BNMM101DCT

علم احصا

(Calculus)

بی۔ایس سی۔(آنرس)

چار سالہ پروگرام

پہلا سمسٹر (ریاضی)

مرکز برائے فاصلاتی و آن لائن تعلیم

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

حیدر آباد۔32، تلنگانہ، بھارت

Copyright © 2025, Maulana Azad National Urdu University, Hyderabad
All right reserved. No part of this publication may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronically or mechanically, including photocopying, recording or any information storage or retrieval system, without prior permission in writing form the publisher (registrar@manuu.edu.in)

ISBN : 978-81-994195-2-0
Course : Calculus
First Edition : October 2025
Copies : 600
Price : 245/-(The price of the book is included in admission fee of distance mode students)

Course Coordinator

Dr. Khaja Moinuddin, Professor, (Mathematics), School of Sciences,MANUU

Editorial Board/Editors

Dr. Khaja Moinuddin, Prof. (Mathematics), School of Sciences, MANUU

Dr. Syed Salahuddin, Head, Dept of Mathematics, Anwarul Uloom College, Hyderabad

Dr. Kashif Khan, (Mathematics), Centre for Distance and Online Education, MANUU

Production

Prof. Nikhath Jahan, Professor (Urdu), CDOE MANUU

Mohd Abdul Naseer, Section Officer, CDOE MANUU

Mr. P Habibulla, Assistant Registrar, Purchase & Stores Section, MANUU

Shaik Ismail, UDC, CDOE, MANUU

Dr. Mohd Akmal Khan, Assistant Professor (C), CDOE MANUU

SyedFaheemuddin, LDC,Purchase & Stores Section, MANUU

On behalf of the Registrar, Published by:

Centre for Distance and Online Education

Maulana Azad National Urdu University

Gachibowli, Hyderabad-500032 (TG), India

*Director:*dir.dde@manuu.edu.in*Publication:*ddepublication@manuu.edu.in

Phone number: 040-23008314 Website: manuu.edu.in

CRC Prepared by Dr. Kashif Khan, Faculty of Mathematics, CDOE, MANUU

Printed at: Print Time& Business Enterprises, Gachibowli, Hyderabad

فہرست

پیغام	وائس چانسلر، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی	**5**
پیغام	ڈائرکٹر، مرکز برائے فاصلاتی و آن لائن تعلیم	**6**
کورس کا تعارف	کورس کوآرڈی نیٹر (ریاضی)	**7**

اکائی نمبر	اکائی کا نام	مصنف	صفحہ نمبر
1۔	زائدی تفاعلات	ڈاکٹر افروز	9
2۔	اعلا رتبے کے مشتقات	ڈاکٹر افروز	30
3۔	لیبنیز قضیہ	ڈاکٹر سہاش آلھا	46
4۔	کانکیوٹی، انفلیکشن نقاط اور ایسمپٹوٹس	ڈاکٹر سہاش آلھا	60
5۔	منحنی کی ٹریسنگ	ڈاکٹر کاشف خان	78
6۔	غیر متعینہ صورت اور L-ہاسپٹل قانون	ڈاکٹر ماجد علی چودھری	95
7۔	تکمل۔ تحویلی ضابطے-I	ڈاکٹر خواجہ معین الدین	112
8۔	تکمل۔ تحویلی ضابطے-II	ڈاکٹر خواجہ معین الدین	127
9۔	سلائسنگ، ڈسک اور واشر کے ذریعے حجم	ڈاکٹر اختر علی	141
10۔	استوانی خول کے ذریعے حجم	ڈاکٹر اختر علی	155

11۔	قوسی لمبائی	ڈاکٹر اختر علی	167
12۔	گردشی سطح کا رقبہ	ڈاکٹر کاشف خان	182
	نمونہ امتحانی پرچہ		194
	لیب مینول		196
1۔	اعلا رتبے کے مشتقات اور زائدی تفاعل کے مسائل	ڈاکٹر کاشف خان	197
2۔	لیبنیز قضیہ، کانکیوٹی، انفلیکشن نقاط اور ایسمپٹوٹس کے مسائل	ڈاکٹر کاشف خان	206
3۔	منحنی کی ٹریسنگ، غیر متعینہ صورت، L–ہاسپٹل قانون کے مسائل	ڈاکٹر کاشف خان	214
4۔	تکمل- تحویلی ضابطے کے مسائل	ڈاکٹر کاشف خان	226
5۔	سلائسنگ، ڈسک، واشر، استوانی خول کے ذریعے حجم کے مسائل	ڈاکٹر کاشف خان	252
6۔	خوسی لمبائی اور گردشی سطح کے رقبے کے مسائل	ڈاکٹر کاشف خان	262
	نمونہ امتحانی پرچہ		272
	تصدیق نامہ		273

مصنفین کی تفصیلات

Writer's Details

Dr. Kashif Khan, (Mathematics), Centre for Distance and Online Education, MANUU	ڈاکٹر کاشف خان، ریاضی، مرکز برائے فاصلاتی وآن لائن تعلیم، مانو، حیدرآباد
Dr. Khaja Moinuddin, Professor, Department of Mathematics, School of Sciences, MANUU	ڈاکٹر خواجہ معین الدین، پروفیسر، شعبہ ریاضی، مانو، حیدرآباد
Dr. Afroz,Associate Professor, Department of Mathematics, School of Sciences, MANUU	ڈاکٹر افروز، اسوشی ایٹ پروفیسر، شعبہ ریاضی، مانو، حیدرآباد
Dr. Subhash Alha, Assistant. Professor, Department of Mathematics, School of Sciences, MANUU	ڈاکٹر سبھاش آلھا، اسسٹنٹ پروفیسر، شعبہ ریاضی، مانو، حیدرآباد
Dr. Majid Ali Chaudhary, Assistant. Professor, Department of Mathematics, School of Sciences, MANUU	ڈاکٹر ماجد علی چودھری، اسسٹنٹ پروفیسر، شعبہ ریاضی، مانو، حیدرآباد
Dr. Akhtar Ali	ڈاکٹر اختر علی

مترجمین: ڈاکٹر کاشف خان

پروف ریڈرس: 1. ڈاکٹر کاشف خان 2. ڈاکٹر خواجہ معین الدین

ٹائٹل پیج: ابراہیم اکرم صدیقی

پیغام

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی (MANUU) 1998 میں پارلیمنٹ کے ایک ایکٹ کے ذریعے قائم کی گئی۔ یہ ایک مرکزی جامعہ ہے جس نے این اے اے سی کی جانب سے گریڈ +A حاصل کیا ہے۔ اس جامعہ کے قیام کے مقاصد ہیں: (1) اردو زبان کا فروغ، (2) پیشہ ورانہ اور تکنیکی تعلیم کو اردو میڈیم میں قابل رسائی اور دستیاب بنانا، (3) روایتی اور فاصلاتی طریقۂ تعلیم کے ذریعے تعلیم فراہم کرنا، اور (4) خواتین کی تعلیم پر خصوصی توجہ دینا۔ یہ وہ نکات ہیں جو اس مرکزی جامعہ کو دیگر تمام مرکزی جامعات سے ممتاز کرتے ہیں اور اسے ایک انفرادیت بخشتے ہیں۔ قومی تعلیمی پالیسی 2020 میں بھی مادری زبانوں اور علاقائی زبانوں میں تعلیم حاصل کرنے پر زور دیا گیا ہے۔

اردو کے ذریعے علم کے فروغ کا مقصد یہی ہے کہ اردو جاننے والے طبقے کے لیے عصری علوم اور مضامین تک رسائی آسان بنائی جائے۔ ایک طویل عرصے تک اردو میں درسی مواد کی کمی رہی ہے۔ اردو یونیورسٹی کے پاس اب اردو میں 350 سے زیادہ کتابوں کا ذخیرہ موجود ہے اور ہر سمسٹر کے ساتھ اس تعداد میں اضافہ ہو رہا ہے۔ اردو یونیورسٹی این ای پی 2020 کے وژن کے مطابق مادری/گھریلو زبان میں تعلیمی مواد فراہم کرنے کے قومی مشن کا حصہ بننے کو اپنے لیے ایک اعزاز سمجھتی ہے۔ مزید یہ کہ اردو بولنے والا طبقہ اردو میں مطالعہ کے مواد کی عدم دستیابی کے سبب نئے اُبھرتے شعبوں اور جدید تر معلومات کے موجودہ میدانوں میں تازہ ترین معلومات واطلاعات کے حصول سے محروم نہیں رہے گا۔ مذکورہ بالا میدانوں میں مواد کی دستیابی کی بدولت حصولِ معلومات کا نیا شعور بیدار ہوا ہے جو یقیناً اردو داں طبقے کی دانشورانہ ترقی پر اثرانداز ہوگا۔
فاصلاتی اور آن لائن طلبہ کے لیے تعلیم وتدریس کے عمل کو سہل بنانے کے لیے یونیورسٹی کا سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن (CDOE) اردو اور متعلقہ مضامین میں خود اکتسابی مواد (SLM) کی تیاری کو یقینی بناتا ہے۔

MANUU فاصلاتی اور آن لائن لرننگ کے طلبہ کے لیے SLM بلا معاوضہ فراہم کرتا ہے۔ یہ مواد اُردو کے ذریعے علم حاصل کرنے میں دلچسپی رکھنے والے ہر شخص کے لیے برائے نام قیمت پر دستیاب ہے۔ تعلیم تک رسائی کے دائرے کو مزید پھیلانے کے مقصد سے، اردو/ہندی/انگریزی/عربی میں eSLM یونیورسٹی کی ویب سائٹ پر مفت ڈاؤن لوڈ کے لیے دستیاب رکھا گیا ہے۔

مجھے بے حد خوشی ہے کہ متعلقہ فیکلٹی کی محنت اور مصنفین کے مکمل تعاون کی بدولت FYUG بی۔اے، بی۔ایس سی اور بی۔کام کی کتابوں کی اشاعت کا عمل بڑے پیمانے پر شروع ہو گیا ہے۔ فاصلاتی اور آن لائن لرننگ کے طلبہ کی سہولت کے لیے خود اکتسابی مواد (SLM) کی تیاری اور اشاعت کا عمل یونیورسٹی کے لیے اہمیت رکھتا ہے۔ مجھے یقین ہے کہ ہم اپنے خود تعلیمی مواد کے ذریعے اردو جاننے والے ایک بڑے طبقے کی ضروریات کو پورا کرنے کے قابل ہوں گے اور اس یونیورسٹی کے مقصدِ قیام کو پورا کریں گے اور اپنے ملک میں اپنی موجودگی کو جائز ٹھہرا سکیں گے۔

نیک تمناؤں کے ساتھ!

پروفیسر سید عین الحسن
شیخ الجامعہ، مانو

پیغام

موجودہ دور میں فاصلاتی تعلیم کو دنیا بھر میں ایک نہایت مؤثر اور مفید طریقۂ تعلیم کے طور پر تسلیم کیا جاتا ہے اور بڑی تعداد میں لوگ اس طریقۂ تعلیم سے فائدہ اٹھا رہے ہیں۔ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی نے بھی اردو زبان بولنے والے عوام کی تعلیمی ضروریات کو مدنظر رکھتے ہوئے اپنے قیام کے وقت سے ہی فاصلاتی تعلیم کا طریقہ متعارف کرایا۔ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی نے 1998 میں ڈائریکٹوریٹ آف ڈسٹنس ایجوکیشن (نظامتِ فاصلاتی تعلیم) کے ساتھ کام کا آغاز کیا اور 2004 سے باقاعدہ پروگرام شروع ہوئے، اس کے بعد مختلف شعبہ جات قائم کیے گئے۔

یو جی سی نے ملک میں نظام تعلیم کو مؤثر طور پر منظم کرنے میں ایک اہم کردار ادا کیا ہے۔ اوپن اینڈ ڈسٹنس لرننگ (ODL) موڈ کے تحت چلنے والے مختلف پروگرام، جو سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن (CDOE) میں چل رہے ہیں، یو جی سی-ڈی ای بی کے منظور شدہ ہیں۔ یو جی سی-ڈی ای بی نے فاصلاتی اور باقاعدہ تعلیم کے نصاب کو ہم آہنگ کرنے پر زور دیا ہے تاکہ فاصلاتی تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ کے معیار کو بہتر بنایا جاسکے۔ چونکہ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی ایک دُہرے طرز (ڈوئل موڈ) کی یونیورسٹی ہے جو فاصلاتی اور روایتی دونوں طریقۂ تعلیم کی خدمات فراہم کرتی ہے، اس لیے اپنے مقاصد کو یو جی سی-ڈی ای بی کے رہنما خطوط کے مطابق حاصل کرنے کے لیے اس نے چوائس بیسڈ کریڈٹ سسٹم (CBCS) متعارف کرایا گیا جس کا خود اکتسابی مواد (Self Learning Materials) یو جی سی کے قوانین اور کریڈٹ فریم کے مطابق نئے سرے سے تیار کیے جا چکا ہے۔

سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن (CDOE) کل انیس (19) پروگرام پیش کرتا ہے جن میں یو جی، پی جی، بی ایڈ، ڈپلومہ اور سرٹیفکیٹ پروگرام شامل ہیں۔ اس کے ساتھ ساتھ تکنیکی مہارتوں پر مبنی پروگرام بھی شروع کیے جا رہے ہیں۔ سی ڈی او ای نے جولائی 2025 سے این ای پی-2020 کے مطابق چار سالہ یو جی پروگرام کا آغاز کیا ہے۔ بی اے، بی ایس سی اور بی کام کے آنرز پروگراموں کو این سی ایف کے مطابق ڈیزائن کیا گیا ہے جس سے طلبہ کو آنرز ڈگری حاصل کرنے میں مدد ملے گی۔ سال 2025-2026 سے ایم بی اے پروگرام او ڈی ایل موڈ میں متعارف کرایا گیا ہے۔

مانو نے طلبہ کی سہولت کے لیے نو ریجنل سنٹرز (بنگلورو، بھوپال، دربھنگہ، دہلی، کولکاتا، ممبئی، پٹنہ، رانچی اور سری نگر) اور چھ سب ریجنل سنٹرز (حیدرآباد، لکھنؤ، جموں، نوح، وارانسی اور امراوتی) کا ایک وسیع نیٹ ورک قائم کیا ہے۔ اس کے علاوہ وجے واڑا میں ایک ایکسٹینشن سنٹر بھی قائم کیا گیا ہے۔ ان ریجنل اور سب ریجنل سنٹروں کے تحت ایک سو پچاس سے زیادہ لرنر سپورٹ سنٹر (LSCs) اور بیس پروگرام سنٹر بیک وقت چلائے جا رہے ہیں تاکہ طلبہ کو تعلیمی اور انتظامی سہولیات فراہم کی جاسکیں۔ سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن اپنی تعلیمی اور انتظامی سرگرمیوں میں آئی سی ٹی کا بھرپور استعمال کرتا ہے اور اپنے تمام پروگراموں میں صرف آن لائن موڈ کے ذریعے ہی داخلے فراہم کرتا ہے۔

طلبہ کے لیے سیلف لرننگ میٹیریل (SLM) کی سوفٹ کاپی سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن کی ویب سائٹ پر دستیاب کرائی جاتی ہیں اور آڈیو و ویڈیو ریکارڈنگ کے لنک بھی ویب سائٹ پر فراہم کیے جاتے ہیں۔ اس کے علاوہ طلبہ کو ای۔ میل اور واٹس ایپ گروپ کی سہولت بھی فراہم کی جارہی ہے جن کے ذریعے انہیں پروگرام کے مختلف پہلوؤں جیسے کورس رجسٹریشن، اسائنمنٹ، کاؤنسلنگ، امتحانات وغیرہ کے بارے میں مطلع کیا جاتا ہے۔ باقاعدہ کاؤنسلنگ کے علاوہ گزشتہ دو برسوں سے طلبہ کے تعلیمی معیار کو بہتر بنانے کے لیے زائد تدارکی (Remedial) آن لائن کاؤنسلنگ بھی فراہم کی جارہی ہے۔

امید کی جاتی ہے کہ سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن تعلیمی اور معاشی طور پر پسماندہ آبادی کو عصری تعلیم کے دھارے میں شامل کرنے میں ایک اہم کردار ادا کرے گا۔ تعلیمی ضروریات کو مدنظر رکھتے ہوئے نئی تعلیمی پالیسی (NEP-2020) کے مطابق مختلف پروگرامز میں تبدیلیاں کی گئی ہیں اور توقع ہے کہ اس سے اوپن اینڈ ڈسٹنس لرننگ کے نظام کو مزید مؤثر اور کارآمد بنانے میں مدد ملے گی۔

پروفیسر محمد رضاﷲ خان

ڈائرکٹر، سی ڈی او ای، مانو

کورس کا تعارف

زیر نظر کتاب علم احصا کے موضوعات سے متعلق ہے اور یہ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کے بی۔ ایس سی۔ کورس کے سال اول کے پہلے سمسٹر کے نصاب پر مشتمل ہے۔ علم احصا ریاضی، سائنس یا انجینئر نگ میں بنیادی حیثیت رکھتا ہے۔ یہ کتاب طلبا کو علم احصا کے بنیادی تصورات کو سمجھنے اور اپنی زندگی اور اطراف میں اس کا استعمال کرنے کا ایک بہترین موقع فراہم کرتی ہے۔ اس کتاب کی نمایاں خصوصیت یہ ہے کہ اس میں مواد کو سہل طریقے سے آسان زبان میں مثالوں کے ساتھ سمجھایا گیا ہے تا کہ طلبا اپنے مضمون کو از خود سمجھ سکیں۔ کتاب کو دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ جس میں پہلا حصہ نظریات (تھیوری) پر مبنی ہے اور دوسرا حصہ پریکٹکل (تجربوں) پر منحصر ہے۔

پہلا حصہ بارہ (12) اکائیوں پر مشتمل ہے۔ اکائی 1 تا 3 میں زائدی تفاعلات اور ان کے اطلاقات، اعلا رتبہ کے مشتق، لیبنیز کا نظریہ اور اس کے ذریعے n- واں مشتق معلوم کرنے کا طریقہ شامل ہے۔ اکائی 4 تا 6 میں کانکیوٹی، اسمپٹوٹس، منحنی کے ترسیم کا طریقہ، اور ایل ہاسپٹل رول کے بارے میں تفصیلی معلومات درج ہیں۔ اکائی 7 اور 8 میں کئی تحویلی ضابطے دیے گئے ہیں جن کی مدد سے بہت سے مسائل کا حل پیش کیا گیا ہے۔

اکائی 9 اور 10 میں سلائسنگ ڈسک واشر اور سلینڈریکل شلس کے ذریعے حجم معلوم کرنے کے طریقوں پر روشنی ڈالی گئی ہے۔ اکائی 11 اور 12 میں قوسی لمبائی اور گردشی سطح کا رقبہ معلوم کرنے کے طریقوں پر تفصیلی بحث کی گئی ہے۔

طلبا کی مسئلہ حل صلاحیت کو بہتر بنانے کے لیے اکائی 1 سے اکائی 6 تک تجرباتی حصے (Practical Manual) کو شامل کیا گیا ہے جس میں علم احصا کے مسائل اور ان کے حل کو تلاش کرنے کے طریقے پیش کیے گئے ہیں۔

اس کتاب کی تدوین میں مصنفین، مترجمین، تدریسی و غیر تدریسی و انتظامی عملے کے تعاون کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ کتاب کو معیاری اور قابل عمل و فہم بنانے کی ہر ممکن کوشش کی گئی ہے، تاہم کوئی بھی کوشش اپنے آپ میں مکمل نہیں ہوتی۔ اس ضمن میں اساتذہ کرام، ماہرین، طلبا کی آرا و مشوروں کا خیر مقدم کیا جائے گا۔

ڈاکٹر خواجہ معین الدین

کورس کوآرڈینیٹر

اکائی 1۔ زائدی تفاعلات

(Hyperbolic Functions)

اکائی کے اجزا

1.0 تمہید
1.1 مقاصد
1.2 جفت، طاق حصے
1.3 زائدی تفاعلات کے گراف، سعت اور علاقہ
1.4 زائدی ضابطے
1.5 زائدی تفاعل کا تفرق
1.6 معکوس زائدی تفاعل
1.7 معکوس زائدی تفاعل کا تفرق
1.8 اکتسابی نتائج
1.9 کلیدی الفاظ
1.10 نمونہ امتحانی سوالات
1.10.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات
1.10.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات
1.10.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

1.0 تمہید(Introduction)

ریاضی میں کئی مرتبہ ایکسپونینشیل (Exponential) تفاعل، e^x اور e^{-x} کی جمع سے بنتے ہیں۔ زائدی تفاعل(Hyperbolic Function) بہت سی ریاضی شماروں کو آسان بنادیتا ہے۔ زائدی تفاعل کا بہت سے اطلاقات میں اہم رول ہے۔ بجلی کی لائن سے لٹکے ہوئے کیبل کی تفرقی مساوات کو حل کرنے میں اس کا اہم کردار ہے۔

1.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ :

- زائدی تفاعل کی بنیادی جانکاری حاصل کر سکیں۔
- زائدی تفاعل کی ضابطوں کو سمجھ سکیں۔
- معکوس زائدی تفاعل کو جان سکیں۔
- زائدی تفاعل اور معکوس زائدی تفاعل کے تفرق اور تکمل حاصل کر سکیں۔

1.2 جفت، طاق حصے(Even, Odd Parts)

اگر $f(-x) = f(x)$ تب f جفت تفاعل کہلاتا ہے۔ اور اگر $f(-x) = -f(x)$ تب f ایک طاق تفاعل ہوتا ہے۔ ہر ایک تفاعل f جو کہ کسی وقفہ پر متعرف ہے اور جس کا مرکز مبدا(Origin) ہے اس کو جفت اور طاق تفاعل کی جمع کے طور پر لکھ سکتے ہیں۔

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

$$= \text{جفت پارٹ} + \text{طاق پارٹ}$$

اسی طرح ہم e^x کو بھی لکھ سکتے ہیں

$$e^x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} + \frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$= \text{جفت پارٹ} + \text{طاق پارٹ}$$

e^x کے جفت اور طاق پارٹ، زائدی کوسائن اور زائدی سائن کہلاتے ہیں۔

زائدی تفاعل کی تعریف:

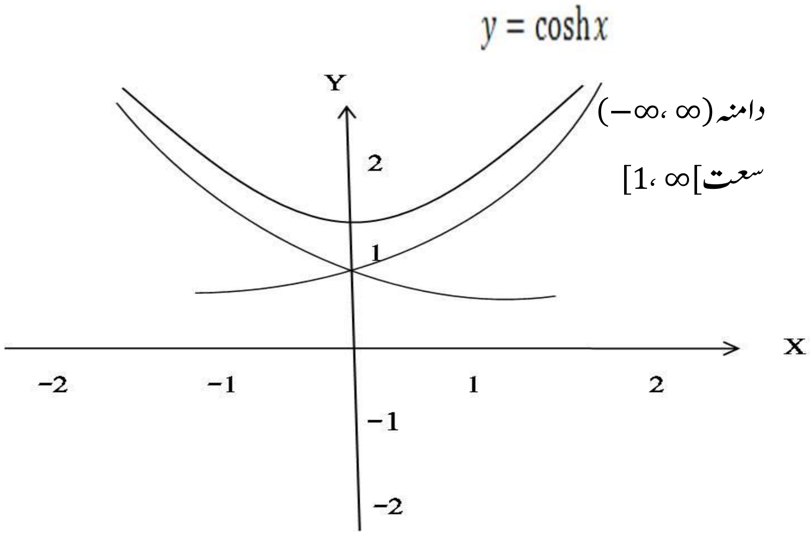
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

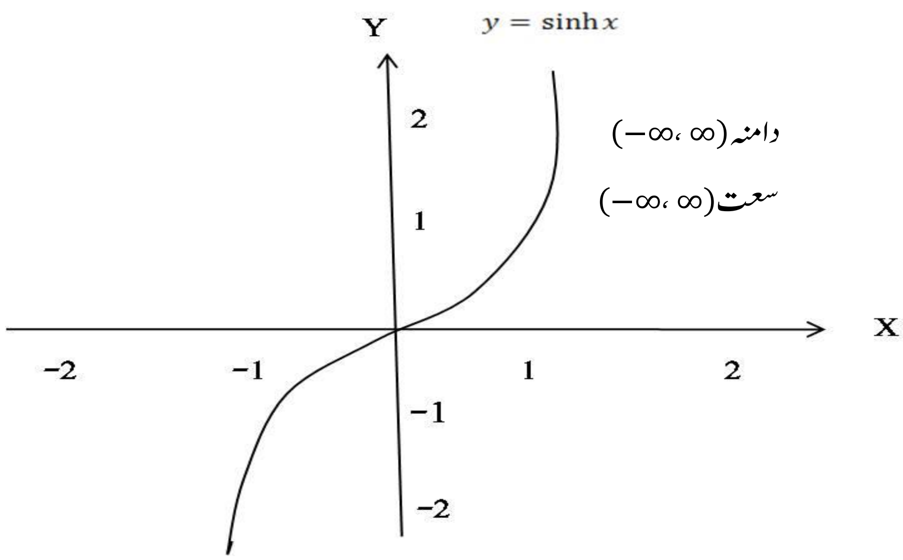
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

1.3 زائدی تفاعلات کے گراف، سعت اور علاقہ

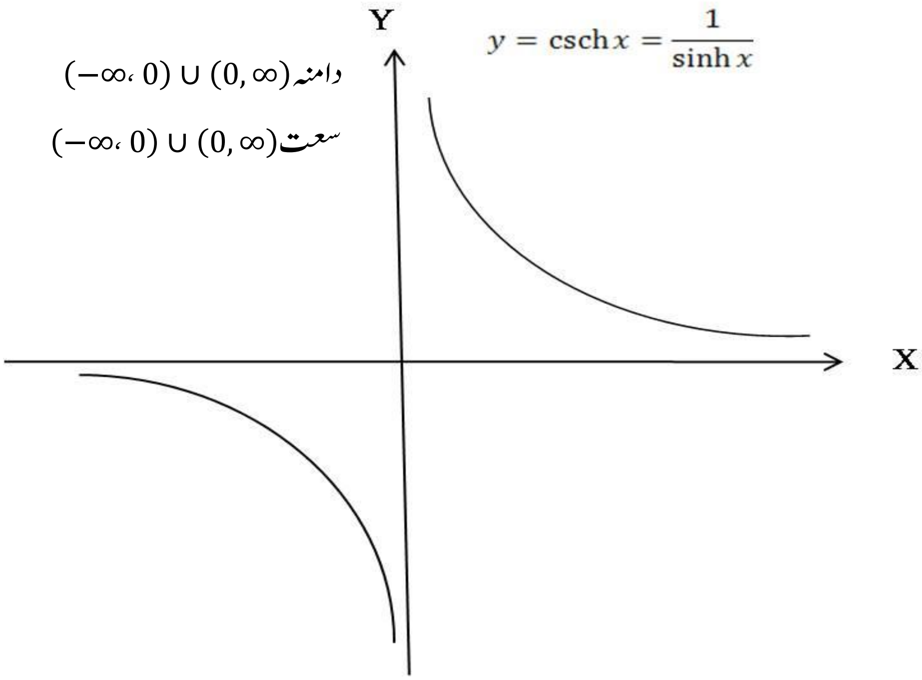
(Graph, Domain and Range of Hyperbolic Functions)



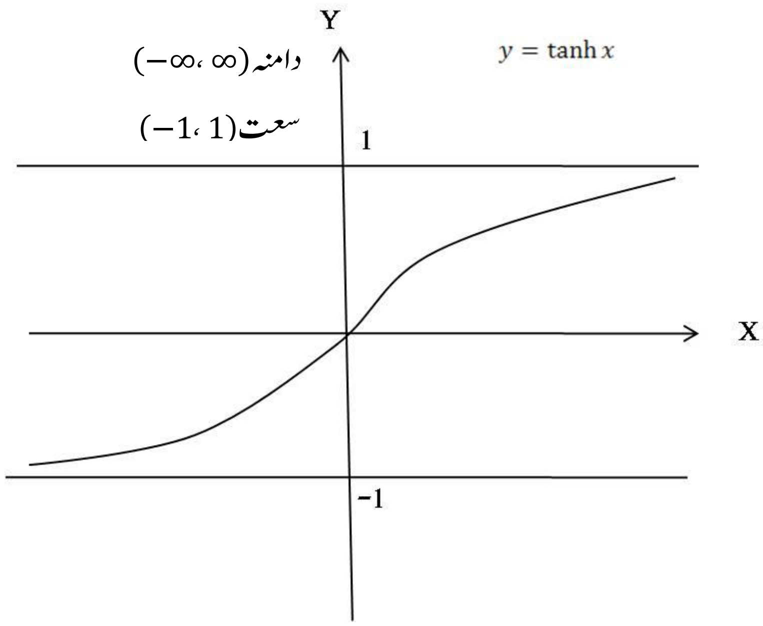
شکل 1.3.1



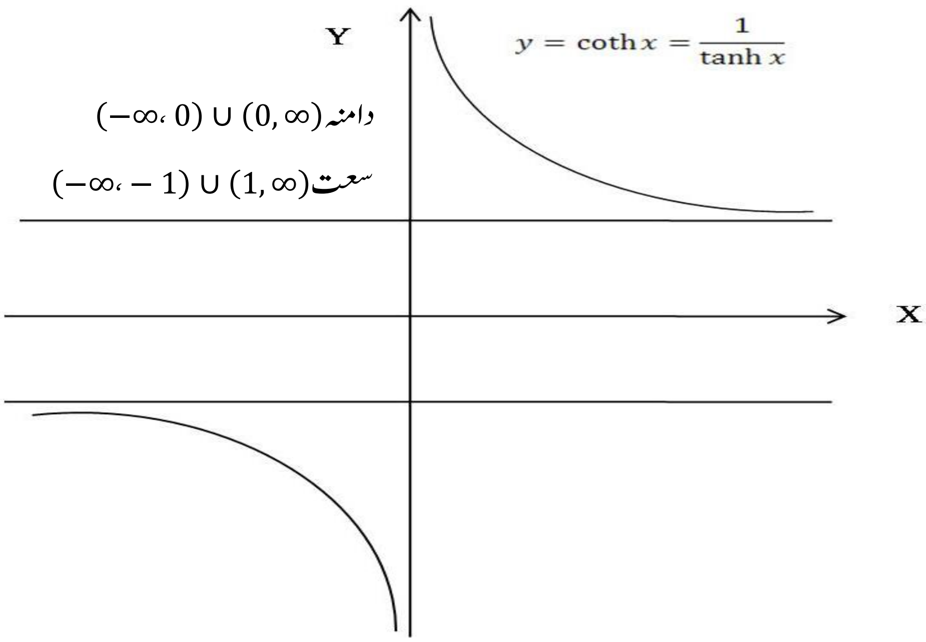
شکل 1.3.2



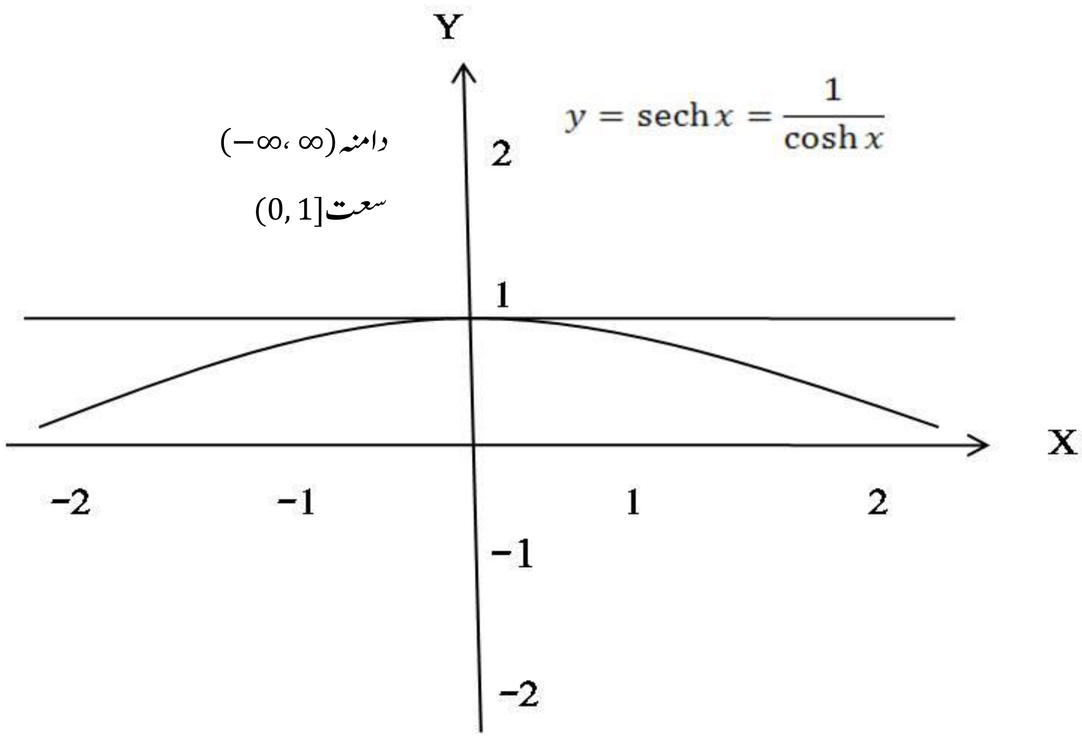
شکل 1.3.3



شکل 1.3.4



شکل 1.3.5



شکل 1.3.6

1.4 زائدی ضابطے (Hyperbolic Identities)

$$sinh(-x) = -sinh\, x \quad cosh(-x) = cosh\, x$$

$$cosh^2x - sinh^2x = 1 \qquad 1 - tanh^2x = sec^2x$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

مثال: ثابت کرو کہ

a) $cosh^2x - sinh^2x = 1$

b) $1 - tanh^2x = sec^2x$

حل: a) ہم جانتے ہیں کہ $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ اور $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

اس لیے

$$cosh^2x - sinh^2x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{4}{4} = 1$$

b) ہم نے اوپر ثابت کیا ہے کہ

$$cosh^2x - sinh^2x = 1$$

اس مساوات کو دونوں طرف $cosh^2x$ سے تقسیم دینے پر

$$1 - \frac{sinh^2x}{cosh^2x} = \frac{1}{cosh^2x}$$

$$\Rightarrow \quad 1 - tanh^2x = sec^2x$$

1.5 زائدی تفاعل کا تفرق (Differentiation of Hyperbolic Function)

1. $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$
2. $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$
3. $\frac{d}{dx}(\tanh x) = \text{sech}^2\, x$
4. $\frac{d}{dx}(\text{cosech}\, x) = -\text{cosech}\, x \coth x$
5. $\frac{d}{dx}(\text{sech}\, x) = -\text{sech}\, x \tanh x$
6. $\frac{d}{dx}(\coth x) = -\text{cosech}^2\, x$

مثال: بتلاؤ کہ $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$

حل: بائیں ہاتھ کی طرف سے

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$$
$$= \cosh x$$

مثال: بتلاؤ کہ $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$

حل: بائیں ہاتھ کی طرف سے

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$$
$$= \sinh x$$

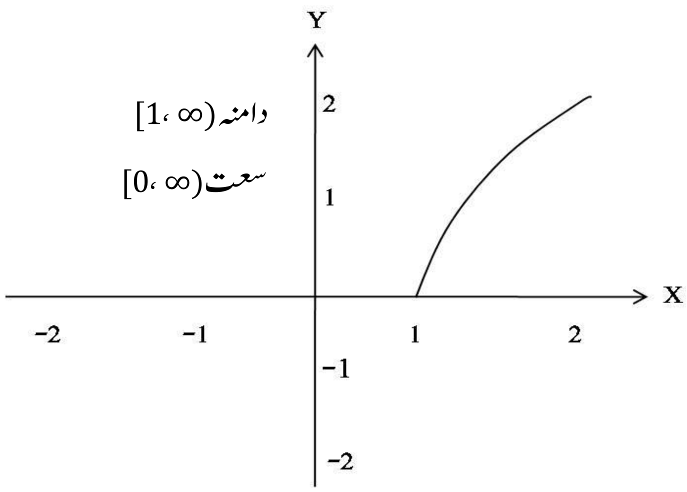
1.6 معکوس زائدی تفاعل (Inverse Hyperbolic Function)

معکوس زائدی تفاعل کے لیے تفاعل کو ایک تا ایک (One to One) اور بر (Onto) ہونا چاہیے۔

$$y = \sinh^{-1} x \Leftrightarrow \sinh y = x$$
$$y = \cosh^{-1} x \Leftrightarrow \cosh y = x$$
$$y = \tanh^{-1} x \Leftrightarrow \tanh y = x$$

باقی معکوس زائدی تفاعل بھی اسی طرح متعارف کیے جاتے ہیں۔

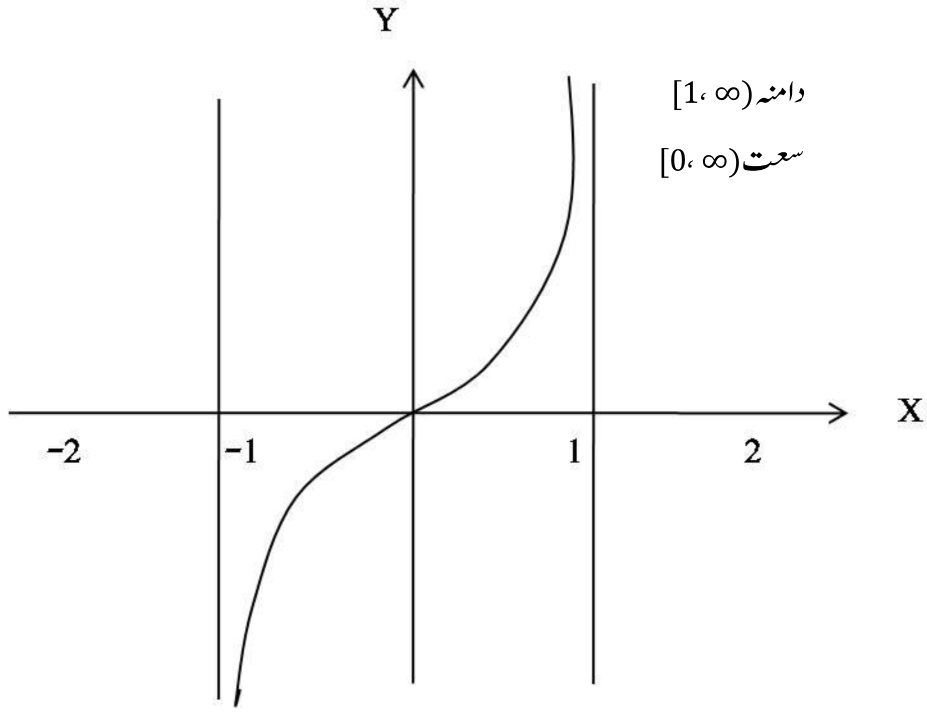
ذیل میں $\sinh^{-1} x$، $\cosh^{-1} x$ اور $\tanh^{-1} x$ کے گراف دیے گئے ہیں۔



$y = \cosh^{-1} x$

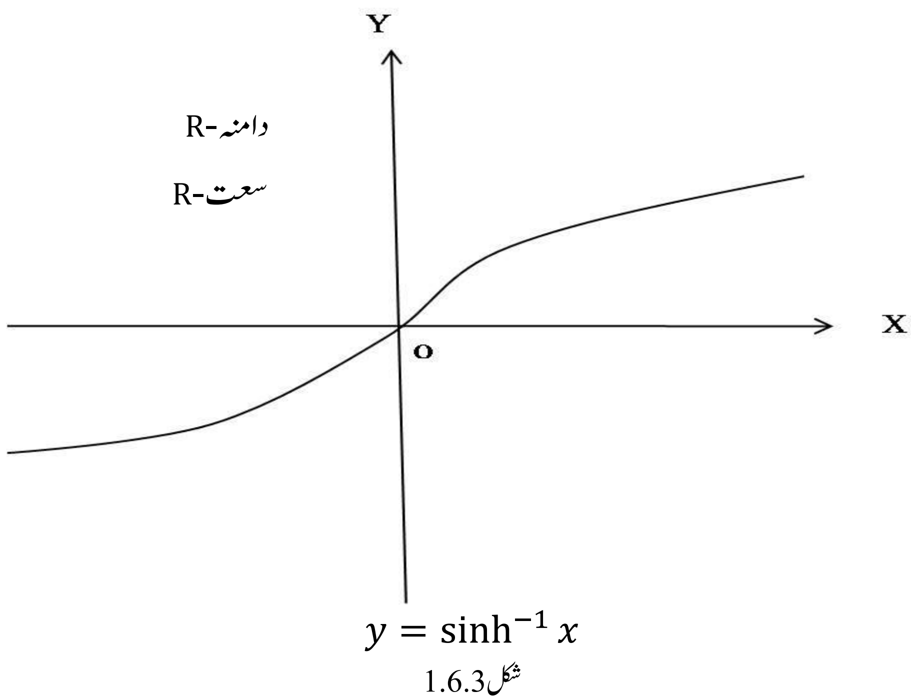
شکل 1.6.1

.



$y = \tanh^{-1} x$

شکل1.6.2



$y = \sinh^{-1} x$

شکل1.6.3

کسی زائدی تفاعل کو قوت نما تفاعل (Exponential Function) کے ارکان میں بیان کیا جاتا ہے۔ اسی طرح معکوس زائدی تفاعل کو لوگرتھم (Logarithm) میں بیان کیا جاتا ہے۔

1. $\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), x \in \mathbb{R}$
2. $\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), x \geq 1$
3. $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), -1 < x < 1$

مثال: بتلاؤ کہ $\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), x \in \mathbb{R}$

حل: مان لو کہ

$$y = \sinh^{-1} x$$

تب

$$x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad e^y - 2x - e^{-y} = 0$$

$$\Rightarrow \quad e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0$$

جو کہ ایک e^y میں کثیر رکنی ہے، اس لیے

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2}$$

$$= x \pm \sqrt{x^2+1}$$

چوں کہ $e^y > 0$ لیکن $x - \sqrt{x^2+1} < 0$ یا $x < \sqrt{x^2+1}$

اس لیے

$$e^y = x + \sqrt{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \quad y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

1.7 معکوس زائدی تفاعل کا تفرق (Differentiation of Inverse Hyperbolic Function)

1. $\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
2. $\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
3. $\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}$
4. $\frac{d}{dx}(\text{cosech}^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2+1}}$
5. $\frac{d}{dx}(\text{sech}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$
6. $\frac{d}{dx}(\coth^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}$

سارے معکوس زائدی تفاعل تفرق پزیر ہوتے ہیں کیوں کہ زائدی تفاعل تفرق پزیر ہوتے ہیں۔

مثال: ثابت کرو کہ

$$\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

حل: مان لیجیے کہ $y = \sinh^{-1} x$ تب

$$\sinh y = x$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$\cosh \mathrm{y} \frac{dy}{dx} = 1$$

$cosh^2 x - sinh^2 x = 1$ اور $\cosh \mathrm{y} \geq 0$، تب

$$\cosh \mathrm{y} = \sqrt{1 + \sinh^2 y}$$

اس لیے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh \mathrm{y}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

مثال: $\frac{d}{dx}[\tanh^{-1}(\sin x)]$ کو معلوم کرو۔

حل: چین قانون (Chain Rule) کا استعمال کر کے بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$\frac{d}{dx}[\tanh^{-1}(\sin x)] = \frac{d}{d(\sin x)}[\tanh^{-1}(\sin x)] \times \frac{d}{dx}(\sin x)$$
$$= \frac{1}{1-(\sin x)^2} \times \cos x$$
$$= \frac{\cos x}{cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

مثال: ضابطوں کی تصدیق کیجیے:

$$\tanh^2 x + sech^2 x = 1 \quad \text{(i)}$$
$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \quad \text{(ii)}$$
$$\sinh 3x = 3 \sinh x + 4 sinh^3 x \quad \text{(iii)}$$

حل: (i) ہمیں تصدیق کرنی ہے

$$\tanh^2 x + sech^2 x = 1$$

بائیں ہاتھ کی طرف سے

$$\tanh^2 x + sech^2 x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2 + \left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right)^2$$
$$= \frac{(e^x - e^{-x})^2 + 4}{(e^x + e^{-x})^2}$$
$$= \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x} + 4}{(e^x + e^{-x})^2}$$
$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^2}$$
$$= \frac{(e^x + e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = 1$$

اس لیے $\tanh^2 x + sech^2 x = 1$ کی تصدیق ہوتی ہے۔

(ii) ہمیں تصدیق کرنی ہے

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

دائیں ہاتھ کی طرف سے

$$\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-(x+y)}}{4}\right) + \left(\frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{y-x} - e^{-(x+y)}}{4}\right)$$
$$= \left(\frac{2e^{(x+y)} - 2e^{-(x+y)}}{4}\right)$$
$$= \left(\frac{e^{(x+y)} - e^{-(x+y)}}{2}\right)$$
$$= \sinh(x + y)$$

اس لیے $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$ کی تصدیق ہوتی ہے۔

(iii) ہمیں تصدیق کرنی ہے

$$\sinh 3x = 3 \sinh x + 4sinh^3 x$$

دائیں ہاتھ کی طرف سے

$$3 \sinh x + 4sinh^3 x = \sinh x\,(3 + 4sinh^2 x)$$
$$= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left[3 + 4\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2\right]$$
$$= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)[3 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}]$$
$$= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)[e^{2x} + e^{-2x} + 1]$$
$$= \frac{1}{2}[e^{3x} + e^{-x} + e^x - e^x - e^{-3x} - e^{-x}]$$
$$= \frac{1}{2}[e^{3x} - e^{-3x}]$$
$$= \sinh 3x$$

اس لیے $\sinh 3x = 3\sinh x + 4sinh^3x$ کی تصدیق ہوتی ہے۔

مثال: دیے گئے زائدی تفاعل کا استعمال کرتے ہوئے، دوسرے زائدی تفاعل کی قدر معلوم کرو۔

$\sinh x = \frac{3}{2}$ (i)

$\tanh x = \frac{1}{2}$ (ii)

حل: (i) ہم جانتے ہیں کہ

$$\begin{aligned} cos\text{h}^2x &= 1 + sinh^2x \\ &= 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= 1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4} \end{aligned}$$

اس لیے

$$\cosh x = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

اور

$$\begin{aligned} \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} \\ &= \frac{3\sqrt{13}}{13} \end{aligned}$$

اسی طرح

$$co\text{sech}\, x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{1}{{}^3/_2} = \frac{2}{3}$$

$$\text{sech}\, x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{13}}{2}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{1}{\tanh x} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

(ii) دیا ہے $\tanh x = \frac{1}{2}$

ہم جانتے ہیں کہ

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

اور

$$\tanh^2x + sech^2x = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + sech^2x = 1$$

$$sech^2x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{sech} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

اسی طرح

$$\cosh x = \frac{1}{\operatorname{sech} x} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

ضابطہ سے

$$\begin{aligned} sinh^2x &= cosh^2x - 1 \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 \\ &= \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

اس لیے

$$\sinh x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

اس سے

$$cosech\ x = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

مثال: ذیل میں دیے ہوئے تفاعلات کے مشتقات معلوم کرو۔

(i) $y = \sinh(1 - x^2)$

(ii) $f(x) = \ln(\sinh x)$

(iii) $y = \ln\left(\tanh\frac{x}{2}\right)$

(iv) $h(x) = \frac{1}{4}\sinh(2x) - \frac{x}{2}$

(v) $f(t) = arc\ tan(\sinh t)$

(vi) $y = x^{\cosh x}$

(vii) $y = (\cosh x - \sinh x)^2$

(viii) $y = \sinh^{-1}(\tan x)$

(ix) $y = \coth^{-1}(\sinh 2x)$

(x) $y = 2x\sinh^{-1}2x - \sqrt{1 + 4x^2}$

(xi) $y = a\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2 - x^2}$

حل: (i) دیا ہے

$$y = \sinh(1 - x^2)$$

بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{d(1-x^2)}\{sinh(1-x^2)\}\times\frac{d}{dx}(1-x^2)$$
$$=-2x\cosh(1-x^2)$$

(ii) دیا ہے

$$f(x)=\ln(\sinh x)$$

بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$f'(x)=\frac{d}{d(\sinh x)}\ln(\sinh x)\times\frac{d}{dx}\sinh x$$
$$=\frac{1}{\sinh x}\times\cosh x$$
$$=\coth x$$

(iii) دیا ہے

$$y=\ln\left(\tanh\frac{x}{2}\right)$$

بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{d\left(\tanh\frac{x}{2}\right)}\left\{\ln\left(\tanh\frac{x}{2}\right)\right\}\times\frac{d}{d\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\tanh\frac{x}{2}\right)\times\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{\tanh\frac{x}{2}}\times sech^2\left(\frac{x}{2}\right)\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{\cosh\frac{x}{2}}{\sinh\frac{x}{2}}\times\frac{1}{cosh^2\left(\frac{x}{2}\right)}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}}$$
$$=\frac{1}{\sinh x}=\operatorname{cosech} x$$

(iv) دیا ہے

$$h(x)=\frac{1}{4}\sinh(2x)-\frac{x}{2}$$

بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$h'(x)=\frac{1}{4}\frac{d}{d(2x)}\sinh(2x)\times\frac{d}{dx}(2x)-\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\cosh(2x)\times(2)-\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{\cosh(2x)-1}{2}$$
$$=\frac{2sinh^2x}{2}=sinh^2x$$

(v) دیا ہے

$$f(t)=arc\ tan(\sinh t)$$

به لحاظ t تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$f(t) = \frac{d}{d(\sinh t)}\{arc\ tan(\sinh t)\} \times \frac{d}{dt}(\sinh t)$$
$$= \frac{1}{1+(\sinh t)^2} \times \cosh t$$
$$= \frac{1}{\cosh^2 t} \times \cosh t$$
$$= \frac{1}{\cosh t} = \text{sech}\, t$$

(vi) دیا ہے

$$y = x^{\cosh x}$$

دونوں طرف کا لوگرتھم (Logarithm) لینے پر ہمیں ملتا ہے

$$\ln y = \cosh x \ln x$$

به لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \cosh x \times \frac{1}{x} + \sinh x \ln x$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}(\cosh x + x \sinh x \ln x)$$

(vii) دیا ہے

$$y = (\cosh x - \sinh x)^2$$

به لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{d(\cosh x - \sinh x)}(\cosh x - \sinh x)^2 \times \frac{d}{dx}(\cosh x - \sinh x)$$
$$= 2(\cosh x - \sinh x)(\sinh x - \cosh x)$$
$$= -2(\cosh x - \sinh x)^2$$
$$= -2e^{-2x}$$

(viii) دیا ہے

$$y = \sinh^{-1}(\tan x)$$

به لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$y' = \frac{d}{d(\tan x)}\sinh^{-1}(\tan x) \times \frac{d}{dx}(\tan x)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(\tan x)^2 + 1}} \times sec^2 x$$
$$= \frac{1}{\sqrt{sec^2 x}} \times sec^2 x$$
$$= \sec x$$

(ix) دیا ہے

$$y = \coth^{-1}(\sinh 2x)$$

بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$y' = \frac{d}{d(\sin 2x)}\coth^{-1}(\sin 2x) \times \frac{d}{d(2x)}(\sin 2x) \times \frac{d}{dx}(2x)$$
$$= \frac{1}{1-(\sin 2x)^2} \times (\cos 2x) \times 2$$
$$= \frac{1}{\cos^2 2x} \times 2\cos 2x$$
$$= \frac{2}{\cos 2x} = 2\sec 2x$$

(x) دیا ہے

$$y = 2x\sinh^{-1} 2x - \sqrt{1+(2x)^2}$$

بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y' = 2x\frac{d}{d(2x)}(\sinh^{-1} 2x) \times \frac{d}{dx}(2x) + 2\sinh^{-1} 2x$$
$$- \frac{d}{d\{1+(2x)^2\}}\left\{(1+(2x)^2)^{1/2}\right\} \times \frac{d}{dx}\{1+(2x)^2\}$$
$$= 2x\frac{1}{\sqrt{1+(2x)^2}} \times 2 + 2\sinh^{-1} 2x - \frac{1}{2}\left\{(1+(2x)^2)^{-1/2}\right\} \times 8x$$
$$= \frac{4x}{\sqrt{1+(2x)^2}} + 2\sinh^{-1} 2x - \frac{4x}{\sqrt{1+(2x)^2}}$$
$$= 2\sinh^{-1} 2x$$

(xi) دیا ہے

$$y = a\,\mathrm{sech}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2 - x^2}$$

بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{d}{d\left(\frac{x}{a}\right)}\left\{\mathrm{sech}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right\} \times \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{d}{d(a^2-x^2)}(a^2-x^2)^{1/2} \times \frac{d}{dx}(a^2-x^2)$$
$$= a \times \frac{-1}{\frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \times \frac{1}{a} - \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}} \times (-2x)$$
$$= \frac{-a^2}{x\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$
$$= \frac{x^2-a^2}{x\sqrt{a^2-x^2}}$$
$$= -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$$

مثال: ذیل میں دیے گئے ضابطوں کی قدر معلوم کرو:

(i) $\int \sinh(1-2x)\,dx$

(ii) $\int \cosh^2(x-1)\sinh(x-1)\,dx$

(iii) $\int \coth x\, dx$

(iv) $\int x \text{cosech}^2\left(\frac{x^2}{2}\right) dx$

(v) $\int \frac{\text{cosech}\left(\frac{1}{x}\right)\coth\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx$

(vi) $\int_0^4 \frac{1}{25-x^2} dx$

(vii) $\int \cosh^2 x\, dx$

(viii) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^3}} dx$

(ix) $\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+8}} dx$

(x) $\int_0^2 \tanh 2x\, dx$

(xi) $\int_3^5 \frac{6}{\sqrt{x^2-4}} dx$

حل:(i)ہمیں حاصل کرنا ہے

$$\int \sinh(1-2x)\, dx$$

مان لیجیے کہ $u = 1-2x \Rightarrow du = -2dx$ اس لیے

$$\int \sinh(1-2x)\, dx = -\frac{1}{2}\int \sinh u\, du$$
$$= -\frac{1}{2}\cosh u + C$$
$$= -\frac{1}{2}\cosh(1-2x) + C$$

(ii) ہمیں حاصل کرنا ہے

$$\int \cosh^2(x-1)\sinh(x-1)\, dx$$

مان لیجیے کہ $u = \cosh(x-1) \Rightarrow du = \sinh(x-1)\, dx$ اس لیے

$$\int \cosh^2(x-1)\sinh(x-1)\, dx = \int u^2\, du$$
$$= \frac{u^3}{3} + C$$
$$= \frac{\cosh^3(x-1)}{3} + C$$

(iii)ہمیں حاصل کرنا ہے

$$\int \coth x\, dx = \int \left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right) dx$$

اب مان لیجیے کہ $u = \sinh x \Rightarrow du = \cosh x\, dx$ اس لیے

$$\int \left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right) dx = \int \frac{du}{u}$$

$$= \ln u + C$$
$$= \ln(\sinh x) + C$$

(iv) ہمیں حاصل کرنا ہے

$$\int x\text{cosech}^2\left(\frac{x^2}{2}\right)dx$$

مان لیجیے کہ $u = \frac{x^2}{2} \Rightarrow du = xdx$ اس لیے

$$\int xcosech^2\left(\frac{x^2}{2}\right)dx = \int cosech^2 u\, du$$
$$= -\, coth\, u + C$$
$$= -\, coth\left(\frac{x^2}{2}\right) + C$$

(v) ہمیں حاصل کرنا ہے

$$\int \frac{cosech\left(\frac{1}{x}\right) coth\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx$$

مان لیجیے کہ $u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = \frac{-1}{x^2}dx$ اس لیے

$$\int \frac{cosech\left(\frac{1}{x}\right) coth\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx = -\int cosech\, u\;\; coth\, u\, du$$
$$= -cosech\, u + C$$
$$= -cosech\,\left(\frac{1}{x}\right) + C$$

(vi) ہمیں حاصل کرنا ہے $\int_0^4 \frac{1}{25-x^2}dx$ اس لیے

$$\int_0^4 \frac{1}{25 - x^2}dx = \left[\sinh^{-1}\left(\frac{x}{5}\right)\right]_0^4$$
$$= \sinh^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$$

(vii) ہمیں حاصل کرنا ہے $\int \cosh^2 x\, dx$ اس لیے

$$\int \cosh^2 x\, dx = \int \frac{1 + \cosh 2x}{2}dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sinh 2x\right] + \text{C}$$
$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sinh 2x + \text{C}$$

(viii) ہمیں حاصل کرنا ہے

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 + (x^{3/2})^2}}dx$$

اب مان لیجیے کہ $u = x^{3/2} \Rightarrow \frac{2}{3}du = \sqrt{x}dx$ اس لیے

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^3}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \times \frac{2}{3}du$$
$$= \frac{2}{3}\sinh^{-1}(u) + C$$
$$= \frac{2}{3}\sinh^{-1}\left(x^{3/2}\right) + C$$
$$= \frac{2}{3}\ln\left(x^{3/2} + \sqrt{1+x^3}\right) + C$$

(ix) ہمیں حاصل کرنا ہے $\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+8}}dx$ اس لیے

$$\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+8}}dx = \int \frac{1}{(x+2)\sqrt{(x+2)^2+4}}dx$$
$$= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{(x+2)^2+4}}{|x+2|}\right) + \mathrm{C}$$

(x) ہمیں حاصل کرنا ہے $\int_0^2 \tanh 2x\, dx$ اس لیے

$$\int_0^2 \tanh 2x\, dx = \int_0^2 \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{1}{e^{2x}+e^{-2x}} \times 2(e^{2x}-e^{-2x})\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\ln(e^{2x}+e^{-2x})\right]_0^2$$
$$= \frac{1}{2}\ln(e^4+e^{-4}) - \frac{1}{2}\ln(2)$$
$$= \ln\sqrt{\frac{(e^4+e^{-4})}{2}}$$

(xi) ہمیں حاصل کرنا ہے $\int_3^5 \frac{6}{\sqrt{x^2-4}}dx$ اس لیے

$$\int_3^5 \frac{6}{\sqrt{x^2-4}}dx = \left[6\ln\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)\right]_3^5$$
$$= 6\ln\left(5+\sqrt{21}\right) - 6\ln\left(3+\sqrt{5}\right)$$
$$= 6\ln\left(\frac{5+\sqrt{21}}{3+\sqrt{5}}\right)$$

1.8 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے زائدی تفاعل کی بنیادی جانکاری حاصل کی اور پھر ان تفاعل کے تفرق اور تکمل حاصل کرنا سیکھا۔

1.9 کلیدی الفاظ (Key Words)

زائدی تفاعل، معکوس زائدی تفاعل، تفرق، مشتق، تکمل، جفت تفاعل، طاق تفاعل، سعت، دامنہ، قوت نما تفاعل

1.10 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

1.10.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. $\cosh x = \cdots\cdots$
2. $\sinh x = \cdots\cdots$
3. $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \cdots\cdots$
4. $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cdots\cdots$
5. $\int \cosh x \, dx = \cdots\cdots$
6. $\int \sinh x \, dx = \cdots\cdots$
7. $\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \cdots\cdots$
8. $\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \cdots\cdots$
9. $\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \cdots\cdots$

1.10.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. درج ذیل ضابطوں (Identities) کو ثابت کریں۔

   a) $sinh(-x) = -\, sinh\, x$

   b) $cosh(-x) = cosh\, x$

2. $cosh\, x + sinh\, x = e^x$
3. $cosh\, x + sinh\, x = e^x$
4. $coth^2 x - 1 = cosech^2 x$
5. $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$
6. $\cosh 2x = cosh^2 x - sinh^2 x$
7. $\tanh x = \frac{x^2-1}{x^2+1}$
8. $\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x} = e^{2x}$

درج ذیل کے تفرق حاصل کریں:

9. $f(x) = \tanh(1 + e^{2x})$
10. $f(x) = \cosh(\ln x)$
11. $y = x \coth(1 + x)$

.12 $y = e^{\cosh 3x}$

.13 $f(t) = sech^2(e^t)$

.14 $y = \sinh(\cosh x)$

.15 $y = \tanh^{-1}\sqrt{x}$

.16 $y = x^2 \sinh^{-1}(2x)$

.17 $y = \text{sech}^{-1}\sqrt{1-x^2}, x > 0$

.18 $y = \coth^{-1}\sqrt{x^2+1}$

.19 $y = \sinh(4x-8)$

.20 $y = \cosh(x^4)$

.21 $y = \sqrt{4x + cosh^2(5x)}$

.22 $y = \text{sech}\, e^{2x}$

.23 $y = \sinh(\cos 3x)$

.24 $y = \sinh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

.25 $y = (\coth^{-1} x)^2$

.26 $y = \sinh^{-1}(\tanh x)$

1.10.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

درج ذیل کے تکمل حاصل کریں:

.1 $\int \sinh^6 x \cosh x \, dx$

.2 $\int \cosh(2x-3)\, dx$

.3 $\int \text{cosech}^2(3x)\, dx$

.4 $\int_0^3 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$

.5 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+9x^2}}$

.6 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

.7 $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+4x^2}}$

.8 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2}$

.9 $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$

اکائی 2۔ اعلا رتبے کے مشتقات

(Higher Order Derivatives)

اکائی کے اجزا

2.0 تمہید

2.1 مقاصد

2.2 معیاری نتائج

2.3 ناطقی تفاعل کے nویں مشتقات کے حساب

2.4 سائن(Sine)اور کوسائن(Cosine)کے پاورس کے مصنوعات کے nویں مشتقات کے حساب

2.5 اکتسابی نتائج

2.6 کلیدی الفاظ

2.7 نمونہ امتحانی سوالات

2.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

2.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

2.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

2.0 تمہید (Introduction)

اگر f ایک دیا ہوا تفاعل ہے۔ تب اس کا تفرق f' بھی ایک دیا ہوا تفاعل ہو گا۔ جسے دوبارہ فرق کر سکتے ہیں۔ f' کا تفرق f کا دوسرا تفرق کہلاتا ہے۔ اور اس کو f'' سے مخصوص کیا جاتا ہے۔ f کے اعلا تفرق کو $f', f'', f''', \dots\dots, f^n, \dots\dots$ سے مخصوص کیا جاتا ہے۔ اگر $y = f(x)$ ایک تفاعل ہے تب

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\dots, \frac{d^ny}{dx^n}, \dots$$
$$y_1, y_2, \dots\dots, y_n, \dots$$
$$f'(x), f''(x), f'''(x), \dots\dots, f^n(x), \dots$$
$$Df(x), D^2f(x), D^3f(x), \dots\dots, D^nf(x), \dots$$

کو اعلا تفرق سے مخصوص کیا جاتا ہے۔

مثال (1) تفاعل $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$ کے مختلف تفرق معلوم کرو۔

حل: دی گئی مساوات سے $y_1 = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$ اور اسی طرح

$$y_2 = 20x^3 - 60x^2 + 30x$$
$$y_3 = 60x^2 - 120x + 30$$
$$y_4 = 120x - 120$$
$$y_5 = 120$$

مثال (2) اگر $x = a(\theta + sin\,\theta)$ اور $y = a(1 - cos\,\theta)$ تو $\frac{d^2y}{dx^2}$ کی قدر معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات سے $\frac{dx}{d\theta} = a(1 + cos\,\theta)$ اور

$$\frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\sin\theta}{a(1 + cos\,\theta)}$$
$$= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$
$$= \tan\frac{\theta}{2}$$

مساوات (1) کو دوبارہ تفرق کرنے پر

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(tan\frac{\theta}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}\frac{1}{a(1 + cos\,\theta)}$$

$$= \frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}\frac{1}{2a\cos^2\frac{\theta}{2}}$$
$$= \frac{1}{4a}asec^4\frac{\theta}{2}$$

مثال(3)$\frac{d^2y}{dx^2}$کی قدر معلوم کرو،اگر$y = x^7 + tan\,x$ہو۔

حل۔دیاہواہے

$$y = x^7 + tan\,x$$

تب

$$\frac{dy}{dx} = 7x^6 + sec^2\,x$$

اور

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(7x^6 + sec^2\,x)$$
$$= 42x^5 + 2\sec x\, sec\,x \tan x$$
$$= 42x^5 + 2\,sec^2\,x \tan x$$

مثال(4)اگر$y = A\,sin\,x + B\,cos\,x$ہوتوثابت کیجیے کہ$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ہوگا۔

حل۔دی گئی مساوات$y = A\,sin\,x + B\,cos\,x$ہے

$$y' = A\cos x - B\sin x$$
$$y'' = -(A\,sin\,x + B\,cos\,x) = -y$$

اس لیے

$$y'' + y = 0$$

2.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ مختلف تفاعلات کے اعلار تبے کے مشتقات حاصل کر سکیں۔

2.2 معیاری نتائج(Standard Results)

(1)$D^n(ax + b)^m$

فرض کرو کہ

$$y = (ax + b)^m$$
$$y_1 = ma(ax + b)^{m-1}$$
$$y_2 = m(m-1)a^2(ax + b)^{m-2}$$
$$y_3 = m(m-1)(m-2)a^3(ax + b)^{m-3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n = m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-n+1)a^n(ax + b)^{m-n}$$

اس لیے

$$D^n(ax+b)^m = m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-n+1)a^n(ax+b)^{m-n}$$

کورولری(1)۔ اگر $m=n$ تب $y_n = n!\,a^n$

کورولری(2)- اگر m ایک مثبت نمبر ہے اور n سے چھوٹا ہے، تب $y=0$

کورولری(3)- اگر $m=-1$ تب

$$\begin{aligned} y_n &= (-1)(-2)\cdots\cdots(-n)a^n(ax+b)^{-n-1} \\ &= (-1)^n n!\,a^n(ax+b)^{-n-1} \\ &= \frac{(-1)^n n!\,a^n}{(ax+b)^{n+1}} \end{aligned}$$

کورولری(4)-

$$y = \log(ax+b) \Rightarrow\ y_1 = \frac{a}{ax+b}$$

اس لیے

$$\begin{aligned} y_n &= (-1)^{n-1}(n-1)!\,a^n(ax+b)^{-n} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\,a^n}{(ax+b)^n} \end{aligned}$$

(2)

$$D^n a^{mx}$$

فرض کرو کہ

$$\begin{aligned} &y = a^{mx} \\ &y_1 = ma^{mx}\log a \\ &y_2 = m^2a^{mx}(\log a)^2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

اس طرح $y_n = m^n a^{mx}(\log a)^n$

اس لیے $D^n a^{mx} = m^n a^{mx}(\log a)^n$

کورولری- a کو e سے بدلنے پر

ہمیں ملتا ہے

$$D^n e^{mx} = m^n e^{mx}$$

(3) $D^n\, cos(ax+b)$ اور $D^n \sin(ax+b)$

فرض کرو کہ $y = \sin(ax + b)$

$$y_1 = a\,cos(ax + b) = a \sin\left(ax + b + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$y_2 = a^2 \cos\left(ax + b + \frac{\pi}{2}\right) = a^2 \sin\left(ax + b + \frac{2\pi}{2}\right)$$
$$y_3 = a^3 \cos\left(ax + b + \frac{2\pi}{2}\right) = a^3 \sin\left(ax + b + \frac{3\pi}{2}\right)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_n = a^n \sin\left(ax + b + \frac{n\pi}{2}\right)$$

اس لیے $D^n \sin(ax + b) = a^n \sin\left(ax + b + \frac{n\pi}{2}\right)$

اسی طرح $D^n\, cos(ax + b) = a^n \cos\left(ax + b + \frac{n\pi}{2}\right)$

کورولری(1)-اگر $a = 1$ اور $b = 0$

تب $y = sin\,x$

کورولری(2)-اگر $a = 1$ اور $b = 0$، تب $y = cos\,x$، اس وجہ سے

$$y_n = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

(4) $D^n e^{ax} \sin(bx + c)$ اور $D^n e^{ax} \cos(bx + c)$

فرض کرو کہ $y = e^{ax} \sin(bx + c)$

تب $y_1 = e^{ax}\{a \sin(bx + c) + b \cos(bx + c)\}$

فرض کرو کہ $a = r\,cos\,\varphi$، $b = r\,sin\,\varphi$

تب $\tan\varphi = \frac{b}{a}, r^2 = a^2 + b^2$

اس طرح

$$y_1 = e^{ax}\{r\,cos\,\varphi \sin(bx + c) + r\,sin\,\varphi \cos(bx + c)\}$$
$$\Rightarrow \qquad y_1 = re^{ax} \sin(bx + c + \varphi)$$

اس طرح

$$y_2 = r^2 e^{ax} \sin(bx + c + 2\varphi)$$
$$y_3 = r^3 e^{ax} \sin(bx + c + 3\varphi)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_n = r^n e^{ax} \sin(bx + c + n\varphi)$$

اس وجہ سے $D^n e^{ax}\sin(bx+c) = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax}\sin\left(bx+c+n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$

اسی طرح $D^n e^{ax}\cos(bx+c) = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax}\cos\left(bx+c+n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$

2.3 ناطقی تفاعل کے n ویں مشتقات کے حساب

(Calculation of n[th] Derivatives of Rational Functions)

ایک عقلی تفاعل کے n ویں مشتقات کو شمار کرنے کے لیے ہم جزوی مصنوعات میں توڑتے ہیں۔ بعض صورتوں میں ڈی مائور (De-Moivre) قضیہ مفید ہے۔

مثال(1): $f(x) = \frac{1}{x^2+5x+6}$ کے n ویں مشتقات کو معلوم کرو۔

حل۔ فرض کرو کہ $y = \frac{1}{x^2+5x+6}$، تب

$$y = \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{(x+2)} - \frac{1}{(x+3)}$$

اس وجہ سے

$$y_n = \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+3)^{n+1}}$$
$$= (-1)^n n!\left[\frac{1}{(x+2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+3)^{n+1}}\right]$$

مثال(2): $f(x) = \frac{x^4}{(x-1)(x-2)}$ کے n ویں مشتقات کو معلوم کرو۔

حل۔ فرض کرو کہ

$$y = \frac{x^4}{(x-1)(x-2)}$$
$$= x^2 + 3x + 7 - \frac{1}{x-1} + \frac{16}{x-2}$$

اس وجہ سے،

$$y_n = -\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} + \frac{16(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}$$
$$= (-1)^n n\left[-\frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{16}{(x-2)^{n+1}}, n > 2\right]$$

مثال(3): $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$ کے n ویں مشتقات کو معلوم کرو۔

حل۔ فرض کرو کہ $y = \frac{1}{x^2+a^2}$، تب

$$y = \frac{1}{(x+ai)(x-ai)} = \frac{1}{2ai}\left[\frac{1}{(x-ai)} - \frac{1}{(x+ai)}\right]$$

اس وجہ سے

$$y_n = \frac{(-1)^n n}{2ai}\left[\frac{1}{(x-ai)^{n+1}} - \frac{1}{(x+ai)^{n+1}}\right]$$

فرض کرو$x = r\cos\theta\,, a = r\sin\theta$،تب$r^2 = x^2 + a^2$اور$\theta = tan^{-1}\frac{a}{x}$

اس طرح

$$y_n = \frac{(-1)^n n}{2air^{n+1}}[(\cos\theta - i\sin\theta)^{-n-1} - (\cos\theta + i\sin\theta)^{-n-1}]$$
$$= \frac{(-1)^n n}{2air^{n+1}}[\cos(\mathrm{n}+1)\,\theta + i\sin(\mathrm{n}+1)\theta - \cos(\mathrm{n}+1)\,\theta + i\sin(\mathrm{n}+1)\theta]$$
$$= \frac{(-1)^n n}{2air^{n+1}} 2i\,sin(n+1)\theta$$
$$= \frac{(-1)^n n}{ar^{n+1}} sin(n+1)\theta = \frac{(-1)^n n}{a^{n+2}} sin(n+1)\theta\, sin^{n+1}\theta$$

جہاں$\theta = tan^{-1}\frac{a}{x}$ہے۔

2.4 سائن(Sine)اور کوسائن(Cosine)کے پاورس کے مصنوعات کے nمشتقات کے حساب

اس طرح کے مصنوعات کے nویں مشتقات کے لیے، ہم آزاد متغیر کے ایک سے زیادہsinesاورcosinesکے رقم کے طور پر اظہار کرتے ہیں۔

مثال(1):$y = sin\,3x\,sin\,2x$کےnویں مشتقات کو معلوم کرو۔

حل۔فرض کروکہ

$$y = sin\,3x\,sin\,2x$$

تب،

$$\mathrm{y} = \tfrac{1}{2}[cos\,x - cos\,5x]$$

اس وجہ سے

$$\mathrm{y}_n = \frac{1}{2}\left[cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - 5^n\,cos\left(5x + \frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

مثال(2):$y = sin^4 x$کےnویں مشتقات کو معلوم کرو۔

حل۔فرض کروکہ$y = sin^4 x$،تب

$$y = (sin^2 x)^2$$
$$= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{4}[1 - 2\cos 2x + cos^2 2x]$$
$$= \frac{1}{4}\left[1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right]$$
$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

اس وجہ سے

$$y_n = -\frac{1}{2} \cdot 2^n \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{8} \cdot 4^n \cos\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y_n = -2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot 4^{n-1} \cos\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

مثال(3) $y = sin^2 x cos^3 x$ کے nویں مشتقات کو معلوم کرو۔

حل۔ فرض کرو کہ $y = sin^2 x cos^3 x$ تب

$$\begin{aligned} y &= sin^2 x cos^2 x \cos x \\ &= \frac{1}{4} sin^2 2x \cos x \\ &= \frac{1}{8}(1 - \cos 4x) \cos x \\ &= \frac{1}{8}\cos x - \frac{1}{8}\cos 4x \cos x \\ &= \frac{1}{8}\cos x - \frac{1}{16}(\cos 5x + \cos 3x) \\ &= \frac{1}{16}(2\cos x - \cos 5x - \cos 3x) \end{aligned}$$

اسی وجہ سے

$$y_n = \frac{1}{16}\left[2\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - 3^n \cos\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right) - 5^n \cos\left(5x + \frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

مثال(4): اگر $y = \sin x + \cos nx$، ثابت کرو

$$y_k = n^k[1 + (-1)^k \sin 2nx]^{\frac{1}{2}}$$

حل۔ kواں مشتق

$$\begin{aligned} y_k &= n^k \sin\left(nx + \frac{k\pi}{2}\right) + n^k \cos\left(nx + \frac{k\pi}{2}\right) \\ &= n^k\left[\sin\left(nx + \frac{k\pi}{2}\right) + \cos\left(nx + \frac{k\pi}{2}\right)\right] \\ &= n^k\left[\left\{\sin\left(nx + \frac{k\pi}{2}\right) + \cos\left(nx + \frac{k\pi}{2}\right)\right\}^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= n^k\left[\sin^2\left(nx + \frac{k\pi}{2}\right) + \cos^2\left(nx + \frac{k\pi}{2}\right) + 2\sin\left(nx + \frac{k\pi}{2}\right)\cos\left(nx + \frac{k\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= n^k\left[1 + \sin 2\left(nx + \frac{k\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= n^k[1 + \sin(2nx + k\pi)]^{\frac{1}{2}} \\ &= n^k[1 + \sin 2nx \cos k\pi + \cos 2nx \sin k\pi]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$= n^k[1 + (-1)^k \sin 2nx]^{\frac{1}{2}}$$

لیبنیز کا قضیہ (Leibnitz's Theorem)

بیان (Statement): اگر u اور v متغیر x میں ایسے دو تفاعلات ہوں جن کے n مشتقات حاصل ہو سکتے ہوں، تب

$$(uv)_n = C_0^n u_n v + C_1^n u_{n-1} v_1 + C_2^n u_{n-2} v_2 + \cdots\cdots + C_r^n u_{n-r} v_r + \cdots\cdots + u v_n$$

جہاں پر n $C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ اشیا میں سے بیک وقت r اشیا کے اجتماعوں کی تعداد ہے۔ اس قضیہ کو ہم اگلی اکائی میں ثابت کریں گے۔

مثال (1): اگر $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$، ثابت کرو

$$x^2y_2 + xy_1 + y = 0 \text{ اور}$$

$$x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$$

حل۔ دیا ہوا ہے

$$y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$$

$$y_1 = -a\sin(\log x)\cdot\frac{1}{x} + b\cos(\log x)\cdot\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad xy_1 = -a\sin(\log x) + b\cos(\log x)$$

دونوں جانب بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے۔

$$xy_2 + y_1 = -a\cos(\log x)\cdot\frac{1}{x} - b\sin(\log x)\cdot\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad x^2y_2 + xy_1 = -[a\cos(\log x) + b\sin(\log x)]$$

$$\Rightarrow \quad x^2y_2 + xy_1 + y = 0$$

اس مساوات کو لیبنیز قضیہ سے n مرتبہ تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے۔

$$x^2y_{n+2} + C_1^n y_{n+1}\cdot 2x + C_2^n y_n \cdot 2 + xy_{n+1} + C_1^n y_n \cdot 1 + y_n = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2y_{n+2} + 2nxy_{n+1} + n(n-1)y_n + xy_{n+1} + ny_n + y_n = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$$

مثال (2): اگر $y = (\sin^{-1} x)^2$، ثبات کرو

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 = 2$$

حل۔ ہمیں دیا گیا ہے

$$y = (\sin^{-1} x)^2$$

$$y_1 = 2\sin^{-1} x \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$\Rightarrow \quad (1-x^2){y_1}^2 = 4(\sin^{-1} x)^2$$

$$\Rightarrow \quad (1-x^2){y_1}^2 = 4y$$

بالحاظ x تفرق کرنے پر

$$(1-x^2)2y_1y_2 - 2x{y_1}^2 = 4y_1$$

$$\Rightarrow \quad (1-x^2)y_2 - xy_1 = 2$$

اس مساوات کو لیبنیز قضیہ سے n مرتبہ تفرق کرنے پر، ہمیں ملتا ہے

$$(1-x^2)y_{n+2}+C_1^n y_{n+1}(-2x)+C_2^n y_n(-2)-(xy_{n+1}+C_1^n y_n\cdot 1)=0$$

$$\Rightarrow \quad (1-x^2)y_{n+2}-n(n-1)y_n-xy_{n+1}-ny_n=0$$

$$\Rightarrow \quad (1-x^2)y_{n+2}+(2n+1)xy_{n+1}-n^2y_n=0$$

مثال(3): اگر $y=e^{m\sin^{-1}x}$، تب ثابت کرو کہ

$$(1-x^2)y_2-xy_1-m^2y=0 \quad \text{(i)}$$

$$(1-x^2)y_{n+2}-(2n+1)xy_{n+1}-(m^2+n^2)y_n=0 \quad \text{(ii)}$$

حل۔ ہمیں دیا گیا ہے

$$y=e^{m\sin^{-1}x}$$

$$\Rightarrow \quad y_1=e^{m\sin^{-1}x}\times\frac{m}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{my}{\sqrt{1-x^2}}$$

اس لیے

$$(1-x^2)^{1/2}y_1=my$$

$$\Rightarrow \quad (1-x^2){y_1}^2=m^2y^2$$

$$\Rightarrow \quad (1-x^2)y_2-xy_1-m^2y=0$$

مساوات کے ہر ایک رکن کو لیبنیز قضیہ کی مدد سے n مرتبہ بالحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$(1-x^2)y_{n+2}+C_1^n y_{n+1}(-2x)+C_2^n y_n(-2)-[xy_{n+1}+C_1^n y_n\cdot 1]-m^2y_n=0$$

یا

$$(1-x^2)y_{n+2}-2nxy_{n+1}-n(n-1)y_n-xy_{n+1}-ny_n-m^2y_n=0$$

اس وجہ سے

$$(1-x^2)y_{n+2}-(2n+1)xy_{n+1}-(m^2+n^2)y_n=0$$

مثال(4): $\mathrm{e}^x(2x+3)^3$ کا nواں مشتق معلوم کرو۔

حل۔ یہاں $u=\mathrm{e}^x$ اور $v=(2x+3)^3$ لینے پر اور $u_n=\mathrm{e}^x$ اس کے ساتھ ہی

$$v_1=6(2x+3)^2$$

$$v_2=24(2x+3)$$

$$v_3=48, v_4, v_5, \cdots=0$$

اب Leibnitz's تھیورم کی مدد سے ہمیں ملتا ہے

$$(u\cdot v)_n=C_0^n u_n\cdot v+C_1^n u_{n-1}\cdot v_1+C_2^n u_{n-2}\cdot v_2+C_3^n u_{n-3}\cdot v_3$$

$$(\mathrm{e}^x(2x+3)^3)_n=\mathrm{e}^x(2x+3)^3+n\mathrm{e}^x\{6(2x+3)^2\}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\mathrm{e}^x\{24(2x+3)\}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\mathrm{e}^x(48)$$

$$=\mathrm{e}^x[(2x+3)^3+6n(2x+3)^2+12n(n-1)(2x+3)+8n(n-1)(n-2)]$$

مثال(5): اگر $y^{\frac{1}{m}}+y^{-\frac{1}{m}}=2x$، تب ثابت کیجیے:

$$(x^2-1)y_{n+2}+(2n+1)xy_{n+1}+(n^2-m^2)y_n=0$$

حل۔ہمیں دیا گیا ہے

$$y^{\frac{1}{m}} + y^{-\frac{1}{m}} = 2x$$

یا

$$y^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{y^{\frac{1}{m}}} = 2x$$

یا

$$y^{\frac{2}{m}} - 2xy^{\frac{1}{m}} + 1 = 2x$$

جو $y^{\frac{1}{m}}$ ایک دو درجی (Quadratic) مساوات ہے،اس لیے

$$y^{\frac{1}{m}} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2}$$

$$y^{\frac{1}{m}} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

یا

$$y = \left\{x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right\}^m$$

log لینے پر

$$\log y = m \log\left\{x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right\}$$

دونوں طرف تفرق کرنے پر

$$\frac{1}{y} y_1 = m \frac{1}{x \pm \sqrt{x^2 - 1}} \left\{1 \pm \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\right\}$$

$$= \pm \frac{m}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\Rightarrow \quad (x^2 - 1){y_1}^2 = m^2 y^2$$

ایک مرتبہ اور تفرق کرنے پر

$$(x^2 - 1)2y_1 y_2 + {y_1}^2(2x) = m^2(2yy_1)$$

$2y_1$ سے تقسیم کرنے پر

$$(x^2 - 1)y_2 + xy_1 - m^2 y = 0$$

Leibnitz's تھیورم سے n بار تفرق کرنے پر

$$(x^2 - 1)y_{n+2} + ny_{n+1}(2x) + \frac{n(n-1)}{2} y_n(2) + xy_{n+1} + ny_n(1) - m^2 y_n = 0$$

$$(x^2 - 1)y_{n+2} + (2n + 1)xy_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0$$

مثال(6): $y^{(n)}$ معلوم کریں جب $y = x^2 e^{3x}$ ہے۔

حل۔فرض کرو کہ $v = x^2$ اور $u = e^{3x}$ ہے

$$y = uv$$

Leibnitz's کا استعمال کرنے پر

$$y^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v^{(1)} + \frac{n(n-1)}{2!} u^{(n-2)}v^{(2)} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} u^{(n-3)}v^{(3)} + \cdots$$

یہاں پر $v = x^2$، $v^{(1)} = 2x$، $v^{(2)} = 2$ اور $v^{(3)} = 0$ ہے۔

اس وجہ سے

$$y^{(n)} = (3^n e^{3x})x^2 + n(3^{n-1}e^{3x})(2x) + \frac{n(n-1)}{2!}(3^{n-2}e^{3x})(2) + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(3^{n-3}e^{3x})(0) + \cdots$$
$$= 3^{n-2}e^{3x}\{3^2x^2 + 3n(2x) + n(n-1) + 0\}$$
$$\Rightarrow \quad y^{(n)} = 3^{n-2}e^{3x}\{3^2x^2 + 3n(2x) + n(n-1)\}$$

مثال(7): ذیل میں دی گئی تفرقی مساوات کو n بار تفرق کریے۔

$$(1 - x^2)y'' + 2xy' - 3y = 0$$

حل۔ Leibnitz's مساوات کا استعمال کرنے پر

$$\left\{(1 + x^2)y^{(n+2)} + ny^{(n+1)}(2x) + \frac{n(n-1)}{2!}y^{(n)}(2) + 0\right\} + \{2xy^{(n+1)} + ny^{(n)}(1) + 0\} - 3y^{(n)} = 0$$
$$\Rightarrow \quad (1 + x^2)y^{(n+2)} + 2nxy^{(n+1)} + n(n-1)y^{(n)} + 2xy^{(n+1)} + 2ny^{(n)} - 3y^{(n)} = 0$$
$$\Rightarrow \quad (1 + x^2)y^{(n+2)} + 2(n+1)xy^{(n+1)} + (n^2 - n + 2n - 3)y^{(n)} = 0$$
$$\Rightarrow \quad (1 + x^2)y^{(n+2)} + 2(n+1)xy^{(n+1)} + (n^2 + n - 3)y^{(n)} = 0$$

مثال(8): $y = x^4 \sin x$ کا 5th مشتق معلوم کریں۔

حل۔ اگر $y = x^4 \sin x$ تب Leibnitz's مساوات سے $u = \sin x$ اور $v = x^4$ سے

$$y^{(n)} = \left\{\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)x^4\right\} + n\left\{\sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right)4x^3\right\} + \frac{n(n-1)}{2!}\left\{\sin\left(x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right)12x^2\right\} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left\{\sin\left(x + \frac{(n-3)\pi}{2}\right)24x\right\} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\left\{\sin\left(x + \frac{(n-4)\pi}{2}\right)24\right\}$$

$$y^{(5)} = x^4\left\{\sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right)\right\} + 20x^3\{\sin(x + 2\pi)\} + \frac{5 \times 4}{2!} \times 12x^2\left\{\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)\right\} + \frac{5 \times 4 \times 3}{3!} \times 24x\{\sin(x + \pi)\} + \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{4!} \times 24\left\{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$
$$= x^4\left\{\sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right)\right\} + 20x^3\{\sin(x + 2\pi)\} + 120x^2\left\{\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)\right\} + 240x\{\sin(x + \pi)\} + 120\left\{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

چونکہ $\sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

$$\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right) = -\cos x \text{ ، } \sin(x+2\pi) = \sin x$$

اور $\sin(x+\pi) = -\sin x$

اس لیے

$$\begin{aligned} y^{(5)} &= x^4\cos x + 20x^3\sin x - 120x^2\cos x - 240x\sin x + 120\cos x \\ &= (x^4 - 120x^2 + 120)\cos x + (20x^3 - 240x)\sin x \end{aligned}$$

مثال(9):اگر $y = tan^{-1}x$ ہو تو ثابت کرو کہ

$$(1+x^2)y_{n+1} + 2nxy_n + n(n-1)y_{n-1} = 0$$

حل۔یہاں $y = tan^{-1}x$ ہے

$$\Rightarrow \qquad y_1 = \frac{1}{(1+x^2)}$$

$$\Rightarrow \qquad (1+x^2)y_1 = 1$$

Leibnitz's قضیہ کی مدد سے n بار تفرقکرنے پر

$$(1+x^2)y_{n+1} + ny_n(2x) + \frac{n(n-1)}{2}y_{n-1}(2) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad (1+x^2)y_{n+1} + 2nxy_n + n(n-1)y_{n-1} = 0$$

مثال(10):اگر $f(x) = \tan x$ ہو تب ثابت کرو کہ

$$f^{(n)}(0) - C_2^n f^{(n-2)}(0) + C_4^n f^{(n-4)}(0)\cdots = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

حل۔ہمارے پاس $f(x) = \tan x = \frac{\boldsymbol{\sin x}}{\boldsymbol{\cos x}}$ ہے

یا $f(x)\,cos\,x = sin\,x$

دونوں طرف تفرقکرنے پر

$$C_0^n f^{(n)}(x)\,cos\,x + C_1^n f^{(n-1)}(x)(-\,sin\,x) + C_2^n f^{(n-2)}(x)(-\,cos\,x) + C_3^n f^{(n-3)}(x)(sin\,x)$$
$$+C_4^n f^{(n-4)}(x)\,cos\,x + \cdots = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$x = 0$ رکھنے پر ہمیں ملتا ہے

$$C_0^n f^{(n)}(0)\,cos(0) + C_1^n f^{(n-1)}(0)(-\,sin(0)) + C_2^n f^{(n-2)}(0)(-\,cos(0)) + C_3^n f^{(n-3)}(0)(sin(0))$$
$$+C_4^n f^{(n-4)}(0)\,cos(0) + \cdots = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$f^{(n)}(0) + C_2^n f^{(n-2)}(0) + C_4^n f^{(n-4)}(0) + \cdots = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

2.5 اکتسابی نتائج(Learning Outcomes)

اس اکائی میں آپ نے سیکھا کہ کس طرح مختلف تفاعلات کے اعلارتبہ مشتق حاصل کیے جاتے ہیں۔

2.6 کلیدی الفاظ(Key Words)

اعلارتبہ مشتق، لیبنیز قضیہ، تفرق

2.7 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

2.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. $D^n e^{ax}\sin(bx+c)$ کی قدر ہے

a) $(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\sin\left(bx+c+n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$

b) $(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\sin\left(bx+c+\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$

c) $(a+b)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\sin\left(bx+c+n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$

d) $(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\sin\left(bx+c+n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$

2. $D^n e^{ax}\cos(bx+c)$ کی قدر ہے

a) $(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\cos\left(bx+c+\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$

b) $(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\cos\left(bx+c+n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$

c) $(a+b)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\cos\left(bx+c+n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$

d) $(a+b)^{\frac{n}{2}}\cos\left(bx+c+n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$

3. $D^n\sin(ax+b)$ کی قدر ہے

a) $a^n\sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$

b) $a^n\sin\left(ax+b+\frac{\pi}{2}\right)$

c) $a^n\sin\left(ax+b+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)$

d) ان میں سے کوئی نہیں

4. $D^n\, cos(ax+b)$ کی قدر ہے

a) $a^n\cos(ax+b+n\pi)$

b) $a^{n-1}\cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$
c) $a^{n}\cos\left(ax+b+\frac{\pi}{2}\right)$
d) $a^{n}\cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$

2.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. $y = 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 6x + 1$ کا چوتھا تفرق معلوم کرو۔
2. اگر $x^2 + y^2 = a^2$ ہو، $\frac{d^2y}{dx^2}$ کی قدر معلوم کرو۔
3. اگر $y = sin(sin\,x)$ ہو تو ثابت کرو کہ $y_2 + y_1\,tan\,x + y cos^2 x$
4. ثابت کرو کہ $y_4 + 4y = 0$، اگر $y = e^{-x}\,cos\,x$ ہو۔
5. اگر $y = x + tan\,x$، ثابت کرو $y_2 cos^2 x - 2y + 2x = 0$
6. ثابت کرو $x^3 y_2 = (y - yy_1)^2$، اگر $y = x\,log\frac{x}{a+bx}$
7. ثابت کرو $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2a^3xy}{(ax-y^2)^3}$، اگر $x^3 + y^3 = 3axy$
8. اگر $y = A\,sin\,mx + B\,cos\,mx$، ثابت کرو $y_2 + m^2 = 0$
9. ثابت کرو $2y_1y_3 = 3{y_2}^2$، اگر $y = \frac{ax+b}{cx+d}$
10. معلوم کرو $\frac{d^2y}{dx^2}$، اگر $x = a(cos\,\theta + \theta\,sin\,\theta)$ اور $y = a(sin\,\theta - \theta\,cos\,\theta)$ ہو۔

2.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. مندرجہ ذیل کے nویں مشتقات معلوم کرو۔

a) $y = \frac{x^2}{(x-1)^2(x+2)}$
b) $y = \frac{x^2}{(x+2)(2x+3)}$
c) $y = \frac{x}{1+3x+2x^2}$
d) $y = \frac{1}{1-5x+6x^2}$
e) $y = \frac{1}{2x^2+3x+1}$
f) $y = \frac{1}{a^2-x^2}$

2. مندرجہ ذیل کے nویں مشتقات کو معلوم کرو۔

a) $y = sin^2xcos^2x$
b) $y = cos^2xsin^3x$
c) $y = \cos x \cos 2x \cos 3x$
d) $y = sin^3x$

3. nth مشتق معلوم کرو۔

a) x^2e^{3x}
b) $x^3 \log x$
c) $e^x \log x$
d) $x^2 \sin x$
e) x^ne^x
f) $\frac{x^n}{n+1}$

4. اگر $y = \sin^{-1} x$ تب ثابت کرو کہ $(1-x^2)y_2 - xy_1 = 0$ ہے اور پھر بہ لحاظ x اس مساوات کو n بار تفرق کرو۔

5. اگر $y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$ ثابت کرو

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+3)xy_{n+1} - (n+1)^2y_n = 0$$

6. اگر $y = (x^2-1)^n$ تب ثابت کرو کہ

$$(x^2-1)y_{n+2} + 2xy_{n+1} - n(n+1)y_n = 0$$

7. اگر $y = e^{m\sin^{-1} x}$ ثابت کرو

a) $(1-x^2)y_2 - xy_1 - m^2y = 0$
b) $(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2+m^2)y_n = 0$

y_n کی قدر معلوم کرو جب $x = 0$ ہے۔

اکائی 3۔ لیبنیز قضیہ

(Leibnitz's Theorem)

اکائی کے اجزا

3.0 تمہید
3.1 مقاصد
3.2 لیبنیز قضیہ
3.2.1 لیبنیز قضیہ کے اطلاقات
3.3 اکتسابی نتائج
3.4 کلیدی الفاظ
3.5 نمونہ امتحانی سوالات
3.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات
3.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات
3.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

3.0 تمہید(Introduction)

پچھلی اکائی میں ہم نے تفاعلات کے اعلا رتبہ کے مشتق کے بارے میں پڑھا،اس اکائی میں ہم لیبنیز قضیہ کے بارے میں پڑھیں گے۔ اس قضیہ کا استعمال تفاعلات کے ضرب کے nویں مشتق کو حاصل کرنے کے لیے کیا جاتا ہے۔

3.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ اس قابل ہو جایں گے کہ تفاعلات کے ضرب کے nویں مشتق کو لیبنیز قضیہ کی مدد سے حاصل کر سکیں گے۔

3.2 لیبنیز قضیہ(Leibnitz's Theorem)

بیان: اگر uاور v دو ایسے تفاعلات ہیں جو n مرتبہ تفرق پزیر ہیں، تب

$$y_n = (u\cdot v)_n = \binom{n}{0} u_n\cdot v + \binom{n}{1} u_{n-1}\cdot v_1 + \binom{n}{2} u_{n-2}\cdot v_2 + \cdots + \binom{n}{r} u_{n-r}\cdot v_r + \cdots + \binom{n}{n} u\cdot v_n$$

جہاں n ایک مثبت صحیح اعداد(Integer) ہے، اور

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

ثبوت: اس قضیہ کو ثابت کرنے کے لیے ہم ریاضیاتی استقرا(Mathematical Induction) کا استعمال کریں گے۔

$$y_1 = (u\cdot v)_1 = u_1\cdot v + u\cdot v_1$$

اور

$$y_2 = [(u\cdot v)_1]_1 = (u_1\cdot v + u\cdot v_1)_1 = u_2\cdot v + u_1\cdot v_1 + u_1\cdot v_1 + u\cdot v_2 = u_2\cdot v + 2u_1\cdot v_1 + u\cdot v_2$$

یا

$$y_2 = \binom{2}{0}u_2\cdot v + \binom{2}{1}u_1\cdot v_1 + \binom{2}{2}u\cdot v_2$$

بیان $n = 1$اور $n = 2$ کے لیے صحیح ہے۔اب مان لو کہ بیان $n = m$ کے لیے صحیح ہے۔یعنی

$$y_m = (u\cdot v)_m = \binom{m}{0} u_m\cdot v + \binom{m}{1} u_{m-1}\cdot v_1 + \binom{m}{2} u_{m-2}\cdot v_2 + \cdots + \binom{m}{r} u_{m-r}\cdot v_r + \cdots + \binom{m}{m} u\cdot v_m$$

بہ لحاظ x تفرق کرنے پر

$$y_{m+1} = (u\cdot v)_{m+1} = \binom{m}{0}(u_{m+1}\cdot v + u_m\cdot v_1) + \binom{m}{1}(u_m\cdot v_1 + u_{m-1}\cdot v_2) + \cdots + \binom{m}{r-1} u_{m-r+1}\cdot v_r + \binom{m}{r}(u_{m-r}\cdot v_{r+1} + u_{m-r+1}\cdot v_r) + \cdots + \binom{m}{m}(u_1\cdot v_m + u\cdot v_{m+1})$$

$$= \binom{m}{0} u_{m+1} \cdot v + \left(\binom{m}{0} + \binom{m}{1} \right) u_m \cdot v_1 + \cdots + \left(\binom{m}{r-1} + \binom{m}{r} \right) u_{m-r+1} \cdot v_r + \cdots + \binom{m}{m} u \cdot v_{m+1}$$

$\because \binom{m}{0} = \binom{m+1}{0} = 1, \binom{m}{r-1} + \binom{m}{r} = \binom{m+1}{r}, \binom{m}{m} = \binom{m+1}{m+1} = 1$

اس لیے

$$y_{m+1} = (u \cdot v)_{m+1} = \binom{m+1}{0} u_{m+1} \cdot v + \binom{m+1}{1} u_m \cdot v_1 + \binom{m+1}{2} u_{m-1} \cdot v_2$$
$$+ \cdots + \binom{m+1}{r} u_{m-r+1} \cdot v_r + \cdots + \binom{m+1}{m+1} u \cdot v_{m+1}$$

اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ بیان اس ترح اعداد n کی سبھی مثبت قیمتوں کے لیے صحی ہے۔

3.2.1 لیبنیز قضیہ کے اطلاقات (Applications of Leibnitz Theorem)

اس حصہ میں ہم لیبنیز قضیہ کے استعمال کو بہت سی مثالوں کی مدد سے سیکھیں گے۔

مثال 1- لیبنیز کے قضیہ کے استعمال سے $y = x \sin x$ کا تیسرا مشتق حاصل کریں۔

حل- دیا ہے

$$y = x \sin x$$

فرض کرو کہ

$$u = x \text{ اور } v = \sin x$$

ہم جانتے ہیں کہ $n = 3$ کے لیے لیبنیز کا قضیہ بیان کرتا ہے کہ

$$y_3 = (u \cdot v)_3 = \binom{3}{0} u_3 \cdot v + \binom{3}{1} u_{3-1} \cdot v_1 + \binom{3}{2} u_{3-2} \cdot v_2 + \binom{3}{3} u \cdot v_3$$

اور

$$u = x \text{ اور } v = \sin x$$

$$u_1 = 1 \text{ اور } v_1 = \cos x$$

$$u_2 = 0 \text{ اور } v_2 = -\sin x$$

$$u_3 = 0 \text{ اور } v_3 = -\cos x$$

اس طرح

$$\therefore y_3 = (u \cdot v)_3 = 0 + 0 + \binom{3}{2} 1 \cdot (-\sin x) + \binom{3}{3} x \cdot (-\cos x)$$

$$\Rightarrow \quad y_3 = (u \cdot v)_3 = -3 \sin x - x \cos x$$

مثال 2- اگر $y = x^3 e^{ax}$، تب y_n حاصل کریں۔

حل- دیا گیا ہے

$$y = x^3 e^{ax}$$

فرض کرو کہ

$u = e^{ax}$ اور $v = x^3$

تب

$u_1 = ae^{ax}$ اور $v_1 = 3x^2$

$u_2 = a^2e^{ax}$ اور $v_2 = 6x$

$u_3 = a^3e^{ax}$ اور $v_3 = 6$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$u_n = a^ne^{ax}$ اور $v_n = 0$

ہم جانتے ہیں کہ n کے لیے لیبنیز کا قضیہ بیان کرتا ہے کہ

$$y_n = (u \cdot v)_n = \binom{n}{0} u_n \cdot v + \binom{n}{1} u_{n-1} \cdot v_1 + \binom{n}{2} u_{n-2} \cdot v_2 + \cdots + \binom{n}{n} u \cdot v_n$$

اب اوپر حاصل کی گیئں قیمتیں درج کرنے پر حاصل ہے

$$y_n = (x^3e^{ax})_n = \binom{n}{0}(a^ne^{ax})(x^3) + \binom{n}{1}(a^{n-1}e^{ax})(3x^2) + \binom{n}{2}(a^{n-2}e^{ax})(6x) + \binom{n}{3}(a^{n-3}e^{ax})(6) + \binom{n}{4}(a^{n-4}e^{ax})(0) + 0\cdots$$

$$= e^{ax}\left(a^nx^3 + 3na^{n-1}x^2 + 6 \times \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}x + 6 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}\right)$$

$$= e^{ax}(a^nx^3 + 3na^{n-1}x^2 + 3n(n-1)a^{n-2}x + n(n-1)(n-2)a^{n-3})$$

مثال3- اگر $y = x^2e^x \cos x$،تب y_n حاصل کیجیے۔

حل- دیا گیا ہے

$$y = x^2e^x \cos x$$

فرض کرو کہ

$u = e^x \cos x$ اور $v = x^2$

تب

$$v_1 = 2x$$
$$v_2 = 2$$
$$v_3 = 0$$
$$\vdots \quad \vdots$$
$$v_n = 0$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$\frac{d^n}{dx^n}[e^{ax}\cos(bx+c)] = r^ne^{ax}\cos(bx+c+n\theta)$$

جہاں $r = \sqrt{a^2+b^2}$ اور $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

$a = 1$،$b = 1$ اور $c = 0$ لینے پر ہمیں ملتا ہے

$$u_n = 2^{n/2}e^x\cos\{x + n\tan^{-1}(1)\}$$

ہم جانتے ہیں کہ n کے لیے لیبنیز کا قضیہ بیان کرتا ہے کہ

$$y_n = (u\cdot v)_n = \binom{n}{0} u_n\cdot v + \binom{n}{1} u_{n-1}\cdot v_1 + \binom{n}{2} u_{n-2}\cdot v_2 + \cdots + \binom{n}{n} u\cdot v_n$$

اب اوپر حاصل کی گئی قیمتیں درج کرنے پر حاصل ہے

$$y_n = (e^x\cos x\cdot x^2)_n = \binom{n}{0}\left[2^{\frac{n}{2}} e^x \cos\{x + n\tan^{-1}(1)\}\, x^2\right]$$
$$+\binom{n}{1}\left[2^{\frac{(n-1)}{2}} e^x \cos\{x + (n-1)\tan^{-1}(1)\}\cdot 2x\right]$$
$$+\binom{n}{2}\left[2^{\frac{(n-2)}{2}} e^x \cos\{x + (n-2)\tan^{-1}(1)\}\cdot 2\right] + 0 + \cdots$$
$$= 2^{\frac{n}{2}} x^2 e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) + n\cdot 2^{\frac{(n-1)}{2}}\cdot 2xe^x\cos\left(x + \frac{(n-1)\pi}{4}\right)$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}\times 2^{\frac{(n-2)}{2}}\cdot 2e^x\cos\left(x + \frac{(n-2)\pi}{4}\right)$$
$$= 2^{\frac{(n-2)}{2}} e^x\left[2x^2\cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) + 2^{\frac{3}{2}} nx\cos\left(x + \frac{(n-1)\pi}{4}\right) + n(n-1)\cos\left(x + \frac{(n-2)\pi}{4}\right)\right]$$

مثال4- اگر $y = x^{n-1}\log x$، تب y_n حاصل کریں۔

حل- دیا گیا ہے

$$y = x^{n-1}\log x$$

اگر ہم $u = x^{n-1}$ اور $v = \log x$ لیتے ہوں تب حاصل ہے

$$u_1 = (n-1)x^{n-2} \text{ اور } v_1 = \frac{1}{x}$$
$$u_2 = (n-1)(n-2)x^{n-3} \text{ اور } v_2 = -\frac{1}{x^2}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$u_m = (n-1)(n-2)\cdots(n-m)x^{n-m-1} \text{ اور } v_m = (-1)^{m-1}\frac{(m-1)!}{x^m}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$u_n = 0 \text{ اور } v_n = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$

اب اوپر حاصل کی گئی قیمتیں لیبنیز قضیہ میں درج کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y_n = (x^{n-1}\log x)_n = \binom{n}{0}(0)\log x + \binom{n}{1}(n-1)!\left(\frac{1}{x}\right) + \binom{n}{2}\frac{(n-1)!}{1!}x\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$+\binom{n}{3}\frac{(n-1)!}{2!}x^2\left(\frac{2}{x^3}\right) + \cdots + \binom{n}{n}(x^{n-1})(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$
$$= \frac{(n-1)!}{x}\left[1 - \left\{1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}\right\}\right]$$
$$= \frac{(n-1)!}{x}\left[1 - (1-1)^n\right]$$
$$= \frac{(n-1)!}{x}$$

مثال5۔ اگر $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$،تب ثابت کریں کہ

$$x^2y_2 + ny_1 + y = 0$$

اور

$$x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$$

حل- دیا گیا ہے کہ

$$y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x) \quad ...(1)$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = -a\sin(\log x)\frac{1}{x} + b\cos(\log x)\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = \frac{1}{x}\{-a\sin(\log x) + b\cos(\log x)\}$$

$$\Rightarrow \quad xy_1 = -a\sin(\log x) + b\cos(\log x) \quad ...(2)$$

دونوں طرف سے بہ لحاظ x تفرق کرنے پر

$$xy_2 + y_1 = -a\cos(\log x)\frac{1}{x} - b\sin(\log x)\frac{1}{x}$$

یا

$$xy_2 + y_1 = -\frac{1}{x}\{a\cos(\log x) + b\sin(\log x)\}$$

مساوات(1) کے استعمال سے

$$xy_2 + y_1 = -\frac{y}{x}$$

یا

$$x^2y_2 + xy_1 = -y$$

یا

$$x^2y_2 + xy_1 + y = 0 \quad ...(3)$$

اب مساوات(3) کو لیبنیز قضیہ کی مدد سے n مرتبہ تفرق کرنے پر، ہمیں حاصل ہے

$$x^2y_{n+2} + \binom{n}{1}y_{n+1}2x + 2\binom{n}{2}y_n + xy_{n+1} + \binom{n}{1}y_n + y_n = 0$$
$$x^2y_{n+2} + 2nxy_{n+1} + n(n-1)y_n + xy_{n+1} + ny_n + y_n = 0$$
$$x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$$

مثال6- اگر $y = \cos(m\sin^{-1}x)$،تب ثابت کیجیے:

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} + (m^2-n^2)y_n = 0$$

اور $y_n(0)$ حاصل کریں۔

حل- دیا گیا ہے

$$y = \cos(m\sin^{-1}x) \quad ...(1)$$

$$y_1 = -\sin(m\sin^{-1}x)\frac{m}{\sqrt{(1-x^2)}} \quad ...(2)$$

$\sqrt{(1-x^2)}$ سے ضرب دینے پر

$$\sqrt{(1-x^2)}\,y_1 = -m\sin(m\sin^{-1}x)$$

دونوں طرف مربع کرنے پر

$$(1-x^2)y_1 = m^2\sin^2(m\sin^{-1}x)$$
$$= m^2\{1-cos^2(m\sin^{-1}x)\}$$
$$= m^2 - m^2 cos^2(m\sin^{-1}x)$$
$$\Rightarrow \qquad (1-x^2)y_1 = m^2 - m^2y^2$$

به لحاظ x تفرق کرنے پر

$$2(1-x^2)y_1y_2 - 2xy_1{}^2 = -2m^2yy_1$$
$$(1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0 \qquad ...(3)$$

لیبنیز قضیہ کی مدد سے n مرتبہ تفرق کرنے پر

$$(1-x^2)y_{n+2} + \binom{n}{1}y_{n+1}(-2x) + \binom{n}{2}y_n(-2) - xy_{n+1} + \binom{n}{1}y_n(-1) + m^2y_n = 0$$
$$\Rightarrow \qquad (1-x^2)y_{n+2} - 2nxy_{n+1} - 2\times\frac{n(n-1)}{2}y_n - xy_{n+1} - ny_n + m^2y_n = 0$$
$$\Rightarrow \qquad (1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - n^2y_n + ny_n - ny_n + m^2y_n = 0$$
$$\Rightarrow \qquad (1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} + (m^2-n^2)y_n = 0 \qquad ...(4)$$

مساوات(4) میں $x = 0$ رکھنے پر

$$y_{n+2}(0) + (m^2-n^2)y_n(0) = 0$$
$$y_{n+2}(0) = (n^2-m^2)y_n(0) \qquad ...(5)$$

مساوات(1) سے $\qquad y(0) = 1$

مساوات(2) سے $\qquad y_1(0) = 0$

مساوات(3) سے $\qquad y_2(0) = -m^2y(0) = -m^2$

مساوات(5) میں $n = 1, 2,3, 4, \cdots$ رکھنے پر

$$y_3(0) = (1^2-m^2)y_1(0) = 0$$
$$y_4(0) = (2^2-m^2)y_2(0) = -m^2(2^2-m^2)$$
$$y_5(0) = (3^2-m^2)y_3(0) = 0$$
$$y_6(0) = (4^2-m^2)y_4(0) = -m^2(2^2-m^2)(4^2-m^2)$$

عام انداز میں ہم اسے اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$y_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{اگر } n \text{ طاق } (odd) \text{ ہے} \\ -m^2(2^2-m^2)(4^2-m^2)\cdots\{(n-1)^2-m^2\}, & \text{اگر } n \text{ جفت } (even) \text{ ہے} \end{cases}$$

مثال 7- اگر $y = (\sin^{-1}x)^2$، تب ثابت کرو کہ

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - n^2y_n = 0$$

حل- دیا گیا ہے کہ

$$y = (\sin^{-1}x)^2 \qquad ...(1)$$

مساوات(1) بہ لحاظ x تفرق کرنے پر

$$y_1 = 2\sin^{-1} x \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

یا

$$y_1\sqrt{1-x^2} = 2\sin^{-1} x$$

دونوں طرف مربع کرنے پر

$$y_1^{\,2}(1-x^2) = 4(\sin^{-1} x)^2$$

مساوات(1)کا استعمال کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$y_1^{\,2}(1-x^2) - 4y = 0 \qquad ...(2)$$

مساوات(2)کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$2(1-x^2)y_1y_2 - 2xy_1^{\,2} - 4y_1 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad (1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0 \qquad ...(3)$$

مساوات(3)کو لیبنیز قضیہ کی مدد سے n مرتبہ بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$(1-x^2)y_{n+2} + \binom{n}{1} y_{n+1}(-2x) + \binom{n}{2} y_n(-2) - \left\{xy_{n+1} + \binom{n}{1} y_n\right\} = 0$$

یا

$$(1-x^2)y_{n+2} - 2nxy_{n+1} - n(n-1)y_n - xy_{n+1} - ny_n = 0$$

یا

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - n^2y_n = 0$$

یہ ثابت ہوا۔

مثال8- اگر $y = \frac{\log x}{x}$،تب ثابت کرو کہ

$$y_n = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left(\log x - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n}\right)$$

حل- دیا گیا ہے

$$y = \frac{\log x}{x}$$

فرض کرو کہ

$$v = \log x \text{ اور } u = \frac{1}{x}$$

تب حاصل ہے

$$v_1 = \frac{1}{x} \text{ اور } u_1 = -\frac{1}{x^2}$$

$$v_2 = -\frac{1}{x^2} \text{ اور } u_2 = \frac{2}{x^3}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$v_n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \text{ اور } u_n = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

ہم جانتے ہیں کہ n کے لیے لیبنیز کا قضیہ بیان کرتا ہے کہ

$$y_n = (u\cdot v)_n = \binom{n}{0} u_n\cdot v + \binom{n}{1} u_{n-1}\cdot v_1 + \binom{n}{2} u_{n-2}\cdot v_2 + \cdots + \binom{n}{n} u\cdot v_n$$

اب اوپر حاصل کی گئی قیمتیں درج کرنے پر

$$y_n = \left(\frac{\log x}{x}\right)_n = \binom{n}{0}\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \times (\log x) + \binom{n}{1}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \times \left(\frac{1}{x}\right)$$
$$+ \binom{n}{2}\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-1}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \cdots + \binom{n}{n}\left(\frac{1}{x}\right) \times \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$
$$= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \times (\log x) + \frac{(-1)^{n-1} n(n-1)!}{x^{n+1}} + \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{(-1)^{n-1}(n-2)!}{x^{n+1}} + \cdots$$
$$+ \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^{n+1}}$$
$$= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left(\log x - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n}\right)$$

مثال9- اگر $y = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$،تب ثابت کرو کہ

$$(1+x^2)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + n^2 y_n = 0$$

$y_n(0)$ حاصل کریں۔

حل- دیا گیا ہے

$$y = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \qquad ...(1)$$

اور

$$y(0) = 0$$

مساوات(1) کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر

$$y_1 = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$
$$= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}\left(\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$
$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \; y_1(0) = 1 \qquad ...(2)$$

یا

$$y_1\sqrt{1+x^2} = 1$$

دونوں طرف مربع کرنے پر

$$y_1^{\,2}(1+x^2) = 1 \qquad ...(3)$$

مساوات(3) کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$2(1+x^2)y_1 y_2 + 2xy_1^{\,2} = 0$$

یا

$$(1+x^2)y_2 + xy_1 = 0 \qquad ...(4)$$

مساوات(4) کو لیبنیز قضیہ کی مدد سے n مرتبہ بالحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$(1+x^2)y_{n+2} + \binom{n}{1} y_{n+1}(2x) + \binom{n}{2} y_n(2) + xy_{n+1} + \binom{n}{1} y_n = 0$$

یا

$$(1+x^2)y_{n+2} + 2nxy_{n+1} + n(n-1)y_n + xy_{n+1} + ny_n = 0$$

یا $$(1+x^2)y_{n+2}+(2n+1)xy_{n+1}+n^2y_n=0 \quad ...(5)$$

مساوات(5)میں $x=0$ رکھنے پر، ہمیں ملتا ہے

$$y_{n+2}(0)+n^2y_n(0)=0$$

یا $$y_{n+2}(0)=-n^2y_n(0) \quad ...(6)$$

مساوات(6)میں $n=1,2,3,\cdots$ رکھنے پر

$$y_3(0)=-y_1(0)=-1^2[\because y_1(0)=1]$$
$$y_4(0)=-2^2y_2(0)=0 \quad [\because y_2(0)=0]$$
$$y_5(0)=-3^2y_3(0)=(-3^2)(-1^2)=1^2\cdot 3^2$$
$$y_6(0)=-4^2y_4(0)=0$$
$$y_7(0)=-5^2y_5(0)=(-5^2)(-3^2)(-1^2)=(-1)1^2\cdot 3^2\cdot 5^2$$

عام انداز میں ہم اسے اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$y_n(0)=\begin{cases} 0, & \text{اگر } n \text{ جفت } (even) \text{ ہے} \\ (-1)^{\frac{(n-1)}{2}}1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(n-2)^2, & \text{اگر } n \text{ طاق } (odd) \text{ ہے} \end{cases}$$

مثال10-اگر $y^{\frac{1}{m}}+y^{-\frac{1}{m}}=2x$، تب ثابت کریں

$$(x^2-1)y_2+xy_1-m^2y=0$$

نیز بتلاؤ کہ

$$(x^2-1)y_{n+2}+(2n+1)xy_{n+1}+(n^2-m^2)y_n=0$$

حل-دیا گیا ہے

$$y^{\frac{1}{m}}+y^{-\frac{1}{m}}=2x \quad ...(1)$$

یا $$y^{\frac{1}{m}}+\frac{1}{y^{\frac{1}{m}}}=2x$$

$$\Rightarrow \quad y^{\frac{2}{m}}-2xy^{\frac{1}{m}}+1=0 \quad ...(2)$$

جو $y^{\frac{1}{m}}$ ایک دو درجی (Quadratic) مساوات ہے، اس لیے

$$y^{\frac{1}{m}}=\frac{2x\pm\sqrt{4x^2-4}}{2}$$
$$y^{\frac{1}{m}}=x\pm\sqrt{x^2-1}$$

یا $$y=\left\{x\pm\sqrt{x^2-1}\right\}^m \quad ...(3)$$

اگر $$y=\left\{x+\sqrt{x^2-1}\right\}^m \quad ...(4)$$

مساوات(4) کو بالحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہے

$$y_1=m\left\{x+\sqrt{x^2-1}\right\}^{m-1}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x\right)$$
$$=m\left\{x+\sqrt{x^2-1}\right\}^{m-1}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$\Rightarrow y_1 = m\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^m}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$y_1 = m\frac{y}{\sqrt{x^2-1}} \qquad ...(5)$$

اب مساوات(3)سے،اگر

$$y = \left\{x-\sqrt{x^2-1}\right\}^m \qquad ...(6)$$

مساوات(6)کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہے

$$y_1 = m\left\{x-\sqrt{x^2-1}\right\}^{m-1}\left(1-\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x\right)$$
$$\Rightarrow \qquad y_1 = -m\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^m}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$\Rightarrow \qquad y_1 = -m\frac{y}{\sqrt{x^2-1}} \qquad ...(7)$$

مساوات(5)یا(7)کا دونوں طرف مربع کرنے پر

$${y_1}^2 = m^2\frac{y^2}{x^2-1}$$
$$\Rightarrow \qquad (x^2-1){y_1}^2 = m^2y^2 \qquad ...(8)$$

مساوات(8)کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہے

$$2(x^2-1)y_1y_2 + 2x{y_1}^2 = 2m^2yy_1$$
$$(x^2-1)y_2 + xy_1 - m^2y = 0 \qquad ...(9)$$

مساوات(9)کو لیبنیز قضیہ کی مدد سے n مرتبہ بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہے

$$(x^2-1)y_{n+2} + \binom{n}{1}y_{n+1}(2x) + \binom{n}{2}y_n(2) + xy_{n+1} + \binom{n}{1}y_n - m^2y_n = 0$$

یا

$$(x^2-1)y_{n+2} + 2nxy_{n+1} + n(n-1)y_n + xy_{n+1} + ny_n - m^2y_n = 0$$
$$(x^2-1)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2-m^2)y_n = 0$$

مثال 11-اگر $y = e^{m\sin^{-1}x}$،تب ثابت کرو کہ

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (m^2+n^2)y_n = 0$$

$y_n(0)$ بھی حاصل کیجیے۔

حل-ہمیں دیا گیا ہے

$$y = e^{m\sin^{-1}x} \qquad ...(1)$$

مساوات(1)کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر

$$y_1 = e^{m\sin^{-1}x}\times\frac{m}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

مساوات(1)کے استعمال سے

$$y_1 = \frac{my}{\sqrt{(1-x^2)}} \qquad ...(2)$$

$$\sqrt{(1-x^2)}y_1 = my$$

دونوں طرف مربع کرنے پر

$$(1-x^2){y_1}^2 = m^2y^2 \qquad ...(3)$$

مساوات(3)کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہے

$$2(1-x^2)y_1y_2 - 2x{y_1}^2 = 2m^2yy_1$$

یا

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 - m^2y = 0 \qquad ...(4)$$

مساوات(9)کو لیبنیز قضیہ کی مدد سے n مرتبہ بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہے

$$(1-x^2)y_{n+2} + \binom{n}{1}y_{n+1}(-2x) + \binom{n}{2}y_n(-2) - xy_{n+1} - \binom{n}{1}y_n - m^2y_n = 0$$

یا

$$(1-x^2)y_{n+2} - 2nxy_{n+1} - n(n-1)y_n - xy_{n+1} - ny_n - m^2y_n = 0$$

یا

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (m^2+n^2)y_n = 0 \qquad ...(5)$$

$x = 0$ مساواتوں(1)،(2)،(4)اور(5)میں درج کرنے پر

$$y(0) = e^{m\sin^{-1}0} = e^0 = 1 \qquad ...(6)$$

$$y_1(0) = \frac{my(0)}{1} = m \cdot 1 = m \qquad ...(7)$$

$$y_2(0) - m^2y(0) = 0 \Rightarrow y_2(0) = m^2y(0) = m^2 \qquad ...(8)$$

$$y_{n+2}(0) - (m^2+n^2)y_n(0) = 0 \Rightarrow y_{n+2}(0) = (m^2+n^2)y_n(0) \qquad ...(9)$$

مساوات(9)میں $n = 1, 2, 3, \cdots$ درج کرنے پر

$$\begin{aligned}
y_3(0) &= (m^2+1^2)y_1(0) = (m^2+1^2)m \\
y_4(0) &= (m^2+2^2)y_2(0) = (m^2+2^2)m^2 \\
y_5(0) &= (m^2+3^2)y_3(0) = (m^2+3^2)(m^2+1^2)m \\
y_6(0) &= (m^2+4^2)y_4(0) = (m^2+4^2)(m^2+2^2)m^2 \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

عام انداز میں ہم اسے اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$y_n(0) = \begin{cases} m(m^2+1^2)(m^2+3^2)\cdots[m^2+(n-2)^2], & \text{اگر } n \text{ طاق } (odd) \text{ ہے} \\ m^2(m^2+2^2)(m^2+4^2)\cdots[m^2+(n-2)^2], & \text{اگر } n \text{ جفت } (even) \text{ ہے} \end{cases}$$

3.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے لیبنیز قضیہ کو پڑھا اور اس کو ثابت کیا۔ ہم نے اس قضیہ کے استعمال سے تفاعلات کے ضرب کا n واں مشتق حاصل کیا۔

3.4 کلیدی الفاظ(Key Words)

n واں مشتق، تفاعلات کا ضرب، لیبنیز قضیہ

3.5 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

3.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. $D^n\{\sin(ax+b)\}$ کی قیمت ہے

(a) $a^n \sin(ax+b+n\pi)$ (b) $a^n \cos(ax+b+n\pi)$

(c) $a^n \sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$ (d) $a^n \cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$

2. لیبنیز قضیہ کا استعمال ․․․ کا n واں مشتق حاصل کرنے میں کیا جاتا ہے۔

(a) دو تفاعلات کے جمع (b) دو تفاعلات کے فرق(Difference)

(c) دو تفاعلات کے ضرب (d) ان میں سے کوئی نہیں

3. لیبنیز قضیہ کو بیان کیجیے۔

4. $(u \cdot v)_n$ کے پھیلاؤ(Expansion) میں $(r+1)^{\text{th}}$ ٹرم ہے

(a) $\binom{n}{r+1}u_{n-r}v_r$ (b) $\binom{n+1}{r}u_{n-r}v_r$

(c) $\binom{n}{r}u_{n-r}v_r$ (d) $\binom{n}{r-1}u_n v_{r-r}$

3.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

1. اگر $y=\tan^{-1}x$، تب ثابت کرو

$$(1-x^2)y_2 - 2xy_1 = 0$$

2. درج ذیل کا n واں مشتق حاصل کیجیے:

(i) $e^{2x}(ax+b)^3$

(ii) $x^3\cos x$

3. اگر $y=e^{ax}\sin bx$، ثابت کرو کہ

$$y_2 - 2ay_1(a^2+b^2)y = 0$$

4. اگر $y=\sin(m\sin^{-1}x)$، تب ثابت کرو کہ

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0$$

5. درج ذیل مساوات کو n مرتبہ بہ لحاظ x تفرق کریں

(i) $(1-x^2)y_2 - xy_1 + a^2y = 0$

(ii) $x^2y_2 - xy_1 + (a^2-m^2)y = 0$

3.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات(Long Answer Type Questions)

1. اگر $y = e^{\tan^{-1} x}$، تب ثابت کرو کہ

$$(1 + x^2)y_{n+2} + \{(n + 1)x - 1\}y_{n+1} + n(n + 1)y_n = 0$$

2. اگر $y = \tan^{-1} x$، تب ثابت کرو کہ

$$(1 + x^2)y_{n+2} + 2(n + 1)xy_{n+1} + n(n + 1)y_n = 0$$

اور پھر $y_n(0)$ حاصل کریں۔

3. اگر $y = \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^m$، تب $y_n(0)$ حاصل کریں۔

اکائی 4۔ کانکیوٹی، انفلیکشن نقاط اور ایسمپٹوٹس

(Concavity, Inflexion Points and Asymptotes)

اکائی کے اجزا

4.0 تمہید

4.1 مقاصد

4.2 کانکیوٹی اور انفلیکشن نقاط

4.3 ایسمپٹوٹس

4.3.1 تعریف اور ایسمپٹوٹ کو حاصل کرنا

4.3.2 عام جبری منحنی کے ایسمپٹوٹس

4.3.3 ایسمپٹوٹس حاصل کرنے کا چھوٹا طریقہ

4.3.4 محوروں کے متوازی ایسمپٹوٹس

4.4 اکتسابی نتائج

4.5 کلیدی الفاظ

4.6 نمونہ امتحانی سوالات

4.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

4.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

4.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

4.0 تمہید(Introduction)

پچھلے درجوں میں آپ منحنی کے عظیم قدریں(Maxima)اور قلیل قدریں(Minima) کے بارے میں پڑھا ہے۔اس اکائی میں ہم کسی منحنی کی کانکیوٹی (Concavity)اورانفلیکشن نقاط(Points of Inflexion) حاصل کریں گے۔ آپ اپنی پچھلی کلاسوں میں مماس(Tangents)اور عمود(Normal) کے بارے میں بھی پڑھ چکے ہیں۔ یہاں آپ کسی منحنی کے ایسمپٹوٹ کے بارے میں جانکاری حاصل کریں گے۔

4.1 مقاصد(Objectives)

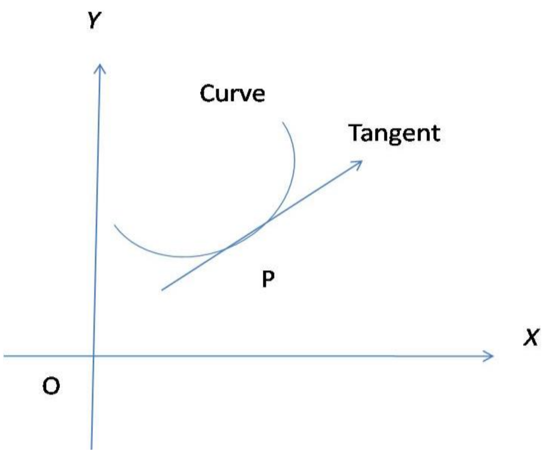
اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ

- کسی منحنی کی کانکیوٹی(Concavity)اورانفلیکشن نقاط(Points of Inflexion)حاصل کر سکیں۔
- کسی منحنی کے ایسمپٹوٹس حاصل کر سکیں۔

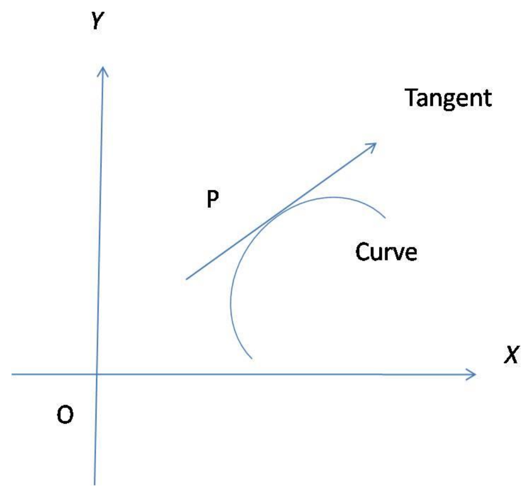
4.2 کانکیوٹی اورانفلیکشن نقاط(Concavity and Inflexion Points)

ہم درج ذیل منحنیوں کے مشاہدے کے ساتھ شروع کرتے ہیں۔

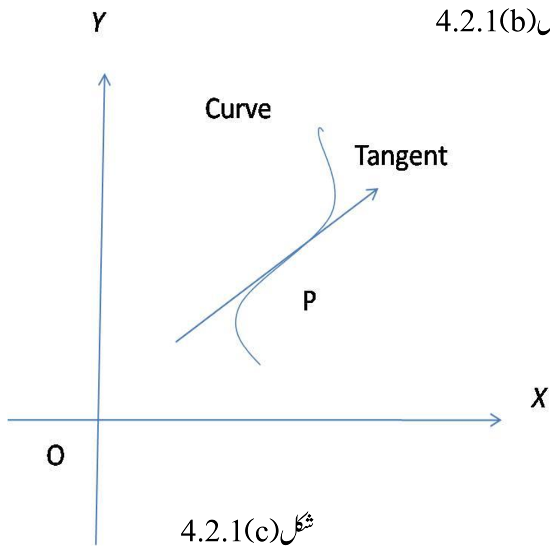
1. شکل(4.2.1(a میں ہم دیکھتے ہیں کہ منحنی نقطہ Pپر مماس کو پار نہیں کرتی ہے اور منحنی کا ایک حصہ نقطہ P پر مماس کے اوپر رہتا ہے۔ یہاں ہم کہتے ہیں کہ منحنی نقطہ Pپراوپر کی طرف کانکیو(Concave) ہے یانیچے کی طرف کانویکس(Convex) ہے۔
2. دوسری شکل(4.2.1(b میں ہم دیکھتے ہیں کہ منحنی کا ایک حصہ نقطہ P پر مماس کے نیچے رہتا ہے۔ یہاں ہم کہتے ہیں کہ منحنی نقطہ Pپر نیچے کی طرف کانکیو(Concave) ہے یااوپر کی طرف کانویکس(Convex) ہے۔
3. شکل(4.2.3(c میں منحنی نقطہ Pپر کانکیوٹی(Concavity) نیچے کی طرف سے اوپر کی طرف کانکیوٹی تک بدلتی ہے یا پھر اس کے برا کس۔تب اس نقطہ Pکوانفلیکشن نقطہ کہتے ہیں۔



شکل(a)4.2.1



شکل(b)4.2.1



شکل(c)4.2.1

کسی نقطہ پر کانکیوٹی اور انفلیکشن نقاط کے لیے معیارات(Criterion)

مان لیتے ہیں کہ منحنی $y = f(x)$ پر ایک نقطہ P ہے۔اور مان لو کہ نقطہ P پر ایک مماس ہے جو y محور کے متوازی نہیں ہے۔

1. منحنی $y = f(x)$ وقفہ $[a, b]$ میں اوپر کی طرف کا نکیو ہوگا اگر $f''(x) > 0\ \forall x \in [a, b]$
2. منحنی $y = f(x)$ وقفہ $[a, b]$ میں نیچے کی طرف کا نکیو ہوگا اگر $f''(x) < 0\ \forall x \in [a, b]$
3. منحنی کا نقطہ P پر انفلیکشن ہوگا اگر $f''(x)$ کا نشان بدلتا ہے، جیسے ہی x اس نقطہ کو پار کرتا ہے۔

مثال 1- x کی اقدار کی حد تلاش کریں جس کے لیے منحنی $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 5x + 7$ اوپر کی طرف یا نیچے کی طرف کا نکیو ہے۔انفلیکشن نقاط بھی حاصل کریں۔

حل- دیا گیا ہے کہ

$$y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 5x + 7$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 4x^3 - 18x^2 + 24x + 5$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 36x + 24 = 12(x-1)(x-2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0 \ \forall x \epsilon]-\infty, 1] \rightarrow$$ اوپر کی طرف کانکیو

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0 \ \forall x \epsilon]1, 2[\rightarrow$$ نیچے کی طرف کانکیو

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0 \ \forall x \epsilon]2, +\infty[\rightarrow$$ اوپر کی طرف کانکیو

انفلیکشن نقاط کے لیے

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Rightarrow x = 1 ، x = 2$$

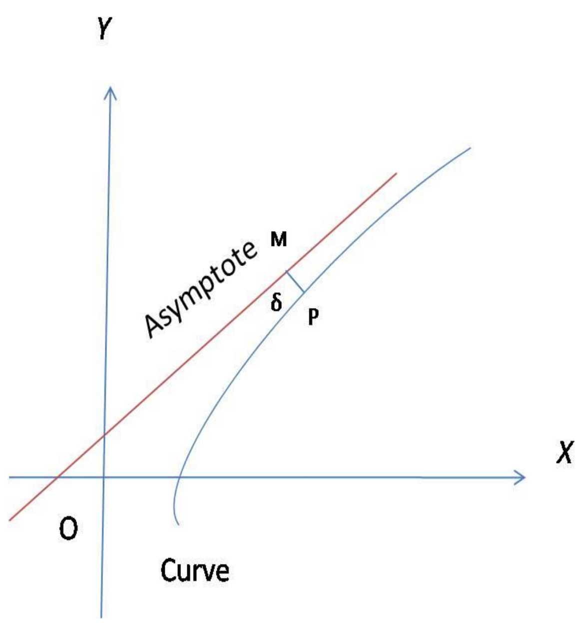
چوں کہ $x = 1$ ، $x = 2$ کے لیے $\frac{d^2y}{dx^2}$ کا نشان بدلتا ہے، اس لیے انفلیکشن نقاط $(1, 19)$ اور $(2, 33)$ ہیں۔

4.3 ایسمپٹوٹس (Asymptotes)

4.3.1 تعریف اور ایسمپٹوٹ کو حاصل کرنا (Definition and Determining Asymptotes)

تعریف: کوئی خط کسی منحنی کے لیے ایسمپٹوٹ کہلاتا ہے اگر، کوئی نقطہ P منحنی خطوط کے ساتھ ساتھ لا محدودیت (Infinity) کی طرف منتقل ہوتا ہے، نقطہ P کی خط منحنی سے عمودی دوری (مان لیجیے کہ δ) صفر کے قریب ہوتی جاتی ہے۔

شکل 4.4.1 سے ہم دیکھتے ہیں کہ جیسے منحنی پر نقطہ $P(x, y)$ لا محدودیت کے قریب ہوتا ہے نقطہ P کی خط منحنی سے عمودی دوری صفر کے قریب ہوتی جاتی ہے۔



شکل: 4.3.1

ایسمپٹوٹ حاصل کرنا: مان لو کہ ایک خط جو x محور کے متوازی نہیں ہے، وہ ہے

$$y = mx + c \qquad ...(1)$$

اب ہم m اور c کو اس طرح حاصل کریں گے کہ خط (1) ایک ایسمپٹوٹ ہو سکے۔ شکل 4.4.1 میں $\delta = PM$ خط (1) سے نقطہ $P(x, y)$ کا عمودی فاصلہ ہے۔ اس لیے

$$\delta = \frac{y - mx - c}{\sqrt{1 + m^2}}, \mathrm{m} \neq 0$$

جیسے جیسے نقطہ P منحنی پر لا محدودیت کی طرف چلتا ہے مطلب یہ کہ جیسے $x \to \infty$، $\delta \to 0$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}(y - mx - c) = 0$$

یا

$$c = \lim_{x\to\infty}(y - mx)$$

اس کے ساتھ ہی

$$\frac{y}{x} - m = (y - mx)\cdot\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{y}{x} - m\right) = \lim_{x\to\infty}(y - mx)\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{c}\cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right) = m$$

اس لیے

$$m = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad c = \lim_{x\to\infty}(y - mx)$$

اس طرح ہم ان ایسمپٹوٹس کو جو y محور کے متوازی نہیں ہیں، کو درج ذیل طریقہ سے حاصل کرتے ہیں۔

مرحلہ 1- $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right)$ کو حاصل کریں۔ مان لو کہ $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right) = m$

مرحلہ 2- $\lim_{x\to\infty}(y - mx)$ کو حاصل کریں۔ مان لو کہ $\lim_{x\to\infty}(y - mx) = c$

تب $y = mx + c$ ایک ایسمپٹوٹ ہو گا۔

مثال 2- $x^3 - y^3 = 3xy$ کے ایسمپٹوٹس حاصل کریں۔

حل- دیے گئے منحنی کی مساوات ہے

$$x^3 - y^3 - 3xy = 0 \qquad ...(1)$$

مان لو کہ $y = mx + c$ ایک ایسمپٹوٹ کی مساوات ہے۔ مساوات (1) کو x^3 سے تقسیم دینے پر

$$1 - \frac{y^3}{x^3} - \frac{3y}{x^2} = 0$$

یا

$$1 - \left(\frac{y}{x}\right)^3 - \frac{3}{x}\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \qquad ...(2)$$

اب ایسمپٹوٹ حاصل کرنے کے لیے ہم لمٹ لیتے ہیں، اور

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right) = m$$
$$\lim_{x\to\infty}(y - mx) = c$$

اس لیے مساوات (2) سے

$$1 - \lim_{x\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right)^3 - 3\lim_{x\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$
$$\Rightarrow \quad 1 - m^3 = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = 1$$

$1 - m^3$ کے دوسرے روٹس ملتف اعداد (Complex Numbers) ہیں۔

ہم مساوات (1) کو اس طرح سے لکھ سکتے ہیں

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) = 3xy$$
$$(y-x) = \frac{-3xy}{x^2+xy+y^2}$$

اب $m = 1$ کے لیے

$$c = \lim_{x\to\infty}(y-x) = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{-3xy}{x^2+xy+y^2}\right]$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{-3}{\frac{x^2}{xy}+\frac{xy}{xy}+\frac{y^2}{xy}}\right]$$
$$= \frac{-3}{1+1+1}$$
$$= -1$$

اس لیے دی گئی منحنی کے لیے ایسمپٹوٹ $y = x - 1$ ہے۔

4.3.2 عام الجبرائی منحنی کے ایسمپٹوٹس (Asymptotes of General Algebraic Curve)

مان لیجیے کہ درجہ (Degree) n کی منحنی کی مساوات ہے

$$\{a_0y^n + a_1y^{n-1}x + a_2y^{n-2}x^2 + \cdots + a_nx^n\} + \{b_1y^{n-1} + b_2y^{n-2}x + b_3y^{n-3}x^2 + \cdots + b_nx^{n-1}\}$$
$$+\{c_2y^{n-2} + c_3y^{n-3}x + c_4y^{n-4}x^2 + \cdots + c_nx^{n-2}\} + \cdots = 0 \quad \ldots(1)$$

یا

$$x^n\left\{a_0\left(\frac{y}{x}\right)^n + a_1\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1} + a_2\left(\frac{y}{x}\right)^{n-2} + \cdots + a_n\right\}$$
$$+ x^{n-1}\left\{b_1\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1} + b_2\left(\frac{y}{x}\right)^{n-2} + b_3\left(\frac{y}{x}\right)^{n-3} + \cdots + b_n\right\}$$
$$+x^{n-2}\left\{c_2\left(\frac{y}{x}\right)^{n-2} + c_3\left(\frac{y}{x}\right)^{n-3} + c_4\left(\frac{y}{x}\right)^{n-4} + \cdots + c_n\right\} + \cdots = 0$$

ہم اس کو اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$x^n\varphi_n\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-1}\varphi_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-2}\varphi_{n-2}\left(\frac{y}{x}\right) + \cdots + \varphi_0\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \quad \ldots(2)$$

جہاں φ_n، φ_{n-1}، φ_{n-2}، ...، کثیر رکنیاں (Polynomials) $\left(\frac{y}{x}\right)$ میں ہیں، ان کے درجے $n, n-1, n-2, \cdots$

ہیں۔

مساوات(2) کو x^n سے تقسیم دینے پر ہمیں حاصل ہے

$$\varphi_n\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x}\varphi_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x^2}\varphi_{n-2}\left(\frac{y}{x}\right)+\cdots+\frac{1}{x^n}\varphi_0\left(\frac{y}{x}\right)=0 \qquad ...(3)$$

لمٹ لینے پر ہمیں ملتا ہے

$$\varphi_n(m)=0 \qquad ...(4)$$

جہاں

$$m=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right)$$

مان لیجیے کہ مساوات(4) کا ایک روٹ (Root) m_1 اس طرح سے ہے کہ $\varphi_n(m_1)=0$

ہم لکھتے ہیں

$$y-m_1x=p_1\ i.e.\frac{y}{x}=m_1+\frac{p_1}{x}$$

$\frac{y}{x}$ کی قیمت مساوات(2) میں رکھنے پر ہمیں ملتا ہے

$$x^n\varphi_n\left(m_1+\frac{p_1}{x}\right)+x^{n-1}\varphi_{n-1}\left(m_1+\frac{p_1}{x}\right)+x^{n-2}\varphi_{n-2}\left(m_1+\frac{p_1}{x}\right)+\cdots+x\varphi_1\left(m_1+\frac{p_1}{x}\right)+\varphi_0\left(m_1+\frac{p_1}{x}\right)=0$$

ٹیلر کے قضیہ (Taylor's Theorem) کا استعمال کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$x^n\left[\varphi_n(m_1)+\frac{p_1}{x}\varphi_n'(m_1)+\frac{{p_1}^2}{x^2}\varphi_n''(m_1)+\cdots\right]+x^{n-1}\left[\varphi_{n-1}(m_1)+\frac{p_1}{x}\varphi_{n-1}'(m_1)+\frac{{p_1}^2}{x^2}\varphi_{n-1}''(m_1)+\cdots\right]+x^{n-2}\left[\varphi_{n-2}(m_1)+\frac{p_1}{x}\varphi_{n-2}'(m_1)+\frac{{p_1}^2}{x^2}\varphi_{n-2}''(m_1)+\cdots\right]+\cdots=0$$

ان ارکان کو x کی اترتی قوتوں میں ترتیب سے لکھنے پر ہمیں ملتا ہے

$$x^n\varphi_n(m_1)+x^{n-1}[p_1\varphi_n'(m_1)+\varphi_{n-1}(m_1)]+x^{n-2}\left[\frac{{p_1}^2}{2}\varphi_n''(m_1)+p_1\varphi_{n-1}'(m_1)+\varphi_{n-2}(m_1)\right]+\cdots=0$$

$\varphi_n(m_1)=0$ رکھنے پر اور پھر x^{n-1} سے تقسیم دینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$[p_1\varphi_n'(m_1)+\varphi_{n-1}(m_1)]+\frac{1}{x}\left[\frac{{p_1}^2}{2}\varphi_n''(m_1)+p_1\varphi_{n-1}'(m_1)+\varphi_{n-2}(m_1)\right]+\cdots=0 \qquad ...(5)$$

مان لیجیے کہ $x\to\infty$، ہم لکھتے ہیں $\lim_{x\to\infty}p_1=c_1$ اس لیے

$$c_1\varphi_n'(m_1)+\varphi_{n-1}(m_1)=0 \qquad ...(6)$$

یا

$$c_1=-\frac{\varphi_{n-1}(m_1)}{\varphi_n'(m_1)},\ \varphi_n'(m_1)\neq 0$$

اس لیے

$$y = m_1 x - \frac{\varphi_{n-1}(m_1)}{\varphi_n{}'(m_1)}$$

ڈھال m_1 کے متناظر ایسمپٹوٹ ہے، جب کہ $\varphi_n{}'(m_1) \neq 0$

اسی طرح

$$y = m_2 x - \frac{\varphi_{n-1}(m_2)}{\varphi_n{}'(m_2)};\ y = m_3 x - \frac{\varphi_{n-1}(m_3)}{\varphi_n{}'(m_3)};\cdots \qquad ...(7)$$

ڈھال m_2، m_3، ...، جو کہ $\varphi_n(m) = 0$ کے روٹس ہیں، کے متناظر ایسمپٹوٹس ہیں، جب کہ $\varphi_n{}'(m_2) \neq 0$، $\varphi_n{}'(m_3) \neq 0$، ...

استثنائی صورت(Exceptional Case): مان لیجیے کہ $\varphi_n{}'(m_1) = 0$

اگر $\varphi_n{}'(m_1) = 0$ لیکن $\varphi_{n-1}(m_1) \neq 0$، تب مساوات(6) سے c_1 کی کوئی قیمت حاصل نہیں ہوتی اور اس لیے ڈھال m_1 کے متناظر کوئی ایسمپٹوٹ نہیں ہو گا۔

اب مان لو کہ

$$\varphi_n{}'(m_1) = 0 = \varphi_{n-1}(m_1)$$

اس صورت(Case) میں مساوات(6) ایک ضابطہ(Identity) بن جائیگی اور ہمیں مساوات(5) کے بارے میں پھر سے سوچنا ہو گا، جو کہ اب درج ذیل ہے

$$\left[\frac{{p_1}^2}{2}\varphi_n{}''(m_1) + p_1\varphi_{n-1}{}'(m_1) + \varphi_{n-2}(m_1)\right] + [\cdots] + \cdots = 0$$

لمٹ لینے پر جب کہ $x \to \infty$، ہم دیکھتے ہیں کہ c_1 درج ذیل مساوات کا ایک روٹ ہے

$$\frac{{c_1}^2}{2}\varphi_n{}''(m_1) + c_1\varphi_{n-1}{}'(m_1) + \varphi_{n-2}(m_1) = 0 \qquad ...(8)$$

جس سے c_1 کی دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں، مان لیجیے کہ وہ $c_1{}'$، $c_1{}''$ جب کہ

$$\varphi_n{}''(m_1) \neq 0$$

اس طرح

$$y = m_1 x + c_1{}';\ y = m_1 x + c_1{}''$$

ڈھال m_1 کے متناظر دو ایسمپٹوٹس ہیں، جو کہ صاف طور پر متوازی دکھ رہے ہیں۔ یہ متوازی ایسمپٹوٹس کا کیس ہے۔

مثال3- $x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + xy - y^2 - 1 = 0$ کے ایسمپٹوٹس حاصل کریں۔

حل- دی گئی منحنی کی مساوات ہے

$$x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + xy - y^2 - 1 = 0 \qquad ...(1)$$

مساوات(1) میں $y = mx + c$ رکھنے پر، ہمیں ملتا ہے

$$x^3 + 2x^2(mx+c) - x(mx+c)^2 - 2(mx+c)^3 + x(mx+c) - (mx+c)^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^3(1 + 2m - m^2 - 2m^3) + x^2(2c - 2mc - 6m^2c + m - m^2) + \cdots = 0$$

اس لیے m اور c اس طرح حاصل کیے جاتے ہیں

$$1 + 2m - m^2 - 2m^3 = 0 \qquad ...(2)$$

اور
$$2c - 2mc - 6m^2c + m - m^2 = 0 \qquad ...(3)$$

مساوات(2)سے

$$(1 - m^2) + 2m(1 - m^2) = 0$$

یا
$$(1 - m^2)(1 + 2m) = 0$$

یا
$$m = 1, -1, -\tfrac{1}{2}$$

مساوات(3)سے

$$2c(1 - m - 3m^2) = m^2 - m$$

یا
$$c = \tfrac{m^2 - m}{2(1 - m - 3m^2)}$$

$m = 1$کے لیے

$$c = \frac{1^2 - 1}{2(1 - 1 - 3)} = 0$$

$m = -1$کے لیے

$$c = \frac{(-1)^2 + 1}{2(1 + 1 - 3)} = -1$$

$m = -\tfrac{1}{2}$کے لیے

$$c = \frac{\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{2}}{2\left(1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{4}\right)} = \frac{\tfrac{3}{4}}{\tfrac{3}{2}} = \frac{1}{2}$$

mاور cکی یہ قیمتیں $y = mx + c$میں رکھنے پر، ہمیں مندرجہ ذیل ایسمپٹوٹس ملتے ہیں

$$y = x,$$
$$y = -x - 1$$

اور
$$y = -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}$$

یا
$$2y + x = 1$$

4.3.3 ایسمپٹوٹس حاصل کرنے کا چھوٹا طریقہ (Shorter Method for Determining Asymptotes)

nویں درجے کی منحنی کی مساوات کی اعظم ترین (Highest) درجہ(Degree) ارکان(Terms)میں $x = 1$اور $y = m$رکھ کر $\varphi_n(m)$ حاصل کیا جا سکتا ہے۔اسی طرح $(n - 1)$ویں درجہ ارکان میں $x = 1$اور $y = m$رکھ کر $\varphi_{n-1}(m)$ کو بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔اوراسی طرح ہم حاصل کر سکتے ہیں۔

اب $\varphi_n(m) = 0$ کو mکے لیے حل کرکے ہم ایسمپٹوٹس کے ڈھال کو جان سکتے ہیں۔ mکی قیمتوں کے متناظر cکی قیمت درج ذیل فارمولہ سے حاصل کی جا سکتی ہے

m کی الگ الگ قیمتوں کے لیے، $c = -\frac{\varphi_{n-1}(m)}{\varphi_n'(m)}$

اگر دو ایسمپٹوٹس متوازی ہیں تب $\varphi_n(m)$ کے دو مساوی روٹس ہونگے (مان لیجیے کہ $m_1 = m_2$)، تب c کی قیمت درج ذیل فارمولہ سے حاصل کی جاسکتی ہے

$$\frac{c^2}{2}\varphi_n''(m) + c\varphi'_{n-1}(m) + \varphi_{n-2}(m) = 0$$

مثال 4- $2x^3 - x^2y - 2xy^2 + y^3 - 4x^2 + 8xy - 4x + 1 = 0$ کے ایسمپٹوٹس حاصل کریں۔

حل- دی گئی منحنی کی مساوات ہے

$$2x^3 - x^2y - 2xy^2 + y^3 - 4x^2 + 8xy - 4x + 1 = 0 \qquad ...(1)$$

منحنی کی مساوات کی تیسرے درجے (Degree) اور دوسرے درجے کے ارکان (Terms) میں الگ الگ $x = 1$ اور $y = m$ رکھنے پر، ہمیں ملتا ہے

$$\varphi_3(m) = 2 - m - 2m^2 + m^3$$
$$\varphi_2(m) = -4 + 8m$$

اب ایسمپٹوٹس کے ڈھال درجہ ذیل سے حاصل کرتے ہیں

$$\varphi_3(m) = 0$$

$\Rightarrow$
$$2 - m - 2m^2 + m^3 = 0$$

یا
$$m^2(m-2) - 1(m-2) = 0$$

یا
$$(m-2)(m^2-1) = 0$$

یا
$$(m-2)(m-1)(m+1) = 0$$

اس لیے
$$m = -1, 1, 2$$

اب c کو اس طرح سے حاصل کیا جاسکتا ہے

$$c = -\frac{\varphi_2(m)}{\varphi'_3(m)} = -\left(\frac{-4+8m}{3m^2-4m-1}\right)$$

$m = -1$ کے لیے

$$c = -\left(\frac{-4+8(-1)}{3(-1)^2-4(-1)-1}\right) = 2$$

$m = 1$ کے لیے

$$c = -\left(\frac{-4+8(1)}{3(1)^2-4(1)-1}\right) = 2$$

$m = 2$ کے لیے

$$c = -\left(\frac{-4+8(2)}{3(2)^2-4(2)-1}\right) = -4$$

m اور c کی یہ قیمتیں $y = mx + c$ میں درج کرنے پر، ہمیں مندرجہ ذیل ایسمپٹوٹس ملتے ہیں

$$y = -x + 2$$
$$y = x + 2$$
$$y = 2x - 4$$

مثال 5- $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 - 3x - y + 1 = 0$ کے ایسمپٹوٹس حاصل کریں۔

حل- دی گئی منحنی کی مساوات ہے

$$x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 - 3x - y + 1 = 0 \qquad ...(1)$$

منحنی کی مساوات کی تیسرے درجہ(Degree)اور پہلے درجہ کے ارکان(Terms) میں الگ الگ $x = 1$ اور $y = m$ لے نے پر، ہمیں ملتا ہے

$$\varphi_3(m) = 1 + m - m^2 - m^3$$
$$\varphi_2(m) = 0$$
$$\varphi_1(m) = -3 - m$$

اب ایسمپٹوٹس کے ڈھال درجہ ذیل سے حاصل کرتے ہیں

$$\varphi_3(m) = 0$$
$$\Rightarrow \quad 1 + m - m^2 - m^3 = 0$$

یا
$$m^2(m + 1) - 1(m + 1) = 0$$

یا
$$(m + 1)(m^2 - 1) = 0$$

یا
$$(m - 1)(m + 1)^2 = 0$$

اس لیے
$$m = 1, -1, -1$$

اب c کو $m = 1$ کے لیے اس طرح سے حاصل کیا جاسکتا ہے

$$c = -\frac{\varphi_2(m)}{\varphi'_3(m)} = 0$$

تکراری روٹس $m = -1$ کے لیے c کو اس طرح سے حاصل کیا جاسکتا ہے

$$\frac{c^2}{2}\varphi_3''(m) + c\varphi'_2(m) + \varphi_1(m) = 0$$
$$\frac{c^2}{2}(-2 - 6m) + c(0) + (-3 - m) = 0$$

$m = -1$ کے لیے

$$\frac{c^2}{2}(-2 + 6) + (-3 + 1) = 0$$

یا
$$2c^2 - 2 = 0$$

یا
$$c^2 - 1 = 0$$

یا
$$(c - 1)(c + 1) = 0$$

یا $c = \pm 1$

m اور c کی یہ قیمتیں $y = mx + c$ میں درج کرنے پر، ہمیں مندرجہ ذیل ایسمپٹوٹس ملتے ہیں

$$y = x$$
$$y = -x + 1$$
$$y = -x - 1$$

مثال 6- $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 + 2x^2 - 4y^2 + 2xy + x + y + 1 = 0$ کے ایسمپٹوٹس حاصل کریں۔

حل- دی گئی منحنی کی مساوات ہے

$$x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 + 2x^2 - 4y^2 + 2xy + x + y + 1 = 0 \quad ...(1)$$

منحنی کی مساوات کی تیسرے درجہ (Degree) اور دوسرے درجہ کے ارکان (Terms) میں الگ الگ $x = 1$ اور $y = m$ درج کرنے پر، ہمیں ملتا ہے

$$\varphi_3(m) = 1 - m - m^2 + m^3$$
$$= 1(1 - m) - m^2(1 - m)$$
$$= (1 - m)(1 - m^2)$$
$$= (1 - m)^2(1 + m)$$
$$\varphi_2(m) = 2 + 2m - 4m^2$$

اب ایسمپٹوٹس کے ڈھال درجہ ذیل سے حاصل کرتے ہیں

$$\varphi_3(m) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (1 - m)^2(1 + m) = 0$$

اس لیے $m = 1, 1, -1$

اب c کو اس طرح سے حاصل کیا جا سکتا ہے

$$c = -\frac{\varphi_2(m)}{\varphi'_3(m)} = -\frac{2 + 2m - 4m^2}{3m^2 - 2m - 1}$$

$m = -1$ کے لیے c کو اس طرح سے حاصل کیا جاتا ہے

$$c = -\frac{2 + 2(-1) - 4(-1)^2}{3(-1)^2 - 2(-1) - 1} = 1$$

m اور c کی یہ قیمت $y = mx + c$ میں درج کرنے پر، ہمیں مندرجہ ذیل ایسمپٹوٹ ملتا ہے

$$y = -x + 1$$

تکراری روٹس $m = 1$ کے لیے c کو اس طرح سے حاصل کیا جا سکتا ہے

$$\frac{c^2}{2}\varphi_3''(m) + c\varphi'_2(m) + \varphi_1(m) = 0$$
$$\frac{c^2}{2}(-2 + 6m) + c(2 - 8m) + 1(1 + m) = 0$$

$m = 1$ درج کرنے پر

$$\frac{c^2}{2}(-2 + 6) + c(2 - 8) + (1 + 1) = 0$$

یا $2c^2 - 6c + 2 = 0$

یا $c^2 - 3c + 1 = 0$

یا $c = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

mاور cکی یہ قیمتیں $y = mx + c$ میں درج کرنے پر، ہمیں مندرجہ ذیل دو متوازی ایسمپٹوٹس ملتے ہیں

$$y = x + \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$
$$y = x + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

مثال 7- $y^3 - 6xy^2 + 11x^2y - 6x^3 + y + x = 0$ کے ایسمپٹوٹس حاصل کریں۔

حل- دی گئی منحنی کی مساوات ہے

$$y^3 - 6xy^2 + 11x^2y - 6x^3 + y + x = 0 \quad ...(1)$$

منحنی کی مساوات کی تیسرے درجہ (Degree) اور پہلے درجہ کے ارکان (Terms) میں الگ الگ $x = 1$ اور $y = m$ درج کرنے پر، ہمیں ملتا ہے۔

$$\varphi_3(m) = m^3 - 6m^2 + 11m - 6$$
$$\varphi_2(m) = 0$$
$$\varphi_1(m) = m + 1$$

اب ایسمپٹوٹس کے ڈھال درجہ ذیل سے حاصل کرتے ہیں

$$\varphi_3(m) = 0$$

$\Rightarrow$ $$m^3 - 6m^2 + 11m - 6 = 0$$

یا $(m-1)(m^2 - 5m + 6) = 0$

یا $(m-1)(m-2)(m-3) = 0$

اس لیے $m = 1, 2, 3$

اب c کو اس طرح سے حاصل کیا جا سکتا ہے

$$c = -\frac{\varphi_2(m)}{\varphi'_3(m)} = 0$$

اس لیے روٹس $m = 1, 2, 3$ کے لیے $c = 0$

mاور cکی یہ قیمتیں $y = mx + c$ میں درج کرنے پر، ہمیں مندرجہ ذیل ایسمپٹوٹس ملتے ہیں

$$y = x$$
$$y = 2x$$
$$y = 3x$$

مثال 8- $(x - 2y)^2(x - y) - 4y(x - 2y) - (8x + 7y) = 0$ کے ایسمپٹوٹس حاصل کریں۔

حل- دی گئی منحنی کی مساوات ہے

$$(x-2y)^2(x-y)-4y(x-2y)-(8x+7y)=0 \qquad ...(1)$$

منحنی کی مساوات کی تیسرے درجہ(Degree)اور پہلے درجہ کے ارکان(Terms) میں الگ الگ $x=1$ اور $y=m$ درج کرنے پر، ہمیں ملتا ہے۔

$$\varphi_3(m)=(1-2m)^2(1-m)$$
$$\varphi_2(m)=-4m(1-2m)$$
$$\varphi_1(m)=-(8+7m)$$

اب ایسمپٹوٹس کے ڈھال درجہ ذیل سے حاصل کرتے ہیں

$$\varphi_3(m)=0$$

$\Rightarrow$
$$(1-2m)^2(1-m)=0$$

اس لیے
$$m=\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1$$

اب c کو اس طرح سے حاصل کیا جاسکتا ہے

$$c=-\frac{\varphi_2(m)}{\varphi'_3(m)}=\frac{-4m(1-2m)}{(1-2m)(5-6m)}$$

اس لیے $m=1$ کے لیے

$$c=\frac{-4(1-2)}{(1-2)(5-6)}=4$$

m اور c کی یہ قیمت $y=mx+c$ میں درج کرنے پر، ہمیں مندرجہ ذیل ایسمپٹوٹ ملتا ہے۔

$$y=x+4$$

تکراری روٹس $m=\frac{1}{2}$ کے لیے c کو اس طرح سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$\frac{c^2}{2}\varphi_3''(m)+c\varphi'_2(m)+\varphi_1(m)=0$$
$$\frac{c^2}{2}(16-24m)+c(-4+16m)+(-8-7m)=0$$

$m=\frac{1}{2}$ رکھنے پر

$$\frac{c^2}{2}\left(16-24\times\frac{1}{2}\right)+c\left(-4+16\times\frac{1}{2}\right)+\left(-8-7\times\frac{1}{2}\right)=0$$

یا
$$\tfrac{c^2}{2}(16-12)+c(-4+8)-\left(8+\tfrac{7}{2}\right)=0$$

یا
$$2c^2+4c-23=0$$

یا
$$c=\tfrac{-8\pm\sqrt{64+368}}{8}=1\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{27}=-1\pm\tfrac{3\sqrt{3}}{2}$$

m اور c کی یہ قیمتیں $y=mx+c$ میں درج کرنے پر، ہمیں مندرجہ ذیل دو متوازی ایسمپٹوٹس ملتے ہیں۔

$$y=\frac{1}{2}x-1\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

یا
$$2y=x-2\pm3\sqrt{3}$$

4.3.4 محوروں کے متوازی ایسمپٹوٹس (Asymptotes Parallel to Axes)

x محور کے متوازی ایسمپٹوٹس جن کے لیے $m = 0$ ہو عام طریقہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے لیکن، y محور کے متوازی ایسمپٹوٹس جن کے لیے $m \to \infty$ ہو، اوپر بیان کیے گئے طریقے سے حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔

y محور کے متوازی ایسمپٹوٹس (یا انتصابی ایسمپٹوٹس): مان لو کہ دی گئی منحنی کی مساوات درجہ ذیل شکل میں ہے

$$y^n\varphi(x) + y^{n-1}\varphi_1(x) + y^{n-2}\varphi_2(x) + \cdots = 0 \qquad ...(1)$$

جہاں $\varphi(x)$، $\varphi_1(x)$، $\varphi_2(x)$، $\cdots$ x میں کثیر رکنی ہیں۔

مساوات (1) کو y^n سے تقسیم کرنے پر حاصل ہے

$$\varphi(x) + \frac{1}{y}\varphi_1(x) + \frac{1}{y^2}\varphi_2(x) + \cdots = 0 \qquad ...(2)$$

$y \to \infty$ لینے پر ہمیں ملتا ہے

$$\varphi(x) = 0$$

یہاں، ہم دیکھتے ہیں کہ $\varphi(x)$ اعظم ترین قوت والی رکن y^n کا ضریب (Coefficient) ہے۔ اگر $\varphi(x)$ کے روٹس $x = a_1$، $x = a_2$، $\cdots$ ہوں، تب y محور کے متوازی ایسمپٹوٹس ہوں گے۔

$$x = a_1, x = a_2 \cdots$$

اس لیے قاعدہ کے مطابق، دی گئی منحنی کی مساوات میں اعظم ترین قوت والی رکن y^n کے ضریب میں حقیقی قطی جز ضربی (Real Linear Factor) کو صفر کے برابر رکھ کر y محور کے متوازی ایسمپٹوٹس کو حاصل کر سکتے ہیں۔

x محور کے متوازی ایسمپٹوٹس: جیسا کہ ہم نے y محور کے متوازی ایسمپٹوٹس کو حاصل کرنے کے لیے کیا، دی گئی منحنی کی مساوات میں اعظم ترین قوت والی رکن x^n کے ضریب میں حقیقی قطی جضو ضربی (Real Linear Factor) کو صفر کے برابر رکھ کر x محور کے متوازی ایسمپٹوٹس کو حاصل کر سکتے ہیں۔

مثال 9- مساوات $x^2y^2 - a^2(x^2 + y^2) - a^3(x + y) + a^4 = 0$ کے لیے کسی بھی محور کے متوازی ایسمپٹوٹس کی مساوات حاصل کریں۔

حل- دی گئی مساوات ہے

$$x^2y^2 - a^2(x^2 + y^2) - a^3(x + y) + a^4 = 0$$

(1) x محور کے متوازی ایسمپٹوٹس:

دی گئی مساوات کو ہم اس طرح سے لکھ سکتے ہیں

$$x^2y^2 - a^2x^2 - a^2y^2 - a^3(x + y) + a^4 = 0$$

یا

$$x^2(y^2 - a^2) - a^2y^2 - a^3(x + y) + a^4 = 0$$

اعظم ترین قوت والے رکن x^2 کے ضریب کو صفر کے برابر رکھنے پر ہمیں ملتا ہے

$$y^2 - a^2 = 0$$

$\Rightarrow \qquad y = \pm a$

جو کہ x محور کے متوازی ایسمپٹوٹس ہیں۔

(2)y محور کے متوازی ایسمپٹوٹس:

دی گئی مساوات کو ہم اس طرح سے لکھ سکتے ہیں

$$y^2(x^2 - a^2) - a^2x^2 - a^3(x + y) + a^4 = 0$$

اعظم ترین قوت والے رکن y^2 کے ضریب کو صفر کے برابر رکھنے پر ہمیں ملتا ہے

$$x^2 - a^2 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad x = \pm a$$

جو کہ y محور کے متوازی ایسمپٹوٹس ہیں۔

مثال10- مساوات $\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1$ لیے کسی بھی محور کے متوازی ایسمپٹوٹس کی مساوات حاصل کریں۔

حل- دی گئی مساوات ہے

$$\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1 \qquad ...(1)$$

دی گئی مساوات کو ہم اس طرح سے لکھ سکتے ہیں

$$x^2y^2 - a^2y^2 + b^2x^2 = 0$$

$$x^2(y^2 + b^2) - a^2y^2 = 0 \qquad ...(2)$$

(1)x محور کے متوازی ایسمپٹوٹس:

اعظم ترین قوت والے رکن x^2 کے ضریب کو صفر کے برابر رکھنے پر ہمیں ملتا ہے

$$y^2 + b^2 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad y = \pm bi$$

جو کہ خیالی(Imaginary)ایسمپٹوٹس ہیں۔

(2)y محور کے متوازی ایسمپٹوٹس:

دی گئی مساوات کو ہم اس طرح سے لکھ سکتے ہیں

$$y^2(x^2 - a^2) + b^2x^2 = 0$$

اعظم ترین قوت والی رکن y^2 کے ضریب کو صفر کے برابر رکھنے پر ہمیں ملتا ہے

$$x^2 - a^2 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad x = \pm a$$

جو کہ y محور کے متوازی ایسمپٹوٹس ہیں۔

اس لیے دی گئی منحنی کے لیے صرف دو حقیقی ایسمپٹوٹس ہیں جو کہ y محور کے متوازی ہیں۔

مثال11- فولیم(Folium) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ کے ایسمپٹوٹس حاصل کریں۔

حل- دی گئی منحنی کی مساوات ہے

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \qquad ...(1)$$

(1) مختصوں کے محور کے متوازی ایسمپٹوٹس:

چونکہ x اور y کی اعظم ترین قوت کے ضریب مستقل (Constant) ہیں اس لیے دی گئی منحنی کے x اور y محور کے متوازی کوئی ایسمپٹوٹس نہیں ہیں۔

(2) اوبلک (Oblique) ایسمپٹوٹس:

منحنی کی مساوات کی تیسرے درجہ (Degree) اور پہلے درجہ کے ارکان (Terms) میں الگ الگ $x = 1$ اور $y = m$ رکھنے پر، ہمیں ملتا ہے

$$\varphi_3(m) = 1 + m^3$$
$$\varphi_2(m) = -3am$$

اب ایسمپٹوٹس کے ڈھال درج ذیل طریقے سے حاصل کرتے ہیں

$$\varphi_3(m) = 0$$
$$\Rightarrow \quad 1 + m^3 = 0$$

یا

$$(m+1)(m^2 - m + 1) = 0$$

یہاں ہم m کی حقیقی قیمت $m = -1$ لیتے ہیں۔

اب c کو اس طرح سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$c = -\frac{\varphi_2(m)}{\varphi'_3(m)} = -\frac{(-3am)}{3m^2}$$

اس لیے روٹس $m = -1$ کے لیے

$$c = \frac{-3a}{3} = -a$$

m اور c کی یہ قیمتیں $y = mx + c$ میں درج کرنے پر، ہمیں مندرجہ ذیل ایسمپٹوٹس ملتے ہیں

$$y = -x - a$$

یا

$$y + x + a = 0$$

4.4 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے پڑھا:

- کانکیوٹی اور انفلیکشن نقاط حاصل کرنا۔
- ایسمپٹوٹس کی بنیادی جانکاری۔
- جبری منحنی کے لیے ایسمپٹوٹس حاصل کرنا۔
- محوروں کے متوازی ایسمپٹوٹس حاصل کرنا۔

4.5 کلیدی الفاظ (Key Words)

انفلیکشن نقاط، کانکیوٹی، ایسمپٹوٹس، انتصابی ایسمپٹوٹس، اُفقی ایسمپٹوٹس

4.6 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

4.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. ایک بند منحنی کے لیے کتنے ایسمپٹوٹس ہوتے ہیں

(a) کوئی ایسمپٹوٹس نہیں (b) ایک ایسمپٹوٹس (c) لا محدود ایسمپٹوٹس (d) محدود ایسمپٹوٹس

2. n درجہ کی منحنی کے ایسمپٹوٹس کی تعداد ہے

(a) کم سے کم ایک (b) کم سے کم n (c) زیادہ سے زیادہ n (d) زیادہ سے زیادہ ایک

3. محدودی منحنی (Bounded Curve) کے لیے کوئی ایسمپٹوٹس نہیں ہوتا ہے۔ (صحیح/غلط)

4.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

درجہ ذیل منحنیوں کے لیے مختصوں کے محور (Coordinate Axes) کے متوازی ایسمپٹوٹس حاصل کیجیے:

1. $y^2x - a^2(x-a) = 0$
2. $x^2y - 3x^2 - 5xy + 6y + 2 = 0$

4.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

درجہ ذیل منحنیوں کے لیے ایسمپٹوٹس حاصل کیجیے:

1. $x^2(x-y)^2 + a^2(x^2-y^2) = a^2xy$
2. $x^2y + y^2x + xy + y^2 + 3x = 0$
3. $y^3 - x^2y + 2xy^2 - y + 1 = 0$
4. $xy(x+y) = a(x^2-a^2)$

اکائی 5۔ منحنی کی ٹریسنگ

(Curve Tracing)

اکائی کے اجزا

5.0 تمہید

5.1 مقاصد

5.2 کارتیسی مساوات کو ٹریس کرنے کا طریقہ

5.3 $y = f(x)$ شکل کی مساوات

5.4 $y^2 = f(x)$ شکل کی مساوات

5.5 پیرامیٹرک مساوات کو ٹریس کرنے کا طریقہ

5.6 پولر مساوات کو ٹریس کرنا

5.7 اکتسابی نتائج

5.8 کلیدی الفاظ

5.9 نمونہ امتحانی سوالات

5.9.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

5.9.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

5.9.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

5.0 تمہید (Introduction)

اس اکائی میں ہم عمومی کروٹریسنگ کے مسائل کا حل دیں گے۔ یہ دیکھا گیا ہے کہ زیادہ تر مساوات جن کو ہم ٹریس کرنا چاہتے ہیں x، y اور r میں حل کی جاسکتی ہیں۔ کچھ مساوات جو x یا y میں بدلی نہیں جاسکتی ہیں انہیں پولر کی شکل میں بدل کر ٹریس کرتے ہیں۔

5.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- کارتیسی مساوات کو ٹریس کر سکیں۔
- پیرامیٹرک مساوات کو ٹریس کر سکیں۔
- پولر مساوات کو ٹریس کر سکیں۔

5.2 کارتیسی مساوات کو ٹریس کرنے کا طریقہ (Method of Tracing Cartesian Equations)

(i) توازن (Symmetry): معلوم کریں کہ کیا منحنی (Curve) کسی بھی لائن کے ساتھ توازن (Symmetry) رکھتا ہے۔ درجہ ذیل جانکاری کے مطابق عمل درآمد کریں۔

(1) اگر مساوات میں موجود 'y' کی پاور سبھی ٹرمس میں جفت (Even) ہو تب اس کا منحنی x محور (axis) کے ساتھ توازن میں ہوگا۔

(2) اگر مساوات میں موجود 'x' کی پاور سبھی ٹرمس طاق (odd) ہو تو اس کا منحنی y محور کے ساتھ توازن میں ہوگا۔

(3) اگر x اور y کو انٹر چینج (Interchange) کرنے پر مساوات پر کوئی فرق نہیں پڑتا ہے تب اس مساوات کا منحنی $x = y$ کے ساتھ توازن میں ہوگا۔

(4) اگر $y- = x$ اور $x- = y$ دی ہوئی مساوات میں رکھنے پر مساوات پر کوئی فرق نہیں پڑتا ہے تب اس مساوات کا منحنی $x- = y$ کے ساتھ توازن میں ہوگا۔

(5) اگر $x- = x$ اور $y- = y$ رکھنے پر اس مساوات کی کوراپوزٹ کواڈرنٹ (Opposite Quadrant) میں توازن میں ہوگا، اگر مساوات میں کوئی بدلاؤ نہ ہو۔

(ii) مبدا (Origin): اگر منحنی مبدا سے ہو کر گزرتا ہے تو اس پر مماس حاصل کریں۔ اگر مبدا ایک ملٹی پل نقطہ (Multiple Point) ہے تو اس کا نیچر معلوم کریں۔

(iii) مشترکہ نقاط (Common Points): اگر منحنی اور کورڈینیٹ محور کے درمیان مشترکہ نقطہ ہیں تو معلوم کریں۔ اگر اس طرح کے نقطہ موجود ہوں تو ان پر مماس معلوم کریں۔

(iv) ایسمپٹوٹ: ایسمپٹوٹ حاصل کریں اور وہ نقطہ جن میں سے ہو کر ایسمپٹوٹ منحنی سے ملتا ہوا لگتا ہے۔

(v) خط کا حصہ: کسی سطح (Plane) کے اس حصہ کو معلوم کریں جس پر منحنی کا کوئی حصہ نہیں پایا جاتا ہے۔
ایسا حصہ عموماً دی ہوئی مساوات کو ایک متغیر کو دوسرے متغیر کی ٹرمس میں حل رکھنے پر حاصل ہوتے ہیں اور ایک متغیر کی قیمت حاصل کریں جس وجہ سے دوسرا متغیر خیالی (Imaginary) بن جاتا ہے۔

(vi) ٹیجنٹ: $\frac{dy}{dx}$ حاصل کریں اور وہ نقطہ جہاں مماس کورڈینیٹ (مربوط) محور کے متوازی (Parallel) ہوں۔

(vii) میکسمم و منیمم: آخر میں وہ وقفہ (Intervals) حاصل کریں، جہاں y بڑھتا ہوا (Increasing) اور گھٹتا ہوا ہو (Decreasing) اور خاص طور پر x کی وہ قیمت جس کے لیے y ادنا ترین یا اعظم ترین (Minimum or Maximum) ہو، پر منحصر ہوتا ہے۔ یہ تحقیقات $\frac{dy}{dx}$ کے حصول پر اور اس وقفے پر جس میں اس کی قیمت مثبت یا منفی (Positive or Negative) ہوتی ہے۔ اب وہ وقفہ بھی حاصل کریں۔ جس میں منحنی (Curve) کانکیو (Concave) اوپر کی طرف یا نیچے کی طرف ہے اور خاص طور پر اس طرح منحنی کو ٹریس کیا جاتا ہے۔

5.3 $y = f(x)$ کی شکل کی مساوات (Equation of the Form $y = f(x)$)

یہ بات بتائی جاسکتی ہے کہ کثیر رکنی (Polynomial) تفاعل $y = f(x)$ کا کوئی ایسمپٹوٹ نہیں ہوتا ہے۔

مثال 1۔ $y = x^3 - 12x - 16$ کو ٹریس کریں۔

حل۔ مساوات کو دیکھ کر درج ذیل باتیں ظاہر ہوتی ہیں:

(i) توازن: یہ منحنی (Curve) کسی بھی لائن کے ساتھ توازن نہیں رکھتا۔

(ii) مبدا: اس پر مبدا نہیں ہوتا۔

(iii) مشترکہ نقاط: یہ $(-2,0)$، $(4,0)$ اور $(0,-16)$ پر کورڈنیٹ محور کو کاٹتا ہے۔

(iv) مشتق:

$$y = x^3 - 12x - 16$$
$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x-2)(x+2)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

(v) میکسما اور منیما: درجہ ذیل تحقیقات پر غور کریں:

$$\lim_{n\to-\infty} y = -\infty \text{ اور } \lim_{x\to+1} y = +\infty$$

$\frac{dy}{dx} = 0$ رکھنے پر

$$3(x-2)(x+2) = 0$$
$$x = -2, 2$$

اب ہم کہہ سکتے ہیں کہ y' وقفہ $[-\infty, -2]$ میں اور $[2, \infty]$ میں اسٹرکٹلی بڑھتا ہوا (Strictly Increasing) ہے۔ یہ $[-2,2]$ میں اسٹرکٹلی گھٹتا ہوا (Strictly Decreasing) ہے۔

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=2} = 12 > 0$ اور $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=-2} = -12 < 0$

اس لیے یہ $x = -2$ پر اعلاترین اور $x = 2$ پر ادناترین ہوگا

کانویکسٹی اور کانکیوٹی:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0} = 0$$

اور

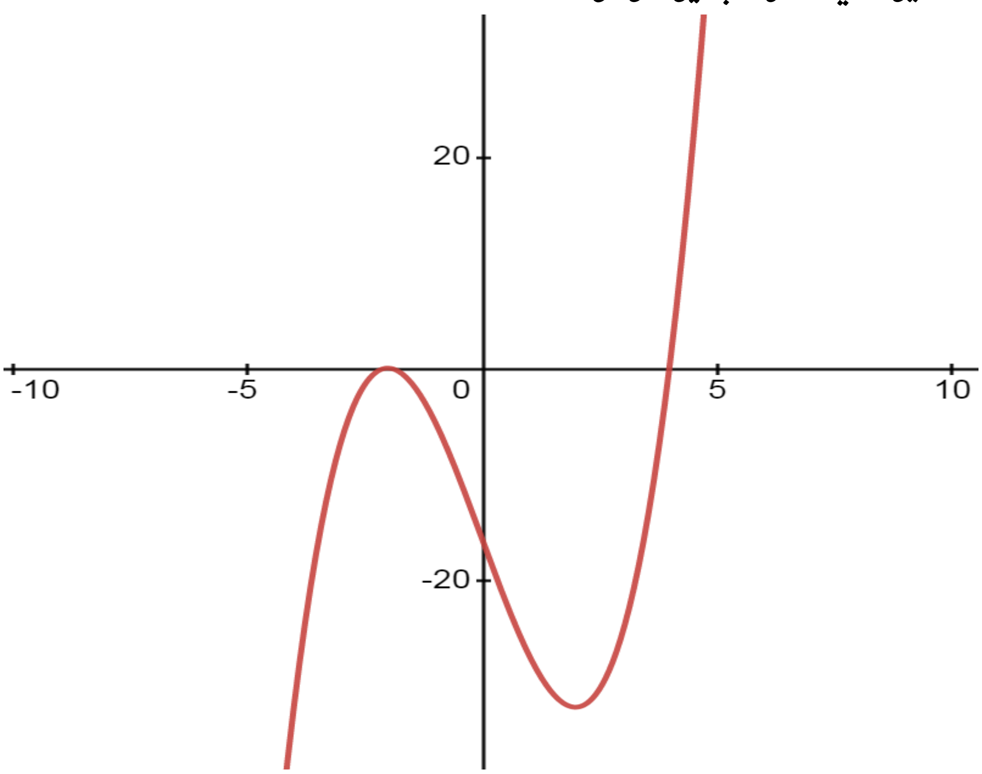
$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x\in(-\infty\,،\,0)} < 0$$

اور

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x\in(0,\infty)} > 0$$

اس لیے یہ وقفہ $]-\infty, 0]$ میں نیچے کی طرف کا نکیو (Concave Downwards) ہے اور وقفہ $[0, \infty[$ میں اوپر کی طرف کا نکیو (Upwards) ہے۔ کیوں کہ $\frac{d^2y}{dx^2}$ اپنا نشان بدلتا ہے جیسے ہی x صفر سے ہو کر گزرتا ہے۔ اس لیے $]0, -16[$ منحنی کا ایک انفلیکشن کا نقطہ ہے۔

اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ دیا ہوا منحنی درجہ ذیل شکل میں ہوگا۔



شکل:5.3.1

مثال2: $y = \frac{8a^3}{x^2+4a^2}$ کو ٹریس کریں۔

حل:

توازن: منحنی y محور کے ساتھ توازن میں ہے۔

مبدا: یہ مبدا سے ہو کر نہیں گزرتا ہے۔

مشترکہ نقاط: یہ y محور کو $(0,2a)$ پر کاٹتا ہے۔اس لیے $y=2a$ نقطہ $(0,2a)$ پر ایک مماس ہے۔

ایسمپٹوٹ: $y=0$ اس منحنی کے لیے ایک ایسمپٹوٹ ہے۔

رجن: x کی سبھی قیمتوں کے لیے y مثبت (Positive) ہو گا۔اس لیے یہ پہلے اور دوسرے کواڈرنٹ میں موجود ہو گا۔

میکسما اور منیما:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-16xa^3}{(x^2+4a^2)^2}$$

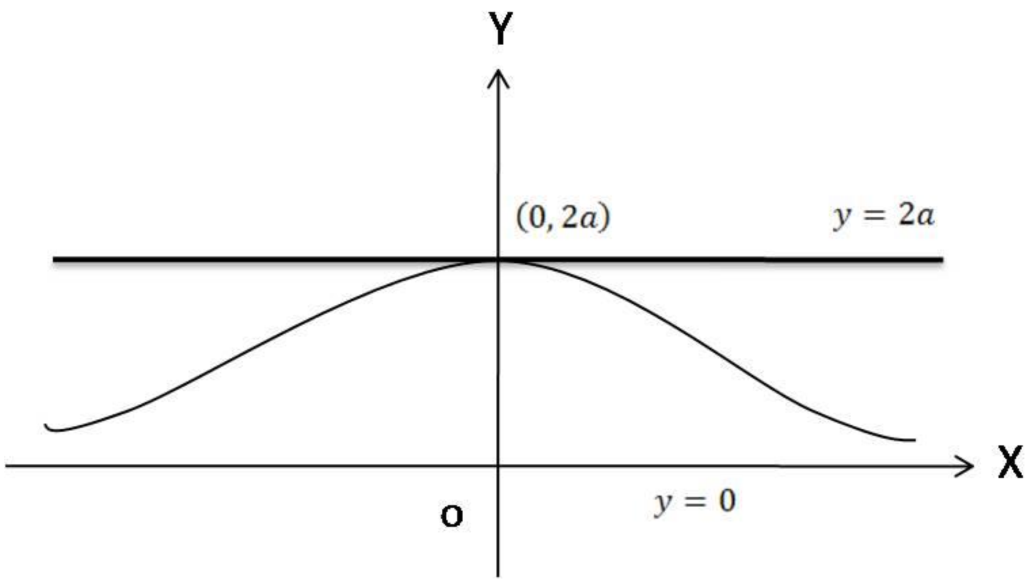
اس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ

$$\frac{dy}{dx}<0,\forall x>0$$

اور

$$\frac{dy}{dx}>0,\forall x<0$$

اس لیے وقفہ $[-\infty,0]$ میں y اسٹرکٹلی بڑھتا ہوا ہے اور $[0,\infty]$ میں y گھٹتا ہوا ہے۔اور وہ $x=0$ پر y اعلا ترین ہو گا اور اس کی قیمت $2a$ ہو گی۔اس لیے دیے ہوئے منحنی کی شکل درجہ ذیل ہو گی۔



شکل: 5.3.2

5.4 $y^2=f(x)$ شکل کی مساوات (Equation of the Form $y^2=f(x)$)

مثال 3: $y^2(a^2+x^2)=x^2(a^2-x^2)$ کو ٹریس کریں۔

حل۔ اس مساوات پر غور کرنے سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ

توازن: یہ منحنی دونوں محور کے ساتھ توازن میں ہو گا

مبدا: یہ مبدا سے ہو کر گزرتا ہے اور $y = \pm x$ اس کے دو مماس ہوں گے۔ اس لیے مبدا نوڈ(Node) ہو گا۔

مشترکہ نقاط: یہ x محور کو $(a,0)$، $(0,0)$ اور $(-a,0)$ پر اور y محور کو صرف $(0,0)$ پر ملتی ہے۔ $(a,0)$ اور $(-a,0)$ پر دو مماس $x = \pm a$ ہوں گے۔

ایسمپٹوٹ: اس منحنی کے لیے کوئی بھی ایسمپٹوٹ نہیں ہو گا۔

رجن: دی ہوئی مساوات $y = \pm\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}$ کو x کی انہیں قیمتوں کے لیے مان سکتے ہیں جس کے لیے

$-a \le x \le a \Leftrightarrow a^2 - x^2 \ge 0$ جس سے کہ یہ منحنی دو خطوط $x = \pm a$ کے درمیان رہتا ہے۔

انکریزنگ اور ڈکریزنگ: دی ہوئی مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہم کہہ سکتے ہیں

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^4-2a^2x^2-x^4}{(a^2+x^2)^{3/2}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} \to \infty$$ اگر $x \longrightarrow -a$ اور $x \to a$

اور جب کہ $a^4 - 2a^2x^2 - x^4 = 0$ تب $\frac{dy}{dx} = 0$

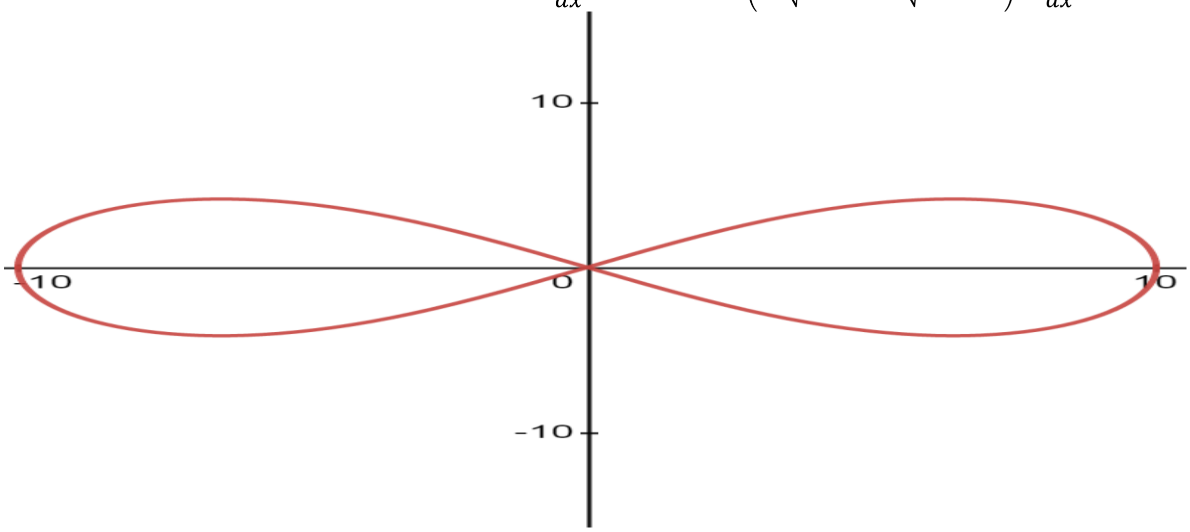
اس سے $(x^4 + 2a^2x^2 - a^4) = 0$

$$\Rightarrow -\{(x^2) - (\sqrt{2}-1)a^2\}(x^2 + (\sqrt{2}+1)a^2) = 0$$
$$\Rightarrow \left(x - \sqrt{(\sqrt{2}-1)}a\right)\left(x + \sqrt{(\sqrt{2}-1)}a\right)(x^2 + (\sqrt{2}+1)a^2) = 0$$

اس طرح $x = \pm a\sqrt{\sqrt{2}-1}$ کے لیے $\frac{dy}{dx} = 0$ اور ہم دیکھتے ہیں کہ

$$x\epsilon\left(-a, -a\sqrt{(\sqrt{2}-1)}\right) \cup \left(a\sqrt{(\sqrt{2}-1)}, a\right)$$

کے لیے، $\frac{dy}{dx} < 0$ اور $x\epsilon\left(-a\sqrt{(\sqrt{2}-1)}, a\sqrt{(\sqrt{2}-1)}\right)$ کے لیے $\frac{dy}{dx} > 0$، اس لیے دی گئی مساوات کا منحنی درجہ ذیل ہو گا۔



شکل: 5.4.1

مثال4: $y^2(2a - x) = x^3$ کو ٹریس کریں۔

حل۔ مساوات کو دیکھ کر درجہ ذیل باتیں ظاہر ہوتی ہیں۔

(1) مبدا: دی گئی مساوات میں کونسٹینٹ ٹرم نہیں ہے، اس لیے یہ مبدا سے ہو کر گزرے گا۔

(2) توازن: چونکہ دی گئی مساوات میں y کی پاور سبھی ٹرمس میں جفت ہے، اس لیے اس کا منحنی x محور کے ساتھ توازن میں ہو گا۔

(3) مماس: سب سے کم ڈگری کی ٹرمس کو صفر کے برابر رکھنے پر ہمیں مماس کی مساوات حاصل ہو گی۔

$$2ay^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y = 0$$

(4) ایسمپٹوٹ: y کی سب سے زیادہ پاور والی ٹرمس کے کوئفیشنٹ کو صفر کے برابر رکھنے پر:

$$2a - x = 0$$

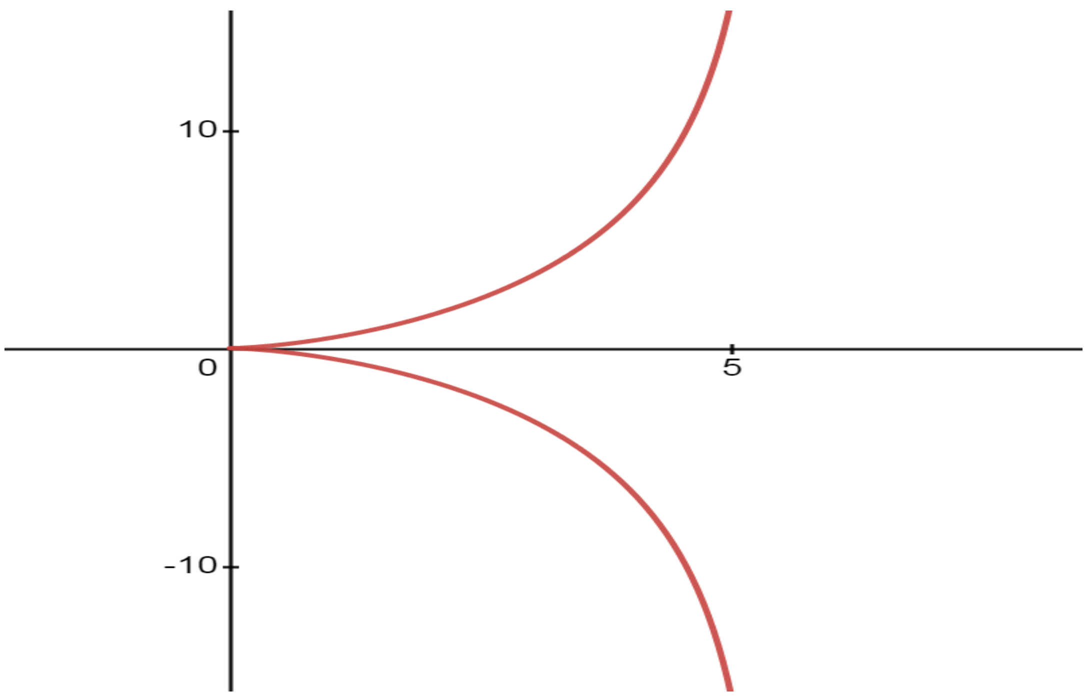
$$\Rightarrow \quad x = 2a$$

(5) رجن: دی گئی مساوات سے ظاہر ہوتا ہے کہ

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{2a - x}}$$

اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ y کی قیمت خیالی (Immaginary) ہو جاتی ہے۔ اگر x کی قیمت $2a$ سے زیادہ ہو جائے یا پھر صفر سے کم ہو۔

اس لیے دی گئی مساوات کا منحنی $x > 2a$ اور $x < 0$ کے لیے متعرف نہیں ہے۔ اس لیے دی گئی مساوات کا منحنی درجہ ذیل ہو گا۔



شکل: 5.4.2

مثال5: $xy^2 = a^2(a-x)$ کو ٹریس کریں۔

حل: دی گئی مساوات سے درجہ ذیل باتیں ظاہر ہوتی ہیں:

(1) مبدا: دی گئی مساوات سے ظاہر ہے کہ اس کا منحنی اوجن سے ہو کر نہیں گزرتا ہے۔

(2) توازن: چونکہ دی گئی مساوات میں y کی پاور جفت ہے، اس لیے دی گئی مساوات کا منحنی x محور کے ساتھ توازن میں ہوگا۔

(3) مماس: سب سے کم درجہ کی ٹرمس کو صفر کے برابر رکھنے پر ہمیں مماس کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ اس لیے

$$x = a$$

(4) ایسمپٹوٹ: y کی سب سے زیادہ پاور والی ٹرم کے ضریب کو صفر کے برابر رکھنے پر

$$x = 0$$

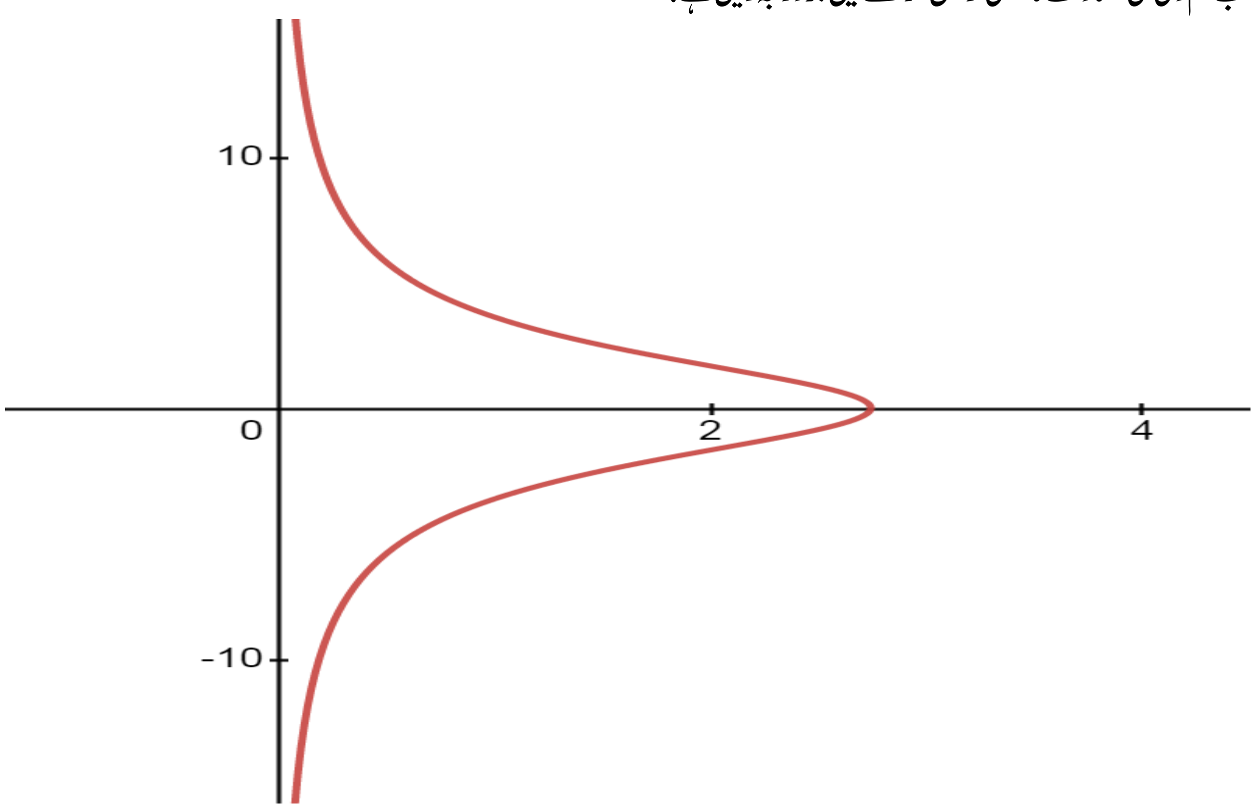
جو کہ y محور کی مساوات ہے۔ اس لیے y محور منحنی کے لیے ایک ایسمپٹوٹ ہوگا۔

(5) رجن: دی گئی مساوات سے ظاہر ہوتا ہے کہ

$$y = a\sqrt{\frac{a-x}{x}}$$

y کی قیمت خیالی ہو جاتی ہے۔ اگر x کی قیمت a سے زیادہ ہو یا صفر سے کم۔ اس لیے دی گئی مساوات کا منحنی $x > a$ اور $x < 0$ رجن میں نہیں ہوگا۔

اب ہم دی گئی مساوات کا منحنی ٹریس کر سکتے ہیں جو درجہ ذیل ہے:



شکل: 5.4.3

مثال6: $x^3 + y^3 = 3axy$ کوٹریس کریں۔

حل: دی گئی مساوات کو دیکھ کر درجہ ذیل باتیں ظاہر ہوتی ہیں۔

(1)مبدا: دی گئی مساوات مبدا سے ہو کر گزرتی ہے۔

(2)توازن: دی گئی مساوات میں xاور y کو آپس میں بدلنے پر مساوات پر کوئی فرق نہیں پڑتا،اس لیے منحنی، $x = y$لائن کے ساتھ توازن میں ہو گا۔

(3)خاص نقطہ: دی گئی مساوات کا منحنی $x = y$خط کو دو نقاط $(0,0)$اور $\left(\frac{3a}{2},\frac{3a}{2}\right)$پر کاٹتی ہے۔

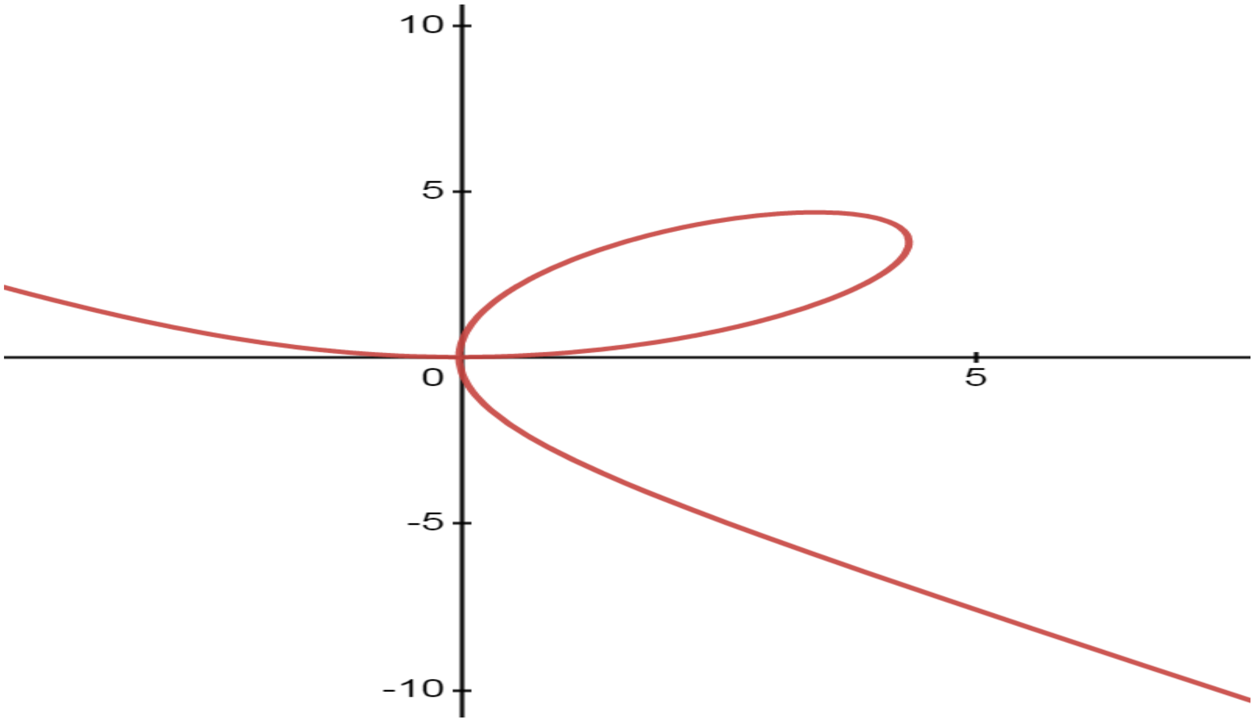
(4)ایسمپٹوٹ: دی گئی مساوات سے

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x + y)(x^2 - xy + y^2) - 3axy = 0$$

یہاں $(x + y)$ ہی ایک خطی (Linear) فیکٹر ہے جس کی ڈگری سب سے زیادہ ہے۔اس لیے منحنی کا ایک واحد ایسمپٹوٹ ہے جو کہ $y = -x$ خط کے متوازی ہے،اس لیے $x + y + a = 0$ایک ایسمپٹوٹ ہے۔

(5)چونکہ $x < 0$اور $y < 0$پر مساوات ثابت نہیں ہوتی ہے اس لیے منحنی کا کوئی بھی حصہ تیسرے کوآرڈینیٹ میں نہیں آیے گا۔



شکل:5.4.4

مثال7: $x^2y^2 = a^2(y^2 - x^2)$کوٹریس کریں:

حل۔ دی گئی مساوات کو دیکھنے پر درجہ ذیل باتیں ظاہر ہوتی ہیں۔

(1)مبدا: دی گئی مساوات مبدا سے ہو کر گزرتی ہے۔

(2) توازن: (الف) چونکہ مساوات میں موجود $'y'$ کی پاور سبھی ٹرمس میں جفت ہے اس لیے دی گئی مساوات کا منحنی $'x'$ محور کے متوازی ہوگا۔

(ب) چونکہ مساوات میں موجود 'y' کی پاور سبھی ٹرمس میں جفت ہے اس لیے دی گئی مساوات کا منحنی y محور کے متوازی ہوگا۔

(ج) چونکہ x کی جگہ $-x$ اور y کی جگہ $-y$ رکھنے پر مساوات میں کوئی بدلاؤ نہیں ہوتا ہے۔ اس لیے دی گئی مساوات کا منحنی بر عکس کوارڈینیٹ میں متوازی ہوگا۔

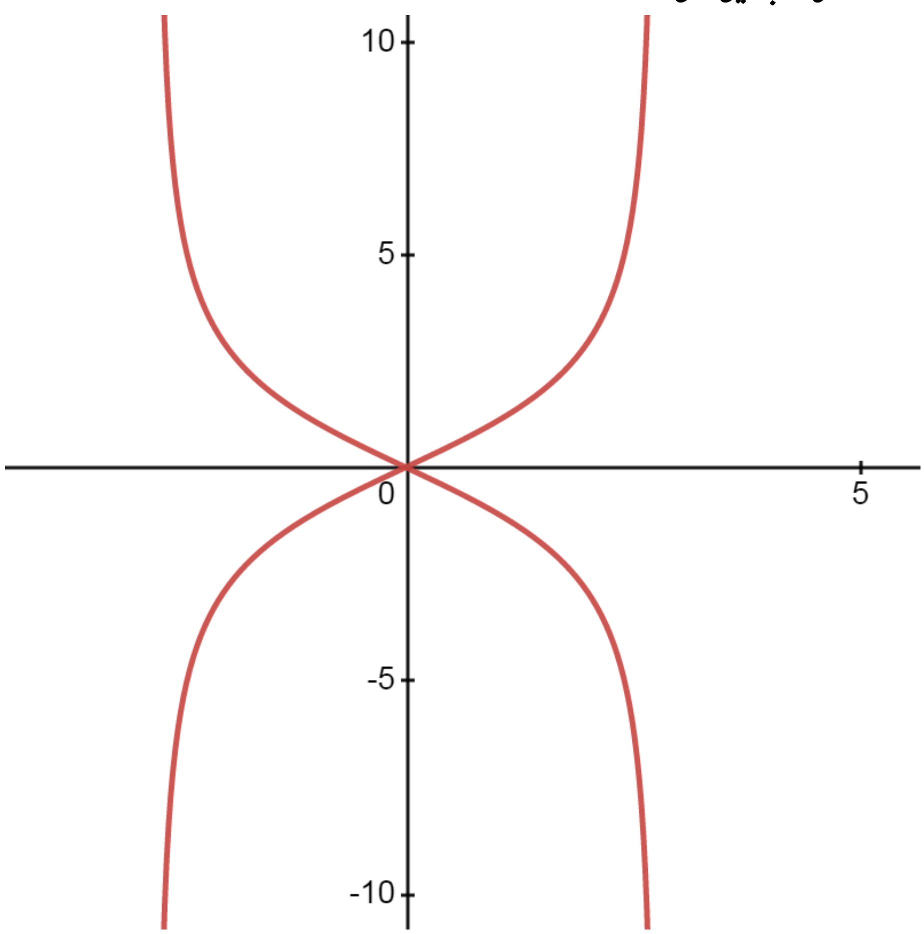
(3) مماس: سب سے کم ڈگری ٹرمس کو صفر کے برابر رکھنے پر ہمیں مماس کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ اس لیے

$$y^2 - x^2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad y^2 = x^2$$
$$\Rightarrow \quad y = \pm x$$

(4) ایسمپٹوٹ: y کی سب سے زیادہ پاور کی ٹرمس کے کوئفیشیٹ کو صفر کے برابر رکھنے پر

$$x^2 - a^2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x^2 = a^2$$
$$\Rightarrow \quad x = \pm a$$

اس لیے دی گئی مساوات کا منحنی درجہ ذیل شکل کا ہوگا۔



شکل: 5.4.5

5.5 پیرامٹرک مساوات کوٹریس کرنے کا طریقہ (Method of Tracing a Parametric Equations)

پیرامٹرک مساوات کوٹریس کرنے کا طریقہ ذیل مثال کی مدد سے سمجھا جاسکتا ہے۔

مثال 8: پیرامیٹرک مساوات $x = acos^3\theta$، $y = bsin^3\theta$ کوٹریس کریں۔

حل: دی ہوئی مساوات کو غور کرنے پر ہم اس نتیجے پر پہنچتے ہیں۔

(الف) (x, y) ایک نقطہ $A(a, o)$ سے بائیں طرف چلتا ہے اور پھر $B(0, b)$ تک اوپر کی طرف چلتا ہے، جب کہ $\theta\epsilon\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

(ب) (x, y) پھر $(0, b)$ سے بائیں طرف چل کر نیچے کی طرف چلتے ہوئے $(0, -b)$ پر پہنچتا ہے جب کہ $\theta\epsilon\left[\frac{\pi}{2}, 0\right]$

(ج) (x, y) ایک نقطہ $A'(-a, o)$ سے دائیں طرف چلکر نیچے کی طرف $B'(0, -b)$ تک چلتا ہے، جب کہ $\theta\epsilon\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

(x, y) پھر $(0, -b)$ سے دائیں طرف چلتے ہوئے اوپر کی طرف (a, o) تک پہنچتا ہے جب کہ $\theta\epsilon\left[\frac{3\pi}{2}، 2\pi\right]$ ہم حاصل کرتے ہیں۔

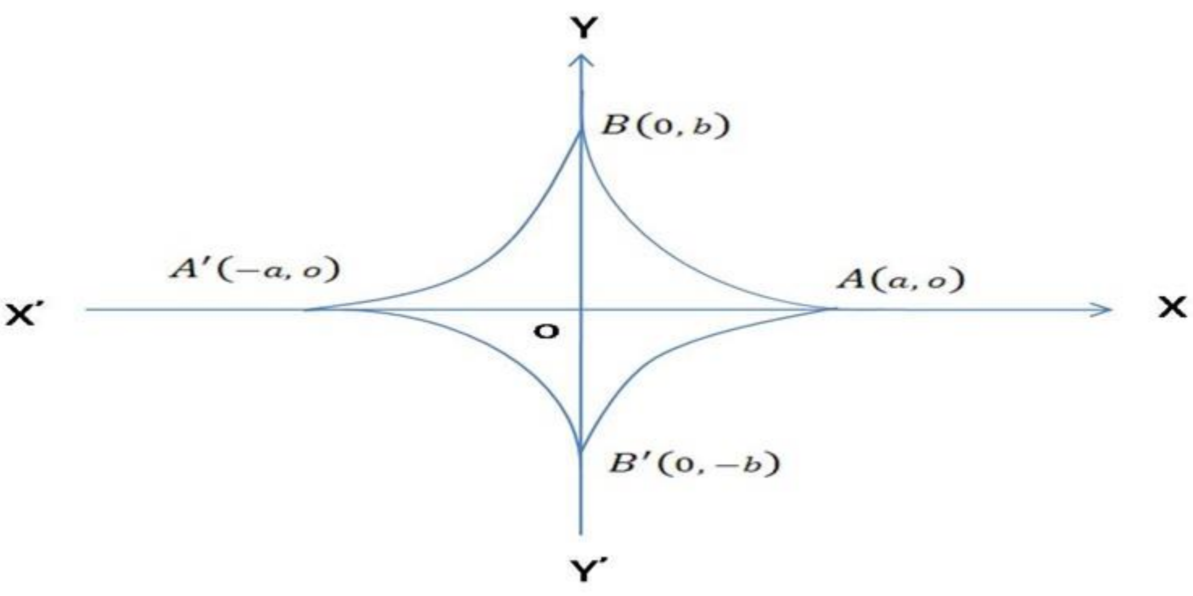
$$\frac{dx}{d\theta} = -3acos^2\theta\sin\theta \text{ اور } \frac{dy}{d\theta} = 3bsin^2\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy/_{d\theta}}{dx/_{d\theta}} = -\frac{3bsin^2\theta\cos\theta}{3acos^2\theta\sin\theta} = \frac{b}{a}tan\,\theta\,, \qquad \frac{dx}{d\theta} \neq 0$$

اور پھر
$$\frac{dy}{dx} \to 0, \theta \to 0 \text{ اور } \frac{dy}{dx} \to 0، \theta \to \pi$$

اور
$$\frac{dy}{dx} \to \infty, \theta \to \frac{\pi}{2} \text{ اور } \frac{dy}{dx} \to \infty، \theta \to \frac{3\pi}{2}$$

اس طرح $(\pm a, 0)$ پر مماس x محور ہوگی اور $(0, \pm b)$ پر مماس y محور ہوگا۔



شکل: 5.5.1

مثال 9: منحنی $x = a(t + sin\,t), y = a(1 + cos\,t)$ کوٹریس کریں۔

حل: دی گئی پیرامیٹرک مساوات ہے۔

$$x = a(t + \sin t), y = a(1 + \cos t)$$

به لحاظ t تفرق کرنے پر

$$\frac{dx}{dt} = a(1 + \cos t), \frac{dy}{dt} = -a \sin t$$

اب

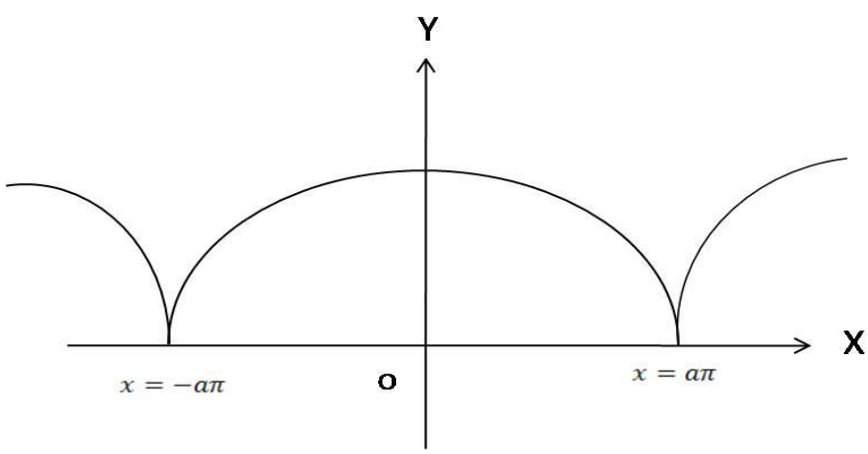
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$
$$= \frac{-a \sin t}{a(1 + \cos t)}$$
$$= \frac{-2a \sin\frac{t}{2} \cos\frac{t}{2}}{a\left(2\cos^2\frac{t}{2}\right)}$$
$$= -\tan\frac{t}{2}$$

اب مندرجہ ذیل ٹیبل پر غور کرتے ہیں۔

t	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
x	$x = -a\pi$	$-a\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$	0	$a\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$	$a\pi$
y	0	a	$2a$	a	0
$\frac{dy}{dx}$	∞	1	0	-1	$-\infty$

ہم دیکھتے ہیں کہ $t = -\pi$ اور $t = \pi$ پر مماس y محور کے متوازی ہیں۔ یہ نقاط ہی کسپ (Cusp) کہلاتے ہیں۔ اس کے ساتھ ہی $t = 0$ پر مماس x کے متوازی ہے۔

مندرجہ بالا گفتگو کے بعد دی گئی مساوات کو ٹریس کرنا آسان ہے جو کہ درجہ ذیل ہے۔



شکل:5.5.2

5.6 پولر مساوات کوٹریس کرنا(Tracing Polar Equations)

درجہ ذیل پہلوؤں کو ذہن میں رکھ کر کسی پولر مساوات $r = f(\theta)$ کوٹریس کیا جا سکتا ہے۔

(الف)توازن:

i. اگر $r = f(\theta)$ میں θ کی جگہ $-\theta$ رکھنے پر مساوات پر کوئی فرق نہیں پڑتا تو وہ منحنی (Curve) ابتدائی خط کے گرد توازن میں ہو گا۔

ii. اگر $r = f(\theta)$ میں θ کی جگہ $(\pi - \theta)$ رکھنے پر مساوات پر کوئی فرق نہیں پڑتا تو یہ منحنی (Curve) خط $\theta = \frac{\pi}{2}$ کے گرد توازن میں ہو گا۔

iii. منحنی پول کے گرد توازن میں ہوتا ہے۔

(ب)پول: کوئی منحنی (Curve) پول سے ہو کر گزرتا ہے۔یہ تبھی ممکن ہے جب $r = 0$ کے لیے θ کی کوئی حقیقی قیمت (Real Value) حاصل ہو گی۔

(ج)ایسمپٹوٹ: منحنی کے لیے اسمپٹوٹ اگر ہوں تو حاصل کریں۔

(د)رجنس یا علاقہ (Regions): وہ رجن حاصل کریں جس میں منحنی موجود نہ ہو۔اگر θ کی θ_1 اور θ_2 کے درمیان کچھ قیمتوں کے لیے r خیالی ہو، تب $\theta = \theta_1$ اور $\theta = \theta_2$ کے درمیان منحنی کا کوئی حصہ نہیں ہو گا۔

اگر r کی سب سے چھوٹی اور سب سے بڑی قیمتیں a اور b ہوں تو منحنی $r = b$ کے اندر اور $r = a$ کے باہر موجود ہو گا جہاں $a > 0, b > 0$

(ہ) $\tan\varphi = r\frac{d\theta}{dr}$ کی مدد سے φ کی قیمت حاصل کریں۔

اگر $\theta = \theta_1$ جب کہ $\phi = 0$ تب $\theta = \theta_1$ منحنی کے لیے مماس ہو گی اور اگر $\varphi = \frac{\pi}{2}$ تب $\theta = \theta_2$، $\theta = \theta_2$ مماس ریڈیس ویکٹر منحنی پر عمود (Perpendicular) ہو گا۔

خاص نقاط (Special Points):

اگر $\frac{dr}{d\theta} > 0$ تو θ کے بڑھنے پر r بڑھے گا اور اگر $\frac{dr}{d\theta} < 0$ تو θ کے بڑھنے پر r گھٹے گا۔

ان باتوں کو دھیان میں رکھ کر ہم دیے ہوئے منحنی کوٹریس کر سکتے ہیں۔

مثال 10: $r = a + b\cos\theta$ کوٹریس کریں۔

حل: دی گئی مساوات ہے

$$r = a + b\cos\theta$$

مساوات کو دیکھنے کے بعد ہمیں تین صورتیں دکھائی دیتی ہیں۔

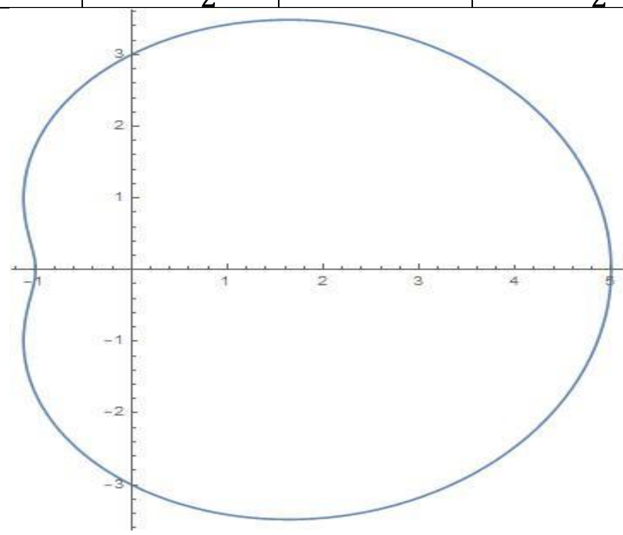
(الف) جب $a > b$ ہو:

i. چونکہ θ کی جگہ $-\theta$ رکھنے پر مساوات پر کوئی فرق نہیں پڑتا اس لیے منحنی ابتدائی خط کے گرد توازن میں ہو گا۔

ii. چونکہ $a > b$ اس لیے r ہمیشہ مثبت ہو گا۔

مندرجہ ذیل ٹیبل پر غور کریں:

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
r	$a+b$	$a+\frac{b}{2}$	a	$a-\frac{b}{2}$	$a-b$



شکل: 5.6.1

(ب) جب $a < b$ ہو:

i. دی گئی مساوات کا منحنی ابتدائی خط کے گرد توازن میں ہو گا۔

ii. جب $r = 0$ تب

$$a + b\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = -\frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{a}{b}\right)$$

iii. جب $\theta = 0$، تب

$$r = a + b$$

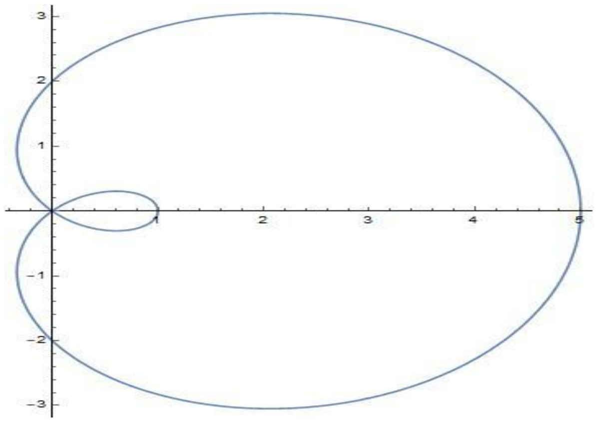
جو کہ r کی سب سے زیادہ قیمت ہے۔

iv. جب $\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{a}{b}\right)$، تب منحنی مبدا سے ہو کر گزرتا ہے۔

v. جب θ کی قیمت $\cos^{-1}\left(-\frac{a}{b}\right)$ اور π کے درمیان ہو، تب $r < 0$ اور جب $\theta = \pi$ تب $r = a - b$

اب مندرجہ ذیل ٹیبل پر غور کریں:

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	$\cos^{-1}\left(-\frac{a}{b}\right)$	$\cos^{-1}\left(-\frac{a}{b}\right) < \theta < \pi$	π
r	$a+b$	a	0	منفی	$a-b$



شکل: 5.6.2

(ج) جب $a = b$ ہو

جب $a = b$، تب

$$r = a(1 + \cos\theta)$$

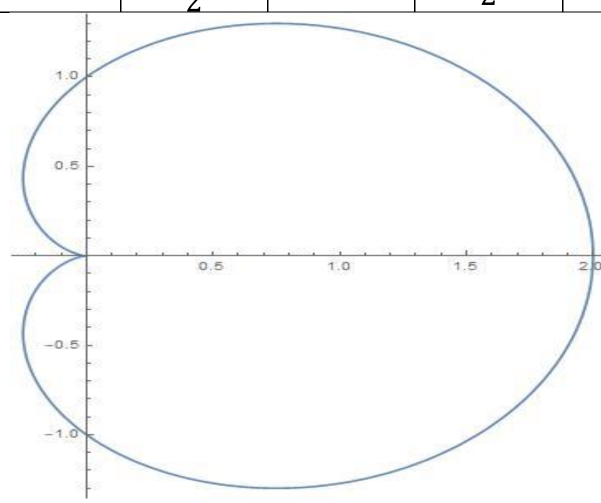
i. منحنی ابتدائی خط کے گرد توازن میں ہوگا۔

ii. جب $\theta = 0$، تب $r = 2a$ اور جب $\theta = \pi$ تب $r = 0$

اور جب $\theta = \frac{\pi}{2}$، تب $r = a$

مندرجہ ذیل ٹیبل پر غور کریں:

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
r	$2a$	$\frac{3a}{2}$	a	$\frac{a}{2}$	0	a



شکل: 5.6.3

5.7 اکتسابی نتائج(Learning Outcomes)

اس اکائی میں آپ نے سیکھا:

1۔کارتیسی مساوات کوٹریس کرنا۔

2۔پیرامیٹرک مساوات کوٹریس کرنا۔

3۔پولر مساوات کوٹریس کرنا۔

5.8 کلیدی الفاظ(Key Words)

ٹریسنگ، توازن، ابتدائی خط، بر عکس کواڈرینٹ کارتیسی مساوات، پولر مساوات، کوآرڈینیٹ محور، منحنی، مساوات، متوازی، مبدا، پیرامٹرک مساوات

5.9 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

5.9.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. اگر کسی مساوات میں xاور y کو آپس میں بدل دینے پر مساوات میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی تب کروس کے گرد توازن میں ہوگا؟

2. اگر کسی مساوات میں x کی جگہ $(-x)$ اور y کی جگہ $(-y)$ رکھنے پر مساوات میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی تب منحنی......................توازن میں ہوگا۔

3. $y^2(2a-x) = x^3$ کے لیے مماس ہے..........................

4. $x^2y^2 = x^2 - a^2$ کے لیے مماس ہے...........................

5. $r = a\,sin\,3\theta$ کی منحنی میں کتنے لوپس ہوں گے؟

6. $r = a(1 + cos\,\theta)$ ابتدائی خط کے گرد توازن میں نہین ہے۔(صحیح یاغلط)

7. $r = a\,cos\,2\theta$ کے منحنی میں کتنے پولس ہوں گے؟

8. اگر $r = f(\theta)$ میں θ کی جگہ $(\pi - \theta)$ رکھنے پر مساوات پر کوئی فرق نہیں پڑتا، تب اس مساوات کا منحنی $\theta = \frac{\pi}{2}$ خط کے گرد توازن میں ہوگا۔(صحیح یاغلط؟)

5.9.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

1. $y = -\frac{3}{2}x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 12x$ کوٹریس کریں۔

2. $y = (x+1)^2(x-3)$ کوٹریس کریں۔

3. $y = x^4 - 2x + 10$ کوٹریس کریں۔

4. $y = (x+2)(x-3)(x-7)$ کو ٹریس کریں۔
5. $y = 2x^5 - 3x^4 + 112$ کو ٹریس کریں۔

5.9.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. $y^2(x-a) = x^2(x+a)$ کو ٹریس کریں۔
2. $x^2y^2 = x^2 - a^2$ کو ٹریس کریں۔
3. $y^2 = (x-1)(x^2-5x+6)$ کو ٹریس کریں۔
4. $y^2 = \frac{2x-1}{x^2-1}$ کو ٹریس کریں۔
5. $y^2 = \frac{x^2(x-a)}{3a}$ کو ٹریس کریں۔
6. $y^2 = \frac{x^5(2a-x)}{4a^4}$ کو ٹریس کریں۔
7. $y^2 = x^2(x-5)$ کو ٹریس کریں۔
8. $y^2 = \frac{x^2+1}{x^2}$ کو ٹریس کریں۔
9. $x = a\, sin\, 2\theta(1 + cos\, 2\theta), y = a\, cos\, 2\theta(1 - cos\, 2\theta)$ کو ٹریس کریں۔
10. $x = cos\, \theta\,, y = cot\, \theta$ کو ٹریس کریں۔
11. $x = a(3\, cos\, t - cos^3 t), y = a(3\, sin\, t - sin^3 t)$ کو ٹریس کریں۔
12. $x = a\left(sin\, t - \frac{1}{3}\sin 3t\right), y = a\left(\cos t - \frac{1}{3}\cos 3t\right)$ کو ٹریس کریں۔
13. $r = a\, cos\, 2\theta\,, a > 0$ کو ٹریس کریں۔
14. $r = ae^{b\theta}, a > 0, b > 0$ کو ٹریس کریں۔
15. $r = a(1 - cos\, \theta)$ کو ٹریس کریں۔
16. $x^4 + y^4 = 4a^2xy$ کو پولر کی شکل میں بدل کر ٹریس کریں۔
17. $x^4 + y^4 = 4a^2xy^2$ کو پولر کی شکل میں بدل کر ٹریس کریں۔
18. $r^2 = a^2\, cos\, 2\theta$ کو ٹریس کریں۔
19. $r = a(\theta - \sin\theta)$ کو ٹریس کریں۔
20. $r = a(1 - \cos\theta)$ کو ٹریس کریں۔

اکائی 6۔ غیر متعینہ صورت اور L-ہاسپٹل قانون

(Indeterminate Form and L'Hospital'sRule)

اکائی کے اجزا

6.0 تمہید

6.1 مقاصد

6.2 غیر متعینہ صورت

6.3 L-ہاسپٹل قانون

6.3.1 $\frac{0}{0}$ صورت کے لیے L-ہاسپٹل قانون

6.3.2 $\frac{\infty}{\infty}$ صورت کے لیے L-ہاسپٹل قانون

6.3.3 $0 \cdot \infty$ صورت کے لیے L -ہاسپٹل قانون

6.3.4 $1^{\infty}, \infty^0, 0^0$ صورت کے لیے L-ہاسپٹل قانون

6.4 اکتسابی نتائج

6.5 کلیدی الفاظ

6.6 نمونہ امتحانی سوالات

6.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

6.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

6.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

6.0 تمہید(Introduction)

اس سیکشن میں ہم لمٹ کے نکالنے کے لیے ایسا آسان طریقہ استعمال کریں گے جس میں ہم مشتق(Derivative) کو استعمال کرتے ہیں۔اب تک ہم نے جو لمٹ نکالیںمیں وہ یا تو ترسیمی(Graphically) یا پھر عددی(Numerically) طریقہ پر مبنی تھی لیکن اب جو طریقہ ہم دیکھیں گے وہ مشتق (Derivative) کا استعمال کرتا ہے اور یہ طریقہ اتنا طاقتور اور صحیح جواب دینے کی صلاحیت رکھتا ہے کہ اکثر کمپیوٹر پروگرام اسی طریقہ کو استعمال کرتے ہیں۔

6.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کو پڑھنے کے بعد طالب علم اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ مختلف غیر متعینہ صورت کے درمیان کا فرق معلوم کر سکیں گے اور L' Hospital's Rule کی مدد سے ان کی غیر متعینہ صورت معلوم کر سکیں گے۔

6.2 غیر متعینہ صورت(Indeterminate Forms)

ہم جانتے ہیں کہ اگر $\lim_{x\to a} f(x)$ اور $\lim_{x\to a} g(x)$ دونوں وجود رکھتے ہیں اور $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ ہو تب

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

لیکن کئی بار ایسا ہوتا ہے کہ $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ اور $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ تب بھی ہم $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ کی قدر نکال سکتے ہیں۔اس طرح کی لمٹ کو ہم $\frac{0}{0}$ قسم کی غیر متعینہ صورت کہتے ہیں۔اب کچھ مثالیں دیکھیں:

a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 2$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1$

اوپر دی گئی دونوں مثالیں $\frac{0}{0}$ قسم کی غیر متعینہ صورت ہیں۔ہم جانتے ہیں کہ مثال (a) میں اگر ہم شمار کنندہ(Numerator) کے فیکٹر(Factor) نکال کر اور ایک جیسے ارکان(Term) کو کینسل(Cancel) کر دیں تو ہم لمٹ حاصل کر سکتے ہیں۔جب کہ مثال (b) کو جیومترائی(Geometrically) حل کر سکتے ہیں لیکن ہمارے پاس بہت سی ایسی غیر متعینہ صورتیں ہوتی ہیں جن کو نہ تو ہم الجبرائی (Algebraically) اور نہ ہی جیومترائی طریقہ سے حل کر سکتے ہیں،اس لیے ہم کو ایک ایسے طریقہ کی ضرورت ہے جو عام ہو اور صحیح جواب دینے کی صلاحیت رکھتا ہو۔اس طریقہ کو ہم L' Hospital's Rule کہتے ہیں۔ہم کو یاد رکھنا چاہیے کہ

1^{∞}، 0°، $\infty - \infty$، $0.\infty$ اور ∞°

بھی غیر متعینہ صورتیں ہیں۔

6.3 L-ہاسپٹل قانون(L'Hospital's Rule)

6.3.1 $\frac{0}{0}$صورت کے لیے L-ہاسپٹل قانون(L' Hospital's Rule for $\frac{0}{0}$ form)

قضیہ: مان لیجیے کہ f اور g اس طرح کے تفاعلات ہیں کہ

i. $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ اور $\lim_{x\to a} g(x) = 0$

ii. $f'(x), g'(x)$ وجود رکھتے ہیں اور $g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$ جہاں پر $x \in (a-\in, a+\in)$ ممکنہ طور پر a کو چھوڑ کر

iii. $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ وجود رکھتا ہے۔

تب

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ثبوت: مان لیتے ہیں

$$f(a) = 0 \text{ اور } g(a) = 0 \qquad \dots (1)$$

تو ہم اس اوپر کی مساوات کو استعمال کر کے دیکھتے ہیں کہ

$$\lim_{x\to a} g(x) = g(a) \text{ اور } \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

اس سے ہم کو یہ معلوم ہوتا ہے کہ f اور g، نقطہ a پر مسلسل ہیں۔

اب ایک وقفہ $[a, x]$ کو دیکھتے ہیں جہاں پر $x > a$

i. f اور g دونوں $[a, x]$ میں مسلسل ہیں۔

ii. f اور g دونوں (a, x) میں تفرق پزیر ہیں۔

iii. $\forall p \in (a, x), \quad g'(p) \neq 0$

اس طرح سے کوشی کے اوسط قیمت قضیہ (Cauchy's Mean Value Theorem) کی تمام شرائط پوری ہوتی ہیں تو ایک نقطہ $c \in (a, x)$ کچھ اس طرح سے وجود رکھتا ہے کہ

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{f(x)}{f(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, c \in (a, x)$$

کیوں کہ $x \to a$, تب $c \to a$ اس لیے

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

L' Hospital's Rule استعمال کرنے کا طریقہ:

Step-I: معلوم کیجیے کہ $\frac{f(x)}{g(x)}$ کی لمٹ ایک $\frac{0}{0}$ قسم کی غیر متعینہ صورت ہے۔

Step-II: f اور g کاالگ الگ تفرق کیجیے۔

Step-III: $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ کی لمٹمعلوم کیجیے، اگر یہ لمٹ متناہی، ∞+ یا ∞- ہو تب یہ $\frac{f(x)}{g(x)}$ کی لمٹکے برابر ہو گی۔

نوٹ:

i. L' Hospital's Rule میں ہم $f(x)$ اور $g(x)$ کو الگ الگ تفرقکریں گے۔ ہم کو یہ یاد رکھنا چاہیے کہ ان کو تفرق کرنا $\frac{f(x)}{g(x)}$ کو تفرق کرنے سے الگ ہے۔

ii. یہ بھی ہو سکتا ہے کہ $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ بھی $\frac{0}{0}$ صورت میں ہو۔ اس صورت میں ہم L' Hospital's Rule کو دوبارہ استعمال کریں گے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to g}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

جہاں پر g اور f دونوں L' Hospital's Rule کی ساری شرائط پوری کرتے ہیں۔

iii. اس قانون کو ہم کچھ اس طرح سے بھی تعمیم (Generalize) کر سکتے ہیں:

اگر $f(x)$ اور $g(x)$ ایسے تفاعلات ہیں کہ $\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)}$ ایک $\frac{0}{0}$ قسم کی غیر متعینہ صورت ہے اور $f^n(x)$ اور $g^n(x)$ L' Hospital's Rule کی تمام شرائط پوری کرتے ہیں تب،

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\cdots=\lim_{x\to a}\frac{f^n(x)}{g^n(x)}$$

مثال (1): ہم نے اوپر ایک مثال دی تھی $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ ہم جانتے ہیں کہ $\lim_{x\to 0}\sin x=0$ اور $\lim_{x\to 0}x=0$ اس لیے یہ ایک $\frac{0}{0}$ کی غیر متعینہ صورت ہے۔ اب ہم اس کو L' Hospital's Rule سے حل کرتے ہیں۔ اب $\sin x$ اور x کو تفرق کیجیے اور $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ کی لمٹ معلوم کیجیے۔ اگر یہ متناہی (Finite)، ∞+ یا ∞− کے برابر آتی ہے تو یہ $\frac{f(x)}{g(x)}$ کی لمٹ کے برابر ہو گی۔

اس لیے

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

$$\Rightarrow\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

مثال (2): $\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x^3-27}$ کو معلوم کیجیے۔

حل: مان لیجیے $f(x)=x^4-81$ اور $g(x)=x^3-27$

تب $\lim_{x\to 3}x^4-81=0$ اور $\lim_{x\to 3}x^3-27=0$ اس لیے

$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^4-81}{x^3-27}$ ایک $\frac{0}{0}$ قسم کی غیر متعینہ صورت ہے۔ اس لیے ہم L' Hospital's Rule کا استعمال کرتے ہیں۔

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x^3-27}=\lim_{x\to 3}\frac{4x^3}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{4}{3} x$$
$$= \frac{4}{3} \times 3 = 4$$

مثال(3): $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$ کو حاصل کریں اور دکھائیں کہ L’ Hospital’s Rule اور فیکٹرنگ (Factoring) ایک ہی جواب دیتے ہیں۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $\lim_{x\to 3} x^2 - 9 = 0$ اور $\lim_{x\to 3} x - 3 = 0$ ہے اس لیے یہ لمٹ $\frac{0}{0}$ قسم کی ایک غیر متعینہ صورت ہے۔

ہم L’ Hospital’s Rule لگاتے ہیں

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\frac{d}{dx}[x^2-9]}{\frac{d}{dx}[x-3]}$$
$$= \lim_{x\to 3} \frac{2x}{1}$$
$$= 6$$

اب ہم دوبارہ اسی لمٹ کو فیکٹر کر کے حاصل کرتے ہیں۔

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}$$
$$= \lim_{x\to 3}(x+3)$$
$$= 6$$

تو اس طرح سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ ہم کو دونوں طریقوں سے ایک ہی قیمت حاصل ہو رہی ہے۔

اب ہم ایک مثال لیتے ہیں جس میں L’ Hospital’s Rule کو ایک سے زیادہ بار استعمال کرتے ہیں۔

مثال(4): $\lim_{x\to 0} \frac{7-7\cos x}{17x^2}$ کو حاصل کریں۔

حل: ہم دیکھتے ہیں کہ $\lim_{x\to 0} 7 - 7\cos x = 0$ اور $\lim_{x\to 0} 17x^2 = 0$، اس لیے یہ ایک $\frac{0}{0}$ قسم کی غیر متعینہ صورت ہے۔ اب ہم L’ Hospital’s Rule کو استعمال کرتے ہیں

$$\lim_{x\to 0} \frac{7-7\cos x}{17x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{7\sin x}{34x}$$
$$= \frac{7}{34} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

لیکن ہم کو جو نئی لمٹ حاصل ہوئی ہے وہ بھی ایک $\frac{0}{0}$ قسم کی غیر متعینہ صورت ہے کیوں کہ $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$ اور $\lim_{x\to 0} x = 0$

اس لیے ہم دوبارہ سے L’ Hospital’s Rule کا استعمال کریں گے۔

$$\frac{7}{34}\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right) = \frac{7}{34}\left(\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1}\right)$$
$$= \frac{7}{34}\left(\lim_{x\to 0} \cos x\right)$$
$$= \frac{7}{34} \times 1 = \frac{7}{34}$$

مثال(5): $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x^3}$ کو معلوم کیجیے۔

حل: ہم دیکھتے ہیں کہ $e^x - 1$ اور x^3 دونوں کی لمٹ کی قدر 0 ہے۔اس لیے یہ ایک $\frac{0}{0}$ قسم کی غیر متعینہ صورت ہے۔اب ہم L'Hospital Rule کا استعمال کریں گے۔

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}[e^x - 1]}{\frac{d}{dx}[x^3]}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{3x^2}$$
$$= +\infty$$

نوٹ: L' Hospital's Rule کو استعمال کرنے سے پہلے ہمیشہ یہ بات یادرکھنی چاہیے کہ لمٹ ایک غیر متعینہ صورت ہے ورنہ جو لمٹ حاصل کی جائے گی وہ غلط ہوگی اس کو ایک مثال سے سمجھتے ہیں۔

مان لیجیے کہ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sec x}$ کو حاصل کرنا ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ یہ ایک غیر متعینہ صورت نہیں ہے اور ہم اس کی لمٹ کچھ اس طرح سے نکال سکتے ہیں:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sec x} = \frac{\lim_{x\to 0}(1-\cos x)}{\lim_{x\to 0}(\sec x)}$$
$$= \frac{0}{1} = 0$$

اور اگر ہم L' Hospital's Rule لگاکر دیکھتے ہیں تو ہم پائیں گے کہ

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sec x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sec x\tan x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sec x}$$
$$= \frac{1}{1} = 1$$

تو اس سے ہم کو ایک مختلف لمٹ حاصل ہوتی ہے جو غلط ہے۔اس لیے L' Hospital's Rule لگانے سے پہلے یہ ضرور دیکھ لیں کہ لمٹ ایک غیر متعینہ صورت ہے۔

6.3.2 $\frac{\infty}{\infty}$ صورت کے لیے L-ہاسپٹل قانون (L' Hospital's Rule for $\frac{\infty}{\infty}$ form)

ہم $\frac{f(x)}{g(x)}$ کی لمٹ کو $\frac{\infty}{\infty}$ قسم کی غیر متعینہ صورت کہتے ہیں اگر شمار کنندہ (Numerator) کی لمٹ ∞ آئے اور ذیلی (denominator) کی لمٹ بھی ∞ ہو۔اس طرح کی غیر متعینہ صورت کو حل کرنے کے لیے بھی L' Hospital's Rule کو استعمال کر سکتے ہیں۔

قضیہ: f اور g دو اس طرح کے تفاعلات ہیں جو مندرجہ ذیل کو مطمئن (satisfy) کرتے ہیں:

i. $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ اور $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$

ii. $f'(x), g'(x)$ واجود رکھتے ہیں اور $g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$ جہاں پر $x \in (a-\in, a+\in), \in> 0$ ممکنہ طور پر a کو چھوڑ کر۔

iii. $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ وجود رکھتا ہے

تب
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ثبوت: مان لیتے ہیں x اور b دو ایسے نقطے ہیں جو

$$a<x<b<a+\epsilon$$

کو مطمئن کرتے ہیں، تب ہم آسانی سے دکھا سکتے ہیں کہ f اور g کسی وقفہ $[x,b]$ میں کوشی کے اوست قیمت قضیہ کی تمام شرائط کو پورا کرتے ہیں اس لیے ہمارے پاس ایک نقطہ $c\in(x,b)$ ایسا ہو گا کہ

$$\frac{f(b)-f(x)}{g(b)-g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{f(x)\left[\frac{f(b)}{f(x)}-1\right]}{g(x)\left[\frac{f(b)}{g(x)}-1\right]}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\qquad\ldots(2)$$

کیوں کہ ہم جانتے ہیں کہ

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to a}\frac{f(b)}{f(x)}=0$$

اسی طرح سے ہم دکھا سکتے ہیں کہ $\lim_{x\to a}\frac{g(b)}{g(x)}=0$

ان سب باتوں کو ہم مساوات (2) میں استعمال کرتے ہیں

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

کیوں کہ $x\to a\Rightarrow c\longrightarrow a$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

نوٹ: جس طرح سے ہم نے $\frac{0}{0}$ صورت کے L' Hospital's Rule کو اعلا مشتق کے لیے بڑھایا تھا اسی طرح $\frac{0}{0}$ صورت کو بھی کر سکتے ہیں۔

مثال(6): $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$ حاصل کیجیے۔

حل: ہم کو دیا گیا ہے

$$\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}=\frac{1-\cos x^2}{x^2\cdot x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin x^2}$$

لیکن ہم جانتے ہیں کہ

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x^2}=1$$

اس لیے

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^4} \cdot 1$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^4}$$

لیکن ہم دیکھتے ہیں کہ $\lim_{x\to 0}(1-\cos x^2) = 0$ اور $\lim_{x\to 0}(x^4) = 0$ اس لیے یہ لمٹ صورت $\frac{0}{0}$ میں ہے تو ہم L' Hospital's Rule استعمال کرتے ہیں

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin x^2}{4x^3}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2} \times 1$$
$$= \frac{1}{2}$$

مثال(7): $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\csc x}$ کی قدر نکالیے۔

حل: ہم دیکھتے ہیں کہ متناہی کی لمٹ $-\infty$ ہے اور ذیلی(denominator) کی لمٹ $+\infty$ ہے اس طرح سے ہمارے پاس $\frac{\infty}{\infty}$ قسم کی غیر متعینہ صورت ہے۔ ہم L' Hospital's Rule کا استعمال کرتے ہیں

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{\csc x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-\csc x \cot x}\right)$$

لیکن ہم دیکھتے ہیں کہ ہمیں دوبارہ سے $\frac{\infty}{\infty}$ قسم کیغیر متعینہ صورت ملتی ہے۔ اب اگر ہم دوبارہ سے L' Hospital's Rule کا استعمال کرتے ہیں تو $\frac{1}{x}$ کیمتناہی پاور(Power) ملتی ہے اور ذیلی(denominator) میں $\csc x \cot x$ کی رکن ملتی ہے۔ اس طرح سے ہم جتنی بار بھی L' Hospital's Rule کا استعمال کرتے ہیں ہمیں $\frac{\infty}{\infty}$ قسم کیغیر متعینہ صورت ہی ملتی ہے۔ اس لیے کسی اور طریقہ کا استعمال کریں گے۔ ہم اپنی پچھلی مساوات کا استعمال کریں گے۔

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc x \cot x} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-\sin x}{x}\tan x\right)$$
$$= -\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\cdot \lim_{x\to 0^+}(\tan x)$$
$$= -(1)(0)$$
$$= 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\csc x} = 0$$

مثال(8): $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 3x}{\tan x}$ کو حاصل کیجیے۔

حل: ہم دیکھتے ہیں کہ یہ ایک $\frac{\infty}{\infty}$ قسم کی صورت ہے اس لیے ہم L' Hospital's Rule کا استعمال کریں گے۔

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 3x}{\tan x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{3\sec^2 3x}{\sec^2 x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3\cos^2 x}{\cos^2 3x}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-6\cos x \sin x}{6\cos 3x \sin 3x}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin 2x}{\sin 6x}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos 2x}{6\cos 6x}$$
$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{\cos 6x}$$
$$= \frac{1}{3}$$

مثال(9): $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$معلوم کیجیے۔

حل: ہم دیکھتے ہیں کہ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$ایک $\infty - \infty$ صورت(Form) ہے۔اس صورت کو ہم $\frac{0}{0}$یا$\frac{\infty}{\infty}$کی صورت میں تبدیل کر سکتے ہیں۔ اس لیے

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x - x}{x\sin x}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x - x}{x^2}\right)\left(\frac{x}{\sin x}\right)$$

چوں کہ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right) = 1$اس لیے

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x - x}{x^2}\right)\left(\frac{x}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x - x}{x^2}\right) \qquad \left(\text{صورت } \frac{0}{0}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x - 1}{2x}\right) \qquad \left(\text{صورت } \frac{0}{0}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin x}{2}\right) = 0$$

6.3.3 $0\cdot\infty$صورت کے لیے L- ہاسپٹل قانون(L’ Hospital’s Rule for $0\cdot\infty$ Form)

اگر ہم دو تفاعلات f اور g کو اس طرح رکھیں کہ پہلے کی لمٹ 0 اور دوسرے کی ∞ ہو تو $f\cdot g$ کی لمٹ $0\cdot\infty$ ہو گی۔ مثال کے طور پر $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$ کو لیتے ہیں۔اس میں پہلے فیکٹر(Factor) کی لمٹ 0 ہے اور دوسرے کی $-\infty$ ہے۔اس لیے $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$ ایک $0\cdot\infty$ قسم کی غیر متعینہ صورت ہے۔ ہم کئی بار $0\cdot\infty$ قسم کی غیر متعینہ صورت کو ratio کی صورت میں لکھ کر اور پھر اس پر L’ Hospital’s Rule لگا کر نکالتے ہیں۔

مثال(10): $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(1-\tan x)\sec 2x$کو حاصل کیجیے۔

حل: ہم دیکھتے ہیں کہ یہ ایک $0\cdot\infty$ قسم کی غیر متعینہ صورت ہے۔اس لیے ہم اس صورت(Form) کو ہم $\frac{0}{0}$کی غیر متعینہ صورت میں تبدیل کرتے ہیں۔

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(1-\tan x)\sec 2x = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\tan x)}{1/\sec 2x}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\tan x)}{\cos 2x}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\sec^2 x}{-2\sin 2x}$$
$$= \frac{-2}{-2} = 1$$

مثال(11): $\lim_{x\to 1}\sec\left(\frac{\pi}{2}x\right)\log\left(\frac{1}{x}\right)$ حاصل کیجیے۔

حل: ہم دیکھتے ہیں کہ یہ ایک $0\cdot\infty$ صورت (Form) کی لمٹ ہے اس لیے ہم اس کو ریشو (Ratio) میں تبدیل کرتے ہیں۔

$$\lim_{x\to 1}\sec\left(\frac{\pi}{2}x\right)\log\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{\log\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{x\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \frac{2}{\pi}$$

مثال(12): $\lim_{x\to 1}(1-x)\,tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ کو حاصل کیجیے۔

حل: یہ لمٹ $0\cdot\infty$ صورت (Form) کی ہے اس لیے ہم اس کو $\frac{0}{0}$ کی غیر متعینہ صورت میں تبدیل کرتے ہیں۔

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\,tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{cot\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}cosec^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$
$$= \frac{2}{\pi}$$

نوٹ: کیا $0\cdot\infty$ قسم کی غیر متعینہ صورت کی کوئی قدر 0 ہو گی؟ $0\cdot\infty$ کو دیکھ کر کوئی سوچ سکتا ہے کہ اس کی قدر 0 ہو گی۔ کیوں کہ ہم کسی بھی چیز کو اگر 0 سے ضرب دیں تو ہم کو 0 ملتا ہے۔ لیکن یہاں پر ایسا نہیں ہے کیوں کہ $0\cdot\infty$ کن ہی دو نمبرات کا ضرب نہیں ہے بلکہ لمٹ ہے۔ مندرجہ مثالیں اس کو واضح کرتی ہیں۔

$$\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}(1) = 1 \quad \text{(i)}$$
$$\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty \quad \text{(ii)}$$

اوپر کی دونوں مثالیں $0\cdot\infty$ قسم کی غیر متعینہ صورت کی ہیں اور دونوں مثالوں کی لمٹ کی قدر 0 نہیں ہے۔

$\infty-\infty$ قسم کی غیر متعینہ صورت:

کوئی بھی لمٹ کا سوال جس سے ہم کو مندرجہ میں سے کوئی ایک ملتا ہو

$$(-\infty)-(+\infty)،(+\infty)-(-\infty)،(+\infty)-(+\infty)،(-\infty)-(-\infty)$$

$\infty - \infty$ قسم کی غیر متعینہ صورت کہلاتا ہے۔اس طرح کی لمٹ کو ہم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ کی لمٹ میں تبدیل کرکے حل کر سکتے ہیں۔ایک بات کا اور خیال کرنا چاہیے کہ

$$(-\infty) - (+\infty)،(+\infty) - (-\infty)،(+\infty) - (+\infty)،(-\infty) - (-\infty)$$

غیر متعینہ نہیں ہیں کیوں کہ یہ دونوں ایک ساتھ مل کر کوئی ایک لمٹ دیتی ہیں۔

مثال(13): $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)$ معلوم کیجیے۔

حل: یہ ایک $\infty - \infty$ قسم کی غیر متعینہ صورت ہے۔ہم اس کو $\frac{0}{0}$ صورت میں تبدیل کرتے ہیں۔

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-(e^x-1)}{x(e^x-1)}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-e^x}{e^x-1+xe^x}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-e^x}{e^x+xe^x+e^x}\right)$$
$$= \frac{-1}{2}$$

مثال(14): $\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{\log(x-3)}-\frac{1}{x-4}\right)$ معلوم کیجیے۔

حل: یہ ایک $\infty - \infty$ قسم کی غیر متعینہ صورت ہے۔

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{\log(x-3)}-\frac{1}{x-4}\right) = \lim_{x\to 4}\left(\frac{(x-4)-\log(x-3)}{(x-4)\log(x-3)}\right)$$
$$= \lim_{x\to 4}\left(\frac{1-\frac{1}{x-3}}{\log(x-3)+\frac{x-4}{x-3}}\right)$$
$$= \lim_{x\to 4}\left(\frac{\frac{1}{(x-3)^2}}{\frac{1}{x-3}+\frac{1}{(x-3)^2}}\right)$$
$$= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

6.3.4 $0^0, \infty^0, 1^\infty$ قسم کے لیے L-ہاسپٹل قانون (L' Hospital's Rule for $0^0, \infty^0, 1^\infty$ forms)

ہم کو $\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$ کو معلوم کرنے کے لیے ایک تابع متغیر (Dependent Variable) کی ضرورت پڑتی ہے اور ہم لکھتے ہیں

$$y = [f(x)]^{g(x)}$$

ایک بات اور ذہن میں رکھنی چاہیے کہ

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0,1\ or\ \infty \text{ اور } \lim_{x\to a} g(x) = 0, \infty\ or\ 0$$

اس لیے

$$y = [f(x)]^{g(x)}$$

$$\Rightarrow \qquad \log y = g(x)\log f(x)$$
$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to a}(\log y) = \lim_{x\to a}[g(x)\log f(x)]$$

یہاں پر دائیں ہاتھ کی طرف کی جو جز ہے اس کو ہم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ کی صورت میں تبدیل کر سکتے ہیں اور جس کی قدر آسانی سے معلوم کی جا سکتی ہے۔

مان لیجیے کہ
$$\lim_{x\to a}[g(x)\log f(x)] = k$$

تب

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to a}(\log y) = k$$
$$\Rightarrow \qquad \log\left(\lim_{x\to a} y\right) = k$$
$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to a} y = e^k$$

اس لیے

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = e^k$$

مثال(15): ذیل کو معلوم کیجیے $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}$

حل: جیسا کہ ہم نے اوپر بتایا کہ سب سے پہلے ہم ایک تابع متغیر y مان لیتے ہیں۔ اس لیے

$$y = (1+\sin x)^{1/x}$$
$$\Rightarrow \qquad \ln y = \ln(1+\sin x)^{1/x}$$
$$= 1/x \ln(1+\sin x)$$
$$= \frac{\ln(1+\sin x)}{x}$$

اس لیے

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}$$

جو کہ ایک $\frac{0}{0}$ قسم کی غیر متعینہ صورت ہے۔ اس لیے L' Hospital's Rule استعمال کرنے پر

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{1+\sin x}}{1} = 1$$

کیوں کہ ہم یہ دکھا چکے ہیں کہ جب $x\to 0$ تب $\ln y = 1$

ایکسپونینشیل (exponential) تفاعل کے تسلسل سے ہم کو یہ معلوم ہوتا ہے کہ $e^{\ln y}\to e^1$ جب $x\to 0$ جس سے ہم کو یہ معلوم ہوتا ہے کہ جب $x\to e$ تو $y\to e$ اس لیے

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x} = e$$

مثال(16): $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$ کی قدر معلوم کیجیے۔

حل: مان لیتے ہیں کہ

$$y = (\sin x)^{\tan x} \qquad (\text{صورت } 1^\infty)$$

$$\Rightarrow \qquad \log y = \tan x \log(\sin x)$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\{\tan x \log(\sin x)\} \qquad (\infty \cdot 0 \text{ صورت})$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log(\sin x)}{\cot x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x\,(-\text{cosec}^2 x)} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \log y = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y = e^0 = 1$$

اس لیے

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x} = 1$$

مثال(17): ذیل کی قدر معلوم کیجیے $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan^2 x}$

حل: ہم کو جو لمٹ دی گئی ہے وہ 1^∞ قسم کی ہے۔ مان لیجیے

$$y = (\sin x)^{\tan^2 x}$$

$$\Rightarrow \qquad \log y = \tan^2 x \log(\sin x)$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \log y = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\{\tan^2 x \log(\sin x)\}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log(\sin x)}{\cot^2 x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{-2\cot x\,\text{cosec}^2 x} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \log y = \log \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan^2 x} = -\frac{1}{2}$$

اس لیے

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan^2 x} = e^{-\frac{1}{2}}$$

مثال(18): $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right)^{1/x}$ معلوم کیجیے

حل: یہ لمٹ 0^0 قسم کی غیر متعینہ صورت ہے۔ اب مان لیتے ہیں کہ

$$y = \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right)^{1/x}$$

$$\Rightarrow \qquad \log y = 1/x \log\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to\infty} \log y = \lim_{x\to\infty} \frac{\log\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{{}^{-1}\!/\!_{(1+x^2)}}{\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x}{(1+x^2)}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{2x} = 0$$
$$\Rightarrow \quad \log \lim_{x\to\infty} y = 0$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} y = e^0 = 1$$

اس لیے

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right)^{1/x} = 1$$

مثال(19): ذیل کی قدر معلوم کیجیے $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cot x}$

حل: ہم کو جو لمٹ دی گئی ہے وہ 1^∞ قسم کی ہے۔ مان لیجیے کہ

$$y = (1+\sin x)^{\cot x}$$
$$\Rightarrow \quad \log y = \cot x \log(1+\sin x)$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \log y = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)}{\tan x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\sec^2 x\,(1+\sin x)} = 1$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} y = e^1$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cot x} = e$$

مثال(20): $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$ معلوم کیجیے۔

حل: مان لیتے ہیں کہ

$$y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$$
$$\Rightarrow \quad \log y = \tan x \log\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \log y = \lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\frac{1}{x}\right)}{\cot x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{-\operatorname{cosec}^2 x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin^2 x}{x}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 x = 1 \times 0 = 0$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} y = e^0 = 1$$

مثال(21): $\lim_{x\to 0^+}(\cos x)^{1/x^3}$ معلوم کیجیے۔

حل: مان لیتے ہیں کہ

$$y = (\cos x)^{1/x^3}$$

$$\Rightarrow \quad \log y = 1/x^3 \log(\cos x)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} \log y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\cos x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\tan x}{x} \cdot \frac{1}{3x}$$

$$= \infty$$

$$\Rightarrow \quad \log \lim_{x\to 0^+} y = \infty \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} y = 0$$

اس لیے

$$\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{1/x^3} = 0$$

6.4 اکتسابی نتائج(Learning Outcomes)

اس اکائی کو مکمل کرنے کے بعد طالب علم نے غیر متعینہ صورت کی تعریف اور اس کی مختلف مثالیں سیکھیں اور وہ اس قابل ہو جانا چاہیے کہ غیر متعینہ صورت کی لمٹ حاصل کرنے کے لیے L' Hospital's Rule کا استعمال کر سکیں۔ اس کے علاوہ وہ دی گئی غیر متعینہ صورت کی شکل کو دوسری شکل میں تبدیل کر سکیں۔

6.5 کلیدی الفاظ(Key Words)

غیر متعینہ صورت، مشتق، L-ہاسپٹل قانون، تفاعل

6.6 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

6.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan x - x}{x^2 \tan x}\right) = \cdots$

(a $\frac{1}{2}$

(b $\frac{1}{3}$

(c $\frac{1}{4}$

(d $\frac{1}{5}$

2. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos x^2}{x^4}\right)$ ایک ... قسم کی غیر متعینہ صورت ہے۔

(a $\frac{0}{0}$

(b $\frac{\infty}{\infty}$

(c $0 \cdot \infty$

(d ∞^0

3. $\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x-1}{b^x-1}\right), b \neq 1$ کی قدر ہے…
a) $\frac{\log a}{\log b}$
b) $\frac{\log b}{\log a}$
c) $\log a$
d) $\log b$

4. a کی کس قیمت کے لیے $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 2x+a\sin x}{x^3}\right)$ کی قدر متناہی(Finite) ہوگی:
a) 1 b) 0 c) 2 d) -1

5. اگر $\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{\alpha x}-e^x-x}{x^2}\right)=\frac{3}{2}$ تب α کی قدر ہوگی…
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

6. $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)$ ایک… قسم کی غیر متعینہ صورت ہے۔
a) $\infty-\infty$
b) $0\cdot\infty$
c) $\frac{\infty}{\infty}$
d) $\frac{0}{0}$

7. $\lim_{x\to1}\left(\sec\frac{\pi}{2}x\log\frac{1}{x}\right)$ کی قدر ہے…
a) π
b) $\frac{\pi}{2}$
c) 2π
d) $\frac{2}{\pi}$

6.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

1. a، b اور c کی قیمتیں معلوم کیجیے اگر

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a+b\cos x+c\sin x}{x^2}\right)=\frac{1}{2}$$

2. $\lim_{x\to0}\left(\frac{(1+x)^{1/x}-e+\frac{1}{2}e^x}{x^2}\right)$ کی قدر معلوم کیجیے۔

3. b کی کس قیمت کے لیے $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 2x+a\sin x}{x^3}\right)$ کی قدر متناہی(Finite) ہوگی؟

4. a، b اور c کی کن قیمتوں کے لیے

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{ae^x-b\cos x+ce^{-x}}{x\sin x}\right)=2$$

5. کیا ہم $\lim_{x\to0}\left(\frac{x^4-4x^3+3}{3x^2-x-2}\right)$ پر L-ہاسپٹل قانون استعمال کر سکتے ہیں؟

6.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Types Questions)

1. $\lim_{x\to 0} x\left(a^{1/x}-1\right), a>0$ کی قدر معلوم کیجیے۔

2. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$ معلوم کیجیے۔

3. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0}(\sec x)^{\cot x}$ معلوم کیجیے۔

اکائی 7۔ تکمل- تحویلی ضابطے-I

(Integration-Reduction Formulae-I)

اکائی کے اجزا

7.0 تمہید
7.1 مقاصد
7.2 تکمل
7.3 تکمل کے طریقے
7.3.1 متکمل کی تحویل
7.3.2 تکمل بہ اندراج
7.3.3 تکمل بالحصص
7.4 متواتر تحویل
7.5 تحویلی ضابطے
7.5.1 $\int sin^n xdx$ کا تحویلی ضابطہ
7.5.2 $\int \cos^n xdx$ کا تحویلی ضابطہ
7.5.3 $\int tan^n xdx$ کا تحویلی ضابطہ
7.6 اکتسابی نتائج
7.7 کلیدی الفاظ
7.8 نمونہ امتحانی سوالات
7.8.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات
7.8.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات
7.8.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

7.0 تمہید (Introduction)

پچھلی اکائی کے نصاب میں ہم تفرق (Differentiation) کے بارے میں جان چکے ہیں۔ اگر ایک تفاعل f وقفہ I پر تفرق پذیر ہے اور f کے مشتق کو اگر f' سے ظاہر کرتے ہیں تب اس سوال کا پیدا ہونا فطری ہے کہ اگر وقفہ I پر f' دیا گیا ہو تو کیا ہم f معلوم کر سکتے ہیں۔ جواب کے لیے ہم اس اکائی میں تکمل کے تصور کو پیش کر سکیں گے جو تفاعل کے تفرق کے عمل کا معکوس ہے۔ نیز تکمل کی معیاری صورتوں پر بھی بحث کریں گے۔

7.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے کے بعد آپ سب اس قابل ہو جائیں گے کہ دیے گیے تفاعل کا متکمل معلوم کر سکیں گے۔ نیز چند تحویلی ضابطوں سے بھی واقف ہو جائیں گے۔

7.2 تکمل (Integration)

تعریف: وقفہ I پر اگر $f'(x)$ دیا گیا ہو تب اس کی مدد سے $f(x)$ کو معلوم کرنے کے طریقے کو تکمل کہتے ہیں۔ بہ لحاظ x کسی تفاعل $f(x)$ کا تکمل (Integration) ایک ایسا تفاعل ہے جس کا بہ لحاظ $'x'$ تفرقی سر (Differential Coefficient) $f(x)$ ہوتا ہے۔ اس کو $\int f(x)dx$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ یہاں علامت $\int$ لفظ Sum (مجموعہ) کے ابتدائی حرف 'S' کی دراز کردہ شکل ہے۔

اگر $\frac{d}{dx}\left(f(x)\right) = f(x)$ ہو تب

$\int f'(x)dx = f(x) + c$ ہوتا ہے۔

یہاں پر 'c' کو اختیاری مستقل (Arbitrary Constant) کہتے ہیں۔

ذیل میں تکمل کے ضابطے دیے گئے ہیں جن کا ذہن نشین کرنا ضروری ہے۔ ہر ایک ضابطہ $\int f(x)dx = F(x)$ کی شکل میں دیا جا رہا ہے اور $\int F(x)dx = f(x)$ ضابطے سے اس کی تصدیق کی جا سکتی ہے۔

ہر صورت میں اختیاری مستقل 'c' مقادیر کا اضافہ کیا جانا چاہیے۔

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} (n \neq -1)$
2. $\int \frac{1}{x} dx = \log(|x|)$
3. $\int e^x dx = e^x$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} (a > 0)$
5. $\int \sin x\, dx = -\cos x$
6. $\int \cos x\, dx = \sin x$

.7 $\int \sec^2 x\, dx = \tan x$

.8 $\int \mathrm{cosec}^2 x\, dx = -\cot x$

.9 $\int \tan x\, dx = \log(\sec x)$

.10 $\int \cot x\, dx = \log(\sin x)$

.11 $\int \sec x\, dx = \log(\sec x + \tan x)$

.12 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right), (a > |x| \geq 0)$

.13 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$, یا $\log\left(\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right), (x, a > 0)$

.14 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$, یا $\log\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)$

.15 $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

.16 $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log(|f(x)|)$

.17 $\int [f(x)]^{\mathrm{n}} f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$

.18 $\int \log x\, dx = x(\log x - 1)$

.19 $\int \sinh x\, dx = \cosh x$

.20 $\int \cosh x\, dx = \sinh x$

.21 $\int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$

.22 $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$

.23 $\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$

.24 $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{\cos(ax+b)}{a}$

.25 $\int \cos(ax+b) dx = \frac{\sin(ax+b)}{a}$

مثال 1۔ $\int 5x^4 dx$ کو اخذ کرو۔

حل:

$$\int 5x^4 dx = 5\int x^4 dx$$
$$= 5\frac{x^{4+1}}{4+1} + \mathrm{C}$$
$$= 5\frac{x^5}{5} + \mathrm{C}$$
$$= x^5 + \mathrm{C}$$

مثال 2۔ $\int (\mathrm{e}^x + x^3 + \cos x) dx$ کی قدر معلوم کرو۔

حل:

$$\int (\mathrm{e}^x + x^3 + \cos x) dx$$
$$= \int \mathrm{e}^x dx + \int x^3 dx + \int \cos x\, dx$$

$$= e^x + \frac{x^4}{4} + \sin x + C$$

7.3 تکمل کے طریقے (Methods of Integration)

1۔ متکمل کو ایسے تفاعلات کے مجموعہ میں تبدیل کریں جس کے تکملے معلوم ہوں۔ (Decomposition of Integrand)

2۔ تکمل بہ اندراج (Integration by Substitution)

3۔ تکمل بالحصص (Integration by Parts)

7.3.1 متکمل کی تحویل (Decomposition of Integrand)

کبھی کبھی معروف ضابطوں سے تکملات کو معلوم کیا جاسکتا ہے۔ تب ہم متکمل کو ایسے تفاعلات کے مجموعہ میں تبدیل کریں گے جن کے تکملے معلوم ہوں اور یہاں ہم رکن بہ رکن تکمل کریں گے۔ مثال کے طور پر اگر $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$ ہو تب

$$\int f(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \int f_3(x)dx$$

ہوگا۔

مثال 1۔ $x^5 + \tan x + \cos x$ کا تکمل محسوب کرو۔

حل: دیا گیا تفاعل

$$f(x) = x^5 + \tan x + \cos x$$

تب

$$\int f(x)dx = \int (x^5 + \tan x + \cos x)dx$$
$$= \int x^5 dx + \int \tan x \, dx + \int \cos x \, dx$$
$$= \frac{x^6}{6} + \log \sin x + \sin x + C$$

مثال 2۔ $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ کو معلوم کرو۔

حل: دیا گیا تفاعل $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$ ہے۔

تب

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$$
$$= \int \frac{[\sin^2 x + \cos^2 x]}{\sin^2 x \cos^2 x} dx \qquad (\text{چونکہ } \sin^2 x + \cos^2 x = 1)$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 x} dx + \int \frac{1}{\cos^2 x} dx$$
$$= \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx + \int \sec^2 x\, dx$$
$$= -\, cot\, x + tan\, x + C$$

اس لیے $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ کی قدر $tan\, x - cot\, x + C$ ہو گی۔

مثال 3۔ $\sqrt{1 + sin\, 2x}$ کا تکمل محسوب کیجیے۔

حل: دیا گیا تفاعل $f(x) = \sqrt{1 + sin\, 2x}$ ہے اور

$$1 + sin\, 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x$$
$$= (sin\, x + cos\, x)^2$$

تب

$$\int \sqrt{1 + sin\, 2x}\, dx = \int \sqrt{(sin\, x + cos\, x)^2} dx$$
$$= \int (sin\, x + cos\, x) dx$$
$$= -\, cos\, x + sin\, x + C$$
$$\therefore \int \sqrt{1 + sin\, 2x}\, dx = -\, cos\, x + sin\, x + C$$

7.3.2 تکمل بہ اندراج (Integration by Substitution)

اس طریقے کے تکمل $\int f(x) dx$ کے لیے متغیر x کو کسی اور متغیر مثلاً t میں تبدیل کرتے ہیں۔ ایک مناسب رشتے $x = g(t)$ کے استعمال سے اس صورت میں۔

$$\int f(x) dx = \int f\big(g(t)\big) g'(t) dt$$

ہو گا اور ہم اسے آسانی سے معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال 1۔ تکمل معلوم کرو جہاں $f(x) = sin(3x + 5)$ ہے

حل: فرض کرو کہ $3x + 5 = t$

تب $$3dx + 0 = dt$$
$$\Rightarrow dx = \frac{dt}{3}$$

تب $$\int sin(3x + 5)\, dx = \int sin(t) \frac{dt}{3}$$
$$= \frac{1}{3} \int sin\, t\, dt$$

$$= \frac{-1}{3}\cos t + C$$
$$= \frac{-1}{3}\cos(3x+5) + C$$

تب $\int sin(3x+5)\,dx = \frac{-1}{3}\cos(3x+5) + C$ ہو گا۔

مثال 2۔ $\int sec^2 3x \tan 3x\, dx$ کی قدر معلوم کرو۔

حل: دیا گیا تفاعل $f(x) = sec^2 3x \tan 3x$ ہے۔

فرض کرو کہ $\tan 3x = \mathrm{t}$

$$\Rightarrow sec^2 3x \cdot 3dx = dt$$
$$\Rightarrow sec^2 3x\, dx = \frac{dt}{3}$$

تب $\int sec^2 3x \tan 3x\, dx = \int t \frac{dt}{3}$ ہو گا۔ اور $\int tdt = \frac{\mathrm{t}^2}{2}$

$$\int sec^2 3x \tan 3x\, dx = \frac{\mathrm{t}^2}{2\cdot 3} + \mathrm{C}$$
$$= \frac{(\tan 3x)^2}{6} + \mathrm{C}$$
$$\therefore \int sec^2 3x \tan 3x\, dx = \frac{(\tan 3x)^2}{6} + \mathrm{C}$$

اس اندراج کے طریقے سے ہم ذیل کے ضابطے حاصل کر سکتے ہیں۔

i. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

ii. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

iii. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

iv. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

v. $\int \sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

vi. $\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

7.3.3 تکمل بالحصص (Integration by Parts)

اگر تکمل دو تفاعلات کا حاصل ضرب ہو تب ذیل کے قانون سے اسے معلوم کر سکتے ہیں۔

$$\int (u\cdot v)dx = u\int vdx - \int\left[\frac{d(u)}{dx}\int vdx\right]dx$$

مثال1۔ $\int x \sin x\, dx$ کو محسوب کرو۔

حل:
$$\int x \sin x\, dx = x\int \sin x\, dx - \int\left[\frac{d(x)}{dx}\int \sin x\, dx\right]dx$$
$$= x(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)\, dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + C$$
$$\therefore \int x \sin x\, dx = \sin x - x\cos x + C$$

مثال2۔ $\int x \log x\, dx$ کا تکمل معلوم کرو۔

حل: فرض کرو کہ $x \log x = \log x\cdot x = u\cdot v$ ہے۔

جہاں $v = x, \mathrm{u} = \log x$ ہوگا۔

تب
$$\int x\log x\, dx = \int \log x\cdot x\, dx$$
$$= \log x\int x\, dx - \int\left[\frac{d(\log x)}{dx}\int x\, dx\right]dx$$
$$= \log x\cdot\frac{x^2}{2} - \int\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\right)dx$$
$$= \frac{x^2\log x}{2} - \int\left(\frac{x}{2}\right)dx$$
$$= \frac{x^2\log x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$
$$\therefore \int x\log x\, dx = \frac{x^2\log x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

7.4 متواتر تحویل (Successive Reduction)

کئی تفاعلات ایسے ہوتے ہیں جن کے متکملات کو ایک یا دیگر معلوم شدہ معیاری تکملات کی وضع میں ظاہر نہیں کیا جاسکتا۔ بہر حال چند صورتوں میں ان متکملات کو دوسری عبارتوں کے متکمل سے الجبرائی طور پر جوڑا جاسکتا ہے جو یا تو راست تکمل پذیر ہوں یا اصل تفاعلات کے مقابلے میں بہ آسانی تکمل پذیر ہوں۔ اس طرح جوڑے جانے والے الجبرائی رشتے تحویل ضابطے کہلاتے ہیں۔

اس طریقے کی وضاحت کے لیے ذیل میں چند مثالیں دی گئی ہیں۔

مثال1۔ $\int x^n e^{ax}\, dx$ کے لیے تحویلی ضابطہ معلوم کرو جہاں n مثبت صحیح عدد ہے۔ نیز $\int x^3 e^{5x}\, dx$ معلوم کرو۔

حل: فرض کرو کہ
$$I_n = \int x^n e^{ax}\, dx$$
$$= x^n\int e^{ax}\, dx - \int\left[\frac{d(x^n)}{dx}\int e^{ax}\, dx\right]dx$$

$$= x^n \cdot \frac{e^{ax}}{a} - \int \left[nx^{n-1} \cdot \frac{e^{ax}}{a}\right] dx$$
$$= \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int [x^{n-1}e^{ax}]$$
$$\Rightarrow I_n = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} I_{n-1}$$

اسی طرح

$$I_{n-1} = \frac{x^{n-1}e^{ax}}{a} - \frac{n-1}{a} I_{n-2}$$
$$I_{n-2} = \frac{x^{n-2}e^{ax}}{a} - \frac{n-2}{a} I_{n-3}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$I_{n-n} = I_0 = \int e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

نیز

$$I_3 = \int x^3 e^{5x}\, dx$$
$$= \frac{x^3 e^{5x}}{5} - \frac{3}{5} I_2$$
$$= \frac{x^3 e^{5x}}{5} - \frac{3}{5}\left[\frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5} I_1\right]$$
$$= \frac{x^3 e^{5x}}{5} - \frac{3x^2 e^{5x}}{25} + \frac{6}{25} I_1$$
$$= \frac{x^3 e^{5x}}{5} - \frac{3x^2 e^{5x}}{25} + \frac{6}{25}\int xe^{5x}\, dx$$
$$= \frac{x^3 e^{5x}}{5} - \frac{3x^2 e^{5x}}{25} + \frac{6}{25}\left[\frac{xe^{5x}}{5} - \int 1 \cdot \frac{e^{5x}}{5} dx\right]$$
$$= \frac{x^3 e^{5x}}{5} - \frac{3x^2 e^{5x}}{25} + \frac{6xe^{5x}}{125} - \frac{6e^{5x}}{625} + \mathrm{C}$$
$$\therefore \int x^3 e^{5x}\, dx = \frac{x^3 e^{5x}}{5} - \frac{3x^2 e^{5x}}{25} + \frac{6xe^{5x}}{125} - \frac{6e^{5x}}{625} + \mathrm{C}$$

مثال2۔ $\int x^n e^x\, dx$ معلوم کرو اور اس کے استعمال سے $\int x^3 e^x\, dx$ اخذ کرو۔

حل: فرض کرو کہ $I_n = \int x^n e^x\, dx$ تکمل بالحصص کے طریقے سے ہم ان کو اس طرح ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$I_n = \int x^n e^x\, dx$$
$$= x^n \int e^x\, dx - \int \left[\frac{d(x^n)}{dx}\int e^x\, dx\right] dx$$
$$= x^n e^x - \int [nx^{n-1}e^x]\, dx$$

$$= x^n e^x - n\int [x^{n-1}e^x]\, dx$$
$$I_n = x^n e^x - nI_{n-1}$$
$$\therefore I_n = x^n e^x - nI_{n-1}$$

اب $n = 3$ کے لیے

$$I_3 = x^3e^x - 3I_{3-1}$$
$$= x^3e^x - 3I_2$$
$$= x^3e^x - 3[x^2e^x - 2I_1]$$
$$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6\int xe^x\, dx$$
$$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6\left[xe^x - \int (1\cdot e^x)\, dx\right]$$
$$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + C$$
$$\Rightarrow \quad \int x^3e^x\, dx = x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + C$$

7.5 تحویلی ضابطے (Reduction Formulae)

7.5.1 $\int sin^n xdx$ کا تحویلی ضابطہ معلوم کرو۔

فرض کرو کہ

$$I_n = \int sin^n xdx$$
$$\Rightarrow \quad I_n = \int sin^{n-1}x \sin x\, dx$$
$$= sin^{n-1}x\int \sin x\, dx - \int\left[\frac{d(sin^{n-1}x)}{dx}\int \sin x\ \ dx\right]dx$$
$$= sin^{n-1}x(-\cos x) - \int [(n-1)sin^{n-2}x\cdot \cos x\,(-\cos x)]\, dx$$
$$= -sin^{n-1}x\cos x + (n-1)\int [sin^{n-2}x\cdot \cos^2 x]\, dx$$
$$= -sin^{n-1}x\cos x + (n-1)\int [sin^{n-2}x\cdot (1-\sin^2 x)]\, dx$$
$$= -sin^{n-1}x\cos x + (n-1)\int sin^{n-2}x\, dx - (n-1)\int sin^n x\, dx$$
$$= -sin^{n-1}x\cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$
$$\Rightarrow \quad (1+n-1)I_n = -sin^{n-1}x\cos x + (n-1)I_{n-2}$$
$$\Rightarrow \quad I_n = \frac{-sin^{n-1}x\cos x}{n} + \frac{(n-1)}{n}I_{n-2}$$

جو کہ $I_n = \int sin^n xdx$ کا مطلوب تحویلی ضابطہ ہے۔

مثال 1۔ $\int sin^n xdx$ کا تحویلی ضابطہ استعمال کر کے $\int sin^5 xdx$ معلوم کرو۔

حل: ہمیں معلوم ہے کہ

$$I_n = \int sin^n xdx$$

$$\Rightarrow \quad I_n = \frac{-sin^{n-1}x\cos x}{n} + \frac{(n-1)}{n}I_{n-2}$$

$$\Rightarrow \quad I_5 = \frac{-sin^4 x\cos x}{5} + \frac{4}{5}I_3$$

$$= \frac{-sin^4 x\cos x}{5} + \frac{4}{5}\left[\frac{-sin^{3-1}x\cos x}{3} + \frac{2}{3}I_{3-2}\right]$$

$$= \frac{-sin^4 x\cos x}{5} + \frac{4}{5}\left[\frac{-sin^2 x\cos x}{3} + \frac{2}{3}I_1\right]$$

$$= \frac{-sin^4 x\cos x}{5} - \frac{4sin^2 x\cos x}{15} + \frac{8}{15}\int sinxdx$$

$$= \frac{-sin^4 x\cos x}{5} - \frac{4sin^2 x\cos x}{15} + \frac{8}{15}(-\cos x)$$

$$\Rightarrow \quad \int sin^5 xdx = \frac{-sin^4 x\cos x}{5} - \frac{4sin^2 x\cos x}{15} - \frac{8}{15}\cos x$$

مثال 2۔ $\int sin^4 xdx$ کی قدر معلوم کرو۔

حل: $\int sin^n xdx$ کے تحویلی ضابطے $n = 4$ کے لیے استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$I_4 = \int sin^4 xdx$$

$$= \frac{-sin^3 x\cos x}{4} + \frac{4-1}{4}I_{4-2}$$

$$= -\frac{sin^3 x\cos x}{4} + \frac{3}{4}I_2$$

$$= -\frac{sin^3 x\cos x}{4} + \frac{3}{4}\left[\frac{-sin^{2-1}x\cos x}{2} + \frac{2-1}{2}I_0\right]$$

$$= -\frac{sin^3 x\cos x}{4} + \frac{3}{4}\left[\frac{-sinx\cos x}{2} + \frac{1}{2}I_0\right]$$

جہاں $I_0 = \int sin^0 xdx = \int dx = x$ ہے۔

$$I_4 = -\frac{sin^3 x\cos x}{4} + \frac{3}{4}\left[\frac{-sinx\cos x}{2} + \frac{1}{2}x\right] + C$$

اس طرح $\int sin^4 xdx$ کی قدر $-\frac{sin^3 x\cos x}{4} + \frac{3}{4}\left[\frac{-sinx\cos x}{2} + \frac{1}{2}x\right] + C$ ہے۔

$7.5.2 \int cos^n x dx$ کا تحویلی ضابطہ جب کہ $n \geq 2$ ایک صحیح عدد ہے

فرض کرو کہ

$$I_n = \int cos^n x dx$$

$$= \int cos^{n-1} x cos x dx$$

$$= cos^{n-1} x \int cos x dx - \int \left[\frac{d(cos^{n-1} x)}{dx} \int cos x \, dx\right] dx$$

$$= cos^{n-1} x \sin x - \int [(n-1) cos^{n-2} x(-\sin x) \sin x] \, dx$$

$$= cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int [cos^{n-2} x \sin^2 x] \, dx$$

$$= cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int [cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x)] \, dx$$

$$= cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int cos^{n-2} x \, dx - (n-1) \int cos^n x \, dx$$

$$= cos^{n-1} x \sin x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$\Rightarrow \quad (1 + n - 1) I_n = cos^{n-1} x \sin x + (n-1) I_{n-2}$$

$$\Rightarrow \quad n I_n = cos^{n-1} x \sin x + (n-1) I_{n-2}$$

$$\Rightarrow \quad I_n = \frac{cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}$$

جو کہ $\int cos^n x \, dx$ کا تحویلی ضابطہ ہے۔

مثال 1: $\int cos^n x \, dx$ کا تحویلی ضابطہ استعمال کرکے $\int cos^4 x \, dx$ معلوم کرو۔

حل: ہمیں معلوم ہے کہ

$$I_n = \int cos^n x \, dx = \frac{cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}$$

$n = 4$ لینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$I_4 = \int cos^4 x \, dx = \frac{cos^{4-1} x \sin x}{4} + \frac{(4-1)}{4} I_{4-2}$$

$$= \frac{cos^3 x \sin x}{4} + \frac{3}{4} I_2$$

$$= \frac{cos^3 x \sin x}{4} + \frac{3}{4}\left[\frac{cos^{2-1} x \sin x}{2} + \frac{2-1}{2} I_0\right]$$

$$= \frac{cos^3 x \sin x}{4} + \frac{3}{4}\left[\frac{cos x \sin x}{2} + \frac{1}{2} I_0\right]$$

یہاں $I_0 = \int cos^0 x\, dx = \int dx = x$ ہے۔

اس لیے $\int cos^4 x\, dx$ کی قدر $\frac{3x}{8} + \frac{3cosx \sin x}{8} + \frac{cos^3 x \sin x}{4}$ ہو گی۔

7.5.3 $\int tan^n x\, dx$ کا تحویلی ضابطہ:

مثال 1: $\int tan^n x\, dx$ کا تحویلی ضابطہ اخذ کر کے $\int tan^6 x\, dx$ معلوم کرو۔

حل: فرض کرو کہ $I_n = \int tan^n x\, dx$ تب

$$I_n = \int tan^{n-2} x tan^2 x\, dx$$
$$= \int tan^{n-2} x(-1 + sec^2 x)\, dx$$
$$= -\int tan^{n-2} x\, dx + \int tan^{n-2} x\, sec^2 x\, dx$$

مان لو کہ $\tan x = \mathrm{t}$، تب $sec^2 x dx = dt$

$$= -I_{n-2} + \int t^{n-2}\, dx$$
$$= -I_{n-2} + \frac{t^{n-1}}{n-1} + C$$
$$\Rightarrow \qquad I_n = \frac{tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2} + C$$

جو کہ $\int tan^n x\, dx$ کا مطلوبہ تحویلی ضابطہ ہے نیز $\int tan^6 x\, dx$ کی قدر معلوم کرنے کے لیے فرض کرو کہ

$$I_6 = \int tan^6 x\, dx$$
$$= \frac{tan^5 x}{5} - I_4 = \frac{tan^5 x}{5} - \int tan^4 x\, dx$$
$$= \frac{tan^5 x}{5} - \left(\frac{tan^3 x}{3} - I_2\right)$$
$$= \frac{tan^5 x}{5} - \frac{tan^3 x}{3} + \int tan^2 x\, dx$$
$$= \frac{tan^5 x}{5} - \frac{tan^3 x}{3} + \frac{\tan x}{1} - I_0$$
$$= \frac{tan^5 x}{5} - \frac{tan^3 x}{3} + \frac{\tan x}{1} - \int tan^0 x\, dx$$
$$= \frac{tan^5 x}{5} - \frac{tan^3 x}{3} + \frac{\tan x}{1} - x$$

$$\Rightarrow \qquad \int tan^6 x\,dx = \frac{tan^5 x}{5} - \frac{tan^3 x}{3} + \frac{\tan x}{1} - x + c$$

7.6 اکتسابی نتائج(Learning Outcomes)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ مختلف تکملات حاصل کر کے کئی تفاعلات کے تحویلی ضابطے حاصل کریں گے۔

7.7 کلیدی الفاظ(Key Words)

تفاعل، مشتق، تکمل، تحویلی ضابطہ

7.8 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

7.8.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. $log\ x$ کا تکمل ذیل میں کس کے مساوی ہے۔

a) $x(log\ x - 1)$

b) $log\ x\,(x - 1)$

c) $x\,log\ x + 1$

d) ان میں سے کوئی نہیں

2. $\int x^2\, sin\ x\, dx$ ———————کے مساوی ہوگا۔

a) $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$

b) $x^2 \cos x + 2 \cos x$

c) $-x^2 \cos x + 2x \sin x$

d) ان میں سے کوئی نہیں

3. $\int sec^2(3x+5)dx$ = ———————

a) $\frac{\sec(3x+5)}{5}$

b) $\frac{\tan(3x+5)}{3}$

c) $\frac{\sec(3x+5)}{3}$

d) $\frac{\tan(3x+5)}{5}$

4. $\int \frac{\log x}{x}dx$ کس کے مساوی ہے؟

a) $\log x$

b) $(\log x)^2$

c) $\frac{(\log x)^2}{2}$

d) $\frac{\log x}{x^2}$

5. $I_n = \int x^n e^x\, dx$ کا تحویلی ضابطہ ذیل میں سے کون سا ہے؟

a) $x^n e^x - \mathrm{n}I_{n-1}$

b) $x^{n-1} e^x - \mathrm{n}I_{n-2}$

c) $x^n e^x - I_{n-2}$

d) $x^n e^x - \mathrm{n}I_{n-2}$

7.8.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. تکمل کے عمل کی تشریح کرو اور تکملے کے مختلف طریقوں کو بیان کرو۔

2. اندراج کا طریقہ استعمال کرکے ذیل کے تفاعلات کے تکمل معلوم کرو۔

a) $2xe^{x^2}$

b) $\mathrm{e}^{\tan x} sec^2 x$

c) $\frac{e^{log\,x}}{x}$

d) $x^2 e^{3x}$

3. $x^3 e^{2x}$ معلوم کرو۔

4. ذیل کے تکمل معلوم کرو۔

a) $\frac{1}{1+\sin x}$

b) $\frac{e^x}{1+e^x}$

c) $\frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$

d) $\frac{1}{e^x+e^{-x}}$

5. بتلاؤ کہ $\int f'(ax+b)\,dx = \frac{f(ax+b)}{a}$ ہوگا۔

7.8.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. اگر $I_n = \int cos^n x\, dx$ بتلاؤ کہ $I_n = \frac{1}{n} cos^{n-1}x \cdot \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ ہوگا۔

2. $tan^n x$ کا تکمل محسوب کرو اس سے $\int tan^4 x\, dx$ معلوم کرو۔

اکائی 8۔ تکمل-تحویلی ضابطے-II

(Integration-Reduction Formulae-II)

اکائی کے اجزا

8.0 تمہید

8.1 مقاصد

8.2 $\int sec^n x\,dx$، $\int cot^n x\,dx$، $\int cosec^n x\,dx$ اور $\int (log\,x)^n\,dx$ کے تحویلی ضابطے

8.3 $\int sin^m x cos^n x\,dx$ کا تحویلی ضابطہ

8.4 $\int sinh^n x\,dx$ اور $\int cosh^n x\,dx$ کے تحویلی ضابطے

8.5 اکتسابی نتائج

8.6 کلیدی الفاظ

8.7 نمونہ امتحانی سوالات

8.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

8.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

8.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

8.0 تمہید(Introduction)

اکائی 7 میں ہم غیر معینتکملے اور $\tan^n x$ اور $\sin^n x$، $\cos^n x$ کے تحویلی ضابطوں کے بارے میں جانکاری حاصل کیے تھے۔اس اکائی میں ہم $\sec^n x$، $\cot^n x$، $\operatorname{cosec}^n x$، $\sin^m x\cos^n x$، $\sinh^n x$ اور $\cosh^n x$ کے تحویلی ضابطوں کو اخذ کر کے ان کے استعمال سے کئی سوالات حل کریں گے۔

8.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ سب $\int \sin^m x\cos^n x\, dx$، $\int \operatorname{cosec}^n x\, dx$ ، $\int \cot^n x\, dx$ $\int \sec^n x\, dx$ اور $\int (\log x)^n\, dx$ کے تحویلی ضابطوں کو اخذ کر سکیں گے اور ان کے استعمال سے چند سوالوں کے حل معلوم کریں گے۔ نیز $\int \sinh^n x\, dx$ اور $\int \cosh^n x\, dx$ کے تحویلی ضابطے اخذ کرکے ان کے سوالات حل کریں گے۔

8.2 $\int \sec^n x\, dx$ $\int \cot^n x\, dx$ ، $\int \operatorname{cosec}^n x\, dx$ اور $\int (\log x)^n\, dx$ کے تحویلی ضابطے

$\int \sec^n x\, dx$ کا تحویلی ضابطہ جہاں $n \geq 2$ ایک صحیح عدد ہے:

فرض کرو کہ $I_n = \int \sec^n x\, dx$ ہے۔

تب

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \sec^n x\, dx \\
&= \int \sec^{n-2} x \sec^2 x\, dx \\
&= \sec^{n-2} x \int \sec^2 x\, dx - \int \left[\frac{d}{dx}(\sec^{n-2} x) \int \sec^2 x\, dx\right] dx \\
&= \sec^{n-2} x(\tan x) - \int [(n-2)\sec^{n-3} x \sec x \tan x \cdot \tan x]\, dx \\
&= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int [\sec^{n-2} x \tan^2 x]\, dx \\
&= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int [\sec^{n-2} x(\sec^2 x - 1)]\, dx \\
&= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^n x\, dx + (n-2) \int \sec^{n-2} x\, dx \\
&= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) I_n + (n-2) I_{n-2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad (1+n-2) I_n = \sec^{n-2} x \tan x + (n-2) I_{n-2}$$

$$\Rightarrow \quad (n-1) I_n = \sec^{n-2} x \tan x + (n-2) I_{n-2}$$

$$\Rightarrow \quad I_n = \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{(n-1)} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right) I_{n-2}$$

جو کہ مطلوبہ تحویلی ضابطہ ہے۔

مثال9۔ $\int sec^7x\,dx$ معلوم کرو۔

حل۔ $I_n = \int sec^n x\,dx$ میں $n = 7$ رکھنے پر

$$I_7 = \int sec^7x\,dx$$
$$= \frac{sec^{7-2}x\tan x}{(7-1)} + \left(\frac{7-2}{7-1}\right) I_{7-2}$$
$$= \frac{sec^5x\tan x}{6} + \left(\frac{5}{6}\right) I_5$$
$$= \frac{sec^5x\tan x}{6} + \frac{5}{6}\left(\frac{sec^{5-2}x\tan x}{(5-1)} + \left(\frac{5-2}{5-1}\right) I_{5-2}\right)$$
$$= \frac{sec^5x\tan x}{6} + \frac{5}{6}\left(\frac{sec^3x\tan x}{4} + \left(\frac{3}{4}\right) I_3\right)$$
$$= \frac{sec^5x\tan x}{6} + \frac{5sec^3x\tan x}{24} + \frac{15}{24} I_3$$
$$= \frac{sec^5x\tan x}{6} + \frac{5sec^3x\tan x}{24} + \frac{5}{8}\left(\frac{\sec x\tan x}{2} + \frac{1}{2} I_1\right)$$

جہاں $I_1 = \int sec^1x\,dx = \log(\sec x + \tan x)$ ہے

اس طرح

$$\int sec^7x\,dx = \frac{sec^5x\tan x}{6} + \frac{5sec^3x\tan x}{24} + \frac{5\sec x\tan x}{16} + \frac{5}{16}\log(\sec x + \tan x) + C$$

ہے۔

$\int cot^n x\,dx$ کا تحویلی ضابطہ:

فرض کرو کہ $I_n = \int cot^n x\,dx\ (n > 2)$

تب

$$I_n = \int cot^{n-2}x(cot^2x)\,dx$$
$$= \int cot^{n-2}x(cosec^2x - 1)\,dx$$
$$= \int cot^{n-2}x\,cosec^2x\,dx - \int cot^{n-2}x\,dx$$

مان لو کہ $cot\,x = t$

اس لیے $-cosec^2xdx = dt$

اب

$$I_n = \int t^{n-2}\,(-dt) - I_{n-2}$$

$$= -\frac{t^{n-2+1}}{n-2+1} - I_{n-2}$$
$$= -\frac{cot^{n-1}x}{n-1} - I_{n-2}$$

اس لیے $I_n = \int cot^n x\, dx = -\frac{cot^{n-1}x}{n-1} - I_{n-2}$ ہوگا۔

مثال 1: $\int cot^5 x\, dx$ کی قدر معلوم کرو۔

حل: ہمیں معلوم ہے کہ

$$I_n = \int cot^n x\, dx = -\frac{cot^{n-1}x}{n-1} - I_{n-2}$$
$$I_5 = \int cot^5 x\, dx$$
$$= -\frac{cot^{5-1}x}{5-1} - I_{5-2}$$
$$\Rightarrow \quad I_5 = -\frac{cot^4 x}{4} - I_3 \quad ...(1)$$

اور

$$I_3 = \int cot^3 x\, dx$$
$$= -\frac{cot^{3-1}x}{3-1} - I_{3-2}$$
$$= -\frac{cot^2 x}{2} - I_1$$
$$= -\frac{cot^2 x}{2} - \int cot^1 x\, dx$$
$$I_3 = -\frac{cot^2 x}{2} - \log(\sin x) \quad ...(2)$$

مساوات (1) اور (2) سے

$\int cot^5 x\, dx = -\frac{cot^4 x}{4} + \frac{cot^2 x}{2} + \log(\sin x) + C$ حاصل ہوتا ہے۔

مثال 2: $\int cot^6 x\, dx$ کی قدر معلوم کرو۔

حل: ہمیں معلوم ہے کہ

$$I_n = \int cot^n x\, dx = -\frac{cot^{n-1}x}{n-1} - I_{n-2}$$
$$I_6 = \int cot^6 x\, dx = -\frac{cot^{6-1}x}{6-1} - I_{6-2}$$
$$I_6 = -\frac{cot^5 x}{5} - I_4 \quad ...(1)$$

اور

$$I_4 = -\frac{cot^{4-1}x}{4-1} - I_{4-2}$$

$$= -\frac{cot^3x}{3} - I_2$$
$$= -\frac{cot^3x}{3} - \int cot^2x\,dx$$
$$= -\frac{cot^3x}{3} - \int (cosec^2x - 1)\,dx$$
$$= -\frac{cot^3x}{3} - \int cosec^2x\,dx + \int 1\,dx$$
$$= -\frac{cot^3x}{3} - (-\,cot\,x) + x$$
$$I_4 = -\frac{cot^3x}{3} + cot\,x + x \qquad ...(2)$$

مساوات(1)اور(2)سے

$$\int cot^6x\,dx = -\frac{cot^5x}{5} + \frac{cot^3x}{3} - cot\,x - x + c$$

$\int cosec^n x\,dx$ کا تحویلی ضابطہ:

فرض کرو کہ $I_n = \int cosec^n x\,dx\ (n > 2)$

تب

$$I_n = \int cosec^{n-2}x(cosec^2x)\,dx$$
$$= cosec^{n-2}x\int cosec^2x\,dx - \int\left[\frac{d}{dx}(cosec^{n-2}x)\int cosec^2x\,dx\right]dx$$
$$= cosec^{n-2}x(-\,cot\,x) - \int (n-2)cosec^{n-3}x(-\operatorname{cosec}x\cot x)(-\,cot\,x)dx$$
$$= -cosec^{n-2}x\,cot\,x - (n-2)\int cosec^{n-2}x\,cot^2\,x\,dx$$
$$= -cosec^{n-2}x\,cot\,x - (n-2)\int cosec^{n-2}x(cosec^2x - 1)dx$$
$$= -cosec^{n-2}x\,cot\,x - (n-2)\int cosec^n xdx + (n-2)\int cosec^{n-2}xdx$$
$$= -cosec^{n-2}x\,cot\,x - (n-2)I_n + (n-2)I_{n-2}$$
$$\Rightarrow\quad (1+n-2)I_n = -cosec^{n-2}x\,cot\,x + (n-2)I_{n-2}$$
$$\Rightarrow\quad (n-1)I_n = -cosec^{n-2}x\,cot\,x + (n-2)I_{n-2}$$
$$\Rightarrow\quad I_n = \frac{-cosec^{n-2}x\,cot\,x}{(n-1)} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right)I_{n-2}$$

اس لیے $I_n = \int cosec^n x\,dx = \frac{-cosec^{n-2}x\,cot\,x}{(n-1)} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right)I_{n-2}$ ہوگا۔

مثال1: $\int cosec^n x\,dx$ کے تحویلی ضابطے کے استعمال سے $\int cosec^3x\,dx$ معلوم کرو۔

حل: ہمیں معلوم ہے کہ

$$I_n = \int cosec^n x\,dx = \frac{-cosec^{n-2}x\,cot\,x}{(n-1)} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right)I_{n-2}$$

$$\therefore I_3 = \int cosec^3x\,dx = \frac{-cosec^{3-2}x\cot x}{(3-1)} + \left(\frac{3-2}{3-1}\right) I_{3-2}$$
$$= \frac{-cosec^{3-2}x\cot x}{(3-1)} + \left(\frac{3-2}{3-1}\right) I_{3-2}$$
$$= \frac{-cosec^{1}x\cot x}{2} + \left(\frac{1}{2}\right) I_1$$
$$= \frac{-cosec\,x\cot x}{2} + \left(\frac{1}{2}\right) \int cosec\,x\,dx$$
$$= \frac{-cosec\,x\cot x}{2} + \frac{1}{2}\log\left(\tan\frac{x}{2}\right) + C$$
$$\therefore \int cosec^3x\,dx = \frac{-cosec\,x\cot x}{2} + \frac{1}{2}\log\left(\tan\frac{x}{2}\right) + c$$

$\int (\log x)^n\,dx$ کا تحویلی ضابطہ:

فرض کرو کہ

$$I_n = \int (\log x)^n dx$$
$$\Rightarrow \quad I_n = \int (\log x)^n \cdot 1dx$$
$$= (\log x)^n \cdot \int 1dx - \int \left[\frac{d}{dx}(\log x)^n \int 1dx\right] dx$$
$$= (\log x)^n \cdot x - \int \left[n(\log x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} \cdot x\right] dx$$
$$= x(\log x)^n - n\int (\log x)^{n-1}dx$$
$$\Rightarrow \quad I_n = x(\log x)^n - nI_{n-1}$$

اس لیے $I_n = \int (\log x)^n dx = x(\log x)^n - nI_{n-1}$ مطلوب تحویلی ضابطہ ہے۔

مثال 1: $\int (\log x)^n dx$ کے تحویلی ضابطے کو استعمال کر کے $\int (\log x)^5 dx$ کی قدر معلوم کرو۔

حل: ہمیں معلوم ہے کہ $I_n = \int (\log x)^n dx = x(\log x)^n - nI_{n-1}$

$$I_5 = \int (\log x)^5 dx$$
$$I_5 = x(\log x)^5 - 5I_4 \quad ......(1)$$
$$I_4 = x(\log x)^4 - 4I_3 \quad ......(2)$$
$$I_3 = x(\log x)^3 - 3I_2 \quad ......(3)$$
$$I_2 = x(\log x)^2 - 2I_1 \quad ......(4)$$

$$I_1 = \int \log x\,dx$$
$$= \int \log x \cdot 1dx$$
$$= \log x \int 1\,dx - \int \left[\frac{d}{dx}(\log x) \cdot \int 1\,dx\right] dx$$

$$= x\log x - \int \left(\frac{1}{x}\cdot x\right) dx$$

$$\Rightarrow \quad I_1 = x\log x - x = x(\log x - 1) \qquad ......(5)$$

مساواتوں (1)، (2)، (3)، (4) اور (5) سے

$$\Rightarrow \quad I_5 = \int (log\,x)^5 dx$$
$$= x(log\,x)^5 - 5\left[x(log\,x)^4 - 4\left\{x(log\,x)^3 - 3\left(x(log\,x)^2 - 2x(\log x - 1)\right)\right\}\right]$$
$$= x(log\,x)^5 - 5x(log\,x)^4 + 20x(log\,x)^3 - 60x(log\,x)^2 + 120x(\log x - 1) + c$$

اس طرح

$$\int (log\,x)^5 dx = x(log\,x)^5 - 5x(log\,x)^4 + 20x(log\,x)^3 - 60x(log\,x)^2 + 120x(\log x - 1) + C$$

مثال 2: $\int (log\,x)^3 dx$ معلوم کرو۔

حل: ہمیں معلوم ہے کہ

$$I_n = \int (log\,x)^n dx = x(log\,x)^n - nI_{n-1}$$
$$\therefore I_3 = x(log\,x)^3 - 3I_2$$
$$= x(log\,x)^3 - 3\int (log\,x)^3 dx$$
$$= x(log\,x)^3 - 3\{x(log\,x)^2 - 2I_1\}$$
$$= x(log\,x)^3 - 3\left\{x(log\,x)^2 - 2\int \log x\,dx\right\}$$
$$= x(log\,x)^3 - 3\{x(log\,x)^2 - 2x(\log x - 1)\} + c$$
$$= x(log\,x)^3 - 3x(log\,x)^2 + 6x(\log x - 1) + c$$
$$\therefore \int (log\,x)^3 dx = x(log\,x)^3 - 3x(log\,x)^2 + 6x(\log x - 1) + c$$

8.3 $\int sin^m x cos^n x\, dx$ کا تحویلی ضابطہ

فرض کرو کہ $I_{m,n} = \int sin^m x cos^n x\, dx$ جہاں m, n دو مثبت اعداد ہیں اور $n > 2$ ہے۔

$$\Rightarrow \quad I_{m,n} = \int sin^m x cos^{n-1} x \cdot \cos x\, dx$$
$$= \int (sin^m x \cos x) cos^{n-1} x\, dx$$
$$= cos^{n-1} x \int (sin^m x \cos x)\, dx - \int \left[\frac{d}{dx}(cos^{n-1} x) \int (sin^m x \cos x)\, dx\right] dx \qquad ......(1)$$

اب ہم پہلے $\int (sin^m x \cos x)\, dx$ کی قدر معلوم کرتے ہیں۔ مان لو کہ $\sin x = t \Rightarrow \cos x\, dx = dt$

$$\int (sin^m x \cos x)\, dx = \int t^m dt$$
$$= \frac{t^{m+1}}{m+1}$$

$$= \frac{sin^{m+1}x}{m+1}$$

$$\therefore \int (sin^m x \cos x)\, dx = \frac{sin^{m+1}x}{m+1}$$

اب مساوات(1) سے

$$I_{m,n} = cos^{n-1}x \cdot \frac{sin^{m+1}x}{m+1} - \int (n-1)cos^{n-2}x(-\sin x)\frac{sin^{m+1}x}{m+1}\, dx$$

$$= \frac{cos^{n-1}x \cdot sin^{m+1}x}{m+1} + \left(\frac{n-1}{m+1}\right)\int sin^m x cos^{n-2}x(sin^2 x)\, dx$$

$$= \frac{cos^{n-1}x \cdot sin^{m+1}x}{m+1} + \left(\frac{n-1}{m+1}\right)\int sin^m x cos^{n-2}x(1 - cos^2 x)\, dx$$

$$= \frac{cos^{n-1}x \cdot sin^{m+1}x}{m+1} + \left(\frac{n-1}{m+1}\right)\int sin^m x cos^{n-2}x\, dx - \left(\frac{n-1}{m+1}\right)\int sin^m x cos^n x\, dx$$

$$\therefore I_{m,n} = \frac{cos^{n-1}x \cdot sin^{m+1}x}{m+1} + \left(\frac{n-1}{m+1}\right)I_{m,n-2} - \left(\frac{n-1}{m+1}\right)I_{m,n}$$

$$\Rightarrow \quad \left(1 + \frac{n-1}{m+1}\right)I_{m,n} = \frac{cos^{n-1}x \cdot sin^{m+1}x}{m+1} + \left(\frac{n-1}{m+1}\right)I_{m,n-2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{m+n}{m+1}\right)I_{m,n} = \frac{cos^{n-1}x \cdot sin^{m+1}x}{m+1} + \left(\frac{n-1}{m+1}\right)I_{m,n-2}$$

$$\therefore I_{m,n} = \frac{cos^{n-1}x \cdot sin^{m+1}x}{m+n} + \left(\frac{n-1}{m+n}\right)I_{m,n-2} + c$$

جو کہ $I_{m,n} = \int sin^m x cos^n x\, dx$ کا تحویلی ضابطہ ہے۔

مثال 1: $I_{m,n} = \int sin^m x cos^n x\, dx$ کے تحویلی ضابطے کے استعمال سے $\int sin^2 x cos^3 x\, dx$ معلوم کرو۔

حل: ہمیں معلوم ہے کہ

$$I_{m,n} = \int sin^m x cos^n x\, dx$$

$$= \frac{cos^{n-1}x \cdot sin^{m+1}x}{m+n} + \left(\frac{n-1}{m+n}\right)I_{m,n-2} + c$$

دیے گئے مسئلہ میں $m = 2$ اور $n = 3$، لینے پر

$$I_{2,3} = \int sin^2 x\, cos^3 x\, dx$$

$$= \frac{cos^{3-1}x sin^{2+1}x}{2+3} + \left(\frac{3-1}{2+3}\right)I_{2,3-2} + c$$

$$= \frac{cos^2 x sin^3 x}{5} + \frac{2}{5}I_{2,1} + c$$

$$= \frac{cos^2 x sin^3 x}{5} + \frac{2}{5}\int sin^2 x\, cos\, x\, dx + c$$

مان لو کہ $\sin x = t \Rightarrow \cos x\, dx = dt$

$$= \frac{cos^2 x sin^3 x}{5} + \frac{2}{5}\int t^2\, dt + c$$

$$= \frac{cos^2 x sin^3 x}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{t^3}{3} + c$$
$$= \frac{cos^2 x sin^3 x}{5} + \frac{2}{15} sin^3 x + c$$

اس لیے

$\int sin^2 x\, cos^3 x\, dx = \frac{cos^2 x sin^3 x}{5} + \frac{2}{15} sin^3 x + c$ ہوگا۔

مثال2: $\int sin^5 x cos^4 x\, dx$ معلوم کرو۔

حل: $I_{m,n} = \int sin^m x cos^n x\, dx$ کے تحویلی ضابطے سے ہمیں معلوم ہے کہ

$$I_{m,n} = \frac{cos^{n-1} x \cdot sin^{m+1} x}{m+n} + \left(\frac{n-1}{m+n}\right) I_{m,n-2} + c$$

دیے گئے مسئلہ میں $m = 5$ اور $n = 4$، لینے پر

$$I_{5,4} = \int sin^5 x\, cos^4 x\, dx$$
$$= \frac{cos^{4-1} x sin^{5+1} x}{5+4} + \left(\frac{4-1}{5+4}\right) I_{5,4-2}$$
$$= \frac{cos^3 x sin^6 x}{9} + \frac{3}{9} I_{5,2}$$
$$I_{5,4} = \frac{cos^3 x sin^6 x}{9} + \frac{1}{3} I_{5,2} \qquad ......(1)$$
$$I_{5,2} = \int sin^5 x\, cos^2 x\, dx$$
$$= \frac{cos^{2-1} x sin^{5+1} x}{5+2} + \left(\frac{2-1}{5+2}\right) I_{5,2-2}$$
$$= \frac{\cos x\, sin^6 x}{7} + \frac{1}{7} I_{5,0}$$
$$= \frac{\cos x\, sin^6 x}{7} + \frac{1}{7} \int sin^5 x\, cos^0 x\, dx$$
$$= \frac{\cos x\, sin^6 x}{7} + \frac{1}{7} \int sin^5 x\, dx$$
$$I_{5,2} = \frac{\cos x sin^6 x}{7} + \frac{1}{7} I_5 \qquad ......(2)$$

اب

$$I_5 = \int sin^5 x\, dx$$
$$= -\frac{\sin^{5-1} x \cos x}{5} + \frac{5-1}{5} I_{5-2}$$
$$= -\frac{\sin^4 x \cos x}{5} + \frac{4}{5} I_3$$
$$= -\frac{\sin^4 x \cos x}{5} + \frac{4}{5} \int sin^3 x\, dx$$
$$= -\frac{\sin^4 x \cos x}{5} + \frac{4}{5} \left[-\frac{\sin^{3-1} x \cos x}{3} + \frac{3-1}{3} I_{3-2} \right]$$

$$= -\frac{\sin^4 x \cos x}{5} - \frac{4\sin^2 x \cos x}{15} + \frac{8}{15} I_1$$

$$= -\frac{\sin^4 x \cos x}{5} - \frac{4\sin^2 x \cos x}{15} + \frac{8}{15}\int \sin x \, dx$$

$$I_5 = -\frac{\sin^4 x \cos x}{5} - \frac{4\sin^2 x \cos x}{15} - \frac{8}{15}\cos x \qquad \text{......(3)}$$

مساوات(1)،(2)اور(3)سے حاصل ہے

اس لیے

$$\int sin^5 x\, cos^4 x\, dx$$

$$= \frac{cos^3 x sin^6 x}{9} + \frac{1}{3}\left[\frac{\cos x\, sin^6 x}{7} + \frac{1}{7}\left(-\frac{\sin^4 x \cos x}{5} - \frac{4\sin^2 x \cos x}{15} - \frac{8}{15}\cos x\right)\right] + c$$

$$\therefore \int sin^5 x\, cos^4 x\, dx$$

$$= \frac{cos^3 x sin^6 x}{9} + \frac{\cos x\, sin^6 x}{21} - \frac{\sin^4 x \cos x}{105} - \frac{4\sin^2 x \cos x}{315} - \frac{8}{315}\cos x + c$$

8.4 $\int sinh^n x\, dx$ اور $\int cosh^n x\, dx$ کے تحویلی ضابطے

$\int sinh^n x\, dx$ کا تحویلی ضابطہ:

فرض کرو کہ

$$I_n = \int sinh^n x\, dx$$

$$= \int sinh^{n-1} x\, sinh\, x\, dx$$

$$= sinh^{n-1} x (cosh\, x) - \int (n-1) sinh^{n-2} x\, (cosh\, x)\, cosh\, x\, dx$$

$$= sinh^{n-1} x cosh\, x - (n-1)\int sinh^{n-2} x\;\; cosh^2\, x\, dx$$

$$= sinh^{n-1} x cosh\, x - (n-1)\int sinh^{n-2} x\;\; (1 + sinh^2\, x)\, dx$$

$$= sinh^{n-1} x cosh\, x - (n-1)\int sinh^{n-2} x\;\; dx - (n-1)\int sinh^n x\;\; dx$$

$$\Rightarrow \qquad I_n = sinh^{n-1} x cosh\, x - (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$\Rightarrow \qquad (1 + n - 1) I_n = sinh^{n-1} x cosh\, x - (n-1) I_{n-2}$$

$$\Rightarrow \qquad I_n = \frac{1}{n} sinh^{n-1} x cosh\, x - \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}$$

جو کہ $\int sinh^n x\, dx$ کا تحویلی ضابطہ ہے۔

$\int cosh^n x\, dx$ کا تحویلی ضابطہ:

فرض کرو کہ

$$I_n = \int cosh^n x\, dx$$

$$= \int cosh^{n-1}x\, cosh\, x\, dx$$

$$= cosh^{n-1}x(sinh\, x) - \int (n-1)cosh^{n-2}x\,(sinh\, x)\, sinh\, x\, dx$$

$$= cosh^{n-1}xsinh\, x - (n-1)\int cosh^{n-2}x\ \ sinh^2\, x\, dx$$

$$= cosh^{n-1}xsinh\, x - (n-1)\int cosh^{n-2}x\ \ (cosh^2\, x - 1)\, dx$$

$$= cosh^{n-1}xsinh\, x - (n-1)\int (cosh^n\, x - cosh^{n-2}x\ )\, dx$$

$$= cosh^{n-1}xsinh\, x - (n-1)\int cosh^n x\ \ dx + (n-1)\int cosh^{n-2}x\ \ dx$$

$$\Rightarrow \quad I_n = cosh^{n-1}xsinh\, x - (n-1)I_n + (n-1)I_{n-2}$$

$$\Rightarrow \quad (1+n-1)I_n = cosh^{n-1}xsinh\, x + (n-1)I_{n-2}$$

$$\Rightarrow \quad nI_n = cosh^{n-1}xsinh\, x + (n-1)I_{n-2}$$

$$\Rightarrow \quad I_n = \frac{1}{n}cosh^{n-1}xsinh\, x + \frac{(n-1)}{n}I_{n-2}$$

جو کہ $\int cosh^n x\, dx$ کا تحویلی ضابطہ ہے۔

مثال 1: $\int sinh^3 x\, dx$ اور $\int cosh^5 x\, dx$ کو معلوم کرو۔

حل: (1) فرض کرو کہ

$$I_3 = \int sinh^3 x\, dx$$

تحویلی ضابطہ $I_n = \int sinh^n x\, dx = \frac{1}{n}sinh^{n-1}xcosh\, x - \frac{(n-1)}{n}I_{n-2}$ استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہے۔

$$I_3 = \int sinh^3 x\, dx = \frac{1}{3}sinh^{3-1}xcosh\, x - \frac{(3-1)}{3}I_{3-2}$$

$$= \frac{1}{3}sinh^2 xcosh\, x - \frac{2}{3}I_1$$

$$= \frac{1}{3}sinh^2 xcosh\, x - \frac{2}{3}\int \sinh x\, dx$$

$$= \frac{1}{3}sinh^2 xcosh\, x - \frac{2}{3}\cosh x + c$$

$$\therefore \int sinh^3 x\, dx = \frac{1}{3}sinh^2 xcosh\, x - \frac{2}{3}\cosh x + c$$

(2) ہمیں معلوم ہے کہ

$$I_n = \int cosh^n x\, dx = \frac{1}{n}cosh^{n-1}xsinh\, x + \frac{(n-1)}{n}I_{n-2}$$

$$\therefore I_5 = \int cosh^5 x\, dx = \frac{1}{5}cosh^{5-1}xsinh\, x + \frac{(5-1)}{5}I_{5-2}$$

$$= \frac{1}{5} cosh^4 x sinh\ x + \frac{4}{5} I_3$$

اور

$$I_3 = \int cosh^3 x\ dx = \frac{1}{3} cosh^{3-1} x sinh\ x + \frac{(3-1)}{3} I_{3-2}$$
$$= \frac{1}{3} cosh^2 x sinh\ x + \frac{2}{3} I_1$$
$$= \frac{1}{3} cosh^2 x sinh\ x + \frac{2}{3} \int \cosh x\ dx$$
$$= \frac{1}{3} cosh^2 x sinh\ x + \frac{2}{3} sinh\ x$$
$$\therefore I_5 = \int cosh^5 x\ dx$$
$$= \frac{1}{5} cosh^4 x sinh\ x + \frac{4}{5} \left\{ \frac{1}{3} cosh^2 x sinh\ x + \frac{2}{3} sinh\ x \right\} + c$$

اس لیے $\int cosh^5 x\ dx$ کی قدر $\frac{1}{5} cosh^4 x sinh\ x + \frac{4}{15} cosh^2 x sinh\ x + \frac{8}{15} sinh\ x + c$ ہے۔

مثال 2: $\int sinh^n x\ dx$ اور $\int cosh^n x\ dx$ کے تحویلی ضابطے استعمال کرکے $\int sinh^4 x\ dx$ اور $\int cosh^4 x\ dx$ کی قدریں معلوم کرو۔

حل: (1) فرض کرو کہ

$$I_4 = \int cosh^4 x\ dx$$

$\int cosh^n x\ dx$ کے تحویلی ضابطے سے ہمیں معلوم ہے کہ

$$I_n = \int cosh^n x\ dx = \frac{1}{n} cosh^{n-1} x sinh\ x + \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}$$
$$\therefore I_4 = \int cosh^4 x\ dx = \frac{1}{4} cosh^{4-1} x sinh\ x + \frac{(4-1)}{4} I_{4-2}$$
$$= \frac{1}{4} cosh^3 x sinh\ x + \frac{3}{4} I_2$$
$$= \frac{1}{4} cosh^3 x sinh\ x + \frac{3}{4} \left\{ \frac{1}{2} cosh^{2-1} x sinh\ x + \frac{(2-1)}{2} I_{2-2} \right\}$$
$$= \frac{1}{4} cosh^3 x sinh\ x + \frac{3}{4} \left\{ \frac{1}{2} \cosh x\ sinh\ x + \frac{1}{2} I_0 \right\}$$
$$= \frac{1}{4} cosh^3 x sinh\ x + \frac{3}{8} \cosh x\ sinh\ x + \frac{3}{8} x + c$$

اس لیے $\int cosh^4 x\ dx$ کی قدر $\frac{1}{4} cosh^3 x sinh\ x + \frac{3}{8} (\cosh x\ sinh\ x + x) + c$ ہے۔

(2) فرض کرو کہ

$$I_4 = \int sinh^4 x\ dx$$

تحویلی ضابطہ $I_n = \int sinh^n x\ dx = \frac{1}{n} sinh^{n-1} x cosh\ x - \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}$ استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہے۔

$$
\begin{aligned}
I_4 &= \int sinh^4x\,dx \\
&= \frac{1}{4} sinh^{4-1}xcosh\,x - \frac{(4-1)}{4} I_{4-2} \\
&= \frac{1}{4} sinh^3xcosh\,x - \frac{3}{4} I_2 \\
&= \frac{1}{4} sinh^3xcosh\,x - \frac{3}{4}\left\{\frac{1}{2} sinh^{2-1}xcosh\,x - \frac{(2-1)}{2} I_{2-2}\right\} \\
&= \frac{1}{4} sinh^3xcosh\,x - \frac{3}{4}\left\{\frac{1}{2} \sinh x\, cosh\,x - \frac{1}{2} I_0\right\} \\
&= \frac{1}{4} sinh^3xcosh\,x - \frac{3}{8} \sinh x\, cosh\,x + \frac{3}{8} x + c
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \int sinh^4x\,dx = \frac{1}{4} sinh^3xcosh\,x - \frac{3}{8}(\sinh x\, cosh\,x - x) + c
$$

8.5 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ مختلف تکملات حاصل کر کے کئی تفاعلات کے تحویلی ضابطے حاصل کریں گے۔

8.6 کلیدی الفاظ (Key Words)

تفاعل، مشتق، تکمل، تحویلی ضابطہ

8.7 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

8.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. $\int cot^3x\,dx$ کس کے مساوی ہے

(a $\frac{cot^2x}{2} - \log(\sin x)$

(b $-\frac{cot^2x}{2} - \log(\sin x)$

(c $-\frac{cot^2x}{2} + \log(\sin x)$

(d ان میں سے کوئی نہیں

2. $\int sin^nx\cos x\,dx$ کس کے مساوی ہے

(a $\frac{sin^{n+1}x}{n+1}$

$\frac{sin^n x}{n}$ (b

$\frac{sin^{n-1} x}{n}$ (c

$\frac{sin^n x}{n-1}$ (d

8.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. $\int cot^4 x\, dx$ معلوم کرو۔
2. $\int (\log x)^2\, dx$ کی قدر معلوم کرو۔
3. $\int sinh^2 x\, dx$ اور $\int cosh^3 x\, dx$ معلوم کرو۔

8.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. اگر $I_n = \int cot^n x\, dx$ ہوتب ثابت کرو کہ $I_n = \frac{-\cot^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}$ ہوگا۔ نیز اس کی مدد سے $\int cot^7 x\, dx$ معلوم کرو۔
2. $\int sin^m x\, cos^n x\, dx$ کا تحویلی ضابطہ اخذ کرو اور اس کے استعمال سے $\int sin^2 x\, cos^3 x\, dx$ کی قدر معلوم کرو۔
3. $sec^n \theta$ کا تکمل کرو اور اس کے ذریعے سے $\int sec^3 \theta\, d\theta$ معلوم کرو۔

اکائی 9۔ سلائسنگ، ڈسک اور واشر کے ذریعے حجم

(Volumes by Slicing, Disks and Washers)

اکائی کے اجزا

9.0 تمہید

9.1 مقاصد

9.2 سلائسنگ، ڈسک اور واشر کے ذریعے حجم

9.2.1 سلائسنگ کے ذریعے حجم

9.2.1 ڈسک کے ذریعے حجم

9.2.3 واشر کے ذریعے حجم

9.3 اکتسابی نتائج

9.4 کلیدی الفاظ

9.5 نمونہ امتحانی سوالات

9.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

9.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

9.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

9.0 تمہید(Introduction)

خمیدہ حدود(Curved Boundaries) رکھنے والے علاقوں(Regions) کے رقبے سے ہم ان خمیدہ قاعدے رکھنے والے استوانوں (Cylinders) کے حجم کی تحسیب کر سکتے ہیں۔اس کے لیے ان استوانوں کے خانڈوں کے رقبوں کو ان کی اونچائی سے ضرب دیتے ہیں۔اس طرح اس قسم استوانوں کے حجمسے دیگر ٹھوس اجسام کے حجم حاصل کر سکتے ہیں۔

جب کسی محور کے اطراف کسی سلائس کو گھمایا جاتا ہے،تب ایک ٹھوس مجسم حاصل ہوتا ہے۔یعنی سلائسنگ کے طریقہ کا نہایت ہی عام اطلاق گھماؤسے ٹھوس حاصل کرنا ہے۔

اگر کسی علاقہ کو ٹھوس بنانے کے لیے گھمایا جائے اور گردشی محور پر ON یا کراس CROSS بارڈر نہیں بنتی ہو تب،اس ٹھوس میں چھید یا سوراخ ہوتا ہے۔اس صورت میں گردشی محور سے عمود عرضی تراشے(Cross-Sections) بجائے ڈسکس کے،واشرس ہوتے ہیں۔

9.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ سلائسنگ،ڈسکس اور واشر کے طریقوں سے اجسام کے حجم معلوم کر سکیں گے۔

9.2 سلائسنگ،ڈسک اور واشر کے ذریعے حجم(Volumes by Slicing, Disks and Washers)

اب ہم سلائسنگ،ڈسکس اور واشر کے طریقوں کا مطالعہ کرکے ان کی مدد سے اجسام کے حجم حاصل کرنا سیکھیں گے۔اور پھر کچھ مثالوں کی مدد سے ان پر عبور حاصل کریں گے۔

9.2.1 سلائسنگ کے ذریعے حجم(Volumes by Slicing)

فرض کرو کہ ہم شکل(9.2.1.1) میں دکھائے گئے ایک قسم کے ٹھوس کا حجم معلوم کرنا چاہتے ہیں۔بند وقفہ $[a, b]$ میں ہر نقطہ یا مقام x پر اس ٹھوس کے عرضی تراش(Cross Section) کا علاقہ R(x) اور اس کا رقبہ $A(x)$ ہے۔اس سے رقبہ A،x کا حقیقی(Real Valued) تفاعل(Function) بن جاتا ہے۔مزید برآں اگر یہ x کا مسلسل(Continuous) تفاعل ہو تو ہم تکمل(Integration) کے ذریعے ٹھوس کے حجم کو ذیل کے مطابق واضح اور معلوم کرکے حساب لگا سکتے ہیں۔

ہم بند وقفہ $[a, b]$ کے پارٹیشنس x محور کے ساتھ ساتھ حسب معمول طریقہ سے کرتے ہیں۔یعنی ہم طوس کی چکتیوں کی طرح ٹھوس کے سلائس اس طرح بناتے ہیں کہ ان کی سطحیں پاٹیشن نقاط سے عمودا ًرہیں۔

مقام یا نقاط x_{k-1} اور x_k سطحوں کے درمیان kویں سلائس کا حجم تقریباًوہی ہوتا ہے جو کہ علاقہ $R(x)$ پر بنی دو سطحوں کے درمیان استوانہ کا

ہوتا ہے۔اس حصہ کی توسیع شدہ شکل کو شکل(9.2.1.2) میں دکھایا گیا ہے۔اس استوانہ کا حجم یوں معلوم کیا جاتا ہے:

$$x_k = \text{اساس کا رقبہ} \times \text{اونچائی}$$
$$= A(x_k) \times \left(\text{نقاط } x_{k-1} \text{ اور } x_k \text{ پر سطحوں کے درمیان فاصلہ}\right)$$
$$= A(x_k) \times (\Delta x)$$

لہٰذا ٹھوس کے حجم کا اندازہ استوانوں کے حجموں کے مجموعہ سے کیا جاتا ہے

$$\sum_{k=1}^{n} A(x_k) \times (\Delta x)$$

یہ وقفہ $[a,b]$ پر تفاعل $A(x)$ کے لیے ریمان سم (Riemann Sum) ہے۔

ہم مجموعوں (Sums) کے ان اندازوں سے اس بات کی توقع کرتے ہیں کہ وقفہ $[a,b]$ پر مکمل نمونہ کا حصہ (Portion) مائل بہ صفر ہوتا کہ ٹھوس کے حجم کو لمٹنگ (Limiting) تکملسے واضح کر سکیں۔

تعریف: a سے b تک A کا تکملیعنی $x = a$ سے $x = b$ تک عرضی تراش $A(x)$ معینتکمل (Definite Integrals) ٹھوس کا حجم ہے۔

$$V = \int_a^b A(x)dx \qquad (1)$$

مساوات (1) کے اطلاق کے لیے ہم درج ذیل مرحلوں کا استعمال کرتے ہیں

مرحلہ 1: ٹھوس اور عرضی تراش کے نمونہ کا خاکہ بنائں

مرحلہ 2: $A(x)$ کا ضابطہ معلوم کریں

مرحلہ 3: تکمل کے حدود معلوم کریں

مرحلہ 4: حجم معلوم کرنے کے لیے $A(x)$ کو تکمل کریں

مثال 1- ایک 3m بلند پرامڈ کے مربع نما اساس کا ضلع 3m ہے۔پرامڈ کا راس (Vertex) سے xm لمبائی والے ارتفاع (Altitude) پر ایک xm ضلع والا مربع نما عرضی تراش عموداً واقع ہے۔اس پرامڈ کا حجم معلوم کیجیے۔

حل- مرحلہ 1: سوال کے مطابق x محور کے ہمراہ xm لمبائی والے ارتفاع (Altitude) کا پرامڈ کھینچا۔ مربع نما عرضی تراشے دکھایا۔ پرامڈ کا راس O ہے۔

مرحلہ 2: ارتفاع کی لمبائی x پر x میٹر ضلع کا مربع نما عرضی تراش کا نمونہ ہے۔اس لیے اس کا رقبہ

$$A(x) = x^2$$

مرحلہ 3: مربعوں کے ضلعوں کی لمبائیاں $x = 0$ سے $x = 3$ تک ہیں۔

مرحلہ 4: اب پرامڈ کا حجم ہو گا

$$V = \int_a^b A(x)dx$$
$$= \int_0^3 x^2 dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9m^3$$

مثال2- 3m نصف قطر کے ایک استوانہ سے ایک خمیدہ تکونیا(Curved Wedge) کو دو سطحوں سے تراش کر حاصل کیا گیا۔ایک سطح استوانہ کے تکونیا سے عمو ہے-دوسری سطح استوانہ کے مرکز سے پہلی سطح سے 45° کا ذاویہ بناتے ہوئے گزر رہی ہے۔ تکونیا کا حجمعلوم کیجیے۔

حل- مرحلہ 1: سوال کے مطابق وتیج کھینچا گیا۔اس میں نمونہ عرضی تراش x محور سے عمودا دکھایا۔ عرضی طراشے مستطیل ہیں

مرحلہ 2: مبدا O سے x محور کے ہمراہ x فاصلہ پر واقع عرضی تراش مستطیل نما ہے۔دوسری سطح پہلی سطح سے کا ذاویہ بنا رہی ہے۔استوانہ کا نصف قطر 3 میٹر ہے۔اس لیے

مستطیلی عرضی تراش کی اونچائی $= xm$

مستطیلی عرضی تراش کی چوڑائی $= 2\sqrt{9-x^2}m$

اس لیے

$A(x) =$ چوڑائی × اونچائی

$$= (x) \times 2\sqrt{9-x^2}$$
$$= 2x\sqrt{9-x^2}$$

مرحلہ 3: مستطیلی عرضی تراش کی سلائسنگ $x = 0$ سے $x = 3$ تک ہے۔

مرحلہ 4: تکونیا کا حجم ہو گا

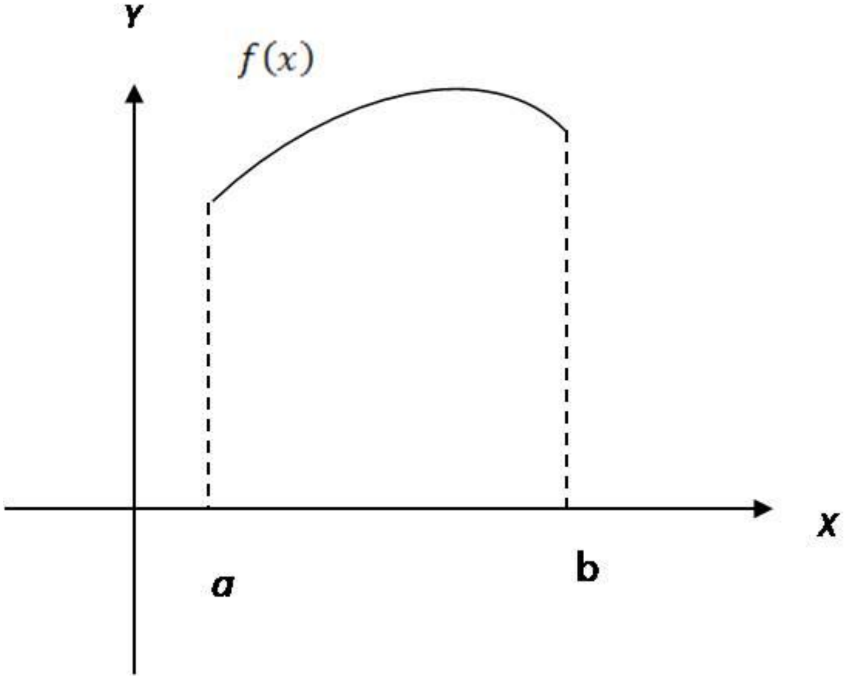
$$V = \int_a^b A(x)dx$$
$$= \int_0^3 2x\sqrt{9-x^2}dx$$
$$= \left[-\frac{2(9-x^2)^{3/2}}{3}\right]_0^3$$
$$= 0 + \frac{2}{3}(9)^{3/2}$$
$$= 18m^3$$

9.2.2 ڈسک کے ذریعے حجم(Volumes by Disks)

گھماؤ کے ٹھوس وہ ٹھوس ہیں جن کی شکل وصورت یا ڈیل ڈول(Shapes) کو محوروں کے گرد سطحی علاقوں کو گھما کر تقلیق کی جاتی ہے۔مثلاً دھاگے کی چرخیاں(Spools)،بلیارڈ(Billiard) کی گیندیں گھماؤ کے ٹھوس ہیں۔

بعض اوقات گھماؤ سے بننے والے ٹھوسوں کے حجم جیومیٹری کے ضابطوں سے معلوم کر سکتے ہیں۔لیکن جب ہم کسی بلمپ(Blimp) کا حجم معلوم کرنا چاہتے ہیں یا پھر کسی حصہ کا جسے خراد لیتھ پر موڑنا چاہتے ہیں یا پھر وزن کا اندازہ لگانا چاہتے ہیں تب ہم بجائے جیومیٹری کے ضابطوں کے اپنے جوابوں کے حصول کے لیے احصہ (Calculus) کا استعمال کرتے ہیں۔

اگر ہم کسی علاقے کو مسلسل تفاعل کے گراف $y = R(x), a \le x \le b$ اور x محور کے درمیان کے علاقے کے طور پر آراستہ کر سکیں اور گردشی محور کو x محور، تب ہم ٹھوس کا حجم ذیل کے طریقے سے معلوم کر سکتے ہیں۔ گردشی محور سے ٹھوس کا نمونہ ٹپیکل(Typical) عرضی تراش ڈسک ہے۔ جس کا نصف قطر $R(x)$ اور رقبہ $A(x) = \pi(radius)^2 = \pi[R(x)]^2$ ہے۔ چونکہ ٹھوس کا حجم $x = a$ سے $x = b$ تک A کا تکمل ہے۔ اس لیے $x = a$ سے $x = b$ تک $[R(x)]^2$ کا تکمل ٹھوس کا حجم ہو گا۔



شکل 9.2.2.1

اس لیے ٹھوس کا حجم

$$V = \int_a^b \pi[R(x)]^2 dx \qquad (2)$$

اس مساوات کا استعمال کر کے ہم درج ذیل مراحل کی مدد سے حجم معلوم کر سکتے ہیں:

مرحلہ 1: علاقہ کھینچیں اور نصف قطر تفاعل $R(x)$ کی شناخت کریں

مرحلہ 2: $R(x)$ کا مربع لیں اور π سے ضرب دیں

مرحلہ 3: حجم معلوم کرنے کے لیے تکمل کریں

y محور کے اطراف x محور اور خطہ منحنی $x = R(y), c \le y \le d$ کے درمیان علاقہ کو گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کرنے کے لیے ہم مساوات (2) میں x کی بجائے y رکھتے ہیں۔ اس لیے

$$V = \int_c^d \pi[R(y)]^2 dy \quad \text{.....(3)}$$

یاد رکھیے نیچے حل شدہ مثال (2) میں x محور، گردشی محور نہیں ہے بلکہ یہ حجم معلوم کرنے کے لیے اصول ہے۔ مناسب لمٹس کے درمیان $\pi[R(x)]^2$ کو تکمل کیجیے۔

مثال3- ایک ٹھوس کو بنانے کے لیے خط منحنی $y = \sqrt{x}, 0 \le x \le 4$ اور x محور کے درمیان علاقہ کو x محور کے گرد گھمایا گیا۔اس ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

حل- سوال کے مطابق ہم نے علاقہ ،نصف قطر اور گھمانے سے بنے ٹھوس کی شکلیں کھینچیں۔

اب ٹھوس کا حجم ہو گا:

شکل

$$V = \int_a^b \pi[R(x)]^2 dx$$

$$= \int_0^4 \pi\left[\sqrt{x}\right]^2 dx$$

$$= \pi \int_0^4 x dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4$$

$= 8\pi$ مکعب اکائی

مثال4- ایک ٹھوس کو بنانے کے لیے خط $y = 0, x = 2$ اور منحنی $y = x^3$ کے درمیانی علاقہ کو x محور کے گرد گھمایا گیا۔اس طرح بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

حل- سوال کے مطابق ہم نے علاقہ ،نصف قطر اور گھمانے سے بنے ٹھوس کی شکلیں کھینچیں۔

اب ٹھوس کا حجم ہو گا:

$$V = \int_a^b \pi[R(x)]^2 dx$$

$$= \int_0^2 \pi[x^3]^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 x^3 dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^7}{7}\right]_0^2$$

$= \frac{128\pi}{7}$ مکعب اکائی

مثال5- خط $y = 1$ کے گرد منحنی $y = \sqrt{x} - 1,$ اور خطوط $x = 1, x = 4$ سے گھرے علاقہ کو گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

حل-   سوال کے مطابق ہم نے علاقہ ،نصف قطر اور گھمانے سے بنے ٹھوس کی شکلیں کھینچیں۔

اب ٹھوس کا حجم ہو گا

$$V = \int_a^b \pi[R(x)]^2 dx$$

$$= \int_1^4 \pi\left[\sqrt{x} - 1\right]^2 dx$$

$$= \pi \int_1^4 \left[x - 2\sqrt{x} + 1\right] dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2} + x\right]_1^4$$

$= \frac{7\pi}{6}$ مکعب اکائی

مثال6- y محور کے گرد y محور اور خط منحنی $x = \frac{2}{y}$ اور خطوط $1 \le y \le 4$ سے گھرے علاقہ کو گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

حل-   سوال کے مطابق ہم نے علاقہ ،نصف قطر اور گھمانے سے بنے ٹھوس کی شکلیں کھینچیں۔

اب ٹھوس کا حجم ہو گا

$$V = \int_c^d \pi[R(y)]^2 dy$$

$$= \int_1^4 \pi\left[\frac{2}{y}\right]^2 dy$$

$$= 4\pi \int_1^4 \left[\frac{1}{y^2}\right] dy$$

$$= 4\pi \left[-\frac{1}{y}\right]_1^4$$

$= 3\pi$ مکعب اکائی

مثال7- خط $x = 3$ کے گرد پیرابولا $x = 2 - y^2$ اور خط $x = 3$ سے گھرے علاقہ کو گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

حل-   سوال کے مطابق ہم نے علاقہ ،نصف قطر اور گھمانے سے بنے ٹھوس کی شکلیں کھینچیں۔

اب ٹھوس کا حجم ہو گا

$$V = \int_c^d \pi[R(y)]^2 dy$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi[2 - y^2]^2 dy$$

$$= 4\pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [4 - 4y^2 + y^4] dy$$

$$= 4\pi \left[4y - 4\frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$$

$= \frac{64\pi\sqrt{2}}{15}$ مکعب اکائی

مثال 8- صنوبری $r = a(1 - \cos\theta)$ کو ابتدائی خط کے گرد گھمانے پر حاصل ٹھوس کا حجم حاصل کیجیے۔

حل- شکل سے دی گئی منحنی کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس مجسم کا حجم درج ذیل ہوتا ہے

$$V = \int_0^{2a} \pi[R(x)]^2 dx$$

دیا ہے

$$r = a(1 - \cos\theta)$$

ہم جانتے ہیں

$$x = r\cos\theta$$
$$= a(1 - \cos\theta)\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad dx = a(-\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta)d\theta$$

اور

$$y = r\sin\theta$$
$$= a(1 - \cos\theta)\sin\theta$$

اب ہم تکمل کی لمٹ کو بدلتے ہیں

جب $x = 0$، تب $\theta = 0$ اور جب $x = 2a$، تب $\theta = \pi$

اس لیے

$$V = \int_0^{\pi} \pi[a(1 - \cos\theta)\sin\theta]^2 a(-\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta)d\theta$$

$$= \pi a^3 \int_0^{\pi} (1 - \cos\theta)^2 \sin^3\theta\,(-1 + 2\cos\theta)d\theta$$

$$= \pi a^3 \int_0^{\pi} \left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2 2\sin^3\frac{\theta}{2}\cos^3\frac{\theta}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - 3\sin^2\frac{\theta}{2}\right)d\theta$$

$$= \pi a^3 \int_0^{\pi} 32\sin^7\frac{\theta}{2}\cos^3\frac{\theta}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - 3\sin^2\frac{\theta}{2}\right)d\theta$$

$$= \pi a^3 \int_0^{\pi} \left(32\sin^7\frac{\theta}{2}\cos^5\frac{\theta}{2} - 96\sin^9\frac{\theta}{2}\cos^3\frac{\theta}{2}\right)d\theta$$

$$= 32\pi a^3 \int_0^{\pi} sin^7 \frac{\theta}{2} cos^5 \frac{\theta}{2} d\theta - 96\pi a^3 \int_0^{\pi} sin^9 \frac{\theta}{2} cos^3 \frac{\theta}{2} d\theta$$

مان لیجیے کہ $\frac{\theta}{2} = \omega$،تب $d\theta = 2d\omega$

اب، $\theta = 0$،تب $\omega = 0$ اور جب $\theta = \pi$،تب $\omega = \frac{\pi}{2}$

اس لیے

$$V = 32\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\, sin^7 \omega\, cos^5 \omega\, d\omega - 96\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\, sin^9 \omega\, cos^3 \omega\, d\omega$$

بیٹا تفاعل(Beta Function) کی مدد سے ہم جانتے ہیں کہ

$$B(m,n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\, sin^{2m-1} \theta\, cos^{2n-1} \theta\, d\theta$$

اس لیے

$$V = 32\pi a^3[B(4,3) - 3B(5,2)]$$

اس کے علاوہ ہم جانتے ہیں کہ $B(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$

اس لیے

$$V = 32\pi a^3 \left[\frac{3! \times 2!}{6!} - 3 \times \frac{4! \times 1!}{6!}\right]$$
$$= 32\pi a^3 \left[\frac{2 \times 1}{6 \times 5 \times 4} - 3 \times \frac{1}{6 \times 5}\right]$$
$$= 32\pi a^3 \left[\frac{1}{60} - \frac{1}{10}\right]$$
$$= -\frac{8}{3}\pi a^3$$

اس لیے صنوبری $r = a(1 - \cos\theta)$ کو ابتدائی خط کے گرد گھمانے پر حاصل ٹھوس کا حجم $\frac{8}{3}\pi a^3$ ہوگا۔

9.2.3 واشر کے ذریعے حجم(Volume by Washer)

اگر کسی علاقہ کو ٹھوس بنانے کے لیے گھمایا جائے اور گردشی محور پر ON یا کراس CROSS بارڈر نہیں بنتی ہو تب، اس ٹھوس میں چھید یا سوراخ ہوتا ہے۔اس صورت میں گردشی محور سے عمود عرضی تراشے(Cross-Sections) بجائے ڈسکس کے، واشرس ہوتے ہیں۔ واشر ضابطہ درج ذیل ہوتا ہے:

$$V = \int_a^b \pi[\{R(x)\}^2 - \{r(x)\}^2]dx$$

جہاں

$R(x) =$ بیرونی نصف قطر

$r(x) =$ اور اندرونی نصف قطر

یہ بات ذہن نشیں رکھیں کہ اگر $r(x)$ تمام تر وقفہ $[a, b]$ کے لیے صفر ہو تب اوپر دی گئی مساوات سے حجم معلوم کرنے کا ڈسک ضابطہ حاصل ہوتا ہے، پس واضح ہوا کہ ڈسک ضابطہ واشر ضابطہ کا ایک مخصوص کیس ہے۔

اوپر دی گئی مساوات کے اطلاق کے لیے ہم درج ذیل مرحلوں کا استعمال کرتے ہیں

مرحلہ 1: علاقہ کھینچیں اور اس کے اکروس (Across) ایک قطعہ خط (Line Segment) گردشی محور سے عموداً کھینچیں۔ جب اس علاقہ کو گھمایا جاتا ہے تو یہ قطعہ خط گھمانے سے بنے ٹھوس کا نمونہ واشر عرضی تراش بنائے گا۔

مرحلہ 2: تکمل کے حدود معلوم کریں

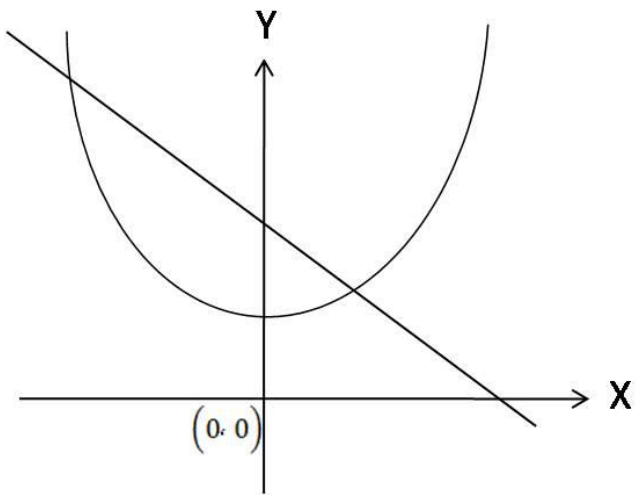
مرحلہ 3: قطعہ خط سے سویپٹ (Swept) کیے گئے بیرونی اور اندرونی نصف قطر معلوم کریں

مرحلہ 4: حجم معلوم کرنے کے لیے تکمل کریں

مثال 9-ایک ٹھوس کو بنانے کے لیے خط $y = -x + 3$ اور منحنی $y = x^2 + 1$ کے درمیانی علاقہ کو x محور کے گرد گھمایا گیا۔ اس طرح بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

حل- سوال کے مطابق ہم نے علاقہ، بیرونی نصف قطر اور اندرونی نصف قطر اور گھمانے سے بنے ٹھوس کی شکلیں کھینچیں۔

اب ٹھوس کا حجم ہوگا



شکل 9.2.2.2

$$V = \int_a^b \pi[\{R(x)\}^2 - \{r(x)\}^2]dx$$

جہاں

$R(x) = -x + 3 =$ بیرونی نصف قطر

$r(x) = x^2 + 1 =$ اندرونی نصف قطر

اس لیے

$$V = \int_{-2}^{1} \pi[\{-x+3\}^2 - \{x^2+1\}^2]dx$$

$$= \int_{-2}^{1} \pi[8 - 6x - x^2 - x^4]dx$$

$$= \pi\left[8x - 6\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{1}$$

$= \frac{117\pi}{5}$ مکعب اکائی

مثال10-پہلے ربع میں $y = x^2$ اور خط $y = 2x$ سے گھرے علاقہ کو y محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے

حل-سوال کے مطابق ہم نے علاقہ، بیرونی نصف قطر اور اندرونی نصف قطر اور گھمانے سے بنے ٹھوس کی شکلیں کھینچیں۔

اب ٹھوس کا حجم ہو گا

$$V = \int_{c}^{d} \pi[\{R(y)\}^2 - \{r(y)\}^2]dy$$

جہاں

$R(x) = \sqrt{y} =$ یرونی نصف قطر اور

$r(x) = \frac{y}{2} =$ اندرونی نصف قطر

اس لیے

$$V = \int_{0}^{4} \pi\left[\{\sqrt{y}\}^2 - \left\{\frac{y}{2}\right\}^2\right]dy$$

$$= \int_{0}^{4} \pi\left[y - \frac{y^2}{4}\right]dy$$

$$= \pi\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}\right]_{0}^{4}$$

$= \frac{8\pi}{3}$ مکعب اکائی

مثال11-پہلے ربع میں $y = x^2$، y محور اور خط $y = 1$ سے گھرے علاقہ کو $x = \frac{3}{2}$ کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے

حل-سوال کے مطابق ہم نے علاقہ، بیرونی نصف قطر اور اندرونی نصف قطر اور $x = \frac{3}{2}$ کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کی شکلیں کھینچیں۔

اب ٹھوس کا حجم ہو گا

$$V = \int_c^d \pi[\{R(y)\}^2 - \{r(y)\}^2]dy$$

جہاں

بیرونی نصف قطر $= R(x) = \frac{3}{2}$ اور

اندرونی نصف قطر $= r(x) = \frac{3}{2} - \sqrt{y}$

اس لیے

$$V = \int_0^1 \pi\left[\left\{\frac{3}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{3}{2} - \sqrt{y}\right\}^2\right]dy$$

$$= \int_0^1 \pi[-y + 3\sqrt{y}]dy$$

$$= \pi\left[-\frac{y^2}{2} + 2y^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$= \frac{3\pi}{2}$ مکعب اکائی

مثال 12-ایک ٹھوس کو بنانے کے لیے خط $y = x$ اور منحنی $y = \frac{1}{x}, 1 \le x \le 4$ کے درمیانی علاقہ کو x محور کے گرد گھمایا گیا۔اس طرح بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

حل-سوال کے مطابق ہم نے علاقہ، بیرونی نصف قطر اور اندرونی نصف قطر اور گھمانے سے بنے ٹھوس کی شکلیں کھینچیں۔

اب ٹھوس کا حجم ہو گا

$$V = \int_a^b \pi[\{R(x)\}^2 - \{r(x)\}^2]dx$$

جہاں

بیرونی نصف قطر $= R(x) = x$ اور

اندرونی نصف قطر $= r(x) = \frac{1}{x}$

اس لیے

$$V = \int_1^4 \pi\left[\{x\}^2 - \left\{\frac{1}{x}\right\}^2\right]dx$$

$$= \int_1^4 \pi[8 - 6x - x^2 - x^4]dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}\right]_1^4$$

$$= \frac{81\pi}{4}$$ مکعب اکائی

9.3 اکتسابی نتائج(Learning Outcomes)

اس اکائی میں آپ اس قابل ہو گئے ہوں گے کہ سلائسنگ، ڈسکس اور واشر کے طریقوں سے اجسام کے حجم معلوم کر سکیں۔

9.4 کلیدی الفاظ(Key Words)

حجم، مکعب اکائی، استوانہ، بیرونی نصف قطر، اندرونی نصف قطر، سلائسنگ، ڈسکس، واشر، عرضی تراش، اساس، مربع نما پرامڈ

9.5 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

9.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. $x = a, x = b$ اور خط منحنی $y = f(x)$ سے گھرے رقبہ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس مجسم کا رقبہ ہے

(a) $\int_a^b \pi y^2 dx$ (b) $\frac{1}{2}\int_a^b \pi y^2 dx$ (c) $\frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx$ (d) $\int_a^b y^2 dx$

2. خط منحنی $y = f(x)$ اور $x = a, x = b$ سے گھرے رقبہ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس مجسم کا رقبہ ہے

(a) $\int_a^b \pi y ds$ (b) $\int_a^b 2\pi y ds$ (c) $\int_a^b 2\pi y^2 ds$ (d) $\int_a^b 2\pi y dx$

3. اگر بیرونی نصف قطر $= R(x)$ اور اندرونی نصف قطر $= r(x)$ ہو، تب حجم حاصل کرنے کا واشر ضابطہ ہے:

(a) $V = \int_a^b \pi[R(x) - r(x)]^2 dx$

(b) $V = \int_a^b \pi[\{R(x)\}^2 - \{r(x)\}^2] dx$

(c) $V = \int_a^b \pi[r(x) - R(x)]^2 dx$

(d) $V = \int_a^b \pi[\{r(x)\}^2 - \{R(x)\}^2] dx$

4. راس پر مماس کے گرد $y^2 = 4ax$ کے وطر خاص کو قطع کیے گئے حصہ کو گھمانے سے بنی ریل(Reel) کا حجم معلوم کریں۔

(a) $\frac{1}{5}\pi a^3$ (b) $\frac{2}{5}\pi a^3$ (c) $\frac{4}{5}\pi a^3$ (d) $\frac{2}{3}\pi a^3$

9.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

1. مثال کے ساتھ کسی ٹھوس کے حجم حاصل کرنے کے سلائسنگ کے طریقے کو واضح کیجیے۔
2. خطوط $x = 2, y = 0$ اور خط منحنی $y = x^2$ سے گھرے علاقہ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

3. خط $y = 0$ اور خط منحنی $y = \sqrt{9 - x^2}$ سے گھرے علاقہ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

4. خط $y = 0$ اور خط منحنی $y = x - x^2$ سے گھرے علاقہ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

5. خطوط $x = 0, y = 0$ اور خط منحنی $y = \sqrt{\cos x}\,, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ سے گھرے علاقہ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

6. خطوط $x = 0, y = -1,\ y = 1$ اور خط منحنی $x = \sqrt{5}y^2$ سے گھرے علاقہ کو y محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

7. خطوط $x = 0,\ \ y = 2$ اور خط منحنی $x = y^{\frac{3}{2}}$ سے گھرے علاقہ کو y محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

8. خطوط $x = 0, y = 0,\ \ y = 3$ اور خط منحنی $x = \frac{2}{(y+1)}$ سے گھرے علاقہ کو y محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

9. خطوط $x = 0,\ \ y = 1$ اور خط منحنی $x = \frac{\sqrt{2y}}{(y^2+1)}$ سے گھرے علاقہ کو y محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

10. خطوط $x = 0$ اور خط منحنی $x = 2\sin 2y\,, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$ سے گھرے علاقہ کو y محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

9.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. صنوبری $r = a(1 + \cos\theta)$ کو ابتدائی خط کے گرد گھمانے پر حاصل ٹھوس کا حجم حاصل کیجیے۔

2. علاقہ مثلث سے ملفوف (Enclosed) ہے جسکے راس (0 ,1) ، (2, 1) اور (1 ،1) ہیں۔ اس علاقہ کو y محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

3. علاقہ مثلث سے ملفوف (Enclosed) ہے جسکے راس (0, 1) ، (1, 0) اور (1 ،1) ہیں۔ اس علاقہ کو y محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

اکائی 10۔ استوانی خول کے ذریعے حجم

(Volumes by Cylindrical Shells)

اکائی کے اجزا

10.0 تمہید
10.1 مقاصد
10.2 استوانی خول کے ذریعے حجم
10.2.1 شیل ضابطہ
10.2.2 شیل ضابطے کے مراحل
10.3 اکتسابی نتائج
10.4 کلیدی الفاظ
10.5 نمونہ امتحانی سوالات
10.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات
10.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات
10.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

10.0 تمہید (Introduction)

جب ہم گھماؤ سے ٹھوس کا حجم معلوم کرنا چاہتے ہیں تب بعض اوقات استوانی خول ضابطہ، واشر ضابطہ سے اس اعتبار سے بہتر ثابت ہوتا ہے کہ ہمیں ان کے ضابطہ میں مربع کرنے کی ضرورت پیش نہیں ہوتی ہے۔

10.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ اس قابل ہو جائنگے کہ استوانی خول کو سمجھ سکیں گے اور شیل ضابطہ کا استعمال کر کے کسی ٹھوس کا حجم حاصل کر سکیں گے، اس کے ساتھ ہی شیل اور واشر کے طریقوں میں تفریق کر دونوں میں سے بہتر طریقے کا استعمال کر کے کسی بھی مسئلہ کو حل کر سکیں گے۔

10.2 استوانی خول کے ذریعے حجم (Volume by Cylindrical Shells)

10.2.1 شیل ضابطہ (Shell Formula)

فرض کرو کہ ہم نے شکل میں دیے گئے رنگے علاقہ کو y محور کے گرد گھمانے سے ایک ٹھوس بنتا ہے۔ ٹھوس کے حجم کے اندازہ کے لیے ہم علاقہ کو $[a, b]$ وقفہ کے پارٹیشن P پر منحصر مستطیلیوں (Rectangles) کے مشابہ (Approximate) کر سکتے ہیں۔ علاقہ اسی وقفہ پر واقع ہے۔ نمونہ مشابہ مستطیل Δx_k اکائی چوڑا اور $f(C_k)$ اکائی اونچا ہے۔ جس میں C_k مستطیل کے اساس کا وسطی نقطہ ہے۔ جیومیٹری کے ضابطہ سے مستطیل کے سویپٹ آؤٹ (Swept Out) سے حاصل شیل کے حجم کو ہم یوں لکھ سکتے ہیں:

$\Delta V_k = 2\pi \times$ شیل کا اوسط نصف قطر $\times$ شیل کی اونچائی $\times$ موٹائی

یا

$$\Delta V_k = 2\pi \times C_k \times f(C_k) \times \Delta x_k$$

پارٹیشن P پر منحصر n مستطیلیوں سے سوپٹ (Swept) کیے گئے شیلس کے حجموں کے مجموعہ سے ٹھوس کا قریب تر حجم یہ ہے

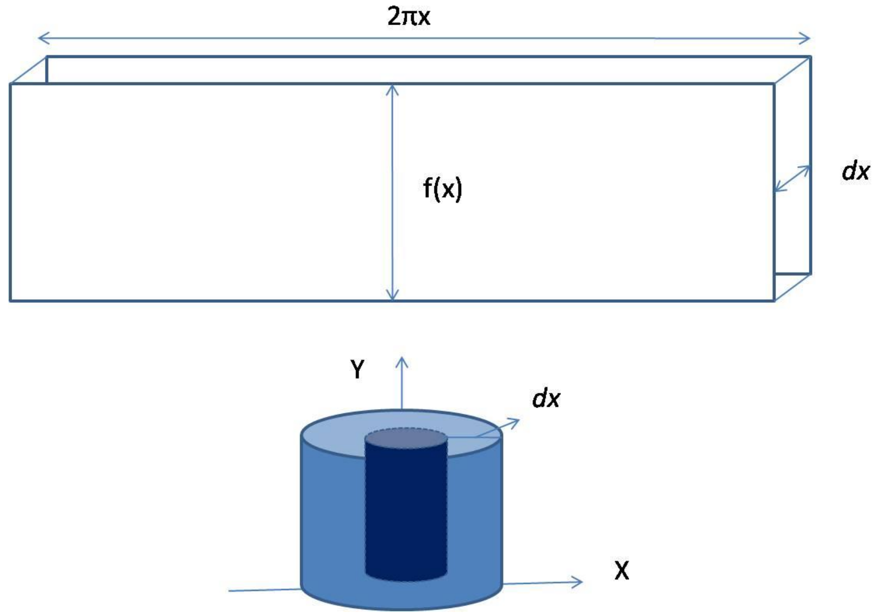
$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi C_k f(C_k) \Delta x_k$$

جہاں تک $\|P\| \to 0$ کا تعلق ہے اس مجموعہ لے لمٹ (Limit) سے حاصل ٹھوس کا حجم یہ ہے:

$$V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} 2\pi C_k f(C_k) \Delta x_k = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

اس لیے y محور کے گرد x محوراور مسلسل تفاعل b $y = f(x) \geq 0, 0 \leq a \leq x \leq b$ کے درمیانی علاقہ کو گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم یہ ہوگا

$$V = \int_a^b 2\pi \binom{Shell}{Radius} \binom{Shell}{Height} dx = \int_a^b 2\pi x f(x) dx \quad .....(1)$$



شکل 10.2.1.1

10.2.2 شیل ضابطے کے مراحل (Working Steps for Shell Formula)

گردشی محور کی افقی یا عمودی حالت کے قطع نظر شیل طریقے کے اطلاق کے درج ذیل مراحل ہیں:

مرحلہ 1: علاقہ کھینچیں اور اس کے گرد گردشی محور کے متوازی ایک قطعہ خط (Line Segment) بنائے۔ قطعہ کی اونچائی یا لمبائی (شیل کی اونچائی)، گردشی محور سے فاصلہ (شیل کا نصف قطر) اور چوڑائی (شیل کی موٹائی) دکھائے۔

مرحلہ 2: تکمل کی حدود معلوم کیجیے۔

مرحلہ 3: حجم معلوم کرنے کے لیے مناسب متغیر (Variable) x یا y کے حوالے سے حاصل ضرب $2\pi \binom{Shell}{Radius} \binom{Shell}{Height}$ کو تکمل کیجیے۔

مثال 1- خط منحنی $y = \sqrt{x}$، x محور اور خط $x = 4$ سے گھرے علاقہ کو y محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم معلوم کریں۔

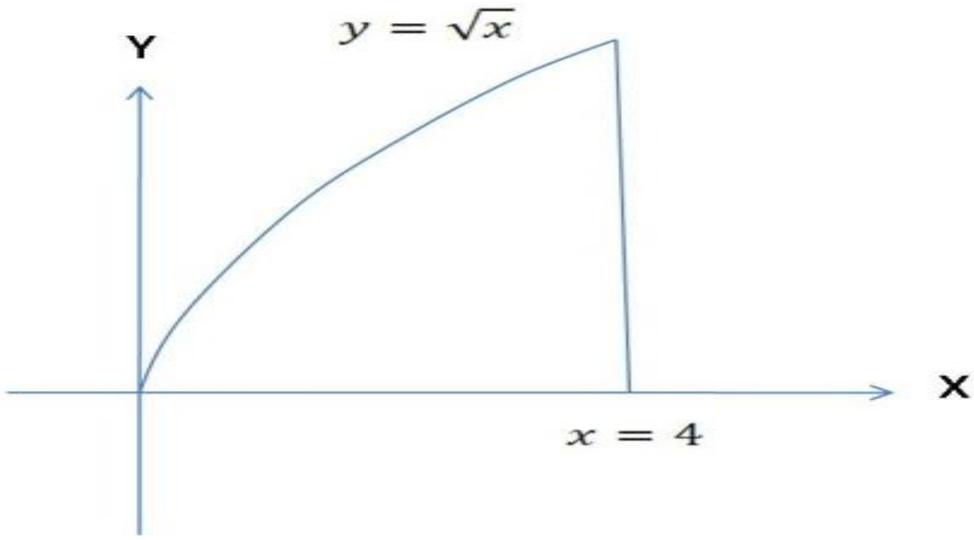
حل-

مرحلہ 1: علاقہ کھینچیں اور اس کے گرد گردشی محور کے متوازی ایک قطعہ خط (Line Segment) بنایے۔ قطعہ کی اونچائی (شیل کی اونچائی) $\sqrt{x}$، گردشی محور سے فاصلہ (شیل کا نصف قطر) x اور چوڑائی (شیل کی موٹائی) dx ہے۔

مرحلہ 2: تکمل کی حدود $a = 0$ سے $b = 4$ تک ہے۔

مرحلہ 3: حجم معلوم کرنے کے لیے متغیر (Variable) x کے حوالہ سے حاصل ضرب $2\pi \binom{Shell}{Radius} \binom{Shell}{Height}$ کو تکمل کیجیے۔

اب خط منحنی $y = \sqrt{x}$، x محور اور خط $x = 4$ سے گھرے علاقہ کو y محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم ہو گا:



شکل: 10.2.2.1

$$V = \int_a^b 2\pi \binom{Shell}{Radius} \binom{Shell}{Height} dx$$

$$= \int_0^4 2\pi x(\sqrt{x}) dx$$

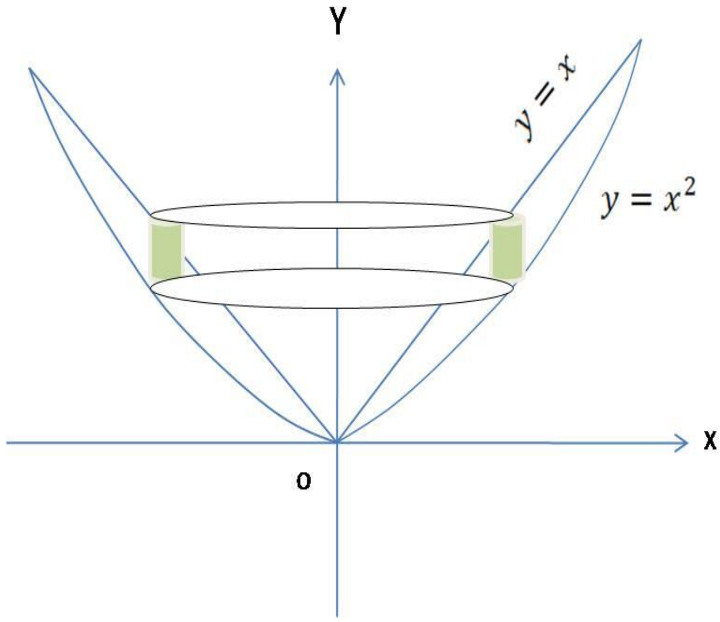
$$= 2\pi \int_0^4 x^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4$$

$$= \frac{128\pi}{5}$$

مثال 2- $y = x^2$ اور $y = x$ سے گھرے علاقہ کو خط $x = 0$ کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم حاصل کیجیے۔

حل-



شکل:10.2.2.2

مرحلہ 1: علاقہ کھینچیں اور اس کے گرد گردشی محور کے متوازی ایک قطعہ خط (Line Segment) بنائیے۔ شکل سے قطعہ کی اونچائی (شیل کی اونچائی) $(x - x^2)$ ہے، گردشی محور سے فاصلہ (شیل کا نصف قطر) x اور چوڑائی (شیل کی موٹائی) dx ہے۔

مرحلہ 2: تکمل کی حدود $a = 0$ سے $b = 1$ تک ہے۔

مرحلہ 3: حجم معلوم کرنے کے لیے متغیر (Variable) x کے حوالہ سے حاصل ضرب $2\pi \begin{pmatrix} Shell \\ Radius \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Shell \\ Height \end{pmatrix}$ کو تکمل کیجیے۔

$y = x^2$ اور $y = x$ سے گھرے علاقہ کو خط $x = 0$ کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم ہوگا

$$V = \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix} Shell \\ Radius \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Shell \\ Height \end{pmatrix} dx$$

$$= \int_0^1 2\pi x(x - x^2) dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3) dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{6}$$

مثال 3- $y = \sqrt{x}$ اور $y = 1/x$ سے گھرے علاقہ کو $1 \le x \le 4$ پر خط $x = 0$ کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم حاصل کیجیے۔

حل- مرحلہ 1: علاقہ کھینچیں اور اس کے گرد گردشی محور کے متوازی ایک قطعہ خط (Line Segment) بنائیے۔ شکل سے قطعہ کی اونچائی (شیل کی اونچائی) $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)$ ہے، گردشی محور سے فاصلہ (شیل کا نصف قطر) x اور چوڑائی (شیل کی موٹائی) dx ہے۔

مرحلہ 2: تکمل کی حدود $a = 1$ سے $b = 4$ تک ہے۔

مرحلہ 3: حجم معلوم کرنے کے لیے متغیر (Variable) x کے حوالہ سے حاصل ضرب $2\pi \begin{pmatrix} Shell \\ Radius \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Shell \\ Height \end{pmatrix}$ کو تکمل کیجیے۔

$y = \sqrt{x}$ اور $y = 1/x$ سے گھرے علاقہ کو $1 \le x \le 4$ پر خط $x = 0$ کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم ہوگا

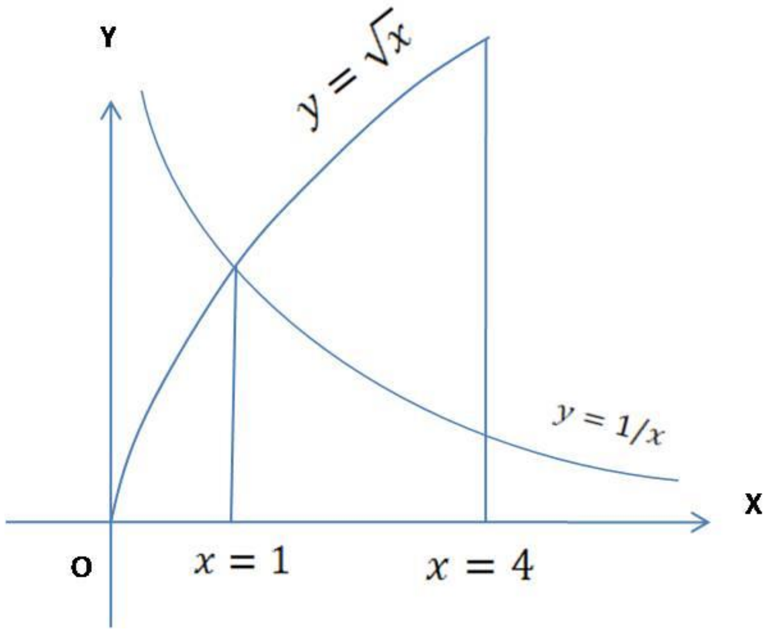
$$V = \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix} Shell \\ Radius \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Shell \\ Height \end{pmatrix} dx$$

$$= \int_1^4 2\pi x \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right) dx$$

$$= 2\pi \int_1^4 \left(x^{\frac{3}{2}} - 1\right) dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} - x\right]_1^4$$

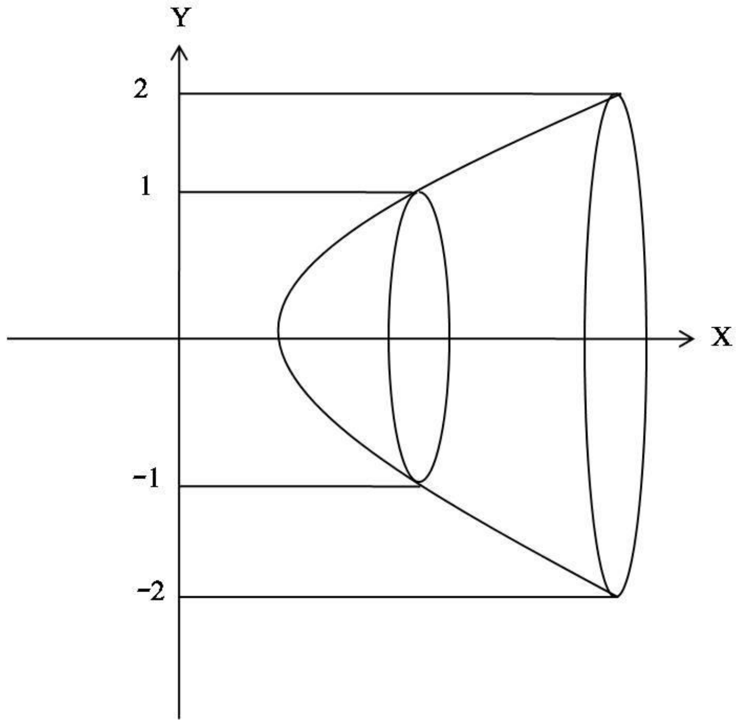
$$= \frac{94\pi}{5}$$



شکل:10.2.2.3

مثال 4- $x = 1 + y^2$ اور $x = 0$ سے گھرے علاقہ کو $1 \le y \le 2$ پر خط $y = 0$ کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم حاصل کیجیے۔

حل-



شکل:10.2.2.4

مرحلہ 1: علاقہ کھینچیں اور اس کے گرد گردشی محور کے متوازی ایک قطعہ خط(Line Segment) بنائے۔ شکل سے قطعہ کی اونچائی (شیل کی اونچائی)$(1 + y^2)$ ہے، گردشی محور سے فاصلہ (شیل کا نصف قطر)yاور چوڑائی (شیل کی موٹائی)dy ہے۔

مرحلہ 2: تکمل کی حدود$a = 1$سے$b = 2$تک ہے۔

مرحلہ 3: حجم معلوم کرنے کے لیے متغیر(Variable)yکے حوالہ سے حاصل ضرب$2\pi \left(\frac{Shell}{Radius}\right)\left(\frac{Shell}{Height}\right)$کو تکمل کیجیے۔

$x = 1 + y^2$اور$x = 0$سے گھرے علاقہ کو$1 \le y \le 2$پر خط$y = 0$کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم ہوگا

$$V = \int_a^b 2\pi \left(\frac{Shell}{Radius}\right)\left(\frac{Shell}{Height}\right) dy$$

$$= \int_1^2 2\pi y(1 + y^2) dy$$

$$= 2\pi \int_1^2 (y + y^3) dy$$

$$= 2\pi \left[\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4}\right]_1^4$$

$$= \frac{21\pi}{2}$$

مثال 5- $y = \sqrt{2}$اور$x = 4, y = 0$سے گھرے علاقہ کوxمحور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم حاصل کیجیے۔

حل- مرحلہ 1: علاقہ کھینچیں اور اس کے گرد گردشی محور کے متوازی ایک قطعہ خط (Line Segment) بنائے۔ شکل سے قطعہ کی اونچائی (شیل کی اونچائی) $(4 - y^2)$ ہے، گردشی محور سے فاصلہ (شیل کا نصف قطر) y اور چوڑائی (شیل کی موٹائی) dy ہے۔

مرحلہ 2: تکمل کی حدود $a = 0$ سے $b = 2$ تک ہے۔

مرحلہ 3: حجم معلوم کرنے کے لیے متغیر (Variable) y کے حوالہ سے حاصل ضرب $2\pi \begin{pmatrix} Shell \\ Radius \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Shell \\ Height \end{pmatrix}$ کو تکمل کیجیے۔

$y = \sqrt{2}$ اور $x = 4, y = 0$ سے گھرے علاقہ کو x محور گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم ہوگا

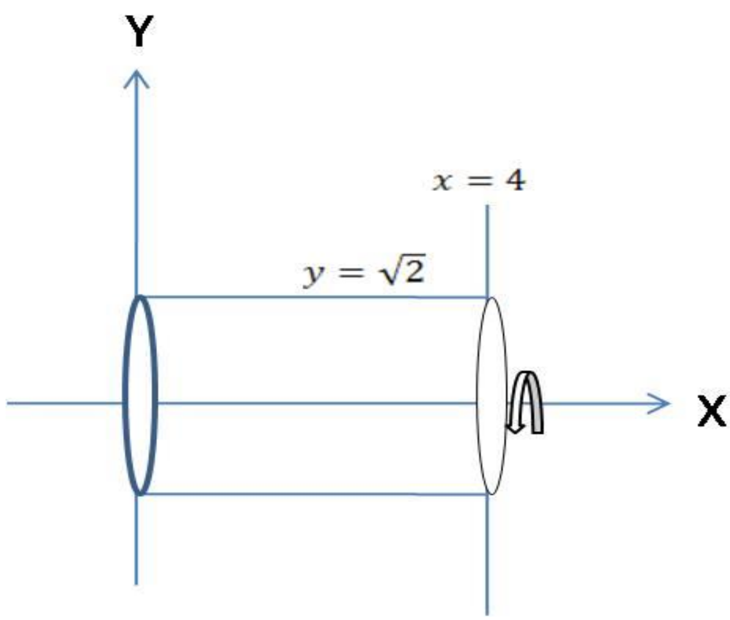
$$V = \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix} Shell \\ Radius \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Shell \\ Height \end{pmatrix} dx$$

$$= \int_0^2 2\pi y(4 - y^2)dy$$

$$= 2\pi \int_0^2 (4y - y^3)dy$$

$$= 2\pi \left[2y^2 - \frac{y^4}{4}\right]_0^2$$

$$= 8\pi$$



شکل: 10.2.2.5

مثال 6- پہلے ربع میں $y = x^2$ اور $y = 1$، $x = 0$ سے گھرے علاقہ کو $x = 2$ کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم حاصل کیجیے۔

حل- مرحلہ 1: ایک قطعہ خط کو علاقہ کے اکراس (Across) گردشی محور $x = 2$ کے متوازی بنائے۔ شکل سے قطعہ کی اونچائی (شیل کی اونچائی) $(1 - x^2)$ ہے، گردشی محور سے فاصلہ (شیل کا نصف قطر) $2 - x$ اور چوڑائی (شیل کی موٹائی) dx ہے۔

مرحلہ 2: تکمل کی حدود $a = 0$ سے $b = 1$ تک ہے۔

مرحلہ 3: حجم معلوم کرنے کے لیے متغیر (Variable) x کے حوالہ سے حاصل ضرب $2\pi\begin{pmatrix}Shell\\Radius\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Shell\\Height\end{pmatrix}$ کو تکمل کیجیے۔

پہلے ربع میں $y = x^2$ اور $y = 1$ ، $x = 0$ سے گھرے علاقہ کو $x = 2$ کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم ہوگا

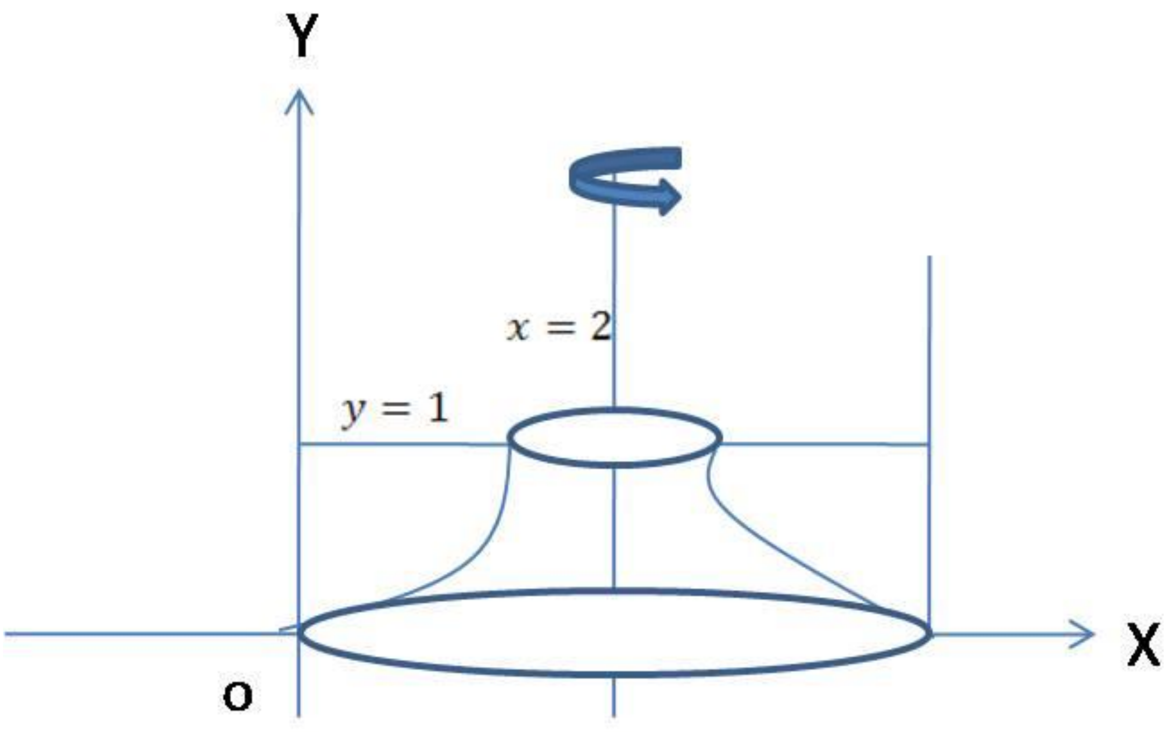
$$V = \int_a^b 2\pi\begin{pmatrix}Shell\\Radius\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Shell\\Height\end{pmatrix}dx$$

$$= \int_0^1 2\pi(2-x)(1-x^2)dy$$

$$= 2\pi\int_0^1 (2 - x - 2x^2 + x^3)dy$$

$$= 2\pi\left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= \frac{13\pi}{6}$$



شکل:10.2.2.6

یاد رکھیے محدودی محوروں کے اطراف $y = x$ اور $y = x^2$ سے گھرے علاقہ کو گھما کر بنائے گئے ٹھوس کے لیے واشر اور شیل طریقہ کا خلاصہ ٹیبل میں دیا گیا ہے۔ اس مخصوص علاقہ کے لیے دونوں طریقے، دونوں محوروں کے گرد گردش کے لیے مناسب ہیں۔ لیکن ایسا ہمیشہ

نہیں ہوتا۔ مثال کے طور پر جب کسی علاقہ کو y محور کے گرد گھمایا جائے اور واشر طریقہ کا استعمال کیا جائے تب ہمیں y کے حوالہ سے تکمل کرنا ہوتا ہے۔ اس کے باوجود متکمل کو y کی اصطلاح میں بیان کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں شیل طریقہ ہمیں x کے حوالہ سے تکمل کرنے کی اجازت دیتا ہے۔ گھماؤ کے ٹھوس کے حجموں کی تحسیب کے لیے واشر اور شیل طریقے ہمیشہ میل کھاتے ہیں۔

10.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے پڑھا کہ کسی علاقے کو محور کے گرد گھمانے سے ایک ٹھوس بنتا ہے۔ ٹھوس کے حجم کے اندازے کے لیے ہم علاقہ کو وقفہ کے پارٹیشن پر منحصر مستطیلیوں کے مشابہ کر سکتے ہیں۔ علاقہ اسی وقفہ پر واقع ہے۔ نمونہ مشابہ مستطیل اکائی چوڑا اور اکائی اونچا ہے۔ جس میں مستطیل کے اساس کا وسطی نقطہ ہے۔ جیو میٹری کے ضابطے سے مستطیل کے سویپٹ آؤٹ سے حاصل شیل کے حجم کو ہم یوں لکھ سکتے ہیں:

$$V = \int_a^b 2\pi \left(\frac{Shell}{Radius}\right)\left(\frac{Shell}{Height}\right) dx = \int_a^b 2\pi x f(x) dx \quad ...(1)$$

گردشی محور کی افقی یا عمودی حالت کے قطع نظر شیل طریقہ کے اطلاق کے درج ذیل مرحلے ہیں:

مرحلہ 1: علاقہ کھینچیں اور اس کے گرد گردشی محور کے متوازی ایک قطعہ خط (Line Segment) بنائے۔ قطعہ کی اونچائی یا لمبائی (شیل کی اونچائی)، گردشی محور سے فاصلہ (شیل کا نصف قطر) اور چوڑائی (شیل کی موٹائی) دکھائے۔

مرحلہ 2: تکمل کی حدود معلوم کیجیے۔

مرحلہ 3: حجم معلوم کرنے کے لیے مناسب متغیر (Variable) x یا y کے حوالہ سے حاصل ضرب $2\pi \left(\frac{Shell}{Radius}\right)\left(\frac{Shell}{Height}\right)$ کو تکمل کیجیے۔

10.4 کلیدی الفاظ (Key Words)

استوانی خول، شیل ضابطہ، ربع، مربع، ابعاد، مستطیل، مشابہ، وسطی نقطہ، سویپٹ آؤٹ، قطعہ خط،

10.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

10.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. x محور کے گرد گھماؤ سے بنے ٹھوس کے حجم کے لیے شیل ضابطہ ہے:

(a $\int_a^b 2\pi y f(y) dy$

(b $\int_a^b 2\pi x f(x) dx$

c) $\int_a^b \pi[R(y)]^2 dy$

d) $\int_a^b \pi[R(x)]^2 dx$

2. y محور کے گرد تفاعل $y = f(x)$ اور $x\epsilon[a, b]$ کے درمیانی علاقہ کو گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم ہے:

a) $\int_a^b 2\pi y f(y) dy$

b) $\int_a^b 2\pi x f(x) dx$

c) $\int_a^b \pi[R(x)]^2 dx$

d) $\int_a^b \pi[R(y)]^2 dy$

3. $y = x$ اور $y = x^2$ کو y محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ شیل کا نصف قطر ہوگا:

a) 1

b) $x - 1$

c) x

d) y

4. x محور کے گرد تفاعل $x = f(y)$ اور $y\epsilon[a, b]$ کے درمیانی علاقہ کو گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم .... ہے

5. y محور کے گرد تفاعل $y = f(x)$ اور $x\epsilon[a, b]$ کے درمیانی علاقہ کو گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم .... ہے

6. x محور کے گرد تفاعل $x = f(y)$ اور $y\epsilon[a, b]$ کے درمیانی علاقہ کو گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم $\int_a^b 2\pi y f(y) dy$ ہے
(T/F)

7. y محور کے گرد تفاعل $y = f(x)$ اور $x\epsilon[a, b]$ کے درمیانی علاقہ کو گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم $\int_a^b 2\pi x f(x) dx$ ہے
(T/F)

10.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. استوانی شیل کے طریقہ کی وضاحت کیجیے۔
2. y محور کے گرد اور x محور اور تفاعل $y = f(x)$ کے درمیانی علاقہ کو $x\epsilon[a, b]$ پر گھمانے سے بنے ٹھوس کے حجم کے لیے شیل کا ضابطہ اخذ کیجیے۔
3. x محور کے گرد اور y محور اور تفاعل $x = f(y)$ کے درمیانی علاقہ کو $y\epsilon[a, b]$ پر گھمانے سے بنے ٹھوس کے حجم کے لیے شیل کا ضابطہ اخذ کیجیے۔
4. شیل اور واشر کے طریقوں میں تفریق کیجیے۔
5. $y = x$, $y = -\frac{x}{2}$ اور $x = 2$ سے گھرے علاقہ کو y محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔اس طرح بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

10.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. پہلے ربع میں خط منحنی $x = y - y^3$ اور y محور سے گھرے علاقہ کو (a) x محور کے گرد۔

(b) خط $y = 1$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔اس طرح بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔ڈسک یا واشر طریقوں میں سے جو مناسب ہو استعمال کیجیے۔

2. پہلے ربع میں خط منحنی $x = y - y^3$، $x = 1$ اور $y = 1$ سے گھرے علاقہ کو (a) x محور (b) y محور (c) خط $x = 1$ (d) خط $y = 1$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔اس طرح بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

3. پہلے ربع میں اوپر سے خط منحنی $y = \frac{1}{x^{1/4}}$ بائیں سے خط $x = \frac{1}{16}$ اور نیچے سے خط $y = 1$ سے گھرے علاقہ کو x محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔اس طرح بنے ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

اکائی 11۔ قوسی لمبائی

(Arc Length)

اکائی کے اجزا

11.0 تمہید

11.1 مقاصد

11.2 قوسی لمبائی کا بنیادی تعارف

11.2.1 پیرامٹرک مساوات

11.2.2 کسی منحنی کو پیرامٹرک کرنا

11.2.3 قوسی لمبائی

11.2.4 پیرامٹرک منحنی کی قوسی لمبائی

11.3 اکتسابی نتائج

11.4 کلیدی الفاظ

11.5 نمونہ امتحانی سوالات

11.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

11.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

11.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

11.0 تمہید(Introduction)

تکملی احصا کی تبدیلی کی شرح سے متعلق معلومات پر مبنی مثلوں سے بحث کرتا ہے۔ کسی سطح پر واقع کسی منحنی کی لمبائی کی پیمائش کرنا اس کے ذریعے آسان ہوتا ہے۔ کسی منحنی کے کسی حصہ کے دو نقاط کی درمیانی دوری کو قوسی لمبائی کہتے ہیں۔

11.1 مقاصد(Objectives)

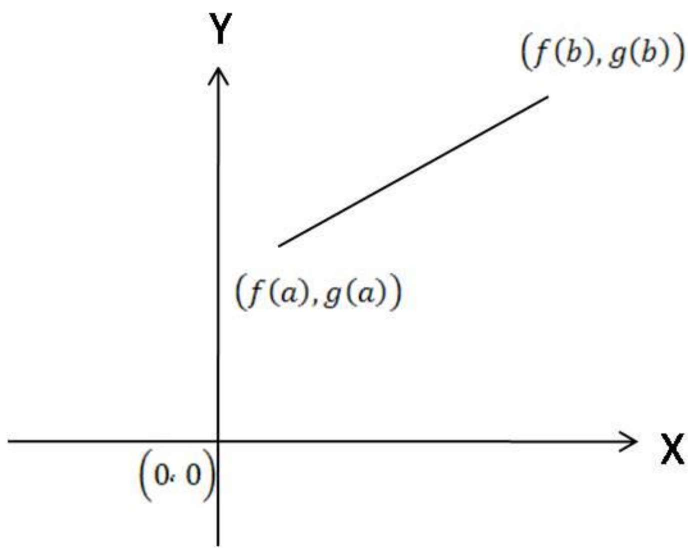
اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ منحنیوں کے قوسوں کی لمبائی کو حاصل کر سکیں۔

11.2 قوسی لمبائی کا بنیادی تعارف(Basic Information of Arc Length)

اب ہم قوسی لمبائی کے ضابطے کو سمجھنے سے پہلے اس کی بنیادی معلومات حاصل کریں گے۔

11.2.1 پیرامٹرک مساوات(Parametric Equations)

جب کسی سطح میں حرکت کرنے والے ذرہ(Particle) کا راستہ ایک دائرہ ہو تو ہم اس کی وضاحت کارتیسی ضابطے سے نہیں کر سکتے کہ یہ y کو راست x کی اصطلاح میں اور x کو راست y کی اصطلاح میں ظاہر کرتا ہے۔ اس کے بجائے ہم ذرے کی ہر کو آرڈینیٹس کو وقت t کے تفاعل سے ظاہر کرتے ہیں۔ اور راستے کو مساوات کی جوڑی $x = f(t), y = g(t)$ سے بیان کرتے ہیں۔ حرکت کے مطالعہ کے لیے اس طرح کی مساوات کارتیسی ضابطے کے لائق ہوتی ہیں، کیوں کہ وہ ہمیں کسی بھی وقت t کے لیے ذرے کے مقام کا پتہ دیتی ہیں۔



شکل:11.2.1.1

پیرامٹرک مساوات: اگر x اور y مسلسل تفاعل $x = f(t), y = g(t)$ کے طور t قدروں کے وقفہ پر دیے گئے ہوں تب ان مساواتوں

سے معین کیا گیا نقاط کا سٹ $(x, y) = (f(t), g(t))$ محدودی سطح (Coordinate Plane) میں ایک خط منحنی ہے۔ یہ مساوات اس خط منحنی کے لیے پیرامٹرک مساوات کہلاتی ہیں۔ متغیر t خط منحنی کا پیرامیٹر (تبدیلیہ) ہے۔ اس کا ڈومین (Domain) I پیرامیٹر وقفہ کہلاتا ہے۔ اگر I بند وقفہ $a \le t \le b$ ہو تو نقطہ $(f(a), g(a))$ خط منحنی کا ابتدائی نقطہ (Initial Point) ہے۔ نقطہ $(f(b), g(b))$ خط منحنی کا آخری نقطہ (Terminating Point) ہے۔

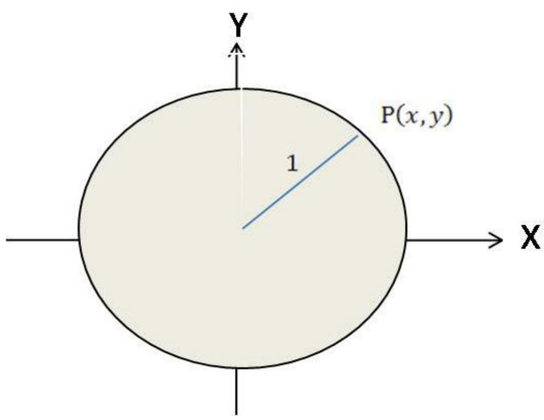
خط منحنی کو پیرامٹرک کرنا (Parameterization of the Curve): کسی سطح میں جب ہم پیرامٹرک مساوات اور ایک پیرامٹرک وقفہ کو ایک خط منحنی کے لیے مختص کرتے ہیں تو ہم کہتے ہیں کہ وہ خط منحنی پیرامٹرک ہو چکا ہے۔ یہ مساوات اور وقفہ (Interval) اس خط منحنی کے پیرامٹرائزیشن کے برابر ہے۔

نوٹ: بہت سے اطلاقات میں t وقت کو ظاہر کرتا ہے۔ لیکن بعض اوقات یہ بجائے اس کہ ایک زاویہ (Angle) کو یا پھر (جیسا کہ نیچے دی گئی مثالوں سے واضح ہے) ایک ذرے کے راستے کے ہمراہ طے کردہ فاصلہ کو بھی ظاہر کر سکتا ہے۔

مثال 1- دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ جیسا t میں اضافہ ہوتا ہے، مساوات $x = \cos t, y = \sin t$ اور پیرامیٹرک وقفہ $0 \le t \le 2\pi$، ذرے کے مقام $P(x, y)$ کی وضاحت کرتے ہیں جو دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ کے گرد مخالف ساعتوار (Counterclockwise) حرکت کرتا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ t کی ہر قدر کے لیے نقطہ دائرے پر رہتا ہے کیونکہ

$$x^2 + y^2 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

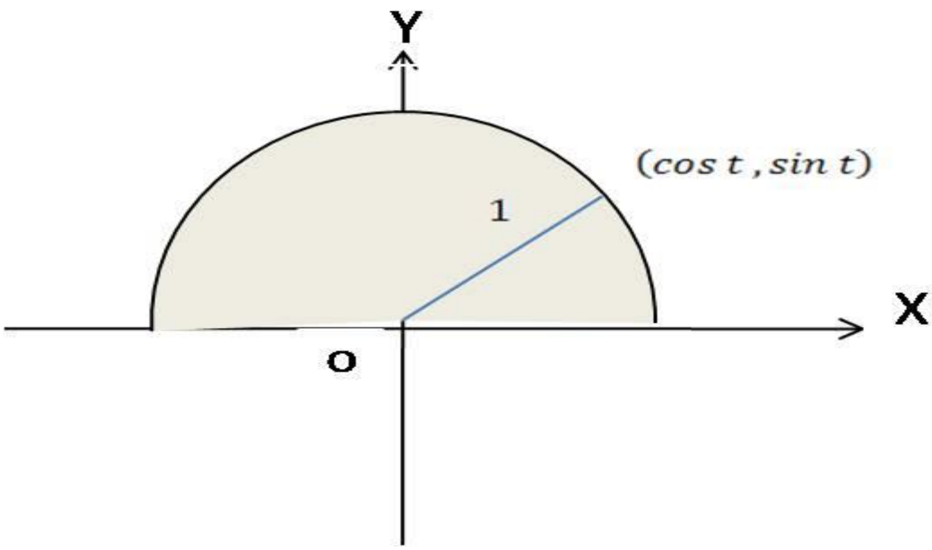
ہے۔ لیکن نقطہ $P(x, y)$ نے حقیقت میں کتنا دائرہ طے کیا؟ نقطہ دائرے پر کتنا چلا یا گزرا اسے معلوم کرنے کے لیے ہم t میں 0 سے 2π تک اضافہ کے لیے حرکت کو ٹریک (Track) کرتے ہیں۔ پیرامیٹر t زاویہ کی ریڈین (Radian) کی پیمائش میں ہے جو نصف قطر OP مثبت x محور کے ساتھ بناتا ہے۔ ذرہ اپنی حرکت $(1, 0)$ سے شروع کرتے ہوئے اوپر سرکتا ہے اور t کے $\frac{\pi}{2}$ کے قریب ہونے پر بائیں جانب جاتا ہے۔ اور پھر دائرے کے گرد اپنی حرکت جاری رکھتے ہوئے دوبارہ $(1, 0)$ پر جب $t = 2\pi$ ہوتا ہے رک جاتا ہے۔ اس طرح ذرے نے ٹھیک ایک مرتبہ دائرہ طے کیا۔



شکل: 11.2.1.2

مثال-2 (نصف دائرہ) t میں جیسا 0 سے π تک اضافہ ہوتا ہے مساوات، $y = \sin t$,$x = \cos t$ اور پیرامٹرک وقفہ $0 \leq t \leq$ 2π ذرے کے مقام $P(x, y)$ کی وضاحت کرتے ہیں جو دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ کے گرد و ساعتوار (Clockwise) حرکت کرتا ہے۔

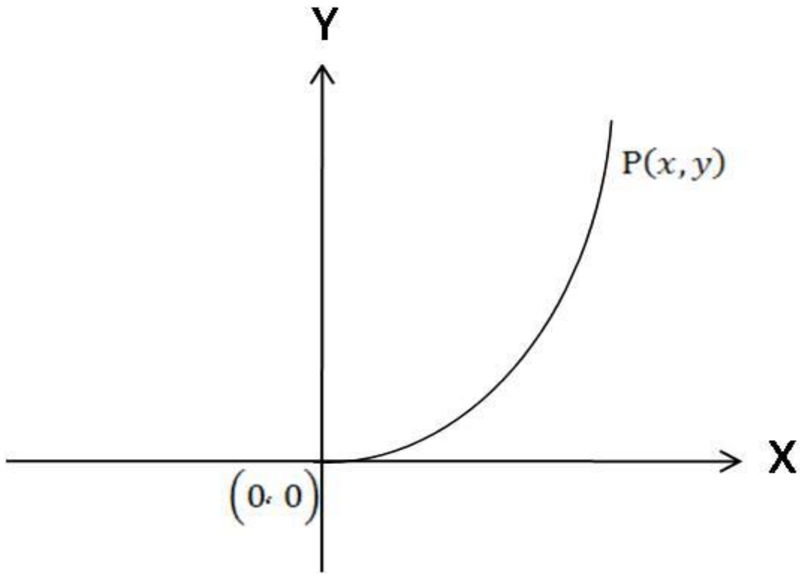
ہم جانتے ہیں کہ t کی تمام قدروں کے لیے نقطہ P دائرے پر رہتا ہے کیونکہ اس کے کو آرڈینیٹس (محدد) دائرے کی مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔ لیکن ذرے نے دائرے کے کتنے حصے کو طے کیا؟ اسے معلوم کرنے کے لیے 0 سے π تک t میں اضافہ کے لیے ہم حرکت کو ٹریس کرتے ہیں۔ جیسا کہ اوپر دی گئی مثال میں ہے، ذرہ (1,0) سے اپنی حرکت شروع کرتا ہے۔ لیکن اب جیسا کہ t اضافہ ہوتا ہے، y منفی بنتا ہے؛ اور $t = \frac{\pi}{2}$ پر گھٹ کر 1− ہو جاتا ہے۔ اور پھر t جیسے ہی π کے قریب ہوتا ہے، بڑھ کر دوبارہ 0 ہو جاتا ہے۔ اور دائرے کا صرف نچلا حصہ ڈھک (Covered) کر کے $t = \pi$ پر حرکت رک جاتی ہے۔



شکل: 11.2.1.3

مثال-3 (نصف پیرابولا): xy سطح میں متحرک ذرے کا مقام $P(x, y)$ مساوات اور پیرامیٹر وقفہ $x = \sqrt{t}, y = t, t \geq 0$ سے دیا گیا ہے۔ ذرے کے ذریعے ٹریس کیے گئے راستے کی شناخت کیجیے اور حرکت کی وضاحت کیجیے۔

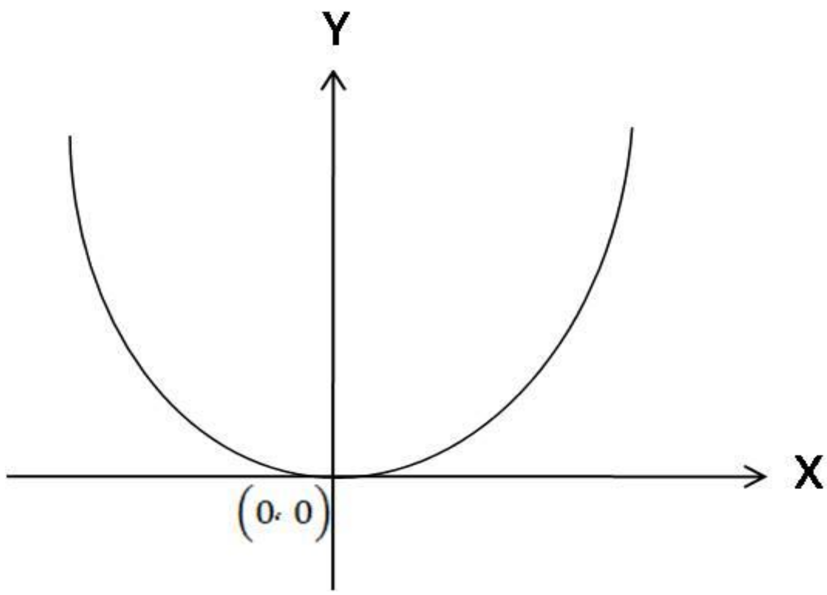
حل- ہم مساوات $x = \sqrt{t}$ اور $y = t$ سے t کا اخراج کر کے ذرے کے راستے کی شناخت کی کوشش کریں گے۔ حسن اتفاق سے ہمیں x اور y کے بیچ قابل شناخت الجبرائی تعلق دکھائی دیتا ہے۔ اس لیے $y = t = \left(\sqrt{t}\right)^2 = x^2$ اس کا مطلب ہے کہ ذرے کی پوزیشن محدد مساوات $y = x^2$ کو اس طرح مطمئن کرتے ہیں کہ ذرہ پیرابولا x کے ہمراہ حرکت کرتا ہے۔ نتیجہ اخذ کرنے کے لیے یہ کہنا غلط ہو گا کہ ذرے کا راستہ ایک مکمل پیرابولا $y = x^2$ ہے، بلکہ یہ ایک بالکلیہ طور پر نصف پیرابولا ہے۔ ذرے کا x محدد منفی بالکل نہیں ہے۔ ذرہ $t = 0$ پر (0، 0) سے حرکت شروع کرتا ہے۔ اور t کی قدر میں اضافہ کے ساتھ پہلے ربع میں بلند ہوتا ہے۔



شکل:11.2.1.4

مثال-4 (ایک مکمل پیرابولا): xy سطح میں متحرک ذرے کا مقام P(x, y) مساواتوں اور پیرامٹرک وقفہ $x = t, y = t^2$ اور $-\infty < t < \infty$ سے دیا گیا ہے۔ ذرے کے ذریعے ٹریس کیے گئے راستے کی شناخت کیجیے اور حرکت کی وضاحت کیجیے۔

حل- ہم مساواتوں $x = t$، اور $y = t^2$ کے درمیان سے t کا اخراج کرکے ذرے کے راستے کی شناخت $y = t^2 = (t)^2 = x^2$ کو حاصل کرکے کرتے ہیں۔ ذرے کی پوزیشن محدد مساوات $y = x^2$ کو اس طرح مطمئن کرتے ہیں کہ وہ اس خط منحنی کے ہمراہ حرکت کرتا ہے۔ مثال(3) کے برخلاف ذرہ مکمل پیرابولا طے کرتا ہے۔ جس طرح $-\infty$ سے ∞ تک جیسے t میں اضافہ ہوتا ہے ویسے ذرہ بائیں جانب سے نیچے آنا شروع کرتا ہے۔ پھر مبدا(Origin) سے گزرتے ہوئے دائیں جانب اوپر حرکت کرنے لگتا ہے۔



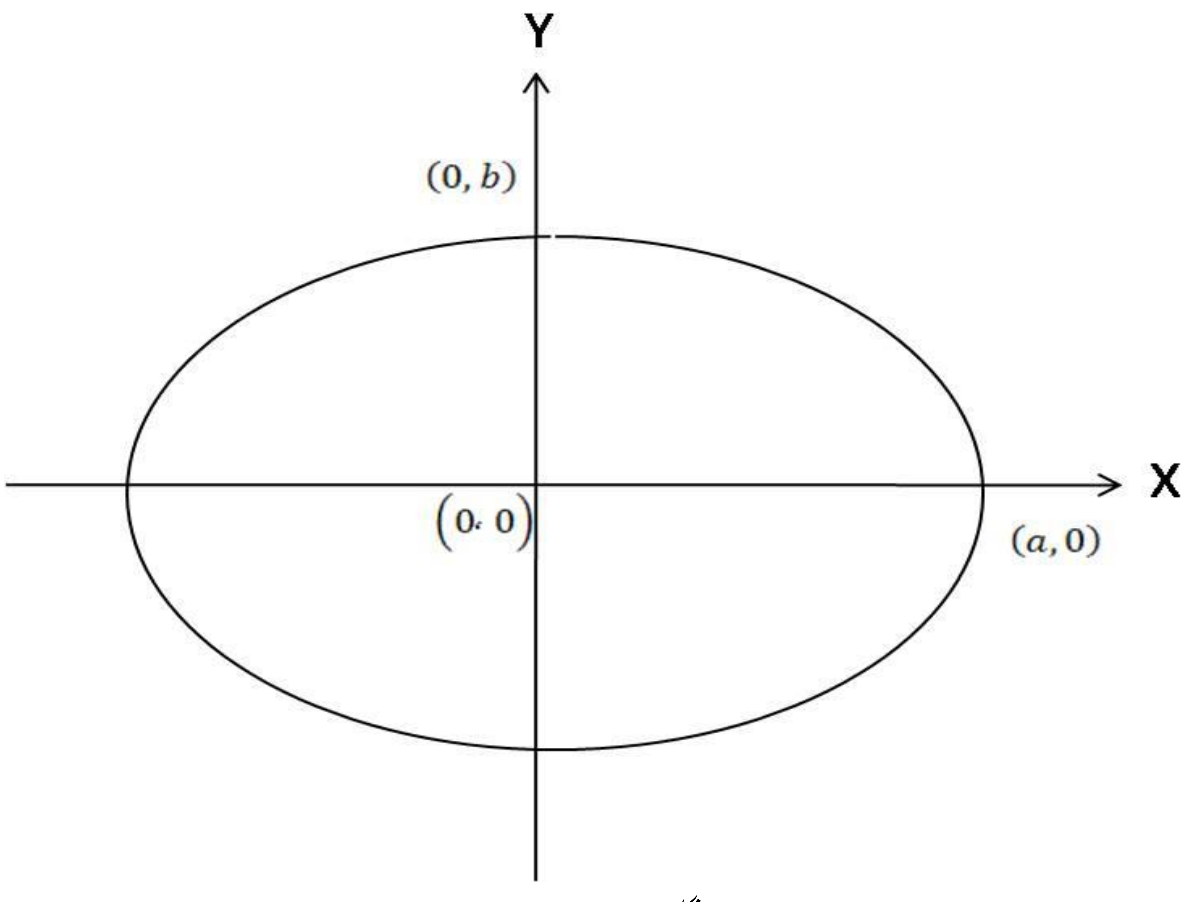
شکل:11.2.1.5

جس طرح مثال(4) سے صراحت(Illustrate)ہوتی ہے کہ کوئی بھی خط منحنی $y = f(x)$ پیرامٹرائزیشن $x = t$اور $y = f(t)$ رکھتی ہے۔ یہ اتنا آسان ہے کہ اس کا استعمال ہم عام طور پر نہیں کرتے لیکن کبھی کبھی اس طرح کانقطہ نظر سود مند بھی ہوتا ہے۔

مثال-5 بیضوی(Ellipse)کا پیرامٹرائزیشن :ایک ذرے کی حرکت کی وضاحت کیجیے جسکی tوقت پر پوزیشن $P(x, y)$اس طرح دی گئی ہے: $x = a\cos t$، $y = b\sin t$، $0 \le t \le 2\pi$

حل-ہر ذرے کے محددوں کے لیے کارتیسی مساوات، مساواتوں $\sin t = \frac{x}{a}$، $\cos t = \frac{y}{b}$ کے درمیان سے tکا اخراج کرکے معلوم کرتے ہیں۔اسے اصول $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ سے مذکورہ نتیجہ اس طرح حاصل ہوتا ہے۔ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ یا $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$

ذرہ محدد (x, y) مساوات $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ کو مطمئن کرتے ہیں اس لیے ذرہ بیضوی کے ہمراہ حرکت کرتا ہے۔ $t = 0$ پر ذرے کے محدد $x = a\cos(0) = a$، $y = b\sin(0) = 0$ ہیں اس لیے حرکت $(a,\ 0)$ شروع ہوتی ہے۔اور ذرہ tوقت میں ہر اضافہ کے ساتھ بلند ہو کر بائیں جانب سرکتے ہوئے مخالف ساعتوار حرکت کرتا ہے۔اس طرح وہ بیضوی کو ایک مرطبہ طے کرتے ہوئے وقت $t = 2\pi$ پر واپس ابتدائی پوزیشن $(a, 0)$ حاصل کرلیتا ہے۔



شکل:11.2.1.6

مثال-6 (دائرے کا پیرامٹرائزیشن): مثال (5) میں $a = b$ لے کر حاصل مساواتیں اور پیرامٹرک وقفہ ، $0 \leq t \leq 2\pi$ ، $y = a\, sin\, t$، $x = a\, cos\, t$ دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ کی وضاحت کرتے ہیں۔

مثال-7 (ہائپربولا کے سیدھے ہاتھ کی برانچ کا پیرامٹرائزیشن): ایک ذرے کی حرکت کی وضاحت کیجیے جس کی وقت t پر پوزیشن $P(x, y)$ یہ ہے: $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$، $x = sec\, t$، $y = tan\, t$

حل- ہم P کے محددوں کے لیے ایک کارتیسی مساوات مساواتوں $x = sec\, t$، $y = tan\, t$ سے t کا اخراج کر کے معلوم کرتے ہیں۔

اصول $sec^2t - tan^2t = 1$ سے مذکورہ نتیجہ اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$x^2 - y^2 = 1$$

چونکہ ذرے کے محدد (x, y) مساوات $x^2 - y^2 = 1$ کو مطمئن کرتے ہیں، اس لیے ہائپربولا کے کسی حصہ پر حرکت واقع ہوتی ہے۔ چونکہ وقت t کا وقفہ $-\frac{\pi}{2}$ سے $\frac{\pi}{2}$ تک ہے، مساوات $x = sec\, t$ مثبت رہتی ہے۔ اور $y = tan\, t$ مساوات حدود $-\infty$ سے ∞ کے درمیان رہتی ہے۔ اس لیے نقطہ P ہائپربولا کی سیدھے ہاتھ کی برانچ ٹراورس (Traverse) کرتا ہے۔ $t \to 0$ کے لیے وہ برانچ کے نچلے نصف کے ہمراہ آتا ہے، $t = 0$ پر پوزیشن $(1, 0)$ پر پہنچتا ہے اور t جب $\frac{\pi}{2}$ کی طرف بڑھتا ہے وہ حرکت کرتے ہوئے پہلے ربع میں آجاتا ہے۔

مثال-8 متدیر (Cycloid) ایک پہیہ جس کا نصف قطر a ہے ایک افقی خط مستقیم کے ہمراہ گھومتا ہے۔ پہیہ کے محیط پر نقطہ P سے ٹریس کیے گئے راستے کے لیے پیرامٹرک مساواتیں معلوم کیجیے۔ یہ راستہ متدیر کہلاتا ہے۔

حل- ہم خط کو بطور x محور لیں گے۔ پہیہ پر نقطہ P کا نشان لگائیں۔ نقطہ P کو مبدا پر رکھ کر پہیہ کو دائیں جانب گھمانا شروع کریں۔ پہیہ جس زاویہ t سے پھرتا ہے اسے ہم بطور پیرامیٹر (تبدیلیہ) استعمال کریں گے۔ یہاں t کی پیائش ریڈین میں ہے۔ شکل میں پہیہ کی اس حالت کو دکھاتا ہے جس میں اس کا قاعدہ مبدا سے at اکائی دور ہے۔ پہیہ کا مرکز C مقام (at, a) پر ہے۔ اور P کے محدد یہ ہیں:

$x = at + a\cos\theta$, $y = a + a\sin\theta$، θ کو t کی اصطلاح میں ظاہر کرنے کے لیے ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ $t + \theta = \frac{3\pi}{2}$ یا پھر $\theta = \frac{3\pi}{2} - t$ اس سے $\cos\theta = \left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\sin t, \sin\theta = \left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\cos t$، حاصل ہوتا ہے۔ لہٰذا ہمیں درکار مساواتیں یہ ہیں:

$$x = at + a(-\sin t), y = a + a(-\cos t)$$
$$x = at - a\sin t, \quad y = a - a\cos t$$

اجزا ضربی کرنے پر

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$$

شکل اس سائکلائڈ کی پہلی کمان (Arch) اور اس کے بعد کے کچھ حصہ کو دکھاتی ہے۔

تدویر(Hypocycloids): جب کسی متعین دائرہ کے اندر سے مس ہوتے ہوئے دوسرا دائرہ گردش کرتا ہے تو اس دوسرے دائرے کے محیط پر کوئی نقطہ P تدویر بناتا ہے۔ فرض کرو کہ $x^2 + y^2 = a^2$ متعین دائرہ ہے اور پھرنے والے دائرہ کا نصف قطر b ہے۔ مزید فرض کرو کہ ٹریسنگ نقطہ P کا ابتدائی مقام $A(a, 0)$ ہے۔

11.2.2 کسی منحنی کو پیرامٹرک کرنا (Parameterization of a Curve)

اس حصہ میں ہم پیرامٹرائزڈ(Parameterized) خطوط منحنی سے مربوط لمبائیاں اور گھماؤ کے سطحی رقبہ معلوم کریں گے۔

11.2.3 قوسی لمبائی(Arc Length)

کسی سطح میں کسی منحنی راستے کی لمبائی کو معلوم کرنے کے لیے ہم اسے چھوٹے چھوٹے مستقیم قطعہ خط (Straight-Line Segment) میں تقسیم کرتے ہیں۔ اس طرح کی پیائش میں صحت کی ایک حد ہوتی ہے۔ لیکن کیلکولس میں ہم مستقیم قطعہ خط کو چھوٹے سے چھوٹا کر کے ان سیگمینٹس کے سیٹ کا پالیگونل(Polygonal) راستہ لیتے ہیں جو قوس یا خط منحنی میں اور اچھی طرح سے فٹ ہوتا ہے۔ اس طرح ایک ہموار خط منحنی حاصل ہوتی ہے۔ جب ہم اس طرح عمل کرتے ہیں تو پالیگونل راستوں کی لمبائیاں ایک حد کو پہنچ تی ہیں جس کا تکمل ہم معلوم کر سکتے ہیں۔

ہموار منحنی(Smooth Curve): ایک تفاعل جو مسلسل ہے پہلے تفرق میں ہے وہ ہموار کہلاتا ہے اور اس کی ترسیم(Graph) ہموار خط منحنی کہلاتی ہے۔

تعریف: قوسی لمبائی مشتق(Arc Length Differential)

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

اور قوس کی لمبائی(Arc Length) کا مشتق ضابطہ

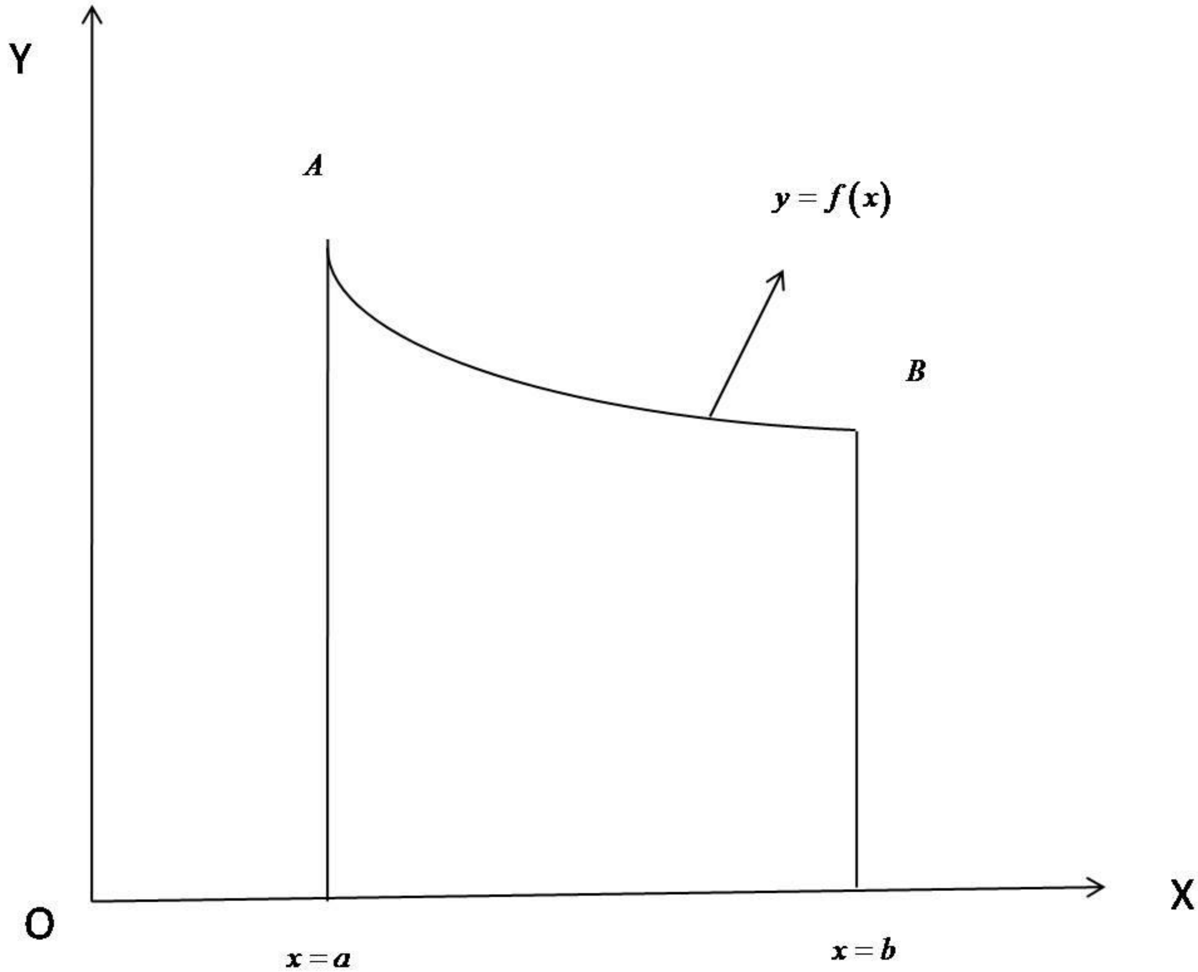
$$L = \int ds$$

تعریف: t میں a سے b تک اضافہ پر اگر ہموار خط منحنی $x = f(t)$، $y = g(t), a \leq t \leq b$ ایک مرطبہ طے کی جاتی ہے، تو خط منحنی کی لمبائی یہ ہے

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

بنیادی ضابطہ: خط منحنی کی لمبائی(length of Curve)

فرض کرو کہ ہم $x = a$ سے $x = b$ تک خط منحنی $y = f(x)$ کی لمبائی معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ اگر f وقفہ $[a, b]$ پر ہموار ہو تو اس خط منحنی کی لمبائی کی تعریف ذیل کے مطابق کی جاسکتی ہے۔



شکل:11.2.3.1

تعریف: اگر f وقفہ $[a,b]$ پر ہموار ہو تو خط منحنی $y = f(x)$ کی a سے b تک لمبائی یہ ہے

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx \quad ....(1)$$

ہموار خط منحنی $x = g(y)$، $c \le y \le d$ کی لمبائی کے لیے ضابطے

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_c^d \sqrt{1 + \left(g'(y)\right)^2}\, dy \quad ....(2)$$

مختصر تفرقی ضابطہ: مساواتوں

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

اور

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

کو اگر ڈیریویٹوس (مشتقوں) کے بجائے ڈفرینشیلس (تفرقوں) کی شکل میں لکھا جائے تو ہمیں پہلے تکمل سے حاصل ہوتا ہے:

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\,dx$$

$$= \sqrt{dx^2+\frac{dy^2}{dx^2}dx^2} = \sqrt{dx^2+dy^2}$$

دوسرے تکمل سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}}\,dy$$

$$= \sqrt{dy^2+\frac{dx^2}{dy^2}dy^2}$$

$$= \sqrt{dy^2+dx^2} = \sqrt{dx^2+dy^2}$$

اس طرح مساواتوں (1) اور (2) کے تکملوں سے تخفیف شدہ ایک ہی تفرقی ضابطہ حاصل ہوتا ہے:

$$L = \int_a^b \sqrt{dx^2+dy^2}\,dt \quad ...(3)$$

بیشک یہاں dx اور dy کو مشترک متغیر کی صورت میں ظاہر کرنا چاہیے اور مساوات (3) کا تکمل معلوم کرنے سے پہلے تکمل کی مناسب لمٹس معلوم کرنا چاہیے۔

مساوات (4) کو اور مختصر ترین صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ فرض کرو کہ dx اور dy کسی چھوٹے سے مثلث کے دو بازو ہیں جس کا وطر (Hypotenuse) $ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$ ہے، تب مشتق ds کو قوس کی لمبائی کے مشتق کے طور پر دیکھا جا سکتا ہے۔ جس کا مناسب لمٹس کے درمیان تکمل سے خط منحنی کی لمبائی حاصل ہوتی ہے۔ مساوات (3) کے تکمل میں $\sqrt{dx^2+dy^2}$ کے بدلے ds کا تکمل ہو جاتا ہے۔

مثال-1 خط منحنی $y = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} - 1, 0 \le x \le 1$ کی لمبائی معلوم کیجیے۔

حل- یہاں $a = 0$ اور $b = 1$ ہے، اب

$$y = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} - 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\times\frac{3}{2}\times x^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(2\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 8x$$

اسلیے دی گئی منحنی کی لمبائی ہو گی

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+8x}\,dx$$

$$= \left[\frac{3}{2}\times\frac{1}{8}(1+8x)^{3/2}\right]_0^1$$

$$= \frac{13}{8}$$

نوٹ: (اگر $\frac{dy}{dx}$ میں تسلسل نہ ہو) خط منحنی کے کسی نقطہ پر جہاں $\frac{dy}{dx}$ کا وجود ناکام ہو جائے تو وہاں $\frac{dx}{dy}$ ممکن ہو سکتا ہے اور ہم ذیل کی طرح خط منحنی کی لمبائی x کو y میں ظاہر کر کے مساوات (1) کی مانند معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال-2 خط منحنی $y = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, 0 \le x \le 2$ کی لمبائی معلوم کیجیے۔

حل- یہاں $a = 0$ اور $b = 2$ ہے، اب

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\times x^{-\frac{1}{3}}\times\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

یہاں $x = 0$ پر مشتق (Derivative) کی توضیح نہیں کی جا سکتی ہے، اس لیے مساوات (1) کا استعمال کر کے خط منحنی کی لمبائی معلوم نہیں کی جا سکتی۔ لہٰذا ہم x کو y میں ظاہر کر کے دی گئی خط منحنی کو لکھیں گے

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow\ x = 2y^{3/2}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ جس خط منحنی کی لمبائی ہمیں چاہیے وہ بھی $y = 0$ سے $y = 1$ تک مساوات $x = 2y^{3/2}$ کا گراف ہے۔

اب مشتق

$$\frac{dx}{dy} = 2\times\frac{3}{2}y^{1/2} = 3y^{1/2}$$

وقفہ $[0, 1]$ پر مسلسل ہے۔ اس لیے خط منحنی لمبائی معلوم کرنے کے لیے اب ہم مساوات (2) کا استعمال کر سکتے ہیں۔ اب

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \left(3y^{1/2}\right)^2 = 9y$$

اسلیے دی گئی منحنی کی لمبائی ہو گی

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+9y}\,dy$$

فرض کرو کہ $m = 1 + 9y$، لہازا $dm/9 = dy$

اس لیے

$$L = \int_0^1 \frac{1}{9}\sqrt{m}dm$$
$$= \left[\frac{1}{9} \times \frac{2}{3}(1+9y)^{3/2}\right]_0^1$$
$$= \frac{2}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right) \approx 2.27$$

11.2.4 پیرامٹرک منحنی کی قوسی لمبائی (Arc Length of Parametric Equation)

تکمل $L = \int ds$ کو دوبارہ لکھ کر ہم ہموار خط منحنی $x = f(t)$، $y = g(t), a \leq t \leq b$ کی لمبائی کے لیے درج ذیل طریقہ سے تکمل معلوم کرتے ہیں

$$L = \int_{t=a}^{t=b} ds$$
$$= \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2}$$
$$= \int_a^b \sqrt{\frac{(dx)^2}{(dt)^2} + \frac{(dy)^2}{(dt)^2}(dt)^2}$$
$$\Rightarrow \quad L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

متکمل (Integrand) کے تسلسل کے علاوہ جو ضرورت ہے وہ یہ ہے کہ t جیسا a سے b تک حرکت کرتا ہے نقطہ $P(x, y) =$ $P(f(t), g(t))$ خط منحنی کے کسی حصہ کو ایک مرتبہ سے زیادہ ٹریس نہیں کرتا۔

حصہ 11.2.3 میں لمبائی کے ضابطے اوپر کی مساوات (1) کے خاص کیسس ہیں۔

جس خط منحنی کی لمبائی ہم معلوم کرنا چاہتے ہیں، اگر اس کے دو مختلف پیرامٹرائزیشن (Parameterizations) ہوں اور ان میں سے کسی ایک کا استعمال کریں تو کیا معاملہ رہے گا؟ ایڈوانسڈ کیلکولس میں اس کا جواب نہیں ہے۔ جہاں تک ہم جس بھی پیرامٹرائزیشن کو منتخب کرتے ہیں وہ مساوات (1) کی شرائط پوری کرتی ہے۔

مثال-1 ایسٹرائڈ $(Asteroid) x = cos^3t, y = sin^3t, 0 \leq t \leq 2\pi$ کی لمبائی معلوم کیجیے۔

حل- محدودی محوروں کے نظام کی نسبت سے خط منحنی کے تشاکل (Symmetry) کی وجہ سے اس کی لمبائی پہلے ربع میں موجود اس کے حصہ کی لمبائی کا چار گنا ہوتی ہے۔ اس لیے دی گئی مساوات $x = cos^3t, y = sin^3t$ کے لیے

$$\frac{dx}{dt} = 3\cos^2 t \times (-\sin t)$$

اور

$$\frac{dy}{dt} = 3\sin^2 t \times (\cos t)$$

اب

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(3\cos^2 t \times \sin t)^2 + (3\sin^2 t \times \cos t)^2}$$
$$= \sqrt{9\cos^2 t \times \sin^2 t(\sin^2 t + \cos^2 t)}$$
$$= \sqrt{9\cos^2 t \times \sin^2 t}$$
$$= 3|\cos t \sin t|$$

کیونکہ وقفہ $[0\ 2\pi]$ میں $3\cos t \sin t \geq 0$، اس لیے

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 3\cos t \sin t$$

لہازا پہلے ربع میں ایسٹرائڈ کی لمبائی

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \sin t\, dt$$
$$= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\, dt$$
$$= \left[-\frac{3}{4}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{3}{2}$$

چونکہ ایسٹرائڈ کی کل لمبائی پہلے ربع کی لمبائی کا چار گنا ہوتی ہے اس لیے

$$\text{ایسٹرائڈ کی لمبائی} = 4 \times \frac{3}{2} = 6$$

11.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر ہمنے منحنیوں کے قوسوں کی لمبائی کو حاصل کرنا سیکھا۔

11.4 کلیدی الفاظ (Key Words)

قوسی لمبائی، (نجمیہ، ستارہ انما) ایسٹرائڈ، ہموار خط منحنی، پیرامٹرک مساوات، پیرامٹرک وقفہ، ذرہ، محدد، مستدیر، مکافی، تدویر، استداری خط (بالوشاہی کی طرح)، بیضوی

11.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

11.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. دونقاط $x = a$ اور $x = b$ نیز $a < b$ کے درمیان واقع خط منحنی $y = f(x)$ کی قوسی لمبائی

a) $\int_a^b y dx$ b) $\pi \int_a^b y^2 dx$

c) $\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ d) $\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$

2. دونقاط $x = 0$ اور $x = \frac{\pi}{6}$ نیز $a < b$ کے درمیان واقع خط منحنی $y = \log \sec x$ کی قوسی لمبائی

a) $\log 3$ b) $2 \log 3$

c) $\frac{1}{2} \log 3$ d) ان میں سے کوئی نہیں

3. ایسٹرائڈ (Asteroid) $x = acos^3 t, y = asin^3 t,$ کی جملہ لمبائی ہے

a) $2a$ b) $4a$

c) $6a$ d) $8a$

4. ہموار خط منحنی $x = f(t)$، $y = g(t), a \le t \le b$ کی قوسی لمبائیہے

a) $\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$ b) $\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$

c) $\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dx$ d) $\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\, dy$

5. ہموار خط منحنی $x = g(y)$، $c \le y \le d$ کی لمبائی کے لیے ضابطہ ہے

a) $\int_a^b y dx$ b) $\pi \int_a^b y^2 dx$

c) $\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ d) $\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$

11.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. سطح میں پیرامٹرائزڈ منحنی سے کیا مراد ہے؟
2. پیرامٹرک مساواتوں کی وضاحت کیجیے۔

3. ایسٹرائڈ $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ کی مکمل لمبائی معلوم کیجیے۔

4. پیرامٹرائزڈ خطوط منحنی $x = t^2, y = \frac{t^3}{3} - t$ کی لمبائی معلوم کریں جب کہ حلقہ $t = -\sqrt{3}$ سے شروع ہو کر $t = \sqrt{3}$ پر ختم ہوتا ہے۔

5. خطوط منحنی $x = \cos t , y = t + \sin t$ کی لمبائی معلوم کریں جب کہ $0 \le t \le \pi$

11.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. خطوط منحنی $x = t^3, y = \frac{3t^2}{2}$ کی لمبائی معلوم کریں جب کہ $0 \le t \le \sqrt{3}$

2. خطوط منحنی $x = \frac{t^2}{2}, y = \frac{(2t+1)^{3/2}}{3}$ کی لمبائی معلوم کریں جب کہ $0 \le t \le 4$

3. خطوط منحنی $x = 8\cos t + 8t\sin t , y = 8\sin t - 8t\cos t$ کی لمبائی معلوم کریں جب کہ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

4. خطوط منحنی $x = \ln(\sec t + \tan t) - \sin t , y = \cos t$ کی لمبائی معلوم کریں جب کہ $0 \le t \le \frac{\pi}{3}$

اکائی 12۔ گردشی سطح کا رقبہ

(Area of Surface of Revolution)

اکائی کے اجزا

12.0 تمہید
12.1 مقاصد
12.2 گردشی سطح کا رقبہ
12.3 اکتسابی نتائج
12.4 کلیدی الفاظ
12.5 نمونہ امتحانی سوالات
12.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات
12.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات
12.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

12.0 تمہید(Introduction)

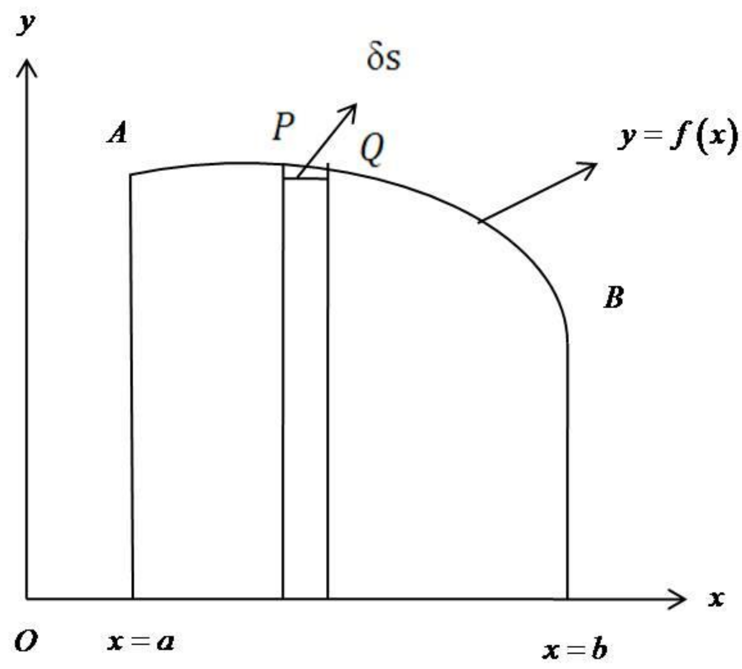
اگر کسی مستوی سطح(Plane Surface) کو اس میں موجود کسی محور کے گرد گھمایا جاتا ہے، تو اس گردش کی وجہ سے ایک ٹھوس وجود میں آتا ہے اور اس مستوی کے کنارے کے گھومنے سے ٹھوس(Solid) کی سطح (Surface)وجود پاتی ہے۔ مثال کے طور پر کسی مستطیل(Rectangle) کو اس کی کسی ضلع(Side) کے گرد گھمانے سے قائم دائری استوانہ(Right Circular Cylinder)وجود پاتا ہے، ایک قائم ذاوی مثلث(Right Angled Triangle) کو 90^0ذاویہ سے منسلک کسی ضلع کے گرد گھمانے سے قائم دائری مخروط(Right Circular Cone)بنتا ہے اور ایک نصف دائرہ(Semi Circle) کو اس کے قطر(Diameter) کے گرد گھمانے سے ایک کرہ وجود پاتا ہے۔

12.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ کسی مستوی سطح(Plane Surface) کو اس میں موجود کسی محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا سطحی رقبہ حاصل کر سکیں۔

12.2 گردشی سطح کا رقبہ(Area of Surface of Revolution)

مان لو کہ $y = f(x)$ کسی منحنی AB کی مساوات ہے اور اس پر کوئی نقطہ $P(x, y)$ ہے اور اس کے بہت نزدیک ایک دوسرا نقطہ $Q(x + \delta x, y + \delta y)$ ہے—مان لو δs قوس PQ کی لمبائی اور δS اس سطح



شکل 12.2.1

کا رقبہ ہے جو قوس PQ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنتا ہے، تب

$$2\pi y\delta s < \delta S < 2\pi(y+\delta y)\delta s$$

δs سے تقسیم دینے پر

$$2\pi y < \frac{\delta S}{\delta s} < 2\pi(y+\delta y)$$

جب $\delta s \to 0$، تب $\delta y \to 0$، اس لیے

$$\frac{dS}{ds} = 2\pi y$$

اس لیے

$$\int_a^b 2\pi y ds = \int_a^b \frac{dS}{ds} ds$$

$$= [S]_a^b$$

$$= S(x=b) - S(x=a)$$

$$= S(x=b) - 0$$

$$= S(x=b)$$

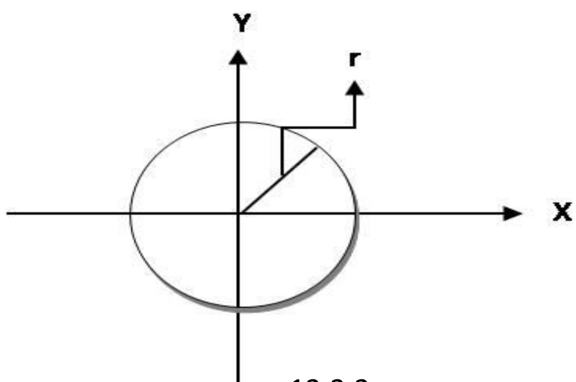
جو کہ اس سطح کا رقبہ ہے جو قوس AB کو x محور کے گرد گھمانے سے بنتا ہے۔ اب ہم کچھ مثالوں کے ضریعہ گردشی سطح کے رقبہ کو حاصل کرنا سیکھیں گے۔

مثال 1۔ اس نصف کرہ کا سطحی رقبہ حاصل کریں جسکا نصف قطر r ہے۔

حل۔ اس دائرہ(Circle) کی مساوات جسکا نصف قطر r ہے اور جسکا مرکز(Centre) مبدا(Origin) پر ہو درجہ ذیل ہوتا ہے

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ہم جانتے ہیں کہ ایک نصف دائرہ(Semi Circle) کو x محور کے گرد گھمانے سے ایک کرہ وجود پاتا ہے، اور اس نصف کرہ کا سطحی رقبہ، کرہ کے سطحی رقبہ کا آدھا ہوتا ہے۔



12.2.2

اب ہم سب سے پہلے کرہ کا سطحی رقبہ حاصل کریں گے

$$A = \int_{-r}^{r} 2\pi y ds$$

3

$$= \int_{-r}^{r} 2\pi y \frac{ds}{dx} dx$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} \mathrm{y} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} dx$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{x^2 + \mathrm{y}^2} dx$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} r dx$$

$$= 2\pi r [x]_{-r}^{r}$$

$$= 4\pi r^2$$

اس لیے

$$\text{نصف کرہ کا سطحی رقبہ} = \frac{1}{2}\left(\text{کرہ کا سطحی رقبہ}\right)$$

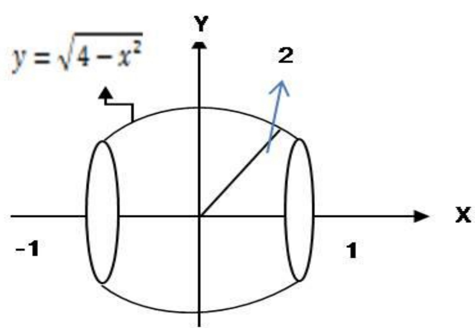
اس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ نصف کرہ کا سطحی رقبہ $2\pi r^2$ ہوگا۔

مثال2۔ قوس $-1 \leq x \leq 1$، $y = \sqrt{4 - x^2}$ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا سطحی رقبہ حاصل کریں۔

حل۔ اس دائرہ(Circle) کی مساوات جسکا نصف قطر 2 ہے اور جسکا مرکز(Centre) مبدا(Origin) پر ہو درجہ ذیل ہوتا ہے

$$x^2 + \mathrm{y}^2 = 4$$

اس دائرہ کی قوس $y = \sqrt{4 - x^2}$ کو x محور کے گرد $-1 \leq x \leq 1$ پر گھمانے سے درجہ ذیل شکل میں دیا گیا مجسم وجود پاتا ہے، اس لیے



شکل 12.2.3

$$\mathrm{A} = \int_{-1}^{1} 2\pi y ds$$

$$= \int_{-1}^{1} 2\pi y \frac{ds}{dx} dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}\right)^2} dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2} \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}} dx$$

$$= 4\pi \int_{-1}^{1} dx$$

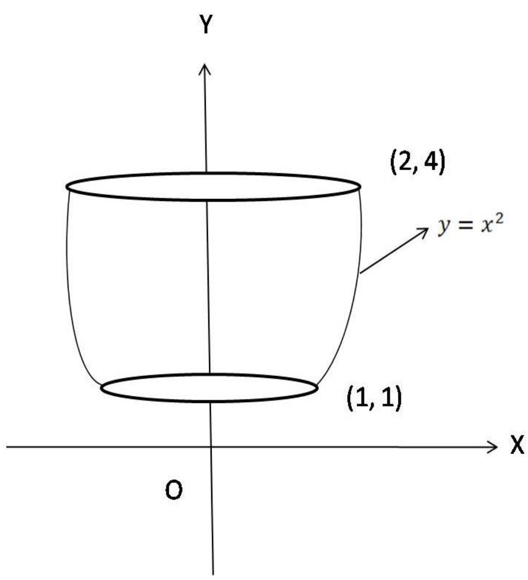
$$= 4\pi [x]_{-1}^{1}$$

$$= 8\pi$$

اس لیے دائرہکیقوس $y = \sqrt{4 - x^2}$ کو x محور کے گرد $-1 \le x \le 1$ پر گھمانے سے حاصل مجسم کا سطحی رقبہ 8π ہو گا۔

مثال3۔ قوس $y = x^2$، $1 \le x \le 2$ کو y محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا سطحی رقبہ حاصل کریں۔

حل۔ دیے گیے قوس کی مساوات $y = x^2$ ہے۔اس کو y محور کے گرد $1 \le x \le 2$ پر گھمانے سے درجہ ذیل شکل میں دیا گیا مجسم وجود پاتا ہے،اس لیے



شکل 12.2.4

$$A = \int_{1}^{2} 2\pi x ds$$

$$= 2\pi \int_{1}^{2} x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{1}^{2} x\sqrt{1 + (2x)^2} dx$$

مان لو کہ $m = 1 + 4x^2$,اور جب $x = 1$،تب $m = 5$اور جب $x = 2$،تب $m = 17$،اور $dm = 8xdx$

$$A = 2\pi \int_{5}^{17} \frac{1}{8}\sqrt{m} dm$$

$$= \frac{1}{4}\pi \left[\frac{m^{3/2}}{3/2}\right]_5^{17}$$

$$= \frac{1}{6}\pi \left(17^{3/2} - 5^{3/2}\right)$$

اس لیے قوس $y = x^2$ کو y محور کے گرد $1 \le x \le 2$ پر گھمانے سے حاصل مجسم کا سطحی رقبہ $\frac{1}{6}\pi\left(17^{3/2} - 5^{3/2}\right)$ ہو گا۔

مثال4۔ منحنی $y = cosh\, x$ کو x محور کے گرد $0 \le x \le 1$ پر گھمانے سے بنے ٹھوس کا سطحی رقبہ حاصل کریں۔

حل۔ دی گئی منحنی کی مساوات ہے

$$y = \cosh x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sinh x$$

تب،

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + (\sinh x)^2} = \sqrt{\cosh^2 x} = \cosh x$$

اس لیے

$$A = \int_{0}^{1} 2\pi y ds$$

$$= \int_{0}^{1} 2\pi y \frac{ds}{dx} dx$$

$$= 2\pi \int_{0}^{1} y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{0}^{1} \cosh x \cdot \cosh x\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 \cosh^2 x \, dx$$
$$= \pi \int_0^1 (1 + \cosh 2x) dx$$
$$= \pi \left[x + \frac{1}{2} sinh\, 2x\right]_0^1$$
$$= \pi \left(1 + \frac{1}{2} sinh\, 2\right)$$
$$= \pi \left(1 + \frac{e^2 - e^{-2}}{4}\right)$$

مثال5۔ سائکلائڈ(Cycloid) $x = a(\theta + \sin\theta), y = a(1 + \cos\theta)$ کواس کے اساس(Base)کے گرد گھمانے سے حاصل ٹھوس مجسم کا سطحی رقبہ حاصل کریں۔

حل۔ ہم جانتے ہیں کہ سائکلائڈ(Cycloid)کی مساوات $x = a(\theta + \sin\theta), y = a(1 + \cos\theta)$ ہے۔اب

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1 + \cos\theta)$$

اور

$$\frac{dy}{d\theta} = -a \sin\theta$$

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}$$
$$= \sqrt{a^2(1 + \cos\theta)^2 + a^2(\sin\theta)^2}$$
$$= a\sqrt{2(1 + \cos\theta)}$$
$$= 2a \cos\frac{\theta}{2}$$

اس لیے سائکلائڈ کواس کے اساس کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا سطحی رقبہ درجہ ذیل ہوگا

$$A = \int_a^b 2\pi y ds$$
$$= 2\pi \int_a^b y \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} \, d\theta$$
$$= 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} a(1 + \cos\theta) \left(2a \cos\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$
$$= 8\pi a^2 \int_0^{\pi} \left(2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$
$$= 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \cos^3\frac{\theta}{2} \, d\theta$$

مان لو کہ $m = \frac{\theta}{2}$، اور جب $\theta = 0$، تب $m = 0$ اور جب $\theta = \pi$، تب $m = \frac{\pi}{2}$، اور
$d\theta = 2dm$

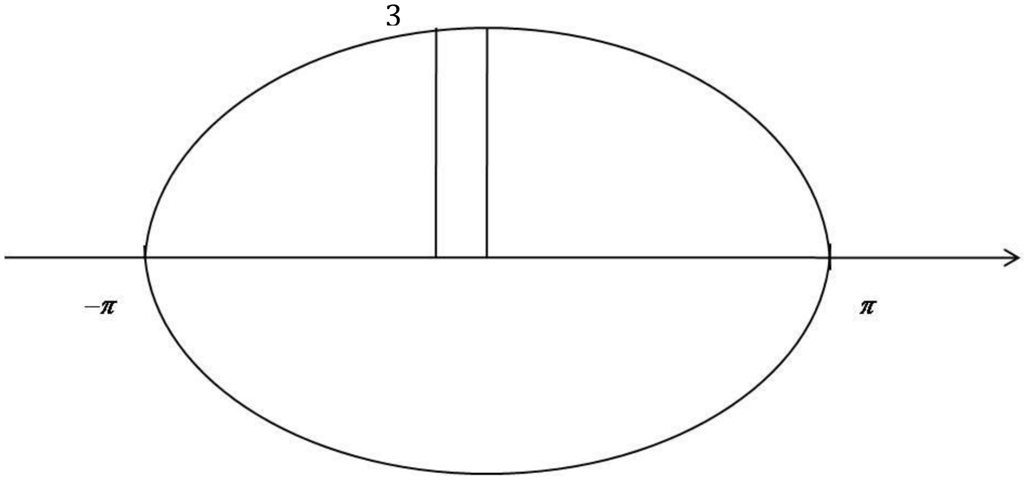
ہم جانتے ہیں $\int cos^n\theta \, d\theta = \frac{1}{n} cos^{n-1}\theta \, sin\,\theta + \frac{n-1}{n}\int cos^{n-2}\theta \, d\theta$

اس لیے

$$\int \cos^3 m \, dm = \frac{1}{3} cos^{3-1}m \, sin\, m + \frac{3-1}{3}\int cos^{3-2}m \, dm$$
$$= \frac{1}{3}cos^2 m \, sin\, m + \frac{2}{3}\int cos\, m \, dm$$
$$= \frac{1}{3}cos^2 m \, sin\, m + \frac{2}{3}\sin m$$

اب

$$A = 32\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^3 m \, dm$$
$$= 32\pi a^2 \left[\frac{1}{3}cos^2 m \, sin\, m + \frac{2}{3}\sin m\right]_0^{\pi/2}$$
$$= 32\pi a^2 \left[\frac{1}{3}(0-0) + \frac{2}{3}(1-0)\right]$$
$$= \frac{64\pi a^2}{3}$$



شکل 12.2.5

مثال 6۔ کارڈائڈ (Cardioide) $r = a(1 - cos\,\theta)$ کو ابتدائی خط کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس مجسم کا سطحی رقبہ حاصل کریں۔

حل۔ دیے گئے کارڈائڈ (Cardioide) کی مساوات ہے $r = a(1 - cos\,\theta)$، تب

$$\frac{dr}{d\theta} = a \sin\theta$$

اور

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$
$$= \sqrt{a^2(1 - cos\,\theta)^2 + a^2 sin^2\theta}$$
$$= a\sqrt{cos^2\theta + 1 - 2\cos\theta + sin^2\theta}$$
$$= a\sqrt{2(1 - \cos\theta)}$$
$$= a\sqrt{2\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}$$
$$= 2a\sin\frac{\theta}{2}$$

اس لیے کارڈائڈ(Cardioide)$r = a(1 - cos\,\theta)$کو ابتدائی خط کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس مجسم کا سطحی رقبہ ہوگا

$$A = \int_0^{\pi} 2\pi y\frac{ds}{d\theta}d\theta$$

ہم جانتے ہیں کہ $y = r\sin\theta$ اس لیے

$$A = \int_0^{\pi} 2\pi r\sin\theta\left(2a\sin\frac{\theta}{2}\right)d\theta$$
$$= 4a\pi\int_0^{\pi} a(1 - cos\,\theta)\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)d\theta$$
$$= 8a^2\pi\int_0^{\pi}\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)d\theta$$
$$= 16a^2\pi\int_0^{\pi}\left(\sin^4\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)d\theta$$
$$= 16a^2\pi\left[\frac{2}{5}\sin^5\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{32}{5}a^2\pi(1 - 0) = \frac{32}{5}a^2\pi$$

12.3 اکتسابی نتائج(Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے سیکھا کہ کسی مستوی سطح(Plane Surface)کو x محور اور y محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا سطحی رقبہ بالترتیب$A = \int_a^b 2\pi yds$اور$A = \int_a^b 2\pi xds$ہوتا ہے۔

12.4 کلیدی الفاظ(Key Words)

سطحی رقبہ، مبدہ، محور، کارڈائڈ، سائکلائڈ، مخروط، اساس، نصف عمودی زاویہ، الپسائڈ

12.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

12.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$ کا رقبہ ہوتا ہے

(a) ab (b) $2\pi ab$ (c) πab (d) 0

2. $x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta$ کا رقبہ ہوتا ہے

(a) a^2 (b) πa (c) πa^2 (d) 0

3. منحنی $y = f(x)$ اور $x = a, x = b$ سے گھرے رقبہ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس مجسم کا رقبہ ہے

(a) $\int_a^b 2\pi y ds$ (b) $\int_a^b \pi y ds$ (c) $\int_a^b \pi y^2 ds$ (d) $\int_a^b 2\pi y^2 ds$

4. اس مخروط (Cone) کا رقبہ، جسکا نصف عمودی ذاویہ α اور جسکا اساس، r نصف قطر کا ایک دائرہ ہے، ہوگا

(a) πr^2 (b) $\pi r^2 \cos\alpha$ (c) $\pi r^2 \operatorname{cosec}\alpha$ (d) 0

5. منحنی $y = x^3$ کو $x = 1, x = 4$ کے درمیانی علاقہ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس مجسم کا رقبہ ہے

(a) 128 (b) $\frac{255}{4}$ (c) $\frac{127}{4}$ (d) $\frac{128}{4}$

6. سائکلائڈ (Cycloid) $x = a(\theta + \sin\theta), y = a(1 + \cos\theta)$ کو اس کے اساس (Base) کے گرد گھمانے سے حاصل ٹھوس مجسم کا سطحی رقبہ ہے

(a) $64\pi a^2$ (b) $\frac{64}{2}\pi a^2$ (c) $\frac{64}{3}\pi a^2$ (d) 0

7. منحنی $ay^2 = x^2(a - x)$ کے ایک حلقہ کا رقبہ ہے

(a) $\frac{8a^2}{15}$ (b) $\frac{4a^2}{15}$ (c) $\frac{2a^2}{15}$ (d) $\frac{a^2}{15}$

8. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$ کا رقبہ ہوتا ہے

(a) ab (b) $2\pi ab$ (c) πab (d) 0

9. نصف قطر a کے کرہ کا سطحی رقبہ ... ... ہے۔

10. سائکلائڈ $x = a(\theta + \sin\theta), y = a(1 - \cos\theta)$ کو اس کے راس کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس مجسم کا سطحی رقبہ ... ... ہے۔

12.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. قوس $y = x^3$، $0 \le x \le 2$ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا سطحی رقبہ حاصل کریں۔

2. قوس $y = \sqrt{x}, 2 \le x \le 6$ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا سطحی رقبہ حاصل کریں۔

3. قوس $y = \cos 2x, 0 \le x \le \frac{\pi}{6}$ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا سطحی رقبہ حاصل کریں۔

4. قوس $y = \cosh x\,, 0 \le x \le 1$ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا سطحی رقبہ حاصل کریں۔

5. دکھایئے کہ دائرہ $x = \sqrt{a^2 - y^2}, 0 \le y \le a$ کو y محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا سطحی رقبہ، a نصف قطر کے کرہ کے سطحی رقبہ کا آدھا ہوتا ہے۔

6. قوس $y = \sqrt[3]{x}, 1 \le x \le 2$ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا سطحی رقبہ حاصل کریں۔

7. کیٹینری (Catanary) $y = c \cosh\frac{x}{c}$ کی ایک قوس کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا سطحی رقبہ حاصل کریں۔

12.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. منحنی $3ay^2 = x(a - x)^2$ کے لوپ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس کا سطحی رقبہ حاصل کریں، جبکہ $a > 0$ اس لوپ کو اگر y محور کے گرد گھمایا جائے تو اس طرح بنے ٹھوس مجسم کا سطحی رقبہ کیا ہوگا؟

2. کارڈائڈ (Cardioide) $r = a(1 + cos\,\theta)$ کو ابتدائی خط کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس مجسم کا سطحی رقبہ حاصل کریں۔

3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$ کو x محور کے گرد گھمانے سے بنے الپسائڈ کا سطحی رقبہ حاصل کریں۔

4. منحنی $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ کو گھمانے سے بنے ٹھوس مجسم کا سطحی رقبہ حاصل کریں۔

5. ایک دائری قوس کو اس کے وطر (Chord) کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ ثابت کریں کہ اس طرح بنے ٹھوس مجسم کا سطحی رقبہ $4\pi a^2(sin\,\alpha - \alpha\,cos\,\alpha)$ جہاں a نصف قطر ہے اور 2α دئرہ کے مرکز پر قوس کے ضریعہ بنا زاویہ ہے۔

6. x محور کے اوپر منحنی $ay^2 = x^3$ کے $x = 0$ سے $x = 4a$ تک کے حصہ کو y محور کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس مجسم کا سطحی رقبہ حاصل کریں۔

7. پیرابولا (Parabola) اور اس کے لیٹس ریکٹم (Latus Rectum) کے درمیانی رقبہ کو ڈائریکٹرکس (Directrix) کے گرد گھمانے سے بنے ٹھوس مجسم کا سطحی رقبہ حاصل کیجیے۔

تجویز کردہ اکتسابی مواد

(Suggested Learning Resources)

1. Calculus, M. J. Strauss, G. L. Bradley, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall (3rd Edition)
2. Calculus: Robert T. Smith, R. B. Muiton, McGraw Hill Education India Pvt Ltd. New Delhi.
3. Calculus, H. Anton, I. Bivens, S. Davis, John Wiley & Sons, Inc. (10th Edition)
4. Calculus, M. J. Strauss, G. L. Bradley, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall (3rd Edition)
5. B.Sc. Vol. I, Mathematics by V. Venkateshwara Rao, N. KKrishna Murthy, S. Chand & Company Pvt. Ltd.
6. Integral Calculus, K. Ahmad, Real World Education Publishers Pvt Ltd, New Delhi

نمونہ امتحانی پرچہ

بیچلر آف سائنس Bachelor of Science (Hons.)

Subject Code: BNMM101DCT

پرچہ: علم احصا (Calculus) سمسٹر–I

نشانات: 50 | وقت: 3 گھنٹے

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم اور حصہ سوم۔ ہر جواب کے لیے لفظوں کی تعداد اشارتن ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1۔ حصہ اول میں 10 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/خالی جگہ پر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ $10 \times 1 = 10$

2۔ حصہ دوم میں 6 سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی چار سوالات کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریبن 200 لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 5 نمبرات مختص ہیں۔ $4 \times 5 = 20$

3۔ حصہ سوم میں 3 سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی 2 سوالات کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریبن 500 لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 10 نمبرات مختص ہیں۔ $2 \times 10 = 20$

حصہ اول

سوال: 1

(i) $\frac{d^3}{dx^3}(sin\, 2x)$ کو محسوب کرو۔

(ii) خالی جگہ پر کرو۔ $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = \cdots\cdots\cdots$

(iii) خالی جگہ پر کرو۔ $\frac{d^n}{dx^n}\{\sin(ax+b)\} = \cdots\cdots\cdots$

(iv) $\int cos^2 x\, dx$ کو محسوب کرو۔

(v) اگر $\frac{d}{dx}[f(x)] = f(x)$، تب $\int_a^b f(x)\, dx$ کس کے برابر ہوگا؟

(vi) منحنی $x = f(y)$ کے a اور b عرضی مختصات رکھنے والے نقاط کے درمیان منقطع ہونے والی قوس کو y محور کے اطراف گھمانے سے حاصل کردہ ٹھوس کا حجم $\int_a^b \pi x^2\, dy$ ہوگا۔ (صحیح/غلط)

(vii) دائرہ $x^2 + y^2 = 4$ کا کل رقبہ .... ہے۔

(viii) کیپلر کا دوسرا قانون لکھو۔

(ix) $\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \cdots\cdots$، جہاں $\hat{\imath}$ اکائی بردار ہے۔

(x) $\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \cdots\cdots$، جہاں $\hat{\imath}$ اکائی بردار ہے۔

حصہ دوم

2. اگر $x = a(\theta + \sin\theta), y = a(1 - \cos\theta)$، تب $\theta = \frac{\pi}{2}$ کی قیمت حاصل کریں۔

3. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^2 \sin x^2}$ حاصل کیجیے۔

4. $\int Sin^5 x dx$ حاصل کرو۔

5. $\int Sec^3 x dx$ حاصل کرو۔

6. منحنی $y = \log\sec x$ کی قوسی لمبائی $x = 0$ سے $x = \frac{\pi}{3}$ تک حاصل کرو۔

7. اگر $\vec{F} = 5t^2\hat{\imath} + t\hat{\jmath} - t^3\hat{k}$ اور $\vec{G} = \sin t\,\hat{\imath} - \cos t\,\hat{\jmath}$ تب حاصل کرو

(i) $\frac{d}{dt}(\vec{F} \times \vec{G})$ (ii) $\frac{d}{dt}(\vec{F} \cdot \vec{G})$

حصہ سوم

8. اگر $cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = \log\left(\frac{x}{n}\right)^n$ تب دکھاؤ کہ $x^2 y_{n+2} + (2n+1)x y_{n+1} + 2n^2 y_n = 0$

9. x کی قیمتوں کی وہ رینج حاصل کرو جس کے لیے منحنی $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 5x + 7$ اوپر کی طرف کانکیو (Concave) ہو یا نیچے کی طرف۔ اور پھر انفلیکشن (Inflexion) کے نقاط بھی حاصل کرو۔

10. $\int tan^n x dx$ حاصل کرو اور پھر اس سے $\int tan^4 x dx$ حاصل کرو۔

BNMM101DCP

لیب مینول

علم احصا

(Calculus)

بی۔ایس سی۔(آنرز)

چارسالہ پروگرام

پہلا سمسٹر(ریاضی)

اکائی 1۔اعلی رتبے کے مشتقات اور زائدی تفاعل کے مسائل

نمونہ تجرباتی سوال

1.1 بتلاؤ کہ $\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), x \in \mathbb{R}$

مقصد(Aim)

معکوس زائدی تفاعل کو لوگر تھمک تفاعل کے ذریعے دکھا سکتے ہیں۔

طرزعمل(Procedure)

Step I

مان لو کہ

$$y = \sinh^{-1} x$$

Step II

زائدی تفاعل کو درجہ ذیل طریقہ سے قوت نما تفاعل(Exponential Function)کے ارکان میں بیان کرو۔

$$x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

Step III حل حاصل کرو۔

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

$$\Rightarrow \quad e^y - 2x - e^{-y} = 0$$

$$\Rightarrow \quad e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0$$

جو کہ e^y میں ایک کثیر رکنی ہے،اس لیے

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2}$$

$$= x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

چونکہ $e^y > 0$ لیکن $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$ یا $x < \sqrt{x^2 + 1}$

اس لیے

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \qquad y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

نتیجہ /اختتام(Conclusion/Result)

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ ہم دی گئی معکوس زائدی تفاعل کو لوگرتھمک تفاعل کے ظریعہ دکھا سکتے ہیں جو کہ اس طرح ہو گا

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

☆☆☆☆☆

1.2 ذیل میں دیے ہوئے تفاعلات کے مشتقات معلوم کرو۔

(i) $y = \sinh(1 - x^2)$

(ii) $f(x) = \ln(\sinh x)$

(iii) $y = \ln\left(\tanh\frac{x}{2}\right)$

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

1.3 $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+4x^2}}$ تکمل حاصل کریں۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

1.4 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2}$ تکمل حاصل کریں۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/ اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

1.5 اگر $\log\left(\frac{x}{n}\right)^n = \cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right)$ تب دکھاؤ کہ $x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + 2n^2y_n = 0$

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

اکائی 2۔ لیبنیز قضیہ، کا نکیوٹی، انفلیکشن نقاط اور ایسمپٹوٹس کے مسائل

2.1 $\frac{d^n}{dx^n}(x^2e^xCosx)$ حاصل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

2.2 x کی قیمتوں کی وہ رینج حاصل کرو جس کے لیے مخنی $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 5x + 7$ اوپر کی طرف کا نکیو(Concave)ہو یا نیچے کی طرف۔اور پھر انفلیکشن(Inflexion)کے نقاط بھی حاصل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

2.3 منحنی $y = (\log x)^3$ پر انفلیکشن (Inflexion) کے نقاط حاصل کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل/تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

2.4 ثابت کرو کہ $y = e^x$ ہر جگہ اوپر کی طرف کا نکیو(Concave)ہے اور $y = \log x$ ہر جگہ نیچے کی طرف کا نکیو(Concave)ہے۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

اکائی 3۔ منحنی کی ٹریسنگ، غیر متعینہ صورت، L–ہاسپٹل قانون کے مسائل

3.1 $y^2(a^2 + x^2) = x^2(a^2 - x^2)$ کو ٹریس (Trace) کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

3.2 $y^2(x-a) = x^2(x+a)$ کوٹریس (Trace) کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ /اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

3.3 $r = a(1 + cos\theta)$ کوٹریس (Trace) کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل/تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

نمونہ تجرباتی سوال

3.4 $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^2 \sin x^2}$ حاصل کیجیے۔

مقصد (Aim)

دی گئی منحنی $\frac{1-\cos x^2}{x^2 \sin x^2}$ کی لمٹ حاصل کرنا ہے جبکہ $x \to 0$ ہو۔

طرز عمل (Procedure)

Step-I: معلوم کیجیے کہ $\frac{f(x)}{g(x)}$ کی لمٹ ایک $\frac{0}{0}$ قسم کی غیر متعینہ صورت ہے۔

Step-II: f اور g کا الگ الگ تفرق کیجیے۔

Step-III: $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ کی لمٹ معلوم کیجیے، اگر یہ لمٹ متناہی، $+\infty$ یا $-\infty$ ہے تب یہ $\frac{f(x)}{g(x)}$ کی لمٹ کے برابر ہو گی۔

حل/تجویز (Solution/Calculation)

ہم کو دیا گیا ہے

$$\frac{1-\cos x^2}{x^2 \sin x^2} = \frac{1-\cos x^2}{x^2 \cdot x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin x^2}$$

لیکن ہم جانتے ہیں کہ

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin x^2} = 1$$

اس لیے

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^2 \sin x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^4} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^4} \cdot 1$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^4}$$

لیکن ہم دیکھتے ہیں کہ $\lim_{x\to 0}(1-\cos x^2) = 0$ اور $\lim_{x\to 0}(x^4) = 0$ اس لیے یہ لمٹ صورت $\frac{0}{0}$ میں ہے تو ہم L' HopitalRule استعمال کرتے ہیں

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin x^2}{4x^3}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2} \times 1$$
$$= \frac{1}{2}$$

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

ہم کہہ سکتے ہیں کہ دیے گیے سوال کا جواب $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^2 \sin x^2} = \frac{1}{2}$ ہے۔

☆☆☆☆☆

3.5 دکھاؤ کہ $\lim_{x\to 0}\frac{5\sin x-7\sin 2x+3\sin 3x}{\tan x-x}=-15$

مقصد(Aim)

طرزِ عمل(Procedure)

حل/تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

3.6 اگر $\lim_{x\to 0} \frac{ae^x - b\cos x + ce^{-x}}{x\sin x} = 2$، تب a, b, c کی قیمت حاصل کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل/تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

اکائی 4۔ تکمل - تحویلی ضابطے کے مسائل

4.1 سکسیسورڈکشن (Successive Reduction) کے طریقے کی مدد سے $\int x^n e^x dx$ حاصل کر۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

4.2 $\int x^4 e^x dx$ حاصل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

4.3 سکسیسور ڈکشن(Successive Reduction)کے طریقے کی مدد سے $\int Sin^n x dx$ حاصل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

4.4 $\int Sin^4xdx$ حاصل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ /اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

4.5 سکسیسور ڈکشن(Successive Reduction) کے طریقے کی مدد سے $\int Sec^n xdx$ حاصل کر۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

(Conclusion/Result)نتیجہ/اختتام

☆☆☆☆☆

4.6 $\int Sec^3xdx$ حاصل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

4.7 سکسیسورڈکشن(Successive Reduction)کے طریقے کی مدد سے $\int x^m (\log x)^n dx$ حاصل کرو۔

مقصد(Aim)

طرزعمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

4.8 سکسیسو رڈکشن(Successive Reduction)کے طریقے کی مدد سے $\int x^4(logx)^3dx$ حاصل کرو۔

مقصد(Aim)

طرزِ عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

4.9 سکسیسور ڈکشن(Successive Reduction)کے طریقے کی مدد سے $\int x^n e^{ax} dx$ حاصل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ /اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

4.10 سکسیسورڈکشن(Successive Reduction)کے طریقے کی مدد سے $\int x^3 e^{ax} dx$ حاصل کرو۔

مقصد(Aim)

طرزعمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ /اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

4.11 $\int tan^n x dx$ حاصل کرو اور پھر $\int tan^4 x dx$ حاصل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

4.12 اگر $I_n = \int (logx)^n dx$، دکھاؤ کہ $I_n = (logx)^n - nI_{n-1}$، اور پھر $\int (logx)^4 dx$ حاصل کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

4.13 ثابت کرو کہ منحنی $x^2 + y^2 = a^2$ کا کل رقبہ πa^2 ہوتا ہے۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

اکائی 5۔ سلائسنگ، ڈسک، واشر، استوانی خول کے ذریعے حجم کے مسائل

5.1 پیرابولا $y^2 = ax$ (Parabola) اور دائرہ $x^2 + y^2 = 2ax$ (Circle) کے درمیان اور محور x کے اوپر کے رقبہ کو محسوب کریں۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

5.2 اس خط کا رقبہ حاصل کرو جو $x = y^2$ اور $x = 4$ سے گھرا ہوا ہے۔

مقصد (Aim)

طرزِ عمل (Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

5.3 x محور کے تحت اِلپس $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (Ellipse) کو گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم (Volume) حاصل کرو۔

مقصد (Aim)

طرزِ عمل (Procedure)

حل/تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

5.4 اپنے بیس(base) کے تحت سائکلائڈ $x = a(\theta - sin\theta), y = a(1 - cos\theta)$ کو گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم(Volume) حاصل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

5.5 ابتدائی خط کے تحت کارڈائڈ (Cardioide) $r = a(1 + cos\theta)$ کو گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم حاصل کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل/تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

اکائی6۔ قوسی لمبائی اور گردشی سطح کے رقبے کے مسائل

6.1 دکھاؤ کہ منحنی $x = a(t - sint), y = a(1 - cost)$ کی قوسی لمبائی $8a$ ہے۔

مقصد (Aim)

طرزِ عمل (Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

6.2 کارڈائڈ(Cardioide)، $r = a(1 + cos\theta)$کااحاطہ(Perimeter)حاصل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

6.3 مخنی $y = \log \sec x$ کی قوسی لمبائی $x = 0$ سے $x = \frac{\pi}{3}$ تک حاصل کرو۔

مقصد(Aim)

طرزعمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

6.4 دکھاؤ کہ مخنی $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ کی قوسی لمبائی $6a$ ہے۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

6.5 ایسٹرآئڈ $x = a\cos^3\theta,\ y = asin^3\theta$ (Astroid) کی قوس کی کل لمبائی حاصل کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل/تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

نمونہ امتحانی پرچہ

ریاضیات(لیب مینول)

Calculus (BNMM101DCP)

بی۔ایس سی-(پہلا سمسٹر)

وقت:2 Hrs　　　　　　　　　　　　　　　　کل نمبر:20

نوٹ: درج ذیل میں سے کوئی چار سوالات کے جواب دیجیے۔　　　　$(4 \times 5 = 20)$

1۔ $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2}$ تکمل حاصل کریں۔

2۔ x کی قیمتوں کی وہ رینج حاصل کروجس کے لیے مخنی $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 5x + 7$ اوپر کی طرف کانکیو(Concave)ہو یا نیچے کی طرف۔اور پھر انفلیکشن(Inflexion)کے نقاط بھی حاصل کرو۔

3۔ $r = a(1 + cos\theta)$ کو ٹریس(Trace)کرو۔

4۔ سکسیسورڈکشن(Successive Reduction)کے طریقے کی مدد سے $\int Sin^n x dx$ حاصل کرو۔

5۔ پیرابولا $y^2 = ax$(Parabola)اور دائرہ $x^2 + y^2 = 2ax$(Circle)کے درمیان اور محور x کے اوپر، کے رقبہ کو محسوب کریں۔

6۔ x محور کے تحت الپس $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$(Ellipse)کو گھمانے سے بنے ٹھوس کا حجم(Volume)حاصل کرو۔

تصدیق نامہ

تصدیق کی جاتی ہے کہ بی۔ایس سی۔(آنرس)(پہلا سمسٹر)علم احصا کے تجرباتی حصہ کے کام کا یہ اصلی ریکارڈ ہے

جسے____نے مولانا آزاد

نیشنل اردو یونیورسٹی کے اسٹڈی سینٹر________________________________میں تعلیمی

سال____________کے دوران تیار کیا۔

دستخط کونسلر

Notes/اہم نکات