = -2A\left(\frac{x^2}{y^3}\right) - \frac{B}{y^2} \qquad .....(3)$$

مساوات(2) میں x سے اور مساوات(3) میں $2y$ سے ضرب دے کر ان کو جمع کرتے ہیں جس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$-e^{\left(\frac{1}{z-\frac{x^2}{y}}\right)}\left(\frac{1}{z-\frac{x^2}{y}}\right)^2\left[x\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{2x}{y}\right) + 2y\left(\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{x^2}{y^2}\right)\right] = 2A\left(\frac{x^2}{y^2}\right) - 4A\left(\frac{x^2}{y^2}\right) - \frac{2B}{y}$$

$$\Rightarrow \qquad -e^{\left(\frac{1}{z-\frac{x^2}{y}}\right)}\left(\frac{1}{z-\frac{x^2}{y}}\right)^2\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -2\left(\frac{Ax^2}{y^2} + \frac{B}{y}\right)$$

مساوات(1) کی مدد سے

$$\left(\frac{1}{z-\frac{x^2}{y}}\right)^2\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 2$$

$$\Rightarrow \qquad \left(x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 2\left(z - \frac{x^2}{y}\right)^2$$

جو کہ دی گئی مساوات کے لیے مطلوبہ جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال11۔ اگر تمام قائم دائری مقروط(Right Circular Cones) کاسٹ جن کے محور(Axes)،z–محور پر واقع(Coincide)ہوں اور جس کا نصف عمودی ذاویہ ϕ، راس یا چوٹی(Vertex)$(0,0,a)$ ہے تو اس کے لیے جزوی تفرقی مساوات حاصل کریے۔

حل۔ تمام قائم دائری مقروط کاسٹ جن کا محور(Axis)،z–محور پر واقع ہوتا ہے اور جس کا نصف عمودی ذاویہ ϕ اور جس کا راس یا چوٹی $(0,0,a)$ ہے، کی عام مساوات(General Equation) درجہ ذیل ہوتی ہے

$$x^2 + y^2 = (z-a)^2 tan^2\phi \qquad \text{..... (1)}$$

جہاں a اور ϕ اختیاری مستقلات ہیں۔

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y دو بار جزوی تفرق کرنے پر

$$2x = 2(z-a)\frac{\partial z}{\partial x} tan^2\phi$$

$$\Rightarrow \quad x = (z-a)tan^2\phi \frac{\partial z}{\partial x} \qquad \text{..... (2)}$$

اور

$$2y = 2(z-a)\frac{\partial z}{\partial y} \tan^2\phi$$

$$\Rightarrow \quad y = (z-a)\tan^2\phi \frac{\partial z}{\partial y} \qquad \text{..... (3)}$$

مساوات(2) کو مساوات(3) سے تقسیم دین پر

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{\partial z}{\partial y} = y\frac{\partial z}{\partial x}$$

جو کہ دی گئی مساوات کے لیے مطلوبہ جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال12۔ مقروط $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gxz + 2hxy = 0$ کے لیے جزوی تفرقی مساوات حاصل کرو۔

حل۔ دی گئی مقروط کی عام مساوات ہے

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gxz + 2hxy = 0 \qquad \text{..... (1)}$$

اس کا راس یا چوٹی مبدا پر ہوتا ہے، جہاں h, g, f, c, b, a پیرامیٹرس ہیں۔

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2ax + 2cz\frac{\partial z}{\partial x} + 2fy\frac{\partial z}{\partial x} + 2gz + 2gx\frac{\partial z}{\partial x} + 2hy = 0$$

$$\Rightarrow \quad ax + czp + fyp + gz + gxp + hy = 0 \qquad \text{..... (2)}$$

اور

$$2by + 2cz\frac{\partial z}{\partial y} + 2fy\frac{\partial z}{\partial y} + 2fz + 2gx\frac{\partial z}{\partial y} + 2hx = 0$$

$$\Rightarrow \quad by + czq + fyq + fz + gxq + hx = 0 \qquad \text{..... (3)}$$

مساوات(2)کوxسےاور مساوات(3)کوyسے ضرب دے کر جمع کرنے پر

$$(ax^2 + by^2 + fyz + gxz + 2hxy) + (gx + fy + cz)(px + qy) = 0$$
$$\Rightarrow \quad -(cz^2 + fyz + gxz) + (gx + fy + cz)(px + qy) = 0$$
$$\Rightarrow \quad -z(cz + fy + gx) + (gx + fy + cz)(px + qy) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (gx + fy + cz)(px + qy - z) = 0$$
$$\Rightarrow \quad px + qy - z = 0$$

جو کہ مقروط کے لیے مطلوبہ جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال13۔ ضابطہ$2z = \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2}$سے اختیاری مستقلات$A$ اورBکو ساقط کریے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$2z = \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} \qquad \text{..... (1)}$$

اس مساوات کو بہ لحاظxاور بہ لحاظyجزوی تفرق کرنے پر

$$2\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{A^2}$$
$$\Rightarrow \quad xp = \frac{x^2}{A^2} \qquad \text{..... (2)}$$

اور

$$2\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{B^2}$$
$$\Rightarrow \quad qy = \frac{y^2}{B^2} \qquad \text{..... (3)}$$

مساوات(1)،(2)اور(3)سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2z = px + qy$$

اس طرح اختیاری مستقلاتAاورBکو ساقط کرنے پر جزوی تفرقی مساوات$2z = px + qy$حاصل ہوتی ہے۔

مثال14۔ ضابطہ$2z = (Ax + y)^2 + 2B$سے اختیاری مستقلاتA اورBکو ساقط کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$2z = (Ax + y)^2 + 2B \qquad \text{..... (1)}$$

اس مساوات کو بہ لحاظxاور بہ لحاظyجزوی تفرق کرنے پر

$$2\frac{\partial z}{\partial x} = 2A(Ax + y)$$
$$\Rightarrow \quad p = A(Ax + y) \qquad \text{..... (2)}$$

اور

$$2\frac{\partial z}{\partial y} = 2(Ax + y)$$

$$\Rightarrow \quad q = (Ax + y) \qquad \ldots\ldots (3)$$

مساوات(2)اور مساوات(3)سے

$$\frac{p}{q} = A$$

مساوات(3)میں A کی قدر درج کرنے پر

$$q = \frac{p}{q}x + y$$

$$\Rightarrow \quad q^2 = px + qy$$

اس طرح اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کرنے پر جزوی تفرقی مساوات $q^2 = px + qy$ ہے۔

مثال15۔ اختیاری مستقلات A، B اور C کو ساقط کر کے $z = A(x + y) + B(x - y) + ABt + \frac{1}{2}C$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$z = A(x + y) + B(x - y) + ABt + \frac{1}{2}C \qquad \ldots\ldots(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x، y اور بہ لحاظ t جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A + B$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial y} = A - B$$

اور

$$\frac{\partial z}{\partial t} = AB$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$(A + B)^2 + (A - B)^2 = 4AB$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 4\frac{\partial z}{\partial t}$$

جو کہ دی گئی مساوات کے لیے مطلوبہ جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال16۔ مساوات $\log(Az - 1) = x + Ay + B^2$ سے اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کریے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$\log(Az - 1) = x + Ay + B^2 \qquad \ldots\ldots(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{A\frac{\partial z}{\partial x}}{Az-1}=1$$

$$\Rightarrow \quad A=\frac{-1}{\frac{\partial z}{\partial x}-z}$$

اور

$$\frac{A\frac{\partial z}{\partial y}}{Az-1}=A$$

$$\Rightarrow \quad A=\frac{1+\frac{\partial z}{\partial y}}{z}$$

اس لیے

$$\frac{-1}{\frac{\partial z}{\partial x}-z}=\frac{1+\frac{\partial z}{\partial y}}{z}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-1}{\frac{\partial z}{\partial x}-z}=\frac{1+\frac{\partial z}{\partial y}}{z}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}-z\right)\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)=-z$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x}\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)-z-z\frac{\partial z}{\partial y}=-z$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x}\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)=z\frac{\partial z}{\partial y}$$

مثال17۔ مبدا سے k دوری پر موجود تمام مستویوں(Planes) کے لیے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

حل۔ فرض کرو کہ مبدا سے مستقل(Constant) دوری k پر مستویوں(Planes) کی مساوات درجہ ذیل ہے

$$lx+my+nz=k \qquad .....(1)$$

اور مستوی پر عمودی سمتی کوسائنس(Direction Cosines) اس طرح سے ہیں کہ

$$l^2+m^2+n^2=1 \qquad .....(2)$$

مساوات(1) کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$l+n\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$\Rightarrow \quad l=-n\frac{\partial z}{\partial x} \qquad .....(3)$$

اور

$$m + n\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = -n\frac{\partial z}{\partial y} \qquad \text{.....(4)}$$

مساوات(2)میں l اور m کی قیمتیں رکھنے پر

$$\left(-n\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(-n\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + n^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right\} n^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad n = \left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right\}^{-1/2}$$

مساوات(3)اور مساوات(4)سے

$$l = -\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right\}^{-1/2} \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$m = -\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right\}^{-1/2} \frac{\partial z}{\partial y}$$

مساوات(1)میں l ،mاور n کی قیمتیں درج کرنے پر

$$-\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right\}^{-1/2} \left(\frac{\partial z}{\partial x}x + \frac{\partial z}{\partial y}y - z\right) = k$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x}x + \frac{\partial z}{\partial y}y - z = -k\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

جو کہ مبدا سے مستقل دوری پر موجود تمام مستویوں کے لیے جزوی تفرقی مساوات ہے۔

1.3 اکتسابی نتائج(Learning Outcomes)

اس اکائی کے مطالعے کے بعد آپ نے جزوی تفرقی مساوات کی تعریف اور اس کی مختلف اقسام کی بنیادی جانکاری حاصل کی ہو گی اور کسی ضابطہ سے اختیاری مستقلات کو ساقط کر کے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرنا سیکھ لیا ہو گا۔

1.4 کلیدی الفاظ(Keywords)

خطی، غیر خطی، جزوی تفرقی مساوات، نصف خطی تفرقی مساوات، قواصی خطی جزوی تفرقی مساوات

1.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

1.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. خطی اور غیر خطی جزوی تفرقی مساواتوں کی تعریف کرو۔
2. کسی جزوی تفرقی مساوات کے رتبے اور درجہ کی تعریف کرو۔
3. $yp + xq = \frac{x^2z^2}{y^2}$ نصف خطی جزوی تفرقی مساوات ہے۔ (T/F)
4. مساوات $f(x,y,z,p,q) = 0$ ایک ..... جزوی تفرقی مساوات کہلاتی ہے اگر یہ p اور q میں خطی ہوں اور اس کی شکل $P(x,y,z)p + Q(x,y,z)q = R(x,y,z)$ ہو۔
5. $pq = z$ دونوں پہلے رتبے کی خطی جزوی تفرقی مساوات ہیں۔ (T/F)
6. مساوات $(x^2 - yz)p + (y^2 - zx)q = z^2 - xy$ پہلے رتبے کی قواصی- خطی جزوی تفرقی مساوات ہے۔ (T/F)
7. جب کسی مساوات میں غیر تابع متغیر کی تعداد اختیاری مستقل سے زیادہ ہوتی ہے تو ہمیں پہلے رتبے کی ایک جزوی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہیں۔ (T/F)
8. جب کسی مساوات میں غیر تابع متغیر کی تعداد اختیاری مستقل کی تعداد سے کم ہوتی ہے تو ہمیں ایک سے زیادہ رتبے کی جزوی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ (T/F)

1.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. اختیاری مستقلات a اور b کو ساقط کرکے $z = ax^3 + by^3$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔
2. اختیاری مستقلات a اور b کو ساقط کرکے $4z = \left(ax + \frac{y}{a} + b\right)^2$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔
3. اختیاری مستقلات a، b اور c کو ساقط کرکے $z = ax^2 + bxy + cy^2$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔
4. اختیاری مستقلات a اور b کو ساقط کرکے $ax^2 + by^2 + z^2 = 1$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔
5. ثابت کرو کہ $z = Ax + By + f(A,B)$ سے A, B کے لیے جزوی تفرقی مساوات $z = px + qy + f(p,q)$ ہے۔
6. اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کرکے $z = Axe^y + \frac{1}{2}A^2e^{2y} + B$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔
7. اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کرکے $z = Ax + By + A^2 + B^2$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل دیجیے۔
8. اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کرکے $z = (x - A)^2 + (y - B)^2$ سے جزوی تفرقی مساوات کو تشکیل دیجیے۔
9. ضابطہ $z = A(x + y) + B$ سے اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کریے۔
10. اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کرکے ضابطہ $z = Ax + By + AB$ کے لیے جزوی تفرقی مساوات تشکیل کرو۔

11. اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کر کے ضابطہ $z = (x + A)(y + B)$ کے لیے جزوی تفرقی مساوات تشکیل کرو۔

12. اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کر کے ضابطہ $z = (x^3 + A)(y^3 + B)$ کے لیے جزوی تفرقی مساوات تشکیل کرو۔

1.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. ان تمام کرہوں (Spheres) کے لیے جزوی تفرقی مساوات حاصل کرو جن کا مرکز XY مستوی (Plane) پر ہو اور جس کا نصف قطر 4 ہو۔
2. x اور y محاور پر یکساں مقطوعہ (Intercept) بنانے والی مستوی کی جزوی تفرقی مساوات حاصل کریے۔
3. ان کرہوں کے خاندان کے لیے جزوی تفرقی مساوات حاصل کرو جس کا مرکز مستوی $x - y = 0$ پر ہو اور جس کا نصف قطر 7 ہو۔
4. z۔ محور پر مرکز والے تمام کرہوں کے لیے جزوی تفرقی مساوات حاصل کرو۔
5. اختیاری مستقلات a، b اور c کو ساقط کر کے $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

جوابات:

1.5.1 معروضی سوالات کے جوابات

3. T
4. قواصی خطی
5. F
6. T
7. F
8. T

1.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 3z$
2. $z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$
3. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2z$
4. $z\left(z - x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 1$
6. $\frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$

7. $z = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$

8. $4z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$

9. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$

10. $z = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$

11. $z = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$

12. $9x^2y^2z = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$

1.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $(x-y)^2(p^2+q^2+1) = 16(p-q)^2$

2. $p - q = 0$

3. $(x-y)^2(p^2+q^2+1) = 49(p-q)$

4. $xq - yp = 0$

5. اس کے تین ممکنہ حل $z\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0$، $-z\frac{\partial z}{\partial y} + yz\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0$ اور $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ ہیں۔

اکائی2۔ جزوی تفرقی مساوات-II

(Partial Differential Equations - II)

اکائی کے اجزا

2.0	تمہید
2.1	مقاصد
2.2	جزوی تفرقی مساواتوں کی تشکیل
2.2.1	اختیاری تفاعل کے اخراج سے جزوی تفرقی مساواتوں کی تشکیل
2.3	اکتسابی نتائج
.4	کلیدی الفاظ
.5	نمونہ امتحانی سوالات
2.5.1	معروضی جوابات کے حامل سوالات
2.5.2	مختصر جوابات کے حامل سوالات
2.5.3	طویل جوابات کے حامل سوالات

2.0 تمہید (Introduction)

گزشتہ اکائی میں ہم نے جزوی تفرقی مساوات کی بنیادی معلومات حاصل کی اور پھر دیے گئے ضابطے سے اختیاری مستقلات کو ساقط کرکے اس کی تشکیل دینا سیکھا۔اس اکائی میں ہم جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل اختیاری تفاعلات کے اخراج سے حاصل کرنا سیکھیں گے۔

2.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ جزوی تفرقی مساواتوں کی تشکیل اختیاری تفاعلات کو ساقط کرکے کر سکیں۔

2.2 جزوی تفرقی مساواتوں کی تشکیل (Formation of Partial Differential Equations)

2.2.1 اختیاری تفاعل کے اخراج سے جزوی تفرقی مساواتوں کی تشکیل

Formation of Partial Differential Equations by Elimination of Arbitrary)

(Function

فرض کرو کہ $f(u,v)=0$ کوئی مساوات ہے، جہاں u اور v غیر تابع متغیرات x، y اور z کے تفاعلات ہیں اور f ایک اختیاری تفاعل ہے۔

اب

$$f(u,v)=0 \qquad \text{.....(1)}$$

مساوات (1) کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی طور پر (Partially) الگ الگ تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0 \qquad \text{.....(2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0 \qquad \text{.....(3)}$$

مساوات (2) اور (3) سے $\frac{\partial f}{\partial u}$ اور $\frac{\partial f}{\partial v}$ کو ہٹانے پر

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}q\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}p\right)=0$$

$$p\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}\right)+q\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$Pp+Qq=R \qquad \text{.....(4)}$$

جہاں

$$P = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}$$
$$Q = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$R = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}$$

مساوات(4)پہلے رتبے کی جزوی تفرقی مساوات ہے۔

نوٹ: اگر کسی مساوات میں دو اختیاری تفاعلات موجود ہوں تو اس سے حاصل جزوی تفرقی مساوات کا رتبہ دو سے زیادہ ہو گا۔

اب ہم کچھ مثالوں سے اختیاری تفاعل کے اخراج سے جزوی تفرقی مساوات حاصل کرنا سمجھتے ہیں۔

مثال1۔ اختیاری تفاعل ϕ کو ساقط کر کے $z = e^{mt}\phi(t-x)$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$z = e^{mt}\phi(t-x) \qquad .....(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ t جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{mt}\frac{\partial}{\partial x}\{\phi(t-x)\} \times (-1)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -e^{mt}\phi'(t-x) \qquad .....(2)$$

اور

$$\frac{\partial z}{\partial t} = me^{mt}\phi(t-x) + e^{mt}\frac{\partial}{\partial t}\phi(t-x)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial t} = me^{mt}\phi(t-x) + e^{mt}\phi'(t-x) \qquad .....(3)$$

مساوات(1)،(2)اور(3)سے

$$\frac{\partial z}{\partial t} = mz - \frac{\partial z}{\partial x}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} = mz$$

جو کہ پہلے رتبے کی مطلوبہ جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال2۔ اختیاری تفاعلات ϕ اور ψ کو ساقط کر کے $z = \phi(x+iy) + \psi(x-iy)$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$z = \phi(x+iy) + \psi(x-iy) \qquad .....(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p = \phi'(x+iy) + \psi'(x-iy) \qquad \text{.....(2)}$$

اور

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q = i\phi'(x+iy) - i\psi'(x-iy) \qquad \text{.....(3)}$$

مساوات(2) کو بہ لحاظ x اور مساوات(3) کو بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \phi''(x+iy) + \psi''(x-iy) \qquad \text{.....(4)}$$

اور

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= i^2\phi''(x+iy) + i^2\psi''(x-iy)\\ &= -\phi''(x+iy) - \psi''(x-iy)\end{aligned}$$

مساوات(4) سے

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

اس لیے $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ دوسرے رتبے کی مطلوبہ جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال3۔ اختیاری تفاعل ϕ کو ساقط کرکے $z = \phi(x^2+y^2)$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$z = \phi(x^2+y^2) \qquad \text{.....(1)}$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\{\phi(x^2+y^2)\} \times (2x)$$

$$\Rightarrow \qquad p = 2x\phi'(x^2+y^2) \qquad \text{.....(2)}$$

اور

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\{\phi(x^2+y^2)\} \times (2y)$$

$$\Rightarrow \qquad q = 2y\phi'(x^2+y^2) \qquad \text{.....(3)}$$

مساوات(2) اور(3) سے

$$\frac{p}{q} = \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow \quad py - qx = 0$$

جو کہ پہلے رتبے کی مطلوبہ جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال4۔ $z = (x+y)\phi(x^2-y^2)$ سے اختیاری تفاعل ϕ کو ساقط کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$z = (x+y)\phi(x^2-y^2) \qquad .....(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x+y)\frac{\partial}{\partial x}\{\phi(x^2-y^2)\} \times (2x) + \phi(x^2-y^2)$$

$$\Rightarrow \quad p = 2x(x+y)\phi'(x^2-y^2) + \phi(x^2-y^2) \qquad .....(2)$$

اور

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x+y)\frac{\partial}{\partial y}\{\phi(x^2-y^2)\} \times (-2y) + \phi(x^2-y^2)$$

$$\Rightarrow \quad q = -2y(x+y)\phi'(x^2-y^2) + \phi(x^2-y^2) \qquad .....(3)$$

مساوات(2)اور(3)سے

$$\begin{aligned} py + qx &= 2xy(x+y)\phi'(x^2-y^2) + y\phi(x^2-y^2) - 2xy(x+y) \times \\ &\quad \phi'(x^2-y^2) + x\phi(x^2-y^2) \\ &= (x+y)\phi(x^2-y^2) \end{aligned}$$

جو کہ پہلے رتبے کی مطلوبہ جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال5۔ اختیاری تفاعل ϕ کو ساقط کرکے $z = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$z = \phi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad .....(1)$$

من درجہ بالا مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\phi\left(\frac{y}{x}\right)\right\} \times \left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad p = -\frac{y}{x^2}\phi'\left(\frac{y}{x}\right) \qquad .....(2)$$

اور

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\phi\left(\frac{y}{x}\right)\right\} \times \left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad q = \frac{1}{x}\phi'\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{.....(3)}$$

مساوات(2)اور(3)سے

$$\frac{p}{q} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{\frac{1}{x}} = -\frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \quad px + qy = 0$$

جو کہ پہلے رتبے کی مطلوبہ جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال6۔ اختیاری تفاعل f کو ساقط کر کے $z = y^2 + 2f\left(\frac{1}{x} + \log y\right)$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$z = y^2 + 2f\left(\frac{1}{x} + \log y\right) \qquad \text{.....(1)}$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{2f\left(\frac{1}{x} + \log y\right)\right\} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad p = -\frac{2}{x^2}f'\left(\frac{1}{x} + \log y\right)$$

$$\Rightarrow \quad -px^2 = 2f'\left(\frac{1}{x} + \log y\right) \qquad \text{.....(2)}$$

اور

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + \frac{\partial}{\partial y}\left\{2f\left(\frac{1}{x} + \log y\right)\right\} \times \left(\frac{1}{y}\right)$$

$$\Rightarrow \quad q = 2y + \frac{2}{y}f'\left(\frac{1}{x} + \log y\right) \qquad \text{.....(3)}$$

مساوات(2)اور(3)سے

$$q = 2y - \frac{px^2}{y}$$

$$\Rightarrow \quad px^2 + qy = 2y^2$$

جو کہ پہلے رتبے کی مطلوبہ جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال7۔ $lx + my + nz = f(x^2 + y^2 + z^2)$ سے اختیاری تفاعل f کو ہٹایے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$lx + my + nz = f(x^2 + y^2 + z^2) \qquad \text{.....(1)}$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$l + n\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\{f(x^2 + y^2 + z^2)\} \times \left(2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad l + np = 2(x + zp)f'(x^2 + y^2 + z^2) \qquad \text{.....(2)}$$

اور

$$m + n\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\{f(x^2 + y^2 + z^2)\} \times \left(2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\Rightarrow \quad m + nq = 2(y + zq)f'(x^2 + y^2 + z^2) \qquad \text{.....(3)}$$

مساوات(2)اور(3)سے

$$\frac{l + np}{m + nq} = \frac{x + zp}{y + zq}$$

جو کہ پہلے رتبے کی مطلوبہ جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال8۔ $f(x + y + z, x^2 + y^2 - z^2) = 0$ سے اختیاری تفاعل f کو ساقط کریے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$f(x + y + z, x^2 + y^2 - z^2) = 0$$

فرض کرو کہ $u = x + y + z, v = x^2 + y^2 - z^2$ اس لیے

$$f(u, v) = 0 \qquad \text{.....(1)}$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial u}(1 + p) + \frac{\partial f}{\partial v}(2x - 2pz) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (1 + p)\frac{\partial f}{\partial u} + 2(x - pz)\frac{\partial f}{\partial v} = 0 \qquad \text{.....(2)}$$

اور

$$\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial u}(1 + q) + \frac{\partial f}{\partial v}(2y - 2zq) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (1 + q)\frac{\partial f}{\partial u} + 2(y - zq)\frac{\partial f}{\partial v} = 0 \qquad \text{.....(3)}$$

مساوات(2)اور(3)سے

$$\frac{1+p}{1+q}=\frac{x-zp}{y-zq}$$

جو کہ پہلے رتبے کی مطلوبہ جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال9۔ $z=\phi(x\cos\alpha+y\sin\alpha-at)+\psi(x\cos\alpha+y\sin\alpha+at)$ سے اختیاری تفاعلات ϕ اور ψ کو ساقط کرکے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$z=\phi(x\cos\alpha+y\sin\alpha-at)+\psi(x\cos\alpha+y\sin\alpha+at) \quad .....(1)$$

اس مساوات کو دو مرتبہ بہ لحاظ x,y اور بہ لحاظ t جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\phi'(x\cos\alpha+y\sin\alpha-at)\cos\alpha+\psi'(x\cos\alpha+y\sin\alpha+at)\cos\alpha$$

دوبارہ جزوی تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\phi''(x\cos\alpha+y\sin\alpha-at)\cos^2\alpha+\psi''(x\cos\alpha+y\sin\alpha+at)\cos^2\alpha \quad .....(2)$$

اور

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\phi'(x\cos\alpha+y\sin\alpha-at)\sin\alpha+\psi'(x\cos\alpha+y\sin\alpha+at)\sin\alpha$$

دوباراہ جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\phi''(x\cos\alpha+y\sin\alpha-at)\,sin^2\alpha+\psi''(x\cos\alpha+y\sin\alpha+at)\,sin^2\alpha \quad .....(3)$$

اور

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\phi'(x\cos\alpha+y\sin\alpha-at)(-a)+\psi'(x\cos\alpha+y\sin\alpha+at)a$$

دوبارہ جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\phi''(x\cos\alpha+y\sin\alpha-at)a^2+\psi''(x\cos\alpha+y\sin\alpha+at)a^2 \quad .....(4)$$

مساوات(2)،(3)اور(4) سے

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

اس لیے $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ دوسرے رتبے کی مطلوبہ جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال10۔ مساوات $vr = \phi(r-at) + \psi(r+at)$ سے اختیاری تفاعلات ϕ اور ψ کو ساقط کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$v = \frac{1}{r}[\phi(r-at) + \psi(r+at)] \qquad .....(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ r جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r}[\phi'(r-at) + \psi'(r+at)] - \frac{1}{r^2}[\phi(r-at) + \psi(r+at)] \quad .....(2)$$

دوبارہ جزوی تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{r}[\phi''(r-at) + \psi''(r+at)] - \frac{1}{r^2}[\phi'(r-at) + \psi'(r+at)] - \frac{1}{r^2}[\phi'(r-at) + \psi'(r+at)] + \frac{2}{r^3}[\phi(r-at) + \psi(r+at)]$$

مساوات(1) سے

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{r}[\phi''(r-at) + \psi''(r+at)] - \frac{2}{r^2}[\phi'(r-at) + \psi'(r+at)] + \frac{2}{r^2}v \quad .....(3)$$

اب مساوات(1) کو بہ لحاظ t جزوی تفرق کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{a}{r}[-\phi'(r-at) + \psi'(r+at)]$$

اسے دوبارہ جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{a^2}{r}[\phi''(r-at) + \psi''(r+at)] \qquad .....(4)$$

اب مساوات(3) اور(4) سے

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{2}{r} \times \frac{1}{r}[\phi'(r-at) + \psi'(r+at)] + \frac{2}{r^2}v$$

مساوات(2) سے

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{2}{r} \times \left\{\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}[\phi(r-at) + \psi(r+at)]\right\} + \frac{2}{r^2}v$$

مساوات(1) سے

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} &= \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{2}{r} \times \left\{\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\right\} + \frac{2}{r^2}v \\ &= \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2v}{r^2} + \frac{2}{r^2}v \\ &= \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\end{aligned}$$

اس لیے $\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r}$ دوسرے رتبے کی مطلوبہ جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مثال 11۔ مساوات $z = \phi(x) + e^y\psi(x)$ سے اختیاری تفاعلات ϕ اور ψ کو ساقط کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$z = \phi(x) + e^y\psi(x) \qquad .....(1)$$

مساوات(1) کو بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^y\psi(x) \qquad .....(2)$$

دوبارہ جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^y\psi(x) \qquad .....(3)$$

مساوات(2) اور (3) سے

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

اس لیے $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ دوسرے رتبے کی مطلوبہ جزوی تفرقی مساوات ہے۔

2.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی کو پڑھنے کے بعد آپ جزوی تفرقی مساوات سے اختیاری تفاعلات کو ساقط کر کے جزوی تفرقی مساوات کو تشکیل کرنا سیکھ گئے ہوں گے۔

2.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

اختیاری تفاعل، ساخط

2.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

2.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. کسی ضابطے میں اگر دو اختیاری تفاعلات ہوں تب اس سے حاصل جزوی تفرقی مساوات کا رطبہ دو سے زیادہ ہوگا۔ (T/F)

2. ضابطہ $z = f(x^2 + y^2)$ کے لیے جزوی تفرقی مساوات $yp + xq = 0$ ہے۔ (T/F)

3. تفاعلات ϕ اور ψ کو ساقط کرکے $z = \phi(x + iy) + \psi(x - iy)$ سے پہلے رطبے کی جزوی تفرقی مساوات حاصل ہوگی۔ (T/F)

2.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. اختیاری تفاعل ϕ کو ساقط کرکے $z = e^y \phi(x + y)$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

2. اختیاری تفاعل ϕ کو ساقط کرکے $z = e^{Ax+By} \phi(Ax - By)$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

3. اختیاری تفاعل ϕ کو ساقط کرکے $z = \phi(x^2 - y^2)$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

4. اختیاری تفاعل ϕ کو ساقط کرکے $z = xy + \phi(x^2 + y^2)$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

2.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. تفاعلات ϕ اور ψ کو ساقط کرکے $z = y\phi(x) + x\psi(y)$ سے جزوی تفرقی مساوات حاصل کرو۔

2. تفاعلات ϕ اور ψ کو ساقط کرکے $z = \phi(x) + \psi(y)$ سے جزوی تفرقی مساوات حاصل کرو۔

3. ضابطہ $F(x + y + z, x - y + z) = 0$ سے اختیاری تفاعل F کو ساخط کیجیے۔

جوابات:

14.5.1 معروضی سوالات کے جوابات

1. T

2. F

3. F

2.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $\frac{\partial z}{\partial y} = z + \frac{\partial z}{\partial x}$

2. $B\frac{\partial z}{\partial x} + A\frac{\partial z}{\partial y} = 2ABz$

3. $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

4. $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2$

2.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z$

2. $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$

3. $1 + p = 0$

اکائی 3۔ خطی جزوی تفرقی مساواتوں کے حل (لگرانج کا طریقہ)

(Solution of Linear Partial Differential Equations: Lagrange's Method)

اکائی کے اجزا

3.0	تمہید
3.1	مقاصد
3.2	لگرانج کی خطی جزوی تفرقی مساوات
3.2.1	لگرانج کی خطی جزوی تفرقی مساوات کا حل
3.2.2	لگرانج کا $Pp + Qq = R$ کو حل کرنے کا طریقہ
3.3	اکتسابی نتائج
3.4	کلیدی الفاظ
3.5	نمونہ امتحانی سوالات
3.5.1	معروضی جوابات کے حامل سوالات
3.5.2	مختصر جوابات کے حامل سوالات
3.5.3	طویل جوابات کے حامل سوالات

3.0 تمہید(Introduction)

پہلے رتبے کی جزوی تفرقی مساوات بہت سی عملی صورتحال میں واقع ہوتی ہیں جیسے براؤنین گردش(Brownian Motion)، ریڈیو ایکٹو تقسیم ، مواصلاتی (Communication) نظام میں شور(Noise)، ٹیلی فون ٹریفک(Telephonic Traffic) وغیرہ۔ درحقیقت خطی جزوی تفرقی مساوات کے حل کی نوعیت کو سمجھ کر اعلی رتبہ کی جزوی تفرقی مساوات کا حل تلاش کرنے کے لیے ایک طریقہ کو شکل دینے کی ضرورت ہے۔اس اکائی میں ہم لگرانج کی خطی جزوی تفرقی مساوات اور اس کا لگرانج کے طریقہ سے حل حاصل کرنا سیکھیں گے۔

3.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے کے بعد آپ:

- لگرانج کی خطی تفرقی مساوات کی بنیادی جانکاری سے متاعرف ہو جائیں گے۔
- لگرانج کے طریقے کی مدد سے خطی جزوی تفرقی مساواتوں کا حل حاصل کرنا سیکھ جائیں گے۔

3.2 لگرانج کی خطی جزوی تفرقی مسات (Lagrange's Linear Partial Differential Equations)

تعریف: جزوی تفرقی مساوات $Pp + Qq = R$ کو پہلے رتبے کی لگرانج کی خطی جزوی تفرقی مساوات کہتے ہیں، جہاں P، Q اور R متغیرات x، y، z کے تفاعلات ہیں۔

فرض کرو کہ $u = c$ لگرانج کی خطی جزوی تفرقی مساوات کا ایک حل ہے۔اس لیے یہ مساوات

$$Pp + Qq = R \qquad \text{.....(1)}$$

کی تصدیق کریگا۔اب مساوات $u = c$ کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

یا

$$\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \Rightarrow p = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial z}} \qquad \text{.....(2)}$$

اور

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

یا

$$\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \Rightarrow q = -\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial z}} \quad \text{.....(3)}$$

مساوات(1)سے

$$P\left(-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial z}}\right) + Q\left(-\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial z}}\right) = R$$

$$\Rightarrow \quad P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} = -R\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \quad P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{.....(4)}$$

اب ہم کہہ سکتے ہیں کہ $u = c$ مساوات (1)اور مساوات (4) کی تصدیق کرتی ہے۔اس لیے مساوات (4) کو مساوات (1) کے مساوی (Equivalent)لیا جاسکتا ہے۔

3.2.1 لگرانج کی خطی جزوی تفرقی مساوات کا حل

(Solution of Lagrange's Linear Partial Differential Equation)

قضیہ(Theorem):

ہم جانتے ہیں کہ لگرانج کی خطی تفرقی مساوات ہے

$$Pp + Qq = R \quad \text{.....(1)}$$

فرض کرو کہ

$$\phi(u, v) = 0 \quad \text{.....(2)}$$

مساوات(1) کا حل ہے، جہاں ϕ ایک اختیاری تفاعل ہے۔یہاں $u(x, y, z) = a$ اور $v(x, y, z) = b$ مساوات

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \quad \text{.....(3)}$$

کے دو غیر تابع حل ہیں اور a، b دو اختیاری تفاعلات ہیں اور کم از کم ایک میں z ضرور ہو گا۔

ثبوت: مساوات(2) کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial \phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

یا

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial \phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0 \quad \text{.....(4)}$$

اور

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial \phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

یا

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial \phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0 \qquad .....(5)$$

مساوات(4)اور مساوات(5)سے$\frac{\partial \phi}{\partial u}$اور$\frac{\partial \phi}{\partial v}$کو ہٹانے پر

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix}=R$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\Rightarrow \quad p\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}\right)+q\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0 \qquad .....(6)$$

اس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\phi(u,v)=0$ مساوات(6)کا حل ہے۔اب$u(x,y,z)=a$اور$v(x,y,z)=b$کے مشتق لینے پر

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=0 \qquad .....(7)$$

اور

$$\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz=0 \qquad .....(8)$$

چوں کہ u,v دونوں غیر تابع تفاعلات ہیں،اس لیے

$$\frac{dx}{\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}}=\frac{dy}{\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}}=\frac{dz}{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}} \qquad .....(9)$$

مساوات(3)اور مساوات(9)سے

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}}{P}=\frac{\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}}{Q}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}}{R}=k$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}=kP, \\ \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}=kQ, \\ \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}=kR \end{cases}$$

یہ قیمتیں مساوات(6)میں درج کرنے پر

$$k(Pp+Qq)=kR$$

یا

$$Pp+Qq=R$$

اس لیےاگرu,vدونوں$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$کے غیر تابع حل ہوں تب $\phi(u,v)=0$ مساوات$Pp+Qq=R$کا حل ہے، جہاںϕ ایک اختیاری تفاعل ہے۔

مساوات(3)کو مساوات(1)کے لیے لگرانج کی معاون(Auxiliary یاSubsidiary)مساوات کہتے ہیں۔

3.2.2 لگرانج کا $Pp + Qq = R$ کو حل کرنے کا طریقہ (Lagrange's Method to Solve $Pp + Qq = R$)

I. دی گئی پہلے رتبے کی خطی جزوی تفرقی مساوات کو ذیل شکل میں تبدیل کرتے ہیں $Pp + Qq = R$

II. اس مساوات کے لیے لگرانج کی معاون مساوات لکھو جو کہ ذیل ہے $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$

III. معاون مساوات کو کسی مناسب طریقہ سے حل کریے۔مان لیجیے کہ $u(x, y, z) = a$ اور $v(x, y, z) = b$ اس مساوات کے دو غیر تابع حل ہیں۔

IV. مساوات $Pp + Qq = R$ کا عام حل درجہ ذیل میں سے کسی بھی شکل میں ہو سکتا ہے:

(i) $\phi(u, v) = 0$

(ii) $u = \phi(v)$

(iii) $v = \phi(u)$

جہاں ϕ ایک اختیاری تفاعل ہے۔

نوٹ: معاون مساوات میں اگر کسی دو کسروں (Fractions) میں ایک متغیر نہ ہو یا وہ منسوق ہو جائے، تب ایک تکمل حاصل ہوتا ہے جس کو آسانی کے ساتھ حل کر سکتے ہیں۔اسی طرح دوسرے کسرے کے جوڑے کو لے کر ہم دیے گئے سوال کا حل نکال سکتے ہیں۔

مثال 1۔ درجہ ذیل خطی جزوی تفرقی مساواتوں کو حل کریے:

(i) $\frac{y^2zp}{x} + xzq = y^2$

(ii) $p + q = z$

(iii) $2p + 3q = 1$

(iv) $p \tan x + q \tan y = \tan z$

(v) $y^2p - xyq + 2xy = xz$

(vi) $x^2p + y^2q = z^2$

(vii) $xp + yq = z$

(viii) $p + q = 1$

(ix) $xyp + y^2q = xyz - 2x^2$

حل۔(i) دیا ہے

$$\frac{y^2zp}{x} + xzq = y^2 \quad \text{.....(1)}$$

مساوات (1) کی $Pp + Qq = R$ سے مشابہت کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $p = \frac{y^2z}{x}, Q = xz, R = y^2$

اس لیے دی گئی مساوات کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{dx}{\frac{y^2z}{x}} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{y^2} \quad \text{.....(2)}$$

اس مساوات کے پہلے دو کسرے لینے پر

$$\frac{dx}{\frac{y^2z}{x}} = \frac{dy}{xz}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad x^2dx - y^2dy = 0 \qquad \text{.....(3)}$$

مساوات(3) کو تکمل کرنے پر

$$\frac{x^3}{3} - \frac{y^3}{3} = a$$

$$\Rightarrow \quad x^3 - y^3 = 3a = A \text{ (فرض کرو)} \qquad \text{.....(4)}$$

جہاں A ایک اختیاری مستقل ہے۔اب مساوات(2) کے پہلے اور آخری کسرے کو لینے پر

$$\frac{dx}{\frac{y^2z}{x}} = \frac{dz}{y^2}$$

$$\Rightarrow \quad xdx - zdz = 0 \qquad \text{.....(5)}$$

مساوات(5) کو تکمل کرنے پر

$$\frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{2} = b$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - z^2 = 2b = B \text{ (فرض کرو)} \qquad \text{.....(6)}$$

جہاں B ایک اختیاری مستقل ہے۔ اب مساوات(4) اور مساوات(6) سے مساوات(1) کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$\phi(x^3 - y^3, x^2 - z^2) = 0$$

جہاں ϕ ایک اختیاری تفاعل ہے۔

حل۔(ii) دیا ہے

$$p + q = z \qquad \text{.....(1)}$$

مساوات(1) کی $Pp + Qq = R$ سے مشابہت کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $p = 1, Q = 1, R = z$

اس لیے دی گئی مساوات کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{z} \qquad \text{.....(2)}$$

اس مساوات کے پہلے دو کسرے لینے پر

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1}$$

$$\Rightarrow \quad dx - dy = 0 \qquad \text{.....(3)}$$

مساوات(3) کو تکمل کرنے پر

$$\Rightarrow \quad x - y = A \qquad \text{.....(4)}$$

جہاں A ایک اختیاری مستقل ہے۔اب مساوات(2) کے دوسرے اور آخری کسرے کو لینے پر

$$dy = \frac{dz}{z} \qquad \text{.....(5)}$$

مساوات(5) کو تکمل کرنے پر

$$y = \log z + \log B$$

$$\Rightarrow \quad y = \log Bz$$

$$\Rightarrow \quad \frac{e^y}{z} = B \qquad \text{.....(6)}$$

جہاں B ایک اختیاری مستقل ہے۔ اب مساوات(4) اور مساوات(6) سے مساوات(1) کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$\phi\left(x - y, \frac{e^y}{z}\right) = 0$$

جہاں ϕ ایک اختیاری تفاعل ہے۔

حل۔(iii) دیا ہے

$$2p + 3q = 1 \qquad \text{.....(1)}$$

مساوات(1) کی $Pp + Qq = R$ سے مشابہت کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $p = 2, Q = 3, R = 1$

اس لیے دی گئی مساوات کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{dx}{2} = \frac{dy}{3} = \frac{dz}{1} \qquad \text{.....(2)}$$

اس مساوات کے پہلے دو کسرے لینے پر

$$\frac{dx}{2} = \frac{dy}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 3dx - 2dy = 0 \qquad \text{.....(3)}$$

مساوات(3) کو تکمل کرنے پر

$$\Rightarrow \quad 3x - 2y = A \qquad \text{.....(4)}$$

جہاں A ایک اختیاری مستقل ہے۔اب مساوات(2) کے دوسرے اور آخری کسرے کو لینے پر

$$\frac{dy}{3} = \frac{dz}{1}$$

$$\Rightarrow \qquad dy - 3dz = 0 \qquad \text{.....(5)}$$

مساوات(5) کو تکمل کرنے پر

$$\Rightarrow \qquad y - 3z = B \qquad \text{.....(6)}$$

جہاں B ایک اختیاری مستقل ہے۔ اب مساوات(4) اور مساوات(6) سے مساوات(1) کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$\phi(3x - 2y, y - 3z) = 0$$

جہاں ϕ ایک اختیاری تفاعل ہے۔

حل۔(iv) دیا ہے

$$p \tan x + q \tan y = \tan z \qquad \text{.....(1)}$$

مساوات(1) کی $Pp + Qq = R$ سے مشابہت کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $p = \tan x\,, Q = \tan y\,, R = \tan z$

اس لیے دی گئی مساوات کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{dx}{\tan x} = \frac{dy}{\tan y} = \frac{dz}{\tan z} \qquad \text{.....(2)}$$

اس مساوات کے پہلے دو کسرے لینے پر

$$\frac{dx}{\tan x} = \frac{dy}{\tan y}$$

$$\Rightarrow \qquad \cot x\, dx - \cot y\, dy = 0 \qquad \text{.....(3)}$$

مساوات(3) کو تکمل کرنے پر

$$\log \sin x - \log \sin y = \log A$$

$$\Rightarrow \qquad \log \frac{\sin x}{\sin y} = \log A$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\sin x}{\sin y} = A \qquad \text{.....(4)}$$

جہاں A ایک اختیاری مستقل ہے۔اب مساوات(2) کے دوسرے اور آخری کسرے کو لینے پر

$$\frac{dy}{\tan y} = \frac{dz}{\tan z}$$

$$\Rightarrow \qquad \cot y\, dy - \cot z\, dz = 0 \qquad \text{.....(5)}$$

مساوات(5)کو تکمل کرنے پر

$$\log \sin y - \log \sin z = \log B$$

$$\Rightarrow \quad \log \frac{\sin y}{\sin z} = \log B$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin y}{\sin z} = B \qquad \text{.....(6)}$$

جہاں Bایک اختیاری مستقل ہے۔ اب مساوات(4)اور مساوات(6)سے مساوات(1)کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$\phi\left(\frac{\sin x}{\sin y}, \frac{\sin y}{\sin z}\right) = 0$$

جہاں ϕایک اختیاری تفاعل ہے۔

حل۔(v)دیا ہے $y^2p - xyq + 2xy = xz$ اس مساوات کو درجہ ذیل شکل میں لکھ سکتے ہیں

$$y^2p - xyq = x(z - 2y) \qquad \text{.....(1)}$$

مساوات(1)کی $Pp + Qq = R$ سے مشابہت کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $p = y^2, Q = -xy, R = x(z - 2y)$

اس لیے دی گئی مساوات کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{-xy} = \frac{dz}{x(z-2y)} \qquad \text{.....(2)}$$

اس مساوات کے پہلے اور دوسرے کسرے لینے پر

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{-xy}$$

$$\Rightarrow \quad xdx + ydy = 0 \qquad \text{.....(3)}$$

مساوات(3)کو تکمل کرنے پر

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = a^2 = A$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = A \qquad \text{.....(4)}$$

جہاں Aایک اختیاری مستقل ہے۔اب مساوات(2)کے دوسرے اور آخری کسرے کو لینے پر

$$\frac{dy}{-xy} = \frac{dz}{x(z - 2y)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{z}{y} + 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dy} + \frac{z}{y} = 2 \qquad \text{.....(5)}$$

یہ ایک خطی تفرقی مساوات ہے۔اس لیے

$$I.F. = e^{\int \frac{1}{y} dy} = y$$

مساوات(5)کا حل درجہ ذیل ہو گا

$$z(y) = \int 2.y\,dy + B$$

$$\Rightarrow \qquad yz = 2\frac{y^2}{2} + B$$

$$\Rightarrow \qquad yz - y^2 = B \qquad \text{.....(6)}$$

جہاں B ایک اختیاری مستقل ہے۔اب مساوات(4)اور مساوات(6)سے مساوات(1)کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$\phi(x^2 + y^2, yz - y^2) = 0$$

جہاں ϕ ایک اختیاری تفاعل ہے۔

حل۔(vi)دیا ہے

$$x^2p + y^2q = z^2 \qquad \text{.....(1)}$$

مساوات(1)کی $Pp + Qq = R$ سے مشابہت کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $p = x^2, Q = y^2, R = z^2$

اس لیے دی گئی مساوات کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{z^2} \qquad \text{.....(2)}$$

اس مساوات کے پہلے دو کسرے لینے پر

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} \qquad \text{.....(3)}$$

مساوات(3)کو تکمل کرنے پر

$$-\frac{1}{x} = -\frac{1}{y} + A$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x-y}{xy} = A \qquad \text{.....(4)}$$

جہاں A ایک اختیاری مستقل ہے۔اب مساوات(2)کے دوسرے اور آخری کسرے کو لینے پر

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{z^2} \qquad \text{.....(5)}$$

مساوات(5)کو تکمل کرنے پر

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{z} + B$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{y-z}{yz} = B \qquad \text{.....(6)}$$

جہاں B ایک اختیاری مستقل ہے۔ اب مساوات(4)اور مساوات(6)سے مساوات(1)کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$\phi\left(\frac{x-y}{xy}, \frac{y-z}{yz}\right) = 0$$

جہاں ϕ ایک اختیاری تفاعل ہے۔

حل۔(vii)دیا ہے

$$xp + yq = z \qquad \text{.....(1)}$$

مساوات(1) کی مشابہت $Pp + Qq = R$ سے کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $p = x, Q = y, R = z$

اس لیے دی گئی مساوات کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \quad \text{.....(2)}$$

اس مساوات کے پہلے دو کسرے لینے پر

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \quad \text{.....(3)}$$

مساوات(3) کو تکمل کرنے پر

$$\log x = \log y + \log A$$
$$\Rightarrow \quad \log x - \log y = \log A$$
$$\Rightarrow \quad \frac{x}{y} = A \quad \text{.....(4)}$$

جہاں A ایک اختیاری مستقل ہے۔اب مساوات(2) کے دوسرے اور آخری کسرے کو لینے پر

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \quad \text{.....(5)}$$

مساوات(5) کو تکمل کرنے پر

$$\log y = \log z + \log B$$
$$\Rightarrow \quad \log y - \log z = \log B$$
$$\Rightarrow \quad \frac{y}{z} = B \quad \text{.....(6)}$$

جہاں B ایک اختیاری مستقل ہے۔ اب مساوات(4) اور مساوات(6) سے مساوات(1) کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$\phi\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) = 0$$

جہاں ϕ ایک اختیاری تفاعل ہے۔

حل۔(viii) دیا ہے

$$p + q = 1 \quad \text{.....(1)}$$

مساوات(1) کی $Pp + Qq = R$ سے مشابہت کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $p = 1, Q = 1, R = 1$

اس لیے دی گئی مساوات کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{1} \quad \text{.....(2)}$$

اس مساوات کے پہلے دو کسرے لینے پر

$$\Rightarrow \quad dx - dy = 0 \quad \text{.....(3)}$$

مساوات(3) کو تکمل کرنے پر

$$\Rightarrow \quad x - y = A \quad \text{.....(4)}$$

جہاں A ایک اختیاری مستقل ہے۔اب مساوات(2) کے دوسرے اور آخری کسرے کو لینے پر

$$dy - dz = 0 \qquad \text{.....(5)}$$

مساوات(5)کو تکمل کرنے پر

$$\Rightarrow \quad y - z = B \qquad \text{.....(6)}$$

جہاں Bایک اختیاری مستقل ہے۔ اب مساوات(4)اور مساوات(6)سے مساوات(1)کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$\phi(x - y, y - z) = 0$$

جہاں ϕایک اختیاری تفاعل ہے۔

حل۔(ix)دیا ہے

$$xyp + y^2q = xyz - 2x^2 \qquad \text{.....(1)}$$

مساوات(1)کی $Pp + Qq = R$ سے مشابہت کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $p = xy, Q = y^2, R = xyz - 2x^2$

اس لیے دی گئی مساوات کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{xyz - 2x^2} \qquad \text{.....(2)}$$

اس مساوات کے پہلے دو کسرے لینے پر

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{y^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0 \qquad \text{.....(3)}$$

مساوات(3)کو تکمل کرنے پر

$$\log x - \log y = \log A$$

$$\Rightarrow \quad \log \frac{x}{y} = \log A$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{y} = A \qquad \text{.....(4)}$$

جہاں Aایک اختیاری مستقل ہے۔اب مساوات(2)کے دوسرے اور آخری کسرے کو لینے پر

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{xyz - 2x^2}$$

مساوات(4)سے $x = Ay$ درج کرنے پر

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{Ay^2z - 2A^2y^2}$$

$$\Rightarrow \quad Ady = \frac{dz}{z - 2A} \qquad \text{.....(5)}$$

مساوات(5)کو تکمل کرنے پر

$$Ay = \log(z - 2A) + B$$

$$\Rightarrow \quad x - \log\left(z - \frac{2x}{y}\right) = B \qquad \text{.....(6)}$$

جہاں Bایک اختیاری مستقل ہے۔ اب مساوات(4)اور مساوات(6)سے مساوات(1)کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$\phi\left(\frac{x}{y}, x - \log\left(z - \frac{2x}{y}\right)\right) = 0$$

جہاں ϕ ایک اختیاری تفاعل ہے۔

مثال2۔ مساوات $z(z^2 + xy)(px - qy) = x^4$ کو حل کریے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$z(z^2 + xy)(px - qy) = x^4$$

اس مساوات کو $Pp + Qq = R$ کی شکل میں بدلنے پر

$$pxz(z^2 + xy) - qyz(z^2 + xy) = x^4 \qquad \text{.....(1)}$$

مساوات(1) کی $Pp + Qq = R$ سے مشابہت کرنے پر ہمیں ملتا ہے $p = xz(z^2 + xy), Q = -yz(z^2 + xy), R = x^4$

اس لیے دی گئی مساوات کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{dx}{xz(z^2+xy)} = \frac{dy}{-yz(z^2+xy)} = \frac{dz}{x^4} \qquad \text{.....(2)}$$

اس مساوات کے پہلے دو کسرے لینے پر

$$\frac{dx}{xz(z^2 + xy)} = \frac{dy}{-yz(z^2 + xy)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0 \qquad \text{.....(3)}$$

مساوات(3) کو تکمل کرنے پر

$$\log x + \log y = \log A$$

$$\Rightarrow \quad \log xy = \log A$$

$$\Rightarrow \quad xy = A \qquad \text{.....(4)}$$

جہاں A ایک اختیاری مستقل ہے۔اب مساوات(2) کے پہلے اور آخری کسرے کو لینے پر

$$\frac{dx}{xz(z^2 + xy)} = \frac{dz}{x^4}$$

مساوات(4) سے $xy = A$ رکھنے پر

$$\frac{dx}{z(z^2 + A)} = \frac{dz}{x^3}$$

$$x^3 dx = z(z^2 + A)dz \qquad \text{.....(5)}$$

مساوات(5) کو تکمل کرنے پر

$$\frac{x^4}{4} = \frac{z^4}{4} + A\frac{z^2}{2} + \frac{B}{4}$$

یہاں $xy = A$ درج کرنے پر

$$\Rightarrow \quad x^4 - z^4 - 2xyz^2 = B \qquad \text{.....(6)}$$

جہاں B ایک اختیاری مستقل ہے۔ اب مساوات(4) اور مساوات(6) سے مساوات(1) کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$\phi(xy, x^4 - z^4 - 2xyz^2) = 0$$

جہاں ϕ ایک اختیاری تفاعل ہے۔

3.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی کو پڑھنے کے بعد آپ لگرانج کی خطی جزوی تفرقی مساوات کی تعریف، اس کے لیے معاون مساوات حاصل کرنا اور پھر اس کا حل حاصل کرنا سیکھ گیے ہوں گے۔

3.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

لگرانج کی خطی جزوی تفرقی مساوات، معاون مساوات

3.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

3.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. لگرانج کی خطی جزوی تفرقی مساوات کی تعریف کرو۔
2. لگرانج کی خطی جزوی تفرقی مساوات کے لیے معاون مساوات کی تعریف کرو۔
3. $xzp + yzq = xy$ لگرانج کی خطی جزوی تفرقی مساوات نہیں ہے۔ (T/F)
4. مساوات $Pp + Qq = R$ ایک ..... جزوی تفرقی مساوات کہلاتی ہے۔
5. لگرانج مساوات $p + q = \sin x$ کے لیے معاون مساوات ..... ہے۔

3.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

درجہ ذیل مساوات کو حل کرو:

1. $yzp + zxq = xy$
2. $y^2p - xyq = x(z - 2y)$
3. $(y + zx)p - (x + yz)q = x^2 - y^2$
4. $y^2p^2 + x^2q^2 = x^2y^2z^2$
5. $p + q = \sin x$

3.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

درجہ ذیل مساوات کو حل کرو:

1. $p + 3q = z + \cot(y - 3x)$
2. $p + 3q = 5z + \tan(y - 3x)$

3. $p - 2q = 3x^2 \sin(y + 2x)$

4. $(cy + bz)p + (az - cx)q = bx - ay$

5. $(x^2 - yz)p + (y^2 - zx)q = z^2 - xy$

جوابات:

3.5.1 معروضی سوالات کے جوابات

3. F

4. لگرانج کی خطی

5. $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{\sin x}$

3.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $\phi(x - y, z + \cos x) = 0$

2. $\phi(x^2 - y^2, x^2 - z^2) = 0$

3. $\phi(x^2 + y^2, y^2 - yz) = 0$

4. $\phi(x^2 + y^2 - z^2, xy + z) = 0$

5. $\phi\left(x^3 - y^3, y^3 + \frac{3}{z}\right) = 0$

3.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $5x - \log|5z + \tan(y - 3x)| = \phi(y - 3x)$

2. $x^3 \sin(y + 2x) - z = \phi(y + 2x)$

3. $\phi(x^2 + y^2 + z^2, ax + by + cz) = 0$

4. $\phi\left(\frac{x-y}{y-z}, \frac{y-z}{z-x}\right) = 0$

5. $x - \log|z + \cot(y - 3x)| = \phi(y - 3x)$

اکائی4۔ غیر خطی جزوی تفرقی مساواتوں کے حل(چارپٹ کا طریقہ)

(Solution of Non Linear Partial Differential Equations: Charpit's Method)

اکائی کے اجزا

4.0 تمہید

4.1 مقاصد

4.2 چارپٹ کا طریقہ

4.2.1 پہلے رتبے کی جزوی تفرقی مساوات کا ہم آہنگ نظام

4.2.2 چارپٹ کے طریقے سے غیر خطی جزوی تفرقی مساوات کا حل

4.3 اکتسابی نتائج

4.4 کلیدی الفاظ

4.5 نمونہ امتحانی سوالات

4.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

4.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

4.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

4.0 تمہید (Introduction)

کسی تفرقی مساوات کا حل متغیرات کے درمیان وہ رشتہ ہے جس کے ذریعے اور مساوات سے حاصل کردہ مشتق مطمئن ہو جاتا ہے۔

اب ہم پہلے رتبے کی غیر خطی جزوی تفرقی مساوات

$$\phi(x, y, z, a, b) = 0 \qquad \text{.....(1)}$$

کے حل حاصل کرنے پر روشنی ڈالیں گے۔ یہاں $x، y، z$ متغیرات ہیں۔ان میں $x، y$ غیر تابع متغیرات اور z تابع متغیر ہے۔

مساوات(1) کو بہ لحاظ x اور پھر بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

یا

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + p\,\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \qquad \text{.....(2)}$$

اور

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

یا

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} + q\,\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \qquad \text{.....(3)}$$

چوں کہ اختیاری مستقلات a اور b مساوات(1)،(2)اور(3) سے منسلک ہیں۔اس لیے تینوں مساواتوں سے a اور b کو ہٹا کر ہمیں درجہ ذیل رشتہ حاصل ہوتا ہے

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \qquad \text{.....(4)}$$

جو کہ پہلے رتبے کی جزوی تفرقی مساوات ہے۔

مساوات(4) کا وہ حل جس میں ممکنہ اختیاری مستقلات غیر تابع متغیرات کی تعداد کے برابر ہوں، مکمل حل (Complete Solution) کہلاتا ہے۔

اختیاری مستقلات کے لیے اگر خاص قیمتیں دی جائیں تب حاصل کردہ حل خاص حل (Particular Integral) کہلاتا ہے۔ہم جانتے ہیں کہ ان تمام مختص (Coordinate) نقاط کا طریق (Locus) جن کے مختص p اور q کی قیمتوں کے ساتھ مساوات(4) کو مطمئن کرتے ہیں، سطحوں (Surfaces) کے لامحدود نظام کی نمائندگی کرتے ہیں۔ چوں کہ ان سطحوں میں سے کسی ایک کے ذریعے تمام سطحوں کے لفافوں (Envelope) کو اس کے ہر نقاط پر چھو لیا جاتا ہے،اس لیے لفافے میں موجود کسی بھی نقطے کے اس مقام پر لفافے سے متعلق p اور q کی قیمتوں کے ساتھ مساوات(4) کو مطمئن کریگی۔

اس سے یہ بات ظاہر ہوتی ہے کہ لفافے کی مساوات دی گئی مساوات(4)کاایک حل ہے۔اب مساوات(1) کوالگ الگ بہ لحاظ aاور b جزوی تفرق کرتے ہیں

$$\frac{\partial \phi}{\partial a} = 0, \frac{\partial \phi}{\partial b} = 0 \quad \text{.....(5)}$$

مساوات(1)اور(5)سے aاور b کوہٹاکر ہمیں x،y اور z میں ایک رشتہ حاصل ہوتاہے جسے مساوات(4)کانادر(Singular) حل کہتے ہیں۔
کسی جزوی تفرقی مساوات کاوہ حل جس میں ممکنہ اختیاری تفاعلات اعظم تعداد میں موجود ہوں،عام حل کہلاتاہے۔

4.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے کے بعد آپ:

- چارپٹ کی غیر خطی جزوی تفرقی مساوات کی بنیادی جانکاری سے متاعرف ہو جائیں گے۔
- چارپٹ کے طریقے کی مدد سے غیر خطی جزوی تفرقی مساواتوں کاحل حاصل کرناسیکھ جائیں گے۔

4.2 چارپٹ کاطریقہ(Charpit's Method)

4.2.1 پہلے رتبے کی جزوی تفرقی مساوات کاہم آہنگ نظام

(Compatible System of First Order Partial Differential Equations)

پہلے رتبے کی دو جزوی تفرقی مساواتوں کو ہم آہنگ کہاجاتاہے اگران کا مشترکہ حل وجود رکھتاہو۔دوسرے الفاظ میں درجہ ذیل جزوی تفرقی مساواتیں

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \quad \text{.....(1)}$$

$$f_1(x, y, z, p, q) = 0 \quad \text{.....(2)}$$

ہم آہنگ ہوں گی اگر

$$\frac{\partial(f, f_1)}{\partial(x, p)} + p\frac{\partial(f, f_1)}{\partial(z, p)} + \frac{\partial(f, f_1)}{\partial(y, q)} + q\frac{\partial(f, f_1)}{\partial(z, q)} = 0$$

یہ جزوی تفرقی مساواتوں کے نظام کے ہم آہنگ ہونے کی شرط ہے۔

نوٹ:(1)دو جزوی تفرقی مساواتیں $p = P(x, y)$اور $q = Q(x, y)$ ہم آہنگ ہوں گی اگراور صرف اگر $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

(2)اگردو جزوی تفرقی مساواتوں کانظام ہم آہنگ ہے تب ان کاایک مشترکہ حل ہوگا۔

(3)ہم آہنگ نظام کاحل حاصل کرنے کے لیے p اور q کی قیمتیں درجہ ذیل مساوات میں رکھتے ہیں

$$dz = pdx + qdy$$

مثال1۔ دکھاؤکہ $xp - yq = x$ اور $x^2p + q = xz$ ہم آہنگ ہیں۔

حل۔ فرض کروکہ

$$f = xp - yq - x = 0 \quad \text{.....(1)}$$

$$f_1 = x^2p + q - xz = 0 \quad \text{.....(2)}$$

اب

$$\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(x,p)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial p} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p-1 & x \\ 2px - z & x^2 \end{vmatrix} = xz - x^2p - x^2,$$

$$\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(z,p)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial p} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x \\ -x & x^2 \end{vmatrix} = x^2,$$

$$\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(y,q)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial q} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial q} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -q & -y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -q,$$

$$\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(z,q)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial q} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial q} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -y \\ -x & 1 \end{vmatrix} = -xy$$

دیا گیا نظام ہم آہنگ ہو گا اگر

$$\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(x,p)} + p\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(z,p)} + \frac{\partial(f,f_1)}{\partial(y,q)} + q\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(z,q)} = 0$$

اس لیے

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f,f_1)}{\partial(x,p)} + p\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(z,p)} + \frac{\partial(f,f_1)}{\partial(y,q)} + q\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(z,q)} &= xz - x^2p - x^2 + px^2 - q - qxy \\ &= (xz - q) - x^2 - qxy \end{aligned}$$

مساوات(2)سے

$$\begin{aligned} &= x^2p - x^2 - qxy \\ &= x(xp - x - qy) \end{aligned}$$

مساوات(1)سے

$$\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(x,p)} + p\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(z,p)} + \frac{\partial(f,f_1)}{\partial(y,q)} + q\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(z,q)} = 0$$

اس لیے دی گئی جزوی تفرقی مساوات کا نظام ہم آہنگ ہے۔

مثال2۔ کیا جزوی تفرقی مساوات کا نظام $\frac{\partial z}{\partial y} = 9x + 11y - 2$ اور $\frac{\partial z}{\partial x} = 7x + 8y - 1$ ہم آہنگ ہے؟

حل۔ فرض کرو کہ

$$f = p - 7x - 8y + 1 = 0 \quad \text{.....(1)}$$

$$f_1 = q - 9x - 11y + 2 = 0 \qquad \text{.....(2)}$$

اب

$$\frac{\partial(f, f_1)}{\partial(x, p)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial p} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ -9 & 0 \end{vmatrix} = 9,$$

$$\frac{\partial(f, f_1)}{\partial(z, p)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial p} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\frac{\partial(f, f_1)}{\partial(y, q)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial q} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial q} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ -11 & 1 \end{vmatrix} = -8,$$

$$\frac{\partial(f, f_1)}{\partial(z, q)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial q} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial q} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

دیا گیا نظام ہم آہنگ ہو گا اگر

$$\frac{\partial(f, f_1)}{\partial(x, p)} + p\frac{\partial(f, f_1)}{\partial(z, p)} + \frac{\partial(f, f_1)}{\partial(y, q)} + q\frac{\partial(f, f_1)}{\partial(z, q)} = 0$$

اس لیے

$$\frac{\partial(f, f_1)}{\partial(x, p)} + p\frac{\partial(f, f_1)}{\partial(z, p)} + \frac{\partial(f, f_1)}{\partial(y, q)} + q\frac{\partial(f, f_1)}{\partial(z, q)} = 9 + 0 - 8 + 0$$
$$= 1 \neq 0$$

اس لیے دی گئی جزوی تفرقی مساوات کا نظام ہم آہنگ نہیں ہے۔

مثال 3۔ کیا جزوی تفرقی مساوات کا نظام $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x - 4y$ اور $\frac{\partial z}{\partial x} = 6x + 3y$ ہم آہنگ ہے؟ اگر ہاں تو اس کے لیے حل محسوب کریے۔

حل۔ فرض کرو کہ

$$f = p - 6x - 3y = 0 \qquad \text{.....(1)}$$

$$f_1 = q - 3x + 4y = 0 \qquad \text{.....(2)}$$

یہاں $P = 6x + 3y$ اور $Q = 3x - 4y$

ہم جانتے ہیں کہ دو جزوی تفرقی مساواتیں $p = P(x, y)$ اور $q = Q(x, y)$ ہم آہنگ ہوں گی اگر اور صرف اگر $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

اس لیے

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 3$$

اس لیے دی گئی جزوی تفرقی مساوات کا نظام ہم آہنگ ہے۔اب دیے گیے نظام کا مشترکہ حل درجہ ذیل طریقہ سے حاصل کرتے ہیں

$$\begin{aligned} dz &= pdx + qdy \\ &= (6x + 3y)dx + (3x - 4y)dy \\ &= 6xdx + 3ydx + 3xdy - 4ydy \\ &= 6xdx - 4ydy + 3(ydx + 3xdy) \\ dz &= 6xdx - 4ydy + 3d(xy) \end{aligned}$$

تکمل کرنے پر

$$\begin{aligned} z &= 6\frac{x^2}{2} - 4\frac{y^2}{2} + 3xy + A \\ &= 3x^2 - 2y^2 + 3xy + A \end{aligned}$$

جہاں A ایک اختیاری مستقل ہے۔

4.2.2 چارپٹ کے طریقے سے غیر خطی جزوی تفرقی مساوات کا حل

(Solution of Non linear Partial Differential Equations by Charpit's Method)

ہم ایک عام طریقہ پر بحث کریں گے جو چارپٹ کے طریقہ کار کے نام سے جانا جاتا ہے۔فرض کرو کہ پہلے رتبے کی غیر خطی جزوی تفرقی مساوات ذیل ہے

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \qquad \text{.....(1)}$$

چارپٹ کے طریقہ کار میں بنیادی خیال پہلے رتبے کی ایک اور جزوی تفرقی مساوت کا تعارف ہے۔یہ اس طرح ہو گی

$$f_1(x, y, z, p, q) = 0 \qquad \text{.....(2)}$$

مساوات(1)اور مساوات(2)کو pاور q کے لیے حل کرتے ہیں اور پھر ان کی قیمتیں درجہ ذیل مساوات میں درج کرتے ہیں

$$dz = p(x, y, z, a)dx + q(x, y, z, b)dy$$

اس مساوات کا حل،(اگر یہ وجود رکھتا ہو)ہی دی گئی مساوات کے لیے مطلوبہ مکمل حل ہو گا۔

فرض کرو کہ جزوی تفرقی مساوات کا نظام

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \qquad \text{.....(1)}$$
$$f_1(x, y, z, p, q) = 0 \qquad \text{.....(2)}$$

ہم آہنگ ہے۔تب ہم جانتے ہیں دیا گیا نظام ہم آہنگ ہو گا اگر

$$\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(x,p)} + p\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(z,p)} + \frac{\partial(f,f_1)}{\partial(y,q)} + q\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(z,q)} = 0 \qquad \text{.....(3)}$$

اس لیے

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial p} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial p} \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial p} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial p} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial q} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial q} \end{vmatrix} + q \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial q} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial q} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f_1}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f_1}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f_1}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial f_1}{\partial y}\right) + q\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f_1}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial f_1}{\partial z}\right) = 0$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial f_1}{\partial y}\right) - p\left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{\partial f_1}{\partial z} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial f_1}{\partial p} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial f_1}{\partial q} = 0 \quad \text{.....(4)}$$

یہ ایک خطی جزوی تفرقی مساوات ہے، جس کی مدد سے ہم f_1 کو حاصل کر سکتے ہیں۔اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dp}{-\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \frac{dq}{-\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right)} \quad \text{.....(5)}$$

اب درجہ ذیل مثالوں سے اوپر دیا گیا طرقہ سمجھتے ہیں:

مثال 1۔ مساوات $z^2 = pqxy$ کو حل کریے۔

حل۔ دیا ہے $z^2 = pqxy$

$$f = z^2 - pqxy = 0 \quad \text{.....(1)}$$

مساوات(1) کو بہ لحاظ x جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -pqy$$

اسی طرح ہم حاصل کر سکتے ہیں

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -pqx,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z,$$
$$\frac{\partial f}{\partial p} = -qxy,$$

اور $$\frac{\partial f}{\partial q} = -pxy$$

ہم جانتے ہیں کہ چارپٹ کی معاون مساوت درجہ ذیل ہوتی ہے

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dp}{-\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \frac{dq}{-\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right)}$$

اس لیے

$$\frac{dx}{-qxy} = \frac{dy}{-pxy} = \frac{dz}{p(-qxy) + q(-pxy)} = \frac{dp}{-(-pqy + 2pz)} = \frac{dq}{-(-pqx + 2qz)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{-qxy} = \frac{dy}{-pxy} = \frac{dz}{-2pqxy} = \frac{dp}{p(qy - 2z)} = \frac{dq}{q(px - 2z)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx/x}{-qy} = \frac{dy/y}{-px} = \frac{dp/p}{qy - 2z} = \frac{dq/q}{px - 2z}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}}{qy-px}=\frac{\frac{dp}{p}-\frac{dq}{q}}{qy-px}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=\frac{dp}{p}-\frac{dq}{q}$$

اس مساوات کو تکمل کرنے پر

$$-\log x+\log y=\log p-\log q+\log A$$

$$\Rightarrow \quad \log\frac{y}{x}=-\log\frac{q}{p}+\log A$$

$$\Rightarrow \quad \log\frac{y}{x}+\log\frac{q}{p}=\log A$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{x}\times\frac{q}{p}=A$$

$$\Rightarrow \quad q=\frac{Axp}{y}$$

مساوات(1) سے

$$z^2=p\left(\frac{Axp}{y}\right)xy$$

$$=Ap^2x^2$$

$$\Rightarrow \quad p^2=\frac{z^2}{Ax^2}$$

$$\Rightarrow \quad p=\frac{z}{x\sqrt{A}}$$

اس لیے

$$q=\frac{Ax}{y}\left(\frac{z}{x\sqrt{A}}\right)=\frac{\sqrt{A}z}{y}$$

p اور q کی قیمتیں مساوات $pdx+qdy=dz$ میں درج کرنے پر

$$\left(\frac{z}{x\sqrt{A}}\right)dx+\left(\frac{\sqrt{A}z}{y}\right)dy=dz$$

$$\left(\frac{dx}{x\sqrt{A}}\right)+\left(\frac{\sqrt{A}}{y}\right)dy=\frac{dz}{z}$$

تکمل کرنے پر

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\log x+\sqrt{A}\log y+\log B=\log z$$

$$z=Bx^{1/\sqrt{A}}y^{\sqrt{A}}$$

جو کہ دی گئی مساوات کے لیے مطلوبہ مکمل حل ہے۔

مثال2۔ مساوات $(p^2+q^2)y=qz$ کے لیے مکمل حل حاصل کریے۔

حل۔ فرض کرو کہ

$$f = (p^2 + q^2)y - qz = 0 \qquad \text{.....(1)}$$

مساوات(1) کو بہ لحاظ x جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

اسی طرح ہم حاصل کر سکتے ہیں

$$\frac{\partial f}{\partial y} = p^2 + q^2,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = -q,$$
$$\frac{\partial f}{\partial p} = 2py,$$

اور $$\frac{\partial f}{\partial q} = 2qy - z$$

ہم جانتے ہیں کہ چارپٹ کی معاون مساوات درجہ ذیل ہوتی ہے

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dp}{-\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \frac{dq}{-\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right)}$$

اس لیے

$$\frac{dx}{2py} = \frac{dy}{2qy - z} = \frac{dz}{p(2py) + q(2qy - z)} = \frac{dp}{-(0 - pq)} = \frac{dq}{-(p^2 + q^2 - q^2)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{2py} = \frac{dy}{2qy - z} = \frac{dz}{2p^2y + 2q^2y - qz} = \frac{dp}{pq} = \frac{dq}{-p^2}$$

آخری دو کسرے لینے پر

$$\frac{dp}{pq} = \frac{dq}{-p^2}$$

$$\Rightarrow \quad pdp + qdq = 0$$

اس مساوات کو تکمل کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2} = \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \quad p^2 + q^2 = A$$

مساوات(1) میں یہ قدر درج کرنے پر

$$Ay = qz$$

$$\Rightarrow \quad q = \frac{Ay}{z}$$

اس لیے

$$p = \sqrt{A - \left(\frac{Ay}{z}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{1}{z}\sqrt{Az^2 - A^2y^2}$$

pاور q کی قیمتیں مساوات $pdx + qdy = dz$ میں درج کرنے پر

$$\frac{1}{z}\sqrt{Az^2 - A^2y^2}dx + \left(\frac{Ay}{z}\right)dy = dz$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{Az^2 - A^2y^2}dx + Aydy = zdz$$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{zdz - Aydy}{\sqrt{Az^2 - A^2y^2}}$$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{d(Az^2 - A^2y^2)^{1/2}}{A}$$

تکمل کرنے پر

$$x + B = \frac{(Az^2 - A^2y^2)^{1/2}}{A}$$

$$\Rightarrow \quad (x + B)^2 = \frac{Az^2 - A^2y^2}{A^2}$$

$$\Rightarrow \quad (x + B)^2 + y^2 = \frac{z^2}{A}$$

جو کہ دی گئی مساوات کے لیے مطلوبہ مکمل حل ہے۔

مثال3۔ مساوات $x^2p^2 + y^2q^2 - a = 0$ کے لیے مکمل حل حاصل کریے۔

حل۔ فرض کرو کہ

$$f = x^2p^2 + y^2q^2 - a = 0 \qquad \text{.....(1)}$$

مساوات(1) کو بہ لحاظ x جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xp^2$$

اسی طرح ہم حاصل کر سکتے ہیں

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2yq^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 2px^2,$$

اور $\quad \frac{\partial f}{\partial q} = 2qy^2$

ہم جانتے ہیں کہ چارپٹ کی معاون مساوات درجہ ذیل ہوتی ہے

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dp}{-\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \frac{dq}{-\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right)}$$

اس لیے

$$\frac{dx}{2px^2} = \frac{dy}{2qy^2} = \frac{dz}{p(2px^2) + q(2qy^2)} = \frac{dp}{-(2xp^2 + p(0))} = \frac{dq}{-(2yq^2 + q(0))}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{2px^2} = \frac{dy}{2qy^2} = \frac{dz}{2(x^2p^2 + y^2q^2)} = \frac{dp}{-2xp^2} = \frac{dq}{-2yq^2}$$

پہلا اور چوتھا کسرہ لینے پر

$$\frac{dx}{2px^2} = \frac{dp}{-2xp^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{x} + \frac{dp}{p} = 0$$

اس مساوات کو تکمل کرنے پر

$$\log x + \log p = \log A$$

$$\Rightarrow \quad xp = A$$

مساوات(1) میں یہ قدر رکھنے پر

$$A^2 + y^2q^2 - a = 0$$

$$\Rightarrow \quad q = \frac{\sqrt{a - A^2}}{y}$$

اس لیے

p اور q کی قیمتیں مساوات $pdx + qdy = dz$ میں رکھنے پر

$$A\frac{dx}{x} + \sqrt{a - A^2}\frac{dy}{y} = dz$$

تکمل کرنے پر

$$B + A\log x + \sqrt{a - A^2}\log y = z$$

$$\Rightarrow \quad B + \log x^A + \log y^{\sqrt{a-A^2}} = z$$

$$\Rightarrow \quad B + \log x^A y^{\sqrt{a-A^2}} = z$$

جو کہ دی گئی مساوات کے لیے مطلوبہ مکمل حل ہے۔

مثال4۔ مساوات $z = p^2 - q^2$ کے لیے مکمل حل حاصل کریے۔

حل۔ فرض کرو کہ

$$f = p^2 - q^2 - z = 0 \qquad \text{.....(1)}$$

مساوات(1) کو بہ لحاظ x جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

اسی طرح ہم حاصل کر سکتے ہیں

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = -1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial p} = 2p,$$

اور $\frac{\partial f}{\partial q} = -2q$

ہم جانتے ہیں کہ چارپٹ کی معاون مساوات درجہ ذیل ہوتی ہے

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dp}{-\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \frac{dq}{-\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right)}$$

اس لیے

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{-2q} = \frac{dz}{p(2p) + q(-2q)} = \frac{dp}{-\big(0 + p(-1)\big)} = \frac{dq}{-\big(0 + q(-1)\big)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{2p} = \frac{dy}{-2q} = \frac{dz}{2(p^2 - q^2)} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$$

آخری دو کسرے لینے پر

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$$

اس مساوات کو تکمل کرنے پر

$$\log p = \log q + \log A$$
$$\Rightarrow \quad p = Aq \qquad \text{.....(2)}$$

تیسرے اور چوتھے کسرے لینے پر

$$\frac{dz}{2(p^2 - q^2)} = \frac{dp}{p}$$

مساوات(1)سے

$$\frac{dz}{2z} = \frac{dp}{p}$$

تکمل کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\log z^{\frac{1}{2}} + \log B = \log p$$
$$\Rightarrow \quad \log Bz^{\frac{1}{2}} = \log p$$
$$\Rightarrow \quad p = Bz^{\frac{1}{2}}$$

اب مساوات(2) سے

$$q = \frac{p}{A} = \frac{Bz^{\frac{1}{2}}}{A}$$

فرض کرو کہ $\frac{B}{A} = C$ اس لیے

$$q = Cz^{\frac{1}{2}}$$

p اور q کی قیمتیں مساوات $pdx + qdy = dz$ میں رکھنے پر

$$Bz^{\frac{1}{2}}dx + Cz^{\frac{1}{2}}dy = dz$$

$$\Rightarrow \quad Bdx + Cdy = \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$Bx + Cy = 2\sqrt{z} + D$$

جو کہ دی گئی مساوات کے لیے مطلوبہ مکمل حل ہے۔

مثال5۔ مساوات $(p^2 + q^2)x = pz$ کے لیے مکمل حل حاصل کریے۔

حل۔ فرض کرو کہ

$$f = (p^2 + q^2)x - pz = 0 \qquad .....(1)$$

مساوات(1) کو بہ لحاظ x جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p^2 + q^2$$

اسی طرح ہم حاصل کر سکتے ہیں

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = -p,$$
$$\frac{\partial f}{\partial p} = 2px - z,$$

اور $\frac{\partial f}{\partial q} = 2qx$

ہم جانتے ہیں کہ چارپٹ کی معاون مساوات درجہ ذیل ہوتی ہے

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dp}{-\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \frac{dq}{-\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right)}$$

اس لیے

$$\frac{dx}{2px-z}=\frac{dy}{2qx}=\frac{dz}{p(2px-z)+q(2qx)}=\frac{dp}{-\left(p^2+q^2+p(-p)\right)}=\frac{dq}{-\left(0+q(-p)\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{2px-z}=\frac{dy}{2qx}=\frac{dz}{2(p^2+q^2)x-pz}=\frac{dp}{-q^2}=\frac{dq}{pq}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{2px-z}=\frac{dy}{2qx}=\frac{dz}{2pz-pz}=\frac{dp}{-q^2}=\frac{dq}{pq}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{2px-z}=\frac{dy}{2qx}=\frac{dz}{pz}=\frac{dp}{-q^2}=\frac{dq}{pq}$$

آخری دو کسرے لینے پر

$$\frac{dp}{-q}=\frac{dq}{p}$$

$$\Rightarrow \quad pdp+qdq=0$$

اس مساوات کو تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$p^2+q^2=A^2$$

مساوات(1) سے

$$pz=A^2x$$

$$\Rightarrow \quad p=\frac{A^2x}{z}$$

اب $p^2+q^2=A^2$ میں یہ قدر رکھنے پر

$$\left(\frac{A^2x}{z}\right)^2+q^2=A^2$$

$$\Rightarrow \quad q^2=A^2-\left(\frac{A^2x}{z}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad q^2=\frac{A^2z^2-A^4x^2}{z^2}$$

$$\Rightarrow \quad q=\frac{A\sqrt{z^2-A^2x^2}}{z}$$

p اور q کی قیمتیں مساوات $pdx+qdy=dz$ میں رکھنے پر

$$\frac{A^2x}{z}dx+\frac{A\sqrt{z^2-A^2x^2}}{z}dy=dz$$

$$\Rightarrow \quad A\sqrt{z^2-A^2x^2}dy=zdz-A^2xdx$$

$$\Rightarrow \quad Ady=\frac{zdz-A^2xdx}{\sqrt{z^2-A^2x^2}} \qquad \text{.....(2)}$$

اب مان لیجیے کہ $z^2-A^2x^2=m$ تب $2(zdz-A^2xdx)=dm$ اس لیے مساوات(2) سے

$$Ady=\frac{dm}{2\sqrt{m}}$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$B+Ay=\sqrt{m}$$

$$\Rightarrow \qquad B + Ay = \sqrt{z^2 - A^2x^2}$$
$$\Rightarrow \qquad A^2x^2 + (B + Ay)^2 = z^2$$

جو کہ دی گئی مساوات کے لیے مطلوبہ مکمل حل ہے۔

4.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں آپ نے غیر خطی جزوی تفرقی مساوات کے نظام کے ہم آہنگ ہونے کی شرط کو سمجھا اور غیر خطی جزوی تفرقی مساوات کے لیے معاون مساوات حاصل کرنا سیکھا اور پھر اس سے چارپٹ کے طریقے کو استعمال کر کے دی گئی غیر خطی جزوی تفرقی مساوات کا حل حاصل کرنا سیکھا۔

4.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

چارپٹ کی غیر خطی جزوی تفرقی مساوات، ہم آہنگ نظام، معاون مساوات، لفافہ

4.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

4.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. پہلے رتبے کی غیر خطی جزوی تفرقی مساواتیں $\phi(x, y, z, p, q) = 0$ اور $\psi(x, y, z, p, q) = 0$ کے ہم آہنگ ہونے کی شرط بتایئے۔
2. چارپٹ کی غیر خطی جزوی تفرقی مساوات کے لیے معاون مساوات لکھو۔
3. پہلے رتبے کی غیر خطی جزوی تفرقی مساواتیں $\phi(x, y, z, p, q) = 0$ اور $\psi(x, y, z, p, q) = 0$ کے ہم آہنگ ہونے کی شرط $\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x,p)} - p\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(z,p)} + \frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(y,q)} - q\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(z,q)} = 0$ ہے۔ (T/F)
4. مساواتیں $p - 5x + 7y = 0$ اور $q - 6x - 8y = 0$ ہم آہنگ ہیں۔ (T/F)
5. مساوات $q = 3p^2$ کے لیے معاون مساوات.....ہے۔

4.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. مساوات $2(z + xp + yq) = yp^2$ کا مکمل حل حاصل کرو۔
2. مساوات $zpq = p + q$ کا مکمل حل حاصل کرو۔
3. مساوات $z = px + qy - \sin pq$ کا مکمل حل حاصل کرو۔

4.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. دکھاؤ کہ جزوی تفرقی مساواتیں $z(px+qy)=2xy$ اور $px=qy$ ہم آہنگ ہیں۔ اور پھر ان کا حل معلوم کرو۔
2. دکھاؤ کہ جزوی تفرقی مساواتیں $p^2+q^2=1$ اور $(p^2+q^2)x=pz$ ہم آہنگ ہیں۔ اور پھر ان کا حل معلوم کرو۔
3. مساوات $q=(z+xp)^2$ کا مکمل حل حاصل کرو۔
4. مساوات $p(1+q^2)+(a-z)q=0$ کا مکمل حل حاصل کرو۔
5. مساوات $p^2+q^2-2(px+qy)+1=0$ کا مکمل حل حاصل کرو۔
6. مساوات $pq=xz$ کا مکمل حل حاصل کرو۔
7. مساوات $px+qy+pq=0$ کا مکمل حل حاصل کرو۔
8. $p^2x^2+q^2y^2=4$ کا مکمل حل حاصل کرو۔

جوابات:

4.5.1 معروضی سوالات کے جوابات

1. $\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x,p)}+p\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(z,p)}+\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(y,q)}+q\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(z,q)}=0$
2. $\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial p}}=\frac{\mathrm{dy}}{\frac{\partial f}{\partial q}}=\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{p}\frac{\partial f}{\partial p}+q\frac{\partial f}{\partial q}}=\frac{\mathrm{dp}}{-\left(\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}\right)}=\frac{\mathrm{dq}}{-\left(\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}\right)}$
9. F
10. F
11. $\frac{dx}{-6\mathrm{p}}=\frac{\mathrm{dy}}{1}=\frac{\mathrm{dz}}{-6p^2+q}=\frac{\mathrm{dp}}{0}=\frac{\mathrm{dq}}{0}$

4.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

5. $yz=\frac{ax}{y}-\frac{a^2}{4y^2}+b$
6. $z^2=2(1+a)\left\{x+\frac{y}{a}\right\}+b=0$
7. $z=ax+by-ab$

4.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $z^2=2xy+a$
2. $z^2=x^2+(y+a)^2$
3. $xz=2\sqrt{ax}+ay+b$

4. $4(bz - ab - 1) = (x + by + c)^2$

5. $(a^2+1)z = \frac{(ax+y)^2}{2} \pm \left[\frac{ax+y}{2}\sqrt{(ax+y)^2-(a^2+1)} - \frac{(a^2+1)}{2}\log\{(ax+y) + \sqrt{(ax+y)^2-(a^2+1)}\}\right] + b$

6. $z = \left(a + \frac{x^2}{2}\right)(b+y)$

7. $z = -\frac{1}{2}(y+ax)^2 + b$

8. $z = b + \log x^a y^{\sqrt{4-a^2}}$

تجویز کردہ اکتسابی مواد

(Suggested Learning Resouces)

1. Ordinary and Partial Differential Equations, M. D. Raisinghania, S. Chand & Company Ltd., 15th Edition, 2013
2. Elements of Partial Differential Equations, Ian N. Sneddon, McGraw-Hill Book Company
3. Applied Partial Differential Equations, J. David Logan, Springer

نظامت فاصلاتی تعلیم (بیچلر آف سائنس) Distance Mode, Bachelor of Science

تیسرا سمسٹر 3rd Semester Examination,2021

Paper : BNMT302DET, (Mathematics) Introduction to Partial Differential Equations

جملہ نشانات:25 Maximum Marks وقت:2Hrs گھنٹے Time:

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم اور حصہ سوم۔ ہر جواب کے لیے لفظوں کی تعداد اشارتاً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1۔ حصہ اول میں 5 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/خالی جگہ پر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **(5 × 1 = 5 Marks)**

2۔ حصہ دوم میں چھ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی چار سوالات کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کے لیے 3 نمبرات مختص ہیں۔ **(4 × 3 = 12Marks)**

3۔ حصہ سوم میں دو سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کسی ایک سوال کا جواب دینا ہے۔ ہر سوال کے لیے 8 نمبرات مختص ہیں۔ **(1 × 8 = 8 Marks)**

حصہ اول

سوال 1.

i) مساوات $y = \sin p - p\cos p$ ایک کلیرو کی مساوات ہے۔ (صحیح/غلط)

ii) مساوات $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 2x\frac{\partial z}{\partial x}$ کا درجہ کیا ہے؟

iii) مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cos 2x$ کے لیے اتمامی تفاعل لکھو۔

iv) لگرانج کی خطی جزوی تفرقی مساوات کے لیے معاون مساوات کی تعریف کرو۔

v) پہلے رتبے کی غیر خطی جزوی تفرقی مساواتیں $\phi(x, y, z, p, q) = 0$ اور $\psi(x, y, z, p, q) = 0$ کے ہم آہنگ ہونے کی کیا شرط ہے؟

حصہ دوم

2. اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کر کے $z^2 = Ax^3 + By^3 + AB$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

3. مساوات $2(z + xp + yq) = yp^2$ کا مکمل حل حاصل کرو۔

4. حل کرو: $(y + zx)p - (x + yz)q = x^2 - y^2$

5. مساوات $2(z + xp + yq) = yp^2$ کا مکمل حل حاصل کرو۔

6. مساوات $p(1 + q^2) + (a - z)q = 0$ کا مکمل حل حاصل کرو۔

7. دکھاؤ کہ جزوی تفرقی مساواتیں $z(px + qy) = 2xy$ اور $px = qy$ ہم آہنگ ہیں۔اور پھر ان کا حل معلوم کرو۔

حصہ سوم

8. مساوات $p + 3q = z + \cot(y - 3x)$ کو حل کرو۔

9. مساوات $px + qy + pq = 0$ کا مکمل حل حاصل کرو۔

BNMT302DEP

لیب مینول

جزوی تفرقی مساوات کا تعارف

(Introduction to Partial Differential Equations)

بی۔ایس سی۔(آنرس)

چار سالہ پروگرام

تیسرا سمسٹر (ریاضی)

اکائی 1۔ جزوی تفرقی مساوات

(Partial Differential Equations)

1.0 تمہید(Introduction)

تعریف: وہ مساوات جس میں دو یا زیادہ غیر تابع(Independent) متغیرات (Variables)کے کسی تفاعل کے ایک یا زیادہ جزوی مشتقات(Derivatives) موجود ہوں، جزوی تفرقی مساوات کہلاتی ہے۔ جزوی تفرقی مساوات کی کچھ مثالیں نیچے دی گئی ہیں:

1. $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=z+xy$
2. $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=2x\frac{\partial z}{\partial x}$
3. $z\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=x$

رتبہ(Order): کسی جزوی تفرقی مساوات میں موجود اعظم ترین جزوی مشتق کے رتبے کو اس جزوی تفرقی مساوات کا رتبہ کہتے ہیں۔

درجہ(Degree): کسی جزوی تفرقی مساوات کو ریشن لائز(Rationalize) کرنے کے بعد اس میں موجود اعظم ترین رتبہ کے مشتق کی قوت(Power) کو اس جزوی تفرقی مساوات کا درجہ(Degree) کہتے ہیں۔

خطی اور غیر خطی جزوی تفرقی مساواتیں(linear & Nonlinear Partial Differential Equations): اگر کسی جزوی تفرقی مساوت میں موجود تابع متغیر(Dependent Variable) اور اس کے جزوی مشتقات کا درجہ ایک ہو اور وہ ضرب کی شکل میں بھی موجود نہ ہوں، تب اس طرح کی مساوات کو خطی جزوی تفرقی مساوات کہتے ہیں۔ اگر جزوی تفرقی مساوات خطی نہ ہو تو اس مساوات کو غیر خطی جزوی تفرقی مساوات کہتے ہیں۔

مثال کے لیے مساوات $p+q=z+xy$ خطی جزوی تفرقی مساوات ہے جب کہ $p+q=zpq$ اور $q=3p^2$ پہلے رتبے کی غیر خطی جزوی تفرقی مساوات ہیں۔

جزوی تفرقی مساواتوں کی درجہ بندی(Classification of Partial Differential Equations)

a) خطی جزوی تفرقی مساوات(Linear Partial Differential Equations): اگر کسی مساوات $\varphi(x,y,z,p,q)=0$ میں p,q,z خطی ہوں تو اس مساوات کو خطی جزوی تفرقی مساوات کہتے ہیں۔ دوسرے الفاظ میں خطی جزوی تفرقی مساوات اس شکل میں ہوتی ہے

$$\eta(x,y)p+\zeta(x,y)q=\chi(x,y)z+\psi(x,y)$$

مثال کے لیے $yxp + y^2q = xyz + 2x^2$ اور $p + 3q = z + \cot(y - 3x)$ دونوں پہلے رتبے کی خطی جزوی تفرقی مساوات ہیں۔

b) نصف خطی جزوی تفرقی مساوات(Semi-Linear Partial Differential Equations): پہلے رتبے کی جزوی تفرقی مساوات $\varphi(x, y, z, p, q) = 0$ میں اگر p اور q خطی ہوں اور p اور q کے ضریب x اور y کے ہی تفاعل ہوں تو اس مساوات کو نصف خطی جزوی تفرقی مساوات کہتے ہیں۔ دوسرے الفاظ میں نصف خطی جزوی تفرقی مساوات اس شکل میں ہوتی ہے

$$\eta(x, y)p + \zeta(x, y)q = \chi(x, y, z)$$

مثال کے لیے $xp + yq = xyz$ اور $yp + xq = xyz^2(x + y)(x - y)$ دونوں پہلے رتبے کی نصف خطی جزوی تفرقی مساوات ہیں۔

c) قواصی خطی جزوی تفرقی مساوات(Quasi-Linear Partial Differential Equations): پہلے رتبے کی جزوی تفرقی مساوات $\varphi(x, y, z, p, q) = 0$ قواصی خطی جزوی تفرقی مساوات کہلاتی ہے اگر یہ p اور q میں خطی ہوں اور وہ اس شکل میں ہو

$$\eta(x, y, z)p + \zeta(x, y, z)q = \chi(x, y, z)$$

مثال کے لیے $xzp + yzq = xy$ اور $(x^2 - y^2 - z^2)p + 2xyq = 2xz$ دونوں پہلے رتبے کی قواصی- خطی جزوی تفرقی مساوات ہیں۔

جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل(Formation of Partial Differential Equations)

1. اختیاری مستقل کے اخراج سے تشکیل(Formation by Elimination of Arbitrary Constant)

فرض کرو کہ $\varphi(x, y, z, A, B) = 0$ کوئی مساوات ہے، جہاں A اور B اختیاری مستقلات ہیں۔ فرض کرو کہ z دو غیر تابع متغیرات x اور y کا ایک تفاعل ہے۔ اب

$$\varphi(x, y, z, A, B) = 0 \qquad .....(1)$$

مساوات(1) کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی طور پر (Partially) الگ الگ تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + p\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \qquad ...(2a)$$ یا

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + q\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \qquad ...(2b)$$ اور اسی طرح

مساوات(1) اور (2a)، (2b) کی مدد سے اختیاری مستقلات A اور B کو ہٹا کر درجہ ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\phi(x, y, z, p, q) = 0 \qquad .....(3)$$

جو کہ پہلے رتبے کی جزوی تفرقی مساوات ہے۔

نوٹ: یہاں پر ہمارے سامنے درجہ ذیل تین صورتیں پیدا ہو سکتی ہیں:

I. جب کسی مساوات میں غیر تابع متغیرات کی تعداد اختیاری مستقلات سے زیادہ ہوتی ہے تو ہمیں ایک سے زیادہ پہلے رتبے کی جزوی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہیں۔ مثال کے لیے اگر A کوئی اختیاری مستقل ہو اور

$$z = x + Ay \qquad \text{.....(1)}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = A$$

مساوات (1) میں A کی جگہ $\frac{\partial z}{\partial y}$ رکھنے پر

$$z = x + y\frac{\partial z}{\partial y}$$

مساوات $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$ اور $z = x + y\frac{\partial z}{\partial y}$ دی گئی مساوات کے لیے پہلے رتبے کی جزوی تفرقی مساواتیں ہیں۔

II. جب کسی مساوات میں غیر تابع متغیرات کی تعداد اختیاری مستقلات کی تعداد کے برابر ہوتی ہے تو ہمیں پہلے رتبے کی یکتا (Unique) جزوی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ مثال کے لیے اگر A اور B اختیاری مستقلات ہوں اور

$$z = Ax^3 + By^3 \qquad \text{.....(1)}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = 3Ax^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3By^2$$

$$\Rightarrow \qquad x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 3(Ax^3 + By^3) = 3z$$

اس لیے $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 3z$ دی گئی مساوات کے لیے یکتا جزوی تفرقی مساوات ہے۔

III. جب کسی مساوات میں غیر تابع متغیرات کی تعداد اختیاری مستقلات کی تعداد سے کم ہوتی ہے تو ہمیں ایک سے زیادہ رتبہ کی جزوی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ مثال کے لیے اگر A، B اور C اختیاری مستقلات ہوں اور

$$z = Ax^2 + Bxy + Cy^2 \qquad \text{... (1)}$$

اس مساوات کو دو بار بہ لحاظ x اور دو بار بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2Ax + By \qquad \text{... (2)}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \qquad \text{... (3)}$$

اور

$$\frac{\partial z}{\partial y} = Bx + 2Cy \qquad \text{... (4)}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2C \qquad \text{... 5}$$

مساوات (2) کو بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = B \qquad \text{.....(6)}$$

مساوات(3)،(5)اور(6)سے مستقلات کی قیمتیں مساوات(1)میں درج کرپر ہمیں حاصل ہو گا

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2z$$

اس طرح ہمیں دوسرے رتبے کی جزوی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

2. اختیاری تفاعل کے اخراج سے تشکیل(Formation by Elimination of Arbitrary Function)

فرض کرو کہ $f(u,v)=0$ کوئی مساوات ہے، جہاں u اور v غیر تابع متغیرات x،yاور z کے تفاعلات ہیں اور f ایک اختیاری تفاعل ہے۔

اب

$$f(u,v)=0 \qquad .....(1)$$

مساوات(1)کو بہ لحاظ xاور بہ لحاظ y جزوی طور پر(Partially)الگ الگ تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0 \qquad .....(2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0 \qquad .....(3)$$

مساوات(2)اور(3)سے $\frac{\partial f}{\partial u}$اور $\frac{\partial f}{\partial v}$کو ہٹانے پر

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}q\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}p\right)=0$$

$$p\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}\right)+q\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$Pp+Qq=R \qquad .....(4)$$

جہاں

$$P=\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$Q=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$R=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}$$

مساوات(4)پہلے رتبے کی جزوی تفرقی مساوات ہے۔

نوٹ:اگر کسی مساوات میں دو اختیاری تفاعلات موجود ہوں تو اس سے حاصل جزوی تفرقی مساوات کا رتبہ دو سے زیادہ ہو گا۔

1.1 عملی مسائل

1. اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کر کے $z = Axe^y + \frac{1}{2}A^2e^{2y} + B$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

☆☆☆☆☆

2. سبھی قائم دائری مخروط(Right Circular Cone) کے سٹ جن کے محور(Axis)Y– محور کو چھوتے ہوں تب اس مثلہ کی جزوی تفرقی مساوات حاصل کرو۔

☆☆☆☆☆

3. ان سبھی کرّوں (Spheres) کے لیے جزوی تفرقی مساوات حاصل کرو جن کا مرکز YZ مستوی پر ہو اور جس کا نصف قطر 3 ہو۔

☆☆☆☆☆

4. Y- محور پر مرکز والے سبھی کرّوں کے لیے جزوی تفرقی مساوات حاصل کرو۔

☆☆☆☆☆

5. تفاعلات f اور g کو ہٹا کر $z = yf(x) + xg(y)$ سے جزوی تفرقی مساوات حاصل کرو۔

☆☆☆☆☆

6. ضابطہ $G(x+y+z, x^2+y^2-z^2)=0$ سے اختیاری تفاعل G کو ساخط کیجیے۔

☆☆☆☆☆

7. اختیاری مستقلات a اور b کو ساقط کر کے $z = axe^y + \frac{1}{2}a^2e^{2y} + b$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

☆☆☆☆☆

8. سبھی قائم دائری مخروط(Right Circular Cone) کے سٹ جن کے محور(Axis)z– محور کو چھوتے ہیں۔ اس مسئلہ کی جزوی تفرقی مساوات حاصل کرو۔

☆☆☆☆☆

9. ان سبھی کرّوں (Spheres) کے لیے جزوی تفرقی مساوات حاصل کرو جن کا مرکز XY مستوی پر ہو اور جس کا نصف قطر 4 ہو۔

☆☆☆☆☆

10. z- محور پر مرکز والے سبھی کرّوں کے لیے جزوی تفرقی مساوات حاصل کرو۔

☆☆☆☆☆

11. تفاعلات ϕ اور ψ کو ہٹا کر $z = y\phi(x) + x\psi(y)$ سے جزوی تفرقی مساوات حاصل کرو۔

☆☆☆☆☆

12. ضابطہ $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2)=0$ سے اختیاری تفاعل F کو ساخط کیجیے۔

☆☆☆☆☆

اکائی2۔ لگرانج اور چارپٹ کے طریقے سے جزوی تفرقی مساواتوں کے حل

(Solution of Partial Differential Equations by Lagrange and Charpit's Method)

2.0 تمہید(Introduction)

تعریف: جزوی تفرقی مساوات $Pp + Qq = R$ کو پہلے رتبے کی لگرانج کی خطی جزوی تفرقی مساوات کہتے ہیں، جہاں P، Q اور R متغیرات x، y، z کے تفاعلات ہیں۔

فرض کرو کہ $u = c$ لگرانج کی خطی جزوی تفرقی مساوات کا ایک حل ہے۔اس لیے یہ مساوات

$$Pp + Qq = R \qquad \text{.....(1)}$$

کی تصدیق کریگا۔اب مساوات $u = c$ کو بہ لحاظ x اور بہ لحاظ y جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

یا

$$\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \Rightarrow p = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial z}} \qquad \text{.....(2)}$$

اور

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

یا

$$\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \Rightarrow q = -\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial z}} \qquad \text{.....(3)}$$

مساوات(1)سے

$$P\left(-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial z}}\right) + Q\left(-\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial z}}\right) = R$$

$$\Rightarrow \quad P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} = -R\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \quad P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \qquad \text{.....(4)}$$

اب ہم کہہ سکتے ہیں کہ $u = c$ مساوات (1)اور مساوات (4) کی تصدیق کرتی ہے۔اس لیے مساوات (4) کو مساوات (1) کے مساوی (Equivalent)لیا جاسکتا ہے۔

لگرانج کا $Pp + Qq = R$ کو حل کرنے کا طریقہ (Lagrange's Method to Solve $Pp + Qq = R$)

پہلا مرحلہ: دی گئی پہلے رتبے کی خطی جزوی تفرقی مساوات کو ذیل شکل میں تبدیل کرتے ہیں $Pp + Qq = R$

دوسرا مرحلہ: اس مساوات کے لیے لگرانج کی معاون مساوات لکھو جو کہ ذیل ہے $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$

تیسرا مرحلہ: معاون مساوات کو کسی مناسب طریقہ سے حل کریے۔ مان لیجیے کہ $u(x, y, z) = a$ اور $v(x, y, z) = b$ اس مساوات کے دو غیر تابع حل ہیں۔

چوتھا مرحلہ: مساوات $Pp + Qq = R$ کا عام حل درجہ ذیل میں سے کسی بھی شکل میں ہو سکتا ہے:

(i) $\phi(u, v) = 0$

(ii) $u = \phi(v)$

(iii) $v = \phi(u)$

جہاں ϕ ایک اختیاری تفاعل ہے۔

نوٹ: معاون مساوات میں اگر کسی دو کسروں (Fractions) میں ایک متغیر نہ ہو یا وہ منسوق ہو جائے، تب ایک تکمل حاصل ہوتا ہے جس کو آسانی کے ساتھ حل کر سکتے ہیں۔ اسی طرح دوسرے کسرے کے جوڑے کو لے کر ہم دیے گئے سوال کا حل نکال سکتے ہیں۔

مثال۔ مساوات $(p^2 + q^2)y = qz$ کے لیے مکمل حل حاصل کیجیے۔

حل۔ دیا ہے

$$p + q = z \quad \text{.....(1)}$$

مساوات (1) کی $Pp + Qq = R$ سے مشابہت کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $p = 1, Q = 1, R = z$

اس لیے دی گئی مساوات کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{z} \quad \text{.....(2)}$$

اس مساوات کے پہلے دو کسرے لینے پر

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1}$$

$$\Rightarrow \quad dx - dy = 0 \quad \text{.....(3)}$$

مساوات (3) کو تکمل کرنے پر

$$\Rightarrow \quad x - y = A \quad \text{.....(4)}$$

جہاں A ایک اختیاری مستقل ہے۔ اب مساوات (2) کے دوسرے اور آخری کسرے کو لینے پر

$$dy = \frac{dz}{z} \quad \text{.....(5)}$$

مساوات (5) کو تکمل کرنے پر

$$y = \log z + \log B$$

$$\Rightarrow \quad y = \log Bz$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{e^y}{z} = B \qquad \text{.....(6)}$$

جہاں B ایک اختیاری مستقل ہے۔ اب مساوات(4)اور مساوات(6)سے مساوات(1)کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$\phi\left(x - y, \frac{e^y}{z}\right) = 0$$

جہاں ϕ ایک اختیاری تفاعل ہے۔

پہلے رتبے کی جزوی تفرقی مساوات کا ہم آہنگ نظام

(Compatible System of First Order Partial Differential Equations)

پہلے رتبے کی دو جزوی تفرقی مساواتوں کو ہم آہنگ کہا جاتا ہے اگر ان کا مشترکہ حل وجود رکھتا ہو۔ دوسرے الفاظ میں درجہ ذیل جزوی تفرقی مساواتیں

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \qquad \text{.....(1)}$$

$$f_1(x, y, z, p, q) = 0 \qquad \text{.....(2)}$$

ہم آہنگ ہوں گی اگر

$$\frac{\partial(f, f_1)}{\partial(x, p)} + p\frac{\partial(f, f_1)}{\partial(z, p)} + \frac{\partial(f, f_1)}{\partial(y, q)} + q\frac{\partial(f, f_1)}{\partial(z, q)} = 0$$

یہ جزوی تفرقی مساواتوں کے نظام کے ہم آہنگ ہونے کی شرط ہے۔

نوٹ:(1)دو جزوی تفرقی مساواتیں $p = P(x, y)$ اور $q = Q(x, y)$ ہم آہنگ ہوں گی اگر اور صرف اگر $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

(2)اگر دو جزوی تفرقی مساواتوں کا نظام ہم آہنگ ہے تب ان کا ایک مشترکہ حل ہو گا۔

(3)ہم آہنگ نظام کا حل حاصل کرنے کے لیے p اور q کی قیمتیں درجہ ذیل مساوات میں رکھتے ہیں

$$dz = pdx + qdy$$

چارپٹ کا طریقہ(Charpit's Method)

فرض کرو کہ پہلے رتبے کی غیر خطی جزوی تفرقی مساوات ذیل ہے

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dp}{-\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \frac{dq}{-\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right)}$$

معاون مساوات کو کسی مناسب طریقہ سے حل کریے۔

اب درجہ ذیل مثال سے اوپر دیا گیا طرقہ سمجھتے ہیں:

مثال۔ مساوات $(p^2 + q^2)y = qz$ کے لیے مکمل حل حاصل کریے۔

حل۔ فرض کرو کہ

$$f = (p^2 + q^2)y - qz = 0 \qquad \text{.....(1)}$$

مساوات(1) کو بہ لحاظ x جزوی تفرق کرنے پر

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

اسی طرح ہم حاصل کر سکتے ہیں

$$\frac{\partial f}{\partial y} = p^2 + q^2,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = -q,$$
$$\frac{\partial f}{\partial p} = 2py,$$
$$\frac{\partial f}{\partial q} = 2qy - z \quad \text{اور}$$

ہم جانتے ہیں کہ چارپٹ کی معاون مساوات درجہ ذیل ہوتی ہے

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dp}{-\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \frac{dq}{-\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right)}$$

اس لیے

$$\frac{dx}{2py} = \frac{dy}{2qy - z} = \frac{dz}{p(2py) + q(2qy - z)} = \frac{dp}{-(0 - pq)} = \frac{dq}{-(p^2 + q^2 - q^2)}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{2py} = \frac{dy}{2qy - z} = \frac{dz}{2p^2y + 2q^2y - qz} = \frac{dp}{pq} = \frac{dq}{-p^2}$$

آخری دو کسرے لینے پر

$$\frac{dp}{pq} = \frac{dq}{-p^2}$$
$$\Rightarrow \quad pdp + qdq = 0$$

اس مساوات کو تکمل کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2} = \frac{A}{2}$$
$$\Rightarrow \quad p^2 + q^2 = A$$

مساوات(1) میں یہ قدر درج کرنے پر

$$Ay = qz$$
$$\Rightarrow \quad q = \frac{Ay}{z}$$

اس لیے

$$p = \sqrt{A - \left(\frac{Ay}{z}\right)^2}$$
$$\Rightarrow \quad p = \frac{1}{z}\sqrt{Az^2 - A^2y^2}$$

p اور q کی قیمتیں مساوات $pdx + qdy = dz$ میں درج کرنے پر

$$\frac{1}{z}\sqrt{Az^2 - A^2y^2}dx + \left(\frac{Ay}{z}\right)dy = dz$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{Az^2 - A^2y^2}dx + Aydy = zdz$$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{zdz - Aydy}{\sqrt{Az^2 - A^2y^2}}$$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{d(Az^2 - A^2y^2)^{1/2}}{A}$$

تکمل کرنے پر

$$x + B = \frac{(Az^2 - A^2y^2)^{1/2}}{A}$$

$$\Rightarrow \quad (x + B)^2 = \frac{Az^2 - A^2y^2}{A^2}$$

$$\Rightarrow \quad (x + B)^2 + y^2 = \frac{z^2}{A}$$

جو کہ دی گئی مساوات کے لیے مطلوبہ مکمل حل ہے۔

1.1 عملی مسائل

1. مساوات $(x^2 - yz)p + (y^2 - zx)q = z^2 - xy$ کو حل کرو۔

☆☆☆☆☆

2. مساوات $p - 2q = 3x^2\ sin(y + 2x)$ کا حل حاصل کرو۔

☆☆☆☆☆

3. مساوات $(x^2 - yz)p + (y^2 - zx)q = z^2 - xy$ کو حل کیجیے۔

☆☆☆☆☆

4. مساوات $p + 3q = 5z + \tan(y - 3x)$ کو چارپٹ کے طریقے سے حل کیجیے۔

☆☆☆☆☆

5. مساوات $p - 2q = 3x^2\ sin(y + 2x)$ کا حل حاصل کرو۔

☆☆☆☆☆

6. ثابت کرو کہ جزوی تفرقی مساواتیں $p^2 + q^2 = 1$ اور $(p^2 + q^2)x = pz$ ہم آہنگ (Compatible) ہیں اور پھر ان کا حل معلوم کرو۔

☆☆☆☆☆

7. ثابت کیجیے کہ جزوی تفرقی مساوات کا نظام $\frac{\partial z}{\partial y} = 9x + 11y - 2$ اور $\frac{\partial z}{\partial x} = 7x + 8y - 1$ ہم آہنگ نہیں ہے۔

8. مساوات $pq = xz$ کا چارپٹ کے طریقے سے مکمل حل (Complete Solution) معلوم کرو۔

☆☆☆☆☆

9. مساوات $(x^2 - yz)p + (y^2 - zx)q = z^2 - xy$ کو حل کرو۔

☆☆☆☆☆

10. مساوات $z^2 = pqxy$ کو چارپٹ کے طریقے سے حل کیجیے۔

☆☆☆☆☆

11. مساوات $px + qy + pq = 0$ کا مکمل حل حاصل کرو۔

☆☆☆☆☆

12. مساوات $pq = xz$ کا چارپٹ کے طریقے سے مکمل حل (Complete Solution) معلوم کرو۔

☆☆☆☆☆

13. مساوات $q = (z + xp)^2$ کا مکمل حل حاصل کرو۔

☆☆☆☆☆

نمونہ امتحانی پرچہ

ریاضیات(لیب مینول)

BNMT302DEP

بی۔ایس سی-(تیسرا سمسٹر)

وقت:2 Hrs　　کل نمبر:10

نوٹ: درج ذیل میں سے کوئی دو سوالات کے جواب دیجیے　　$(5 \times 2 = 10)$

1۔ ان سبھی کرّوں(Spheres) کے لیے جزوی تفرقی مساوات حاصل کرو جن کا مرکز YZ مستوی پر ہو اور جس کا نصف قطر 3 ہو۔

2۔ اختیاری مستقلات a اور b کو ساقط کر کے $z = axe^y + \frac{1}{2}a^2e^{2y} + b$ سے جزوی تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

3۔ مساوات $xyp^2 - (x^2 - y^2)p - xy = 0$ کو حل کریے۔

4۔ ثابت کرو کہ جزوی تفرقی مساواتیں $p^2 + q^2 = 1$ اور $(p^2 + q^2)x = pz$ ہم آہنگ(Compatible) ہیں اور پھر ان کا حل معلوم کرو۔

تصدیق نامہ

تصدیق کی جاتی ہے کہ بی۔ایس سی۔(تیسرا سمسٹر)'جزوی تفرقی مساوات کا تعارف' کے تجرباتی حصہ کے کام کا یہ اصلی ریکارڈ ہے، جسے _____ نے مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کے اسٹڈی سینٹر _____ میں تعلیمی سال _____ کے دوران تیار کیا۔

دستخط کونسلر