BNMT402DET

کثیر رکنی رنگس

(Polynomial Rings)

بی۔ایس سی۔(آنرس)

چار سالہ پروگرام

چوتھا سمسٹر (ریاضی)

مرکز برائے فاصلاتی و آن لائن تعلیم

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

حیدرآباد۔32، تلنگانہ، بھارت

Copyright © 2025, Maulana Azad National Urdu University, Hyderabad
All right reserved. No part of this publication may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronically or mechanically, including photocopying, recording or any information storage or retrieval system, without prior permission in writing form the publisher (registrar@manuu.edu.in)

ISBN	:	978-81-68324-03-9
Course	:	Polynomial Rings
First Edition	:	August, 2026
Copies	:	600
Price	:	75/-(The price of the book is included in admission fee of distance mode students)

Course Coordinator

Dr. Khaja Moinuddin, Professor, Dept. of Mathematics, School of Sciences, MANUU

Editorial Board/Editors

Dr. Khaja Moinuddin, Professor, Dept. of Mathematics, School of Sciences, MANUU

Dr. Kashif Khan, Assistant Professor Contractual (Mathematics), Centre for Distance and Online Education, MANUU

Production

Prof. Nikhath Jahan, Professor (Urdu), CDOE MANUU

Mr. P Habibulla, Assistant Registrar, Purchase & Stores Section, MANUU

Dr. Mohd Akmal Khan, Assistant Professor (C), CDOE MANUU

Mohd Abdul Naseer, Section Officer, CDOE MANUU

Shaik Ismail, UDC, CDOE, MANUU

Syed Faheemuddin, LDC, Purchase & Stores Section, MANUU

On behalf of the Registrar, Published by:

Centre for Distance and Online Education

Maulana Azad National Urdu University

Gachibowli, Hyderabad-500032 (TG), India

*Director:*dir.dde@manuu.edu.in*Publication:*ddepublication@manuu.edu.in

Phone number: 040-23008314 Website: manuu.edu.in

CRC Prepared by Dr. Kashif Khan, Faculty of Mathematics, CDOE, MANUU

Printed at: Print Time & Business Enterprises, Hyderabad

فہرست

پیغام	وائس چانسلر، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی	5
پیغام	ڈائرکٹر، مرکز برائے فاصلاتی و آن لائن تعلیم	6
کورس کا تعارف	کورس کوآرڈی نیٹر	7

اکائی نمبر	اکائی کا نام	مصنف	صفحہ نمبر
1۔	کثیر رکنی رنگس	ڈاکٹر کاشف خان	9
2۔	گوسی صحیح اعداد کا رنگ	ڈاکٹر افروز	21
3۔	پریمیٹو کثیر رکنیاں اور ان کی خصوصیات	ڈاکٹر خواجہ معین الدین	32
4۔	آئزن اسٹین کی کسوٹی اور غیر تحویل پذیر کثیر رکنیاں	ڈاکٹر خواجہ معین الدین	42
	نمونہ امتحانی پرچہ		52
	لیب مینول		53
1۔	کثیر رکنی کا رنگ اور پریمٹیو کثیر رکنیاں	ڈاکٹر خواجہ معین الدین	54
2۔	آئزن اسٹین کی کسوٹی اور غیر تحویل پذیر کثیر رکنیاں	ڈاکٹر سید وسیم راجا	62
	نمونہ امتحانی پرچہ		67
	تصدیق نامہ		68

مصنفین کی تفصیل (Writer's Details)

Dr. Kashif Khan, (Mathematics), Centre for Distance and Online Education, MANUU, Hyderabad	ڈاکٹر کاشف خان، ریاضی، مرکز برائے فاصلاتی وآن لائن تعلیم، مانو، حیدر آباد
Dr. Khaja Moinuddin, Professor, Dept. of Mathematics, School of Sciences, MANUU, Hyderabad	ڈاکٹر خواجہ معین الدین، پروفیسر، شعبہ ریاضی، اسکول برائے سائنسی علوم، مانو، حیدر آباد
Dr. Afroz, Associate Professor, Dept. of Mathematics, School of Sciences, MANUU, Hyderabad	ڈاکٹر افروز، اسوسی ایٹ پروفیسر، شعبہ ریاضی، اسکول برائے سائنسی علوم، مانو، حیدر آباد
Dr. Syed Waseem Raja, Assistant Professor, Dept. of Mathematics, School of Sciences, MANUU, Hyderabad	ڈاکٹر افروز، اسسٹنٹ پروفیسر، شعبہ ریاضی، اسکول برائے سائنسی علوم، مانو، حیدر آباد

مترجم: ڈاکٹر کاشف خان

پروف ریڈرس: 1. ڈاکٹر کاشف خان 2. ڈاکٹر خواجہ معین الدین

ٹائٹل پیج: ابراہیم اکرم صدیقی

پیغام

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی (MANUU) 1998 میں پارلیمنٹ کے ایک ایکٹ کے ذریعے قائم کی گئی۔ یہ ایک مرکزی جامعہ ہے جس نے این اے اے سی کی جانب سے گریڈ A+ حاصل کیا ہے۔ اس جامعہ کے قیام کے مقاصد ہیں: (1) اردو زبان کا فروغ، (2) پیشہ ورانہ اور تکنیکی تعلیم کو اردو میڈیم میں قابل رسائی اور دستیاب بنانا، (3) روایتی اور فاصلاتی طریقۂ تعلیم کے ذریعے تعلیم فراہم کرنا، اور (4) خواتین کی تعلیم پر خصوصی توجہ دینا۔ یہ وہ نکات ہیں جو اس مرکزی جامعہ کو دیگر تمام مرکزی جامعات سے ممتاز کرتے ہیں اور اسے ایک انفرادیت بخشتے ہیں۔ قومی تعلیمی پالیسی 2020 میں بھی مادری زبانوں اور علاقائی زبانوں میں تعلیم حاصل کرنے پر زور دیا گیا ہے۔

اردو کے ذریعے علم کے فروغ کا مقصد یہی ہے کہ اردو جاننے والے طبقے کے لیے عصری علوم اور مضامین تک رسائی آسان بنائی جائے۔ ایک طویل عرصے تک اردو میں درسی مواد کی کمی رہی ہے۔ اردو یونیورسٹی کے پاس اب اردو میں 350 سے زیادہ کتابوں کا ذخیرہ موجود ہے اور ہر سمسٹر کے ساتھ اس تعداد میں اضافہ ہو رہا ہے۔ اردو یونیورسٹی این ای پی 2020 کے وژن کے مطابق مادری/گھریلو زبان میں تعلیمی مواد فراہم کرنے کے قومی مشن کا حصہ بننے کو اپنے لیے ایک اعزاز سمجھتی ہے۔ مزید یہ کہ اردو بولنے والا طبقہ اردو میں مطالعہ کے مواد کی عدم دستیابی کے سبب نئے اُبھرتے شعبوں اور جدید تر معلومات کے موجودہ میدانوں میں تازہ ترین معلومات واطلاعات کے حصول سے محروم نہیں رہے گا۔ مذکورہ بالا میدانوں میں مواد کی دستیابی کی بدولت حصولِ معلومات کا نیا شعور بیدار ہوا ہے جو یقیناً اردو داں طبقے کی دانشورانہ ترقی پر اثرانداز ہوگا۔
فاصلاتی اور آن لائن طلبہ کے لیے تعلیم وتدریس کے عمل کو سہل بنانے کے لیے یونیورسٹی کا سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن (CDOE) اردو اور متعلقہ مضامین میں خود اکتسابی مواد (SLM) کی تیاری کو یقینی بناتا ہے۔

MANUU فاصلاتی اور آن لائن لرننگ کے طلبہ کے لیے SLM بلامعاوضہ فراہم کرتا ہے۔ یہ مواد اُردو کے ذریعے علم حاصل کرنے میں دلچسپی رکھنے والے ہر شخص کے لیے برائے نام قیمت پر دستیاب ہے۔ تعلیم تک رسائی کے دائرے کو مزید پھیلانے کے مقصد سے، اردو/ہندی/انگریزی/عربی میں eSLM یونیورسٹی کی ویب سائٹ پر مفت ڈاؤن لوڈ کے لیے دستیاب رکھا گیا ہے۔

مجھے بے حد خوشی ہے کہ متعلقہ فیکلٹی کی محنت اور مصنفین کے مکمل تعاون کی بدولت FYUG بی۔اے، بی۔ایس سی اور بی۔کام کی کتابوں کی اشاعت کا عمل بڑے پیمانے پر شروع ہو گیا ہے۔ فاصلاتی اور آن لائن لرننگ کے طلبہ کی سہولت کے لیے خود اکتسابی مواد (SLM) کی تیاری اور اشاعت کا عمل یونیورسٹی کے لیے اہمیت رکھتا ہے۔ مجھے یقین ہے کہ ہم اپنے خود تعلیمی مواد کے ذریعے اردو جاننے والے ایک بڑے طبقے کی ضروریات کو پورا کرنے کے قابل ہوں گے اور اس یونیورسٹی کے مقصدِ قیام کو پورا کریں گے اور اپنے ملک میں اپنی موجودگی کو جائز ٹھہرا سکیں گے۔

نیک تمناؤں کے ساتھ!

پروفیسر سید عین الحسن
شیخ الجامعہ، مانو

پیغام

موجودہ دور میں فاصلاتی تعلیم کو دنیا بھر میں ایک نہایت مؤثر اور مفید طریقۂ تعلیم کے طور پر تسلیم کیا جاتا ہے اور بڑی تعداد میں لوگ اس طریقۂ تعلیم سے فائدہ اٹھا رہے ہیں۔ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی نے بھی اردو زبان بولنے والے عوام کی تعلیمی ضروریات کو مد نظر رکھتے ہوئے اپنے قیام کے وقت سے ہی فاصلاتی تعلیم کا طریقہ متعارف کرایا۔ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی نے 1998 میں ڈائریکٹوریٹ آف ڈسٹنس ایجوکیشن (نظامتِ فاصلاتی تعلیم) کے ساتھ کام کا آغاز کیا اور 2004 سے باقاعدہ پروگرام شروع ہوئے، اس کے بعد مختلف شعبہ جات قائم کیے گئے۔

یو جی سی نے ملک میں نظام تعلیم کو مؤثر طور پر منظم کرنے میں ایک اہم کردار ادا کیا ہے۔ اوپن اینڈ ڈسٹنس لرننگ (ODL) موڈ کے تحت چلنے والے مختلف پروگرام، جو سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن (CDOE) میں چل رہے ہیں، یو جی سی-ڈی ای بی کے منظور شدہ ہیں۔ یو جی سی-ڈی ای بی نے فاصلاتی اور باقاعدہ تعلیم کے نصاب کو ہم آہنگ کرنے پر زور دیا ہے تاکہ فاصلاتی تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ کے معیار کو بہتر بنایا جاسکے۔ چونکہ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی ایک دُہرے طرز (ڈوئل موڈ) کی یونیورسٹی ہے جو فاصلاتی اور روایتی دونوں طریقۂ تعلیم کی خدمات فراہم کرتی ہے، اس لیے اپنے مقاصد کو یو جی سی-ڈی ای بی کے رہنما خطوط کے مطابق حاصل کرنے کے لیے اس نے چوائس بیسڈ کریڈٹ سسٹم (CBCS) متعارف کرایا گیا جس کا خود اکتسابی مواد (Self Learning Materials) یو جی سی کے قوانین اور کریڈٹ فریم کے مطابق نئے سرے سے تیار کیا جاچکا ہے۔

سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن (CDOE) کل انیس (19) پروگرام پیش کرتا ہے جن میں یو جی، پی جی، بی ایڈ، ڈپلومہ اور سرٹیفکیٹ پروگرام شامل ہیں۔ اس کے ساتھ ساتھ تکنیکی مہارتوں پر مبنی پروگرام بھی شروع کیے جارہے ہیں۔ سی ڈی اوای نے جولائی 2025 سے این ای پی-2020 کے مطابق چار سالہ یو جی پروگرام کا آغاز کیا ہے۔ بی اے، بی ایس سی اور بی کام کے آنرز پروگراموں کو این سی ایف کے مطابق ڈیزائن کیا گیا ہے جس سے طلبہ کو آنرز ڈگری حاصل کرنے میں مدد ملے گی۔ سال 2025-2026 سے ایم بی اے پروگرام او ڈی ایل موڈ میں متعارف کرایا گیا ہے۔

مانو نے طلبہ کی سہولت کے لیے نو ریجنل سنٹرز (بنگلورو، بھوپال، دربھنگہ، دہلی، کولکاتا، ممبئی، پٹنہ، رانچی اور سری نگر) اور چھ سب ریجنل سنٹرز (حیدر آباد، لکھنؤ، جموں، نوح، وارانسی اور امراوتی) کا ایک وسیع نیٹ ورک قائم کیا ہے۔ اس کے علاوہ وجے واڑا میں ایک ایکسٹینشن سنٹر بھی قائم کیا گیا ہے۔ ان ریجنل اور سب ریجنل سنٹروں کے تحت ایک سو پچاس سے زیادہ لرنر سپورٹ سنٹر (LSCs) اور بیس پروگرام سنٹر بیک وقت چلائے جارہے ہیں تاکہ طلبہ کو تعلیمی اور انتظامی سہولیات فراہم کی جاسکیں۔ سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن اپنی تعلیمی اور انتظامی سرگرمیوں میں آئی سی ٹی کا بھرپور استعمال کرتا ہے اور اپنے تمام پروگراموں میں صرف آن لائن موڈ کے ذریعے ہی داخلے فراہم کرتا ہے۔

طلبہ کے لیے سیلف لرننگ میٹیریل (SLM) کی سوفٹ کاپی سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن کی ویب سائٹ پر دستیاب کرائی جاتی ہیں اور آڈیو و ویڈیو ریکارڈنگ کے لنک بھی ویب سائٹ پر فراہم کیے جاتے ہیں۔ اس کے علاوہ طلبہ کو ای۔ میل اور واٹس ایپ گروپ کی سہولت بھی فراہم کی جارہی ہے جن کے ذریعے انہیں پروگرام کے مختلف پہلوؤں جیسے کورس رجسٹریشن، اسائنمنٹ، کاؤنسلنگ، امتحانات وغیرہ کے بارے میں مطلع کیا جاتا ہے۔ باقاعدہ کاؤنسلنگ کے علاوہ گزشتہ دو برسوں سے طلبہ کے تعلیمی معیار کو بہتر بنانے کے لیے زائد تدارکی (Remedial) آن لائن کاؤنسلنگ بھی فراہم کی جارہی ہے۔

امید کی جاتی ہے کہ سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن تعلیمی اور معاشی طور پر پسماندہ آبادی کو عصری تعلیم کے دھارے میں شامل کرنے میں ایک اہم کردار ادا کرے گا۔ تعلیمی ضروریات کو مد نظر رکھتے ہوئے نئی تعلیمی پالیسی (NEP-2020) کے مطابق مختلف پروگرامز میں تبدیلیاں کی گئی ہیں اور توقع ہے کہ اس سے اوپن اینڈ ڈسٹنس لرننگ کے نظام کو مزید مؤثر اور کارآمد بنانے میں مدد ملے گی۔

پروفیسر محمد رضا اللہ خان

ڈائرکٹر، سی ڈی اوای، مانو

کورس کا تعارف

زیر نظر کتاب، کثیر رکنی رنگس (Polynomial Rings) کے موضوعات سے متعلق ہے اور یہ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کے بی۔ایس سی۔ کورس کے چوتھے سمسٹر کے نصاب پر مشتمل ہے۔ ابسٹریکٹ الجبرا (Abstract Algebra) میں، کثیر رکنی رنگ ایک بنیادی الجبرائی ساخت ہے جو کثیر رکنیوں کو لے کر تشکیل پاتا ہے جس کے ضریب کسی دی گئی رنگ سے آتے ہیں۔

یہ کتاب طلبا کو کثیر رکنی رنگس کے بنیادی تصورات کو سمجھنے اور اپنی زندگی اور اطراف میں اس کا استعمال کرنے کا ایک بہترین موقع فراہم کرتی ہے۔ اس کتاب کی نمایاں خصوصیت یہ ہے کہ اس میں مواد کو سہل طریقے سے آسان زبان میں مثالوں کے ذریعہ سمجھایا گیا ہے، تاکہ طلبا اپنے مضمون کو از خود سمجھ سکیں۔

کتاب کو دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ جس میں پہلا حصہ نظریات (تھیوری) پر مبنی ہے اور دوسرا حصہ پریکٹکل (تجربوں) پر مختصر ہے۔ پہلا حصہ چار (4) اکائیوں پر مشتمل ہے۔ اکائی 1 اور اکائی 2 میں کثیر رکنی رنگس اور گوسی رنگ کی تعریف اور اس کے متعلق چند قضیوں کو ثابت کیا گیا ہے۔ اکائی 3 پر یمیٹو کثیر رکنیاں اور ان کی خصوصیات سے متعلق ہے اور اس سے متعلقہ مسائل پر مبنی ہے۔ چوتھی اکائی میں آئزن اسٹین کی کسوٹی اور غیر تحویل پذیر کثیر رکنیاں کی جانکاری دی گئی ہے۔

طلبا سے توقع کی جاتی ہے کہ وہ عملی کلاسوں میں شرکت کریں اور کونسلر کی رہنمائی میں تجرباتی مینول میں دیے گئے مسائل کو حل کرنے کی مہارت حاصل کریں۔

طلبا کی مسئلہ حل صلاحیت کو بہتر بنانے کے لیے اس مینول میں دو اکائیوں کا تجرباتی حصہ دیا گیا ہے۔ طلبا کی طرف سے کیے گئے کام کا ریکارڈ وہ عملی امتحان کے وقت جمع کریں۔

اس کتاب کی تدوین میں مصنفین، تدریسی و غیرہ تدریسی وانتظامی عملے کے تعاون کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ کتاب کو معیاری اور قابل عمل و فہم بنانے کی ہر ممکن کوشش کی گئی ہے، تاہم کوئی بھی کوشش اپنے آپ میں مکمل نہیں ہوتی۔ اس ضمن میں اساتذہ اکرام، ماہرین طلبا کی آرا و مشوروں کا خیر مقدم کیا جائے گا۔

ڈاکٹر خواجہ معین الدین
کورس کوآرڈی نیٹر

اکائی 1۔ کثیر رکنی رنگس

(Polynomial Rings)

اکائی کے اجزا

1.0 تمہید

1.1 مقاصد

1.2 کثیر رکنی رنگ

1.2.1 بنیادی معلومات

1.3 اکتسابی نتائج

1.4 کلیدی الفاظ

1.5 نمونہ امتحانی سوالات

1.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

1.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

1.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

1.0 تمہید(Introduction)

پچھلے درجوں میں آپ نے غیر متعین متغیر میں صحیح، ناطق اور حقیقی ضریب کے ساتھ کثیر رکنی عبارات کے بارے میں پڑھا ہوگا جیسے $8x^3 - 3x^2 - 3x + 1,\ y^2 - 2y + 5$ وغیرہ متعین متغیر x اور y میں کثیر رکنی ہیں۔ اس اکائی میں ہم کسی رنگ (Ring)اور پھر کسی میدان (Field)پر کثیر رکنی رنگ کے بارے تفصیل کے ساتھ پڑھیں گے نیز بہت سے قضیوں کو ثابت اور مثالوں کو حل کریں گے۔

1.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- کثیر رکنی رنگ کی بنیادی جانکاری سے متعرف ہو سکیں۔
- کسی رنگ اور میدان پر کثیر رکنی رنگ کو سمجھ سکیں۔
- کثیر رکنی رنگ سے وابستہ قضیوں کو بیان اور ثابت کر سکیں۔

1.2 کثیر رکنی رنگ(Polynomial Ring)

1.2.1 بنیادی معلومات(Basic Information)

رنگ پر کثیر رکنی(Polynomial over Ring)

فرض کرو کہ R کوئی رنگ ہے۔ رنگ R پر کثیر رکنی سے مراد غیر متعین متغیر(Indeterminate Variable)x میں ایسی عبارت ہے جو درجہ ذیل شکل میں ہو

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

جہاں $a_0, a_1, a_2, \cdots$ رنگ R کے عناصر(Elements)ہیں اور ان میں سے متناہی تعداد(Finite Number) $a_i, i \in \mathbb{Z}^+$ صفر کے مساوی ہیں۔ $a_0, a_1x, a_2x^2, \cdots$ کثیر رکنی کے ارکان(Terms)ہیں۔ پہلا عنصر a_0 کثیر رکنی کا مستقل عنصر کہلاتا ہے۔ اگر m سب سے بڑا غیر منفی صحیح عدد(Non-negative Integer)اس طرح سے وجود رکھتا ہو کہ $a_m \neq 0$، تب a_mx^m کو کثیر رکنی کا اولی رکن اور a_m کو کثیر رکنی کا اولی ضریب(Leading Coefficient) کہتے ہیں۔ اگر کثیر رکنی کا اولی ضریب $a_m = 1$ ہو تب اس کثیر رکنی کو وہدی کثیر رکنی(Monic Polynomial) کہتے ہیں۔ اگر تمام $a_0, a_1, a_2, \cdots$ صفر ہوں تب کثیر رکنی کو زیرو کثیر رکنی(Zero Polynomial) کہتے ہے۔ یعنی

$$O(x) = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots + 0 \cdot x^n + \cdots$$

فرض کرو کہ $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$ کسی اختیاری رنگ R پر ایک کثیر رکنی ہے۔ تب f درجہ n کا کثیر رکنی کہلایے گا اگر اور صرف اگر $a_n \neq 0$ اور $a_m = 0, \forall m > n$

اگر $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$ اور $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m + \cdots$

رنگ R پر دو کثیر رکنی ہیں اور اگر $m = n$ اور $a_i = b_i, \forall i \in \mathbb{Z}^+$ تب $f(x)$ اور $g(x)$ مساوی ہوں گے۔ یعنی $f(x) = g(x)$

ان کے لیے جمع کا عمل درجہ ذیل طریقہ پر ہوتا ہے

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_k + b_k)x^k + \cdots \\ &= c_0 + c_1x + c_3x^2 + \cdots + c_kx^k + \cdots \end{aligned}$$

جہاں $c_k = a_k + b_k, \forall k \in \mathbb{Z}^+$

اور ضرب کا عمل

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots) \\ &= a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)x + (a_2b_0 + a_0b_2 + a_1b_1)x^2 + \cdots \\ &= d_0 + d_1x + d_3x^2 + \cdots \end{aligned}$$

جہاں $d_k = a_kb_0 + a_{k-1}b_1 + \cdots + a_1b_{k-1} + a_0b_k, \forall k \in \mathbb{Z}^+$

مثلاً اگر $f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 5x + 2$ اور $g(x) = 5x^4 - x^3 + 4x + 3$ تب

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (2 + 3)x^0 + (5 + 4)x^1 + (3 + 0)x^2 + (-4 - 1)x^3 + (0 + 5)x^4 \\ &= 5x^0 + 9x^1 + 3x^2 - 5x^3 + 5x^4 \end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (-4x^3 + 3x^2 + 5x + 2)(5x^4 - x^3 + 4x + 3) \\ &= 6 + (15 + 8)x + (9 + 20)x^2 + (-4 - 1)x^3 + (-12 + 12 - 2)x^4 \\ &\quad +(25 - 3)x^5 + (15 + 4)x^6 - 20x^7 \\ &= 6 + 23x + 29x^2 - 2x^3 - 11x^4 + 22x^5 + 19x^6 - 20x^7 \end{aligned}$$

رنگ پر کثیر رکنی رنگ (Polynomial Ring over Ring)

فرض کرو کہ R ایک اختیاری رنگ ہے اور x ایک غیر متعین متغیر ہے۔ تب تمام کثیر رکنیوں کا سٹ

$$\mathrm{R}[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n / a_i \in R, i \in \mathbb{Z}^+\}$$

رنگ پر کثیر رکنی وں کا سٹ کہلاتا ہے۔

فرض کرو کہ R پر تمام کثیر رکنیوں کا سٹ $\mathrm{R}[x]$ ہے۔ تب $\mathrm{R}[x]$ ایک غیر خالی سٹ ہے اور مندرجہ بالا ذکر کیے گئے جمع اور ضرب کے عمل سے $\mathrm{R}[x]$ ایک رنگ بنے گا جسے ہم کثیر رکنیوں کا رنگ کہتے ہیں۔ ساتھ ہی ہم جانتے ہیں کہ زیرو کثیر رکنی $O(x) \in \mathrm{R}[x]$ جمع کے عمل کے تحت اکائی ہے۔

کسی کثیر رکنی $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$ کا جمع کے عمل کے تحت معکوس

$-f(x) = -a_0 - a_1x - a_2x^2 + \cdots + (-a_n)x^n + \cdots$ ایک کثیر رکنی ہوگا۔ اسی طرح چوں کہ $1 \in \mathrm{R}$ اکائی ہے، تب کثیر رکنی $I(x) = 1 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n + \cdots \in \mathrm{R}[x]$ ایک اکائی ہوگی۔ اگر ہم رنگ کی جگہ کسی میدان (Field) کو لیں تب کثیر رکنی کا میدان کے متناظر (Corresponding) رنگ $\mathrm{F}[x]$ حاصل ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ رنگ R پر کثیر رکنی رنگ $\mathrm{R}[x]$ ہے اور $f: R \to \mathrm{R}[x]$ اس طرح سے ہے کہ $f(a) = a + 0x + 0x^2 + \cdots$

جس سے صاف ظاہر ہوتا ہے کہ f ایک تا ایک ہم مارفیت(One-One Homomorphism)رکھتا ہے۔ساتھ ہی

$$f(a+b)=f(a)+f(b)$$

اور

$$f(ab)=f(a)f(b)$$

اس لیے R کثیر رکنی رنگ $\mathrm{R}[x]$ کے کسی تحت رنگ پر یک مارفیت(Isomorphism)رکھتا ہے۔اس لیے ہم R کو $\mathrm{R}[x]$ کا تحت رنگ بھی کہہ سکتے ہیں۔اس سے ہمیں درجہ ذیل قضیہ ثابت کرنا آسان ہو جاتا ہے۔

قضیہ 1۔ فرض کرو کہ $\mathrm{R}[x]$ کسی رنگ R پر کثیر رکنی رنگ ہے،تب ثابت کرو کہ R تقلیبی ہو گا اگر اور صرف اگر $\mathrm{R}[x]$ تقلیبی ہو۔

ثبوت۔ اگر $\mathrm{R}[x]$ تقلیبی ہے تب اس کا کوئی بھی تحت رنگ بھی تقلیبی ہو گا۔اب چوں کہ ہم جانتے ہیں کہ R کثیر رکنی رنگ $\mathrm{R}[x]$ کے تحت رنگ کے یکمارفی ہوتا ہے۔اس لیے یہ تقلیبی ہو گا۔

اس کے برعکس فرض کرو کہ R تقلیبی ہے اور

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \text{ اور } g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m+\cdots$$

کثیر رکنی رنگ $\mathrm{R}[x]$ کے دو عناصر ہیں،تب

$$\begin{aligned}f(x)g(x)&=(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m+\cdots)\\&=a_0b_0+(a_1b_0+a_0b_1)x+(a_2b_0+a_0b_2+a_1b_1)x^2+\cdots\\&=b_0a_0+(b_0a_1+b_1a_0)x+(b_0a_2+b_2a_0+b_1a_1)x^2+\cdots\\&=(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m+\cdots)(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)\\&=g(x)f(x)\end{aligned}$$

اس لیے یہ ثابت ہوا کہ $\mathrm{R}[x]$ تقلیبی ہے۔

قضیہ 2۔ فرض کرو کہ $\mathrm{R}[x]$ کسی رنگ R پر کثیر رکنیوں کا سٹ ہے،تب ثابت کرو کہ $\mathrm{R}[x]$ بالحاظ کثیر رکنیوں کے جمع اور ضرب پر ایک رنگ ہوتا ہے۔

ثبوت۔

G_1: بند شی خاصیت(Closure axiom):فرض کرو کہ $f(x)$ اور $g(x)$ کثیر رکنی رنگ $\mathrm{R}[x]$ کے دو عناصر ہیں،ہمیں معلوم ہے کہ دو کثیر رکنیوں کا ضرب اور جمع سے حاصل بھی ایک کثیر رکنی ہوتا ہے اس لیے $f(x)+g(x)\in \mathrm{R}[x]$ اور $f(x)g(x)\in \mathrm{R}[x]$ جس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\mathrm{R}[x]$ کثیر رکنیوں کے جمع اور ضرب کے عمل کے تحت بند شی خاصیت کی تکمیل کرتا ہے۔

G_2: تلازمی خاصیت (Associative axiom):فرض کرو کہ کثیر رکنی رنگ $\mathrm{R}[x]$ کے تین عناصر

$f\ x\ =a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\ \ ,g\ x\ =b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots$ اور $h(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots$ ہیں، تب جمع کے عمل کے لیے تلازمیت

$$\begin{aligned}\big(f(x)+g(x)\big)+h(x)&=(a_0+b_0)+c_0+(a_1+b_1)x+c_1x+(a_2+b_2)x^2+c_2x^2+\cdots\\&=[(a_0+b_0)+c_0]+[(a_1+b_1)+c_1]x+[(a_2+b_2)+c_2]x^2+\cdots\\&=[a_0+(b_0+c_0)]+[a_1+(b_1+c_1)]x+[a_2+(b_2+c_2)]x^2+\cdots\end{aligned}$$

$$= a_0 + (b_0 + c_0) + a_1x + (b_1 + c_1)x + a_2x^2 + (b_2 + c_2)x^2 + \cdots$$
$$= f(x) + \big(g(x) + h(x)\big)$$

اب ضرب کے عمل کے لیے تلازمیت کی جانچ کرتے ہیں

$$[f(x)g(x)]h(x) = [(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots)](c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots)$$
$$= [a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)x + (a_2b_0 + a_0b_2 + a_1b_1)x^2 + \cdots](c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots)$$
$$= (d_0 + d_1x + d_2x^2 + \cdots + d_lx^l + \cdots)(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_mx^m + \cdots)$$

جہاں $d_l = \sum_{l=n+k} a_nb_k$

$$[f(x)g(x)]h(x) = e_0 + e_1x + e_2x^2 + \cdots + e_ix^i + \cdots$$
$$= \sum_{l+m=i} d_lc_m = \sum_{l+m=i}\left(\sum_{n+k=l} a_nb_k\right)c_m = \sum_{m+n+k=i} a_nb_kc_m$$

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$f(x)[g(x)h(x)] = \sum_{m+n+k=i} a_nb_kc_m$$

G_3: جمعی اکائی کا وجود (Existence of Additive Identity): فرض کرو کہ $O(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots$ کثیر رکنی رنگ $R[x]$ کا ایک عنصر ہے، تب

$$f(x) + O(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) + (0 + 0x + 0x^2 + \cdots)$$
$$= (a_0 + 0) + (a_1 + 0)x + (a_2 + 0)x^2 + \cdots$$
$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$
$$= f(x)$$

اس لیے صفر کثیر رکنی جمعی اکائی ہے۔

G_4: جمعی معکوس کا وجود (Existence of Additive Inverse): فرض کرو کہ $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ کثیر رکنی رنگ $R[x]$ کا ایک عنصر ہے اور تب $-f(x) = -a_0 - a_1x - a_2x^2 - \cdots$ بھی اسکا ایک عنصر ہو گا، تب

$$-f(x) + f(x) = (-a_0 - a_1x - a_2x^2 - \cdots) + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)$$
$$= (-a_0 + a_0) + (-a_1 + a_1)x + (-a_2 + a_2)x^2 + \cdots$$
$$= 0 + 0x + 0x^2 + \cdots$$
$$= O(x) \in R[x]$$

اس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $R[x]$ کا ہر ایک عنصر اپنا ایک معکوس رکھتا ہے۔

بالحاظ جمع ضرب کی تقسیم پزیری (Distributivity of Multiplication with Respect to Addition)

ہم جانتے ہیں کہ

$$f(x)[g(x) + h(x)]$$
$$= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)[(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots) + (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots)]$$
$$= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)[(b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)x + \cdots + (b_n + c_n)x^n + \cdots]$$

$$= [a_0(b_0 + c_0)] + [a_0(b_1 + c_1) + a_1(b_0 + c_0)]x + \cdots$$
$$= [(a_0b_0 + a_0c_0)] + [(a_0b_1 + a_0c_1)x + (a_1b_0 + a_1c_0)x] + \cdots$$
$$= [a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots] + [a_0c_0 + (a_0c_1 + a_1c_0)x + \cdots]$$
$$= f(x)g(x) + f(x)h(x)$$

اسی طرح

$$[f(x) + g(x)]h(x)$$
$$= [(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots)](c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots)$$
$$= [(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + c_2x^2 + \cdots](c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots)$$
$$= [(a_0 + b_0)c_0 + [(a_1 + b_1)c_0 + (a_0 + b_0)c_1]x + \cdots]$$
$$= [(a_0c_0 + b_0c_0)] + [(a_1c_0 + b_1c_0)x + (a_0c_1 + b_0c_1)x] + \cdots$$
$$= [a_0c_0 + (a_1c_0 + a_0c_1)x + \cdots] + [b_0c_0 + (b_1c_0 + b_0c_1)x + \cdots]$$
$$= f(x)h(x) + g(x)h(x)$$

تقلیبی خاصیت(Commutative Properties):فرض کرو کہ کثیر رکنی رنگ $R[x]$ کے دو عناصر

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \quad , g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots$ ہیں،تب جمع کے عمل کے لیے

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_k + b_k)x^k + \cdots$$
$$= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)x + (b_2 + a_2)x^2 + \cdots + (b_k + a_k)x^k + \cdots$$
$$= g(x) + f(x)$$

جس سے تقلیبی خاصیت پوری ہوئی۔

اب چوں رنگ کی تمام خصوصیات کو کثیر رکنیوں کا سٹ مطمئن کرتا ہے اس لیے ثابت ہوا کہ $R[x]$ بالحاظ کثیر رکنیوں کے جمع اور ضرب پر ایک رنگ ہے۔

قضیہ 3۔ اگر R کوئی اختیاری رنگ ہے اور R^I کثیر رکنی رنگ $R[x]$ میں مستقل کثیر رکنیوں کا سٹ ہے۔تب ثابت کرو کہ R^I رنگ R پر یک مارفیت رکھتا ہے۔

ثبوت۔ دیا ہے کہ R^I کثیر رکنی رنگ $R[x]$ میں مستقل کثیر رکنیوں کا سٹ ہے۔اس لیے فرض کرو کہ $R^I = a + 0x + 0x^2 + \cdots$ اس طرح کہ $a \in R$

اب فرض کرو کہ نقش(Map) $f: R \to R^I$ اس طرح سے متعرف ہے کہ

$$f(a) = a + 0x + 0x^2 + \cdots, \forall a \in R$$

اب چوں کہ $f(a) = f(b)$ اس لیے

$$a + 0x + 0x^2 + \cdots = b + 0x + 0x^2 + \cdots$$
$$\Rightarrow \quad a = b$$

اس لیے f ایک تا ایک ہے۔ساتھ ہی ظاہر ہے کہ f بر(Onto) تفاعل بھی ہو گا۔اب

$$f(a + b) = (a + b) + 0x + 0x^2 + \cdots$$
$$= (a + 0x + 0x^2 + \cdots) + (b + 0x + 0x^2 + \cdots)$$
$$= f(a) + f(b)$$

اور

$$f(ab) = (ab) + 0x + 0x^2 + \cdots$$

$$= (a + 0x + 0x^2 + \cdots)(b + 0x + 0x^2 + \cdots)$$
$$= f(a)f(b)$$

اس لیے f ایک مارفیت(Isomorphism) رکھتا ہے۔اس طرح $R \cong R^I$

قضیہ(Theorem)4: اگر $R[x]$ کسی رنگ R پر کثیر رکنی رنگ ہو اور فرض کرو کہ اس کی دو غیر صفری کثیر رکنیاں

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m, a_m \neq 0$$

اور $$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n, b_n \neq 0$$

ہیں،تب ثابت کرو:

a) اگر $f(x) + g(x) \neq 0$ تب $deg[f(x) + g(x)] \leq max(m, n)$

b) اگر $f(x)g(x) \neq 0$ تب $deg[f(x)g(x)] \leq m + n$

c) اگر R ایک انٹگرل دامنہ ہو تو $deg[f(x)g(x)] = m + n$

d) R ایک انٹگرل دامنہ ہو گا اگر اور صرف اگر $R[x]$ انٹگرل دامنہ ہو۔

e) اگر F ایک میدان ہے تو $F[x]$ میدان نہیں ہو گا۔

ثبوت۔ (a) دیے گیے کثیر رکنیوں سے ہمیں حاصل ہے

$$\deg f(x) = m, \deg g(x) = n$$

ساتھ ہی اگر $f(x) + g(x) \neq 0$ تب ہمارے سامنے تین صورتیں پیش آتی ہیں۔

پہلی صورت میں اگر $m \neq n$ تب $deg[f(x) + g(x)] = max(m, n)$

دوسری صورت میں اگر $m = n$ اور $a_m + b_n \neq 0$ تب $deg[f(x) + g(x)] = m$

تیسری صورت میں اگر $m = n$ اور $a_m + b_n = 0$ تب $deg[f(x) + g(x)] < max(m, n)$

اس لیے ثابت ہوا کہ $deg[f(x) + g(x)] \leq max(m, n)$

(b) فرض کرو کہ $f(x)g(x) \neq 0$ اور

$$f(x)g(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m + \cdots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + \cdots)$$
$$= a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)x + (a_2b_0 + a_0b_2 + a_1b_1)x^2 + \cdots + a_mb_nx^{m+n}$$

اس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $f(x)g(x)$ کا درجہ(Degree) یکتا ہو گا۔

اگر $a_mb_n \neq 0$،تب

$$deg[f(x)g(x)] = m + n$$

اور اگر $a_mb_n = 0$،تب

$$deg[f(x)g(x)] < m + n$$

اس طرح ثابت ہوا کہ $deg[f(x)g(x)] \leq m + n$

(c) فرض کرو کہ R ایک انٹگرل دامنہ ہے اور $R[x]$ کے دو غیر صفری کثیر رکنی $f(x)$ اور $g(x)$ ہیں۔اب چوں کہ $a_m \neq 0$

اور $b_n \neq 0$ اس لیے

$$deg[f(x)g(x)] = m + n$$

(d) اگر R[x] انٹگرل دامنہ ہو اور کیوں کہ R کثیر رکنی رنگ R[x] کے کسی تحت رنگ کے ساتھ یک مارفیت رکھتا ہے، اس لیے R بھی انٹگرل دامنہ ہو گا۔

اس کے بالعکس فرض کرو کہ R ایک انٹگرل دامنہ ہے۔ اب مان لو کہ $f(x)$ اور $g(x)$ کثیر رکنی رنگ کے دو غیر صفری عناصر اس طرح سے ہیں کہ

$$f(x)g(x) = 0$$

اب چوں کہ $a_0 \neq 0$ اور $b_0 \neq 0$ اس لیے جس سے $a_0 b_0 \neq 0$ اس لیے $f(x)$ اور $g(x)$ مستقل کثیر رکنی نہیں ہو سکتے۔ اب ہم کہہ سکتے ہیں کہ

$$f(x)g(x) \neq 0$$

چوں کہ $f(x)$ اور $g(x)$ میں سے کم از کم ایک مستقل کثیر رکنی ہے، اس لیے

$$deg[f(x)g(x)] \geq 1$$

اب R کے انٹگرل دامنہ ہونے کی وجہ سے

$$deg[f(x)g(x)] = m + n \geq 1$$

جس سے تضاد ظاہر ہوتا ہے چوں کہ اس سے $f(x)g(x) = 0$ جب کہ $a_i b_i \neq 0, i > 0$

یہ تبھی ممکن ہے جب $f(x) = 0$ یا $g(x) = 0$ اس لیے R[x] ایک انٹگرل دامنہ ہے۔

(e) یہ ثابت کرنے کے لیے کہ $F[x]$ میدان نہیں ہے ہمیں ثابت کرنا ہو گا کہ $F[x]$ میں ایک غیر صفری عنصر وجود رکھتا ہے جس کا کوئی ضربی معکوس نہیں ہے۔ فرض کرو کہ $f(x) \in F[x]$ اس طرح سے ہے کہ

$$degf(x) > 0$$

چوں کہ

$$f(x)O(x) = O(x) \neq I(x)$$

جہاں $I(x) = 1 + 0x + 0x^2 + \cdots$

اس لیے $f(x)$ کا معکوس $O(x)$ نہیں ہو سکتا ہے۔

اب فرض کرو کہ $g(x)$ کوئی غیر صفری کثیر رکنی ہے۔ F کے میدان ہونے وجہ سے ہمیں حاصل ہے

$$deg[f(x)g(x)] = m + n > 0 \qquad [\because m > 0 \ \& \ n \geq 0]$$

اس لیے $F[x]$ کے اکائی عنصر کا درجہ صفر ہے۔ اس لیے $I(x) \in F[x]$ کے لیے

$$f(x)g(x) \neq I(x)$$

اس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $f(x)$ کا ضربی معکوس وجود نہیں رکھتا ہے۔ اس لیے $F[x]$ میدان نہیں ہے۔

نوٹ: صفر کثیر رکنی کو چھوڑ کر سبھی مستقل کثیر رکنیوں کا معکوس حاصل کیا جا سکتا ہے۔

تعریف: فرض کرو کہ R ایک انٹگرل دامنہ ہے۔ تب R پر n متغیرات $x_1, x_2, \cdots, x_n$ میں کثیر رکنیوں کا رنگ درجہ ذیل طریقہ سے متعرف ہوتا ہے

$$R_1 = R[x_1]$$
$$R_2 = R_1[x_2]$$
$$R_3 = R_2[x_3]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$R_n = R_{n-1}[x_n]$$

تب R_n کو R پر متغیرات $x_1, x_2, \cdots, x_n$ میں کثیر رکنیوں کا رنگ کہتے ہیں اور اس کو $R_n = R[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

قضیہ 5۔ اگر R ایک انٹگرل دامنہ ہو، تو $R[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ بھی انٹگرل دامنہ ہوگا۔

ثبوت۔ دیا ہے کہ R ایک انٹگرل دامنہ ہے تب $R_1 = R[x_1]$ بھی انٹگرل دامنہ ہوگا۔ اسی طرح سے چوں کہ اب R_1 ایک انٹگرل دامنہ ہے، تب $R_2 = R_1[x_2]$ بھی انٹگرل دامنہ ہوگا۔ اور پھر اسی طرح ظاہر ہے کہ $R_3 = R_2[x_1, x_2, x_3]$، $R_4 = R_3[x_1, x_2, x_3, x_4]$، ..... $R_n = R_{n-1}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ کو بھی انٹگرل دامنہ ثابت کر سکتے ہیں۔

اس لیے ثابت ہوا کہ اگر R ایک انٹگرل دامنہ ہو، تو $R[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ بھی انٹگرل دامنہ ہوگا۔

قضیہ 6۔ اگر F ایک میدان ہو، تو $F[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ ایک انٹگرل دامنہ ہوتا ہے۔

ثبوت۔ فرض کرو کہ اگر F ایک میدان ہے تب $F_1 = F[x_1]$ بھی انٹگرل دامنہ ہوگا۔ اسی طرح سے چوں کہ اب F_1 ایک انٹگرل دامنہ ہے، تب $F_2 = F_1[x_2]$ بھی انٹگرل دامنہ ہوگا۔ اسی طرح $F_3 = F_2[x_1, x_2, x_3]$، $F_4 = F_3[x_1, x_2, x_3, x_4]$، ..... $F_n = F_{n-1}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ کو بھی من درجہ بالا طرز پر انٹگرل دامنہ ثابت کر سکتے ہیں۔

اس لیے ثابت ہوا کہ اگر F ایک میدان ہے، تو $F[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ ایک انٹگرل دامنہ ہوگا۔

تعریف۔ انٹگرل دامنہ کے ذریعہ بنے کوشینٹ میدان کو $x_1, x_2, \cdots, x_n$ میں F پر ریشنل تفاعلات کا میدان کہتے ہیں۔ اس کو $F[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ یہ میدان الجبرائک جیومتری میں اہم کردار ادا کرتا ہے۔

تعریف۔ اگر $f, g \in F[x]$ دو کثیر رکنی ہیں، تب f اور g کو تلازمی کہتے ہیں اگر $f(x) = cg(x)$ جب کہ c میدان F کا ایک غیر صفری عنصر ہے۔

تعریف۔ $F[x]$ کے اس عنصر کو اکائی کہا جاتا ہے جس کا کوئی ضربی معکوس وجود رکھتا ہو۔

تعریف۔ اگر $f \in F[x]$ تب f ہمیشہ اپنی تلازمیت کے ذریعے تقسیم پزیر ہے۔ ساتھ ہی $F[x]$ سبھی اکائیوں سے بھی تقسیم پزیر ہوگا۔ یہ سبھی تقسیم کرنے والے غیر واجب قاسم (Improper Divisor) کہلاتے ہیں۔ ان کے علاوہ f کے دوسرے قاسموں کو واجب قاسم (Proper Divisor) کہتے ہیں، اگر یہ وجود رکھتے ہوں۔

تعریف۔ فرض کرو کہ F کوئی میدان ہے اور $p, q \in F[x]$ دو کثیر رکنی ہیں، تب p اور q کا اعظم مشترک قاسم (Greatest Common Divisor) ایک غیر صفری کثیر رکنی d ہے اس طرح سے کہ $d|p$ اور $d|q$ ساتھ ہی p اور q کا کوئی بھی قاسم، d کا بھی قاسم ہو۔ اعظم مشترک قاسم کو ہم (p, q) سے ظاہر کرتے ہیں۔

تعریف۔ $p, q \in F[x]$ دو کثیر رکنی کو اضافی مفرد (Relatively Prime) کہا جاتا ہے اگر ان کا اعظم مشترک قاسم (GCD) $F[x]$ کی اکائی ہو۔

قضیہ 6۔ فرض کرو کہ میدان F پر کثیر رکنی دامنہ $F[x]$ کے دو غیر صفری کثیر رکنی $f(x)$ اور $q(x)$ ہیں، تب $F[x]$ میں یکتا طور پر دو کثیر رکنی $g(x)$ اور $r(x)$ اس طرح وجود رکھتے ہیں کہ

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

جب کہ یا تو $r(x) = 0$ یا $\deg r(x) < \deg g(x)$

ثبوت۔ فرض کرو کہ

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m, a_m \neq 0$$

اور $$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n, b_n \neq 0$$

میدان F پر کثیر رکنی دامنہ $F[x]$ کے دو غیر صفری کثیر رکنی $f(x)$ اور $q(x)$ ہیں۔

پہلا کیس: اگر $\deg f(x) < \deg g(x)$، یعنی $m < n$ ہو، یا $f(x) = 0$ تو ثبوت پیش کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔ کیوں کہ $f(x) = g(x) \times 0 + f(x)$ اس لیے یہاں $q(x) = 0$ ، $r(x) = f(x)$ اور اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ $f(x) = 0$ یا $\deg f(x) < \deg g(x)$

دوسرا کیس: اب مان لیتے ہیں کہ $m \geq n$ ہے۔ اس صورت میں ہم ریاضیاتی استقرا (Mathematical Induction) کی مدد سے یہ ثابت کریں گے۔

اگر $m = 0$، تب $m \geq n \Leftarrow n = 0$ اس لیے $f(x) = a_0 \neq 0$ اور $g(x) = b_0 \neq 0$ دونوں غیر صفری مستقل کثیر رکنیاں ہیں۔ اب

$$\begin{aligned} f(x) = a_0 &= a_0b_0^{-1}b_0 + 0 \\ &= (a_0b_0^{-1})g(x) + 0 \end{aligned}$$

اس لیے $m = 0$ کے لیے قضیہ صحیح ثابت ہوا۔

اب ہم مان لیں کہ قضیہ درست ہے جب $\deg f(x) < m$ ہو۔ اب ہم ثابت کریں گے قضیہ $\deg f(x) = m$ کے لیے بھی درست ہے۔

$$f'(x) = f(x) - (a_mb_n^{-1})x^{m-n}g(x) \quad \ldots (1)$$

ظاہر ہے کہ $\deg f'(x) < m$ ہے۔ اب ہمارے مفروضہ کے مطابق دو کثیر رکنیاں $s(x)$ اور $r(x)$ اس طرح سے وجود رکھتے ہیں کہ

$$f'(x) = s(x)g(x) + r(x)$$

جہاں $r(x) = 0$ یا $\deg r(x) < \deg g(x)$

اب مساوات(1)میں یہ قیمت درج کرنے پر

$$s(x)g(x) + r(x) = f(x) - (a_m b_n^{-1})x^{m-n}g(x)$$
$$f(x) = [s(x) + (a_m b_n^{-1})x^{m-n}]g(x) + r(x)$$

اگر ہم مان لیں کہ $s(x) + (a_m b_n^{-1})x^{m-n} = q(x)$ تب

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

جہاں $s(x) = 0$ یا $\deg r(x) < \deg g(x)$

اس سے کثیر رکنیوں $q(x)$ اور $r(x)$ کا وجود ثابت ہوتا ہے۔اب ہم ان کو یکتا ثابت کریں گے۔فرض کیجیے کہ

$$f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x) = q_2(x)g(x) + r_2(x)$$
$$\Rightarrow q_1(x)g(x) + r_1(x) = q_2(x)g(x) + r_2(x)$$
$$\Rightarrow [q_1(x) - q_2(x)]g(x) = r_2(x) - r_1(x) \quad \ldots (2)$$

اگر $q_1(x) - q_2(x) \neq 0$ تب $[q_1(x) - q_2(x)]g(x)$ صفر کثیر رکنی کے مساوی نہیں ہو سکتا کیوں کہ $g(x) \neq 0$ اور $F[x]$ بنا صفری قاسم ہے۔ساتھ ہی $[q_1(x) - q_2(x)]g(x)$ کا درجہ کم از کم n ہوگا، جو کہ $g(x)$ کا درجہ ہے۔لیکن $r_2(x) - r_1(x)$ یا تو صفر کثیر رکنی کے مساوی ہے یا پھر اس کا درجہ n سے کم ہے، یہ اس لیے ہے کیوں کہ $r_1(x)$، $r_2(x)$ دونوں کا درجہ n سے کم ہے۔

اس لیے مساوات(2)میں دونوں کثیر رکنیوں مساوی ہوں گی اگر

$$q_1(x) - q_2(x) = 0 \;\&\; r_2(x) - r_1(x) = 0$$

یعنی

$$q_1(x) = q_2(x) \;\&\; r_2(x) = r_1(x)$$

اس لیے کثیر رکنیوں $q(x)$ اور $r(x)$ یکتا ہیں۔

1.3 اکتسابی نتائج(Learning Outcomes)

اس اکائی کو پڑھنے کے بعد آپ نے رنگ اور میدان پر کثیر رکنی رنگ کی تعریف اور ان سے وابستہ مختلف قضیوں کو ثابت کرنا سیکھا ہو گا۔

1.4 کلیدی الفاظ(Keywords)

غیر متعین متغیر، عبارت، کثیر رکنی، میدان، رنگ، اولی ضریب

1.5 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

1.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. کسی رنگ پر کثیر رکنی رنگ کی تعریف کیجیے۔
2. کسی میدان پر کثیر رکنی رنگ کی تعریف کیجیے۔
3. دو کثیر رکنیوں کی جمع حاصل کرنے کے لیے ہمیں ان کے یکساں قوتوں کے ضریبوں کو جوڑنا چاہیے۔ (T/F)

4. صفر کثیر رکنی کا درجہ کیا ہوتا ہے؟

5. مستقل کثیر رکنی کا درجہ n ہوتا۔ (T/F)

6. صفر کثیر رکنی کو چھوڑ کر سبھی مستقل کثیر رکنیوں کا معکوس حاصل کیا جا سکتا ہے۔ (T/F)

7. کثیر رکنی کا اولی ضریب کسے کہتے ہیں؟

1.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. اگر F ایک میدان ہو، تو $F[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ ایک انٹگرل دامنہ ہوتا ہے۔

2. فرض کرو کہ میدان F پر کثیر رکنی دامنہ $F[x]$ کے دو غیر صفری کثیر رکنی p اور q ہیں، تب $F[x]$ میں یکتا طور پر دو کثیر رکنی d اور r اس طرح وجود رکھتے ہیں کہ

$$p(x) = d(x)q(x) + r(x)$$

جب کہ $r(x) = 0$ یا $\deg r(x) < \deg q(x)$

1.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. اگر R[x] کسی رنگ R پر کثیر رکنی رنگ ہو اور فرض کرو کہ اس کی دو غیر صفری کثیر رکنیاں

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m, a_m \neq 0$$

اور $$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n, b_n \neq 0$$

ہیں، تب ثابت کرو:

a) اگر $f(x) + g(x) \neq 0$ تب $deg[f(x) + g(x)] \leq max(m, n)$

b) اگر $f(x)g(x) \neq 0$ تب $deg[f(x)g(x)] \leq m + n$

c) اگر R ایک انٹگرل دامنہ ہو تو $deg[f(x)g(x)] = m + n$

d) R ایک انٹگرل دامنہ ہوگا اگر اور صرف اگر R[x] انٹگرل دامنہ ہو۔

e) اگر F ایک میدان ہے تو $F[x]$ میدان نہیں ہوگا۔

2. اگر R کوئی اختیاری رنگ ہے اور R^I کثیر رکنی رنگ R[x] میں مستقل کثیر رکنیوں کا سٹ ہے۔ تب ثابت کرو کہ R^I رنگ R پر یک مارفیت رکھتا ہے۔

3. فرض کرو کہ R[x] کسی رنگ R پر کثیر رکنیوں کا سٹ ہے، تب ثابت کرو کہ R[x] بالحاظ کثیر رکنیوں کے جمع اور ضرب پر ایک رنگ ہوتا ہے۔

جوابات:

1.5.1 معروضی سوالات کے جوابات

T .3 F .5 T .6

اکائی2۔ گوسی صحیح اعداد کا رنگ

(Ring of Gaussian Integers)

اکائی کے اجزا

2.0 تمہید

2.1 مقاصد

2.2 گوسی صحیح اعداد کا رنگ

2.3 اکتسابی نتائج

2.4 کلیدی الفاظ

2.5 نمونہ امتحانی سوالات

2.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

2.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

2.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

2.0 تمہید(Introduction)

پچھلی اکائی میں ہم نے کثیر رکنی رنگ کی بنیادی معلومات کے ساتھ رنگ (Ring)اور پھر کسی میدان (Field)پر کثیر رکنی رنگ کے بارے تفصیل کے ساتھ پڑھا نیز بہت سے قضیوں کو ثابت اور مثالوں کو حل کرنا سیکھ گئے ہوں گے۔اس اکائی میں کثیر رکنی رنگ سے متعلق ایک مسئلہ پر تفصیلی بحث کریں گے جو گوسی صحیح اعداد کی رنگ کے نام سے جانی جاتی ہے۔

2.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مکمل طور پر پڑھنے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ :

- گوسی صحیح اعداد کی بنیادی جانکاری سے متعرف ہو کر چند مثالوں کو حل کر سکیں۔
- گوسی صحیح اعداد کی رنگ کو سمجھ سکیں اور اس سے وابستہ قضیوں کو بیان اور ثابت کر سکیں۔

2.2 گوسی صحیح اعداد کی رنگ(Ring of Gaussian Integers)

ایسے ملتف اعداد(Complex Numbers) جن کے حقیقی اور خیالی حصّے دونوں صحیح اعداد ہوں، گوسی صحیح اعداد کہلاتا ہے۔یہ ملتف اعداد کے معمولی جمع اور ضرب کے عمل کے ساتھ ایک انٹگرل دامنہ بناتا ہے۔اس کو علامت $\mathbb{Z}[i]$ سے ظاہر کرتے ہیں۔یہ دو درجی صحیح اعداد کے تقلیبی رنگ کی ایک خاص صورت ہے۔

تعریف: گوسی اعداد ایک سٹ ہے جو درجہ ذیل شکل میں ہوتا ہے

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$$

جہاں $i^2 = -1$ ہوتا ہے۔

گوسی صحیح اعداد ملتف مستوی میں کسی مربع لیٹس کے نقاط ہوتے ہیں۔

اب فرض کرو کہ $a + ib , c + id \in \mathbb{Z}[i],\ \forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ہیں۔تب جمع کے عمل کے تحت

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) \in \mathbb{Z}[i]$$

اور اسی طرح ضرب کے عمل کے ساتھ

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad) \in \mathbb{Z}[i]$$

اس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ گوسی صحیح اعداد کا سٹ $\mathbb{Z}[i]$ جمع اور ضرب کے عمل کے تحت بند شی خاصیت کو مطمئن کرتا ہے۔اور اسی وجہ سے $\mathbb{Z}[i]$ ایک رنگ ہے۔

گوسی صحیح اعداد $a + ib$ کا ذوج (Conjugate) $a - ib$ ہوتا ہے جو کہ پھر ایک گوسی صحیح اعداد ہے۔اس کی نارم(Norm) گوسی صحیح اعداد اور اس کے ذوج کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتی ہے۔جیسے

$$\begin{aligned} N(a + ib) &= (a + ib)(a - ib) \\ &= a^2 - (ib)^2 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

دوسرے الفاظ میں کسی گوسی صحیح عدد کی نارم اس کی مطلق قدر کے مساوی ہوتی ہے جو کہ ایک غیر صفری صحیح عدد ہوتا ہے۔

تعریف: کسی گوسی صحیح عدد کے رنگ کی یونٹ یا اکائی (ایسا گوسی صحیح عدد جس کا ضربی معکوس بھی گوسی عدد ہو) ایک گوسی صحیح عدد ہوتی ہے جس کی نارم 1 ہو، جیسے $1, -1, i$ اور $-i$

فرض کرو کہ $h = x + iy$ اور $k = u + iv$ ایک جوڑا گوسی صحیح اعداد ہیں تب

$$\begin{aligned} N(hk) &= N[(x+iy)(u+iv)] \\ &= N[(xu - vy) + i(uy + xv)] \\ &= (xu - vy)^2 + (uy + xv)^2 \\ &= (x^2u^2 - 2xyuv + v^2y^2) + (u^2y^2 + 2xyuv + x^2v^2) \\ &= x^2(u^2 + v^2) + y^2(u^2 + v^2) \\ &= (x^2 + y^2)(u^2 + v^2) \\ &= N(h)N(k) \end{aligned}$$

گوسی مفرد (Gaussian Prime): فرض کرو کہ p کوئی غیر صفری گوسی صحیح عدد اس طرح سے ہے کہ $N(p) \geq 2$ جب کہ p ایک اکائی نہیں ہے۔ تب p گوسی مفرد ہوگا اگر

$$p \mid xy \Rightarrow p \mid x \text{ یا } p \mid y$$

غیر تحویل پذیر (Irreducible): فرض کرو کہ p کوئی غیر صفری گوسی صحیح عدد اس طرح سے ہے کہ $N(p) \geq 2$ جب کہ p ایک اکائی نہیں ہے۔ تب p گوسی غیر تحویل پذیر ہوگا اگر

$$p = xy \Longleftarrow x \text{ یا } y \text{ اکائی ہو۔}$$

اضافی مفرد (Relatively Prime): فرض کرو کہ $\mathbb{Z}[i]$ اکائی عنصر 1 کے ساتھ ایک انٹگرل دامنہ ہے۔ تب $x, y \in \mathbb{Z}[i]$ کو اضافی مفرد اعداد کہتے ہیں اگر ان کا اعظم مشترک قاسم 1 ہو۔ یعنی

$$gcd(x, y) = 1$$

قضیہ: ثابت کرو کہ $\mathbb{Z}[i]$ ایک انٹگرل دامنہ ہوتا ہے۔

ثبوت: ہم جانتے ہیں کہ ہر ایک انٹگرل دامنہ بغیر صفر قاسم کے ایک تقلیبی رنگ ہوتا ہے۔ اور ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ $\mathbb{Z}[i]$ ایک اکائی عنصر کے ساتھ تقلیبی رنگ ہے۔ اس لیے یہاں ہمیں صرف یہ ثابت کرنا ہے کہ یہ بغیر صفر قاسم کے ایک تقلیبی رنگ ہے۔

مان لو کہ $(x + iy).(u + iv) = 0 \in \mathbb{Z}[i]$

تب یا تو $x + iy = 0$ یا $u + iv = 0$ ہونا چاہیے۔

مان لو کہ $x + iy \neq 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 \neq 0$ تب $u + iv = 0$ اس لیے $(x + iy).(u + iv) = 0$

یعنی $x^2 + y^2 \neq 0$

اس لیے

$$\begin{aligned} & (xu - yv) + i(xv + yu) = 0 = 0 + i0 \\ \Rightarrow \quad & xu - yv = 0, xv + yu = 0 \\ \Rightarrow \quad & u = 0, v = 0 \end{aligned}$$

یعنی $u + iv = 0$ حاصل ہوتا ہے۔

اس لیے اگر $(x + iy).(u + iv) = 0$ ہو جب کہ $x + iy \neq 0$ تب $u + iv = 0$ ہوگا۔

اسی طرح اگر $(x + iy).(u + iv) = 0 \in \mathbb{Z}[i]$ ہو جب کہ $u + iv \neq 0$ تب $x + iy = 0$ ہوگا یعنی $(x + iy).(u + iv) = 0$ تب $(x + iy)$، $(u + iv)$ میں سے کوئی ایک صفر ہوگا۔

اس طرح $\mathbb{Z}[i]$ بغیر صفر قاسم کے ایک تقلیبی رنگ ہے۔

اس لیے $\mathbb{Z}[i]$ ایک انٹگرل دامنہ ہوتا ہے۔

قضیہ ثابت ہوا۔

یوکلیڈین رنگ یا یوکلیڈین دامنہ (Euclidean Ring or Euclidean Domain):

فرض کرو کہ R کوئی انٹگرال دامنہ ہے۔ اگر R کے ہر ایک غیر صفری عنصر x کے لیے ہم ایک مثبت صحیح عدد $d(x)$ کو تفویض (Assign) کرتے ہیں جو درجہ ذیل خصوصیات کو مطمئن کرتا ہے

1) ہر ایک $x \neq 0$ کے لیے $d(x)$ ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

2) سبھی $x, y \neq 0$ کے لیے $d(xy) \geq d(x)$

3) کسی $x, y \in R$ اور $y \neq 0$ کے لیے $q, r \in R$ اس طرح سے کہ

$$x = qy + r$$

جہاں $r = 0$ یا $d(y) > d(r)$

قضیہ: گوسی صحیح اعداد کا سٹ ایک اقلیدسی رنگ (Euclidean Ring) ہوتا ہے۔

ثبوت: اس قضیہ کو ثابت کرنے کے لیے ہم ثابت کریں گے کہ

دیے گئے $x, y \in \mathbb{Z}[i]$ کے لیے $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ اس طرح وجود رکھتے ہیں کہ $y = xq + r$ جہاں $r = 0$ یا $d(r) < d(x)$

یہاں ہم سب سے پہلے مان لیتے ہیں کہ $y = a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ ایک اختیاری ہے اور x کوئی مثبت صحیح عدد n ہے۔

صحیح عدد کے رنگ کے لیے حاصل کر سکتے ہیں $a = sn + s_1$ اور $b = tn + t_1$ جہاں s_1 اور t_1 جو $|t_1| \leq \frac{1}{2}n$ اور $|s_1| \leq \frac{1}{2}n$ کو مطمئن کرتا ہے۔

فرض کرو کہ $r = s_1 + t_1 i$ اور $q = s + ti$ تب

$$\begin{aligned} y = a + bi &= (sn + s_1) + (tn + t_1)i \\ &= (s + ti)n + (s_1 + t_1 i) \\ &= qn + r \end{aligned}$$

چوں کہ $d(r) = d(s_1 + t_1 i) = {s_1}^2 + {t_1}^2 \leq \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{4}n^2 < n^2 = d(n)$

اس کیس میں ہم نے دکھایا کہ

$$y = qn + r$$

جب کہ $d(r) < d(n)$ یا $r = 0$

اس لیے تقسیمی الگورتھم ثابت ہوتی ہے

پھر سے مان لو کہ $y, x \neq 0 \in \mathbb{Z}[i]$ اور پہلے کی طرح $y = y\bar{x}$ اور $n = x\bar{x}$ لیتے ہیں جہاں $\bar{x}$ گوسی صحیح عدد x کا زوج (Conjugate) ہے۔ من درجہ بالا ثابت کردہ رزلٹ سے $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ کے لیے، چوں کہ $x \neq 0$ ایک مثبت صحیح عدد ہے اس لیے $d(\bar{x})$ ایک مثبت صحیح عدد ہوگا۔ تب

$$\begin{aligned} & y\bar{x} = q(x\bar{x}) + r \\ & d(r) < d(n) \\ \Rightarrow \quad & d\big(y\bar{x} - q(x\bar{x})\big) < d(x\bar{x}) \\ \Rightarrow \quad & d(y - qx)d(\bar{x}) < d(x)d(\bar{x}) \\ \Rightarrow \quad & d(y - qx) < d(x) \end{aligned}$$

اس لیے

$$y = qx + r$$

جہاں $y - qx = r$ اس لیے $r = 0$ یا $d(r) = d(y - qx) < d(x)$

اس سے ثابت ہوا کہ $\mathbb{Z}[i]$ ایک اقلیدسی رنگ ہے۔

نوٹ: اکائی عنصر کے ساتھ $\mathbb{Z}[i]$ ایک تقلیبی رنگ ہے۔ یہ فیلڈ نہیں ہوتا ہے کیوں کہ $\mathbb{Z}[i]$ میں $1 - i$ کا ضربی معکوس وجود نہیں رکھتا یعنی

$$(1 - i)^{-1} = \frac{1}{1 - i} = \frac{(1 + i)}{(1 + i).(1 - i)} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \notin Z[i]$$

تقسیم پذیری (Divisibility):

فرض کرو کہ $x, y \in \mathbb{Z}[i]$ تب ہم یہ کہیں کہ y کو x تقسیم کرتا ہے $\Leftrightarrow$ تب q اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $y = qx$

یکتا جزو ضربیت پذیر دامنہ (Unique Factorization Domain or UFD)

تعریف: اکائی کے ساتھ انٹگرل دامنہ R یکتا جزوی ضربیت پذیر دامنہ یا گوسی دامنہ کہلاتا ہے اگر

(a) R میں ہر ایک غیر صفری اور غیر اکائی عدد a متناہی تعداد میں R کے غیر تحویل پذیر عناصر کے ضرب کے طور پر ظاہر کیا جاتا ہو۔

(b) اگر $a = p_1 p_2 \dots p_r$ اور $a = q_1 q_2 \dots q_s$ غیر تحویل پذیر عناصر کے ضرب کی دو عبارتیں ہوں، تو $r = s$ اور $\{1,2,3, \dots\}$ کا ایک مبادلہ (Permutation) σ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ ہر ایک $i = 1,2, \dots, r$ کے لیے p_i ، $q_{\sigma\, i}$ کا ایک اسوسی ایٹ ہے، یعنی $p_i's$ اور $q_j's$ کے درمیان ایک تا ایک مطابقت اس طرح ہوتی ہے کہ متناظر عناصر اسوسی ایٹ ہوتے ہیں۔

مثال 1۔ جانچ کرو کہ x کو y تقسیم کرتا ہے یا نہیں؟

i. $y = 3 + 5i, x = 11 - 8i$

ii. $y = 2 - 3i, x = 4 + 7i$

iii. $y = 3 - 39i, x = 3 - 5i$

iv. $y = 3 - 5i, x = 3 - 39i$

حل۔

i. چوں کہ

$$\frac{11-8i}{3+5i} = \frac{11-8i}{3+5i} \times \frac{3-5i}{3-5i}$$
$$= \frac{(11-8i)(3-5i)}{34}$$
$$= \frac{33-79i-40}{34}$$
$$= \frac{-7-79i}{34}$$
$$\Rightarrow (3+5i) \nmid (11-8i)$$

اس لیے x کو y تقسیم نہیں کرتا ہے۔

ii. چوں کہ

$$\frac{4+7i}{2-3i} = \frac{4+7i}{2-3i} \times \frac{2+3i}{2+3i}$$
$$= \frac{(4+7i)(2+3i)}{13}$$
$$= \frac{8+26i-21}{13}$$
$$= \frac{-13+26i}{13}$$
$$= -1+2i$$
$$\Rightarrow (2-3i) \ / \ (4+7i)$$

اس لیے x کو y تقسیم کرتا ہے۔

iii. چوں کہ

$$\frac{3-5i}{3-39i} = \frac{3-5i}{3-39i} \times \frac{3+39i}{3+39i}$$
$$= \frac{(3-5i)(3+39i)}{1530}$$
$$= \frac{9+102i+195}{1530}$$
$$= \frac{204+102i}{1530}$$
$$= \frac{2+i}{15}$$
$$\Rightarrow (3-39i) \nmid (3-5i)$$

اس لیے x کو y تقسیم نہیں کرتا ہے۔

iv. چوں کہ

$$\frac{3-39i}{3-5i} = \frac{3-39i}{3-5i} \times \frac{3+5i}{3+5i}$$
$$= \frac{(3-39i)(3+5i)}{34}$$
$$= \frac{9-102i+195}{34}$$
$$= \frac{204-102i}{34}$$
$$= 6-3i$$
$$\Rightarrow (3-5i) \ / \ (3-39i)$$

اس لیے x کو y تقسیم کرتا ہے۔

تقسیمی الگورتھم (Division algorithm):

فرض کرو کہ $x, y \in \mathbb{Z}[i]$ جب کہ $y \neq 0$ تب $\mathbb{Z}[i]$ میں q, r اس طرح وجود رکھتے ہیں کہ

$$x = yq + r$$

اور

$$N(r) < N(y)$$

ثبوت۔ چوں کہ $N\left(\frac{r}{y}\right) = \frac{N(r)}{N(y)}$، اب ہمیں r اس طرح سے حاصل کرنا ہے کہ $N\left(\frac{r}{y}\right) < 1$

چوں کہ $N(h) < |h|^2$ ہوتا ہے، اس لیے

$$\frac{r}{y} = \frac{x}{y} - q$$

اس سے ہم q کی قدر $\frac{x}{y}$ کی دوری 1 کے درمیان ہی حاصل کر سکتے ہیں۔ جیسا کہ ہم جانتے ہیں کہ گوسی صحیح اعداد ملتف مستوی میں یکساں جگہ کے لیٹس کو تشکیل دیتے ہیں اس لیے اب فرض کرو کہ q اس طرح سے ہے کہ

$$r = x - qy$$

جب کہ

$$N(r) = N(x - qy) = N\left(\frac{x}{y} - q\right) N(y) < N(y)$$

مثال 2۔ اگر $x = 4 + 5i$ اور $y = 3$ تب $\frac{x}{y} = \frac{4+5i}{3}$ چار گوسی صحیح اعداد کی اکائی دوری کے اندر ہے۔ یہاں $N(y) = 9$ اور ہم تقسیمی الگورتھم کو چار طریقوں سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$4 + 5i = 3(1 + 2i) + (1 - i) N(r) = 2$$
$$= 3(2 + 2i) + (-2 - i) N(r) = 5$$
$$= 3(1 + i) + (1 + 2i) N(r) = 5$$
$$= 3(2 + i) + (-2 + 2i) N(r) = 8$$

مثال 3۔ اگر $x = 2 + 7i$ اور $y = 1 + 2i$ تب $\frac{x}{y} = \frac{2+7i}{1+2i} = \frac{2+7i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{16+3i}{5}$

اب

$$x = yq + r$$

اس لیے

$$N(r) = N(1) = 1 < 5 = N(y)$$

$$\Longrightarrow \qquad N(r) = N(y)$$

ان کے علاوہ دو اور گوسی صحیح اعداد $\frac{x}{y}$ کی اکائی دوری کے قریب ہی وجود رکھتے ہیں۔ جو کہ اس طرح ہیں:

$$2 + 7i = (1 + 2i)3 + (-1 + i) \qquad N(r) = 2$$
$$= (1 + 2i)(4 + i) - 2i \qquad N(r) = 4$$

اعظم مشترک قاسم(Greatest Common Divisor)

اعظم مشترک قاسم اور یکلڈ الگورتھم کی تفصیلی وضاحت دوسرے اعداد کی طرح ہی کی جاسکتی ہے۔

تعریف: دیا ہے $a, b \in \mathbb{Z}[i]$ اور فرض کرو کہ $S = \{ka + \lambda b : k, \lambda \in \mathbb{Z}[i]\}$ ان سبھی غیر صفری عناصر کا سٹ ہے جن کی نارم قلیل ہو۔ تب a اور b کا اعظم مشترک قاسم d سٹ S کا ایک عنصر ہے۔ ہم علامت $d = gcd(a, b)$ کا استعمال a اور b کے اعظم مشترک قاسم کے لیے کریں گے۔

مثال کے لیے اگر ہم $b = 2 + i$ اور $a = i$ کو لیں تو ہم دیکھتے ہیں کہ

$$1 = (2 + i)(1 + i) - 3i \in S$$

چوں کہ ایسا کوئی عنصر 1 کو چھوڑ کر وجود نہیں رکھتا ہے جس کی نارم کم تر ہو، اس لیے دیے گئے a اور b کا اعظم مشترک قاسم 1 ہو گا۔

اعظم مشترک قاسم کی چند خصوصیات:

فرض کرو کہ a اور b کا اعظم مشترک قاسم d ہے، تب

1) مشترکہ قاسم(Common Divisor): d دونوں a اور b کو تقسیم کرتا ہے۔
2) عظیمیت(Maximality): a اور b کے ہر مشترکہ قاسم d کو تقسیم کرتا ہے اور ان سبھی میں d کی نارم اعظم ہو گی۔
3) $S = \{\mu d : \mu \in \mathbb{Z}[i]\}$ خاص طور پر $\pm d$ اور $\pm di$ اعظم مشترک قاسم ہیں۔

یکلڈ الگورتھم(Euclid's Algorithm):

فرض کرو کہ $x, y \in \mathbb{Z}[i]$ دو غیر صفری عناصر ہیں۔ تقسیمی قضیہ کو بار بار لاگو کرتے ہوئے، x, y سے شروع کرتے ہیں اور پھر اس حاصل قاسم اور باقی(Remainder) کو بالترتیب مقسوم(Dividend) اور قاسم(Divisor) کے طور پر ایک مساوات میں رکھتے ہیں بشرط یہ کہ باقی صفر نہ ہو اور اسی طرح آخری غیر صفر باقی x, y کے سبھی مشترکہ قاسموں سے تقسیم پذیر ہے اور اس لیے یہ x, y کا سب سے بڑا مشترکہ قاسم ہے۔ ریاضیاتی طور پر اسے درجہ ذیل طریقہ سے ظاہر کرتے ہیں

$$a = bc_1 + r_1$$
$$b = r_1c_2 + r_2$$
$$r_1 = r_2c_3 + r_3$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

چوں کہ اس قضیہ کو صحیح اعداد کے لیے ثابت کیا جا چکا ہے اس لیے یہاں ہم اس کو ثابت نہیں کریں گے۔

مثال4۔ $4 + i$ اور 3 کا اعظم مشترک قاسم حاصل کرو۔

حل۔ فرض کرو کہ $x = 4 + i$ اور $y = 3$ اب

کسر $\frac{x}{y} = \frac{4+i}{3}$ کی قدر، گوسی صحیح اعداد $1, 2, 1 + i, 2 + i$ کی اکائی دوری کے درمیان ہے۔اس لیے

$$4 + i = 1 \cdot 3 + (1 + i), \qquad N(r) = 2 < 9 = N(y)$$

$$3 = (1 - i)(1 + i) + 1 \qquad N(r) = 1$$

اب اعظم مشترک قاسم حاصل کرنے کے لیے الٹی سمت میں

$$gcd(4 + i, 3) = 1 = 3 - (1 - i)(1 + i) = 3 - (1 - i) \qquad \text{.....(1)}$$

اس کے ساتھ ساتھ

$$4 + i = 2 \cdot 3 + (i - 2) \qquad N(r) = 5$$

$$3 = (-1 - i)(i - 2) + (-i) \qquad N(r) = 1$$

مساوات(1) میں $i-$ سے ضرب دے کر حاصل ہے

$$\begin{aligned} gcd(4 + i, 3) = -i &= 3 + (1 + i)(i - 2) \\ &= 3 + (1 + i)(4 + i - 2 \cdot 3) \\ &= (-1 - 2i) \cdot 3 + (1 + i)(4 + i) \end{aligned}$$

مثال5۔ $x = 7 + 17\ i$ اور $y = 8 - 14\ i$ کا اعظم مشترک قاسم حاصل کیجیے۔

حل۔ سب سے پہلے تقسیمی الگورتھم لگاتے ہیں

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{7 + 17\ i}{8 - 14\ i} \\ &= \frac{7 + 17\ i}{8 - 14\ i} \times \frac{8 + 14\ i}{8 + 14\ i} \\ &= \frac{56 + 136i + 98i - 238}{64 + 196} \\ &= \frac{26(-7 + 9i)}{260} \\ &= \frac{-7 + 9i}{10} \end{aligned}$$

اس لیے ہم $y = -1 + i$ کو منتخب کرتے ہیں

$$\Rightarrow 7 + 17i = (-1 + i)(8 - 14i) + 1 - 5i$$

ایک بار پھر تقسیمی الگورتھم کا استعمال کرنے پر

$$\frac{8 - 14i}{1 - 5i} = \frac{8 - 14i}{1 - 5i} \times \frac{1 + 5i}{1 + 5i}$$

$$= \frac{(8 - 14i)(1 + 5i)}{26}$$

$$\ldots\ldots(1) = 3 + i$$

$$\Rightarrow gcd(7 + 17i, 8 - 14i) = 1 - 5i$$

مساوات(1) سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$8 - 14i = (3 + i)(1 - 5i)$$

$$\Rightarrow 7 + 17i = \frac{(-7 + 9i)(8 - 14i)}{10}$$

$$= \frac{\{(-7 + 9i)(3 + i)\}(1 - 5i)}{10}$$

$$= \frac{(-30 + 20i)(1 - 5i)}{10}$$

$$= (-3 + 2i)(1 - 5i)$$

$$\Rightarrow gcd(7 + 17i, 8 - 14i) = 1 - 5i$$

2.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی کو مکمل کرنے پر آپ نے:

- تقسیم پذیر گوسی صحیح اعداد کے بارے میں پڑھا۔
- تقسیم پذیر گوسی صحیح اعداد پر چند مثالوں کو حل کیا۔
- یکڈا الگورتھم کے بیان کو سمجھا۔

2.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

گوسی صحیح اعداد، تقسیم پذیری، عظیمیت، یکڈا الگورتھم، اقلیدسی دامنہ، اقلیدسی رنگ

2.5 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

2.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. گوسی صحیح اعداد کی تعریف کرو۔
2. گوسی صحیح اعداد کی تقسیم پذیری سے آپ کیا سمجھتے ہو۔
3. $x = 3 - 39i$ کو $y = 3 - 5i$ تقسیم کرتا ہے۔ (T/F)
4. گوسی مفرد(Gaussian prime)کی تعریف کرو۔
5. اضافی مفرد کی تعریف کرو۔

2.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

جانچ کرو کہ x کو y تقسیم کرتا ہے یا نہیں؟

1. $y = 1 + 3i, x = 7 + i$
2. $y = 1 + 3i, x = 4 + i$
3. ثابت کرو کہ $N(xy) = N(x)N(y), \forall x, y \in \mathbb{Z}[i]$
4. یکڈالگور تھم کو بیان کرو۔
5. گوسی صحیح اعداد q, r حاصل کرو جو $x = yq + r$ کو مطمئن کرتے ہوں جب کہ $N(r) \leq \frac{1}{2}N(y)$
6. $y = 2i, x = 3 + i$ کے لیے اعظم مشترک قاسم حاصل کرو۔
7. $y = 3 + 5i, x = 11 - 8i$ کے لیے اعظم مشترک قاسم حاصل کرو۔

2.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات(Long Answer Type Questions)

1. ثابت کرو کہ $\mathbb{Z}[i]$ ایک انٹگرل دامنہ ہوتا ہے۔
2. ثابت کرو کہ گوسی صحیح اعداد کا سٹ ایک اقلیدسی رنگ ہوتا ہے۔

اکائی 3۔ پریمیٹو کثیر رکنیاں اور ان کی خصوصیات

(Primitive Polynomials and their Properties)

اکائی کے اجزا

3.0	تمہید
3.1	مقاصد
3.2	پریمیٹو کثیر رکنی
3.2.1	پریمیٹو کثیر رکنیوں کی چند مثالیں اور نظریات
3.3	اکتسابی نتائج
3.4	کلیدی الفاظ
3.5	نمونہ امتحانی سوالات
3.5.1	معروضی جوابات کے حامل سوالات
3.5.2	مختصر جوابات کے حامل سوالات
3.5.3	طویل جوابات کے حامل سوالات

3.0 تمہید (Introduction)

اس اکائی میں طلبا پریمیٹو کثیر رکنی اور اس سے متعلق کئی مثالیں اور چند نظریات کے بارے میں جانکاری حاصل کریں گے۔

3.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ سب اس قابل ہو جائیں گے کہ:

1. پریمیٹو کثیر رکنی اور دوسری کثیر رکنیوں میں فرق کر سکیں۔
2. پریمیٹو کثیر رکنی کے مسائل حل کر سکیں اور
3. پریمیٹو کثیر رکنیوں کے نظریات کی مدد سے کچھ مسائل حل کر سکیں۔

3.2 پریمیٹو کثیر رکنی (Primitive Polynomial)

3.2.1 پریمیٹو کثیر رکنیوں کی مثالیں اور نظریات

(Examples of Primitive Polynomials and Theorems)

تعریف: ایک کثیر رکنی $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$ پریمیٹو کثیر رکنی کہلاتی ہے اگر

$$g.c.d.(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n) = 1$$

ہو، جہاں $g.c.d.$ اعظم مشترک قاسم ہے۔

مثال۔ $f(x) = 2 + 3x + 4x^2$ ایک پریمیٹو کثیر رکنی ہے، چوں کہ $g.c.d.(2,3,4) = 1$ ہے۔

تعریف: کثیر رکنی کا کنٹینٹ اگر $f(x)$ (Content of a Polynomial)، $R[x]$ کی غیر صفر کثیر رکنی ہے، تب $f(x)$ کے سروں (Coefficients) کی gcd کو $f(x)$ کا کنٹینٹ (Content) کہتے ہیں اور اسے $c(f(x))$ یا $c(f)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 1۔ بتلاؤ کہ $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ اور $g(x) = x^2 + 2$ کا حاصل ضرب ایک پریمٹیو کیثر رکنی ہے۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ اور $g(x) = x^2 + 2$

$$\begin{aligned} \therefore f(x).g(x) &= (2x^2 + 3x + 1)(x^2 + 2) \\ &= 2x^4 + 4x^2 + 3x^3 + 6x + x^2 + 2 \\ &= 2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 6x + 2 \end{aligned}$$

اور $f(x).g(x)$ کا کنٹینٹ (content)

$$c(fg) = g.c.d(2,3,5,6,2) = 1$$

$\Leftarrow f(x).g(x)$ پریمٹیو کیثر رکنی ہے۔

مثال 2۔ فرض کرو کہ $f(x) = 3 + 6x + 9x^3 \in \mathbb{Z}[x]$ ہے۔

تب $c(f) = g.c.d(3,6,9) = 3$ ایک غیر صفر کثیر رکنی $f(x) \in R[x]$ پریمٹیو کثیر رکنی (Primitive Polynomial) کہلاتی ہے اگر $c(f) = 1$ ہو۔ چوں کہ $c\ f\ = 3 \neq 1$ ہے اس لیے $f(x)$ پریمٹیو کثیر رکنی نہیں ہے۔

مونک کثیر رکنی (Monic Polynomial)

ایک کثیر رکنی $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$ مونک (monic) کثیر رکنی کہلاتی ہے اگر $a_n = 1$ ہو۔

نوٹ: تمام مونک کثیر رکنیاں پریمیٹو ہوں گے۔ مثلاً $f(x) = 2 + 4x + 6x^2 + x^3$ ایک مونک کثیر رکنی ہے اور چوں کہ $g.c.d.(2,4,6,1) = 1$ اس لیے $f(x)$ پریمیٹو کثیر رکنی بھی ہوگا۔ اس کا معکوس درست نہیں ہے اس کو ہم ذیل کی مثال سے جان سکتے ہیں۔

مثال 3۔ $g(x) = 2x + 3x^2 + 4x^3$ پریمیٹو ہے لیکن مونک نہیں ہے (چوں کہ $a_3 = 4 \neq 1$)

غیر تحویل پذیر کثیر رکنی (Irreducible Polynomial):

تعریف: ایک کثیر رکنی $f(x) \in F[x]$ جس کی ڈگری 1 سے بڑھ کر ہے F پر غیر تحویل پذیر کہلاتی ہے اگر

$$f(x) = g(x) \cdot h(x)$$

ہو، جہاں $g(x), h(x) \in F[x]$ ہو۔

$$\Longrightarrow \qquad g(x) \text{یا} h(x) \in F$$

یعنی $deg(g(x)) = 0$ یا $deg(h(x)) = 0$ ہوگا ($g(x)$ یا $h(x)$ سے کوئی ایک F میں مستقل ہے)۔

مثال 4۔ $f(x) = x^2 - 3 \in \mathbb{Q}[x]$، $\mathbb{Q}$ پر غیر تحویل پذیر ہے اور $\mathbb{R}$ میں تحویل پذیر ہے چوں کہ

$$x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

اور $x \pm \sqrt{3} \in \mathbb{R}[x]$ ہے۔

نظریہ: $R[x]$ کے دو پریمیٹو کثیر رکنیوں کا حاصل ضرب بھی پریمیٹو کثیر رکنی ہوگی۔

ثبوت۔ فرض کرو کہ $R[x]$ میں

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

اور

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$$

جہاں $a_n \neq 0$، $b_m \neq 0$ ہیں۔

اگر $n = 0$ ہو، تب $f(x) = a_0 \neq 0$، $\mathbb{R}$ کی یونٹ ہے اور $g.c.d.(f(x)g(x)) = g.c.d.(g(x)) = 1$

اس لیے $f(x)g(x)$ بھی پریمیٹو کثیر رکنی ہے۔

اسی طرح اگر $m = 0$ ہو تب بھی $f(x)g(x)$ پریمیٹو ہوگا۔

فرض کرو کہ $m, n \geq 1$ ہیں۔ ہمیں بتلانا ہے کہ $g.c.d.\big(f(x)g(x)\big) = 1$ ہو گا۔

تب ہم $f(x)g(x)$ کو پریمیٹو کہہ سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ p، $f(x)g(x)$ کے سروں کے $g.c.d.$ کا ایک جزضربی (Factor) ہے چوں کہ $f(x)$ پریمیٹو ہے p،

$a_j (j = 0,1,2,\cdots,n)$ کو تقسیم نہیں کر سکتا ہے۔ فرض کرو کہ a_j، $f(x)$ کا پہلا سر ہے جو p سے ناقابلِ تقسیم ہے اور اسی طرح فرض کرو کہ b_k، $g(x)$ کا پہلا سر ہے جو P سے تقسیم نہیں ہو سکتا ہے۔

ہمیں معلوم ہے کہ

$$f(x)g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n + \cdots + c_{m+n}x^{m+n}$$

جہاں $c_0 = a_0b_0$، $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \cdots + a_nb_0, \forall n = 0,1,2,\cdots,m+n$ ہیں۔

حاصل ضرب $f(x)g(x)$ میں x^{j+k} کا سر

$$c_{j+k} = a_0b_{j+k} + a_1b_{j+k-1} + a_2b_{j+k-2} + \cdots + a_{j-1}b_{k+1} + a_jb_k + a_{j+1}b_{k-1} + \cdots + a_{j+k}b_0$$

جس طرح سے j اور k لیے گئے ہیں اس حساب سے $p/a_s, \forall s < j$ اور $P/b_r, \forall r < k$

$$p/a_{j+1}b_{k-1} + a_{j+2}b_{k-2} + \cdots + a_{j+k}b_0$$

اور

$$p/a_0b_{j+k} + a_1b_{j+k-1} + \cdots + a_{j-1}b_{k+1}$$

چوں کہ

$$p/a_jb_k \Longrightarrow p/g.c.d.(\text{سر کے } f(x)g(x))$$

اس لیے p/b_k یا p/a_j

جو کہ a_j اور b_k کی تعریف کے خلاف ہے۔ اس لیے $g.c.d.$ ($f(x)g(x)$ کے سروں) ایک مفرد عدد تقسیم نہیں کر سکتا ہے۔ اس لیے

$$g.c.d.\Big(\text{سروں کے } f(x)g(x)\Big) = 1$$

اس لیے $f(x), g(x)$ پریمیٹو کثیر رکنی ہے۔

مثال 5۔ $f(x) = 2 + 3x + 4x^2, g(x) = 5x + 7 \in \mathbb{Z}[x]$ دو پریمیٹو کثیر رکنیاں ہیں اور ان کا حاصل ضرب

$$f(x)g(x) = 14 + 31x + 43x^2 + 20x^3$$

بھی پریمیٹو ہے اس لیے کہ $g.c.d.(14,31,43,20) = 1$

مثال 6۔ $f(x) = 3 + 4x + 7x^2, g(x) = 8 + 7x^2 + 9x^3$، یہاں $g.c.d.(3,4,7) = 1$ اور $g.c.d.(8,7,9) = 1$

اس لیے $f(x)g(x)$ دونوں پریمیٹو کثیر رکنیاں ہیں اور

$$f(x)g(x) = (3 + 4x + 7x^2)(8 + 7x^2 + 9x^3) = 24 + 32x + 77x^2 + 55x^3 + 85x^4 + 63x^5$$

یہاں $g.c.d.(24,32,77,55,85,63) = 1$

اس لیے $f(x)g(x)$ پریمیٹو کثیر رکنی ہے۔

نتیجے(Results):

1. فرض کرو کہ F ایک فیلڈ ہے تب $f(x) \in F[x]$، F پر تحویل پذیر ہوگا اگر $f(x)$ کا F میں ایک ریشہ(Root) α ہو یعنی $f(\alpha) = 0$ ہو۔
2. $f(x) \in F[x]$، F پر تحویل پذیر ہوگا $\iff$ $f(x)$ کا ایک ریشہ α، F میں ہو($deg(f(x)) = 3$ یا 2 ہے)۔

گاؤس لیما(Gauss Lemma)

فرض کرو کہ $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ایک پریمیٹو کثیر رکنی ہے تب $f(x)$، $\mathbb{Q}$ پر تحویل پذیر ہوگا $\iff$ $f(x)$ تحویل پذیر ہے $\mathbb{Z}$ پر۔

ثبوت۔ دیا گیا ہے کہ $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ایک پریمیٹو کثیر رکنی ہے۔

فرض کرو کہ $f(x)$، $\mathbb{Q}$ پر تحویل پذیر ہے۔

ہمیں بتلانا ہے کہ $f(x)$، $\mathbb{Z}$ پر بھی تحویل پذیر ہوگا۔

چوں کہ $f(x)$، $\mathbb{Q}$ پر تحویل پذیر ہے۔ $g(x), h(x) \in \mathbb{Q}[x]$

اس طرح وجود رکھتے ہیں کہ $f(x) = g(x).h(x)$

اور $deg(g(x)), deg(h(x)) > 0$ ہے۔

فرض کرو کہ

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$$

اور

$$h(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$$

جہاں $a_j's, b_j's \in \mathbb{Q}$ ہیں۔

ہم $f(x)$ کو ذیل کی شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں

$$f(x) = g(x).h(x) = \frac{a}{b}u_1(x).u_2(x), \qquad a, b \in \mathbb{Z}$$

اور $u_1(x), u_2(x) \in \mathbb{Z}[x]$ پریمیٹو کثیر رکنی ہیں۔ اس لیے

$$bf(x) = au_1(x).u_2(x) \qquad \text{.....(1)}$$

چوں کہ $u_1(x), u_2(x)$ پریمیٹو ہیں اور $f(x)$ پریمیٹو ہے۔ اگر دونوں جانب $g.c.d.$ لیں تو حاصل ہوگا

$$b \times 1 = \pm a \cdot 1$$
$$\therefore b = \pm a$$
$$\pm af(x) = au_1(x).u_2(x)$$
$$f(x) = \pm u_1(x).u_2(x)$$

جہاں $u_1(x), u_2(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ہے۔ اس لیے $f(x)$، $\mathbb{Z}$ پر تحویل پذیر ہے۔

معکوس(Converse): چوں کہ $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ اور $\mathbb{Z}[x] \subseteq \mathbb{Q}[x]$

تمام کثیر رکنیاں جو $\mathbb{Z}$ میں تحویل پذیر ہیں $\mathbb{Q}$ میں بھی تحویل پذیر ہوں گی۔

کورولری(Corollary): اگر ایک پریمیٹو کثیر رکنی $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ کا ریشہ $\mathbb{Q}$ میں ہو تب $f(x)$ کا ریشہ $\mathbb{Z}$ میں ہی ہے۔

ثبوت۔ فرض کرو کہ α پریمیٹو کثیر رکنی $f(x)$ کا ایک ریشہ $\mathbb{Q}$ میں ہے۔ تب

$$f(x) = (x-\alpha)g(x)$$

اگر $deg(f(x)) = n$ ہو تب $deg(g(x)) = n-1$ ہے یہاں $\alpha \in \mathbb{Q}$ اور $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ ہے۔

اس لیے $f(x)$، $\mathbb{Q}$ پر تحویل پذیر ہے۔

چوں کہ $f(x)$ پریمیٹو ہے، گاوس لیما کی مدد سے $\mathbb{Z}$ پر $f(x)$ تحویل پذیر ہے۔ اس لیے

$$\beta \in \mathbb{Z} \ni f(x) = (x-\beta)h(x)$$

اور $h(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ہے۔

نوٹ: ایک کثیر رکنی $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$، $\mathbb{Z}$ پر تحویل پذیر ہے اگر $f(x)$ کا ایک ریشہ $\mathbb{Z}$ میں ہو۔ ہر غیر تحویل پذیر کثیر رکنی $\mathbb{Z}$ پر پریمیٹو کثیر رکنی ہے۔

نتیجہ 1۔ فرض کرو $f(x), g(x)$، $\mathbb{Z}[x]$ کے دو پریمٹیو کثیر رکنیاں ہیں۔ اگر $c_1 \neq 0,\ c_2 \neq 0 \ \in \mathbb{Z}$ اس طرح ہیوں کہ $c_1 f(x) = c_2 g(x)$ تب $c_1 = \pm c_2$ اور $f(x) = \pm g(x)$ ہوں گے۔

ثبوت: فرض کرو کہ $(a_n \neq 0) \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ تب $\text{g.c.d}(a_0, a_1, \ldots a_n) = 1$ اور $t_0, t_1, \ldots t_n \in \mathbb{Z}$ اس طرح ہیں کہ $t_0 a_0 + t_1 a_1 + \ldots + t_n a_n = 1$ چونکہ $c_1 f(x) = c_2 g(x)$

$$c_2 / \ t_0\, c_1 a_0 + t_1 c_1 a_1 + \ldots + t_n c_1 a_n \text{ اس طرح } c_2 \ / \ c_1 a_0, c_1 a_1, \ldots c_1 a_n$$
$$\Rightarrow c_2 / \ c_1 (t_0\, a_0 + t_1 a_1 + \ldots + t_n a_n) = c_1$$

اسی طرح c_1 / c_2

$$\therefore c_1 / c_2 \ \& \ \ c_2 / c_1 \ \Rightarrow c_1 = \pm c_2$$
$$\Rightarrow f(x) = \pm g(x)$$

نوٹ: (1) کوئی بھی غیر صفر کثیر رکنی $f(x)$ کو ایک غیر صفر اسکیلار (Scalar) اور ایک پریمٹیو کثیر رکنی کے حاصل ضرب میں لکھا جا سکتا ہے چوں کہ $\frac{f(x)}{c(f)}$ پریمٹیو ہے اور $c(f)$ ایک غیر صفر اسکیلر ہے۔

(2) ہر غیر تحویل پزیر (Irreducible) کثیر رکنی پریمٹیو کثیر رکنی ہے۔

نتیجہ 2۔ فرض کرو $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ اور $\deg(f(x)) = n \ \ (n > 0)$ فرض کرو کہ $f(x)$، $\mathbb{Z}[x]$ کے درجہ 'r' اور 's' والے کثیر رکنیوں کا حاصل ضرب نہیں ہے۔ $(0 < r < n,\ 0 < s < n,\ \ r + s = n)$ تب $f(x)$، $Q[x]$ کے درجہ 'r' اور 's' والے کثیر رکنیوں کا بھی حاصل ضرب نہیں ہو سکتا۔

ثبوت: دیا گیا ہے کہ $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ اور $\deg(f(x)) = n$ یہ بھی دیا گیا ہے کہ $\mathbb{Z}[x]$ کے درجہ 'r' اور 's' کے دو کثیر رکنیوں کا حاصل ضرب $f(x)$ نہیں ہو سکتا ہے۔

ہمیں بتلانا ہے کہ $f(x) \neq g(x).h(x)$

جہاں $g(x), h(x) \in Q[x]$ درجہ 'r' اور 's' والے کثیر رکنیوں ہیں۔

$$\Rightarrow f(x) = c_0 f_0(x), \quad g(x) = \frac{c_1}{d_1} g_0(x)$$

اور $h(x) = \frac{c_2}{d_2} h_0(x)$ ہوں گے جہاں $f_0(x)\ ,g_0(x)\ ,\ h_0(x)$ $\mathbb{Z}[x]$ کے Primitive کثیر رکنیوں ہیں اور

$$c_0\ ,c_1,\ c_2,\ d_1,\ d_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\text{تب } c_0 f_0(x) = \frac{c_1}{d_1} g_0(x)\ .\frac{c_2}{d_2} h_0(x)$$

$$\Rightarrow c_0\, d_1\, d_2 f_0(x) = c_1\, c_2 g_0(x)\ h_0(x)$$

گاوس لیما کی مدد سے ہمیں معلوم ہے کہ $g_0(x)\ h_0(x)$ Primitive ہے اور اوپر دے گیے نتیجہ سے $c_0\, d_1\, d_2 = \pm c_1\, c_2$ ہوگا۔

$$\Rightarrow f_0(x) = g_0(x)\ h_0(x)$$

جہاں $h_0(x) \in \mathbb{Z}[x]$، $g_0\ x$ درجہ 'r' اور 's' والے کثیر رکنیاں ہیں۔

$$\Rightarrow f(x) = c_0 f_0(x) = c_0 g_0(x)\, h_0(x)$$

جو کہ صحیح نہیں ہے اس لیے $f(x)$ کو $Q[x]$ کے درجہ 'r' اور 's' والے کثیر رکنیوں کے حاصل ضرب میں نہیں لکھا جا سکتا ہے۔

مثال 7۔ $f(x) = 8x^3 + 4x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ ایک پریمٹیو کثیر رکنی ہے اور $g(x) = 8x^3 + 4x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$ پریمٹیو کیشر رکنی نہیں ہے چوں کہ

$$c(f) = g.c.d(8,4,1) = 1$$

اور

$$c(g) = g.c.d(8,4,2) = 2$$

چوں کہ

$$g(x) = 2(4x^3 + 2x + 1) = 2g_1(x)$$

جہاں $g_1(x) = 4x^3 + 2x + 1$ پریمٹیو کثیر رکنی ہے اس لیے یہ ممکن ہے کہ

$$g(x) = 2g_1(x)$$

اور $g_1(x)$ پریمٹیو کثیر رکنی ہے۔

نظریہ۔ اگر $f(x) \in R[x]$ ایک غیر صفر کثیر رکنی ہے جہاں R ایک UFD ہے تب $f(x) = df_1(x)$ ہوگا، جہاں $f_1(x)$ پریمٹیو کثیر رکنی اور $d = c(f)$

ثبوت۔ فرض کرو کہ $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ ہے اور فرض کرو کہ

$$c(f) = d = g.c.d.(a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

تب $d/a_i \ \forall i$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & a_i = du_i \\ & f(x) = du_0 + du_1x + du_2x^2 + \ldots + du_nx^n \\ & \quad = d(u_0 + u_1x + u_2x^2 + \ldots + u_nx^n) \\ & \quad = df_1(x) \end{aligned}$$

اور $f_1(x)$ ایک پریمٹیو کثیر رکنی ہے۔

نظریہ۔ اگر $f(x).g(x)$، $R[x]$ کی ایک پریمٹیو کثیر رکنی ہے، R ایک UFD تب $g(x)$، $f(x)$ بھی پریمٹیو کثیر رکنیاں ہوں گے۔

ثبوت۔ دیا گیا ہے کہ $f(x).g(x) \in R[x]$ ایک پریمٹیو کثیر رکنی ہے اور R ایک UFD ہے، تب $c\big(f(x).g(x)\big)$ ایک یونٹ (Unit) ہے۔

$\Longleftarrow$ ایک $k \in R$ اس طرح ہوگا کہ $c(f.g).k = 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & c(f)c(g).k = 1 \\ \Rightarrow \quad & c(f)(c(g).k) = 1 \end{aligned}$$

$\Longleftarrow c(f)$ ایک یونٹ (Unit) ہے۔

$\Longleftarrow f$ ایک پریمٹیو کثیر رکنی ہوگا۔

اسی طرح اگر یونٹ $\Longleftarrow g$ ایک پریمٹیو کثیر رکنی ہے۔

اس طرح اگر $f(x).g(x)$ ایک پریمٹیو کثیر رکنی ہو تب $g(x)$ اور $f(x)$ بھی پریمٹیو کثیر رکنیاں ہوں گے۔

نتیجے (Results):

1. اگر R ایک UFD ہے تب ہر $f(x) \in R[x]$، $R[x]$ کا غیر تحویل پذیر عنصر ہوگا $\Longleftrightarrow f$، R کا غیر تحویل پذیر عنصر یا $R[x]$ کی غیر تحویل پذیر پریمٹیو کثیر رکنی ہے۔
2. اگر R ایک UFD ہے اور $p(x) \in R[x]$ ایک پریمٹیو کثیر رکنی ہے تب $p(x)$ کو یکتا طور پر $R[x]$ کے غیر تحویل پذیر عناصر کے حاصل ضرب میں لکھا جا سکتا ہے۔

نظریہ۔ اگر R ایک UFD ہے تب $R[x]$ بھی UFD ہوگا۔

ثبوت۔ دیا گیا ہے کہ R ایک UFD ہے۔ فرض کرو کہ $f(x) \neq 0 \in R[x]$ یونٹ نہیں ہے اور $f(x) = df'(x)$ جہاں $d = c(f)$ اور $f'(x)$ ایک پریمٹیو کثیر رکنی ہے۔

اوپر دیے گئے نتیجہ کی مدد سے

$$f'(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots f_k(x)$$

یکتا طور پر $R[x]$ کے غیر تحویل پذیر عناصر کے حاصل ضرب میں لکھ سکتے ہیں۔

چوں کہ $d \in R$ اور R ایک UFD ہے، d یونٹ ہوگا یا $d = d_1 d_2 \cdots d_r$ جہاں ہر d_i، R کا غیر تحویل پذیر عنصر ہے۔

اگر d یونٹ ہو تب $f(x) = df'(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= df_1(x) \cdot f_2(x) \cdots f_k(x) \\ &= \big(df_1(x)\big) \cdot f_2(x) \cdots f_k(x) \end{aligned}$$

اور $df_1, f_2, \cdots, f_k$، $R[x]$ کے غیر تحویل پذیر عناصر ہیں۔

اگر d یونٹ نہیں ہے تب $d = d_1 d_2 \cdots d_r$ اور چوں کہ ہر d_i، R کا غیر تحویل پذیر عنصر ہے۔ ہر d_i، $R[x]$ کا بھی غیر تحویل پذیر عنصر ہوگا۔ اس طرح $f(x) = d_1 d_2 \cdots d_r f_1 f_2 \cdots f_k$ ہوگا جس سے اس نظریہ کا ثبوت مکمل ہوگا۔

3.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی کو پڑھنے کے بعد آپ نے پریمیٹو کثیر رکنی، ان کی چند مثالوں کے بارے میں جانکاری حاصل کی ہوگی۔ نیز اس سے متعلق نظریات کو جان کر چند مسائل حل کیے ہوں گے۔

3.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

کثیر رکنی، پریمیٹو کثیر رکنی، گاوس لیما، ریشہ

3.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

3.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. پریمیٹو کثیر رکنی کی ایک مثال دو۔
2. ہر مونک کثیر رکنی پریمیٹو کثیر رکنی ہوگی۔ (T/F)
3. ذیل کی کون سی کثیر رکنی پریمیٹو ہے؟

(A) $2 + 4x + 8x^2$ (B) $2 + 5x + 7x^2$ (C) $2x + 8x^3$ (D) ان میں سے کوئی بھی نہیں

4. $6 + 2x + 8x^2 + 12x^3$، $\mathbb{Q}[x]$ میں پریمیٹو کثیر رکنی ہے۔ (T/F)
5. $x^2 + 2x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ پریمیٹو ہے لیکن $\mathbb{Z}$ میں غیر تحویل پذیر ہے۔ (T/F)

3.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. ایک مثال کے ذریعے بتلاو کہ دو پریمیٹو کثیر رکنیوں کا حاصل ضرب بھی پریمیٹو کثیر رکنی ہوگا۔
2. پریمیٹو کثیر رکنی کی تعریف کرو۔ اس کی دو مثالیں دو۔
3. بتلاو کہ ہر مونک کثیر رکنی پریمیٹو ہوتی ہے اور اس کا معکوس درست نہیں ہے۔
4. ذیل میں سے کون سی کثیر رکنیاں پریمٹیو ہیں:

i. $5x^3 - 5x + 10$

ii. $x^4 - 3x^2 + 9$

iii. $2x^5 - 5x^4 + 5$

3.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. ثابت کرو کہ دو پریمیٹو کثیر رکنیوں کا حاصل ضرب بھی پریمیٹو کثیر رکنی ہے۔
2. گاوس لیما کو بیان اور ثابت کرو۔

جوابات:

3.5.1 معروضی سوالات کے جوابات

T.2

3. B)

4. F

5. F

اکائی 4۔ آئزن اسٹین کی کسوٹی اور غیر تحویل پذیر کثیر رکنیاں

(Eisensteins Criteria and Irreducible Polynomials)

اکائی کے اجزا

4.0 تمہید

4.1 مقاصد

4.2 تحویل پذیر اور غیر تحویل پذیر کثیر رکنیاں

4.3 آئزن اسٹین کی کسوٹی کا نظریہ

4.4 آئزن اسٹین کی کسوٹی کے مسائل

4.5 اکتسابی نتائج

4.6 کلیدی الفاظ

4.7 نمونہ امتحانی سوالات

4.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

4.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

4.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

4.0 تمہید (Introduction)

اس اکائی میں طلبا $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$ اور کسی بھی میدان پر تحویل اور غیر تحویل پذیر کثیر رکنیوں کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے اور ان سے متعلق کئی مسئلوں کو حل کریں گے۔ اس اکائی میں طلبا آئزین اسٹین کی کسوٹی کے نظریے کو ثابت کر کے اس کی مدد سے کئی مسائل کو $\mathbb{Q}$ پر تحویل پذیر ہونے کا ثبوت دیں گے۔

4.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ کسی بھی میدان پر کون سی کثیر رکنی تحویل پذیر اور کون سی غیر تحویل پذیر ہو سکتی ہے، کی جانکاری حاصل کر لیں گے۔ آئزین اسٹین کسوٹی کی مدد سے کثیر رکنیوں کو $\mathbb{Q}$ پر غیر تحویل پذیر ہے بتلا سکیں گے۔

4.2 تحویل پذیر اور غیر تحویل پذیر کثیر رکنیاں (Reducible and Non-reducible Polynomials)

تحویل پذیر کثیر رکنی: ایک کثیر رکنی $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ تحویل پذیر کہلاتی ہے اگر دو کثیر رکنیاں $g(x), h(x) \in F[x]$ اس طرح ہوں کہ

$$f(x) = g(x) \cdot h(x)$$

اور $deg\big(g(x), h(x)\big) > 0$ ہو۔

غیر تحویل پذیر کثیر رکنی: ایک کثیر رکنی $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ غیر تحویل پذیر کہلاتی ہے اگر $deg\big(f(x)\big) > 1$ ہو اور اگر

$$f(x) = g(x) \cdot h(x)$$

جہاں $g(x)$ یا $h(x) \in F[x]$

یعنی $g(x)$ یا $h(x)$ میں سے کوئی ایک مستقل ہے۔

مثال۔ $f(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$، $\mathbb{Q}$ پر غیر تحویل پذیر ہے، چوں کہ $x^2 - 2 = \big(x - \sqrt{2}\big)\big(x + \sqrt{2}\big)$ اور $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ہے،

نیز $x^2 - 2$، $\mathbb{R}[x]$ پر تحویل پذیر ہوگا اس لیے کہ $x - \sqrt{2}, x + \sqrt{2} \in \mathbb{R}[x]$

مثال۔ $f(x) = x^2 + 5 \in \mathbb{R}[x]$، $\mathbb{R}$ پر غیر تحویل پذیر ہے اور چوں کہ $x^2 + 5 = \big(x - \sqrt{5}i\big)\big(x + \sqrt{5}i\big)$ ہے اور $x^2 + 5$، $\mathbb{C}$ پر تحویل پذیر ہے۔

نوٹ: $p(x) \in F[x]$، F پر غیر تحویل پذیر ہوگا $\Leftrightarrow \langle p(x)\rangle$، $F[x]$ میں عظیمی ایدیال ہے $\Leftrightarrow \frac{F[x]}{\langle p(x)\rangle}$ ایک فیلڈ ہے۔

نظریہ: اگر $f(x) \in F[x]$، F میں ایک ریشہ α ہو تب $f(x)$، F پر تحویل پذیر ہوگا

ثبوت۔ دیا گیا ہے کہ $f(x) \in F[x]$ اور $\alpha \in F$، $f(x)$ کا ریشہ ہے۔ اس لیے

$$f(\alpha) = 0$$

مان لو کہ $g(x) = x - \alpha$ ہے۔

تب تقسیمی الگورتھم کی مدد سے $g(x) = x - \alpha \neq 0$، $f(x)$ کے لیے $q(x), r(x) \in F[x]$ اس طرح وجود رکھتے ہیں کہ

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

جہاں $r(x) = 0$ ہوگا یا $deg(r(x)) > deg(g(x)) = 1$ ہے

اس لیے

$$x = \alpha$$
$$\Rightarrow f(\alpha) = q(\alpha)g(\alpha - \alpha) + r(\alpha)$$
$$\Rightarrow \quad 0 = 0 + r(\alpha) = r$$
$$r = 0 \qquad \left[\because deg(r(x)) < 1 \text{ یا } deg(r(x)) = 0\right]$$

$$deg(g(x)) = deg(x - \alpha) = 1 \text{ اور } f(x) = q(x)g(x) \qquad \Leftarrow$$

اس لیے $f(x)$، F پر تحویل پذیر ہے۔

نظریہ: اگر $deg(g(x)) = 3$ یا 2 ہو تب $f(x) \in F[x]$، F پر تحویل پذیر ہوگا $\Leftrightarrow f(x)$ کا ایک ریشہ α، F میں ہو۔

ثبوت۔ اس نظریہ کا معکوس کا ثبوت اوپر دیے گئے نظریہ کا ثبوت ہے۔

فرض کرو کہ $f(x) \in F[x]$ اور $deg(g(x)) = 3$ یا 2 ہے اور $f(x)$، F پر تحویل پذیر ہے۔

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \text{ اور } deg(f_1(x), f_2(x)) \geq 1 \text{ ہے۔} \qquad \Leftarrow$$

اگر ہم فرض کرتے ہیں کہ $deg(g(x)) = 3$ تب

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$$
$$\Rightarrow deg(f_1(x)) = 2, deg(f_2(x)) = 1$$

یعنی $f_1(x)$ یا $f_2(x)$ میں سے کوئی ایک درجہ 1 کا ہے۔ مان لو کہ $f_1(x) = ax + b$ ہے، جہاں $a, b \in F$ اور $a \neq 0$ ہے۔

$$\Rightarrow \qquad f(x) = (ax + b) \cdot f_2(x) \qquad \text{.....(*)}$$
$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -a^{-1}b \in F$$

اس طرح $\alpha = -a^{-1}b \in F$ ہوگا اور $a\alpha + b = 0$

$$\Rightarrow \qquad f(\alpha) = (a\alpha + b) \cdot f_2(\alpha) = 0$$

$f(x)$ کا F میں ایک ریشہ α، وجود رکھتا ہے۔

نظریہ: فرض کرو کہ $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n \in \mathbb{Z}[x]$ ایک مونک کثیر رکنی ہے۔ اگر $f(x)$ کا ایک ریشہ $\alpha \in \mathbb{Q}$، ہو تب $\alpha \in \mathbb{Z}$ ہوگا اور α، a_0 کو تقسیم کرتا ہے $({}^{\alpha}/_{a_0})$۔

ثبوت۔ دیا گیا ہے کہ $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n \in \mathbb{Z}[x]$ ہے اور $f(x)$ کا ایک ریشہ $\alpha \in \mathbb{Q}$، ہے۔

ہمیں بتلانا ہے کہ

(i) $\alpha \in \mathbb{Z}$ اور

(ii) ${}^{\alpha}/_{a_0}$

فرض کرو کہ $\alpha = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ ہے اور $g.c.d.(r,s) = 1$

(چوں کہ $f(x)$ کا ایک ریشہ α ہے) $\quad f(\alpha) = 0$

$$\implies \quad a_0 + a_1\left(\frac{r}{s}\right) + a_2\left(\frac{r}{s}\right)^2 + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} = -\left(\frac{r}{s}\right)^n$$

$$\implies \quad a_0 + a_1\frac{r}{s} + a_2\frac{r^2}{s^2} + \cdots + a_{n-1}\frac{r^{n-1}}{s^{n-1}} = -\left(\frac{r^n}{s^n}\right)$$

$$\implies \quad a_0 s^{n-1} + a_1 r s^{n-2} + a_2 r^2 s^{n-3} + \cdots + a_{n-1} r^{n-1} = -\left(\frac{r^n}{s}\right) \quad \text{.....(*)}$$

(*) کی بائیں قدر صحیح عدد ہے۔اس لیے

$$-\frac{r^n}{s} \in \mathbb{Z} \implies s = \pm 1 \qquad \therefore \alpha \in \mathbb{Z}$$

$s = 1$ لیتے ہیں،اس لیے

$$a_0 + a_1\frac{r}{1} + a_2\frac{r^2}{1^2} + \cdots + a_{n-1}\frac{r^{n-1}}{1^{n-1}} = \pm r^n$$

$\alpha = \pm r \in \mathbb{Z}$ اور $f(x)$ کا ایک ریشہ ہے، $\alpha = \pm r \Leftarrow$

نیز $a_0 = -a_1 r - a_2 r^2 - \cdots - a_{n-1} r^{n-1} \pm r^n$ ہے

$$\implies \quad \pm r / a_0$$
$$\therefore \quad \alpha / a_0$$

اس طرح ہر مونک کثیر رکنی $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n \in \mathbb{Z}[x]$ کا ایک ریشہ $\alpha \in \mathbb{Z}$، ہوگا اور α / a_0

مثال۔ بتلاو کہ $f(x) = x^3 - x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$، $\mathbb{Q}$ پر غیر تحویل پذیر ہے۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ $\quad f(x) = x^3 - x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$

$$= 1 \cdot x^3 + +0 \cdot x^2 + (-1)x + (-1)$$

یہ بات واضح ہے کہ $f(x)$ ایک مونک کثیر رکنی ہے۔

فرض کرو کہ $f(x)$، $\mathbb{Q}$ پر تحویل پذیر ہے۔ تب ایک ریشہ $\alpha \in \mathbb{Q}$ اس طرح ہوگا کہ

$$f(\alpha) = \alpha^3 - \alpha - 1 = 0$$

چوں کہ $f(x)$ مونک ہے۔اوپر دیے گئے نظریہ کی مدد سے اگر $f(x)$ کا ایک ریشہ $\alpha \in \mathbb{Q}$ ہو تب $\alpha \in \mathbb{Z}$ ہوگا اور $\alpha / a_0 = -1$

اس لیے $\alpha = \pm 1$

اور $f(1) \neq 0$، $f(-1) \neq 0$

یہ صحیح نہیں ہے۔اس لیے ہمارا یہ مان لینا کہ $f(x)$ تحویل پذیر کثیر رکنی ہے غلط ثابت ہوا۔اس لیے $f(x)$، $\mathbb{Q}$ پر غیر تحویل پذیر ہے۔

4.3 آئزن اسٹین کی کسوٹی(Eisenstein's Criteria)

بیان(Statement): فرض کرو کہ $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$ اور $n \geq 1$ اگر ایک مفرد صحیح عدد 'p' اس طرح ہو کہ

$$p^2 \nmid a_0 \text{ اور } p \nmid a_n, P/a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$$

(P، $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ کو تقسیم کرتا ہے، اور P، a_n کو اور P^2، a_0 کو تقسیم نہیں کرتا ہے)

تب $f(x)$، $\mathbb{Q}$ پر غیر تحویل پذیر ہے۔

ثبوت۔ دیا گیا ہے کہ $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$ اور 'p' ایک مفرد صحیح عدد اس طرح ہے کہ

$$p^2 \nmid a_0 \text{ اور } p \nmid a_n, P/a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$$

ہمیں بتلانا ہے کہ $\mathbb{Q}$ پر $f(x)$ غیر تحویل پذیر ہو گا۔

(*).....فرض کرو کہ $f(x)$، $\mathbb{Q}$ پر تحویل پذیر ہے۔

اس لیے

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m + \cdots + a_nx^n$$
$$= (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_rx^r)(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_sx^s)$$

گاؤس لیما کی مدد سے ہم مان لیں کہ $b_i's, c_j's \in \mathbb{Z}$، $a_k \in \mathbb{Z}[x]$ اور $r, s < n$ اس طرح ہیں کہ $r + s = n$ ہو۔

$$\Longrightarrow \quad a_0 = b_0c_0, \qquad a_n = b_rc_s,$$

دیا گیا ہے کہ $p/a_0 = b_0c_0$ اور $p^2 \nmid a_0 = b_0c_0$

اس سے دو باتیں ممکن ہیں:

p/b_0 اور $p \nmid c_0$ یا $p \nmid b_0$ اور p/c_0

فرض کرو کہ p/c_0 اور $p \nmid b_0$ ہے۔

چوں کہ $p \nmid a_n = b_rc_s \Longleftarrow p \nmid b_r$ اور $p \nmid c_s$ ہے ہو گا۔

مان لو کہ c_m پہلا سر ہے $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_sx^s$ کا کہ $p \nmid c_m$

ہمیں معلوم ہے کہ $a_m = b_0c_m + b_1c_{m-1} + b_2c_{m-2} + \cdots + b_mc_0$ ہے۔

چوں کہ $p \nmid b_0$ اور $p \nmid c_m$ ہے $p \nmid a_m$ ہو گا۔

$$\Longrightarrow m = n$$

اور $n = m \leq s < n$ ہو گا جو کہ غلط ہے۔

یہ اس لیے ہوا کہ ہم $(*)$ میں $f(x)$، کو تحویل پذیر مانے تھے۔

اس لیے $\mathbb{Q}$ پر $f(x)$ غیر تحویل پذیر ہے۔

مثال 1۔ بتلاؤ کہ $f(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{Z}[x]$، $\mathbb{Q}$ پر غیر تحویل پذیر ہے۔

حل۔ دیا گیا ہے

$$f(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{Z}[x]$$
$$= -2 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2$$

اور $a_0 = -2, a_1 = 0, a_2 = 1$ ہیں۔

ایک مفرد صحیح عدد $p = 2$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$p = 2 / a_0 = -2, a_1 = 0, p = 2 \nmid a_2 = 1$ اور $p^2 = 4 \nmid a_0 = -2$

اس لیے آئزین اسٹین کسوٹی کی مدد سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $f(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{Z}[x]$، $\mathbb{Q}$ پر غیر تحویل پذیر ہے۔

مثال 2۔ بتلاؤ کہ $f(x) = x^3 - 5x + 10 \in \mathbb{Z}[x]$، $\mathbb{Q}$ پر غیر تحویل پذیر ہوگا۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ $f(x) = x^3 - 5x + 10 \in \mathbb{Z}[x]$ ہے۔

$$= 10 - 5 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3$$

اور اس میں $a_0 = 10, a_1 = -5, a_2 = 0, a_3 = 1$ ہیں۔

ایک مفرد صحیح عدد $p = 5$ اس طرح ہے کہ

$$p = 5 / a_0 = 10, a_1 = -5, a_2 = 0, \quad \text{اور} \quad p = 5 \nmid a_3 = 1$$

اور $p^2 = 25 \nmid a_0 = 10$ تب آئزین اسٹین کسوٹی کی مدد سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $f(x) = x^3 - 5x + 10 \in \mathbb{Z}[x]$، $\mathbb{Q}$ پر غیر تحویل پذیر ہے۔

مسئلہ 1۔ بتلاؤ کہ ذیل کی کثیر رکنیاں غیر تحویل پذیر ہوں گی:

i. $f(x) = 5x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 14x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$، $\mathbb{Z}$ پر

ii. $g(x) = 2x^4 + 6x^3 - 9x^2 + 15 \in \mathbb{Z}[x]$، $\mathbb{Z}$ پر

iii. $h(x) = 10x^3 - 7x + 14 \in \mathbb{Z}[x]$، $\mathbb{Q}$ پر

iv. $p(x) = x^4 + 2x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$، $\mathbb{Q}$ پر

v. $q(x) = 2x^5 - 5x^4 + 5 \in \mathbb{Z}[x]$، $\mathbb{Q}$ پر

حل۔

i. دیا گیا ہے کہ $f(x) = 5x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 14x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$ ہے،

یہاں $a_0 = 2, a_1 = -14, a_2 = -6, a_3 = 4, a_4 = 5$ ہیں۔

ایک مفرد صحیح عدد $p = 2$ اس طرح ہے کہ

$$p = 2 \nmid a_4 = 5, p^2 = 2^2 = 4 \nmid a_0 = 2 \quad \text{اور} \quad p = 2/a_0, a_1, a_2, a_3$$

اس لیے آئزین اسٹین کسوٹی کی مدد سے $f(x)$، $\mathbb{Q}$ پر غیر تحویل پذیر ہے۔ چوں کہ پریمیٹو کثیر رکنی ہے، اس لیے گاؤس لیما کی مدد سے ہم کہہ سکتے ہیں $f(x)$، $\mathbb{Z}$ پر غیر تحویل پذیر ہے۔

ii. دیا گیا ہے کہ $g(x) = 2x^4 + 6x^3 - 9x^2 + 15 \in \mathbb{Z}[x]$ ہے،

یہاں $a_0 = 15, a_1 = 0, a_2 = -9, a_3 = 6, a_4 = 2$ ہیں۔

ایک مفرد صحیح عدد $p = 3$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$p = 3 \nmid 2, p^2 = 3^2 = 9 \nmid 15 \quad \text{اور} \quad p = 3/15, 0, -9, 6$$

$g(x)$ کے لیے $p = 3$ سے آئزین اسٹین کسوٹی کی پوری ہوتی ہے اس لیے $g(x)$، $\mathbb{Q}$ پر غیر تحویل پذیر ہے۔ چوں کہ $g(x)$ پریمیٹو ہے، اس لیے گاؤس لیما کی مدد سے ہم کہہ سکتے ہیں $g(x)$، $\mathbb{Z}$ پر بھی غیر تحویل پذیر ہوگا۔

iii. دیا گیا ہے کہ $h(x) = 10x^3 - 7x + 14$ ہے،

$$= 14 - 7 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 10 \cdot x^3$$

یہاں $a_0 = 14, a_1 = -7, a_2 = 0, a_3 = 10$ ہیں۔

$p = 7$ ایک ایسا مفرد صحیح عدد ہے کہ

$$p = 7 \nmid a_3 = 10, p^2 = 7^2 = 49 \nmid 14 \quad \text{اور} \quad p = 7/14, -7, 0$$

اس طرح آئزین اسٹین کسوٹی کیشرائط پوری ہوتی ہیں اور $h(x)$، $\mathbb{Q}$ پر غیر تحویل پذیر ہوگا۔

iv. دیا گیا ہے کہ $p(x) = x^4 + 2x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$ ہے،

$$= 2 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 1 \cdot x^4$$

یہاں $a_0 = 2, a_1 = 2, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 1$ ہیں۔

مفرد صحیح عدد $p = 2$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$p = 2 \nmid a_4 = 1, p^2 = 2^2 = 4 \nmid a_0 = 2 \quad \text{اور} \quad p = 2/a_0, a_1, a_2, a_3$$

تب آئزین اسٹین کسوٹی کی مدد سے $p(x)$، $\mathbb{Q}$ پر غیر تحویل پذیر ہوگا۔

v. دی گئی کثیر رکنی ہے

$$q(x) = 2x^5 - 5x^4 + 5 \in \mathbb{Z}[x]$$
$$= 5 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 - 5 \cdot x^4 + 2 \cdot x^5$$

یہاں $a_0 = 5, a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = -5, a_5 = 2$ ہیں۔

ایک مفرد صحیح عدد $p = 5$ اس طرح ہے کہ

$$p = 5 \nmid a_5 = 2, p^2 = 5^2 = 25 \nmid a_0 = 5 \quad \text{اور} \quad p = 5/5,0,0,0, -5$$

اس طرح آئزین اسٹین کسوٹی کی تمام شرائط پوری ہوئیں اور $q(x) = 2x^5 - 5x^4 + 5$، $\mathbb{Q}$ پر غیر تحویل پذیر ہو گا۔

مسئلہ 2۔ بتلاؤ کہ $f(x) = x^3 + 3x + 2 \in \mathbb{Z}_7[x]$، $\mathbb{Z}_7$ پر غیر تحویل پذیر ہے۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ

$$f(x) = x^3 + 3x + 2$$

اور $deg(f(x)) = 3$ ہے۔

ہمیں معلوم ہے کہ اگر $f(x) \in F[x]$ کا درجہ 2 یا 3 ہو تو $f(x)$، F میں تحویل پذیر ہو گا $\Leftrightarrow$ $f(x)$ کا ایک ریشہ α، F میں ہو گا۔

یہاں $F = \mathbb{Z}_7$

$= \{0,1,2,3,4,5,6\}$

اس لیے

$$f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0 + 2 = 2 \neq 0$$
$$f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1 + 2 = 6 \neq 0$$
$$f(2) = 2^3 + 3 \cdot 2 + 2 = 16 \neq 0$$
$$f(3) = 3^3 + 3 \cdot 3 + 2 = 38 \neq 0$$
$$f(4) = 4^3 + 3 \cdot 4 + 2 = 78 \neq 0$$
$$f(5) = 5^3 + 3 \cdot 5 + 2 = 142 \neq 0$$
$$f(6) = 6^3 + 3 \cdot 6 + 2 = 236 \neq 0$$

اس طرح کا کوئی بھی ریشہ م $\mathbb{Z}_7$ میں نہیں ہے۔ اس لیے $f(x) = x^3 + 3x + 2 \in \mathbb{Z}_7$، $\mathbb{Z}_7$ پر غیر تحویل پذیر ہے۔

مسئلہ 3۔ بتلاؤ کہ $f(x) = x^3 - x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$، $\mathbb{Q}$ پر غیر تحویل پذیر ہے۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ

$$f(x) = x^3 - x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$$
$$= -1 - 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3$$

یہ واضح ہے کہ $f(x)$ ایک مونک کثیر رکنی ہے۔

(*).....فرض کرو کہ $f(x)$، $\mathbb{Q}$ پر تحویل پذیر ہے۔

اس لیے $\exists \alpha \in \mathbb{Q}$ اور $f(\alpha) = \alpha^3 - \alpha - 1 = 0$ ہو گا۔

چوں کہ $f(x)$ مونک ہے اگر $\alpha \in \mathbb{Q}$، $f(x)$ کا ایک ریشہ ہو تب ایک معروف نظریہ کی مدد سے حاصل ہے $\alpha \in \mathbb{Z}$ اور $\alpha/a_0 = -1$

$$\Rightarrow \alpha = \pm 1$$

$f(x)$ کے لیے $f(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1 \neq 0$ اور $f(-1) = (-1)^3 + 1 - 1 = -1 \neq 0$

اس لیے α، $f(x)$ کا ریشہ نہیں ہے۔

یہ غلط بیان ہے اسی لیے ہمارا مفروضہ $f(x)$ کو $\mathbb{Q}$ پر تحویل پذیر ماننا غلط ہے۔

اس لیے $f(x) = x^3 - x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$، $\mathbb{Q}$ پر غیر تحویل پذیر ہے۔

مسئلہ 3۔ اگر p ایک مفرد صحیح عدد ہے اور $\varphi_p(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1}$ ہو تب بتلاؤ کہ $\varphi_p(x)$، $\mathbb{Q}$ پر غیر تحویل پذیر ہو گا۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ $\varphi_p(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1}$ اور p ایک مفرد صحیح عدد ہے، تب

$$g(x) = \varphi_p(x+1) = \frac{(x+1)^{p-1}}{(x+1)-1}$$
$$= \frac{1}{x}\left[x^{p-1} + \binom{p}{1}x^{p-1} + \binom{p}{2}x^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-1}x\right]$$
$$= x^{p-1} + \binom{p}{1}x^{p-2} + \binom{p}{2}x^{p-3} + \cdots + \binom{p}{p-1}$$
$$= \binom{p}{p-1} + \binom{p}{p-2}x + \binom{p}{p-3}x^2 + \cdots + \binom{p}{2}x^{p-3} + \binom{p}{1}x^{p-2} + x^{p-1}$$
$$= p + \frac{p(p-1)}{2!}x + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^2 + \cdots + px^{p-2} + x^{p-1}$$

اس کے تمام سروں کو تقسیم کرتا ہے، $p^2 \nmid p, p \nmid 1$

تب آئزین اسٹین کی کسوٹی سے یہ واضح ہے کہ $\varphi_p(x)$، $\mathbb{Q}$ پر غیر تحویل پذیر ہو گا۔

4.5 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی کو مکمل کرنے پر آپ نے تحویل پذیر اور غیر تحویل پذیر کثیر رکنیوں میں فرق جانا ہے اور آئزین اسٹین کی کسوٹی کی مدد سے کئی کثیر رکنیوں کو غیر تحویل پذیر بتلایا ہو گا۔

4.6 کلیدی الفاظ (Keywords)

تحویل پذیر کثیر رکنی، غیر تحویل پذیر کثیر رکنی، آئزین اسٹین کی کسوٹی

4.7 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

4.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. $f(x) = x^2 - 5$ تحویل پذیر ہے

A) $\mathbb{Z}$ پر B) $\mathbb{Q}$ پر C) $\mathbb{R}$ پر D) ان میں سے کوئی بھی نہیں

2. $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$، $\mathbb{Q}$ پر تحویل پذیر ہے۔ (T/F)

3. ایک مفرد صحیح عدد p کے لیے $f(x) = x^n - p$ ہمیشہ $\mathbb{Q}$ پر غیر تحویل پذیر ہے۔ (T/F)

4. $f(x) = x^2 + 2x + 1$ تحویل پذیر ہے

A) مونک B) پریمیٹو C) دونوں D) ان میں سے کوئی بھی نہیں

5. اگر α، $f(x) \in F[x]$ کا ریشہ ہو تب _____ $= f(\alpha)$ ہے۔

4.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. بتلاؤ کہ $f(x) = x^2 + 8x - 2$، $\mathbb{Q}$ پر غیر تحویل پذیر ہوگا۔
2. ذیل کی کثیر رکنیوں کی $\mathbb{Q}$ پر غیر تحویل پذیری کی جانچ کرو:
   (a) $8x^3 + 6x^2 - 9x + 24$
   (b) $x^4 + 9x + 3$
3. بتلاؤ کہ $x^4 + 8 \in \mathbb{Q}[x]$، $\mathbb{Q}$ پر تحویل پذیر ہے۔

4.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. گاؤس لیما کو بیان اور ثابت کرو۔
2. آئزین اسٹین کی کسوٹی کو بیان اور ثابت کرو۔

جوابات:

4.7.1 معروضی سوالات کے جوابات

F .2

T .3

C .4

تجویز کردہ اکتسابی مواد

(Suggested Learning Resources)

1. Basic Abstract Algebra 2nd Edition by P.B. Bhattacharya, S.K. Jain and S.R. Nagpaul, Cambridge University Press-
2. Topics in Abstract Algebra 2nd Edition by M.K. Sen, Shamik Ghosh and Mukho Padhyay University Press.
3. Topics in Algebra, 2nd Edition by I. N. Herstein, Wiley India Pvt. Ltd, New Delhi
4. Topics in Abstract Algebra 2nd Edition by M.K. Sen, Shamik Ghosh and Mukho Padhyay University Press.
5. A Text Book of B.Sc. Mathematics (Abstract Algebra) V. Venkateshwava Rao & 5 others, S. Chand & Co Ltd.
6. Surjeet Singh ´ Qazi Zameeruddin, Modern Algebra Vikas Publishing House Pvt. Ltd.

NEP
4 YEARS UG COURSE

بی ایس سی (ریاضیات)، پہلا سمسٹر

پرچہ: کثیر رکنی رنگس

B.Sc. (Mathematics) 4rth Semester – April, 2026
Paper : BNMT402DET : Polynomial Rings

وقت: دو گھنٹے Time : 2 hours **نشانات: 25 Marks**

ہدایات:

یہ پرچہ تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم اور حصہ سوم۔ تمام حصوں سے جواب دینا لازمی ہے۔

1. حصہ اول کے تمام سوالات لازمی ہیں۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ $(5 \times 1 = 5 \text{ Marks})$
2. حصہ دوم میں 06 سوالات ہیں۔ طالب علم کو کوئی 04 سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کے لیے 3 نمبرات مختص ہیں۔ $(4 \times 3 = 12 \text{ Marks})$
3. حصہ سوم میں 02 سوالات ہیں۔ طالب علم کو کوئی 01 سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کے لیے 8 نمبرات مختص ہیں۔ $(1 \times 8 = 8 \text{ Marks})$

حصہ اول

سوال 1

i) $f(x) = x^2 - 5$ تحویل پذیر ہے

A) $\mathbb{Z}$ پر B) $\mathbb{Q}$ پر C) $\mathbb{R}$ پر D) ان میں سے کوئی بھی نہیں

ii) ذیل کی کون سی کثیر رکنی پریمیٹو ہے؟

A) $2 + 4x + 8x^2$ B) $2 + 5x + 7x^2$ C) $2x + 8x^3$ D) کوئی بھی نہیں

iii) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$، $\mathbb{Q}$ پر تحویل پذیر ہے۔ (T/F)

iv) $x = 3 - 39i$ کو $y = 3 - 5i$ تقسیم کرتا ہے۔ (T/F)

v) اگر $f(x) \in F[x]$ کا ریشہ ہو تب $f(\alpha) =$ _____ ہے۔ مبادلہ گروپ کی تعریف کرو۔

حصہ دوم

2. اگر F ایک میدان ہو، تو $F[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ ایک انٹگرل دامنہ ہوتا ہے۔
3. ثابت کرو کہ $\mathbb{Z}[i]$ ایک انٹگرل دامنہ ہوتا ہے۔
4. اگر p ایک مفرد صحیح عدد ہے اور $\varphi_p(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1}$ ہو تب بتلاؤ کہ $\varphi_p(x)$، $\mathbb{Q}$ پر غیر تحویل پذیر ہوگا۔
5. $x = 3 + i, y = 2i$ کے لیے اعظم مشترک قاسم حاصل کرو۔
6. ذیل میں سے کون سی کثیر رکنیاں پریمیٹو ہیں: (i) $5x^3 - 5x + 10$ (ii) $x^4 - 3x^2 + 9$
7. بتلاؤ کہ $f(x) = x^3 - 5x + 10 \in \mathbb{Z}[x]$، $\mathbb{Q}$ پر غیر تحویل پذیر ہوگا۔

حصہ سوم

8. بتلاؤ کہ ذیل کی کثیر رکنیاں $f(x) = 6 + 18x^8 + 12x^9 + 9x^{10} + 4x^{13}$ اور $g(x) = 12 + 30x^4 + 12x^5 + 5x^7$، Q پر غیر تحویل پذیر ہوں گے۔
9. گاؤس لیما کو بیان اور ثابت کرو۔

BNMT402DEP

لیب مینول

کثیر رکنی رنگس

(Polynomial Rings)

بیچلر آف سائنس (بی۔ایس سی۔)

(چوتھا سمسٹر)

اکائی۔1 کثیر رکنیوں کا رنگ اور پریمٹیو کثیر رکنیاں

(Ring of Polynomial and Primitive Polynomials)

1.0 مقاصد(Objectives)

اس اکائی میں مواد کے مختلف تعارف کے بعد طلباء کثیر رکنیوں کے رنگ، پریمٹیو کثیر رکنیاں اور ان کے مختلف عملی مسائل کے بارے میں جانکاری حاصل کر کے انہیں حل کریں گے۔

1.1 تمہید(Introduction)

فرض کرو کہ $R, +, .$ ایک رنگ ہے۔ ایک کثیر رکنی $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...a_nx^n$ جہاں $a_0, a_1, a_2, ... a_n \in R$ پر R کثیر رکنی کہلاتی ہے۔(x ایک متغیر ہے)

یہاں $f(x)$ کا درجہ n ہوگا اگر $a_n \neq 0$ ہو۔

اگر

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...a_nx^n$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... b_mx^m$$

کسی رنگ R پر دو کثیر رکنیاں ہوں تب

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + ... + (a_m + b_m)x^m + a_{m+1}x^{m+1} + .. + a_nx^n \quad (if\ n > m)$$

$$f(x).g(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + ...$$

$$R[x] = \{f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... a_nx^n + .../a_0, a_1, ... \in R\}$$

اوپر دیے گئے '+' اور '.' سے ایک رنگ بنتا ہے جسے ہم کثیر رکنیوں کا رنگ کہتے ہیں۔

مثال: $\mathbb{Z}[x]$ ایک کثیر رکنیوں کی رنگ $\mathbb{Z}$ پر ہے۔

نظریات:

(1) اگر $(F, +, .)$ ایک فیلڈ ہو تب متغیر x اور F کے عددی سروں سے بننے والے تمام کثیر رکنیوں کا سٹ $F[x]$ ایک انتگرال دامنہ ہے۔

(2)(Division Algorithm) فرض کرو کہ $(F, +, .)$ ایک فیلڈ ہے۔ دو کثیر رکنیاں $f(x), g(x) \neq 0 \in F[x]$ کے لیے یکتا کثیر رکنیاں $q(x), r(x) \in F[x]$ اس طرح وجود رکھتے ہیں کہ $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ جہاں $r(x) = 0$ یا $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$ ہے۔

(3) ایک عنصر $a \in F$، $f(x) \in F[x]$ کا zero یا root ہوگا $\Leftrightarrow$ $x - a$، $f(x)$ کا فیاکٹر (Factor) ہو۔

تعریف:پریمٹیو کثیر رکنی(Primitive Polynomial):

ایک کثیر رکنی $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$ ، پریمیٹیو (primitive) کثیر رکنی کہلاتی ہے اگر $\text{g.c.d}_{(a_0, a_1, a_2, ...a_n)} = 1$ ہو۔

مثال: $f(x) = 2 + 3x + 4x^2 \in \mathbb{Z}[x]$ ایک پریمٹیو کثیر رکنی ہے چوں کہ g.c.d (2, 3, 4) = 1 ہے۔

نوٹ:

(1) دو پریمٹیو کثیر رکنیوں کا حاصل ضرب بھی پریمٹیو کثیر رکنی ہے۔

مثال: $g(x) = 5x + 7 \in \mathbb{Z}[x]$ ، $f(x) = 2 + 3x + 4x^2$ دو پریمٹیو کثیر رکنیاں ہیں اور $f(x).g(x) = 14 + 31x + 43x^2 + 20x^3$ بھی پریمٹیو کثیر رکنی ہے۔

(2) F ایک فیلڈ اور $F[x]$ ایک کثیر رکنیوں کی رنگ ہے تب

i. $f(x)$ ، F میں تحویل پذیر (reducible) ہوگا اگر ایک $\alpha \in F$ اس طرح ہو کہ $f(\alpha) = 0$ ہو۔ یعنی $f(x) = (x - \alpha)g(x)$ کسی $g(x) \in F[x]$ کے لیے۔

ii. اگر $f(x) \in F[x]$ کا درجہ 2 یا 3 ہو تب $f(x)$ reducible ہے $\Leftarrow F$ میں $f(x)$ کا ایک root ہوگا۔

مثال: $g(x) = 1 + 4x + 5x^2 + 3x^3 \in \mathbb{Z}_6[x]$ ، $f(x) = 5 + 4x + 2x^2 + 2x^3$ کا جمع اور حاصل ضرب معلوم کرو۔ نیز $f(x) + g(x)$ اور $f(x).g(x)$ کا درجہ معلوم کرو۔

حل: دیا گیا ہے کہ

$$f(x) = 5 + 4x + 2x^2 + 2x^3$$

اور

$$g(x) = 1 + 4x + 5x^2 + 3x^3 \in \mathbb{Z}_6[x]$$

اس لیے

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (5 +_6 1) + (4 +_6 4)x + (2 +_6 5)x^2 + (2 +_6 3)x^3 \\ &= (0) + (2)x + (1)x^2 + (5)x^3 \\ &= 2x + x^2 + 5x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x).g(x) = {} & (5 \times_6 1) + (5 \times_6 4 +_6 4 \times_6 1)x + (5 \times_6 5 +_6 4 \times_6 4 +_6 2 \times_6 1)x^2 \\ & +(5 \times_6 3 +_6 4 \times_6 5 +_6 2 \times_6 4)x^3 \\ & +(4 \times_6 3 +_6 2 \times_6 5 +_6 2 \times_6 4)x^4 \\ & + 2 \times_6 5 +_6 2 \times_6 3\ x^5 + (2 \times_6 3)x^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 5 + 0x + 1.x^2 + 1.x^3 + 0.x^4 + 4.x^5 + 0.x^6 \\ &= 5 + x^2 + x^3 + 4x^5 \end{aligned}$$

چوں کہ

$$\deg(g(x)) = 3 \text{ ،} \deg(f(x)) = 3$$

اس لیے

$$\deg(f(x) + g(x)) = max\{3,3\} = 3$$

اور

$$\deg(f(x).g(x)) = 5 < \deg(f(x)) + \deg(g(x)) = 6$$

مثال : $\mathbb{Z}_7[x]$ میں اگر $f(x) = 5x^4 + 3x^3 + 1$ کو $g(x) = 3x^2 + 2x + 1$ سے تقسیم کریں تو quotient اور باقی (remainder) معلوم کرو۔

حل: دیا گیا ہے کہ $f(x) = 5x^4 + 3x^3 + 1$ ، $g(x) = 3x^2 + 2x + 1$ اور $\mathbb{Z}_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$

$$3x^2 + 2x + 1 \overline{)} 5x^4 + 3x^3 + 1 \big(4x^2 + 3x + 6$$

$$5x^4 + 1x^3 + 4x^2$$

$$_____$$

$$2x^3 + 3x^2 + 1$$

$$2x^3 + 6x^2 + 3x$$

$$_____$$

$$4x^2 + 4x + 1$$

$$4x^2 + 5x + 6$$

$$_____$$

$$6x + 2$$

اس طرح quotient کی قدر $q(x) = 4x^2 + 3x + 6$ اور باقی $r(x) = 6x + 2$ ہے۔

مثال : $f(x) = 3 + 4x^2, g(x) = 2 + x^3 \in \mathbb{Z}_7[x]$ کے لیے ، اور $f(x) + g(x)$ $f(x) \cdot g(x)$

$\deg(f(x) + g(x))$ ، $\deg(f(x) \cdot g(x))$ معلوم کرو۔

حل: دیا گیا ہے۔

$$f(x) = 3 + 0x + 4x^2 + 0x^3$$

اور $$g(x) = 2 + 0x + 0x^2 + 1 \cdot x^3$$

تب $$f(x) + g(x)$$

$$= (3 +_7 2) + 0 + (4 +_7 0)x^2 + (0 +_7 1)x^3$$

$$= 5 + 4x^2 + x^3$$

$$f(x)\cdot g(x) = (3\times_7 2) + (3\times_7 1)x^3 + (4\times_7 2)x^2 + (4\times_7 1)x^5$$
$$= 6 + 3x^3 + x^2 + 4x^5$$
$$= 6 + x^2 + 3x^3 + 4x^5$$

اور $\deg(f(x)+g(x)=3 \quad \deg(f(x)\cdot g(x)=5$ ہے۔

مثال : $\mathbb{Z}_7[x]$ میں اگر $f(x) = x^6 + 3x^5 + 4x^2 - 3x + 2$ کو $g(x) = x^2 + 2x - 3$ سے تقسیم کریں تو حاصل quotientاور باقی(remainder)معلوم کرو۔

حل:دیاگیاہے کہ $f(x) = x^6 + 3x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 4x^2 - 3x + 2$ ، $g(x) = x^2 + 2x - 3$

تب

$$x^2 + 2x - 3 \overline{)\, x^6 + 3x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 4x^2 - 3x + 2}$$
$$x^6 + 2x^5 - 0x^4$$
$$_____$$
$$x^5 + 3x^4 + 0x^3$$
$$x^5 + 2x^4 - 3x^3$$
$$_____$$
$$x^4 + 3x^3 + 4x^2$$
$$x^4 + 2x^3 - 3x^2$$
$$_____$$
$$x^3 + 0x^2 - 3x$$
$$x^3 + 2x^2 - 3x$$
$$_____$$
$$-2x^2 + 0x + 2$$
$$-2x^2 - 4x + 6$$
$$_____$$
$$4x - 4$$

1.2 عملی مسائل

1.2.1 $\mathbb{Z}_6[x]$ میں اگر $f(x) = 2 + 3x + 5x^2$ اور $g(x) = 3 + 5x + 2x^3$ ہوں تب $f(x).g(x)$ ، $f(x)+g(x)$ اور ان کے درجات معلوم کرو۔

1.2.2 $\mathbb{Z}_7[x]$ میں اگر $f(x) = 7 + 9x + 5x^2 + 11x^3 - 2x^4$ اور $g(x) = 3 - 2x + 7x^2 + 8x^3$ ہوں تب ثابت کرو کہ

(i) $\deg(f(x) + g(x)) = 4$ اور

(ii) $\deg(f(x).g(x)) = 7$

1.2.3 اگر $f(x)=3x^4+x^3+2x^2+1$ اور $g(x)=x^2+4x+2$ دو کثیر رکنیاں $\mathbb{Z}_5[x]$ میں ہوں تب $q(x)$ ، $r(x)$ کی قدر اس طرح معلوم کرو کہ $f(x)=g(x).q(x)+r(x)$

1.2.4 $x^4 + 4 \in \mathbb{Z}_5[x]$ کے فیاکٹرس(factors)معلوم کرو۔

1.2.5 $x^4 + 3x^3 + 2x + 4 \in \mathbb{Z}_5[x]$ کے factors معلوم کرو۔

اکائی۔2 آئزن اسٹین کی کسوٹی اور غیر تحویل پذیل کثیر رکنیاں

(Eisenstein's Criteria and Irreducibility of Polynomials)

2.0 مقاصد(Objectives)

اس اکائی میں طلبا آئزن اسٹین کی کسوٹی اور غیر تحویل پذیر کثیر رکنیوں سے متعلق مسائل کو حل کریں گے۔

2.1 تمہید(Introduction)

ایک کثیر رکنی $f(x) \in F[x]$ جس کا درجہ 1 سے بڑا ہے F پر غیر تحویل پذیر (irreducible) کہلاتا ہے اگر $f(x) = g(x).h(x)$ ہو۔ جہاں $g(x), h(x) \in F[x]$ تب $\deg(g(x)) = 0$ یا $\deg(h(x)) = 0$ ہوگا (یعنی $g(x)$ یا $h(x)$ میں سے ایک مستقل ہوگا)۔

مثال 1 : $x^2 - 3 \in \mathbb{Q}[x]$، $\mathbb{Q}$ پر irreducible ہے۔ چوں کہ $x^2 - 3 = (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$ ہے اور $\pm\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ ہے۔ $x^2 - 3$، $\mathbb{R}$ پر تحویل پذیر (reducible) ہے۔

مثال 2: $x^2 + 5 \in \mathbb{R}[x]$، $\mathbb{R}$ پر غیر تحویل پذیر ہے۔ چوں کہ $x^2 + 5 = (x+\sqrt{5}i)(x-\sqrt{5}i)$ ہے۔ $x^2 + 5$، $\mathbb{C}$ پر تحویل پذیر ہوگا۔

رزلٹس:

1) اگر $f(x) \in F[x]$ پریمٹیو ہے تب $f(x)$ $\mathbb{Q}$ پر تحویل پذیر ہوگا $\Leftrightarrow$ $f(x)$، $\mathbb{Z}$ پر تحویل پذیر ہو۔

2) $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...a_{n-1}x^{n-1} + x^n \in \mathbb{Z}[x]$ ایک monic کثیر رکنی ہے تب $f(x)$ کا $\mathbb{Q}$ میں ایک root α ہوگا $\Leftarrow \alpha \in \mathbb{Z}$ اور $\alpha \mid a_o$۔

Eisenstein's Criteria: فرض کرو کہ $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...a_{n-1}x^{n-1} + x^n \in \mathbb{Z}[x]$ اور $n \geq 1$ ہے۔ اگر ایک پرائم عدد (prime number) 'p' اس طرح وجود رکھتا ہو کہ $p / a_0, a_1, a_2, ...a_{n-1}$، $p \nmid a_n$ اور $p^2 \nmid a_o$ تب $f(x)$، Q پر غیر تحویل پذیر (irreducible) ہوگا۔

مثال 1: بتلاؤ کہ $f(x) = x^2 - 2$، Q پر irreducible ہے۔

حل : دیا گیا ہے $f(x) = x^2 - 2 = -2 + 0.x + 1.x^2$ یہاں $a_o = -2, a_1 = 0, a_2 = 1$ میں $p = 2$ اس طرح ہے کہ $p = 2 / a_o = -2, a_1 = 0$، $p = 2 \nmid a_2 = 1$ اور $p^2 = 2^2 = 4 \nmid -2$ تب Eisenstein کی کسوٹی کی مدد سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $f(x)$ Q پر irreducible ہے۔

2.2 عملی مسائل

2.2.1 عملی مسئلہ: آئزن اسٹین کی کسوٹی کی مدد سے بتلاؤ کہ $f(x)=14+7x+x^5 \in \mathbb{Z}[x]$، $\mathbb{Q}$ پر غیر تحویل پذیل ہو گا۔

2.2.2 عملی مسئلہ: ثابت کرو کہ $f(x) = 2x^4 + 6x^3 - 9x^2 + 15$، Q پر غیر تحویل پذیر ہے۔

2.2.3 عملی مسئلہ: بتلاؤ کہ $f(x) = 6 + 8x + 72x^{29} + 18x^{99} + 7x^{100} \in \mathbb{Z}[x]$، Q پر غیر تحویل پذیر ہو گا۔

2.2.4 عملی مسئلہ: بتلاؤ کہ ذیل کی کثیر رکنیاں $f(x) = 6 + 18x^8 + 12x^9 + 9x^{10} + 4x^{13}$ اور $g(x) = 12 + 30x^4 + 12x^5 + 5x^7$، Q پر غیر تحویل پذیر ہوں گے۔

نمونہ امتحانی پرچہ

ریاضیات(لیب مینول)

BNMT402DEP

بی۔ایس سی-(چوتھا سمسٹر)

وقت:2 Hrs　　کل نمبر:10

نوٹ: درج ذیل میں سے کوئی دو سوالات کے جواب دیجیے　　$2 \times 5 = 10$

1. $\mathbb{Z}_6[x]$ میں اگر $f(x) = 2 + 3x + 5x^2$ اور $g(x) = 3 + 5x + 2x^3$ ہوں تب $f(x).g(x)$ ، $f(x)+g(x)$ اور ان کے درجات معلوم کرو۔
2. اگر $f(x) = 3x^4 + x^3 + 2x^2 + 1$ اور $g(x) = x^2 + 4x + 2$ دو کثیر رکنیاں $\mathbb{Z}_5[x]$ میں ہوں تب $r(x)$ ، $q(x)$ کی قدر اس طرح معلوم کرو کہ $f(x) = g(x).q(x) + r(x)$
3. آئزن اسٹین کی کسوٹی کی مدد سے بتلاؤ کہ $f(x) = 14 + 7x + x^5 \in \mathbb{Z}[x]$ ، Q پر غیر تحویل پذیل ہوگا۔
4. بتلاؤ کہ $f(x) = 6 + 8x + 72x^{29} + 18x^{99} + 7x^{100} \in \mathbb{Z}[x]$ ، Q پر غیر تحویل پذیر ہوگا۔

تصدیق نامہ

تصدیق کی جاتی ہے کہ بی۔ایس سی۔(چوتھا سمسٹر) کثیر رکنی رنگس کے تجرباتی حصہ کے کام کا یہ اصلی ریکارڈ ہے، جسے _____ نے مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کے اسٹڈی سینٹر _____ میں تعلیمی سال _____ کے دوران تیار کیا۔

دستخط کونسلر