BNMM101DET

تجزیاتی جیومٹری

(Analytical Geometry)

بی۔ایس سی۔(آنرس)

چار سالہ پروگرام

پہلا سمسٹر (ریاضی)

مرکز برائے فاصلاتی و آن لائن تعلیم

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

حیدرآباد۔32، تلنگانہ، بھارت

Copyright © 2025, Maulana Azad National Urdu University, Hyderabad

All right reserved. No part of this publication may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronically or mechanically, including photocopying, recording or any information storage or retrieval system, without prior permission in writing form the publisher (registrar@manuu.edu.in)

ISBN	:	978-81-994195-4-4
Course	:	Analytical Geometry
First Edition	:	October 2025
Copies	:	600
Price	:	125/-(The price of the book is included in admission fee of distance mode students)

Course Coordinator

Dr. Khaja Moinuddin, Professor,Dept. of Mathematics, School of Sciences, MANUU

Editorial Board/Editors

Dr. Khaja Moinuddin, Professor,Dept. of Mathematics, School of Sciences, MANUU

Dr. Kashif Khan, (Mathematics), Centre for Distance and Online Education, MANUU

Production

Prof. Nikhath Jahan, Professor (Urdu), CDOE MANUU

Mr. P Habibulla, Assistant Registrar, Purchase & Stores Section, MANUU

Dr. Mohd Akmal Khan, Assistant Professor (C), CDOE MANUU

Mohd Abdul Naseer, Section Officer, CDOE MANUU

Shaik Ismail, UDC, CDOE, MANUU

SyedFaheemuddin, LDC,Purchase & Stores Section, MANUU

On behalf of the Registrar, Published by:

Centre for Distance and Online Education

Maulana Azad National Urdu University

Gachibowli, Hyderabad-500032 (TG), India

*Director:*dir.dde@manuu.edu.in*Publication:*ddepublication@manuu.edu.in

Phone number: 040-23008314 Website: manuu.edu.in

CRC Prepared by Dr. Kashif Khan, Faculty of Mathematics, CDOE, MANUU

Printed at: Print Time& Business Enterprises, Hyderabad

فہرست

پیغام		وائس چانسلر، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی	4
پیغام		ڈائرکٹر، مرکز برائے فاصلاتی وآن لائن تعلیم	5
کورس کا تعارف		کورس کوآرڈی نیٹر (ریاضی)	6
اکائی نمبر	**اکائی کا نام**	**مصنف**	**صفحہ نمبر**
1۔	مخروطیاں: دائرہ	ڈاکٹر کاشف خان	7
2۔	مکافی	ڈاکٹر کاشف خان	21
3۔	بیضی	ڈاکٹر کاشف خان	36
4۔	زائد	ڈاکٹر کاشف خان	52
	نمونہ امتحانی پرچہ		67
	لیب مینول		69
1۔	دائرے اور مکافی سے متعلق مسائل	ڈاکٹر کاشف خان	70
2۔	بیضی اور زائد سے متعلق مسائل	ڈاکٹر کاشف خان	93
	نمونہ امتحانی پرچہ		123
	تصدیق نامہ		124

مصنفین کی تفصیل (Writer's Details)

ڈاکٹر کاشف خان، ریاضی، مرکز برائے فاصلاتی وآن لائن تعلیم، مانو، حیدرآباد	Dr. Kashif Khan, (Mathematics), Centre for Distance and Online Education, MANUU

پروف ریڈرس: 1. ڈاکٹر کاشف خان 2. ڈاکٹر خواجہ معین الدین

ٹائٹل پیج: ابراہیم اکرم صدیقی

پیغام

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی(MANUU) 1998 میں پارلیمنٹ کے ایک ایکٹ کے ذریعے قائم کی گئی۔ یہ ایک مرکزی جامعہ ہے جس نے این اے اے سی کی جانب سے گریڈ +A حاصل کیا ہے۔اس جامعہ کے قیام کے مقاصد ہیں: (1) اردو زبان کا فروغ، (2) پیشہ ورانہ اور تکنیکی تعلیم کو اردو میڈیم میں قابل رسائی اور دستیاب بنانا، (3) روایتی اور فاصلاتی طریقۂ تعلیم کے ذریعے تعلیم فراہم کرنا، اور (4) خواتین کی تعلیم پر خصوصی توجہ دینا۔ یہ وہ نکات ہیں جو اس مرکزی جامعہ کو دیگر تمام مرکزی جامعات سے ممتاز کرتے ہیں اور اسے ایک انفرادیت بخشتے ہیں۔ قومی تعلیمی پالیسی 2020 میں بھی مادری زبانوں اور علاقائی زبانوں میں تعلیم حاصل کرنے پر زور دیا گیا ہے۔

اردو کے ذریعے علم کے فروغ کا مقصد یہی ہے کہ اردو جاننے والے طبقے کے لیے عصری علوم اور مضامین تک رسائی آسان بنائی جائے۔ ایک طویل عرصے تک اردو میں درسی مواد کی کمی رہی ہے۔اردو یونیورسٹی کے پاس اب اردو میں 350 سے زیادہ کتابوں کا ذخیرہ موجود ہے اور ہر سمسٹر کے ساتھ اس تعداد میں اضافہ ہو رہا ہے۔ اردو یونیورسٹی این ای پی 2020 کے وژن کے مطابق مادری/گھریلو زبان میں تعلیمی مواد فراہم کرنے کے قومی مشن کا حصہ بننے کو اپنے لیے ایک اعزاز سمجھتی ہے۔ مزید یہ کہ اردو بولنے والا طبقہ اردو میں مطالعہ کے مواد کی عدم دستیابی کے سبب نئے اُبھرتے شعبوں اور جدید تر معلومات کے موجودہ میدانوں میں تازہ ترین معلومات واطلاعات کے حصول سے محروم نہیں رہے گا۔ مذکورہ بالا میدانوں میں مواد کی دستیابی کی بدولت حصولِ معلومات کا نیا شعور بیدار ہوا ہے جو یقیناً اردو داں طبقے کی دانشورانہ ترقی پر اثر انداز ہوگا۔
فاصلاتی اور آن لائن طلبہ کے لیے تعلیم وتدریس کے عمل کو سہل بنانے کے لیے یونیورسٹی کا سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن (CDOE) اردو اور متعلقہ مضامین میں خود اکتسابی مواد (SLM) کی تیاری کو یقینی بناتا ہے۔

MANUU فاصلاتی اور آن لائن لرننگ کے طلبہ کے لیے SLM بلا معاوضہ فراہم کرتا ہے۔ یہ مواد اُردو کے ذریعے علم حاصل کرنے میں دلچسپی رکھنے والے ہر شخص کے لیے برائے نام قیمت پر دستیاب ہے۔ تعلیم تک رسائی کے دائرے کو مزید پھیلانے کے مقصد سے، اردو/ہندی/انگریزی/عربی میں eSLM یونیورسٹی کی ویب سائٹ پر مفت ڈاؤن لوڈ کے لیے دستیاب رکھا گیا ہے۔

مجھے بے حد خوشی ہے کہ متعلقہ فیکلٹی کی محنت اور مصنفین کے مکمل تعاون کی بدولت FYUG بی۔اے، بی۔ایس سی اور بی۔کام کی کتابوں کی اشاعت کا عمل بڑے پیمانے پر شروع ہو گیا ہے۔ فاصلاتی اور آن لائن لرننگ کے طلبہ کی سہولت کے لیے خود اکتسابی مواد (SLM) کی تیاری اور اشاعت کا عمل یونیورسٹی کے لیے اہمیت رکھتا ہے۔ مجھے یقین ہے کہ ہم اپنے خود تعلیمی مواد کے ذریعے اردو جاننے والے ایک بڑے طبقے کی ضروریات کو پورا کرنے کے قابل ہوں گے اور اس یونیورسٹی کے مقصدِ قیام کو پورا کریں گے اور اپنے ملک میں اپنی موجودگی کو جائز ٹھہرا سکیں گے۔

نیک تمناؤں کے ساتھ!

پروفیسر سید عین الحسن
شیخ الجامعہ، مانو

پیغام

موجودہ دور میں فاصلاتی تعلیم کو دنیا بھر میں ایک نہایت مؤثر اور مفید طریقۂ تعلیم کے طور پر تسلیم کیا جاتا ہے اور بڑی تعداد میں لوگ اس طریقۂ تعلیم سے فائدہ اٹھا رہے ہیں۔ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی نے بھی اردو زبان بولنے والے عوام کی تعلیمی ضروریات کو مد نظر رکھتے ہوئے اپنے قیام کے وقت سے ہی فاصلاتی تعلیم کا طریقہ متعارف کرایا۔ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی نے 1998 میں ڈائریکٹوریٹ آف ڈسٹنس ایجوکیشن (نظامتِ فاصلاتی تعلیم) کے ساتھ کام کا آغاز کیا اور 2004 سے باقاعدہ پروگرام شروع ہوئے، اس کے بعد مختلف شعبہ جات قائم کیے گئے۔

یو جی سی نے ملک میں نظام تعلیم کو مؤثر طور پر منظم کرنے میں ایک اہم کردار ادا کیا ہے۔ اوپن اینڈ ڈسٹنس لرننگ (ODL) موڈ کے تحت چلنے والے مختلف پروگرام، جو سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن (CDOE) میں چل رہے ہیں، یو جی سی-ڈی ای بی کے منظور شدہ ہیں۔ یو جی سی-ڈی ای بی نے فاصلاتی اور باقاعدہ تعلیم کے نصاب کو ہم آہنگ کرنے پر زور دیا ہے تاکہ فاصلاتی تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ کے معیار کو بہتر بنایا جاسکے۔ چونکہ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی ایک دُہرے طرز (ڈوئل موڈ) کی یونیورسٹی ہے جو فاصلاتی اور روایتی دونوں طریقۂ تعلیم کی خدمات فراہم کرتی ہے، اس لیے اپنے مقاصد کو یو جی سی-ڈی ای بی کے رہنما خطوط کے مطابق حاصل کرنے کے لیے اس نے چوائس بیسڈ کریڈٹ سسٹم (CBCS) متعارف کرایا گیا جس کا خود اکتسابی مواد (Self Learning Materials) یو جی سی کے قوانین اور کریڈٹ فریم کے مطابق نئے سرے سے تیار کیے جاچکا ہے۔

سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن (CDOE) کل انیس (19) پروگرام پیش کرتا ہے جن میں یو جی، پی جی، بی ایڈ، ڈپلومہ اور سرٹیفکیٹ پروگرام شامل ہیں۔ اس کے ساتھ ساتھ تکنیکی مہارتوں پر مبنی پروگرام بھی شروع کیے جارہے ہیں۔ سی ڈی او ای نے جولائی 2025 سے این ای پی-2020 کے مطابق چار سالہ یو جی پروگرام کا آغاز کیا ہے۔ بی اے، بی ایس سی اور بی کام کے آنرز پروگراموں کو این سی ایف کے مطابق ڈیزائن کیا گیا ہے جس سے طلبہ کو آنرز ڈگری حاصل کرنے میں مدد ملے گی۔ سال 2025-2026 سے ایم بی اے پروگرام او ڈی ایل موڈ میں متعارف کرایا گیا ہے۔

مانو نے طلبہ کی سہولت کے لیے نو ریجنل سنٹرز (بنگلورو، بھوپال، دربھنگہ، دہلی، کولکاتا، ممبئی، پٹنہ، رانچی اور سری نگر) اور چھ سب ریجنل سنٹرز (حیدرآباد، لکھنؤ، جموں، نوح، وارانسی اور امراؤتی) کا ایک وسیع نیٹ ورک قائم کیا ہے۔ اس کے علاوہ وجے واڑا میں ایک ایکسٹینشن سنٹر بھی قائم کیا گیا ہے۔ ان ریجنل اور سب ریجنل سنٹروں کے تحت ایک سو پچاس سے زیادہ لرنر سپورٹ سنٹر (LSCs) اور بیس پروگرام سنٹر بیک وقت چلائے جارہے ہیں تاکہ طلبہ کو تعلیمی اور انتظامی سہولیات فراہم کی جاسکیں۔ سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن اپنی تعلیمی اور انتظامی سرگرمیوں میں آئی سی ٹی کا بھرپور استعمال کرتا ہے اور اپنے تمام پروگراموں میں صرف آن لائن موڈ کے ذریعے ہی داخلے فراہم کرتا ہے۔

طلبہ کے لیے سیلف لرننگ میٹیریل (SLM) کی سوفٹ کاپی سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن کی ویب سائٹ پر دستیاب کرائی جاتی ہیں اور آڈیو و ویڈیو ریکارڈنگ کے لنک بھی ویب سائٹ پر فراہم کیے جاتے ہیں۔ اس کے علاوہ طلبہ کو ای۔ میل اور واٹس ایپ گروپ کی سہولت بھی فراہم کی جارہی ہے جن کے ذریعے انہیں پروگرام کے مختلف پہلوؤں جیسے کورس رجسٹریشن، اسائنمنٹ، کاؤنسلنگ، امتحانات وغیرہ کے بارے میں مطلع کیا جاتا ہے۔ باقاعدہ کاؤنسلنگ کے علاوہ گزشتہ دو برسوں سے طلبہ کے تعلیمی معیار کو بہتر بنانے کے لیے زائد تدارکی (Remedial) آن لائن کاؤنسلنگ بھی فراہم کی جارہی ہے۔

امید کی جاتی ہے کہ سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن تعلیمی اور معاشی طور پر پسماندہ آبادی کو عصری تعلیم کے دھارے میں شامل کرنے میں ایک اہم کردار ادا کرے گا۔ تعلیمی ضروریات کو مد نظر رکھتے ہوئے نئی تعلیمی پالیسی (NEP-2020) کے مطابق مختلف پروگرامز میں تبدیلیاں کی گئی ہیں اور توقع ہے کہ اس سے اوپن اینڈ ڈسٹنس لرننگ کے نظام کو مزید مؤثر اور کارآمد بنانے میں مدد ملے گی۔

پروفیسر محمد رضا اللہ خان

ڈائرکٹر، سی ڈی او ای، مانو

کورس کا تعارف

زیر نظر کتاب، تجزیاتی جیومٹری(Analytical Geometry)کے موضوعات سے متعلق ہے اور یہ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کے بی ایس سی کورس کے پہلے سمسٹر کے نصاب پر مشتمل ہے۔ تجزیاتی جیومٹری ریاضی کا ایک ایسا حصہ ہے جس میں جیومٹری کے بنیادی اصولوں اور علم احصاء(Calculus) کے بنیادی ضابطوں کو بیان کیا جاتا ہے۔ اس کتاب کی نمایاں خصوصیت یہ ہے کہ اس میں مواد کو سہل طریقے سے آسان زبان میں مثالوں کے ذریعہ سمجھایا گیا ہے، تاکہ طلبا اپنے مضمون کو از خود سمجھ سکیں۔

کتاب کو دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ جس میں پہلا حصہ نظریات (تھیوری) پر مبنی ہے اور دوسرا حصہ پریکٹکل (تجربوں) پر منحصر ہے۔ پہلا حصہ چار (4) اکائیوں پر مشتمل ہے۔ اکائی 1 میں مخروطی اور دائرہ کے بارے میں جانکاری دی گئی ہے۔ اکائی 2 میں مکافی سے متعلق معلومات درج ہے۔ اکائی 3 بیضی اور اس کے مسائل پر مبنی ہے۔ چوتھی اکائی میں زائد کی تعریف اور اس کے چند اطلاقات دیے گئے ہیں نیز مخروطی کے لیے قطبی ضابطہ اور اس پر کئی مثالیں دی گئی ہیں۔

طلبا سے توقع کی جاتی ہے کہ وہ عملی کلاسوں میں شرکت کریں اور کونسلر کی رہنمائی میں تجرباتی مینول میں دیے گئے مسائل کو حل کرنے کی مہارت حاصل کریں۔

طلبا کی مسئلہ ل صلاحیت کو بہتر بنانے کے لیے اس مینول میں دو اکائیوں کا تجرباتی حصہ دیا گیا ہے۔ طلبا کی طرف سے کیے گئے کام کا ریکارڈ وہ عملی امتحان کے وقت جمع کریں۔

اس کتاب کی تدوین میں مصنف، تدریسی و غیرہ تدریسی و انتظامی عملے کے تعاون کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ کتاب کو معیاری اور قابل عمل و فہم بنانے کی ممکن کوشش کی گئی ہے، تاہم کوئی بھی کوشش اپنے آپ میں مکمل نہیں ہوتی۔ اس ضمن میں اساتذہ اکرام، ماہرین طلبا کی آرا و مشوروں کا خیر مقدم کیا جائے گا۔

ڈاکٹر خواجہ معین الدین
کورس کوآرڈی نیٹر

اکائی 1۔ مخروطیاں: دائرہ

(Conics:Circle)

اکائی کے اجزا

1.0 تمہید

1.1 مقاصد

1.2 دائرہ

1.3 اکتسابی نتائج

1.4 کلیدی الفاظ

1.5 نمونہ امتحانی سوالات

1.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

1.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

1.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

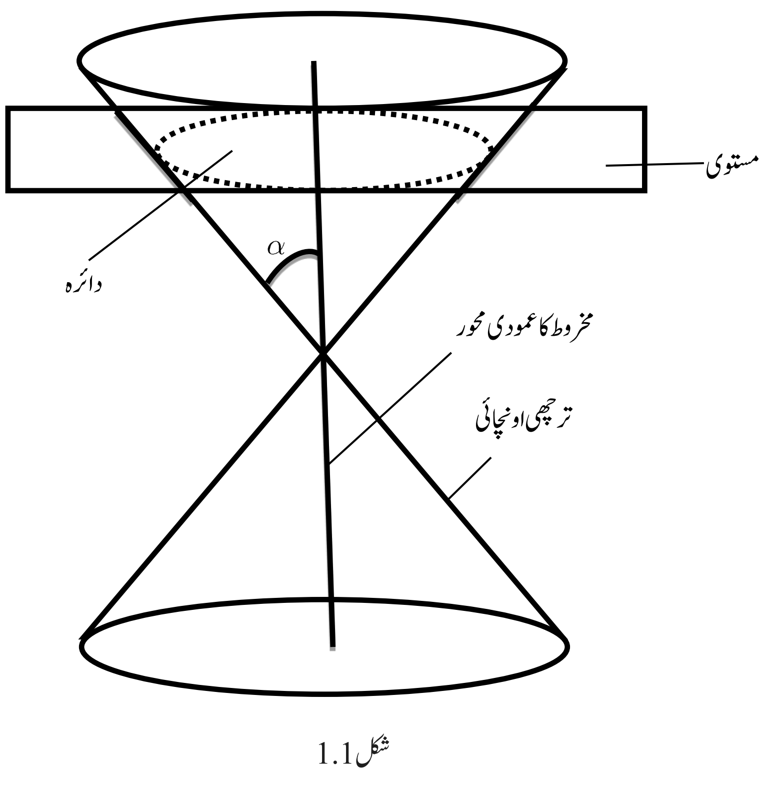
1.0 تمہید(Introduction)

ہم خطوط کے درمیانی رقبے، قوسی لمبائی(Arch length)اور کسی خط کو کسید وسرے خط یا محوروں کے گرد گھمانے سے حاصل ٹھوس کے حجم کو حاصل کرنا سیکھ چکے ہیں۔ اس باب میں ہمچند منحنیات کے بارے میں، جیسے دائرہ(Circle)،.بیضی(Ellipse)، مکافی(Parabola)اور زائد(Hyperbola)کا تفصیلی مطالعہ کریں گے۔

ریاضی کی ترقی میں اہم کردار نبھانے والے مشہور یونانیریاضی داں اور عظیم جیومیٹر(The Great Geometer) اپولونیس(Apollonius)نے اپنی کتاب کونکس(conics)ہیں مکافی ،.بیضی اور زائد کی اصطلاحات کو متعارف کرایا۔ان منحنیا تکا استعمال سیاروں کی حرکت، دُربین(Telescope)اور انٹینہ(Antenna)کی ڈیزائن، فلیش لائٹوں اور آٹوموبائل میں ریفلیکٹر وغیرہ جیسے شعبوں میں وسیع پیمانے پر ہوتا ہے۔

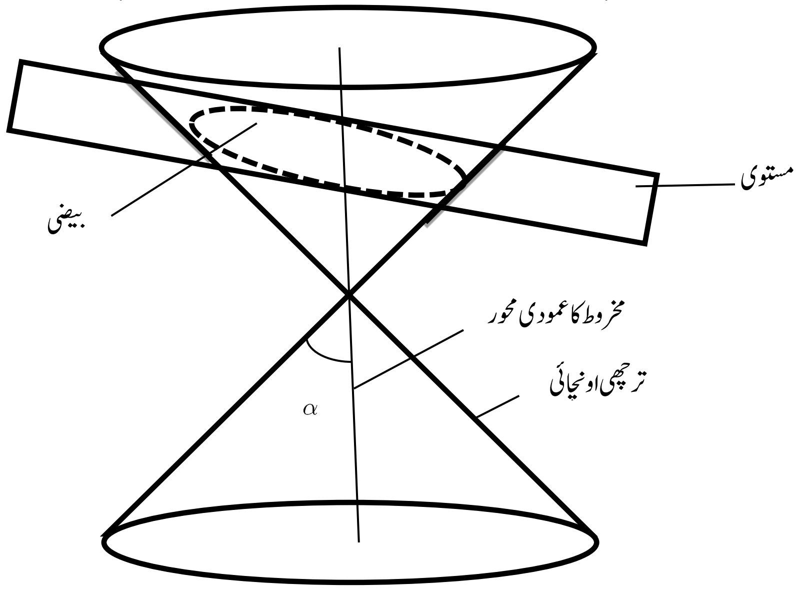
اگر کسی مستوی کی مدد سے دوہرے متصل مقروط(Double Napped Cone)کواس کے عمودی محور(Vertical axis)سے مختلف زاویوں اور مختلف مقاموں سے کاٹا جاتا ہے تواس سے ہمیں مدرجہ ذیل منحنیات حاصل ہوتی ہیں:

- ❖ اگر مستوی دوہرے متصل مخروط کو(راس(Vertex)کے علاوہ)اس کے عمودی محور سے 90° کے زاویے پر کاٹتا ہے (یا مخروط کے اساس کے متوازی(Parallel to the base of one of the double napped cone))تواس سے ہمیں ایک دائرہ حاصل ہوتا ہے۔



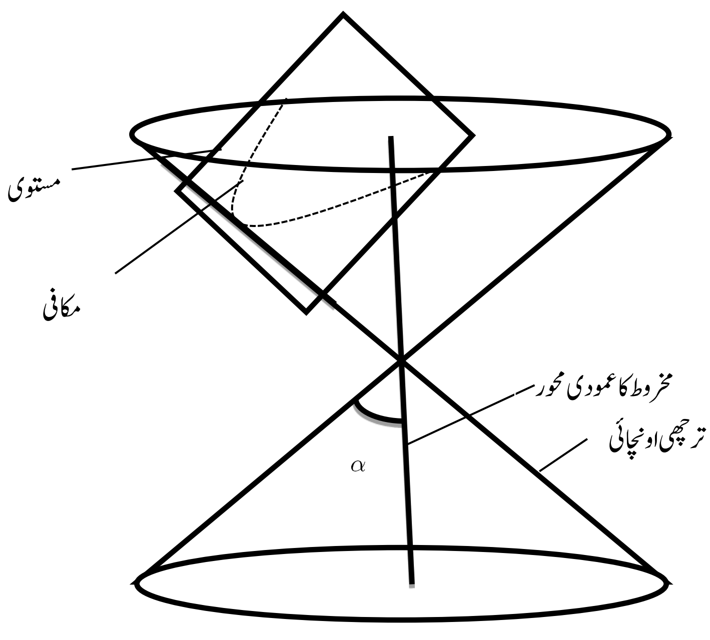
شکل 1.1

❖ اگر مستوی دوہرے متصل مخروط کو(راس کے علاوہ)اس کے عمودی محور سے 90° سے کم زاویے(جو کہ ترچھے خط کی اساس محور سے زاویہ سے زیادہ ہو)پر کاٹتا ہے، تو اس سے ہمیں ایک بیضی(Ellipse)حاصل ہوتا ہے۔



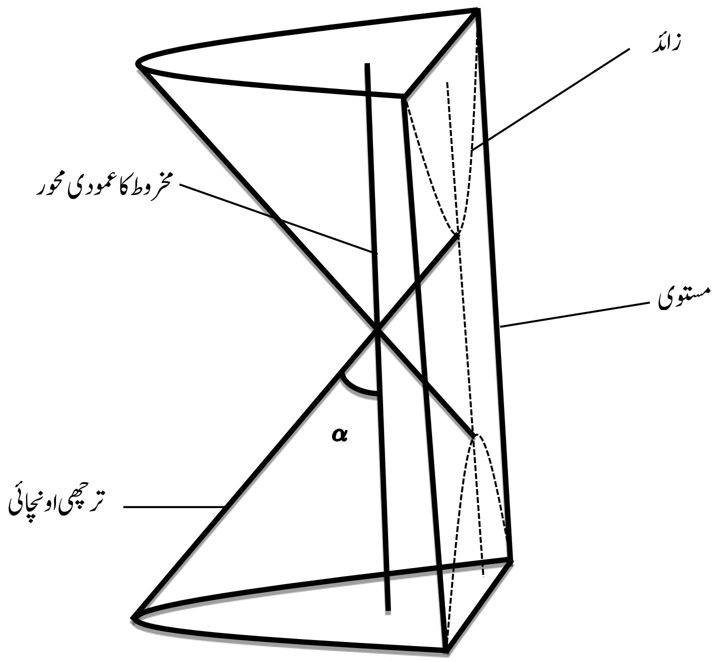
شکل 1.2

❖ اگر مستوی دوہرے متصل مخروط کو(راس کے علاوہ)ترچھے خط کے متوازی کاٹتا ہے، تو اس سے ہمیں ایک مکافی(Parabola) حاصل ہوتا ہے۔



شکل 1.3

❖ اگر مستوی دوہرے متصل مخروط کو اس کے عمودی محور سے 90° سے کم زاویے(جو کہ ترچھے خط کی اساس محور سے زاویہ سے کم ہو)پر کاٹتا ہے، تو اس سے ہمیں ایک زائد(Hyperbola)حاصل ہوتا ہے۔



شکل1.4

1.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے اختتام پر آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ دائرہ کی تعریف اور اس کے متعلق مسئلوں کو سمجھ کر دی گئی مساوات سے اس کا مبدا اور نصف قطر حاصل کر سکیں۔

1.2 دائرہ (Circle)

تعریف: کسی مستوی میں ان سبھی نقاط کا سٹ کو جن کی کسی مقررہ نقطہ (Fixed Point) سے دوری مستقل رہتی ہے، دائرہ کہتے ہیں۔ مقررہ نقطہ کو اس دائرہ کا مرکز (Centre) اور مستقل دوری کو اس کا نصف قطر (Radius) کہتے ہیں۔

دائرہ جس کا مرکز مبدا اور نصف قطر r ہو (Circle whose centre is the origin and radius is r)

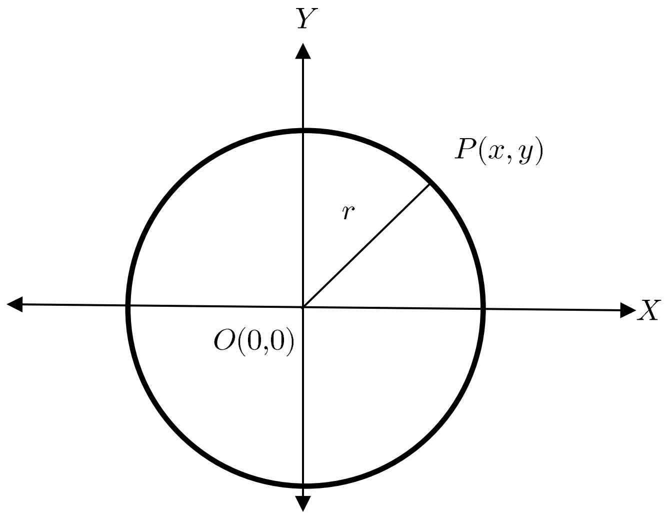
فرض کیجیے کہ دائرہ کا مرکز $O(0,0)$، نصف قطر r اور اس کے محیط (Circumference) پر ایک نقطہ $P(x,y)$ ہے۔ اب دائرہ کی تعریف اور دو نقطوں کی درمیانی فاصلہ کے ضابطے کی مدد سے

$$OP = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$$



شکل 1.5

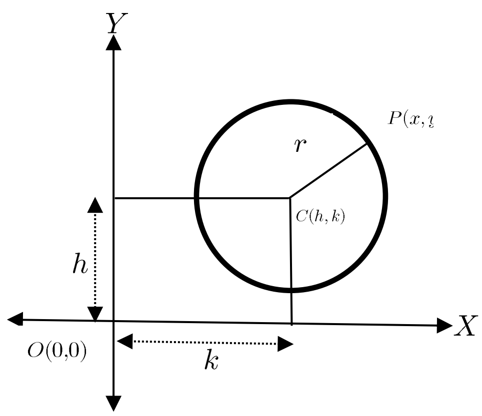
دائرہ جس کا مرکز (h,k) اور نصف قطر r ہو (Circle whose centre is (h,k) and radius is r)

فرض کیجیے کہ دائرہ کا مرکز $C(h,k)$، نصف قطر r اور اس کے محیط (Circumference) پر ایک نقطہ $P(x,y)$ ہے۔ اب دائرہ کی تعریف اور دو نقطوں کی درمیانی فاصلہ کے ضابطے کی مدد سے

$$CP=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$\Rightarrow r=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$$

$$\Rightarrow (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$



شکل 1.6

مثال۔ دکھائیے کہ دو درجی مساوات $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ایک دائرہ کو ظاہر کرتی ہے اور اس کا مرکز اور نصف قطر حاصل کیجیے۔

حل۔ دی گئی دو درجی مساوات ہے

$$\begin{aligned} & x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \\ \Rightarrow\ & x^2+g^2+2gx+y^2+f^2+2fy+c-f^2-g^2=0 \\ \Rightarrow\ & (x+g)^2+(y+f)^2=f^2+g^2-c \\ \Rightarrow\ & (x+g)^2+(y+f)^2=\left(\sqrt{f^2+g^2-c}\right)^2 \end{aligned}$$

ہم اس مساوات کا موازنہ مساوات $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ سے کرتے ہیں۔ جس سے ظاہر ہوتا ہے کہ دی گئی مساوات ایک دائرہ کو ظاہر کرتی ہے۔ دائرہ کی اس مساوات کے لیے نصف قطر $\sqrt{f^2+g^2-c}$ ہے اور دائرہ کا مرکز $(-g,-f)$ ہے۔

دائرہ کے کسی نقطہ پر مماس (Tangent at any Point on a Circle)

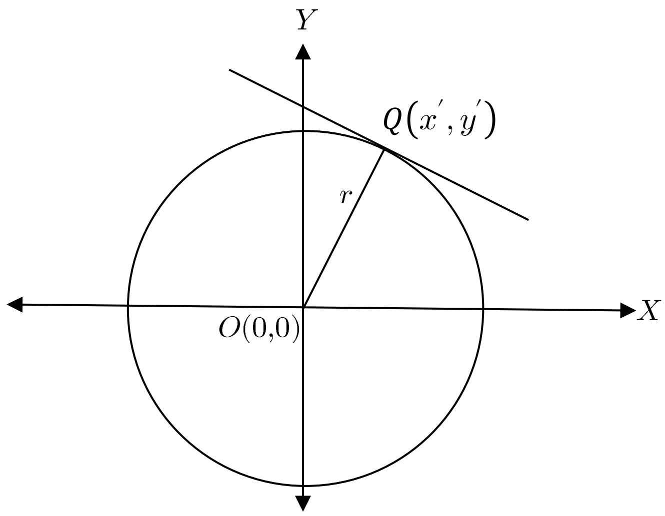
دائرہ کے کسی نقطہ پر مماس وہ خط ہے جو دائرہ کے اس نقطہ کو چھوتا ہے اور آگے بڑھانے پر دائرہ کو نہیں کاٹتا۔ مماس ہمیشہ دائرہ کے نصف قطر پر عمودی (Perpendicular) ہوتا ہے۔

مان لیجیے کہ دائرہ کا مرکز $O(0,0)$ اور نصف قطر r ہے۔ تب دائرہ کی مساوات ہے

$$x^2+y^2=r^2$$

اس دائرہ کے نقطہ $Q(x',y')$ پر خط کی مساوات درجہ ذیل ہوگی

$$y-y'=m(x-x')$$



شکل 1.7

مبدا سے جانے والے خط OQ کی مساوات درجہ ذیل ہوگی

$$y=\left(\frac{y'}{x'}\right)x$$

چوں کہ مماس، دائرہ کے نصف قطر پر عمودی ہوتی ہے، اس لیے

$$\begin{aligned} & mm'=-1 \\ \Rightarrow\ & m\left(\frac{y'}{x'}\right)=-1 \\ \Rightarrow\ & m=-\frac{x'}{y'} \end{aligned}$$

اس لیے دائرہ پر مماس کی مساوات

$$y-y'=-\frac{x'}{y'}\ \ x-x'$$
$$\Rightarrow xx'+yy'=x'^2+y'^2$$

چوں کہ نقطہ $Q\left(x',y'\right)$ دائرہ پر ہی ہے، اس لیے $x'^2+y'^2=r^2$

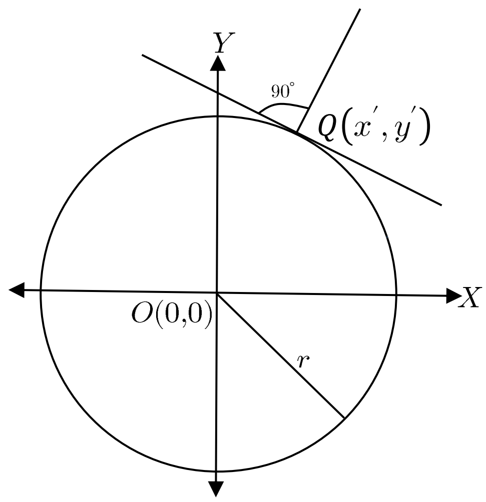
اس لیے

$$xx'+yy'=r^2$$

مطلوبہ مماس کی مساوات ہو گی۔

دائرہ پر نارمل کی مساوات (Equation of the Normal to the Circle)

تعریف: کسی منحنی کے نقطہ P پر نارمل، اس نقطہ پر مماس کے عمودی ایک خط ہوتا ہے۔



شکل 1.8

مان لیجیے کہ دائرہ کا مرکز O 0,0 اور نصف قطر r ہے۔ تب دائرہ کی مساوات ہے

$$x^2+y^2=r^2$$

اس دائرہ کے نقطہ $Q\left(x',y'\right)$ پر مماس کی مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$xx'+yy'=r^2$$
$$\Rightarrow y=-\left(\frac{x'}{y'}\right)x+\frac{r^2}{y'}$$

نقطہ $Q\left(x',y'\right)$ سے ہو کر گزرنے والے اور اس مماس پر عمودی خط کی مساوات درجہ ذیل

$$y-y'=m\ \ x-x'$$

چوں کہ یہ خط مماس پر عمودی ہے، اس لیے

$$mm'=-1$$
$$\Rightarrow m\left(-\frac{x'}{y'}\right)=-1$$
$$\Rightarrow \qquad m=\frac{y'}{x'}$$

اس لیے دائرہ پر نارمل خط کی مساوات

$$y-y'=\frac{y'}{x'}\ \ x-x'$$
$$\Rightarrow x'y+xy'=0$$

ظاہر ہے کہ یہ مساوات دائرہ کے مبدا سے ہو کر جائے گی۔

اب دائرہ کی عام مساوات $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ کے نقطہ $Q\left(x',y'\right)$ پر مماس کی مساوات ہو گی

$$y=-\left(\frac{x'+g}{y'+f}\right)x-\left(\frac{gx'+fy'+c}{y'+f}\right)$$

اس پر عمودی اور نقطہ $Q\left(x',y'\right)$ سے ہو کر گزرنے والے سیدھے خط کی مساوات

$$y-y'=m\ x-x'$$

جب کہ

$$mm'=-1$$
$$\Rightarrow m\left\{-\left(\frac{x'+g}{y'+f}\right)\right\}=-1$$
$$\Rightarrow \qquad m=\frac{y'+f}{x'+g}$$

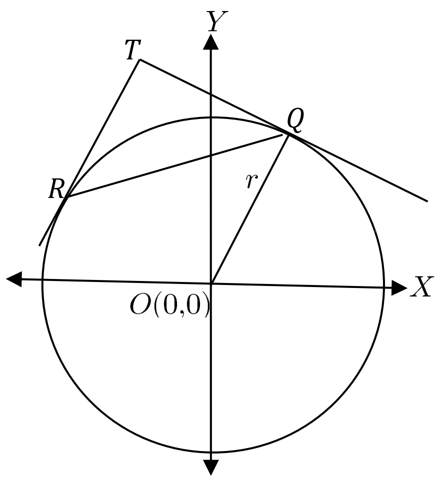
اس لیے نارمل خط کی مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$y-y'=\left(\frac{y'+f}{x'+g}\right)\ x-x'$$

رابطہ کا وتر (Chord of Contact)

اگر دائرہ کے باہر کسی نقطہ T سے اس کے دو نقطوں Q اور R پر مماس کھینچے جائیں تو خط QR کو نقطہ T سے مماسوں کے رابطے کا وتر کہتے ہیں۔

فرض کیجیے کہ باہری نقطہ $T\left(x_1,y_1\right)$ سے کسی دائرہ کے دو نقطوں $Q\left(x_2,y_2\right)$ اور $R\left(x_3,y_3\right)$ پر دو مماس خطوط ہیں۔ اس لیے نقطوں Q اور R پر مماسوں کی مساوات درجہ ذیل ہوں گی



شکل 1.9

$$xx_2+yy_2=r^2$$

اور

$$xx_3+yy_3=r^2$$

چوں کہ یہ دونوں خط نقطہ x_1,y_1 سے گزرتے ہیں، اس لیے

(1)... $$x_1x_2+y_1y_2=r^2$$

اور

(2)... $$x_1x_3+y_1y_3=r^2$$

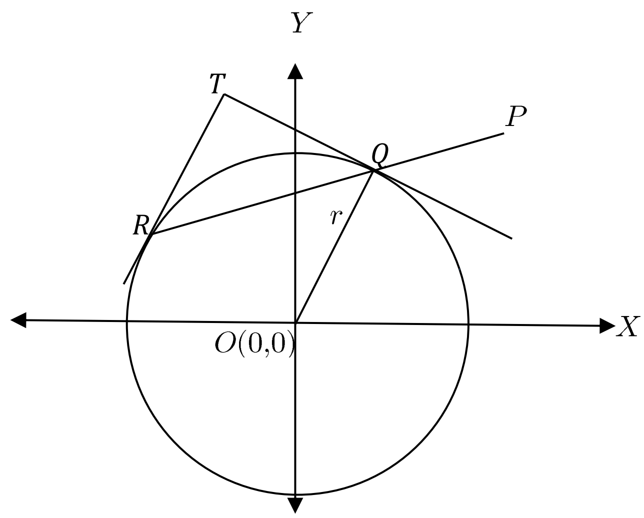
اس لیے رابطے کے وتر QR کی مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$x_1x + y_1y = r^2 \qquad (3)...$$

چوں کہ مساوات (1) درست ہے اور جس سے ظاہر ہوتا ہے کہ نقطہ x_2, y_2 خط (3) پر موجود ہے اور چوں کہ مساوات (2) درست ہے جس سے ظاہر ہوتا ہے کہ نقطہ x_3, y_3 خط (3) پر موجود ہے۔ یعنی دونوں نقطے $Q(x_2, y_2)$ اور $R(x_3, y_3)$ رابطہ کے وتر پر موجود ہوں گے۔

قطب اور قطبی (Pole and Polar)

اگر کسی نقطہ P سے ہو کر کوئی خط کسی دائرہ کے دو نقطوں Q اور R سے ملتا ہے، تو نقطوں Q اور R پر مماس کے مقطع نقطہ کا مقام (Locus of the Point) نقطہ P کا قطبی کہلاتا ہے اور ساتھ ہی نقطہ P کو قطبی کا قطب کہتے ہیں۔



شکل 1.10

فرض کیجیے کہ نقطہ x_1, y_1 سے ایک خط دائرہ پر دو نقطوں Q اور R سے ہو کر گزرتا ہے جن پر دو مماس خطوط نقطہ h, k پر ملتے ہیں۔

چوں کہ نقطوں Q اور R پر مماس کا مقطع (Intersection) نقطہ h, k ہے تب خط QR کی مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$xh + yk = r^2$$

چوں کہ یہ خط نقطہ x_1, y_1 سے گزرتا ہے، تب

$$x_1h + y_1k = r^2$$

چوں کہ یہ رشتہ درست ہے جس کی وجہ سے نقطہ h, k درجہ ذیل خط پر موجود ہو گا

$$x_1x + y_1y = r^2$$

اس لیے یہ مساوات نقطہ x_1, y_1 کے قطبی (Polar) کی مساوات ہے۔

بلحاظ دائرہ کسی خط کا قطب (Pole of a Line with respect to a Circle)

فرض کیجیے کہ دیے گئے خط کی مساوات $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ اور دائرہ $x^2 + y^2 = r^2$ ہے، اور مان لیجیے کہ دیے گئے خط کے لیے مطلوبہ قطب x_1, y_1 ہے۔ تب قطب x_1, y_1 کے لیے قطبی درجہ ذیل ہو گی

$$x_1x + y_1y - r^2 = 0$$

جو کہ دیے گئے قطب x_1, y_1 کے لیے قطبی کی طرح ہی ہے۔ان دونوں مساوات کا موازنہ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{y_1}{b_1} = \frac{r^2}{c_1}$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{a_1r^2}{c_1}, y_1 = -\frac{b_1r^2}{c_1}$$

اس لیے مطلوبہ قطب $\left(-\frac{ar^2}{c}, -\frac{br^2}{c}\right)$ ہے۔

نوٹ: اسی طرح بلحاظ دائرہ کی عام مساوات $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ کے کسی دیے گئے خط کے لیے قطب کو $\frac{x_1+g}{a_1} = \frac{y_1+f}{b_1} = \frac{gx_1+fy_1+c}{c_1}$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 1۔ اس دائرہ کی مساوات حاصل کیجیے جس کا مرکز (0,0) اور نصف قطر 2 ہے۔

حل۔ ہم جانتے ہیں کہ اس دائرہ کی مساوات جس کا مرکز (0,0) اور نصف قطر r ہو درجہ ذیل ہوتی ہے

$$x^2 + y^2 = r^2$$

یہاں دیے گئے دائرہ کا نصف قطر 2 ہے، اس مطلوبہ دائرہ کی مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$x^2 + y^2 = (2)^2$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

مثال 2۔ اس دائرہ کی مساوات حاصل کیجیے جس کا مرکز (0,0) اور قطر (Diameter) $12cm$ ہے۔

حل۔ ہم جانتے ہیں کہ اس دائرہ کی مساوات جس کا مرکز (0,0) اور نصف قطر r ہو درجہ ذیل ہوتی ہے

$$x^2 + y^2 = r^2$$

یہاں دیے گئے دائرہ کا قطر $12cm$ ہے، اس لیے نصف قطر $6cm$ ہو گا اور اس لیے دائرہ کی مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$x^2 + y^2 = (6)^2$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 36$$

مثال 3۔ اس دائرہ کی مساوات حاصل کیجیے جس کا مرکز (–3,2) اور قطر (Diameter) $8\ cm$ ہے۔

حل۔ ہم جانتے ہیں کہ اس دائرہ کی مساوات جس کا مرکز h, k اور نصف قطر r ہو درجہ ذیل ہوتی ہے

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

یہاں دیے گئے دائرہ کا قطر $8cm$ ہے، اس لیے نصف قطر $4cm$ ہو گا اور اس کا مرکز (–3,2) ہے اور اس لیے دائرہ کی مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = (4)^2$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$$

مثال 4۔ دائرہ $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 23 = 0$ کا مرکز اور قطر حاصل کیجیے۔

حل۔ سب سے پہلے دی گئی مساوات کو دائرہ کی معیاری مساوات میں تبدیل کرتے ہیں

$$x^2 + y^2 - 2x + 10y + 23 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 - 2x + (1)^2 + y^2 + 10y + 25 - 3 = 0$$
$$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 5)^2 = (\sqrt{3})^2 \quad \ldots (1)$$

ہم جانتے ہیں کہ اس دائرہ کی مساوات جس کا مرکز h, k اور نصف قطر r ہو درجہ ذیل ہوتی ہے

$$x-h^{2}+ y-k^{2}=r^2 \quad \dots 2$$

مساوات 1 کا موازنہ مساوات 2 سے کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

نصف قطر $r=\sqrt{3}$ اور

دائرہ کا مرکز $= 1, -5$

مثال 5۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے جس کا مرکز نقطہ $-a, -b$ پر ہو اور جس کا نصف قطر $\sqrt{a^2-b^2}$ ہے۔

حل۔ ہم جانتے ہیں کہ اس دائرہ کی مساوات جس کا مرکز h, k اور نصف قطر r ہو درجہ ذیل ہوتی ہے

$$x-h^{2}+ y-k^{2}=r^2$$

یہاں دیے گئے دائرہ کا نصف قطر $\sqrt{a^2-b^2}$ ہے اور اس کا مرکز $-a, -b$ ہے اور اس لیے دائرہ کی مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$x+a^{2}+ y+b^{2}= 4^{2}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+2ax+2by+a^2+b^2=0$$

مثال 6۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے جو نقطوں $0, 0$ ، $a, 0$ اور $0, b$ سے ہو کر گزرتا ہے۔

حل۔ ہم جانتے ہیں کہ دائرہ کی عام مساوات درجہ ذیل ہوتی ہے

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

یہاں دیا گیا دائرہ نقطوں $0, 0$ ، $a, 0$ اور $0, b$ سے ہو کر گزرتا ہے اس لیے یہ تمام نقاط من درجہ بالا دائرہ کی مساوات کو مطمئن کریں گے، اب

$$c=0 \quad \dots 1$$

$$a^2+2ga+c=0 \quad \dots 2$$

$$b^2+2fb+c=0 \quad \dots 3$$

مساوات (1) سے کی قیمت مساوات (2) اور (3) میں درج کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$a^2+2ga+0=0 \Rightarrow g=-\frac{a^2}{2a}=-\frac{a}{2}$$

اور

$$b^2+2fb+0=0 \Rightarrow f=-\frac{b^2}{2b}=-\frac{b}{2}$$

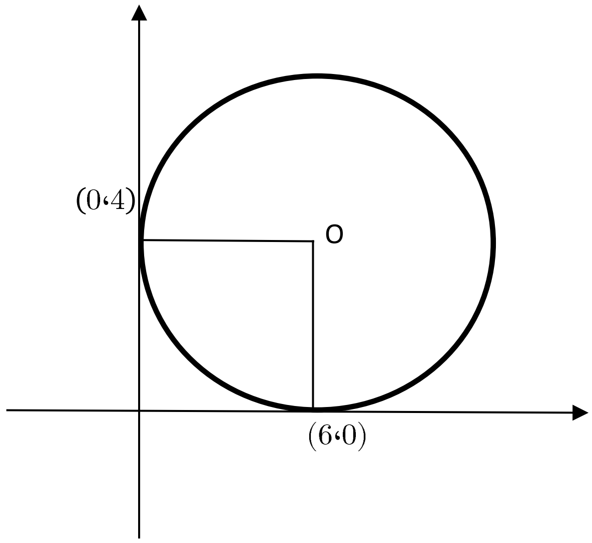
اب مساوات $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ میں یہ تمام قیمتیں درج کرنے پر دائرہ کی مطلوبہ مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\Rightarrow x^2+y^2-ax-by=0$$

مثال 7۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے جو y محور کو مثبت سمت میں 4 اکائی اور x محور کو 6 اکائی کی مثبت دوری پر چھوتی ہے۔

حل۔ ہم جانتے ہیں کہ دائرہ کی عام مساوات درجہ ذیل ہوتی ہے

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$



شکل 1.9

اب چوں کہ یہ دائرہ y محور کو مثبت سمت میں 4 اکائی اور x محور کو 6 اکائی کی مثبت دوری پر چھوتا ہے۔اس لیے

$$y^2 + 2fy + c = 0 \qquad \ldots\ 1$$
$$x^2 + 2gx + c = 0 \qquad \ldots\ 2$$

مساوات (1) کے ریشے برابر اور ہر ایک کی قدر 4 ہو گی اسی طرح مساوات (2) کے ریشے برابر اور ہر ایک کی قدر 6 ہو گی۔اب مساوات (1) سے ہمیں حاصل ہو گا

$$y^2 + 2fy + c = \ y - 4\ ^2$$
$$\Rightarrow y^2 + 2fy + c = y^2 - 8y + 16$$
$$\Rightarrow f = -4, c = 16$$

مساوات (2) سے ہمیں حاصل ہو گا

$$x^2 + 2gx + 16 = 0$$
$$\Rightarrow x = \frac{-2g \pm \sqrt{4g^2 - 64}}{2}$$

چوں کہ دائرہ x محور کو 6 اکائی کی مثبت دوری پر چھوتا ہے۔ $6 = 2\sqrt{g^2 - 16}$

اس لیے

$$g = \pm 5$$

اب مساوات $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ میں یہ تمام قیمتیں درج کرنے پر دائرہ کی مطلوبہ مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$x^2 + y^2 \pm 10x - 8y + 16 = 0$$

مثال 8۔دائرہ $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ پر اس مماس کی مساوات معلوم کیجیے جو خط $4x + 3y + 5 = 0$ کے متوازی ہے۔

حل۔دی گئی دائرہ کی مساوات ہے

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$$

$$\Rightarrow x^2-6x+3^2+y^2+4y+2^2-12-13=0$$
$$\Rightarrow\ \ x-3\ ^{2}+\ \ y+2\ ^{2}=5^2$$

دیے گئے خط کے متوازی خط کی مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$4x+3y+\lambda=0$$

اب اگر یہ خط دیے گئے دائرہ پر مماس ہو تو اس کی نقطہ $(3,-2)$ سے دوری ±5 کے مساوی ہو گی، یعنی

$$\frac{12-6+\lambda}{\sqrt{4^2+3^2}}=\pm5$$

اس لیے

$$\lambda=-6\pm25$$

یعنی -31 یا $\lambda=19$

اس لیے مطلوبہ مماس کی مساوات درجہ ذیل ہوں گی

$$4x+3y+19=0$$

اور

$$4x+3y-31=0$$

مثال 9۔ بلحاظ دائرہ $2x^2+2y^2-3x+5y-7=0$ خط $9x+y-28=0$ کے لیے قطب حاصل کیجیے۔

حل۔ فرض کیجیے کہ دیے گئے خط کی مساوات $9x+y-28=0$ اور دائرہ $2x^2+2y^2-3x+5y-7=0$ ہے، اگر دیے گئے خط کے لیے مطلوبہ قطب x_1,y_1 ہو تو x_1,y_1 کے لیے قطبی درجہ ذیل ہو گی

$$2x_1x+2y_1y-\frac{3}{2}\ \ x+x_1\ \ +\frac{5}{2}\ \ y+y_1\ \ -7=0$$
$$\Rightarrow 4x_1x+4y_1y-3\ \ x+x_1\ \ +5\ \ y+y_1\ \ -14=0$$
$$\Rightarrow\ \ 4x_1-3\ \ x+\ \ 4y_1+5\ \ y-3x_1+5y_1-14=0$$

ان دونوں مساوات کا موازنہ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{4x_1-3}{9}=\frac{4y_1+5}{1}=\frac{-3x_1+5y_1-14}{-28}$$
$$\Rightarrow x_1=9y_1+12,3x_1-117y_1=126$$

اس لیے مطلوبہ قطب $3,-1$ ہے۔

1.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے دائرہ کی تعریف اور اس کے متعلق مسئلوں کو سمجھا اور دی گئی مساوات سے اس کا مرکز اور نصف قطر حاصل کرنا سمجھا۔ ساتھ ہی دیے گئے مرکز اور نصف قطر کی مدد سے مطلوبہ دائرہ کی مساوات حاصل کرنا بھی سیکھا۔

1.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

دائرہ، نصف قطر، محیط، قطر، قطب، قطبی، رابطہ کا وتر

1.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

1.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. اس دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے جس کا مرکز نقطہ $-1,2$ پر ہو اور جس کا نصف قطر 3 ہے۔
2. اس دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے جس کا مرکز نقطہ $-5,-6$ پر ہو اور جس کا نصف قطر 10 ہے۔
3. اس دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے جس کا مرکز نقطہ $-1,2$ پر ہو اور جس کا نصف قطر 3 ہے۔
4. اس دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے جس کا مرکز نقطہ $\boldsymbol{a,-b}$ پر ہو اور جس کا نصف قطر $\boldsymbol{a+b}$ ہے۔
5. دائرہ $x^2+y^2+4x-6y=0$ سے اس کا مرکز اور اس کا نصف قطر معلوم کیجیے۔
6. دائرہ $x^2+y^2-4x-8y-41=0$ سے اس کا مرکز اور اس کا نصف قطر معلوم کیجیے۔
7. دائرہ $45x^2+45y^2-60x+36y+19=0$ سے اس کا مرکز اور اس کا نصف قطر معلوم کیجیے۔
8. دائرہ $x^2+y^2=c\ x+c$ سے اس کا مرکز اور اس کا نصف قطر معلوم کیجیے۔
9. دائرہ $x^2+y^2-2x+10y+23=0$ کا مرکز اور قطر حاصل کیجیے۔
10. اس دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے جس کا مرکز نقطہ $\boldsymbol{a,-b}$ پر ہو اور جس کا نصف قطر $\boldsymbol{a+b}$ ہے۔

1.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. اس دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے جو نقطوں $1,2$ ، $3,-4$ اور $5,-6$ سے ہو کر گزرتا ہے۔
2. اس دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے جو نقطوں $1,0$ ، $0,-6$ اور $3,4$ سے ہو کر گزرتا ہے۔
3. اس دائرہ کی مساوات محسوب کیجیے جس کے قطر کے اختتامی نقاط a,b ، c,d ہوں۔
4. اس دائرہ کی مساوات محسوب کیجیے جو مبدا سے ہو کر گزرتا ہے اور جس کے $x-$ محور پر 3 اور $y-$ محور پر 4 کے مساوی مقطوعات (Intercepts) ہوں۔
5. اس دائرہ کی مساوات حاصل کیجیے جو مبدا سے $x-$ محور اور $y-$ محور دونوں کو 5 اکائی کے فاصلے پر چھوتے ہوئے گزرتا ہو۔
6. دائرہ $x^2+y^2-3x+10y-15=0$ پر اس مماس کی مساوات معلوم کیجیے جو نقطہ $4,-11$ کے متوازی ہے۔
7. دائرہ $x^2+y^2+2gx+2fy+k=0$ پر اس مماس کی مساوات معلوم کیجیے جو خط $x+2y=6$ کے متوازی ہے۔

1.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. اس دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے جو مختصات محور کو مبدا سے $x=3$ اور $y=4$ پر کاٹتا ہے۔
2. بتائیے کہ دائرہ $ax^2+ay^2+2gx+2fy+c=0$ مختصات محور کو مبدا سے کہاں کاٹتا ہے؟
3. اس دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے جو x محور کو 6 چھوتی ہے اور دو نقطوں $(2,-1)$ اور $(4,-3)$ سے ہو کر گزرتی ہے۔

اکائی 2۔ مکافی

(Parabola)

اکائی کے اجزا

2.0 تمہید

2.1 مقاصد

2.2 مکافی

2.3 اکتسابی نتائج

2.4 کلیدی الفاظ

2.5 نمونہ امتحانی سوالات

2.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

2.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

2.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

2.0 تمہید (Introduction)

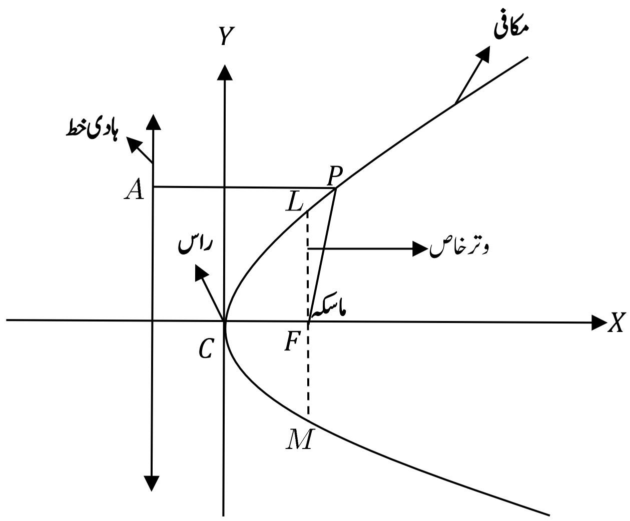
پچھلی اکائی میں ہم بیضی کی تفصیلی جانکاری حاصل کر چکے ہیں۔ اس اکائی میں ہم مکافی کے بارے میں پڑھیں گے۔ مکافی کے لیے خروج المرکز 1 ہوتا ہے۔ خروج المرکز بنیادی طور پر ماسکہ اور ہادی خط سے مکافی پر کسی نقطہ کے فاصلوں کا تناسب ہے۔ آیئے ہم مکافی کی تعریف، ضابطہ اور کسی دیے گئے ضابطے سے مکافی کو پہچان کر اس کے ہادی خط اور وتر خاص کی لمبائی کو معلوم کرنے کا ضابطہ حاصل کر کے اس کے مطابق چند مسائل کو حل کرنا سیکھتے ہیں۔

2.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے اختتام پر طلبا اس قابل ہو جائیں گے کہ مکافی کا پیرامتری اور پولر ضابطہ کو پہچان کر اس کے ہادی خط (Directrix) کو معلوم کر سکیں اور دی گئی معلومات کا استعمال کر کے مکافی کی مساوات محسوب کر سکیں گے۔ نیز دیے گئے مکافی کے ضابطہ سے اس کے ماسکے ہادی خط اور خروج المرکز حاصل کر سکیں گے۔

2.2 مکافی (Parabola)

تعریف: مکافی، کسی مستوی میں ان نقاط کا سٹ ہے، جن کی کسی مقررہ نقطہ اور مقررہ خط سے دوری ہمیشہ مساوی رہے۔

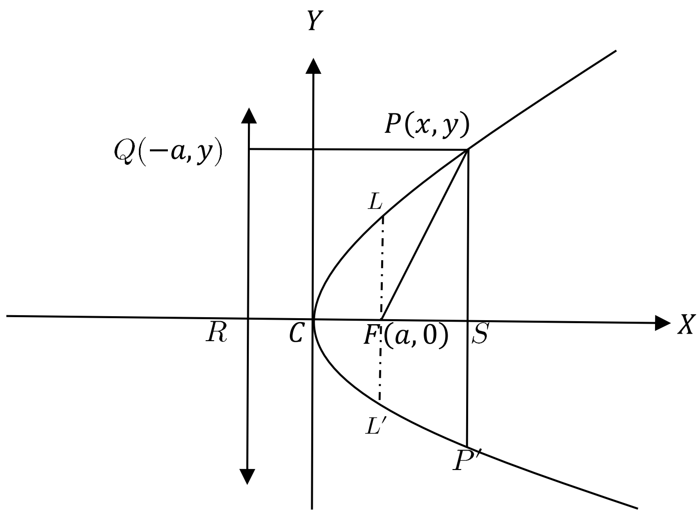


شکل 2.1

مقرر خط ہادی خط کہلاتا ہے اور مقرر نقطہ کو مکافی کا ماسکہ (Focus) کہتے ہیں۔ ماسکہ سے گزرنے والے اور ہادی خط پر عمودی خط کو مکافی کا محور (Axis of Parabola) اور محور اور مکافی کے نقطہ تقاطع (Intersection Point) کو مکافی کا راس (Vertex) کہتے ہیں۔ چوں کہ مکافی کے کسی نقطہ سے اس کے ماسکہ اور ہادی خط سے دوری ہمیشہ برابر رہتی ہے اس لیے مکافی کے لیے خروج المرکز کی قیمت 1 ہوتی ہے۔

درجہ ذیل شکل میں فرض کیجیے کہ مکافی کا ماسکہ F اور ہادی خط QR ہے۔ مکافی کی تعریف کے مطابق مکافی پر موجود نقطہ (مان لیجیے کہ وہ P ہے) کی ہادی خط سے عمودی دوری PQ، مکافی کے ماسکہ سے اس نقطہ کی عمودی دوری PF کے برابر ہوتی ہے۔ ہادی خط پر نقطہ F سے (جسے مکافی کا ماسکہ کہتے ہیں)، ایک عمودی خط FR کھینچتے ہیں۔ FR کو نقطہ C (جسے مکافی کا راس کہتے ہیں) دو برابر حصوں (ہر ایک کی دوری a) میں تقسیم کرتا ہے۔ اس لیے

$$CR = CF = a$$



شکل 2.2

مان لیجیے کہ مکافی پر ایک نقطہ $P\ \ x, y$ ہے اس سے ماسکے کو جوڑنے والا خط PF ہے۔ نقطہ P سے مکافی کے محور پر اور ہادی خط پر بالترتیب عمودی خط PS اور PQ کھینچے گئے ہیں۔ اب مکافی کی تعریف سے

$$PQ^2 = PF^2$$

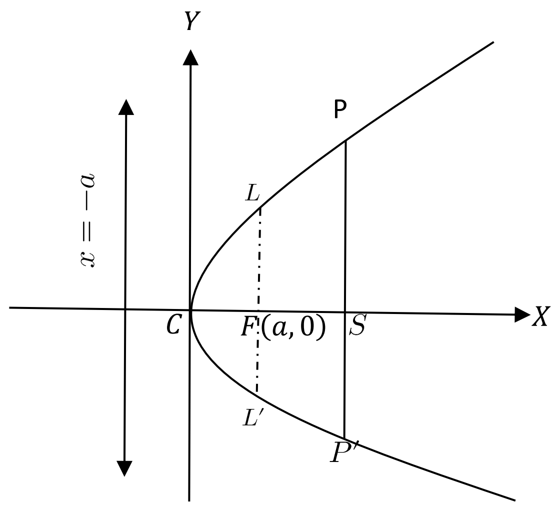
$$x + a\ ^2 = \ x - a\ ^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = \ x + a\ ^2 - \ x - a\ ^2$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = 4ax$$

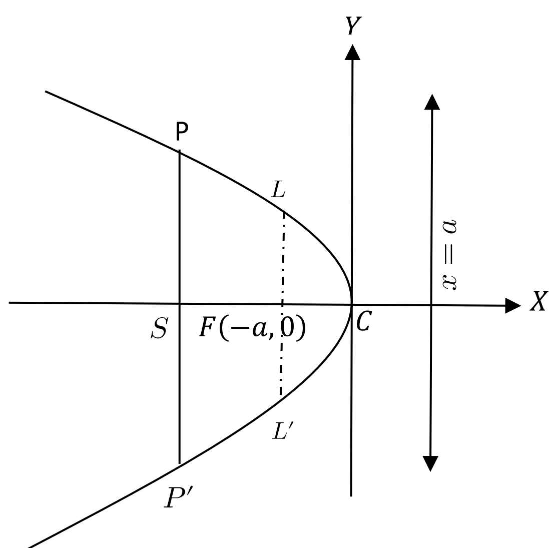
اس کے لیے ہادی خط $x=-a$ ہوگا۔ یہی مکافی کی معیاری مساوات ہے جس کا راس مبدا پر اور توازنی محور x محور یا y محور پر ہے۔

درجہ ذیل مکافی کی چار مختلف ممکنہ شکلیں ہو سکتی ہیں۔



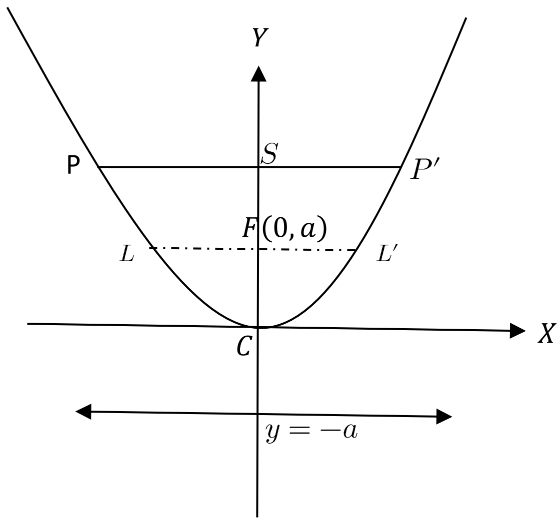
$\boldsymbol{y^2=4ax}$

شکل 2.3



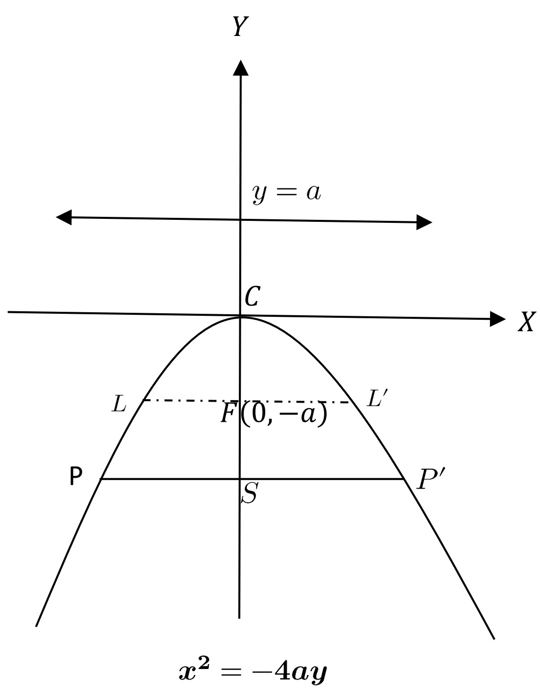
$\boldsymbol{y^2=-4ax}$

شکل 2.4



$$x^2 = 4ay$$

شکل2.5



$$x^2 = -4ay$$

شکل2.6

وترخاص(Latus Rectum): مکافی کا وترخاص ایک خط ہے جو مکافی کے محور پر عمودی ہو اور جس کے انتہائی نقاط مکافی پر ہوں۔

شکل 3.7 سے مکافی کی تعریف کے مطابق

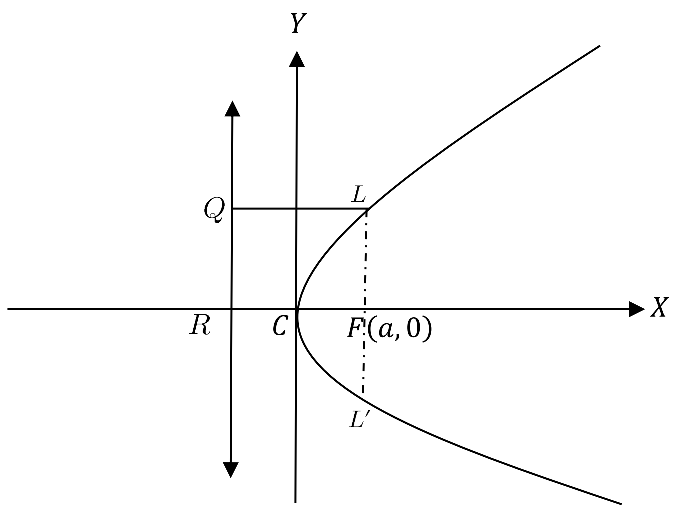
$$LF = LQ$$

لیکن

$$LQ = RF = 2a$$

اب چوں کہ مکافی $x-$ محور کے تحت توازن رکھتی ہے۔ یعنی $LF = FL'$ ہے۔ اس لیے

وترخاص کی لمبائی $= 2 \ 2a = 4a$



شکل 2.7

اگر کسی مکافی کا وترخاص معلوم ہو، تو اس کی مدد سے ہم معیاری مکافی کی مکمل جانکاری حاصل کر سکتے ہیں جیسے اس کی ماپ اور شکل۔

نوٹ: **(1)** $4a$ کو کبھی کبھی مکافی کا پرنسپل پیرامیٹر کہا جاتا ہے۔

(2) مکافی کے ماسکہ کی لمبائی $x + a$ کے مساوی ہوتی ہے۔

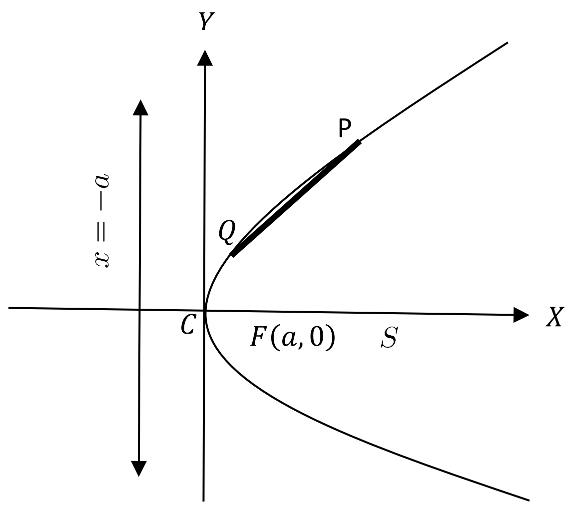
مکافی کی پیرامتری مساوات (Parametric Equation of Parabola)

مان لیجیے کہ مکافی پر ایک نقطہ $P\ \ x, y$ ہے۔ تب ہم ایک ایسی قدر t حاصل کر سکتے ہیں جس کے لیے $x = at^2$ اور $y = 2at$ ہو۔ یعنی اس سے حاصل نقطہ $at^2, 2at$ مکافی پر ہو گا۔ $x = at^2, y = 2a$ کو مکافی کی پیرامتری مساواتیں کہتے ہیں۔ نقطہ $P\ \ x, y$ مکافی کے اندر واقع مانا جاتا ہے اگر $\boldsymbol{y^2 - 4ax}$ کی قدر منفی ہو۔ اس نقطہ کو بلحاظ مکافی اندرونی نقطہ کہتے ہیں۔ لیکن اگر $\boldsymbol{y^2 - 4ax}$ کی قدر مثبت ہو تو نقطہ $P\ \ x, y$ مکافی کے باہر واقع ہو گا اور اس نقطہ کو بلحاظ مکافی ایک خارجی نقطہ کہتے ہیں۔ اگر $\boldsymbol{y^2 - 4ax = 0}$ ہو، تو نقطہ $P\ \ x, y$ مکافی پر موجود ہو گا۔

مکافی پر مماس کی مساوات (Tangent Equation on Parabola)

فرض کیجیے کہ مکافی $y^2 = 4ax$ پر ایک نقطہ $P\ \ x_1, y_1$ ہے اور $Q\ \ x_2, y_2$ کوئی دوسرا نقطہ ہے۔ خط PQ کی مساوات ہو گی

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\ \ x - x_1 \qquad \dots\ 1$$



شکل 2.8

اب چوں کہ دونوں نقطے مکافی پر ہیں، اس لیے

$$y_1{}^2 = 4ax_1 \qquad \dots\ 2$$

اور

$$y_2{}^2 = 4ax_2 \qquad \dots\ 3$$

دونوں مساوات سے

$$y_2^2 - y_1^2 = 4a\ \ x_2 - x_1$$

$$\Rightarrow (y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 4a(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4a}{y_2 + y_1}$$

مساوات(1)میں یہ قدر رکھنے پر ہمیں ایک سیکینٹ(secant)خطPQحاصل ہوتا ہے،جو درجہ ذیل ہے

$$y - y_1 = \frac{4a}{y_2 + y_1}\ \ x - x_1$$

$$\Rightarrow y(y_2 + y_1) - y_1(y_2 + y_1) = 4ax - 4ax_1$$

$$\Rightarrow y(y_2 + y_1) = 4ax - 4ax_1 + y_1(y_2 + y_1)$$

$$\Rightarrow y(y_2 + y_1) = 4ax + y_1 y_2 + (y_1^2 - 4ax_1)$$

چوں کہ $y_1^2 - 4ax_1 = 0$ ہے۔

$$\Rightarrow y(y_2 + y_1) = 4ax + y_1 y_2$$

مماس کی مساوات حاصل کرنے کے لیے ہم نقطہ Q کو نقطہ P کے قریب ترین کر دیتے ہیں، تب $y_1 = y_2$، یعنی دونوں نقطے ایک ہی نقطے کو ظاہر کریں گے، تب

$$2yy_1 = 4ax + y_1^2$$

2 سے

$$2yy_1 = 4ax + 4ax_1$$

$$yy_1 = 2a(x + x_1)$$

جو کہ مکافی پر مماس کی مساوات ہے۔

مکافی پر نارمل(Normal on Parabola)

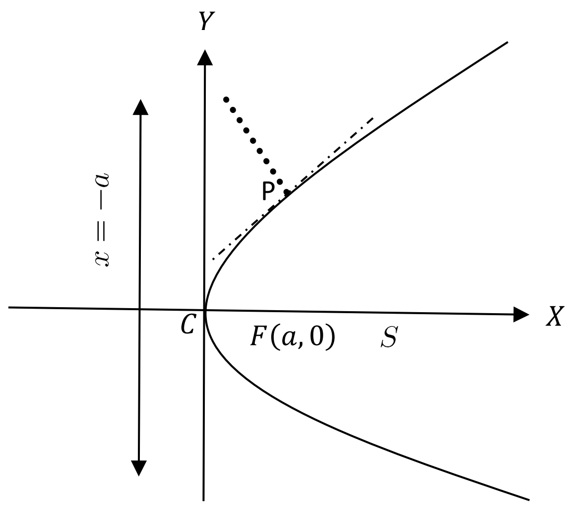
فرض کیجیے کہ مکافی $y^2 = 4ax$ پر ایک نقطہ $P\ \ x_1, y_1$ ہے۔اس نقطہ پر مماس خط کی مساوات ہو گی

$$yy_1 = 2a(x + x_1)$$

$$y = \frac{2a}{y_1}\ \ x + x_1 \qquad \dots\ 1$$

مکافی کے نقطہ $P\ \ x_1, y_1$ پر اس خط کی مساوات جو مماس خط پر عمودی ہو درجہ ذیل ہو گی

$$y - y_1 = m\ \ x - x_1 \qquad \dots\ 2$$



شکل2.9

جب کہ

$$m\left(\frac{2a}{y_1}\right) = -1$$

$$\Rightarrow m = -\frac{y_1}{2a}$$

مساوات(2)میں یہ قدر رکھنے پر ہمیں ایک عمودی خط حاصل ہوتا ہے

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}\ \ x - x_1$$

جو کہ مکافی پر نارمل خط کی مساوات ہے۔

اب ہم مکافی کے کچھ مسئلوں کو مثالوں کی مدد سے سمجھیں گے۔

مثال 1۔اس مکافی کا ماسکہ،اس کا محور،ہادی خط اور وتر خاص معلوم کیجیے جس کی مساوات $y^2 = 12x$ ہے۔

حل۔دی گئی مکافی کی مساوات ہے

$$y^2 = 12x \qquad \ldots\ 1$$

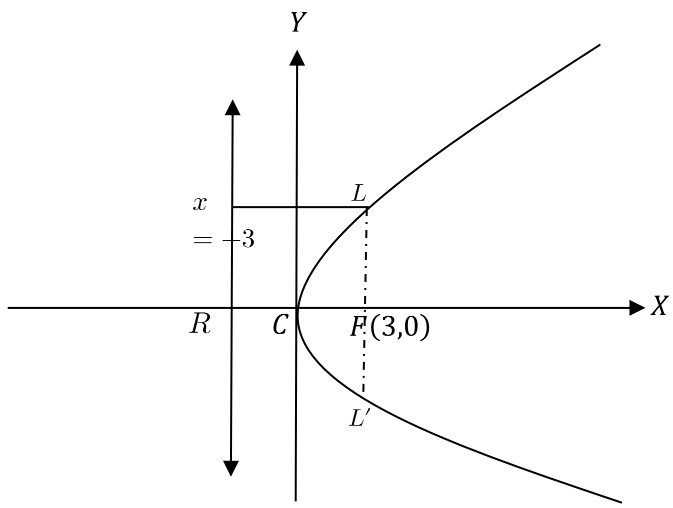
مساوات سے ظاہر ہے کہ مکافی کا محور x— محور ہے۔

مساوات (1) سے مکافی کی معیاری مساوات کا موازنہ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$a = 3$$

اس لیے مکافی کا ماسکہ (3,0) اور ہادی خط $x = -3$ ہو گا۔

اب وتر خاص کی لمبائی $= 4a = 4 \times 3 = 12$



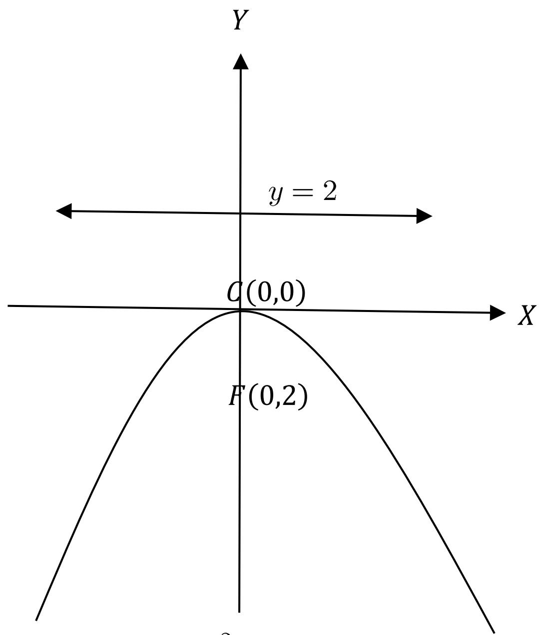
شکل 2.10

مثال 2۔ اس مکافی کی مساوات حاصل کیجیے جس کا ماسکہ (0,2) ہے اور جس کا راس مبدا پر ہے۔

حل۔ مکافی کی دی گئی جانکاری کے مطابق اس کا ماسکہ $y-$ محور پر ہے اور مکافی $y-$ محور کے گرد توازن میں ہو گی۔ نیز $y-$ محور مکافی کا محور ہو گا۔ اس سے ہمیں یہ معلوم ہوا کہ مکافی کی مساوات

$$x^2 = 4ay \qquad \dots\ 1$$

شکل کی ہو گی۔



شکل2.11

اب چوں کہ اس مکافی کا ماسکہ $(0, a)$ ہوتا ہے۔اس لیے

$$a = 2$$

اس لیے مکافی کی مطلوبہ مساوات درجہ ذیل ہو گی

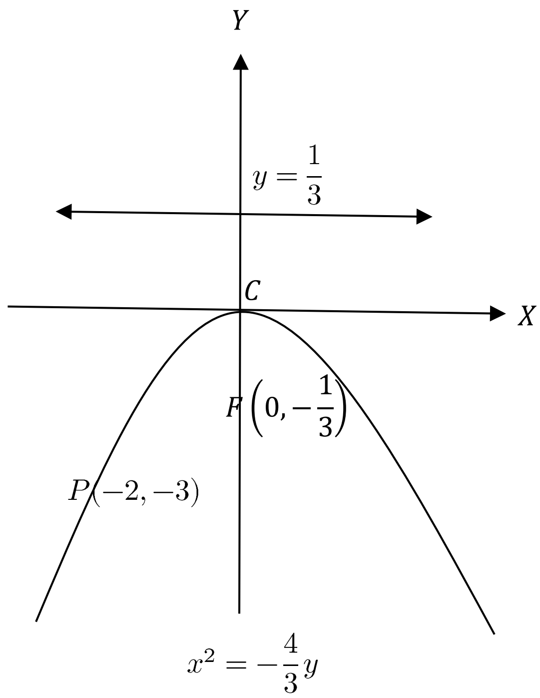
$$x^2 = 4 \times 2 \times y = 8y$$

مثال3۔اس مکافی کی مساوات حاصل کیجیے جو$y-$ محور کے گرد توازن میں ہو اور نقطہ $(-2, -3)$ سے ہو کر گزرتی ہے۔

حل۔چوں کہ مکافی$y-$ محور کے گرد توازن میں ہے اور اس پر موجود نقطہ چوتھے کواڈرینٹ میں ہے،اس لیے مکافی$x-$ محور کے نیچے کی طرف ہو گی۔اس لیے مکافی کی مساوات

$$x^2 = -4ay \quad \ldots 1$$

شکل کی ہو گی۔



شکل2.12

اب چوں کہ مکافی نقطہ (3‒ ,2‒) سے ہو کر گزرتی ہے تو مساوات(1) کو مطمئن کرے گی، یعنی

$$-2\ ^2=-4a\ -3\ \Rightarrow a=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

اس لیے مکافی کی مطلوبہ مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$x^2=-4\times\frac{1}{3}\times y=-\frac{4}{3}y$$

مساوات(1) سے مکافی کی معیاری مساوات کا موازنہ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$a=3$$

اس لیے مکافی کا ماسکہ (3,0) اور ہادی خط $x=-3$ ہو گا۔

اب وتر خاص کی لمبائی= $4a=4\times 3=12$

مثال4۔ مکافی $y^2=8x$ نقطہ $2,-4$ پر مماس اور نارمل کی مساوات حاصل کیجیے۔

حل۔ دی گئی مکافی کی مساوات ہے

$$y^2 = 4 \times 2x$$

ہم جانتے ہیں کہ مکافی کے نقطہ (x_1, y_1) پر مماس کی مساوات درجہ ذیل ہوتی ہے

$$yy_1 = 2 \times 2(x + x_1)$$

سوال کے مطابق نقطہ $2, -4$ پر مماس کی مساوات

$$y(-4) = 2 \times 2(x + 2)$$

$$y = -(x + 2)$$

جو کہ مکافی پر مماس کی مطلوبہ مساوات ہے۔

اب درجہ بالا مماس پر نارمل کی مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$y = x - 2$$

مثال 5۔ بلحاظ مکافی $y^2 = 4kx$ خط $ax + by + c = 0$ کا قطب اور قطبی حاصل کیجیے۔

حل۔ مان لیجیے کہ مکافی کا قطب (x_1, y_1) ہے۔ تب اس کے لیے قطبی کی مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$yy_1 = 2k\ x + x_1 \qquad \dots\ 1$$

$$2kx - yy_1 + 2kx_1 = 0$$

یہ خط دیے گئے خط کے مشابہ ہے، اس لیے

$$\frac{2k}{a} = -\frac{y_1}{b} = \frac{2kx_1}{c}$$

اس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x_1 = \frac{c}{a}, y_1 = -\frac{2kb}{a}$$

اس لیے قطب $\left(\frac{c}{a}, -\frac{2kb}{a}\right)$ ہے۔

2.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہو گئے ہوں گے کہ مکافی کی کارتیسی، پیرامتری اور پولر ضابطہ کو پہچان کر اس کے راس، وتر خاص اور ہادی خط (Directrix) کو معلوم کر سکیں اور مکافی کے مختلف مسئلوں کا حل حاصل کرنا سیکھ گئے ہوں گے۔ نیز دیے گئے ماسکے، ہادی خط اور خروج المرکز کی مدد سے مکافی کی مساوات حاصل کر سکیں۔

2.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

مکافی، ہادی خط، وتر خاص، ماسکہ، راس

2.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

2.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. مکافی کے لیے خروج المرکز کی قیمت ——————ہوتی ہے۔

(a) 0 (b) 1 (c) ایک سے کم (d) ایک سے زیادہ

2. مکافی جس کا ماسکہ (0,2) ہے اور جس کا راس مبدا پر ہے وہ مساوات ۔

(a) $x^2 = 8y$ (b) $x^2 = -8y$ (c) $y^2 = 8x$ (d) $y^2 = -8x$

3. کسی مخروط کے لیے اگر خروج المرکز کی قیمت 1 ہے تو وہ مخروط ہے

(a) بیضی (b) زائد (c) مکافی (d) دائرہ

4. مکافی کے لیے خروج المرکز کی تعریف کیجیے۔

5. مکافی کے وتر خاص کی تعریف کیجیے۔

2.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. اس مکافی کی مساوات حاصل کیجیے جو $y-$ محور کے گرد توازن میں ہو اور نقطہ (2,3) سے ہو کر گزرتی ہے۔

2. اس مکافی کی مساوات حاصل کیجیے جس کا ماسکہ (0,4) ہے اور جس کا راس مبدا پر ہے۔

3. اس مکافی کا ماسکہ، اس کا محور، ہادی خط اور وتر خاص معلوم کیجیے جس کی مساوات $y^2 = 4x$ ہے۔

4. اس مکافی کا ماسکہ، اس کا محور، ہادی خط اور وتر خاص معلوم کیجیے جس کی مساوات $x^2 = 12y$ ہے۔

2.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. مکافی $y^2 = 7x$ پر اس مماس کی مساوات حاصل کیجیے جو خط $4y - x + 3 = 0$ کے متوازی ہو اور اس کا مقطع نقطہ بھی معلوم کیجیے۔
2. مکافی $y^2 = 7x$ پر اس مماس کی مساوات حاصل کیجیے جو نقطہ $4,10$ سے گزرتا ہے۔
3. مکافیوں $y^2 = 4ax$ اور $x^2 = 4by$ پر مشترکہ مماس کی مساوات حاصل کیجیے۔

اکائی 3۔ بیضی

(Ellipse)

اکائی کے اجزا

3.0 تمہید

3.1 مقاصد

3.2 بیضی

3.3 اکتسابی نتائج

3.4 کلیدی الفاظ

3.5 نمونہ امتحانی سوالات

3.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

3.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

3.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

3.0 تمہید (Introduction)

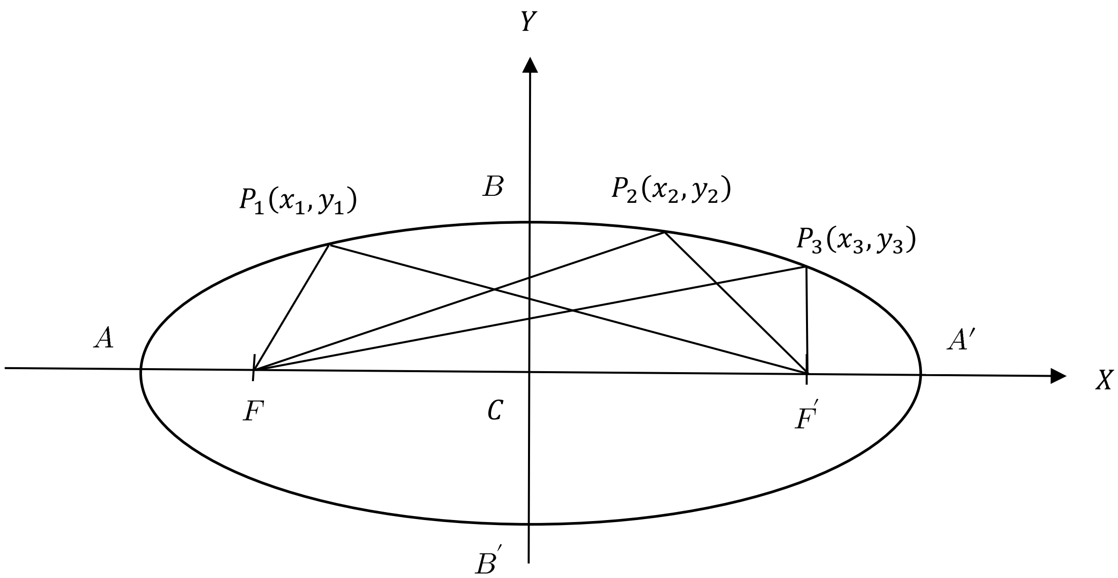
پچھلی اکائی میں ہم دائرہ کی تفصیلی جانکاری حاصل کر چکے ہیں۔ بیضی کیخروج المرکز 1 سے کم ہوتی ہے۔ بیضی کیخروج المرکزہمیں یہ سمجھنے میں مدد دیتی ہے کہ یہ دائرے کے حوالے سے کتنا گول ہے۔ خروج المرکز بنیادی طور پر ماسکہ اور ہادی خط سے بیضی پر کسی نقطہ کے فاصلوں کا تناسب ہے۔ آیئے ہم بیضی کی تعریف، ضابطہ اور کسی دیے گئے ضابطے سے بیضی کو پہچان کر اس کے محور اعظم (Major Axis) اور محور اصغر (Minor Axis) کو حاصل کرنا سیکھتے ہیں نیز وتر خاص کی لمبائی کو بھی معلوم کرنے کا ضابطہ حاصل کر کے اس کے مطالقہ چند مسائل میں وتر خاص کی لمبائی کو محسوب کرنا سیکھتے ہیں۔

3.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے اختتام پر طلبا اس قابل ہو جائیں گے کہ بیضوی کا پیرامتری اور پولر ضابطہ کو پہچان کر اس کے محور اعظم، محور اصغر اور ہادی خط (Directrix) کو معلوم کر سکیں اور کے مطابق حل کریں گے۔ نیز دیے گئے ماسکے ہادی خط اور خروج المرکز کی مدد سے بیضوی کی مساوات حاصل کر سکیں۔

3.2 بیضی (Ellipse)

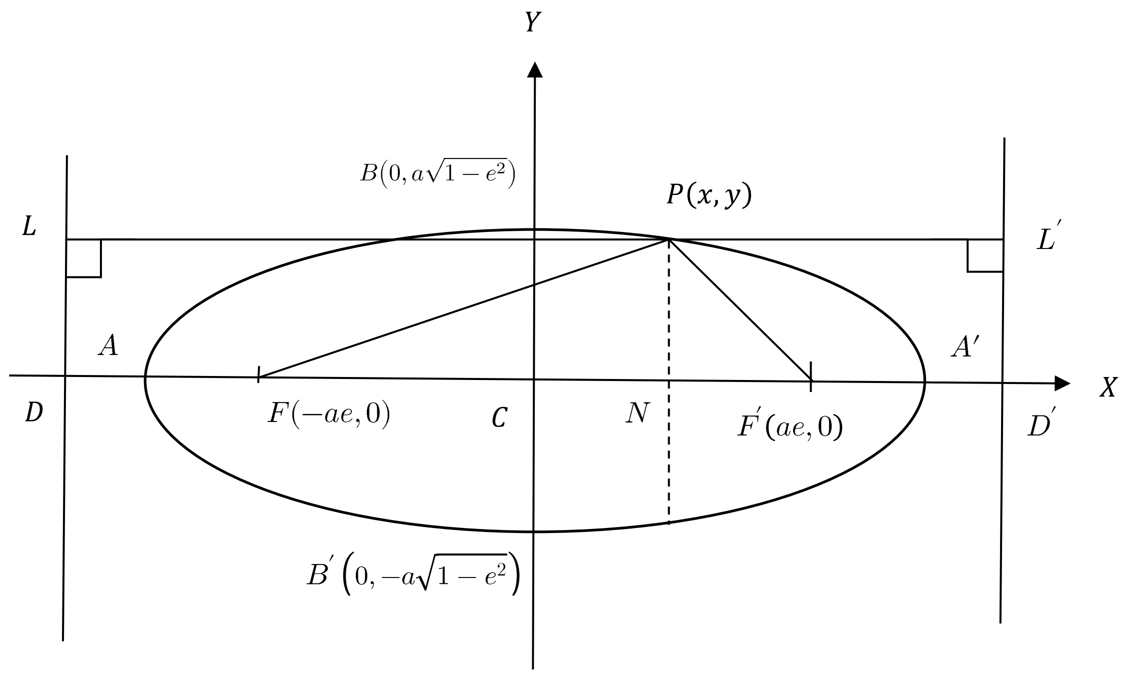
تعریف: بیضی، کسی مستوی میں ان نقاط کا سٹ ہے، جن کی دو مقررہ نقاط سے فاصلے کی جمع ہمیشہ ایک مستقل رہے۔



شکل 3.1

مستقل نقاط کو بیضی کے ماسکے (Foci) کہتے ہیں۔ دونوں ماسکوں کو جوڑنے والے خط کے درمیانی نقطہ (Mid-Point) کو بیضی کا مرکز (Centre)، دونوں ماسکوں سے گزرنے والے خط کو بیضی کا محور اعظم (Major Axis) اور مرکز سے گزرنے والے اور محور اعظم کے عمودی خط کو بیضی کا محور اصغر (Minor Axis) کہتے ہیں۔ محور اعظم کے اختتامی نقاط کو بیضی کے راس (Vertices) کہتے ہیں۔

بیضی کی کارتیسی مساوات (Cartesian Equation of an Ellipse)



شکل 3.2

من درجہ بالا شکل میں بیضی کے ماسکے F اور F' ہیں، F سے ہادی خط DL کا عمودی فاصلہ FD ہے۔ اگر محور اعظم کی لمبائی $AA' = 2a$ کو فرض کیا جائے اور اس کا درمیانی نقطہ C ہو۔ اس لیے

$$FA = eAD$$

اسی طرح اگر FD کو آگے بڑھایا جائے، تب

$$FA' = eA'D$$

من درجہ بالا دونوں مساوات کو جوڑنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$FA + FA' = e\ AD + A'D$$

$$\Rightarrow 2a = AA' = 2e \cdot CD$$

$$\Rightarrow CD = \frac{a}{e}$$

اور من درجہ بالا دونوں مساوات کو گھٹانے(Subtract)پر ہمیں حاصل ہوتا سے

$$FA' - FA = e \cdot \ \ A'D - AD$$

$$\Rightarrow \quad FC + CA' \ - \ CA - CF \ = e \cdot \ A'D - AD$$

$$\Rightarrow \qquad 2CF = e \cdot AA' \qquad [\because CA = CA']$$

$$\Rightarrow 2CF = e \cdot 2a$$

$$\Rightarrow CF = e \cdot a$$

اگر بیضی کا مرکز مبدا اور محور اعظم x— محور پر ہو اور محور اصغر y— محور پر ہو، تب من درجہ بالا شکل سے

$$FP\ ^2 = e^2 \cdot \ PL\ ^2 = e^2 \cdot \ DN\ ^2$$

$$\Rightarrow \quad x + ae\ ^2 + y^2 = e^2 \left(x + \frac{a}{e}\right)^2$$

$$\Rightarrow \ x^2 \ 1 - e^2 \ + y^2 = a^2 \ 1 - e^2$$

$$\Rightarrow \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 \ 1 - e^2} = 1 \qquad \ldots \ 1$$

من درجہ بالا مساوات میں $x = 0$ درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y = \pm a\sqrt{1 - e^2}$$

اس لیے

$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

اس لیے مساوات(1) درجہ ذیل شکل حاصل کر لیتی ہے

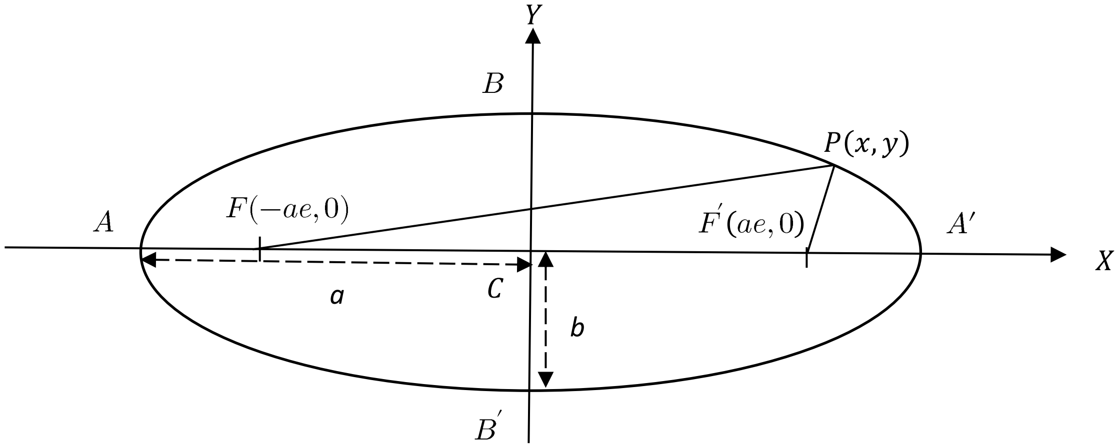
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \ldots \ 2$$

نوٹ:(i) بیضی کے دونوں ماسکوں سے کسی نقطہ کی فاصلوں کی جمع بیضی کے محور اعظم کے مساوی ہوتا ہے، یعنی

$FP + F'P = 2a =$ محور آعظم

(ii)فرض کیجیے کہ.بیضی کا مرکز مبدا(Origin)اور ماسکے x-محور پر وجود رکھتے ہیں تب.بیضی کی معیاری مساوات درجہ ذیل ہو گی

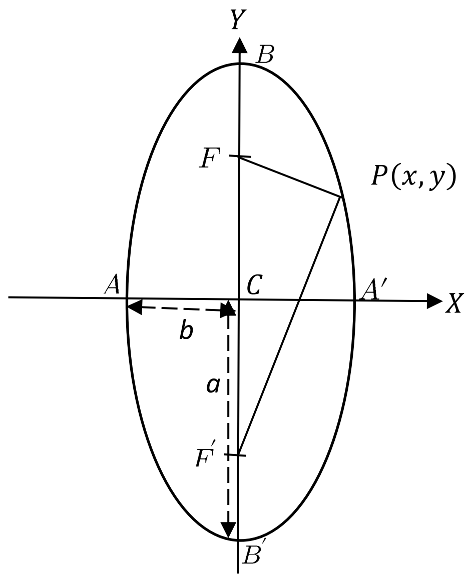
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



شکل3.3

(iii)اب فرض کیجیے کہ.بیضی کا مرکز مبدا(Origin)اور ماسکے y-محور پر ہیں تب.بیضی کی معیاری مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

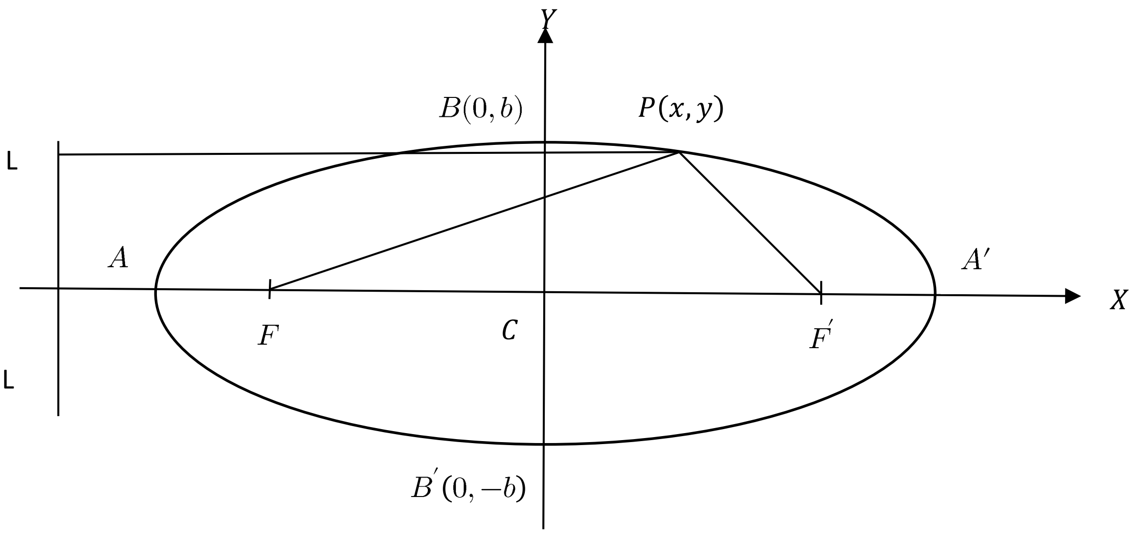


شکل3.4

(iv) اس بیضی کی مساوات، جس کا ماسکہ (h, k)، ہادی خط $fx + gy + c = 0$ اور جس کا خروج المرکز e ہو، درجہ ذیل ہوتی ہے

$$x - h\ ^2 +\ y - k\ ^2 = e^2 \frac{fx + gy + c\ ^2}{f^2 + g^2}$$

بیضی کا خروج المرکز(Eccentricity of Ellipse): بیضی پر کسی نقطہ کی، اس کے ماسکے اور ہادی خط سے فاصلوں کا تناسب، بیضی کا خروج المرکز کہلاتا ہے۔ بیضی کے لیے اس کی قیمت 1 سے کم ہوتی ہے، یعنی $e < 1$



شکل 3.5

من درجہ بالا شکل 2.5 سے ہم جانتے ہیں کہ

$$e = \frac{\text{نقطہ کا ماسکہ سے فاصلہ}}{\text{نقطہ کا ہادی خط سے فاصلہ}} = \frac{PF}{PL} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

بیضی کا وتر خاص(Latus Rectum of an Ellipse): بیضی کا وتر خاص، ایک خط کا ٹکڑا ہے جو کسی بھی ماسکہ کے ذریعے محور اعظم پر عمود اور جس کے اختتامی نقاط بیضی پر ہوتے ہیں۔ بیضی کی تعریف سے

نصف وتر خاص $e \cdot FD = \ Semi\ Latus\ Rectum$

$$e \cdot\ CD - CF\ =$$

$$e \cdot CD - e \cdot CF\ =$$

$$e \cdot \frac{a}{e} - e \cdot ae =$$

$$a - ae^2 =$$

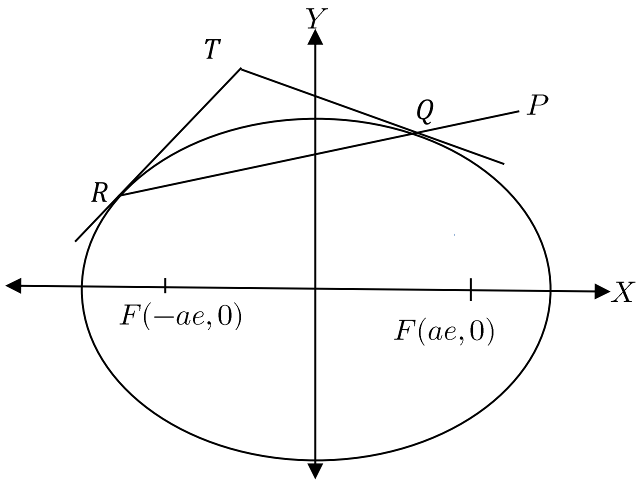
$$a\ 1 - e^2\ =$$

$$a \cdot \frac{b^2}{a^2} =$$

اس لیے نصف وتر خاص= $\frac{b^2}{a}$

قطب اور قطبی(Pole and Polar)

اگر کسی نقطہ P سے ہو کر کوئی خط کسی بیضی کے دو نقطوں Q اور R سے ملتا ہے، تو نقطوں Q اور R پر مماس کے مقطع نقطہ کا مقام(Locus of the Point) نقطہ P کا قطبی کہلاتا ہے اور ساتھ ہی نقطہ P کو قطبی کا قطب کہتے ہیں۔



شکل3.6

فرض کیجیے کہ نقطہ x_1, y_1 سے ایک خط بیضی پر دو نقطوں Q اور R سے ہو کر گزرتا ہے جن پر دو مماس خطوط نقطہ h, k پر ملتے ہیں۔

چوں کہ نقطوں Q اور R پر مماس کا مقطع(Intersection) نقطہ h, k ہے تب خط QR کی مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{xh}{a^2} + \frac{yk}{b^2} = 1$$

چوں کہ یہ خط نقطہ x_1, y_1 سے گزرتا ہے، تب

$$\frac{x_1 h}{a^2} + \frac{y_1 k}{b^2} = 1$$

چوں کہ یہ رشتہ درست ہے جس کی وجہ سے نقطہ h, k درجہ ذیل خط پر موجود ہو گا

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

اس لیے یہ مساوات نقطہ x_1, y_1 کے قطبی(Polar) کی مساوات ہے۔

دی گئی سمت میں مرکز سے نصف قطر بردار کی لمبائی(Length of Radius Vector from the Centre drawn in given Direction)

مساوات $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ میں x کی جگہ $r\cos\theta$ اور y کی جگہ $r\sin\theta$ درج کرنے پر ہمیں بیضی کی درجہ ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\frac{(r\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{(r\sin\theta)^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{r^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{r^2\sin^2\theta}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow r^2\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{1}{\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)}$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}$$

اس طرح ہم محور پر کسی زاویہ θ کے ساتھ جھکے کسی نصف قطر بردار (Radius Vector) کی لمبائی حاصل کر لیتے ہیں۔

من درجہ بالا مساوات کو ہم اس طرح سے بھی ظاہر کر سکتے ہیں

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2\theta}$$

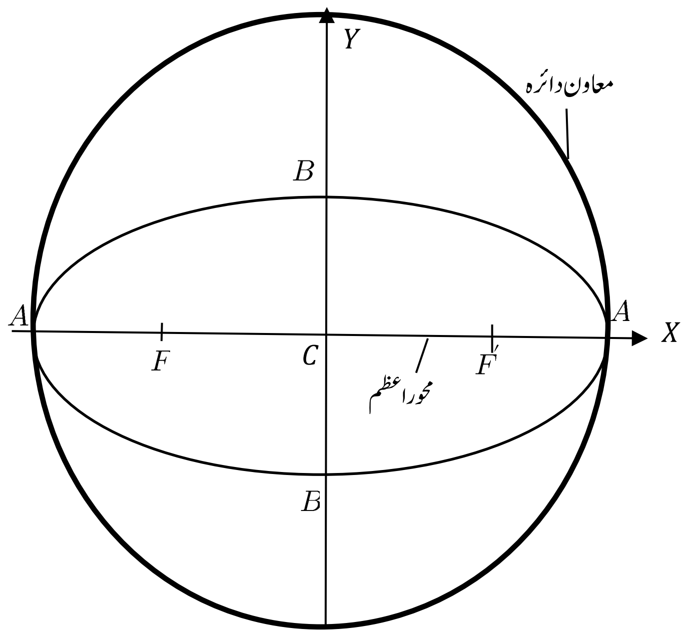
نیز ہم دیکھتے ہیں θ کی ہر ایک قیمت کے لیے r کی دو عددی طور پر برابر اور بر عکس قدریں حاصل ہوتی ہیں اور

a) جب زاویہ $\theta = 0$ تب $r = a$

b) جب زاویہ $\theta = 90^\circ$ تب $r = b$

معاون دائرہ(Auxiliary Circle)

وہ دائرہ جسے بیضی کے محور اعظم پر قطر کے طور پر ترسیم کیا جاتا ہے، بیضی کا معاون دائرہ کہلاتا ہے۔

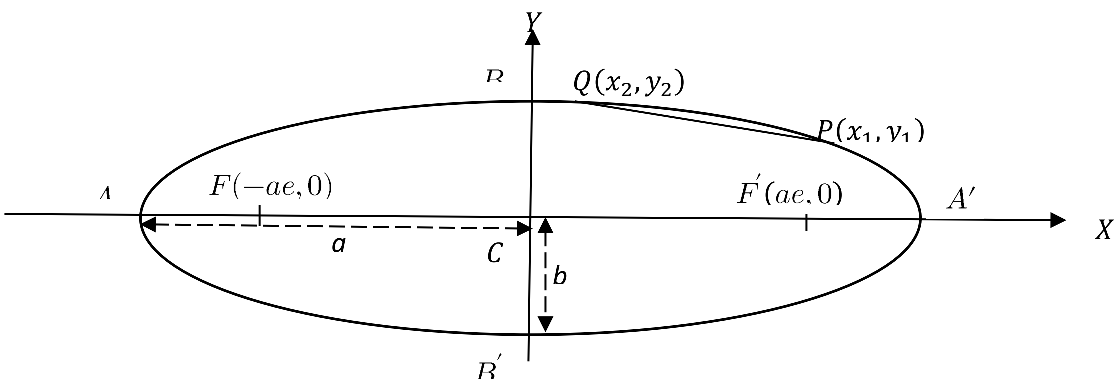


شکل 3.7

بیضی پر مماس(Tangent on Ellipse)

فرض کیجیے کہ بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ پر دو نقطے $P\ \ x_1, y_1$ اور $Q\ \ x_2, y_2$ ہیں۔ خط PQ کی مساوات ہو گی

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\ \ x - x_1 \qquad \dots\ 1$$



شکل 3.8

اب چوں کہ دونوں نقطے بیضی پر ہیں، اس لیے

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \qquad \dots\ 2$$

اور

$$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1 \qquad \dots\ 3$$

دونوں مساوات سے

$$\frac{x_2^2-x_1^2}{a^2}+\frac{y_2^2-y_1^2}{b^2}=0$$

$$\Rightarrow \frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{a^2}+\frac{(y_2-y_1)(y_2+y_1)}{b^2}=0$$

$$\Rightarrow \frac{(y_2-y_1)(y_2+y_1)}{b^2}=-\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{b^2(x_2+x_1)}{a^2(y_2+y_1)}$$

مساوات (1) میں یہ قدر رکھنے پر ہمیں ایک سیکینٹ (secant) خط PQ حاصل ہوتا ہے، جو درجہ ذیل ہے

$$y-y_1=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1}\ x-x_1$$

مماس کی مساوات حاصل کرنے کے لیے ہم نقطہ Q کو نقطہ P کے قریب ترین کر دیتے ہیں، تب $x_2=x_1$ اور $y_2=y_1$، یعنی دونوں نقطے ایک ہی نقطے کو ظاہر کریں گے، تب

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=\frac{xx_2}{a^2}+\frac{yy_2}{b^2}$$

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=\frac{xx_2}{a^2}+\frac{yy_2}{b^2}=1 \qquad 2 \text{ سے}$$

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$$

جو کہ بیضی پر مماس کی مساوات ہے۔

نوٹ: بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ کو کوئی خط $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ چھوتا ہے اگر $a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha=p^2$ ہو۔

بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ کو کوئی خط $lx+my=n$ چھوتا ہے اگر $a^2l^2+b^2m^2=n^2$ ہو۔

بیضی پر نارمل (Normal on Ellipse)

فرض کیجیے کہ بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ پر ایک نقطہ $P\ x_1, y_1$ ہے۔اس نقطہ پر مماس خط کی مساوات ہو گی

$$y=-\frac{b^2xx_1}{a^2y_1}+\frac{b^2}{y_1} \qquad \dots\ 1$$

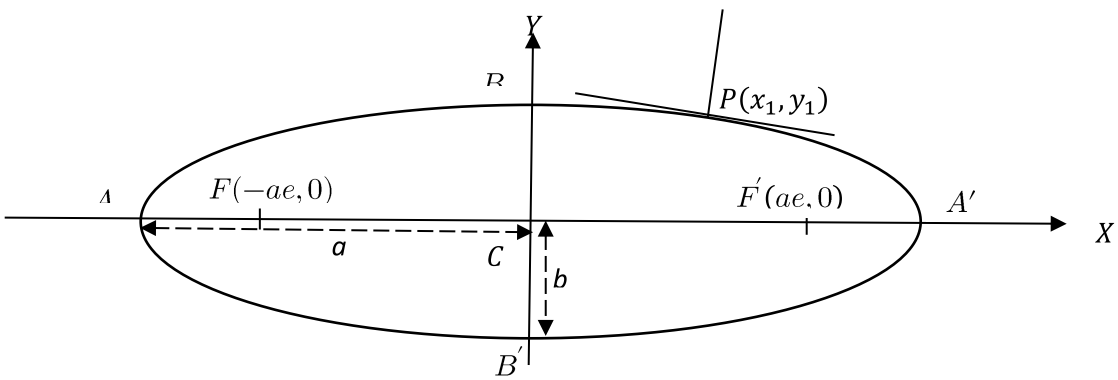
بیضی کے نقطہ $P\ x_1, y_1$ پر اس خط کی مساوات جو مماس خط پر عمودی ہو درجہ ذیل ہو گی

$$y-y_1=m\ x-x_1 \qquad \dots\ 2$$

جب کہ

$$m\left(-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\right)=-1$$

$$\Rightarrow m=\frac{1}{\left(\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\right)}=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$$



شکل 3.9

مساوات (2) میں یہ قدر رکھنے پر ہمیں ایک عمودی خط حاصل ہوتا ہے

$$y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}\ x-x_1$$

جو کہ بیضی پر نارمل خط کی مساوات ہے۔

مثال 1۔ بیضی $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ کے ماسکے، محور اعظم اور محور اصغر کی لمبائیاں، خروج المرکز اور وتر خاص کی لمبائی معلوم کیجیے۔

حل۔ چوں کہ $25 > 9$ ہے اس لیے حوراعظم $x-$ محور پر ہو گا۔ دی گئی مساوات کا تقابل بیضی کی مساوات سے کرنے پر ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ $a = 5$ اور $b = 3$

اب بیضی کے لیے

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$$

اس لیے ماسکوں کے محتسات $(-4،0)$ اور $(4،0)$، اس کے راس $(-5،0)$ اور $(5،0)$ ہوں گے۔ اس اعظم محور کی لمبائی 10 اور اصغر محور کی لمبائی 6 ہو گی۔

خروج المرکز کے ضابطے کی مدد سے

$$e = \frac{\text{نقطہ کا ماسکہ سے فاصلہ}}{\text{نقطہ کا ہادی خط سے فاصلہ}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{9}{25}}$$

$$= \sqrt{\frac{16}{25}}$$

$$= \frac{4}{5}$$

اور

وتر خاص کی لمبائی = $\frac{2b^2}{a}$

$$= \frac{2\ 3^{\ 2}}{5}$$

$$= \frac{18}{5}$$

مثال 2۔ بیضی $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$ کے ماسکے، محور اعظم اور محور اصغر کی لمبائیاں، خروج المرکز اور نصف وتر خاص کی لمبائی معلوم کیجیے۔

حل۔ چوں کہ $36 > 25$ ہے اس لیے محور اعظم $x-$ محور پر ہو گا۔ دی گئی مساوات کا تقابل بیضی کی مساوات سے کرنے پر ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ $a = 6$ اور $b = 5$

اب بیضی کے لیے

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-25}=\sqrt{11}$$

اس لیے ماسکوں کے محتسات $(-\sqrt{11},0)$ اور $(\sqrt{11},0)$، اس کے راس $(-6,0)$ اور $(6,0)$ ہوں گے۔ اس اعظم محور کی لمبائی 10 اور اصغر محور کی لمبائی 6 ہو گی۔

وتر خاص کی لمبائی $=\frac{2b^2}{a}$

$$=\frac{2\ 5\ ^2}{6}$$

$$=\frac{50}{6}$$

اس لیے نصف وتر خاص کی لمبائی $\frac{25}{6}$ ہو گی۔

مثال 3۔ بیضی کی مساوات حاصل کیجیے جس کا مرکز مبدا ہو اور جس کے محور اعظم اور محور اصغر محتسات کے محور ہوں اور جو نقطوں 2,2 اور 3,1 سے ہو کر گزرتا ہے۔

حل۔ فرض کیجیے کہ بیضی کی مساوات $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ہے۔

چوں کہ بیضی نقطوں 2,2 اور 3,1 سے ہو کر گزرتا ہے، اس لیے دونوں نقطے بیضی کی مساوات کو مطمئن کریں گے، تب

$$\frac{(2)^2}{a^2}+\frac{(2)^2}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow 4a^2+4b^2=a^2b^2 \qquad \ldots\ 1$$

اور

$$\frac{(3)^2}{a^2}+\frac{(1)^2}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow a^2+9b^2=a^2b^2 \qquad \ldots\ 2$$

دونوں مساوات کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$a^2=\frac{32}{3},b^2=\frac{32}{5}$$

اس لیے یہ قیمتیں بیضی کی معیاری مساوات میں درج کرنے پر

$$\frac{x^2}{\frac{32}{3}}+\frac{y^2}{\frac{32}{5}}=1$$

$$\Rightarrow 3x^2+5y^2=32$$

مثال4۔ بیضی $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{\frac{20}{9}}=1$ کے نقطے $\left(1,\frac{4}{3}\right)$ پر مماس اور نارمل کی مساوات معلوم کیجیے۔

حل۔ دی گئی بیضی کی مساوات ہے

$$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{\frac{20}{9}}=1$$

بیضی کے نقطہ x_1, y_1 P پر پر نارمل کی مساوات

$$\frac{xx_1}{5}+\frac{yy_1}{\frac{20}{9}}=1$$

اس لیے نقطے $\left(1,\frac{4}{3}\right)$ پر نارمل کی مساوات ہو گی

$$\frac{x}{5}+\frac{\frac{4}{3}y}{\frac{20}{9}}=1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{5}+\frac{3y}{5}=1$$

$$\Rightarrow x+3y=5$$

اب بیضی کے نقطہ x_1, y_1 P پر پر نارمل کی مساوات

$$y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}\ \ x-x_1$$

اس لیے نقطے $\left(1,\frac{4}{3}\right)$ پر نارمل کی مساوات ہو گی

$$y-\frac{4}{3}=\frac{5\left(\frac{4}{3}\right)}{\frac{20}{9}\ \ 1}\ \ x-1$$

$$\Rightarrow y-\frac{4}{3}=3(x-1)$$

$$\Rightarrow y=3x-3+\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow y=3x-\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow 3y-9x+5=0$$

3.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہوگئے ہوں گے کہ بیضی کا پیرامتری اور پولر ضابطہ کو پہچان کر اس کے محور اعظم، محور اصغر اور ہادی خط (Directrix) کو معلوم کر سکیں اور کے مطابق حل کریں گے۔ نیز دیے گئے ماسکے ہادی خط اور خروج المرکز کی مدد سے بیضی کی مساوات حاصل کر سکیں۔

3.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

بیضی، محور اعظم، محور اصغر، ماسکا، خروج المرکز، راس، نصف محور اعظم، نصف محور اصغر

3.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

3.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. ہادی خط کی تعریف کیجیے۔
2. خروج المرکز کی تعریف کیجیے۔
3. بیضی کے وتر خاص کی تعریف کیجیے۔
4. بیضی کی تعریف کیجیے۔
5. بیضی کے وتر خاص کی لمبائی ________ ہوتی ہے۔
6. بیضی کے لیے خروج المرکز ہے

(a) $e=1$ (b) $e>1$ (c) $e<1$ (d) $e\leq 1$

7. اگر بیضی کا مرکز مبدا (Origin) اور ماسکے x-محور پر وجود رکھتے ہیں تب بیضی کی معیاری مساوات __________ ہوگی۔

(a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (b) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (c) $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ (d) $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$

8. فرض کیجیے کہ بیضی کا مرکز مبدا (Origin) اور ماسکے y- محور پر ہیں تب بیضی کی معیاری مساوات درجہ ذیل ہو گی۔

(a) $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$ **(b)** $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ (c) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (d) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

9. بیضی $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$ کے وتر خاص کی لمبائی ________ ہے۔

(a) $\frac{25}{6}$ **(b)** $\frac{50}{6}$ (c) $\frac{50}{3}$ (d) $\frac{25}{3}$

3.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. بیضی کی مساوات حاصل کیجیے جس کا مرکز مبدا ہو اور جس کے محور اعظم اور محور اصغر محتسات کے محور ہوں اور جو نقطوں 1,4 اور $-6,1$ سے ہو کر گزرتا ہے۔ جواب۔ $3x^2+7y^2=115$

2. بیضی کی مساوات حاصل کیجیے جس کا وتر خاص 5 اور خروج المرکز $\frac{2}{3}$ ہے۔ جواب۔ $20x^2+36y^2=405$

3. بیضی $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ کے ماسکے، محور اعظم اور محور اصغر کی لمبائیاں، خروج المرکز اور وتر خاص کی لمبائی معلوم کیجیے۔

4. بیضی کی مساوات حاصل کیجیے جس کے محور اصغر کی لمبائی مسکوں کی درمیانی دوری کے مساوی ہو اور وتر خاص 10 ہے۔

جواب۔ $x^2+2y^2=100$

3.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. بیضی $5x^2+3y^2=137$ کے اس نقطہ پر جس کا آرڈینیٹ (Ordinate) 2 ہے، مماس اور نارمل کی مساوات معلوم کیجیے۔

ثابت کیجیے کہ خط $y=x+\sqrt{\frac{7}{12}}$ بیضی $\frac{x^2}{\frac{1}{3}}+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$ کو چھوتا ہے۔

2. فرض کیجیے کہ بیضی کی مساوات $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ہے جس پر ایک نقطہ $P\ x_1, y_1$ ہے۔ اس نقطہ پر مماس خط اور نارمل کی مساوات حاصل کیجیے۔

3. دکھائیے کہ بیضی پر ان سبھی مماسوں کے نقطہ تقاطعوں کا راست (Locus) جو ایک دوسرے پر عمودی ہوں، ایک دائرہ ہوتا ہے۔

اکائی 4۔ زائد

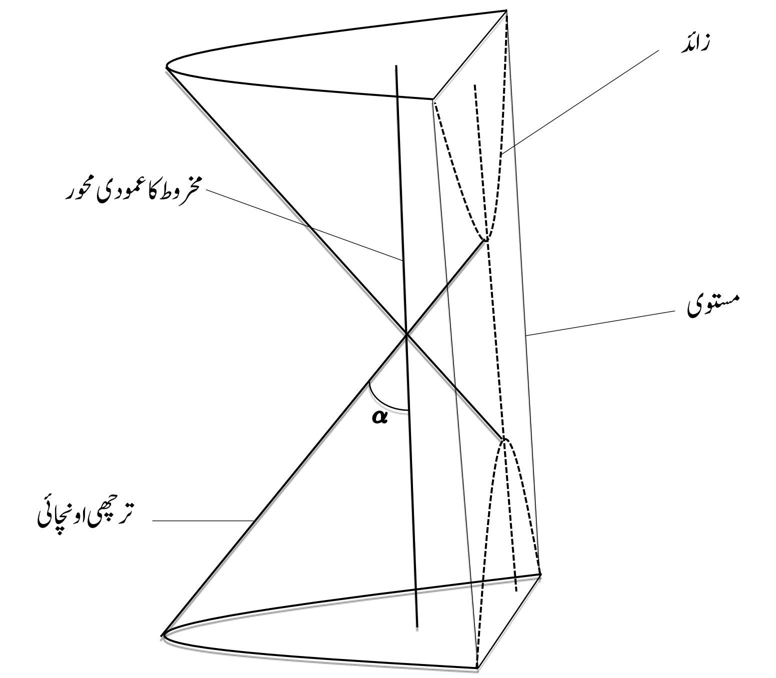
(Hyperbola)

اکائی کے اجزا

4.0 تمہید
4.1 مقاصد
4.2 زائد
4.3 اکتسابی نتائج
4.4 کلیدی الفاظ
4.5 نمونہ امتحانی سوالات
4.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات
4.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات
4.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

4.0 تمہید (Introduction)

پچھلی اکائی میں ہم نے دائروں، مکافی اور بیضی کے بارے میں پڑھا۔ اس اکائی میں ہم ایک اور مخروطی (یعنی زائد) کے بارے میں پڑھیں گے۔ اگر مستوی دوہرے متصل مخروط کو اس کے عمودی محور سے 90° سے کم زاویے (جو کہ ترچھے خط کی اساس محور سے زاویہ سے کم ہو) پر کاٹتا ہے، تو اس سے ہمیں ایک زائد (Hyperbola) حاصل ہوتا ہے۔ اس کے لیے خروج المرکز (Eccentricity) کی قدر 1 سے زیادہ ہوتی ہے۔



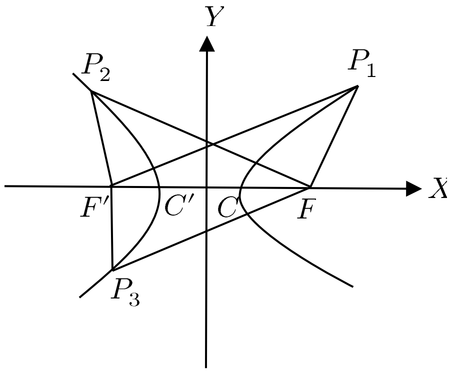
شکل 4.1

زائدی شکل کو حقیقی زندگی کے بہت سے شعبوں میں استعمال کیا جاتا ہے، جیسے کولنگ ٹاور (Cooling Tower) کی شکل میں، خوردبین (Microscopes) اور دوربین (Telescope) کے لینسوں میں۔

4.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کی تکمیل پر آپ کو اس قابل ہونا چاہیے کہ زائد کی تعریف کر کے اس کی معیاری مساوات اخذ کر سکیں۔ نیز زائد کی مساوات کو پہچان کر اس کا ہادی خط، وتر خاص، ماسکے، راس حاصل کر سکیں اور اسی طرح دی گئی بنیادی معلومات سے زائد کی مساوات محسوب کر سکیں۔

زائد(Hyperbola) 4.2

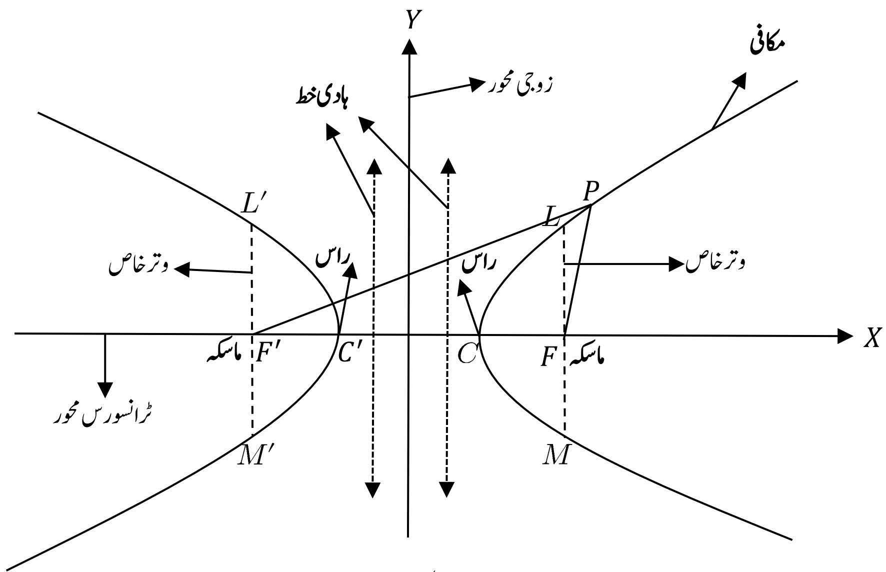


شکل4.2

تعریف: زائد، کسی مستوی میں ان نقاط کا سٹ ہے، جن کیمستوی میں دو مقررہ نقطوں سے دوری کا فرق ہمیشہ مستقل رہے۔یعنی

$$P_1F' - P_1F = P_2F - P_2F'$$
$$= P_3F - P_3F' = c(\text{مان لو})$$

دونوں مقررہ نقطوں کو زائد کے ماسکے، دونوں ماسکوں کو جوڑنے والے خط کا درمیانی نقطہ زائد کا مرکز اور دونوں ماسکوں سے ہو کر گزرنے والا خط زائد کا ٹرانسورس محور(Transverse Axis)اور اس پر عمودی خط زائد کا زوجی محور(Conjugate Axis) کہلاتا ہے۔ٹرانسورس محور کے وہ نقاط جن سے ہو کر زائد گزرتا ہے، زائد کے راس کہلاتے ہیں۔



شکل4.3

زائد کی معیاری مساوات(Standard Equation of Hyperbola)

مان لیجیے کہ من درجہ ذیل شکل میں زائد کے ماسکے Fاور F' ہیں، Fسے ہادی خطDLکا عمودی فاصلہFD ہے۔اگر $VV' = 2a$ کو فرض کیا جائے اور Cاس کا درمیانی نقطہ ہو۔اس لیے

$$FV = eVD \qquad \ldots\ 1$$

چوں کہ زائد کے لیے مرکز الخروج 1 سے زیادہ ہے اور اگرFDکو V' تک آگے بڑھایا جائے، تب

$$FV' = eV'D \qquad \ldots\ 2$$

من درجہ بالا دونوں مساوات کو جمع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$FV' - FV = e\ V'D - VD$$

$$\Rightarrow VV' = e[\ V'C + CD\ -\ VC - CD\ ]$$

$$\Rightarrow \quad 2a = e\ 2CD$$

$$\Rightarrow \ CD = \frac{a}{e}$$

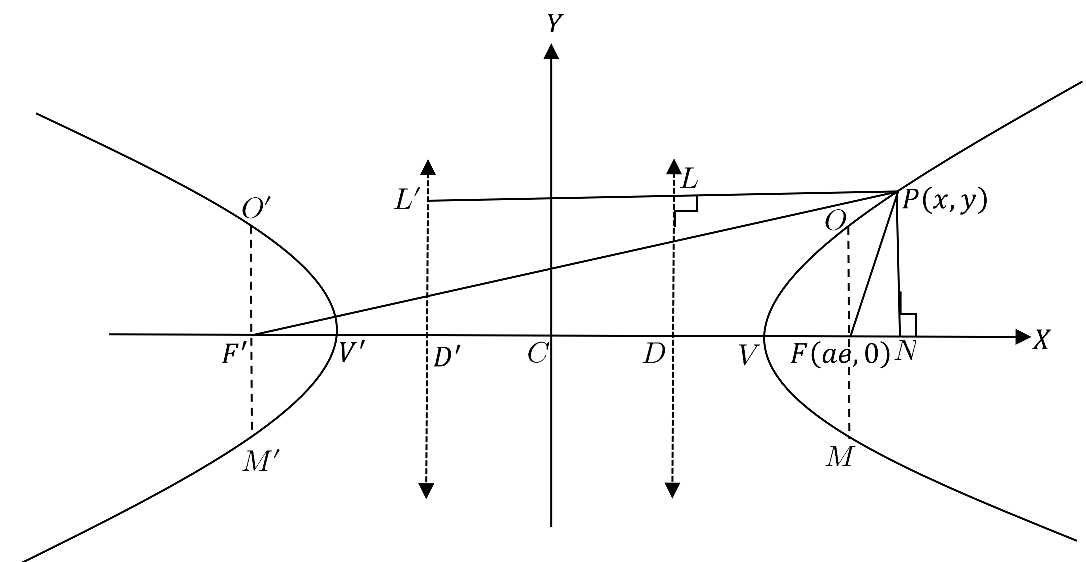
من درجہ بالا دونوں مساوات کو جمع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$FV' + FV = e\ V'D + VD$$

$$\Rightarrow 2CF = eVV'$$

$$\Rightarrow 2CF = e\ 2a$$

$$\Rightarrow \ CF = ae$$



شکل4.4

مان لیجیے کہ زائد کا مرکز مبدا پر ہے اور ٹرانسورس محور، x— محور ہے اور زوجی محور، y— محور ہے۔اب فرض کیجیے کہ زائد پر ایک نقطہ $P\ x, y$ ہے،تب

$$FP^2 = e^2 \cdot PL^2 = e^2 \cdot\ CN - CD$$

$$\Rightarrow \ x - ae\ ^2 + y^2 = e^2 \cdot \left(x - \frac{a}{e}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 \; e^2 - 1 \; - y^2 = a^2 \; e^2 - 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 \; e^2 - 1} = 1 \qquad \ldots\ 3$$

چوں کہ زائد کے لیے خروج المرکز 1 سے زیادہ ہے، اس لیے $a^2 \; e^2 - 1$ کی قیمت مثبت ہوگی۔ اگر اس قیمت کو b مان لیا جائے تو مساوات (3) درجہ ذیل ہوگی

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \ldots\ 4$$

زائد کا وتر خاص (Latus Rectum of Hyperbola)

زائد کے کسی ماسکہ سے گزرنے والا وہ خط جو ٹرانسورس محور پر عمودی ہو اور جس کے اختتامی نقطے زائد پر موجود ہوں وتر خاص کہلاتا ہے۔ زائد کے لیے وتر خاص کا ضابطہ بھی وہی ہوتا جو بیضی کے لیے ہوتا ہے۔ اس لیے

زائد کا وتر خاص $= \frac{2b^2}{a}$

زائد کے ایسمپٹوٹس (Asymptotes of Hyperbola)

کسی زائد کی ترسیم کو آسان بنانے کے لیے ایسمپٹوٹس کی جانکاری ہونا بہت ضروری ہوتا ہے۔ ایسمپٹوٹس کو معلوم کرنے کے لیے زائد کی مساوات کی اعظم ترین قوت کی ارکان کو صفر کے برابر رکھتے ہیں، یعنی

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

$$\Rightarrow y = \pm \frac{b}{a} x$$

کسی سمت میں کھینچے گئے مرکزی ریڈس کی لمبائی (Length of Central Radius Drawn in a given direction)

مساوات (4) میں x کی جگہ $r\cos\theta$ اور y کی جگہ $r\sin\theta$ درج کرنے پر ہمیں زائد کی درجہ ذیل قطبی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\frac{(r\cos\theta)^2}{a^2} - \frac{(r\sin\theta)^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{r^2\cos^2\theta}{a^2} - \frac{r^2\sin^2\theta}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow r^2\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} - \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\theta}{a^2} - \frac{\sin^2\theta}{b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\theta}{b^2}\left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\theta}{b^2}\left(\frac{b^2}{a^2} - \tan^2\theta\right)$$

اس طرح ہم ٹرانسورس محور پر زاویہ θ کے ساتھ جھکے کسی مرکزی ریڈیس کی لمبائی حاصل کر لیتے ہیں۔اس سے ہمیں درجہ ذیل نطائج حاصل ہوتے ہیں:

a) جب $\tan^2\theta < \frac{b^2}{a^2}$ تب r کی دو مساوی لیکن مخالف قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

b) جب $\tan^2\theta > \frac{b^2}{a^2}$ تب r کی خیالی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

c) r کم تر ہوگا جب $\theta = 0$ ہو۔

d) r لا متناہی ہوگا جب $\tan\theta = \pm\frac{b}{a}$ ہو۔

نوٹ:

(i) زائد کے دونوں ماسکوں سے کسی نقطہ کے دوریوں کا فرق زائد کے کے ٹرانسورس محور کے مساوی ہوتا ہے، یعنی

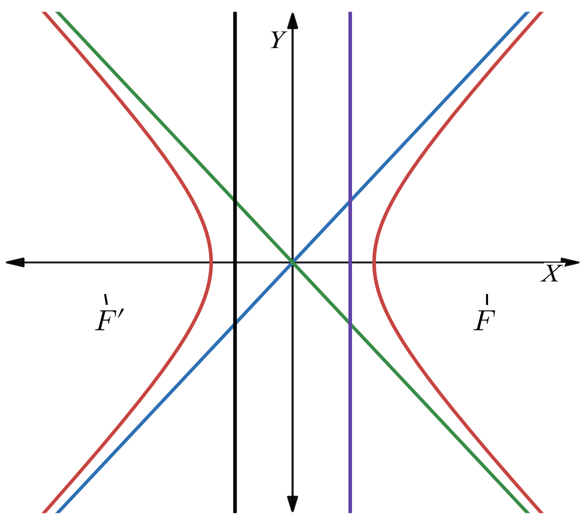
$$FP = e \cdot PL, F'P = ePL'$$

$$F'P - FP = e\ \ PL' - PL\ \ = eLL' = eDD' = 2a$$

جو کہ ٹرانسورس محور ہے۔

(ii) اگر زائد کا مرکز مبدا(Origin)پر اور ماسکے x— محور پر ہوں تب زائد کی معیاری مساوات درجہ ذیل ہو گی

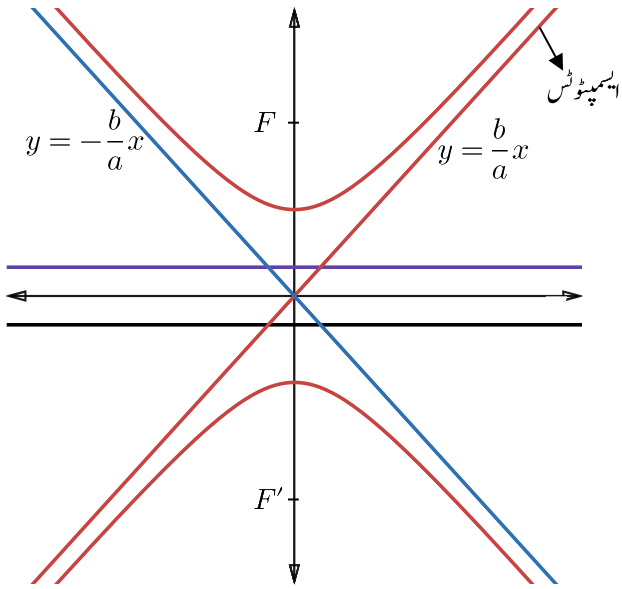
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



شکل4.5

(iii) اگر زائد کا مرکز مبدا(Origin) پر اور ماسکے $y-$ محور پر ہوں تب زائد کی معیاری مساوات درجہ ذیل ہوگی

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



شکل 4.6

(iv) زائد کے ماسکوں کی مرکز سے دوری خروج المرکز کے طور پر ae ہوتی ہے۔

(v) کوئی زائد مساوی ضلعی (Equilateral Hyperbola) کہلاتا ہے اگر $a = b$ ہو۔

(vi) بیضی کی طرح زائد بھی بالحاظ مبدا اور بالحاظ مختصات محور توازن رکھتا ہے۔

(vii) زائد کے دونوں راس پر مماس ٹرانسورس محور پر عمودی خط ہوتے ہیں۔ مساوات (4) کے لیے $y = \pm a$ مماس ہیں۔

کسی مخروطی کی قطبی مساوات (Polar Equation of Conic)

فرض کیجیے کہ FZ مخروطی کے لیے ابتدائی خط ہے جسے X تک بڑھایا گیا ہے۔ فرض کیجیے کہ مخروطی کا ماسکا F قطب (Pole) پر ہے، راس V، ہادی خط ZM اور مخروطی پر ایک نقطہ P جس کے قطبی مختصات $(r.\theta)$ ہیں۔ LL' مخروطی کا وتر خاص ہے جس کی لمبائی مان لیجیے کہ $2l$ ہے۔ اب

$$FP = ePM = eZQ$$

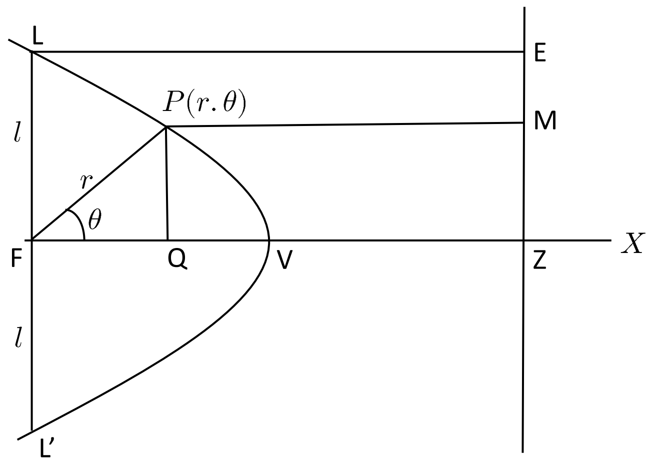
$$\Rightarrow r = e\ ZF - FQ$$

$$= e\ LE - FQ$$

$$= FL - eFQ \qquad \left[\because \frac{FL}{LE} = e\right]$$

$$\Rightarrow r = l - e\ r\cos\theta \qquad \left[\because \cos\theta = \frac{FQ}{r}\right]$$

$$\Rightarrow l = r\ 1 + e\cos\theta \qquad \dots\ 1$$



شکل4.7

مخروطی کی ترسیم(Sketching of Conic)

فرض کیجیے کہ مخروطی کی مساوات $\frac{l}{r} = 1 - e\ \ \cos\theta$

- اگر $e = 1$ لیاجائے تب مخروطی کی مساوات $\frac{l}{r} = 1 -\ \ \cos\theta$ اب درجہ ذیل حالات پر غور کیجیے:

جب $\theta = 0^\circ$ تب $\frac{l}{r} = 1 - 1 = 0 \Leftarrow r = \infty$،

جب $\theta = 90^\circ$ تب $\frac{l}{r} = 1 - 0 = 1 \Leftarrow r = l$،

جب $\theta = 180^\circ$ تب $\frac{l}{r} = 1 -\ \ -1\ \ = 2 \Leftarrow r = \frac{l}{2}$،

جب $\theta = 270^\circ$ تب $\frac{l}{r} = 1 - 0 = 1 \Leftarrow r = l$

جب $\theta = 360^\circ$ تب $\frac{l}{r} = 1 - 1 = 0 \Leftarrow r = \infty$

من درجہ بالا مختلف حالات پر غور کرنے کے بعد ہم اس نطیجہ پر پہنچتے ہیں کہ جیسے جیسے θ، زاویہ 0° سے 90° تک بڑھتا ہے، r کی قدر ∞ سے l تک گھٹتی ہے، جب 90° سے 180° تک بڑھتا ہے، r کی قدر l سے $\frac{l}{2}$ تک گھٹتی ہے۔ اور پھر جب زاویہ 180° سے بڑھ کر 270° تک پہنچتا ہے، r کی قدر $\frac{l}{2}$ سے l تک بڑھتی ہے اور جیسے ہی زاویہ 270° سے 360° تک بڑھتا ہے، r کی قدر l سے ∞ تک بڑھتی ہے۔ اس طرح یہ منحنی مکافی ہے۔

- اگر $e < 1$ لیا جائے

جب $\theta = 0^\circ$ تب $\frac{l}{r} = 1 - e \Leftarrow r = \frac{l}{1-e}$،

جب $\theta = 90^\circ$ تب $\frac{l}{r} = 1 - 0 = 1 \Leftarrow r = l$،

جب $\theta = 180^\circ$ تب $\frac{l}{r} = 1 + e \Leftarrow r = \frac{l}{1+e}$،

جب $\theta = 270^\circ$ تب $\frac{l}{r} = 1 - 0 = 1 \Leftarrow r = l$

جب $\theta = 360^\circ$ تب $\frac{l}{r} = 1 - e \Leftarrow r = \frac{l}{1-e}$

من درجہ بالا حالات کے مطالعہ سے ہم اس نطیجہ پر پہنچتے ہیں کہ جیسے جیسے θ، زاویہ 0° سے 90° تک بڑھتا ہے، r کی قدر $\frac{l}{1-e}$ سے l تک گھٹتی ہے، جب یہ زاویہ 90° سے 180° تک بڑھتا ہے، r کی قدر l سے $\frac{l}{1+e}$ تک گھٹتی ہے۔ اور پھر جب زاویہ 180° سے بڑھ کر 270° تک پہنچتا ہے، تو r کی قدر $\frac{l}{1+e}$ سے l تک بڑھتی ہے اور جیسے ہی زاویہ 270° سے 360° تک پہنچتا ہے، r کی قدر l سے $\frac{l}{1-e}$ تک گھٹتی ہے۔ اس طرح یہ منحنی بیضی ہے۔

- اگر $e > 1$ لیا جائے

جب $\theta = 0^\circ$ تب $\frac{l}{r} = 1 - e \Leftarrow r = -\frac{l}{e-1}$،

جب θ کی قیمت 0° سے $\cos^{-1}\left(\frac{1}{e}\right)$ تک بڑھتی ہے، تو $\frac{l}{r}$ بڑھتا ہے $(e-1)-$ سے $0-$ تک جس کی وجہ سے r $-\frac{l}{e-1}$ سے $\infty-$ تک گھٹتا ہے۔

θ کی ان سبھی قیمتوں کے لیے برداری نصف قطر بطور نمبر لمبائی میں $\frac{l}{e-1}$ سے ∞ تک بڑھتا ہے۔

نوٹ:

1. اگر مخروطی کا محور ابتدائی خط پر α زاویہ سے جھکا ہوا ہو، تب مخروطی کی مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$l = r\{1 + e\cos\ \theta - \alpha\ \}$$

2. اگر FZ ابتدائی خط کی منفی سمت میں لیا جائے اور برداری زاویہ θ کو گھڑی کی مخالف سمت میں ناپا جائے، تو مخروطی کی مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$l = r\{1 - e\cos\theta\}$$

3. اگر مخروطی ایک مکافی ہے جس کے لیے $e = 1$ ہوتا ہے، تب مکافی کی قطبی مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$l = r\{1 + \cos\theta\}$$

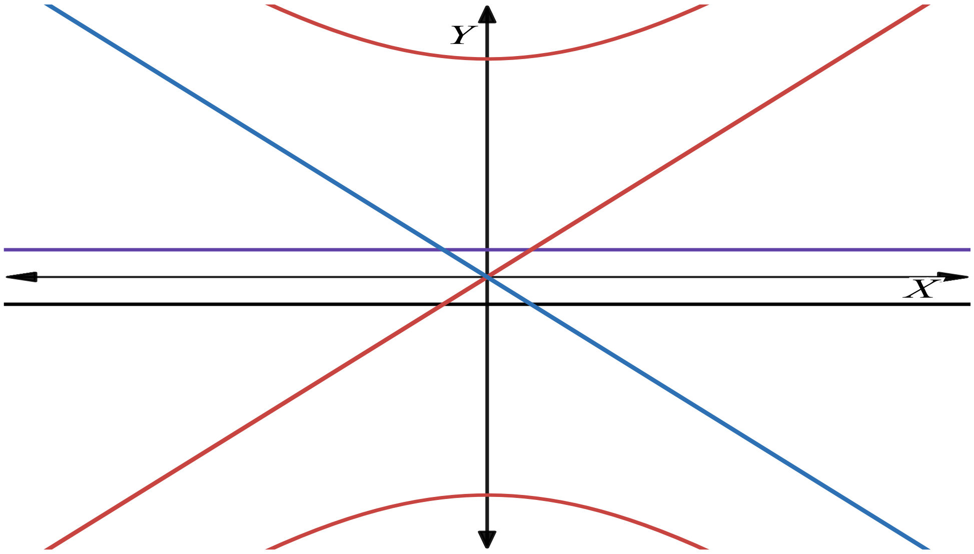
4. مخروطی کا ہادی خط: مان لیجیے کہ مخروطی کی قطبی مساوات $l = r\{1 + e\cos\theta\}$ ہے۔ تب اس کا ہادی خط درجہ ذیل ہو گا

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta$$

5. مخروطی کا ماسکی وتر (Focal Chord) اس خط کا حصہ ہے جو مخروط کے کسی ایک ماسکہ سے ہو کر گزرتا ہے اور جس کے اختتامی نقاط مخروطی پر موجود ہوں۔
6. دوسرے درجہ کی عام مساوات $ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$ ایک مخروطی کو ظاہر کرتی ہے۔
7. دوسرے درجہ کی عام مساوات $ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$ ایک مخروطی سے درجہ ذیل اصول حاصل ہوتے ہیں:
   a) اگر $h^2 < ab$ ہو تو یہ مساوات بیضی کو ظاہر کرے گی۔
   b) اگر $h^2 = ab$ ہو تو یہ مساوات مکافی کو ظاہر کرے گی۔
   c) اگر $h^2 > ab$ ہو تو یہ مساوات زائد کو ظاہر کرے گی۔
   d) اگر $h = 0, a = b$ ہو تو یہ مساوات دائرہ کو ظاہر کرے گی۔
   e) اگر $a + b = 0$ ہو تو یہ مساوات قائم زائد (Rectangular Hyperbola) کو ظاہر کرے گی۔

مثال 1۔ زائد $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ کے ماسکے، محور اعظم اور محور اصغر کی لمبائیاں، خروج المرکز اور وتر خاص معلوم کیجیے۔

حل۔ چوں کہ $16 > 9$ ہے اس لیے محور اعظم $x-$ محور پر ہو گا۔ دی گئی مساوات کا تقابل زائد کی مساوات سے کرنے پر ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ $a = 4$ اور $b = 3$



شکل4.8

اب زائد کے لیے

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

اس لیے ماسکوں کے مختصات $(-4،0)$ اور $(4،0)$، اس کے راس $(-5،0)$ اور $(5،0)$ ہوں گے۔ اس اعظم محور کی لمبائی 10 اور اصغر محور کی لمبائی 6 ہو گی۔

خروج المرکز کے ضابطے کی مدد سے

$$e = \frac{\text{فاصلہ سے ماسکہ کا نقطہ}}{\text{فاصلہ سے خطہادی کا نقطہ}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{9}{25}}$$

$$= \sqrt{\frac{34}{25}}$$

$$= \frac{4}{5}$$

اور

$$\text{وتر خاص کی لمبائی} = \frac{2b^2}{a}$$

$$= \frac{2\ \ 3\ ^2}{4}$$

$$= \frac{18}{4}$$

مثال2۔ زائد $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$ کے ماسکے، محور اعظم اور محور اصغر کی لمبائیاں، خروج المرکز اور نصف وتر خاص کی لمبائی معلوم کیجیے۔

حل۔ چوں کہ $36 > 25$ ہے اس لیے محور اعظم x— محور پر ہو گا۔ دی گئی مساوات کا تقابل زائد کی مساوات سے کرنے پر ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ $a = 6$ اور $b = 5$

اب زائد کے لیے

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11}$$

اس لیے ماسکوں کے محتسات $(-\sqrt{11}، 0)$ اور $(\sqrt{11}، 0)$، اس کے راس $(-6، 0)$ اور $(6، 0)$ ہوں گے۔ اس اعظم محور کی لمبائی 10 اور اصغر محور کی لمبائی 6 ہو گی۔

$$\text{وتر خاص کی لمبائی} = \frac{2b^2}{a}$$

$$= \frac{2\ 5\ ^2}{6}$$

$$= \frac{50}{6}$$

اس لیے نصف وتر خاص کی لمبائی $\frac{25}{6}$ ہو گی۔

مثال3۔ زائد کی مساوات حاصل کیجیے جس کا مرکز مبدا ہو اور جس کے محور اعظم اور محور اصغر محتسات کے محور ہوں اور جو نقطوں 2,2 اور 3,1 سے ہو کر گزرتا ہے۔

حل۔ فرض کیجیے کہ زائد کی مساوات $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ہے۔

چوں کہ زائد نقطوں 2,2 اور 3,1 سے ہو کر گزرتا ہے، اس لیے دونوں نقطے زائد کی مساوات کو مطمئن کریں گے، تب

$$\frac{(2)^2}{a^2} - \frac{(2)^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow 4a^2 + 4b^2 = a^2b^2 \qquad \ldots\ 1$$

اور

$$\frac{(3)^2}{a^2} + \frac{(1)^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow a^2 + 9b^2 = a^2b^2 \qquad \ldots\ 2$$

دونوں مساوات کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$a^2 = \frac{32}{3}, b^2 = \frac{32}{5}$$

اس لیے یہ قیمتیں زائد کی معیاری مساوات میں درج کرنے پر

$$\frac{x^2}{\frac{32}{3}} + \frac{y^2}{\frac{32}{5}} = 1$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 5y^2 = 32$$

مثال4۔ دوسرے درجہ کی عام مساوات $12x^2 + 10y^2 - 23xy - 25x + 26y - 14 = 0$ سے کون سا مخروطی ظاہر ہوتا ہے؟

حل۔ دی گئی مخروطی ہے

$$12x^2 + 10y^2 - 23xy - 25x + 26y - 14 = 0$$

اس کا موازنہ مخروطی کی عام مساوات $ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$ سے کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$h = -\frac{23}{2}, a = 12, b = 10$$

ان سے

$$h^2 = \left(-\frac{23}{2}\right)^2 = \frac{529}{4} = 132.25, ab = 120$$

یعنی

$$h^2 > ab$$

اس لیے دی گئی دو درجی مساوات ایک زائد کو ظاہر کرتی ہے۔

4.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی کی تکمیل پر آپ کو اس قابل ہو گئے ہوں گے کہ زائد کی تعریف کر کے اس کی معیاری مساوات اخذ کر سکیں۔ نیز زائد کی مساوات کو پہچان کر اس کا ہادی خط، وتر خاص، ماسکے، راس حاصل کر سکیں اور اسی طرح دی گئی بنیادی معلومات سے زائد کی مساوات محسوب کر

سکیں۔ نیز زائد کے چند اطلاقات کی جانکاری حاصل کر چکے ہوں گے اور زائد کے ان اطلاقات کو حقیقی زندگی کے مسئلوں میں لاگو کرکے ان کا حل فراہم کر سکیں۔

4.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

زائد، ابتدائی خط، مخروطی، قطبی مساوات، قطبی مختصات، ٹرانسورس محور، زوجی محور

4.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

4.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. زائد کی تعریف کرو۔
2. زائد کا خروج المرکز کیا ہوتا ہے؟
3. زائد کے وتر خاص کی تعریف کیجیے اور اس کا ضابطہ لکھو۔
4. زائد کا ٹرانسورس محور اور زوجی محور سے آپ کیا سمجھتے ہیں؟

4.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. زائد کی مساوات حاصل کیجیے جس کا مرکز (0،0) ہو اور جس کے محور اعظم اور محور اصغر مختسات کے محور ہوں اور جو نقطوں $2,2$ اور $3,1$ سے ہو کر گزرتا ہے۔
2. زائد $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$ کے ماسکے، محور اعظم اور محور اصغر کی لمبائیاں، خروج المرکز اور نصف وتر خاص کی لمبائی معلوم کیجیے۔
3. بزائد $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$ کے ماسکے، محور اعظم اور محور اصغر کی لمبائیاں، خروج المرکز اور نصف وتر خاص کی لمبائی معلوم کیجیے۔
4. دوسرے درجہ کی عام مساوات $13x^2 + 37y^2 - 18xy + 2x + 14y - 2 = 0$ سے کون سا مخروطی ظاہر ہوتا ہے؟

4.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. زائد کے لیے معیاری ضابطہ اخذ کیجیے۔
2. مخروطی کی ترسیم کیجیے۔
3. مخروطی کے لیے قطبی ضابطہ ایک صاف خاکہ بنا کر اخذ کیجیے۔

تجویز کردہ اکتسابی مواد

(Suggested Books for Further Readings)

1. Calculus and Analytical Geometry, 9th Ed. G. B. Thomas, R. L. Finney – Pearson Education, Delhi, 2006.
2. Calculus, Howard Anton, Irl Bivens, Stephan Devis, 7th Ed., Wiley India, 2012.

فاصلاتی ضریعہ (بیچلر آف سائنس) Distance Mode, Bachelor of Science

پہلا سمسٹر I[st]Semester Examination,2025

Paper : BNMM101DET,(Mathematics) Analytical Geometry

جملہ نشانات:25 Maximum Marks　　　　وقت:2Hrs گھنٹے :Time

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم اور حصہ سوم۔ ہر جواب کے لیے لفظوں کی تعداد اشارتاً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1۔ حصہ اول میں 5 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/خالی جگہ پر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **$(5 \times 1 = 5$ Marks)**

2۔ حصہ دوم میں چھ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی 4 سوالات کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کے لیے 3 نمبرات مختص ہیں۔ **$(4 \times 3 = 12$ Marks)**

3۔ حصہ سوم میں دو سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی ایک سوال کا جواب دینا ہے۔ ہر سوال کے لیے 8 نمبرات مختص ہیں۔ **$(1 \times 8 = 8$ Marks)**

حصہ اول

سوال 1.

i) دائرہ جس کا مرکز مبدا اور نصف قطر r ہو.................. ہے۔

A. $x^2 + y^2 = r^2$　　B. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$　　C. $x^2 + y^2 = 1$　　D. سبھی

ii) اس دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے جس کا مرکز نقطہ $-1,2$ پر ہو اور جس کا نصف قطر 3 ہے........................ ہے۔

iii) اس مکافی کی مساوات حاصل کیجیے جس کا ماسکہ (0,2) ہے اور جس کا راس مبدا پر ____________ ہے۔

iv) کسی مخروط کے لیے اگر خروج المرکز کی قیمت 1 ہے تو وہ مخروط ____________ ہے

v) زائد $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ کے ماسکے __________________ ہیں۔

حصہ دوم

2. زائد کی مساوات حاصل کیجیے جس کا مرکز $(0،0)$ ہو اور جس کے محور اعظم اور محور اصغر محتسات کے محور ہوں اور جو نقطوں $2,2$ اور $3,1$ سے ہو کر گزرتا ہے

3. زائد $1 = \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25}$ کے ماسکے، محور اعظم اور محور اصغر کی لمبائیاں، خروج المرکز اور نصف وتر خاص کی لمبائی معلوم کیجیے۔

4. زائد کے لیے معیاری ضابطہ اخذ کیجیے۔

5. دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ کے کسی نقطہ پر قطب اور قطبی کی تعریف کیجیے۔

6. بیضی کے کسی نقطے پر مماس کی مساوات معلوم کیجیے۔

7. دوسرے درجہ کی عام مساوات $12x^2 + 10y^2 - 23xy - 25x + 26y - 14 = 0$ سے کون سا مخروطی ظاہر ہوتا ہے؟

حصہ سوم

8. زائد کے کسی نقطے پر مماس کی مساوات معلوم کیجیے۔

9. بیضی کے کسی نقطے پر نارمل کی مساوات معلوم کیجیے۔

10. تین نقاط سے گزرنے والے دائرہ کے لیے مساوات اخذ کیجیے۔

BNMM101DEP

لیب مینول

تجزیاتی جیومٹری

(Analytical Geometry)

بی۔ایس سی۔(آنرس)

(پہلا سمسٹر)

اکائی 1۔دائرے اور مکافی سے متعلق مسائل

(Problems on Circles and Parabola)

1.0 تمہید(Introduction)

کونکس(conics)یعنی مکافی ،.بیضی اور زائد کی اصطلاحات کو متعارف کرانے والے معروف ریاضی داں اور عظیم جیومیٹر(The Great Geometer) اپولونیس(Apollonius)یونان میں پیدا ہوئے۔ان منحنیات کا استعمال سیاروں کی حرکت،دُربین(Telescope) اور انٹینہ(Antenna) کی ڈیزائن، فلیش لائٹوں اور آٹو موبائل میں ریفلیکٹر وغیرہ جیسے شعبوں میں وسیع پیمانے پر ہوتا ہے۔

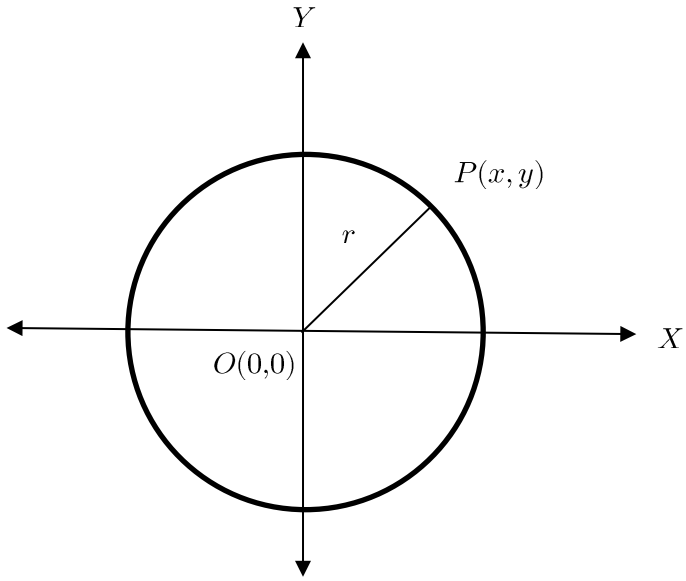
اگر مستوی دوہرے متصل مخروط کو(راس(Vertex)کے علاوہ)اس کے عمودی محور سے 90° کے زاویے پر کاٹتا ہے (یا مخروط کے اساس کے متوازی(Parallel to the base of one of the double napped cone))تو اس سے ہمیں ایک دائرہ حاصل ہوتا ہے۔

تعریف: کسی مستوی میں ان سبھی نقاط کا سٹ کو جن کی کسی مقررہ نقطہ(Fixed Point)سے دوری مستقل رہتی ہے،دائرہ کہتے ہیں۔مقررہ نقطہ کو اس دائرہ کا مرکز(Centre)اور مستقل دوری کو اس کا نصف قطر(Radius) کہتے ہیں۔

دائرہ جس کا مرکز مبدا اور نصف قطر r ہو(Circle whose centre is the origin and radius is r)

فرض کیجیے کہ دائرہ کا مرکز $O\ 0,0$، نصف قطر r اور اس کے محیط(Circumference)پر ایک نقطہ $P\ \ x,y$ ہے۔اب دائرہ کی تعریف اور دو نقطوں کی درمیانی فاصلہ کے ضابطے کی مدد سے

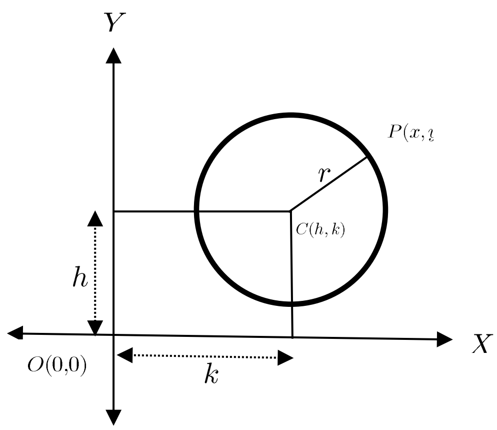
$$OP = \sqrt{\ x_2 - x_1\ ^2 + \ y_2 - y_1\ ^2}$$
$$\Rightarrow r = \sqrt{\ x - 0\ ^2 + \ y - 0\ ^2}$$
$$\Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$$



دائرہ جس کا مرکز h,k اور نصف قطر r ہو(Circle whose centre is h,k and radius is r)

فرض کیجیے کہ دائرہ کا مرکز $C\ h,k$، نصف قطر r اور اس کے محیط(Circumference) پر ایک نقطہ $P\ x,y$ ہے۔ اب دائرہ کی تعریف اور دو نقطوں کی درمیانی فاصلہ کے ضابطے کی مدد سے

$$CP = \sqrt{\ x_2 - x_1{}^{2} + \ y_2 - y_1{}^{2}}$$
$$\Rightarrow r = \sqrt{\ x - h^{\ 2} + \ y - k^{\ 2}}$$
$$\Rightarrow \ x - h^{\ 2} + \ y - k^{\ 2} = r^2$$



دائرہ کے کسی نقطہ پر مماس(Tangent at any Point on a Circle)

دائرہ کے کسی نقطہ پر مماس وہ خط ہے جو دائرہ کے اس نقطہ کو چھوتا ہے اور آگے بڑھانے پر دائرہ کو نہیں کاٹتا۔ مماس ہمیشہ دائرہ کے نصف قطر پر عمودی(Perpendicular) ہوتا ہے۔

مان لیجیے کہ دائرہ کا مرکز $O\ 0,0$ اور نصف قطر r ہے۔ اس کے نقطہ (x', y') پر مماس کی مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$xx' + yy' = r^2$$

دائرہ پر نارمل کی مساوات: کسی منحنی کے نقطہ P پر نارمل، اس نقطہ پر مماس کے عمودی ایک خط ہوتا ہے۔

مان لیجیے کہ دائرہ کا مرکز O 0,0 اور نصف قطر r ہے۔ نقطہ $Q\left(x^{'}, y^{'}\right)$ سے ہو کر گزرنے والے اور اس مماس پر عمودی خط کی مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$x'y + xy' = 0$$

اب دائرہ کی عام مساوات $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ کے نقطہ $Q\left(x^{'}, y^{'}\right)$ پر مماس کی مساوات ہو گی

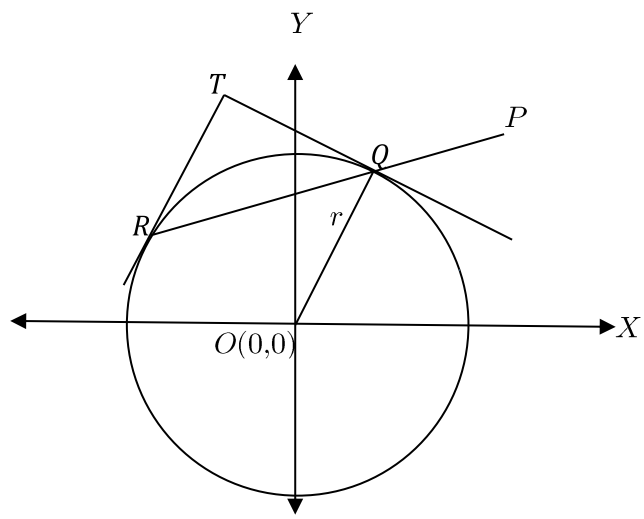
$$y = -\left(\frac{x' + g}{y' + f}\right) x - \left(\frac{gx' + fy' + c}{y' + f}\right)$$

نقطہ $Q\left(x^{'}, y^{'}\right)$ پر نارمل خط کی مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$y - y' = \left(\frac{y' + f}{x' + g}\right)\ x - x'$$

قطب اور قطبی (Pole and Polar)

اگر کسی نقطہ P سے ہو کر کوئی خط کسی دائرہ کے دو نقطوں Q اور R سے ملتا ہے، تو نقطوں Q اور R پر مماس کے مقطع نقطہ کا مقام (Locus of the Point) نقطہ P کا قطبی کہلاتا ہے اور ساتھ ہی نقطہ P کو قطبی کا قطب کہتے ہیں۔



مان لیجیے کہ نقطہ x_1, y_1 سے ایک خط دائرہ پر دو نقطوں Q اور R سے ہو کر گزرتا ہے جن پر دو مماس خطوط نقطہ h, k پر ملتے ہیں۔

چوں کہ نقطوں Q اور R پر مماس کا مقطع (Intersection) نقطہ h, k ہے تب خط QR کی مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$xh + yk = r^2$$

چوں کہ یہ خط نقطہ x_1, y_1 سے گزرتا ہے، تب

$$x_1h + y_1k = r^2$$

چوں کہ یہ رشتہ درست ہے جس کی وجہ سے نقطہ h, k درجہ ذیل خط پر موجود ہو گا

$$x_1x + y_1y = r^2$$

اس لیے یہ مساوات نقطہ x_1, y_1 کے قطبی (Polar) کی مساوات ہے۔

مثال 1۔اس دائرہ کی مساوات حاصل کیجیے جس کا مرکز $(0,0)$اور نصف قطر 2 ہے۔

حل۔ہم جانتے ہیں کہ اس دائرہ کی مساوات جس کا مرکز $(0,0)$ اور نصف قطر r ہو درجہ ذیل ہوتی ہے

$$x^2 + y^2 = r^2$$

یہاں دیے گئے دائرہ کا نصف قطر 2 ہے، اس مطلوبہ دائرہ کی مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$x^2 + y^2 = (2)^2$$
$$\Rightarrow\ x^2 + y^2 = 4$$

1.1 دائرہ $4x^2 + 4y^2 - 142x + 47y + 138 = 0$ سے اس کا مرکز اور نصف قطر معلوم کیجیے۔

حل۔ دی گئی مساوات درجہ ذیل ہے

$$4x^2 + 4y^2 - 142x + 47y + 138 = 0$$

اس مساوات کو معیاری مساوات میں تبدیل کرتے ہیں، اس لیے

$$4x^2 - 142x + 4y^2 + 47y + 138 = 0$$
$$\Rightarrow 4\left(x^2 - \frac{71}{2}x\right) + 4\left(y^2 + \frac{47}{4}y\right) + 138 = 0$$
$$\Rightarrow 4\left(x^2 - 2\times\frac{71}{4}x + \left(\frac{71}{4}\right)^2 - \left(\frac{71}{4}\right)^2\right) + 4\left(y^2 + 2\times\frac{47}{8}y + \left(\frac{47}{8}\right)^2 - \left(\frac{47}{8}\right)^2\right) + 138 = 0$$
$$\Rightarrow 4\left(x - \frac{71}{4}\right)^2 + 4\left(y + \frac{47}{8}\right)^2 + 138 - \left(\frac{71}{4}\right)^2 - \left(\frac{47}{8}\right)^2 = 0$$
$$\Rightarrow 4\left(x - \frac{71}{4}\right)^2 + 4\left(y + \frac{47}{8}\right)^2 - \frac{13541}{64} = 0$$
$$\Rightarrow \left(x - \frac{71}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{47}{8}\right)^2 = \frac{13541}{256}$$

معیاری مساوات $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ سے موازنہ کرنے پر حاصل ہے

دائرہ کا مرکز $= \left(\frac{71}{4}, -\frac{47}{8}\right)$

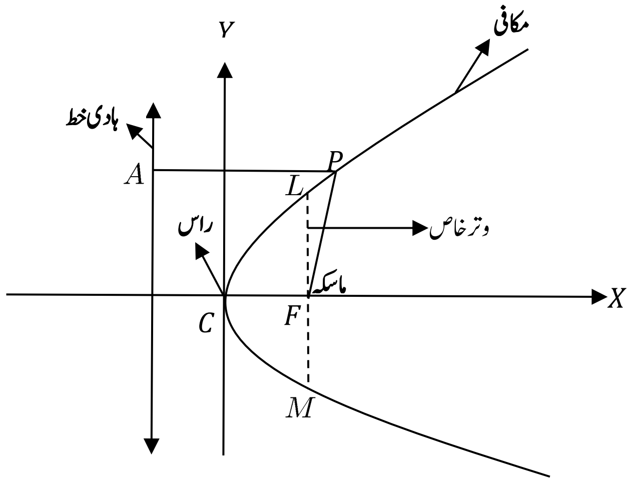
دائرہ کا نصف قطر $= \sqrt{\frac{13541}{256}}$

اس طرح دیے گئے دائرہ کا مرکز $\left(\frac{71}{4}, -\frac{47}{8}\right)$ اور اس کا نصف قطر $\sqrt{\frac{13541}{256}}$ ہو گا۔

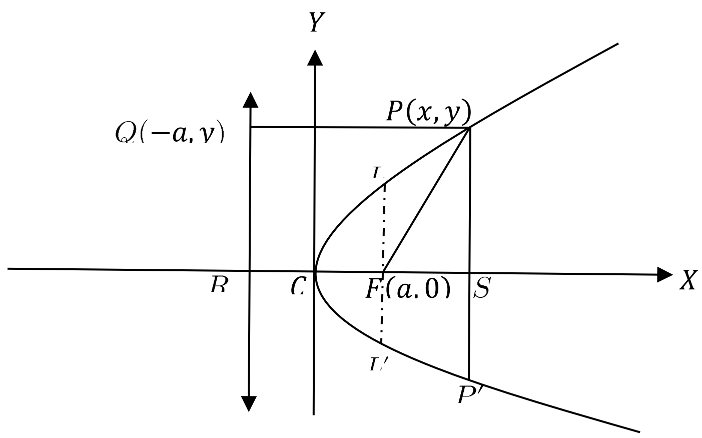
دیے گئے دائرہ کا مرکز $\left(\frac{71}{4}, -\frac{47}{8}\right)$ اور اس کا نصف قطر $\sqrt{\frac{13541}{256}}$ ہے۔

1.1 مکافی (Parabola)

تعریف: مکافی، کسی مستوی میں ان نقاط کا سٹ ہے، جن کی کسی مقررہ نقطہ اور مقررہ خط سے دوری ہمیشہ مساوی رہے۔



مقرر خط ہادی خط کہلاتا ہے اور مقرر نقطہ کو مکافی کا ماسکہ (Focus) کہتے ہیں۔ ماسکہ سے گزرنے والے اور ہادی خط پر عمودی خط کو مکافی کا محور (Axis of Parabola) اور محور اور مکافی کے نقطہ تقاطع (Intersection Point) کو مکافی کا راس (Vertex) کہتے ہیں۔ چوں کہ مکافی کے کسی نقطہ سے اس کے ماسکہ اور ہادی خط سے دوری ہمیشہ برابر رہتی ہے اس لیے مکافی کے لیے خروج المرکز کی قیمت 1 ہوتی ہے۔

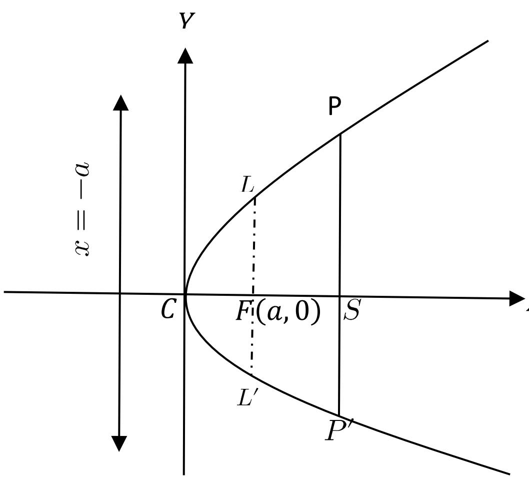


مان لیجیے کہ مکافی پر ایک نقطہ $P\ \ x, y$ ہے اس سے ماسکے کو جوڑنے والا خط PF ہے۔ نقطہ P سے مکافی کے محور پر اور ہادی خط پر بالترتیب عمودی خط PS اور PQ کھینچے گئے ہیں۔ اب مکافی کی تعریف سے

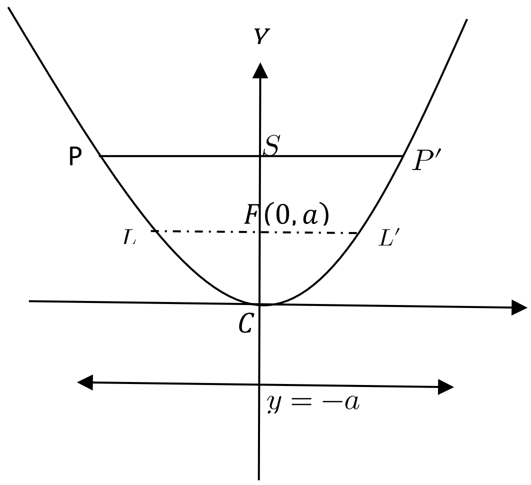
$$PQ^2 = PF^2$$
$$x + a\ ^2 = \ x - a\ ^2 + y^2$$
$$\Rightarrow \quad y^2 = \ x + a\ ^2 - \ x - a\ ^2$$
$$\Rightarrow \quad y^2 = 4ax$$

اس کے لیے ہادی خط $x = -a$ ہوگا۔ یہی مکافی کی معیاری مساوات ہے جس کا راس مبدا پر اور توازنی محور x محور یا y محور پر ہے۔

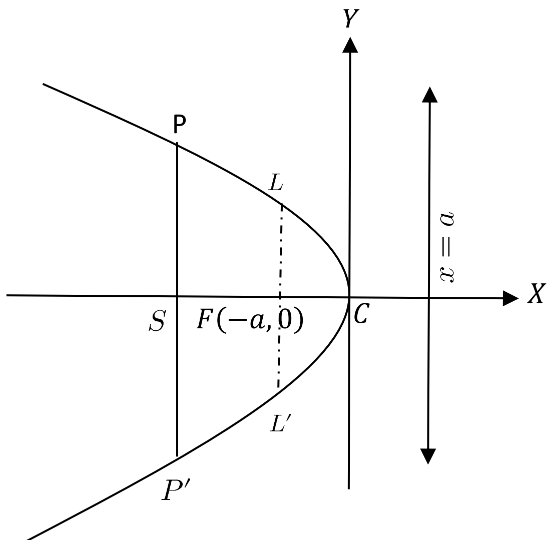
مکافی کی درجہ ذیل چار مختلف شکلیں ہیں:



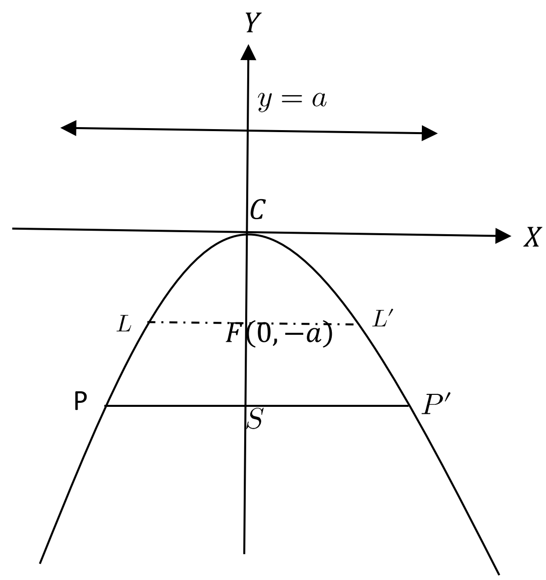
$y^2 = 4ax$



$x^2 = 4ay$



$y^2 = -4ax$



$x^2 = -4ay$

وترخاص(Latus Rectum): مکافی کا وترخاص ایک خط ہے جو مکافی کے محور پر عمودی ہو اور جس کے انتہائی نقاط مکافی پر ہوں۔

شکل3.7 سے مکافی کی تعریف کے مطابق

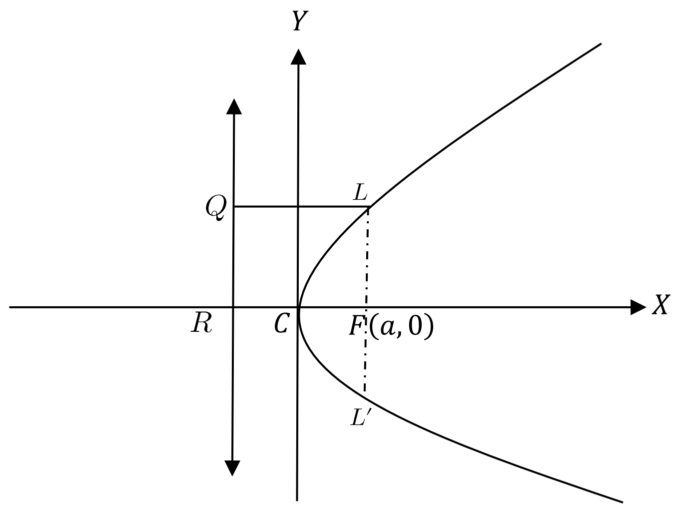
$$LF = LQ$$

لیکن

$$LQ = RF = 2a$$

اب چوں کہ مکافی $x-$ محور کے تحت توازن رکھتی ہے۔یعنی $LF = FL'$ ہے۔اس لیے

وترخاص کی لمبائی $= 2 \ 2a = 4a$



جب مکافی کا وتر خاص معلوم ہو، تو ہمیں مکافی کی مکمل جانکاری حاصل ہو جاتی ہے جس سے اس کی ماپ اور شکل بھی واضح ہوتی ہے۔

اب ہم مکافی کے کچھ مسئلوں کو مثالوں کی مدد سے سمجھیں گے۔

مثال 1۔اس مکافی کا ماسکہ، اس کا محور، ہادی خط اور وتر خاص معلوم کیجیے جس کی مساوات $y^2 = 12x$ ہے۔

حل۔دی گئی مکافی کی مساوات ہے

$$y^2 = 16x \qquad \dots 1$$

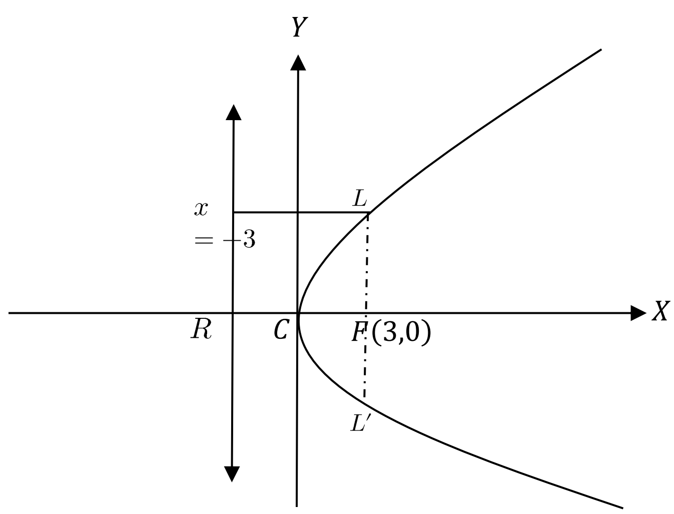
مساوات سے ظاہر ہے کہ مکافی کا محور x— محور ہے۔

مساوات (1) سے مکافی کی معیاری مساوات کا موازنہ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$a = 4$$

اس لیے مکافی کا ماسکہ (4,0) اور ہادی خط $x = -4$ ہو گا۔

اب وتر خاص کی لمبائی $= 4a = 4 \times 4 = 16$



1.2 عملی مسائل

.1 دائرہ $x^2 + y^2 = 4x + 8y + 41$ کے مرکز کے مختصات اور نصف قطر معلوم کیجیے۔

☆☆☆☆☆

2. دائرہ $3x^2 + 3y^2 = 5x + 6y - 4$ سے اس کا مرکز اور قطر معلوم کیجیے۔

☆☆☆☆☆

3. اس دائرہ کی مساوات محسوب کیجیے جو مبدا سے ہو کر گزرتا ہے اور جس کے $x-$ محور پر مثبت a اور $y-$ محور پر مثبت b کے مقطوعات (Intercepts) ہوں۔

☆☆☆☆☆

4. دائرہ $x^2 + y^2 - 2ax - 2may = 0$ $\sqrt{1 + m^2}$ کا مرکز اور نصف قطر معلوم کرو۔

☆☆☆☆☆

5. اس دائرہ کی مساوات محسوب کیجیے جو دونوں مختصات محور کو مبدا سے 5 اکائی کے فاصلے پر چھوتا ہے۔

☆☆☆☆☆

6. اس دائرہ کی مساوات محسوب کیجیے جس کا نصف قطر r ہو اور جو x — محور کو مبدا سے l اکائی کے فاصلے پر دو نقاط پر کاٹتا ہے۔

☆☆☆☆☆

7. اس دائرہ کی مساوات محسوب کیجیے جو دونوں x اور y محور کو مبدا سے بالترتیب 3 اکائی اور 6 اکائی کے فاصلے پر چھوتا ہے۔

☆☆☆☆☆

8. دائرہ $x^2 + y^2 = r^2$ کے لیے کسی نقطہ x', y' پر مماس کی مساوات معلوم کرو۔

☆☆☆☆☆

9. مکافی کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ $(-4,3)$ اور ہادی خط $6x-7y+5=0$ ہے۔

☆☆☆☆☆

10. مکافی $y^2 = 4x + 4y$ کا ماسکہ، وتر خاص اور راس معلوم کرو۔

☆☆☆☆☆

11. اگر مکافی $y^2 = 4kx$ نقطہ $3, -2$ سے گزرتا ہو تو k کی قدر معلوم کرو۔

☆☆☆☆☆

12. مکافی کی مساوات محسوب کیجیے جس کا مبدا سے راس a فاصلہ پر اور ماسکہ b فاصلہ پر ہو۔

☆☆☆☆☆

13. مکافی $y^2 = 4ax$ اور خط $y = mx + c$ کا نقطہ تخاتع معلوم کیجیے۔

☆☆☆☆☆

14. مکافی $y^2 = 4ax$ پر موجود نقطہ $P\ x_1, y_1$ پر مماس معلوم کیجیے۔

☆☆☆☆☆

15. مکافی $y^2 = 9x$ پر موجود نقطہ P $4,6$ پر مماس اور اس پر عمودی خط حاصل کیجیے۔

☆☆☆☆☆

16. مکافی $y^2 = 12x$ کے وتر خاص کے اختتامی نقطوں پر مماس اور عمودی خط معلوم کیجیے۔

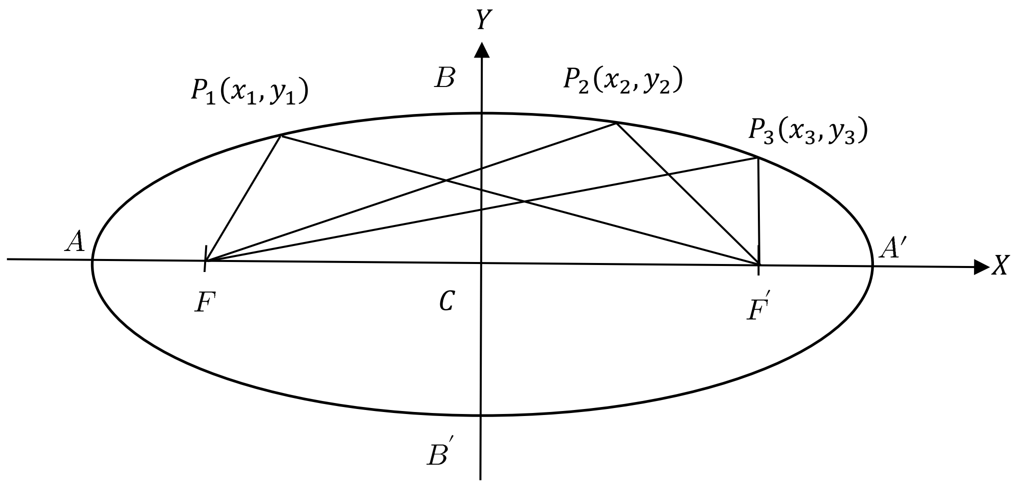
☆☆☆☆☆

اکائی 2۔ بیضی اور زائد سے متعلق مسائل

(Problems on Ellipse and Hyperbola)

2.0 تمہید (Introduction)

تعریف: بیضی، کسی مستوی میں ان نقاط کا سٹ ہے، جن کی دو مقررہ نقاط سے فاصلے کی جمع ہمیشہ ایک مستقل رہے۔



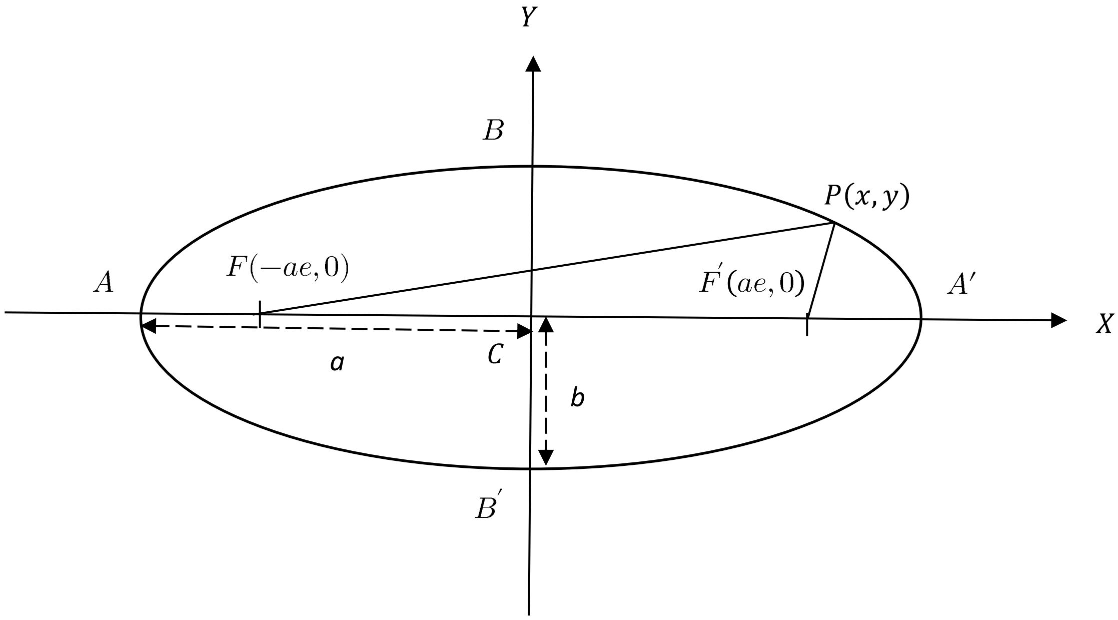
مستقل نقاط کو بیضی کے ماسکے (Foci) کہتے ہیں۔ دونوں ماسکوں کو جوڑنے والے خط کے درمیانی نقطہ (Mid-Point) کو بیضی کا مرکز (Centre)، دونوں ماسکوں سے گزرنے والے خط کو بیضی کا محور اعظم (Major Axis) اور مرکز سے گزرنے والے اور محور اعظم کے عمودی خط کو بیضی کا محور اصغر (Minor Axis) کہتے ہیں۔ محور اعظم کے اختتامی نقاط کو بیضی کے راس (Vertices) کہتے ہیں۔

(i): بیضی کے دونوں ماسکوں سے کسی نقطہ کے فاصلوں کی جمع بیضی کے محور اعظم کے مساوی ہوتی ہے، یعنی

$$FP + F'P = 2a = \text{محور آعظم}$$

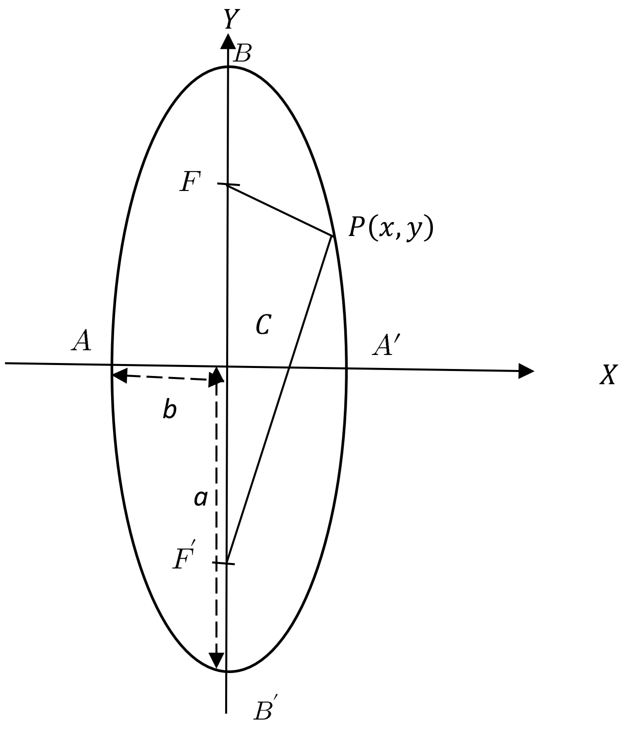
(ii) اگر بیضی کا مرکز مبدا (Origin) اور ماسکے x-محور پر وجود رکھتے ہوں تو بیضی کی معیاری مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



(iii) اگر بیضی کا مرکز مبدا(Origin)اور ماسکے y- محور پر ہوں تب بیضی کی معیاری مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$



بیضی کا خروج المرکز(Eccentricity of Ellipse): بیضی پر کسی نقطہ کی، اس کے ماسکے اور ہادی خط سے فاصلوں کا تناسب، بیضی کا خروج المرکز کہلاتا ہے۔ بیضی کے لیے اس کی قیمت 1 سے کم ہوتی ہے، یعنی $e<1$

بیضی کا خروج المرکز کا ضابطہ.

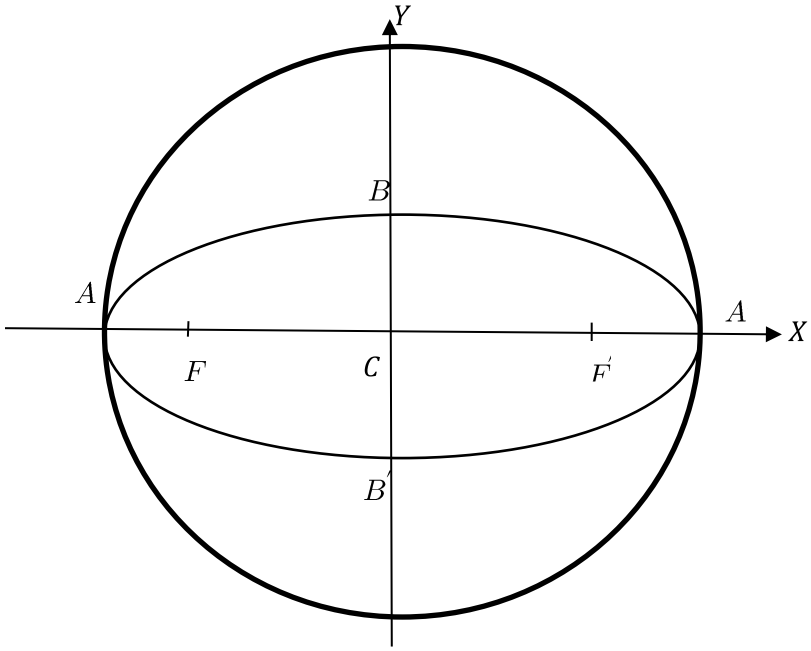
$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

بیضی کا وتر خاص (Latus Rectum of an Ellipse).

$$\frac{2b^2}{a} = \text{بیضی کا وتر خاص.}$$

معاون دائرہ (Auxiliary Circle)

وہ دائرہ جسے بیضی کے محور اعظم پر قطر کے طور پر ترسیم کیا جاتا ہے، بیضی کا معاون دائرہ کہلاتا ہے۔



قطب اور قطبی (Pole and Polar)

اگر کسی نقطہ P سے ہو کر کوئی خط کسی بیضی کے دو نقطوں Q اور R سے ملتا ہے، تو نقطوں Q اور R پر مماس کے مقطع نقطہ کا مقام (Locus of the Point) نقطہ P کا قطبی کہلاتا ہے اور ساتھ ہی نقطہ P کو قطبی کا قطب کہتے ہیں۔

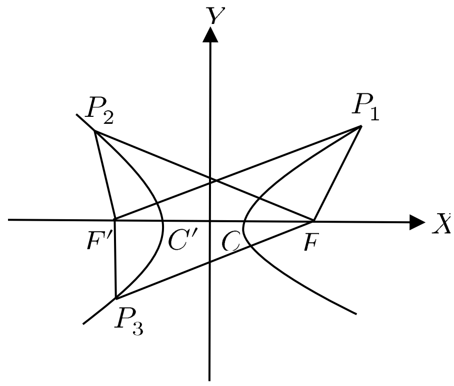
نقطہ x_1, y_1 کے قطبی (Polar) کی مساوات درجہ ذیل ہے

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

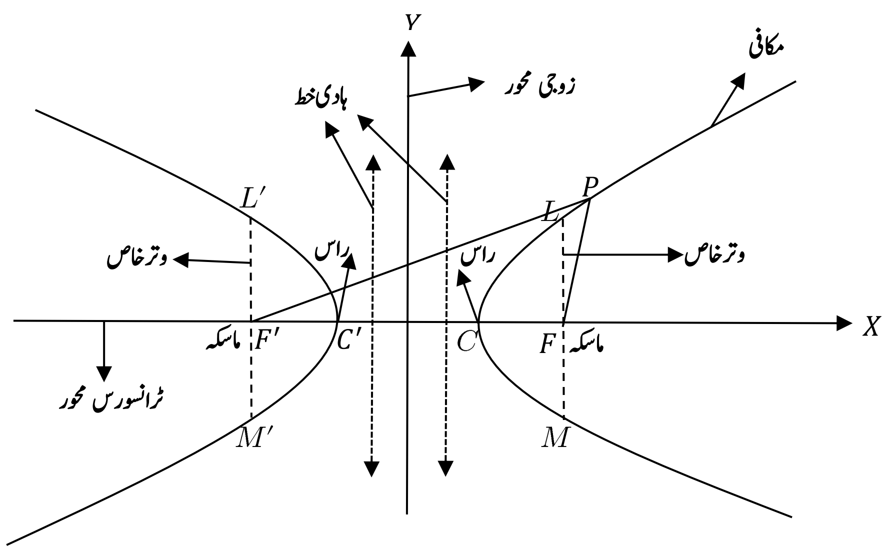
2.1 زائد(Hyperbola)

تعریف: زائد، کسی مستوی میں ان نقاط کا سٹ ہے، جن کی مستوی میں دو مقررہ نقطوں سے دوری کا فرق ہمیشہ مستقل رہے۔ یعنی

$$P_1F' - P_1F = P_2F - P_2F' = P_3F - P_3F' = c(\text{لومان})$$



دونوں مقررہ نقطوں کو زائد کے ماسکے، دونوں ماسکوں کو جوڑنے والے خط کا درمیانی نقطہ زائد کا مرکز، دونوں ماسکوں سے ہو کر گزرنے والا خط زائد کا ٹرانسورس محور (Transverse Axis) اور اس پر عمودی خط زائد کا زوجی محور (Conjugate Axis) کہلاتا ہے۔ ٹرانسورس محور کے وہ نقاط جن سے ہو کر زائد گزرتا ہے، زائد کے راس کہلاتے ہیں۔



زائد کی معیاری مساوات (Standard Equation of Hyperbola)

زائد کی معیاری مساوات درجہ ذیل ہوتی ہے

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

زائد کا وتر خاص (Latus Rectum of Hyperbola)

زائد کے کسی ماسکہ سے گزرنے والا وہ خط جو ٹرانسورس محور پر عمودی ہو اور جس کے اختتامی نقطے زائد پر موجود ہوں وتر خاص کہلاتا ہے۔ زائد کے لیے وتر خاص کا ضابطہ بھی وہی ہوتا جو بیضی کے لیے ہوتا ہے۔ اس لیے

$$\text{زائد کا وتر خاص} = \frac{2b^2}{a}$$

زائد کے ایسمپٹوٹس (Asymptotes of Hyperbola)

کسی زائد کی ترسیم کو آسان بنانے کے لیے ایسمپٹوٹس کی جانکاری ہونا بہت ضروری ہوتا ہے۔ ایسمپٹوٹس کو معلوم کرنے کے لیے زائد کی مساوات کی اعظم ترین قوت کی ارکان کو صفر کے برابر رکھتے ہیں، یعنی

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$
$$\Rightarrow y = \pm \frac{b}{a} x$$

کسی سمت میں کھینچے گئے مرکزی ریڈس کی لمبائی (Length of Central Radius Drawn in a given direction)

زائد کی معیاری مساوات میں x کی جگہ $r\cos\theta$ اور y کی جگہ $r\sin\theta$ درج کرنے پر ہمیں زائد کی درجہ ذیل قطبی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\theta}{b^2}\left(\frac{b^2}{a^2} - \tan^2\theta\right)$$

اس طرح ہم ٹرانسورس محور پر زاویہ θ کے ساتھ جھکے کسی مرکزی ریڈیس کی لمبائی حاصل کر لیتے ہیں۔ اس سے ہمیں درجہ ذیل نطائج حاصل ہوتے ہیں:

a) جب $\tan^2\theta < \frac{b^2}{a^2}$ تب r کی دو مساوی لیکن مخالف قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

b) جب $\tan^2\theta > \frac{b^2}{a^2}$ تب r کی خیالی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

c) r کم تر ہوگا جب $\theta = 0$ ہو۔

d) r لا متناہی ہوگا جب $\tan\theta = \pm\frac{b}{a}$ ہو۔

نوٹ:

(i) زائد کے دونوں ماسکوں سے کسی نقطہ کے دوریوں کا فرق زائد کے ٹرانسورس محور کی لمبائی $2a$ کے مساوی ہوتا ہے۔

(ii) اگر زائد کا مرکز مبدا (Origin) پر اور ماسکے $x-$ محور پر ہوں تب زائد کی معیاری مساوات درجہ ذیل ہوگی

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(iii) اگر زائد کا مرکز مبدا (Origin) پر اور ماسکے $y-$ محور پر ہوں تب زائد کی معیاری مساوات درجہ ذیل ہوگی

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

(iv) زائد کے ماسکوں کی مرکز سے دوری خروج المرکز کے طور پر ae ہوتی ہے۔

(v) اگر زائد میں $a = b$ درج کیاجائے تو حاصل کردہ منحنی مساوی ضلعی (Equilateral Hyperbola) کہلاتا ہے۔

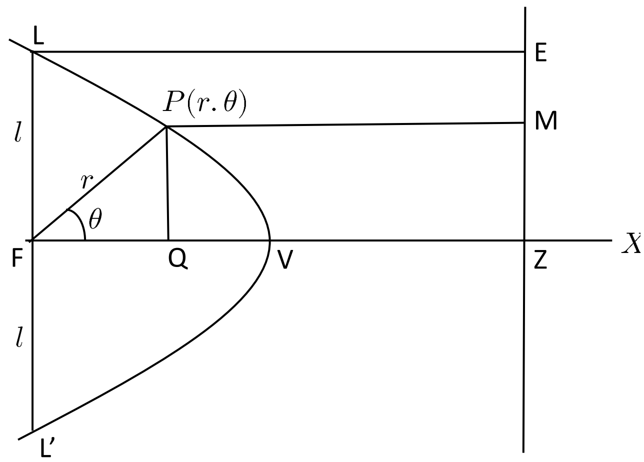
(vi) زائد کی شکل سے ظاہر ہے کہ یہ بالحاظ مبدا اور بالحاظ مختصات محور توازن رکھتا ہے۔

(vii) زائد کے دونوں راس پر مماس ٹرانسورس محور پر عمودی خط ہوتے ہیں۔

کسی مخروطی کی قطبی مساوات (Polar Equation of Conic)

کسی مخروطی کی قطبی مساوات کو درجہ ذیل ضابطہ سے ظاہر کیا جاتا ہے

$$l = r\ 1 + e\cos\theta$$



نوٹ:

1. اگر مخروطی کا محور ابتدائی خط پر α زاویہ سے جھکا ہوا ہو، تب مخروطی کی مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$l = r\{1 + e\cos\ \theta - \alpha\ \}$$

2. اگر FZ ابتدائی خط کی منفی سمت میں لیا جائے اور برداری زاویہ θ کو گھڑی کی مخالف سمت میں ناپا جائے، تو مخروطی کی مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$l = r\{1 - e\cos\theta\}$$

3. اگر مخروطی ایک مکافی ہے جس کے لیے $e = 1$ ہوتا ہے، تب مکافی کی قطبی مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$l = r\{1 + \cos\theta\}$$

4. مخروطی کا ہادی خط: مان لیجیے کہ مخروطی کی قطبی مساوات $l = r\{1 + e\cos\theta\}$ ہے۔ تب اس کا ہادی خط درجہ ذیل ہو گا

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta$$

5. مخروطی کا ماسکی وتر (Focal Chord) اس خط کا حصہ ہے جو مخروط کے کسی ایک ماسکہ سے ہو کر گزرتا ہے اور جس کے اختتامی نقاط مخروطی پر موجود ہوں۔

مثال 1۔ زائد $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$ کے ماسکے، محور اعظم اور محور اصغر کی لمبائیاں، خروج المرکز اور نصف وتر خاص کی لمبائی معلوم کیجیے۔

حل۔ چوں کہ $36 > 25$ ہے اس لیے محور اعظم $x-$ محور پر ہو گا۔ دی گئی مساوات کا تقابل زائد کی مساوات سے کرنے پر ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ $a = 6$ اور $b = 5$

اب زائد کے لیے

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11}$$

اس لیے ماسکوں کے **محتسات** $(0، \sqrt{11})$ اور $(0، -\sqrt{11})$، اس کے راس $(0، 6-)$ اور $(0، 6)$ ہوں گے۔ اس اعظم محور کی لمبائی 10 اور اصغر محور کی لمبائی 6 ہو گی۔

$$\text{وتر خاص کی لمبائی} = \frac{2b^2}{a}$$

$$= \frac{2\ 5\ ^2}{6}$$

$$= \frac{50}{6}$$

اس لیے نصف وتر خاص کی لمبائی $\frac{25}{6}$ ہو گی۔

2.2 عملی مسائل

1. اس بیضی کی مساوات معلوم کرو جس کا وتر خاص 5 اور خروج المرکز $\frac{2}{3}$ ہو۔

☆☆☆☆☆

2. اس بیضی کی مساوات معلوم کرو جس کا وتر خاص 10 اور جس کا محور اصغر دونوں ماسکوں کے درمیانی فاصلہ کے مساوی ہے۔

☆☆☆☆☆

3. اس بیضی کی مساوات معلوم کرو جس کے ماسکے $4,0$ اور $-4,0$ ہیں اور جس کا خروج المرکز $\frac{1}{3}$ ہے۔

☆☆☆☆☆

4. بیضی $x^2 + 3y^2 - r^2 = 0$ کے لیے وتر خاص، خروج المرکز اور ماسکے معلوم کرو۔

☆☆☆☆☆

5. بیضی $9x^2 + 5y^2 - 30 = 0$ کے لیے وتر خاص، خروج المرکز اور ماسکے معلوم کرو۔

☆☆☆☆☆

6. بیضی $5x^2 + 7y^2 - 11 = 0$ کے لیے وتر خاص، خروج المرکز اور ماسکے معلوم کرو۔

☆☆☆☆☆

.7 بیضی $25x^2 + 16y^2 - 1600 = 0$ کے لیے وتر خاص، خروج المرکز اور ماسکے معلوم کرو۔

☆☆☆☆☆

8 .بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ اور خط $y = mx + c$ کا نقطہ تقاطع معلوم کرو۔

☆☆☆☆☆

9. بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ کے کسی نقطہ پر مماس کی مساوات اخذ کرو۔

☆☆☆☆☆

10. بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ کے کسی نقطہ پر عمودی خط کی مساوات اخذ کرو۔

☆☆☆☆☆

11. بیضی $4x^2 + 9y^2 - 20 = 0$ کے نقطہ $(1, \frac{4}{3})$ پر مماس اور عمودی خط کی مساوات معلوم کرو۔

☆☆☆☆☆

12. اس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کے ٹرانسورس محور اور کنجوگیٹ محور بالترتیب 3 اور 4 ہیں۔

☆☆☆☆☆

13. اس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کا کنجوگیٹ محور 5 اور جس کے ماسکوں کا درمیانی فاصلہ 13 ہے۔

☆☆☆☆☆

14. اس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کا خروج المرکز $\sqrt{2}$ اور جس کے ماسکوں کا درمیانی فاصلہ 16 ہے۔

☆☆☆☆☆

15. اس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کا خروج المرکز $\frac{5}{4}$ اور جس کا ماسکہ $a, 0$ کی اور ہادی خط $4x - 3y = a$ ہے۔

☆☆☆☆☆

16. زائد $4x^2 - 9y^2 = 1$ پر مماس کی مساوات معلوم کرو جو خط $4y - 5x = 7$ کے متوازی ہے۔

☆☆☆☆☆

17. زائد $25x^2 - 9y^2 = 225$ اور خط $12y + 25x = 45$ کا نقطہ تقاطع معلوم کیجیے۔

☆☆☆☆☆

18. زائد $4x^2 - 9y^2 = 1$ پر مماس کی مساوات معلوم کرو جو خط $4y - 5x = 7$ کے متوازی ہے۔

☆☆☆☆☆

.19 زائد $4x^2 - 9y^2 = 1$ پر مماس کی مساوات معلوم کرو جو خط $4y - 5x = 2$ کے متوازی ہے۔

☆☆☆☆☆

20. زائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\mathrm{b}^2} = 1$ کے لیے سبھی ایسمپٹوٹس معلوم کرو۔

☆☆☆☆☆

21. زائد $xy = c^2$ کے کسی نقطہ پر مماس کی مساوات معلوم کرو۔

☆☆☆☆☆

22. مخروطی $\frac{l}{r} = 1 - e\cos\theta$ کے نقطہ P پر مماس کی قطبی مساوات (Polar Equation) معلوم کرو۔

☆☆☆☆☆

23. زائد $25x^2 - 9y^2 = 225$ اور مستقیم خط $12y + 25x = 45$ کے مشترکہ نقاط حاصل کیجیے۔

☆☆☆☆☆

نمونہ امتحانی پرچہ

ریاضیات(لیب مینول)

BNMM101DEP

بی۔ایس سی-(پہلا سمسٹر)

وقت: 2 Hrs   کل نمبر: 10

نوٹ: درج ذیل میں سے کوئی دو سوالات کے جواب دیجیے $(2 \times 5 = 10)$

1۔ دائرہ $x^2 + y^2 - 2cx - 2mcy = 0$ $\sqrt{1 + m^2}$ کا مرکز اور نصف قطر معلوم کرو۔

2۔ مکافی $y^2 = 9x$ پر موجود نقطہ $P\ 4,6$ پر مماس اور اس پر عمودی خط حاصل کیجیے۔

3۔ .بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ کے کسی نقطہ پر نارمل کی مساوات اخذ کرو۔

4۔ زائد $25x^2 - 9y^2 = 225$ اور خط $12y + 25x = 45$ کا نقطہ تقاطع معلوم کیجیے۔

تصدیق نامہ

تصدیق کی جاتی ہے کہ بی۔ایس سی۔(پہلا سمسٹر) تجزیاتی جیومٹری کے تجرباتی حصہ کے کام کا یہ اصلی ریکارڈ ہے،

جسے ______________________________ نے مولانا

آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کے اسٹڈی سینٹر ______________________ میں تعلیمی سال

__________ کے دوران تیار کیا۔

دستخط کونسلر