BSMM401CCT

حقیقی تجزیہ

(Real Analysis)

مع

لیب مینول

(Lab Manual)

فاصلاتی اور روایتی نصاب پر مبنی خود اکتسابی مواد

برائے

بیچلر آف سائنس (بی۔ایس سی۔)

(چوتھا سمسٹر)

نظامت فاصلاتی تعلیم

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

حیدر آباد-32، تلنگانہ-انڈیا

© Maulana Azad National Urdu University, Hyderabad

Course-Real Analysis

ISBN: 978-93-95203-82-1

First Edition: **June, 2023**

Publisher	:	Registrar, Maulana Azad National Urdu University
Edition	:	2023
Copies	:	1000
Price	:	385/-(The price of the book is included in admission fee of distance mode students)
Copy Editing	:	Dr. Kashif Khan, DDE, MANUU, Hyderabad
Cover Designing	:	Dr. Mohd Akmal Khan, DDE, MANUU, Hyderabad
Printing	:	Print Times & Business Enterprises, Hyderabad

Real Analysis

for

Bachelor of Science (B.Sc.)

4th Semester

On behalf of the Registrar, Published by:

Directorate of Distance Education

Maulana Azad National Urdu University

Gachibowli, Hyderabad-500032 (TS), India

*Director:*dir.dde@manuu.edu.in *Publication :*ddepublication@manuu.edu.in

Phone number: 040-23008314 Website: manuu.edu.in

© All rights reserved. No part of this publication may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronically or mechanically, including photocopying, recording or any information storage or retrieval system, without prior permission in writing from the publisher (registrar@manuu.edu.in)

Editor

Dr. Khaja Moinuddin

Associate Professor,

Department of Mathematics, MANUU, Hyderabad

Language Editor

Dr. Mohd Akmal Khan

Urdu

DDE, MANUU, Hyderabad

Editorial Board

Dr. Mohammad Ameenuddin

Associate Professor of Mathematics

Govt. Degree College, Golkonda, Hyderabad

Dr. Khaja Moinuddin

Associate Professor (Mathematics)

School of Sciences, MANUU

Dr. Kashif Khan

Mathematics

Directorate of Distance Education, MANUU, Hyderabad

ایڈیٹر

ڈاکٹر خواجہ معین الدین

اسوسی ایٹ پروفیسر، شعبہ ریاضی

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد

لینگویج ایڈیٹر

ڈاکٹر محمد اکمل خان

اردو

نظامت فاصلاتی تعلیم، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد

مجلس ادارت

ڈاکٹر محمد امین الدین

اسوسی ایٹ پروفیسر (ریاضی)

گورنمنٹ ڈگری کالج گولکونڈا، حیدرآباد

ڈاکٹر خواجہ معین الدین

اسوسی ایٹ پروفیسر (ریاضی)

اسکول برائے سائنسی علوم، مانو، حیدرآباد

ڈاکٹر کاشف خان

ریاضی

نظامت فاصلاتی تعلیم، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

حیدرآباد

کورس کوآرڈی نیٹر

ڈاکٹر خواجہ معین الدین
اسوسی ایٹ پروفیسر، شعبہ ریاضی
اسکول برائے سائنسی علوم، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدر آباد

مصنفین	اکائی نمبر
• پروفیسر وی سری نواس، پروفیسر، شعبہ ریاضی، ڈاکٹر بی آر امبیڈکر اوپن یونیورسٹی، حیدر آباد	اکائی 1 تا اکائی 5
• ڈاکٹر کے۔ وجیا لکشمی، صدر شعبہ ریاضی، لویولا اکیڈمی، الوال، سکندر آباد	اکائی 6 تا اکائی 11
• ڈاکٹر این سی سوبھارانی، سابق کاونسر، اسسٹنٹ پروفیسر، شعبہ ریاضی، KIT(S)، ڈاکٹر بی آر امبیڈکر اوپن یونیورسٹی، حیدر آباد	اکائی 12 تا اکائی 16

لیب مینول

• ڈاکٹر خواجہ معین الدین، اسوسی ایٹ پروفیسر، شعبہ ریاضی، مانو، حیدر آباد	اکائی 17 تا اکائی 24

مترجمین (Translators)

• ڈاکٹر کاشف خان (ریاضی)، نظامت فاصلاتی تعلیم، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدر آباد	اکائی 1 تا اکائی 6
• ڈاکٹر محمد امین الدین، گورنمنٹ ڈگری کالج گولکونڈا، حیدر آباد	اکائی 7 تا اکائی 11
• ڈاکٹر سید عبد الحئ، ایم اے ایم گورنمنٹ کالج نام پلی، حیدر آباد	اکائی 12 تا اکائی 16

پروف ریڈرس:

اول	:	ڈاکٹر کاشف خان
دوم	:	ڈاکٹر محمد امین الدین
فائنل	:	ڈاکٹر خواجہ معین الدین

فہرست

پیغام

مولانا آزاد نیشنل اُردو یونیورسٹی 1998 میں وطنِ عزیز کی پارلیمنٹ کے ایکٹ کے تحت قائم کی گئی۔اس کے چار نکاتی مینڈیٹس یہ ہیں۔ (1)اردو زبان کی ترویج و ترقی (2)اردو میڈیم میں پیشہ ورانہ اور تکنیکی تعلیم کی فراہمی (3)روایتی اور فاصلاتی تدریس سے تعلیم کی فراہمی اور(4) تعلیم نسواں پر خصوصی توجہ۔ یہ وہ بنیادی نکات ہیں جو اِس مرکزی یونیورسٹی کو دیگر مرکزی جامعات سے منفرد اور ممتاز بناتے ہیں۔ قومی تعلیمی پالیسی 2020 میں بھی مادری اور علاقائی زبانوں میں تعلیم کی فراہمی پر کافی زور دیا گیا ہے۔

اُردو کے ذریعے علوم کو فروغ دینے کا واحد مقصد و منشا اُردو داں طبقے تک عصری علوم کو پہنچانا ہے۔ ایک طویل عرصے سے اُردو کا دامن علمی مواد سے لگ بھگ خالی رہا ہے۔ کسی بھی کتب خانے یا کتب فروش کی الماریوں کا سرسری جائزہ اس بات کی تصدیق کر دیتا ہے کہ اُردو زبان سمٹ کر چند ''ادبی'' اصناف تک محدود رہ گئی ہے۔ یہی کیفیت اکثر رسائل و اخبارات میں دیکھنے کو ملتی ہے۔ اُردو قاری اور اُردو سماج دورِ حاضر کے اہم ترین علمی موضوعات سے نابلد ہیں۔ چاہے یہ خود ان کی صحت و بقا سے متعلق ہوں یا معاشی اور تجارتی نظام سے، یا مشینی آلات ہوں یا ان کے گرد و پیش ماحول کے مسائل ہوں، عوامی سطح پر اِن شعبہ جات سے متعلق اردو میں مواد کی عدم دستیابی نے عصری علوم کے تئیں ایک عدم دلچسپی کی فضا پیدا کر دی ہے۔ یہی وہ چیلنجز ہیں جن سے اُردو یونیورسٹی کو نبرد آزما ہونا ہے۔ نصابی مواد کی صورت حال بھی کچھ مختلف نہیں ہے۔ اِسکولی سطح پر اُردو کتب کی عدم دستیابی کے چرچے ہر تعلیمی سال کے شروع میں زیرِ بحث آتے ہیں۔ چوں کہ اُردو یونیورسٹی کا ذریعہ تعلیم اُردو ہے اور اس میں عصری علوم کے تقریباً سبھی اہم شعبہ جات کے کورسز موجود ہیں لہٰذا اِن تمام علوم کے لیے نصابی کتابوں کی تیاری اس یونیورسٹی کی اہم ترین ذمہ داری ہے۔

مجھے اِس بات کی بے حد خوشی ہے کہ یونیورسٹی کے ذمہ داران بشمول اساتذہ کرام کی انتھک محنت اور ماہرین علم کے بھرپور تعاون کی بنا پر کتب کی اشاعت کا سلسلہ بڑے پیمانے پر شروع ہو چکا ہے۔ ایک ایسے وقت میں جب کہ ہماری یونیورسٹی اپنی تاسیس کی 25ویں سالگرہ منا رہی ہے، مجھے اس بات کا انکشاف کرتے ہوئے بہت خوشی محسوس ہو رہی ہے کہ یونیورسٹی کا نظامتِ فاصلاتی تعلیم از سرنو اپنی کارکردگی کے نئے سنگِ میل کی طرف رواں دواں ہے اور نظامتِ فاصلاتی تعلیم کی جانب سے کتابوں کی اشاعت اور ترویج میں بھی تیزی پیدا ہوئی ہے۔ نیز ملک کے کونے کونے میں موجود تشنگانِ علم فاصلاتی تعلیم کے مختلف پروگراموں سے فیضیاب ہو رہے ہیں۔ گرچہ گزشتہ برسوں کے دوران کووڈ کی تباہ کن صورتِ حال کے باعث انتظامی امور اور ترسیل و ابلاغ کے مراحل بھی کافی دشوار کن رہے تاہم یونیورسٹی نے اپنی حتی المقدور کوششوں کو بروئے کار لاتے ہوئے نظامتِ فاصلاتی تعلیم کے پروگراموں کو کامیابی کے ساتھ روبہ عمل کیا ہے۔ میں یونیورسٹی سے وابستہ تمام طلبا کو یونیورسٹی سے جڑنے کے لیے صمیم قلب کے ساتھ مبارک باد پیش کرتے ہوئے اس یقین کا اظہار کرتا ہوں کہ ان کی علمی تشنگی کو پورا کرنے کے لیے مولانا آزاد اردو یونیورسٹی کا تعلیمی مشن ہر لمحہ ان کے لیے راستے ہموار کرے گا۔

پروفیسر سید عین الحسن

وائس چانسلر

پیغام

فاصلاتی طریقۂ تعلیم پوری دنیا میں ایک انتہائی کارگر اور مفید طریقۂ تعلیم کی حیثیت سے تسلیم کیا جاچکا ہے اور اس طریقۂ تعلیم سے بڑی تعداد میں لوگ مستفید ہو رہے ہیں۔ مولانا آزاد نیشنل اُردو یونیورسٹی نے بھی اپنے قیام کے ابتدائی دنوں ہی سے اردو آبادی کی تعلیمی صورت حال کو محسوس کرتے ہوئے اِس طرزِ تعلیم کو اختیار کیا۔ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کا آغاز 1998 میں نظامتِ فاصلاتی تعلیم اور ٹرانسلیشن ڈویژن سے ہوا اور اس کے بعد 2004 میں باقاعدہ روایتی طرز تعلیم کا آغاز ہوا اور بعد ازاں متعدد روایتی تدریس کے شعبہ جات قائم کیے گئے۔ نو قائم کردہ شعبہ جات اور ٹرانسلیشن ڈویژن میں تقرریاں عمل میں آئیں۔ اس وقت کے اربابِ مجاز کے بھرپور تعاون سے مناسب تعداد میں خود مطالعاتی مواد تحریر و ترجمے کے ذریعے تیار کرائے گئے۔

گزشتہ کئی برسوں سے یو جی سی۔ ڈی ای بی UGC-DEB اس بات پر زور دیتا رہا ہے کہ فاصلاتی نظامِ تعلیم کے نصابات اور نظامات کو روایتی نظامِ تعلیم کے نصابات اور نظامات سے کما حقہ ہم آہنگ کر کے نظامتِ فاصلاتی تعلیم کے طلبا کے معیار کو بلند کیا جائے۔ چوں کہ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی فاصلاتی اور روایتی طرزِ تعلیم کی جامعہ ہے، لہٰذا اس مقصد کے حصول کے لیے یو جی سی۔ ڈی ای بی کے رہنمایانہ اصولوں کے مطابق نظامتِ فاصلاتی تعلیم اور روایتی نظامِ تعلیم کے نصابات کو ہم آہنگ اور معیار بلند کر کے خود اکتسابی مواد SLM از سرِ نو بالترتیب یو جی اور پی جی طلبا کے لیے چھ بلاک چوبیس اکائیوں اور چار بلاک سولہ اکائیوں پر مشتمل نئے طرز کی ساخت پر تیار کرائے جا رہے ہیں۔

نظامتِ فاصلاتی تعلیم یو جی، پی جی، بی ایڈ، ڈپلوما اور سرٹیفکیٹ کورسز پر مشتمل جملہ پندرہ کورسز چلا رہا ہے۔ بہت جلد تکنیکی ہنر پر مبنی کورسز بھی شروع کیے جائیں گے۔ متعلمین کی سہولت کے لیے 9 علاقائی مراکز بنگلورو، بھوپال، دربھنگہ، دہلی، کولکاتا، ممبئی، پٹنہ، رانچی اور سری نگر اور 6 ذیلی علاقائی مراکز حیدرآباد، لکھنؤ، جموں، نوح، وارانسی اور امراوتی کا ایک بہت بڑا نیٹ ورک تیار کیا ہے۔ ان مراکز کے تحت سرِدست 144 متعلم امدادی مراکز (Learner Support Centres) نیز 20 پروگرام سنٹرس (Programme Centres) کام کر رہے ہیں، جو طلبا کو تعلیمی اور انتظامی مدد فراہم کرتے ہیں۔ نظامت فاصلاتی تعلیم نے اپنی تعلیمی اور انتظامی سرگرمیوں میں آئی سی ٹی کا استعمال شروع کر دیا ہے، نیز اپنے تمام پروگراموں میں داخلے صرف آن لائن طریقے ہی سے دے رہا ہے۔

نظامتِ فاصلاتی تعلیم کی ویب سائٹ پر متعلمین کو خود اکتسابی مواد کی سافٹ کاپیاں بھی فراہم کی جارہی ہیں، نیز جلد ہی آڈیو۔ ویڈیو ریکارڈنگ کا لنک بھی ویب سائٹ پر فراہم کیا جائے گا۔ اس کے علاوہ متعلمین کے درمیان رابطے کے لیے ایس ایم ایس کی سہولت فراہم کی جارہی ہے، جس کے ذریعے متعلمین کو پروگرام کے مختلف پہلوؤں جیسے کورس کے رجسٹریشن، مفوضات، کونسلنگ، امتحانات وغیرہ کے بارے میں مطلع کیا جاتا ہے۔

امید ہے کہ ملک کی تعلیمی اور معاشی حیثیت سے پچھڑی اردو آبادی کو مرکزی دھارے میں لانے میں نظامتِ فاصلاتی تعلیم کا بھی نمایاں رول ہوگا۔

پروفیسر محمد رضاء اللہ خان

ڈائرکٹر، نظامت فاصلاتی تعلیم

کورس کا تعارف

زیر نظر کتاب حقیقی تجزیہ (Real Analysis) کے موضوعات سے متعلق ہے اور یہ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کے بی ایس سی کورس کے چوتھے سمسٹر کے نصاب پر مشتمل ہے۔ حقیقی تجزیہ ریاضی کا ایک ایسا حصہ ہے جسے اعداد اور تفاعلات کے مطالعہ کو باقاعدہ بنانے اور انتہاء اور تسلسل جیسے اہم تصورات کی چھان بین کے لیے تیار کیا گیا ہے۔ یہ تصورات علم احصاء (Calculus) اور اس کے استعمال سے کئی اطلاقات کو بیان کرتے ہیں۔ اس کتاب کی نمایاں خصوصیت یہ ہے کہ اس میں مواد کو وہل طریقے سے آسان زبان میں مثالوں کے ذریعہ سمجھایا گیا ہے، تاکہ طلباء اپنے مضمون کو از خود سمجھ سکیں۔

کتاب کو دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ جس میں پہلا حصہ نظریات (تھیوری) پر مبنی ہے اور دوسرا حصہ پریکٹکل (تجربوں) پر منحصر ہے۔ پہلا حصہ سولہ (16) اکائیوں پر مشتمل ہے۔ اکائی 1 اور 2 میں حقیقی عددی نظام، شمار پذیر اور بستہ سٹس کے بارے میں جانکاری دی گئی ہے۔ اکائی 3 میں حقیقی اعداد کا سٹ R کے تکمیل (Complete) ہونے سے متعلق معلومات درج ہے۔ اکائی 4 بول زانو وائراسٹر اس کا نظریہ اور اس کے مسائل پر ہے۔ پانچویں اکائی میں تواتر اور اس کے استدقاق پر کئی مثالیں اور نظریات دیے گئے ہیں۔ اکائی 8-6 لا متناہی سلسلے ان کے نظریات اور بہت سے مسائل پر مشتمل ہے۔ اکائی 11-9 میں تفاعل کی انتہا تسلسل اور یکساں تسلسل پر کئی نظریات اور مسائل دیے گئے ہیں۔ اکائی 12 میں تفاعل کے تفرق کی کئی مسائل اور اوسط قیمت نظریات سے متعلق بہت سے مسائل دیے گئے ہیں۔ اکائی 16-13 میں ریمان تکمل اور ان سے متعلق نظریات اور مسائل دیے گئے ہیں۔ آخر میں ریمان تکمل کا اساسی نظریہ اور اس کے مسائل درج ہیں۔

طلبا سے توقع کی جاتی ہے کہ وہ عملی کلاسوں میں شرکت کریں اور کونسلر کی رہنمائی میں تجرباتی مینول میں دیے گئے مسائل کو حل کرنے کی مہارت حاصل کریں۔

طلبا کی مسئلہ ل صلاحیت کو بہتر بنانے کے لیے اس مینول میں اکائی 17 سے اکائی 24 تک تجرباتی حصہ دیا گیا ہے۔ طلبا کی طرف سے کیے گئے کام کا ریکارڈ وہ عملی امتحان کے وقت جمع کریں۔

اس کتاب کی تدوین میں مصنفین، مترجمین، تدریسی و غیرہ تدریسی وانتظامی عملے کے تعاون کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ کتاب کو معیاری اور قابل عمل و فہم بنانے کی ممکن کوشش کی گئی ہے، تاہم کوئی بھی کوشش اپنے آپ میں مکمل نہیں ہوتی۔ اس ضمن میں اساتذہ اکرام، ماہرین طلبا کی آرا و مشوروں کا خیر مقدم کیا جائے گا۔

ڈاکٹر خواجہ معین الدین

کورس کوآرڈی نیٹر

حقیقی تجزیہ

(Real Analysis)

اکائی 1۔ حقیقی عددی کا نظام اور شمار پذیری

(Real Number System and Countability)

اکائی کے اجزا

1.0 تمہید(Introduction)

18ویں صدی کے آخر تک اور 19ویں صدی کے آغاز میں ریاضی داں میکانکس، فلکیات اور ٹیکنالوجی میں تفرقی اور انٹگرل علم احصا کے اطلاقات تیار کرنے میں مصروف تھے۔تاہم، نقطہ نظر شامل تصورات کی بنیادی تفہیم سے یکساں نہیں تھا۔کسی تفاعل کی سخت تعریف یا مسلسل تفاعلات کی خصوصیات یا مسلسل اور تفرق پذیر تفاعلات کے درمیان تعلق کی پوری طرح سے تحقیق نہیں کی گئی تھی۔ یہاں تجرید سے زیادہ زور وجدان پر تھا۔ یہ محسوس کیا گیا کہ حقیقی اعداد نے علم احصا(Calculus) میں ان بنیادی تصورات کی تحقیقات میں اہم کردار ادا کیا۔ لیکن حقیقی عدد کیا ہوتا ہے؟ اگرچہ بدیہی طور پر یہ تصور قابل قبول معلوم ہوتا ہے۔ان کی قبولیت عالمگیر نہیں تھی چوں کہ کچھ اعداد $\sqrt{2}$ جیسے موجود ہیں۔یونانیوں کے زمانے سے جانا جاتا ہے کہ کسی اکائی مربع کے وتر کی لمبائی کو دو صحیح اعداد کے تناسب کے طور پر ظاہر نہیں کیا جا سکتا۔ لیکن ان کی رسمی شکل میں کئی رکاوٹیں تھیں۔آج بھی کسی طالب علم کو پہلی بار حقیقی نمبر کا تعارف مشکل لگتا ہے اور اس میں اکثر سادگی اور سیدھی بات نہیں ہوتی۔اس لیے طالب علم کو اس اکائی کو پڑھنے میں زیادہ صبر اور استقامت کا مظاہرہ کرنا چاہیے۔

اس اکائی میں ہم یہ قائم کریں گے کہ $\sqrt{2}$ایک ناطق عدد نہیں ہے۔اس کا مطلب یہ ہے کہ ناطق اعداد اکیلے ہی ان مقداروں کی پیمائش کے لیے کافی نہیں ہیں جنہیں کسی لائن پر فاصلے کے طور پر دکھایا جا سکتا ہے۔ جرمن ریاضی داں ڈیڈیکائنڈ(Dedekind) (1831-1916) نے ناطق عدد کے نظام میں ایک حقیقی عدد کو 'کٹ' قرار دیا۔ یہ ڈیڈیکائنڈ کٹ حقیقی اعداد کے وجود کو قائم کرنے کا واحد طریقہ نہیں ہے۔ کینٹر(Cantor) (1845-1918) نے نیسٹڈ وقفوں(Nested Intervals) کا طریقہ استعمال کیا۔ وائرسٹراس(Weiertrass) (1815-1897)اور کوشی(Cauchy) (1789-1857) نے ایک حقیقی عدد کے وجود کو قائم کرنے اور اس کی خصوصیات کا مطالعہ کرنے کے لیے ترتیب(Sequence) کا طریقہ استعمال کیا۔اکائی 2 میں ہم کملیت (Completeness) کے موضوعات کے درمیان رشتہ قائم کرتے ہیں۔ اوپر کی طرف محدود حقیقی اعداد کا ایک غیر خالی سٹ کم از کم ایک بالائی محدود(Upper Bound)اور ڈیولکائنڈ کٹ رکھتا ہے۔ کچھ مصنفین اس کو مسلسل خصوصیت(Continuum Property) بھی کہتے ہیں۔

1.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ :

- کسی مرتب میدان(Ordered Field) کی تعریف کر سکیں اور اس کی کچھ خصوصیات حقیقی اعداد کے موضوعات کا استعمال کر کے یاد کر سکیں۔
- شمار پذیر سٹس(Countable Sets) کی تعریف کر سکیں۔
- ثابت کر سکیں کہ $\mathbb{R}$ غیر شمار پذیر(Uncountable)ہوتا ہے۔

1.2 $\mathbb{R}$ کی الجبرائک اور رتبی خصوصیات (Algebraic and Order Properties of $\mathbb{R}$)

حقیقی اعداد کے سٹ $\mathbb{R}$ میں دو ثنائی عامل '$+$' اور '$.$' ہوتے ہیں جنہیں جمع اور ضرب کہا جاتا ہے درجہ ذیل خصوصیات کو مطمئن کرتے ہیں:

جمعی خصوصیات

A_1: **(تقلیبی خاصیت)** $a+b=b+a,\ \forall a,b\in\mathbb{R}$

A_2: **(تلازمی خاصیت)** $a+(b+c)=(a+b)+c,\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}$

A_3: **(اکائی کا وجود)** $\mathbb{R}$ میں ایک عنصر 0 اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $a+0=0+a=a,\ \forall a\in\mathbb{R}$

A_4: **(معکوس کا وجود)** $\mathbb{R}$ کے ہر ایک عنصر a کے لیے $\mathbb{R}$ میں ایک عنصر $-a$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$a+(-a)=(-a)+a=0$$

ضربی خصوصیات

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

M_1: **(تقلیبی خاصیت)** $a.b=b.a,\ \forall a,b\in\mathbb{R}$

M_2: **(تلازمی خاصیت)** $a.(b.c)=(a.b).c,\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}$

M_3: **(اکائی کا وجود)** $\mathbb{R}$ میں ایک عنصر 1 اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $a.1=1.a=a,\ \forall a\in\mathbb{R}$

M_4: **(معکوس کا وجود)** $\mathbb{R}$ کے ہر ایک عنصر $a\neq 0$ کے لیے $\mathbb{R}$ میں ایک عنصر a^{-1} اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $a.a^{-1}=1$

M_5: **(جمع پر تقسیم پذیری)** $a.(b+c)=a.b+a.c,\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}$

یاد رہے کہ ان شرائط سے کچھ نتائج حاصل ہوتے ہیں۔ یہ درج ذیل ہیں۔ طالب علم اوپر بیان کردہ موضوعات کا استعمال کر کے ہر ایک نتائج کی تصدیق کریں گے۔ فرض کریں کہ $a,b,c\in\mathbb{R}$

i) $a+b=a+c\Rightarrow b=c$

ii) $a+a=a\Rightarrow a=0$

iii) $a+b=0\Rightarrow b=-a$

iv) $-(a-b)=b-a$

ساتھ ہی ہم جانتے ہیں کہ $a.b=1\Rightarrow a=b^{-1},\ (b\neq 0)$

$$a\neq 0\Rightarrow a^{-1}\neq 0\ \&(a^{-1})^{-1}=a$$

$$ab=a\Rightarrow b=1$$

$$(-1).a=-a$$

$$(-a).b=a.(-b)=-ab$$

$$(-a).(-b)=ab$$

ہر ایک $a, b \in \mathbb{R}$ کے لیے مساوات $a + x = b$ کا x میں ایک یکتا حل (Unique Solution) وجود رکھتا ہے۔

ہر ایک $a, b \in \mathbb{R}$ کے لیے مساوات $ax = b, b \neq 0$ کا x میں ایک یکتا حل وجود رکھتا ہے۔ ساتھ ہی

$$ab \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \& b \neq 0$$

دیے گئے کسی دو حقیقی اعداد a اور b کے لیے ہم جانتے ہیں کہ $a \leq b$ یا $b \leq a$ ہوتا ہے۔ اس خاصیت $\leq$ کو $\mathbb{R}$ پر رتبی رشتہ (Order Relation) کہتے ہیں۔

میدان کے موضوعات کے ساتھ ساتھ حقیقی اعداد میں ایک رتبی رشتہ ہوتا ہے۔

ہمیں حاصل ہے $a \leq b \Leftrightarrow b - a \geq a$

رتبی رشتہ کا موضوعہ مثبیت کی تجریدی خاصیت کے ساتھ جڑا ہے۔ ہمارا مقصد مثبیت کی تعریف کرنا نہیں ہے لیکن ہم اس کو غیر متعینہ اصطلاح کے طور پر مانتے ہیں۔

تعریف (Definition): $\mathbb{R}$ کے غیر خالی تحت سٹ P کو تاکیدی مثبت حقیقی اعداد کہتے ہیں جو درجہ ذیل شرائط کو مطمئن کرتا ہو:

i) اگر $a, b \in \mathrm{P}$، تب $a + b \in \mathrm{P}$

ii) اگر $a, b \in \mathrm{P}$، تب $a . b \in \mathrm{P}$

iii) اگر $a \in \mathbb{R}$، تب مندرجہ ذیل میں سے بالکل ایک صحیح ہے $a \in \mathrm{P}$، $a = 0, -a \in \mathrm{P}$

آخری خصوصیت (iii) کو ٹریکوٹامی کا قائدہ کہتے ہیں۔ اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ سٹ $N = \{-a : a \in \mathrm{P}\}$ کو تاکیدی منفی حقیقی اعداد کہتے ہیں اور $N \cap P = \phi$ ساتھ ہی $\mathbb{R} = N \cup \{0\} \cup P$

علامتی اظہار (Notations)

اگر $a \in \mathrm{P}$ تب ہم اسے $a > 0$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ اگر $a \in P \cup \{0\}$، تب ہم اسے $a \geq 0$ کے ذریعے سے دکھاتے ہیں۔ اگر $-a \in \mathrm{P}$ تب ہم اسے $a < 0$ لکھتے ہیں اور اگر $-a \in P \cup \{0\}$، تب ہم اسے ظاہر کرنے کے لیے $a \leq 0$ کا استعمال کرتے ہیں۔ اگر $a, b \in \mathbb{R}$ اور اگر $a - b \in P$، تب ہم اسے $a > b$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ اگر $-(a - b) \in P$، تب ہم اسے $a < b$ لکھتے ہیں۔ اگر $a - b \in P \cup \{0\}$، تب ہم اسے $a \geq b$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ اگر $-(a - b) \in P \cup \{0\}$، تب ہم اسے $a \leq b$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

ہم حقیقی اعداد کے لیے درجہ ذیل خصوصیات حاصل کر سکتے ہیں:

بیان: فرض کریں کہ $a, b, c \in \mathbb{R}$ تب

i) $a > b \& b > c \Rightarrow a > c$

ii) ان میں سے کوئی ایک ہی درست ہوتا ہے: $a > b,\ a = b, a < b$

iii) اگر $a \geq b$ اور $b \geq a$ تب $a = b$

اس کے ساتھ ہی حقیقی اعداد کے لیے درجہ ذیل خصوصیات کو دیکھا جاسکتا ہے:

i) اگر $a \neq 0$ اور $a \in \mathbb{R}$ تب $a^2 > 0$

ii) اگر $x > 0, y > 0$ تب $x < y$ اگر اور صرف اگر $x^2 < y^2$

تعریف: فرض کریں کہ $a \in \mathbb{R}$ تب a کی **مطلق قدر** (Absolute Value) اس طرح سے تعریف کی جاتی ہے:

$$|a| = a, \qquad if\ a \geq 0,$$
$$|a| = -a, \qquad if\ a < 0$$

جہاں a کی **مطلق قدر** (Absolute Value) کو $|a|$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

اس تعریف کی بنیاد پر درجہ ذیل نتائج کو ثابت کیا جاسکتا ہے:

نتائج (Results):

i) $|a| = 0\ iff\ a = 0$

ii) $|-a| = a, \forall a \in \mathbb{R}$

iii) $|ab| = |a||b|, \ \forall a, b \in \mathbb{R}$

iv) اگر $c \geq 0$ تب $|a| \leq c$ اگر اور صرف اگر $-c \leq a \leq c$

v) $-|a| \leq a \leq |a| \quad \forall a \in \mathbb{R}$

کسی مثلث کے ایک ضلع کی لمبائی باقی دو اضلاع کی لمبائیوں کی جمع سے کم ہوتی ہے۔ من درجہ ذیل قضیہ اسی بات کا اظہار کرتا ہے اور اس لیے اسے مثلثی لامساوی (Triangle Inequality) کہتے ہیں۔

قضیہ (مثلث لامساوی):

بیان: اگر $a, b \in \mathbb{R}$ تب $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$

ثبوت۔ چوں کہ $-|a| \leq a \leq |a|$ اور $-|b| \leq \pm b \leq |b|$

ہمیں حاصل ہے

$$-(|a| + |b|) = -|a| - |b| \leq a \pm b \leq |a| + |b|$$

اس طرح Type equation here.

$$|a \pm b| \leq |a| + |b|$$

اب $|a| = |(a-b) + b| \leq |a-b| + |b|$ اس کا مطلب یہ ہوا کہ $|a| - |b| \leq |a-b|$

اس طرح

$$|b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|$$

اس لیے

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

اسی طرح دوسری لامساویوں (Inequalities) کو حاصل کیا جاسکتا ہے۔

تعریف: سٹ $\{x: x \in \mathbb{R}, x = 0, x \in \mathbb{N}, -x \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}$ کو صحیح اعداد کا سٹ $\mathbb{Z}$ کہتے ہیں۔

تعریف: سٹ $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}: m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$ کو ناطق اعداد کا سٹ $\mathbb{Q}$ کہتے ہیں۔ $\mathbb{Q}^c = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ کو غیر ناطق اعداد کا سٹ کہتے ہیں۔

1.3 شمار پذیر سٹ (Countable Set)

شمار پذیر سٹ (Countable Set): فرض کرو کہ A اور B دو غیر خالی سٹس ہیں۔ اب اگر A سے B پر ایک دو ر بطی (Bijection) رشتہ وجود رکھتا ہو تب A اور B کو مشابہ سٹس (Similar Sets) کہتے ہیں یا مساوی طور پر ہم اسے اس طرح کہتے ہیں کہ سٹ A سٹ B کے مساوی ہے۔ سٹس کی مشابہتی (Similarity) سٹس کے سٹ پر ایک معادلی رشتہ (Equivalence Relation) ہوتا ہے۔

تعریف: کسی سٹ A کو متناہی کہا جاتا ہے اگر یہ کسی متعین $n \in \mathbb{N}$ کے لیے سٹ $\{1,2, \cdots, n\}$ کے مشابہ ہو۔ سٹ A کو شمار پذیر کہا جاتا ہے اگر (i) سٹ A خالی ہو یا (ii) سٹ A متناہی ہو یا (iii) سٹ A طبعی ا[عداد (Natural Numbers) کے سٹ $\mathbb{N}$ کے مشابہ ہو۔ مساوی طور پر ایک لا متناہی سٹ کو شمار پذیر کہا جاتا ہے اگر اس سٹ کا $\mathbb{N}$ پر ایک دو ربطی رشتہ وجود رکھتا ہو۔ ایک شمار پذیر سٹ کو بعض مصنفین قابل گنتی (Denumerable) یا (Enumerable) سٹ بھی کہتے ہیں۔

مثال 1۔ $\mathbb{N}$ کو شمار پذیر سٹ کہتے ہیں چوں کہ $id: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ جب کہ $id(n) = n$ ایک دو ربطی نقش ہے۔

مثال 2۔ فرض کرو کہ $2\mathbb{N}$ سبھی مثبت جفت اعداد کے سٹ کو ظاہر کرتا ہے۔ تب سٹس $\mathbb{N}$ اور $2\mathbb{N}$ (مشابہ) معادل (Equivalent) ہیں چوں کہ نقش $f: \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ جو متعرف بہ $f(n) = 2n$ ہے جو کہ یک بیک (One-One) بر (Onto) نقش (Mapping) ہے۔ اس لیے سبھی مثبت جفت اعداد کا سٹ شمار پذیر ہوتا ہے۔ ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ مثبت جفت صحیح اعداد کا سٹ مثبت صحیح اعداد کے سٹ کا واجبی تحت سٹ (Proper Subset) ہوتا ہے۔ لیکن اس میں اتنے ہی جفت صحیح اعداد ہوتے ہیں جتنے کہ صحیح اعداد ہوتے ہیں۔

مثال 3۔ اگر $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ کو $f(n) = 2n - 1$ سے متعرف کیا جائے تو سبھی مثبت طاق صحیح اعداد کا سٹ $\mathbb{N}$ کے مشابہ ہوتا ہے۔

آپ درجہ ذیل مسائل کو دیکھیں:

1. فرض کرو کہ $A = \{x \in \mathbb{R}: -1 < x < 1\}$ ہے اور $f: \mathbb{R} \to A$ کو $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ سے متعرف کیا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ $\mathbb{R}$ سٹ A کے مشابہ (معادل) ہے۔
2. طبعی اعداد کے سٹ $\mathbb{N}$ کا کوئی بھی تحت سٹ شمار پذیر ہوتا ہے۔

ثبوت۔ تحت سٹ کو مفرد (Primes) اور ان کے اضعاف (Multiples) کی غیر متصل (Non-Intersection) قطاروں میں بنائیں اور آگے آنے والے قضیے کی طرح تحت سٹ سے طبعی اعداد کے سٹ $\mathbb{N}$ پر ایک یک بیک نقش حاصل کرنے کے لیے وتری تکنیک کا استعمال کریں۔

تبصرہ: ایک غیر خالی سٹ A شمار پذیر ہوتا ہے اگر اور صرف اگر ایک سٹ B اس طرح وجود رکھتا ہو کہ $B \subseteq \mathbb{N}$ ہو اور A، سٹ B کے معادل ہو۔

بیان: شمار پذیر سٹس کا شمار پذیر اجماع (Countable Union) بھی شمار پذیر ہوتا ہے۔

قضیہ 1۔ تمام ناطق اعداد (Rational Numbers) کا سٹ شمار پذیر ہوتا ہے۔

ثبوت۔ یہ کافی ہوگا کہ اگر ہم ناطق اعداد کے سٹ اور طبعی اعداد کے سٹ کے بیچ ایک یک بیک تناظر قائم کریں۔اس کے لیے ہم تمام ناطق اعداد کو درجہ ذیل قاعدہ سے ترتیب دیتے ہیں:

i. تمام طبعی اعداد کو پہلی صف میں بڑھتی ہوئی ترتیب میں لکھ دیتے ہیں۔

ii. صفر اور تمام منفی صحیح اعداد کو گھٹتی ہوئی ترتیب میں دوسری صف میں لکھ دیتے ہیں۔

iii. ڈنومنیٹر 2 (Denominator) کے تمام مختصر مثبت کسروں کو تیسری صف میں بڑھتی ہوئی ترتیب میں لکھ دیتے ہیں۔

iv. ڈنومنیٹر 2 (Denominator) کے تمام مختصر منفی کسروں کو چوتھی صف میں گھٹتی ہوئی ترتیب میں لکھ دیتے ہیں۔اور پھر اسی طرز پر لکھتے جاتے ہیں۔

اس طرح جدول میں ہر ایک ناطق عدد صرف ایک ہی مرتبہ جگہ حاصل کرتا ہے۔

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots\ldots\ldots \\
0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & \ldots\ldots\ldots \\
\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} & \frac{11}{2} & \ldots\ldots\ldots \\
\frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{-7}{2} & \frac{-9}{2} & \frac{-11}{2} & \ldots\ldots\ldots \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & \frac{8}{3} & \ldots\ldots\ldots \\
\frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-4}{3} & \frac{-5}{3} & \frac{-7}{3} & \frac{-8}{3} & \ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

تب سبھی طبعی اعداد کو مندرجہ ذیل طریقہ سے طبعی اعداد کے تناظر میں لکھا جاسکتا ہے۔اس طرقہ کو وتری تکنیک کہتے ہیں۔

حقیقی اعداد	....	6	5	4	3	2	1
ناطق اعداد	....	−5	−4	−3	−2	−1	0

جس سے طبعی اعداد اور ناطق اعداد کے درمیان ایک یک بیک تناظر قائم ہوتا ہے۔اس لیے ناطق اعداد کا سٹ شمار پذیر ہوتا ہے۔

تبصرہ: ناطق اعداد کے سٹ $\mathbb{Q}$ کو اس کے عناصر کو شمار پذیر سٹس کے شمار پذیر اجماع کے طور پر حسب ذیل ترتیب میں رکھ کر دیکھنا ممکن ہے

$$A_0 = \{0\}$$
$$A_1 = \left\{\frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{-3}{1}, \cdots\right\}$$
$$A_2 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{-2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{-3}{2}, \cdots\right\}$$

$$A_3 = \left\{\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{-3}{3}, \cdots\right\}$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$A_n = \left\{\frac{1}{n}, \frac{-1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{-2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{-3}{n}, \cdots\right\}$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$\mathbb{Q}_0 = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$$

چوں کہ ہر ایک شمار پذیر ہے اس لیے ان کا اجماع بھی شمار پذیر ہو گا۔

1.3.1 $\mathbb{R}$ کی غیر شمار پذیری (Uncountability of $\mathbb{R}$)

قضیہ 2۔ حقیقی اعداد کا سٹ شمار پذیر نہیں ہوتا ہے۔

ثبوت۔ ہم دکھاتے ہیں کہ حقیقی اعداد کے سٹ کا وقفہ $0 \le x \le 1$ شمار پذیر نہیں ہے۔ وقفہ $0 \le x \le 1$ میں موجود ہر ایک حقیقی عدد x ایک اعشاری تعبیر رکھتا ہے۔ فرض کرو کہ $x = 0.a_1a_2a_3\cdots$، جہاں ہر ایک a_i، ہندسوں $0,1,2,3,\ldots,9$ میں سے کوئی ایک ہندسہ ہے۔ ایسے اعداد جن کے اعشاری پھیلاؤ ایک جگہ پر رک جاتے ہیں مثال کے لیے 0.1728 اس کے لیے یا تو $0.1728000\cdots$ یا پھر $0.1727999\cdots$ لکھا جاتا ہے۔

اگر وقفہ $0 \le x \le 1$ میں تمام حقیقی اعداد x کو شمار پذیر ہونا ہے تو ان کو طبعی اعداد سے ایک ایک تناظر میں درجہ ذیل کی طرح ترتیب دینا ہو گا

$$\begin{aligned}
1 &\leftrightarrow 0.a_1a_2a_3a_4\cdots\\
2 &\leftrightarrow 0.b_1b_2b_3b_4\cdots\\
3 &\leftrightarrow 0.c_1c_2c_3c_4\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

اب ہم وقفہ $0 \le y \le 1$ میں سے ایک y کو دکھائیں گے کہ وہ مندرجہ بالا فہرست میں نہیں آتا ہے۔

اس کے لیے فرض کرو کہ y_1 ہندسوں 0، a_1 اور 9 سے مختلف ہے؛ ہندسہ y_2 ہندسوں 0، b_2 اور 9 سے مختلف ہے؛ y_3 ہندسوں 0، c_3 اور 9 سے مختلف ہے؛ اور اسی طرح۔ تب $y = 0.y_1y_2y_3y_4\cdots$ اس طرح سے ہے کہ $0 \le y \le 1$ چوں کہ $y_n \neq 0, y_n \neq 9$، اس لیے y دو اعشاریہ کی نمائندگی کے پابند نہیں ہو سکتے ہیں۔ n کی کسی بھی قدر کے بغیر y کی اس اعشاریائی تعبیر سے فہرست میں n واں نمبر مساوی ہوتا ہے۔ اس لیے x_n اور y مختلف ہیں۔ اس لیے y اوپر دی گئی فہرست میں نہیں ہے۔ اس طرح $0 \le y \le 1$ کا کوئی بھی شمار پذیر حقیقی تحت سٹ کم سے کم ایک حقیقی نمبر سے خالی ہو گا۔ اس لیے حقیقی اعداد کا سٹ $0 \le y \le 1$ شمار پذیر نہیں ہو گا۔

ہم نے دیکھا کہ حقیقی اعداد کا سٹ $\mathbb{R}$ اور ناطق اعداد کا سٹ $\mathbb{Q}$ دونوں ہی مرتب میدان (Ordered Fields) ہیں۔ ہم نے یہ بھی دیکھا کہ ناطق اعداد کا سٹ شمار پذیر ہوتا ہے جب کہ حقیقی اعداد کا سٹ شمار پذیر نہیں ہوتا۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ ایسے حقیقی اعداد وجود رکھتے ہیں جو ناطق اعداد نہیں ہیں۔ اس سے یہ پتہ چلتا ہے کہ حقیقی اعداد ایک خاصیت کو مطمئن کرتے ہیں جو کاملیت کی خاصیت کے نام سے مشہور ہے جو ناطق اعداد میں نہیں پائی جاتی ہے۔ اس اکائی کو ہم ایک عدد کی مثال دے کر ختم کریں گے جو ناطق عدد نہ ہو۔

مثال۔ $\sqrt{2}$ ایک ناطق عدد نہیں ہے یا ایسا کوئی ناطق عدد x وجود نہیں رکھتا ہے جو اس طرح سے ہو کہ $x^2 = 2$۔

ثبوت۔ فرض کرو کہ اگر ممکن ہو کہ $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ جہاں $q \neq 0$ اور q, p ایک دوسرے کے مفرد صحیح اعداد ہیں۔ یعنی 1 q, p کا اعظم مشترک قاسم $(g.c.d.)$ ہے۔ اب

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Longrightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2}$$

یا

$$2q^2 = p^2$$

اب چوں کہ q صحیح عدد ہے اس لیے q^2 ایک صحیح عدد اور $2q^2$ ایک جفت صحیح عدد ہے۔ لیکن $2q^2$ جفت صحیح عدد تبھی ہوگا جب کہ p^2 جفت صحیح عدد ہو۔ لیکن p^2 جفت صحیح عدد ہے جس کا مطلب یہ ہوا کہ p جفت صحیح عدد ہے۔ فرض کرو کہ $p = 2m$ جہاں m ایک جفت صحیح عدد ہے۔ تب $p^2 = 4m^2$ اور $4m^2 = 2q^2 \Longleftarrow p^2 = 2q^2$ یا $2m^2 = q^2$ اب q^2 ایک جفت صحیح عدد ہے جس کا مطلب ہے کہ q ایک جفت صحیح عدد ہے۔ لہٰذا p اور q دونوں اس حقیقت سے کہ وہ نسبتاً مفرد عدد ہیں، تصادم کرتے ہوئے جفت صحیح اعداد ہیں۔ اس طرح $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ اور $(p, q) = 1$ کے لیے ہمارا مفروضہ غلط ہے۔ اس کے یہ معنی ہوئے کہ $\sqrt{2}$ ایک ناطق عدد نہیں ہے۔

آپ درجہ ذیل مسئلہ سے سمجھ سکتے ہیں:

مثال: ثابت کرو کہ اگر a^2 جفت ہو تو a جفت ہوتا ہے۔

1.4 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

ہر ایک طالب علم اس بات سے واقفیت رکھتا ہے کہ حقیقی اعداد وجود رکھتے ہیں اور یہ بھی کہ وہ ناطق اعداد کی طرح سلوک کرتے ہیں۔ لیکن ایک طالب علم کو حقیقی نمبر کے تصور سے باضابطہ تعارف کروانا ہمیشہ تھکا دینے والا اور پیچیدہ ہوتا ہے۔ یہاں تک کہ نامور ریاضی دانوں میں پیش کرنے کا کوئی غیر رسمی طور پر قبول شدہ طریقہ نہیں ہے۔ اس اکائی میں ہم نے حقیقی نمبر کو مرتب میدان کے طور پر متعارف کروایا ہے۔ اس لیے سوال یہ ہے کہ ہم حقیقی نمبروں کو ناطق نمبروں سے کیسے الگ کر سکتے ہیں۔ ہم نے ثابت کیا کہ ناطق اعداد کا سٹ شمار پذیر ہوتا ہے جب کہ حقیقی اعداد کا سٹ شمار پذیر نہیں ہوتا۔ اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ کچھ حقیقی اعداد وجود رکھتے ہیں جو ناطق عدد نہیں ہوتے۔ ہم نے ایک ایسے حقیقی عدد $\sqrt{2}$ کی مثال دی جو ایک ناطق عدد نہیں ہے۔

1.5 کلیدی الفاظ (Keywords)

الجبرائک، مرتب، سٹ، شمار پذیر، غیر شمار پذیر، تلازمیت، اکائی، معکوس خاصیت، تفرق پذیری، ٹرائیکوٹومی، مشابہ سٹس، وتری تکنیک، مطلق قدر

1.6 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

1.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. $\mathbb{R}$ کی جمعی اکائی (Additive Identity) ہے

(a) 1　(b) 0　(c) -1　(d) 2

2. $\mathbb{R}$ کی ضربی اکائی(Multiplicative Identity) ہے

(a) 1　(b) 0　(c) 2　(d) -1

3. $-\sqrt{2}$ ہے

(a) ناطق　(b) غیر ناطق　(c) مثبت　(d) 0

4. $\sqrt{4}$ ہے

(a) ناطق　(b) غیر ناطق　(c) 0　(d) **-1**

5. $\mathbb{R}$ کی جمعی اکائی یکتا ہوتی ہے　(T/F)

6. N کے ہر ایک عنصر کے لیے جمعی معکوس اس میں وجود رکھتا ہے　(T/F)

7. صحیح اعداد کے سٹ $\mathbb{Z}$ (یا I) کے ہر ایک عنصر کے لیے ضربی معکوس اس میں وجود رکھتا ہے　(T/F)

8. $\mathbb{Q}^c = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ شمار پذیر ہے　(T/F)

9. $\mathbb{Q}$ شمار پذیر ہے　(T/F)

10. مثبت اعداد کے سٹ P اور منفی اعداد کے سٹ N کے مشترکہ عناصر کی تعداد۔۔۔۔۔۔ہوتی ہے۔

11. سٹ $\{x\sqrt{2}: x \in \mathbb{Z}$ یا $I\}$ ۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔ہے۔

12. حقیقی اعداد a کی تعداد۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔ہوتی ہے، جس کے لیے $a^2 \leq 0$ ہوتا ہے۔

13. متناہی سٹ اور لا متناہی سٹ۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔ہوتے ہیں۔(مشابہ/غیر مشابہ)

14. درجہ ذیل کا ملاپ کریں:

I. $\{a\sqrt{3}: a \in \mathbb{Q}\}$ ہے۔	a. غیر شمار پذیر
II. $\{x\sqrt{2}: x \in \mathbb{Q}^c\}$ ہے۔	b. شمار پذیر
III. $\mathbb{R}$ میں تفریق ہے	c. غیر تقلیبی
IV. $\mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}\}$ میں تقسیم ہے۔	d. طاق
V. $n \in \mathbb{N}$ کے لیے $(2n-1)^2$ ہے۔	e. غیر تقلیبی

1.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

1. ثابت کرو کہ $\mathbb{R}$ ایک مرتب میدان ہوتا ہے۔

2. ٹرائیکوٹومی(Trichotomy) کے قاعدے کو بیان کیجیے۔ اگر N منفی حقیقی اعداد کے سٹ کو ظاہر کرتا ہو تو ثابت کیجیے کہ $N \cap P = \emptyset$

3. ثابت کرو:

(a $|a| = 0 \ iff \ a = 0$

(b اگر $c \geq 0$ اور تب $|a| \leq c \ iff - c \leq a \leq c$

(c $-|a| \leq a \leq |a|, \forall a \in \mathbb{R}$

4. اگر a ناطق عدد اور b غیر ناطق عدد ہو تو ثابت کیجیے کہ $a + b$ غیر ناطق عدد ہو گا۔

1.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. حقیقی اعداد کے لیے مثلث لامساوی (Triangle Inequality) کا بیان لکھو اور ثابت کرو۔
2. شمار پذیر سٹ اور متناہی سٹ کی تعریف کیجیے۔ ثابت کرو کہ ناطق اعداد کا سٹ شمار پذیر ہوتا ہے۔
3. غیر شمار پذیر سٹ کی تعریف کرو۔ ثابت کرو کہ حقیقی اعداد کا سٹ غیر شمار پذیر ہوتا ہے۔
4. کسی بھی حقیقی اعداد a, b کے لیے ثابت کرو کہ $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ اور $|a + b| \leq |a| + |b|$
5. اگر x ایک حقیقی عدد ہو تو ثابت کرو کہ $x^2 \geq 0$
6. اگر $0 < a < 1, b > 1$ ثابت کرو کہ $0 < a^2 < a < 1$ اور $b^2 > b > 1$
7. اگر $\frac{a}{b} < \frac{A}{B}$ ثابت کرو کہ $\frac{a}{b} < \frac{a+A}{b+B} < \frac{A}{B}$، $(b, B > 0)$

1.7 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Introduction to Real Analysis, Donald R. Sherbert Robert G. Bartle 4th Edition , 2014
2. Elements Of Real Anyalsis, Narayan Shanti and Raisinghania M.D., 2003
3. Real Analysis, Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick, 4th Edition, 2017
4. Real Analysis, J.N. Sharma and A.R. Vasishtha, 2014
5. Real Analysis, V. Karunakaran, 2011
6. Real Analysis, N.L. Carothers, 2006
7. Basic Real Analysis, Houshang H. Sohrab, 2nd Edition, 2014

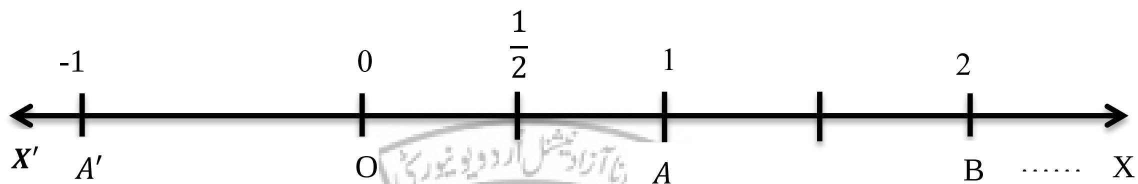
اکائی 2۔ بستہ سٹس، عظمی اور اسفل

(Bounded Sets, Suprema and Infima)

اکائی کے اجزا

2.0 تمہید(Introduction)

ریاضی کی عمومیت حقیقی اعداد کی خصوصیات کی ایک بدیہی بصیرت حاصل کرنے میں ہماری مدد کرتی ہے۔ حقیقی اعداد کو ایک خط پر نقاط کے طور پر شناخت کرنا رائج رہا ہے۔ فرض کرو کہ $X'X$ ایک حقیقی خط($x-$ محور) ہے۔ خط $X'X$ پر ایک اختیاری نشان 'O' لگائیے۔ فرض کرو کہ نقطہ 'O' کے دائیں طرف ایک نقطہ A اس طرح سے ہے کہ اکائی $OA = 1$ تب O کے مساوی 0 اور A کے مساوی 1 ہے۔ اب O کے دائیں جانب کو مثبت حصہ اور O کے بائیں جانب کو منفی حصے کے طور پر متعین کرتے ہیں۔ اگر A نقطہ O کے بائیں جانب اس طرح سے ہو کہ
$OA' = OA = 1$
اس لیے A' کو 1- متعین کرتے ہیں۔ ناطق عدد $\frac{m}{n} > 0$ کو متعین کرنے کے لیے ہم O کے دائیں جانب ایک نقطہ P لیتے ہیں اس طرح سے کہ OA کے n ویں حصہ کا m گنا OP ہے۔ اس طرح ناطق اعداد اور خط $X'X$ کے درمیان ایک رشتہ وجود پاتا ہے۔



اگرچہ ناطق اعداد خط $X'X$ پر سبھی نقاط کا احاطہ کرتے دکھائی دیتے ہیں، لیکن اس خط پر کچھ ایسے نقاط موجود ہیں جو کہ ناطق اعداد سے مطابقت نہیں رکھتے۔ خط $X'X$ پر ایسے نقاط جو جو ناطق اعداد سے مطابقت نہیں رکھتے غیر ناطق اعداد کہلاتے ہیں۔ یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ کسی بھی دو ناطق اعداد کے درمیان ہمیشہ ایک غیر ناطق عدد وجود رکھتا ہے۔ حقیقی اعداد کے سٹ اور خط پر نقاط کے درمیان یہ رشتہ ڈیڈ کائنڈ۔ کینٹر کے موضوع `ہر حقیقی عدد کے لیے ایک سیدھی لائن پر ایک یکتا نقطہ وجود رکھتا ہے اور اس لائن کے ہر نقاط سے ایک حقیقی عدد مطابقت رکھتا ہے`۔ اگر ہم حقیقی اعداد کی بات کرتے ہیں تو ℝ کو ریاضی کا تسلسلیت(Continuum) کہا جاتا ہے اور اگر ہم کسی لائن کے نقاط کے بارے میں بات کرتے ہیں تو اسے جیومتری تسلسلیت (Geometric Continuum) کہا جاتا ہے۔ ایک سیدھے خط کو نمبر لائن کے طور پر دیکھا جا سکتا ہے۔ درحقیقت، کسی بھی دو محدود وقفوں کے درمیان، نقاط کا ایک ٹکڑا ہوتا ہے۔

2.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ :

- حقیقی اعداد کے تحت سٹ کیحصار بندی (Boundedness) کی تعریف کر سکیں۔
- اقل ترین حد بالا(Least Upper Bound)اور اعظم ترین حد زیریں(Greatest Lower Bound)حاصل کر پائیں۔
- ℝ کے کسی تحت سٹ کا اقل بالائی حد (l.u.b.)اور اعظم زیریں حد(g.l.b.)حاصل کر سکیں۔

2.2 کھلا سٹ اور بند سٹ (Open Set and Closed Set)

فرض کرو کہ a اور b دو حقیقی اعداد ہیں (حقیقی لائن پر نقاط)۔ تب حقیقی عدد $|a-b|$ کو دونوں نقاط کی درمیانی فاصلہ (دوری) کہتے ہیں۔

اگر $a, b \in \mathbb{R}$، تب ہم اس کا مشاہدہ کرتے ہیں کہ

i) $|a-b| = 0 \; iff \; a = b$

ii) $|a-b| = |b-a|$

iii) $|a-c| \leq |a-b| + |b-c|$ (مثلثی لامساوی)

$\mathbb{R}$ کے کسی تحت سٹ A کو ایک وقفہ کہتے ہیں اگر $x, y \in A, z \in \mathbb{R}, x < z < y \Rightarrow z \in A$

علامتی اظہار: ہم مختلف قسم کے وقفوں، جنہیں $\mathbb{R}$ کا تحت سٹ کہتے ہیں، کی پہچان کے لیے دو مختلف طرح کی قوسوں (Brackets) کا استعمال کریں گے۔ فرض کرو کہ $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

1. **کھلا وقفہ** (a,b): $\quad (a,b) = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$
2. **بند وقفہ** $[a,b]$: $\quad [a,b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$
3. **بایاں بند دایاں کھلا وقفہ** $[a,b)$: $\quad [a,b) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$
4. **بایاں کھلا دایاں بند وقفہ** $(a,b]$: $\quad (a,b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$

یہ سبھی وقفے بستہ (Bounded) ہیں۔ کھلے سرو کے ساتھ مندرجہ بالا وقفوں میں a کی طرف سے کھلے یا b کی طرف سے کھلے یا a اور b دونوں طرف سے کھلے حد کی قدر اگر $-\infty$ یا ∞ ہو، جہاں ∞ ایک علامتی اظہار ہے جس کا مطلب $x < \infty, \forall x \in \mathbb{R}$ ہے۔ ان وقفوں کو غیر بستہ وقفہ کہتے ہیں۔

2.2.1 $\mathbb{R}$ میں کسی نقطہ کی ہم سائگی (Neighbourhood of a point in $\mathbb{R}$)

تعریف: اگر $a \in \mathbb{R}$ اور $\epsilon > 0$ ایک حقیقی عدد ہے، تب سٹ $\{x \in \mathbb{R}: |x-a| < \epsilon\}$ کو "a" کی ϵ- ہم سائگی کہتے ہیں۔ یہ دیکھنا آسان ہے کہ کسی حقیقی عدد یا نقطہ a کی ϵ- ہم سائگی ایک کھلا وقفہ $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ ہوتا ہے۔ کچھ مصنفین حقیقی عدد a کی ϵ- ہم سائگی کا اظہار $N_\epsilon(a)$ یا $N(\epsilon, a)$ سے کرتے ہیں۔ مثال کے لیے 2 کی $\frac{1}{3}$ - ہم سائگی $\left(2-\frac{1}{3}, 2+\frac{1}{3}\right)$ ہے۔

تعریف: فرض کرو کہ $A \subseteq \mathbb{R}$ اور $a \in A$ ہیں۔ اگر ایک حقیقی عدد $\epsilon > 0$ وجود رکھتا ہے اس طرح سے کہ a کی ϵ-ہم سائگی A میں موجود ہو۔ تب نقطہ a کو A کا داخلی نقطہ (Interior Point) کہتے ہیں اور تب A کو $\mathbb{R}$ میں کھلا وقفہ کہا جاتا ہے۔ اگر $A \subseteq \mathbb{R}$ اور اگر ہر ایک $a \in A$ سٹ A کا داخلی نقطہ ہو، تب A کو $\mathbb{R}$ میں کھلا سٹ کہتے ہیں۔

ایک کھلا وقفہ (a,b) نقاط $a, b \in \mathbb{R}$ کے لیے ایک کھلا سٹ ہوتا ہے چوں کہ ہر ایک $x \in (a,b)$ کے لیے ایک عدد $\delta > 0$ وجود رکھتا ہے اس طرح سے کہ $(x-\delta, x+\delta) \subseteq (a,b) \subseteq \mathbb{R}$

مثال کے لیے $\delta = min(x-a, b-x)$

مثال 1۔ $\mathbb{R}$ اور ϕ، $\mathbb{R}$ میں کھلے سٹ ہیں۔ یہ اس لیے کیوں کہ کسی مثبت حقیقی عدد $\epsilon > 0$ کے لیے

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow (x-\epsilon, x+\epsilon) \subseteq \mathbb{R}$$

ϕ خالی ہے چوں کہ اس میں کوئی بھی عنصر موجود نہیں ہوتا ہے اور اسی لیے یہ کسی کھلے سٹ کی تعریف کو مطمئن کرتا ہے۔

مثال 2۔ فرض کرو کہ $\epsilon > 0$ تب $[a, b+\epsilon) \subseteq \mathbb{R}$ سٹ $\mathbb{R}$ میں ایک کھلا سٹ نہیں ہے۔ یہ اس لیے کیوں کہ a کی ϵ-ہم سائگی خاصطور پر وقفہ $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ میں وہ نقاط موجود ہوتے ہیں جو $[a, a+\epsilon)$ میں موجود نہیں ہیں۔ ٹھیک اسی طرح $a < b$ کے لیے $[a, b)$ اور $[a, b]$ کھلے سٹ نہیں ہیں۔

مثال 3۔ کوئی بھی متناہی سٹ $A \subseteq \mathbb{R}$ سٹ $\mathbb{R}$ میں ایک کھلا سٹ نہیں ہے۔ اسے ثابت کرنے کے لیے فرض کیجیے کہ $A = \{x_1, x_2, \cdots x_n\}$، جہاں $n \in \mathbb{N}$ ہے اور $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ ہے۔ x_1 کیکوئی ϵ-ہم سائگی خاصطور پر $(x_1-\epsilon, x_1+\epsilon)$ ایک لامتناہی سٹ ہے اور اس لیے A میں موجود نہیں ہے۔ چنانچہ x_1 سٹ A کا داخلی نقطہ نہیں ہے۔ ٹھیک اسی طرح A کے دوسرے نقاط A کے داخلی نقاط (Interior Points) نہیں ہیں۔

مثال 4۔ ناطق اعداد کا سٹ $\mathbb{Q}$ حقیقی اعداد کے سٹ $\mathbb{R}$ میں کھلا سٹ نہیں ہوتا ہے۔ یہ دیکھنے کے لیے فرض کرو کہ $x \in \mathbb{Q}$ تب $\epsilon > 0$ کے لیے ایک غیر ناطق عدد y اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $x-\epsilon < y < x+\epsilon$ اس لیے $(x-\epsilon, x+\epsilon) \nsubseteq \mathbb{Q}$ اس کا مطلب یہ ہوا کہ $\mathbb{Q}$ کا کوئی بھی نقطہ داخلی نقطہ نہیں ہے۔

قضیہ 1۔ $\mathbb{R}$ میں ہر کھلا سٹ $\mathbb{R}$ میں وقفوں کا اجماع ہوتا ہے۔

ثبوت۔ اگر $\mathbb{R}$ میں کوئی کھلا وقفہ A ہو، تب کوئی ایک نقطہ $a \in A$ سٹ A کا داخلی نقطہ ہوتا ہے۔ کسی عدد $\epsilon > 0$ کے لیے ایک a کی ϵ-ہم سائگی سٹ میں موجود ہوتی ہے۔ چوں کہ یہ ہر ایک $a \in A$ کے لیے صحیح ہے، اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$A = \cup \{N_\epsilon(a) : a \in A\}$$

تعریف: اگر $A \subseteq \mathbb{R}$ اس طرح سے ہو کہ $\mathbb{R}$ میں A کا تکملہ (Complement) یعنی $\mathbb{R}$ میں $\mathbb{R} \setminus A = \{x : x \in \mathbb{R}, x \notin A\}$ ایک کھلا سٹ ہے، تب A کو $\mathbb{R}$ میں بند تحت سٹ کہتے ہیں۔

مثال 5۔ $\mathbb{R}$ اور ϕ، $\mathbb{R}$ میں کھلے سٹ ہیں۔ یہ اس لیے کیوں کہ ان کے تکملے ϕ، اور $\mathbb{R}$ ہیں۔ ناطق اعداد کا سٹ $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$ میں کھلا سٹ نہیں ہے، چوں کہ اس کا تکملہ یعنی غیر ناطق اعداد $\mathbb{R}$ میں کھلا سٹ نہیں ہوتا۔ یہ اس لیے کیوں کہ کسی دو غیر ناطق اعداد کے درمیان ایک ناطق عدد وجود رکھتا ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ $\mathbb{Z}$ (صحیح اعداد کا سٹ) $\mathbb{R}$ میں بند سٹ ہے۔

تبصرہ: کھلے سٹ اور بند سٹ کے درمیان کھلے دروازے اور بند دروازے کی طرح تضاد نہیں ہے۔ مثال کے لیے، $\mathbb{R}$ اور ϕ، کھلے اور بند دونوں طرح کے سٹ ہیں۔ درحقیقت اس خاصیت کے یہی دو سٹ ہیں۔ ناطق اعداد کا سٹ نہ تو کھلا ہے اور نہ ہی بند ہے۔

اخراج ہم سا گی (Deleted Neighbourhood): ایسی ہم سا گی $N_\epsilon(a)$ جس کے نقاط میں سے ایک نقطہ ہٹا دیا گیا ہو، اخراج ہم سا گی کہلاتی ہے۔ مثال کے لیے $N_\epsilon(a) \setminus \{a\}$ اخراج ہمسا گی ہے۔ دوسرے الفاظ میں، $a \in \mathbb{R}$ کے لیے اور $\epsilon > 0$، $(a-\epsilon, a+\epsilon) \setminus \{a\}$ ایک ہم سا گی ہے۔ ان کی ضرورت آپ کو آگے کی پڑھائی میں انتہائی نقاط (Limit Points) کے علم حاصل کرنے میں پڑے گی۔

2.3 بستہ سٹس (Bounded Sets)

تعریف: حقیقی اعداد کے ایک غیر خالی تحت سٹ کو حقیقی اعداد کا مجموعہ کہا جاتا ہے یا صرف ایک مجموعہ۔

2.3.1 اوپر سے بستہ سٹ (Bounded Above Set)

تعریف: مان لو کہ A ایک مجموعہ ہے۔ اگر ایک حقیقی عدد M اس طرح وجود رکھتا ہو کہ ہر ایک $x \in A$ کے لیے $x \leq M$، تب M کو A کی حد بالا (Upper Bound) کہا جاتا ہے اور A کو اوپر سے بستہ سٹ کہتے ہیں۔ کسی مجموعہ کی حد بالا یکتا نہیں ہوتی یہ اس لیے کیوں کہ اگر کسی مجموعہ کی حد بالا M ہو اور $M_1 > M$، تب M_1 بھی حد بالا ہو گی۔

2.3.2 نیچے سے بستہ سٹ (Bounded Below Set)

تعریف: مان لو کہ A ایک مجموعہ ہے۔ اگر ایک حقیقی عدد m اس طرح وجود رکھتا ہو کہ ہر ایک $x \in A$ کے لیے $x \geq \mathrm{m}$، تب m کو A کی حد زیریں (Lower Bound) کہا جاتا ہے اور A کو نیچے سے بستہ سٹ کہتے ہیں۔ کسی مجموعہ کی حد زیریں یکتا نہیں ہوتی یہ اس لیے کیوں کہ اگر کسی مجموعہ کی حد زیریں m ہو اور $m_1 < m$، تب m_1 بھی حد زیریں ہو گی۔

2.3.3 بستہ اور غیر بستہ سٹس (Bounded and Unbounded Sets)

تعریف: کسی مجموعہ A کو بستہ سٹ کہتے ہیں اگر یہ اوپر اور نیچے سے بستہ ہو۔ ایک مجموعہ جو بستہ نہ ہو غیر بستہ سٹ یا مجموعہ کہلاتا ہے۔ ایک متناہی سٹ بستہ ہوتا ہے۔ $\mathbb{N}$ ایک غیر بستہ سٹ ہے۔

2.3.4 اقل بالائی حد (Supremum)

تعریف: اگر کسی مجموعہ A کی حد بالا M ہو اور اگر کوئی حقیقی عدد M سے کم تر ہو جو کہ A کی حد بالا نہیں ہے تب ہم M کو اقل ترین بالائی حد (l.u.b.) کہتے ہیں۔ اقل ترین حد کو A کا علویہ (Supremum) بھی کہتے ہیں۔

2.3.5 اعظم زیریں حد (Infimum)

تعریف: اگر کسی مجموعہ A کی حد زیریں m ہو اور اگر کوئی حقیقی عدد m سے اعلی تر ہو جو کہ A کی حد زیریں نہیں ہے تب ہم m کو اعظم ترین زیریں حد (g.l.b.) کہتے ہیں۔ اقل بالائی حد کو A کا سفلیہ (Infimum) بھی کہتے ہیں۔

تعریف: اگر کسی مجموعہ A کی حد بالا M اور حد زیریں m ہو، تب $M - m$ کو مجموعہ A کا اہتزاز (Oscillation) کہتے ہیں۔

تبصرہ: اگر مجموعہ A میں سب سے بڑا عنصر M ہو، تب M کو A کا اعظم ترین عنصر کہتے ہیں۔ اگر مجموعہ A میں سب سے چھوٹا عنصر m ہو، تب m کو A کا اقل ترین عنصر کہتے ہیں۔ یہ واضح ہے کہ اگر کسی مجموعہ A کا M سب سے بڑا عنصر ہے، تب A اوپر سے بستہ ہوگا اور M اقل ترین بالائی حد ہوگی اور اس صورت میں $l.u.b.A = Sup\ A = \max A$ ہوگا۔ اور بالکل اسی طرح اگر کسی مجموعہ A کا m سب سے چھوٹا عنصر ہے، تب A نیچے سے بستہ ہوگا اور m اعظم ترین زیریں حد ہوگی اور اس صورت میں $g.l.b.A = Inf\ A = \min\ A$ ہوگا۔

مثال 6۔ سٹ $A = \{1,3,5,7,9,11\}$ ہے۔ یہ سٹ بستہ ہے اور اس کی بالائی حدیں 11، 12، $\frac{111}{10}$ وغیرہ ہیں۔ زیریں حدیں 1، 0، $-\frac{1}{2}$، -3 وغیرہ ہیں۔ اقل ترین بالائی حد $l.u.b.A = 11 = \max A$ اور اعظم ترین زیریں حد کی تعریف سے $g.l.b.A = 1 = \min\ A$ ہے۔

مثال 7۔ فرض کرو کہ $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}$، تب سٹ A بستہ ہے اور اس کی بالائی حدیں 1، $\frac{3}{2}$، 1.1، 2 وغیرہ ہیں اور اقل ترین بالائی حد $l.u.b.A = \max A = 1$ ہوگی۔ زیریں حدیں 0، $-\frac{1}{2}$، -1، -0.1 وغیرہ ہیں۔ اور اعظم ترین زیریں حد $g.l.b.A = 0$ ہے یہ صاف ہے کہ $\min\ A$ وجود نہیں رکھتا ہے۔

مثال 7۔ اگر $A = \left\{\frac{2x+3}{3x+4} : x \in \mathbb{R}, x > 0\right\}$ ہے، تب سٹ A بستہ ہے اور اقل ترین بالائی حد $\max A$ اور اعظم ترین زیریں حد $\min\ A$ وجود نہیں رکھتا ہے؛ $l.u.b.\ A = \frac{3}{4}$ اور $g.l.b.\ A = \frac{2}{3}$

آپ درجہ ذیل سوالات کی جانچ کیجیے:

1. $A = \left\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ کے لیے $l.u.b.$ اور $g.l.b.$ حاصل کرو۔
2. $A = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ کے لیے $l.u.b$ اور $g.l.b$ حاصل کرو۔
3. $A = \left\{\frac{-(n+1)}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ کے لیے $l.u.b$ اور $g.l.b$ حاصل کرو۔

بیان (Statement): فرض کرو کہ A کوئی مجموعہ ہے،

i) اگر کسی مجموعہ A کی حد بالا M اور حد زیریں m ہو، تب $M \geq m$

ii) A کے لیے $l.u.b$ اور $g.l.b$ اگر وجود رکھتے ہوں تو وہ یکتا ہوتے ہیں۔

نتیجہ (Result):

اگر کسی مجموعہ A کی اقل ترین بالائی حد $M(l.u.b.)$ ہو اور $y < M$ ایک حقیقی عدد ہو تب ایک عدد $x \in A$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $M \leq x \leq y$ ہو۔ اسی طرح اگر A کی اعظم ترین زیریں حد $m\ (g.l.b.)$ ہو اور $y > m$ ایک حقیقی عدد ہو تب ایک عدد $x \in A$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $y \geq x \geq M$ ہوگا۔

مثال 8۔ اگر S حقیقی اعداد کے سٹ کا ایک غیر خالی تحت سٹ ہے جس میں ایک زیریں حد ہے، تب ثابت کرو کہ S میں اعظم ترین زیریں حد $(g.l.b.)$ وجود رکھتا ہے۔

حل۔ فرض کرو کہ S کی زیریں حد b ہے۔ایک سٹ T ذیل $T = \{x: -x \in S\}$ سے متعرف ہے۔تب $-b$ حد بالا ہو گی۔ یہ اس لیے کہ اگر $x \in T$، تب $-x \in S$ اور اس لیے $b \leq -x$ جس سے $x \leq -b$ حاصل ہوتا ہے۔فرض کرو کہ T کی اقل ترین بالائی حد c ہے جو کہ کاملیت کی خصوصیت سے وجود رکھتا ہے۔ تب S کی اعظم ترین زیریں حد c– ہو گی۔ چوں کہ S کے لیے زیریں حد c– ہے اور $x \in S \Rightarrow -x \in T$ اور پھر $-x \leq c$ اور $x \geq -c$ اب مان لو کہ S کی زیریں حد a ہے، تب T کی بالائی حد $-a$ ہو گی۔چوں کہ T کی اقل ترین بالائی حد c ہے، تب $c \leq -a$ ہے اور $a \leq -c$ ہو گا۔

2.4 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے دیکھا کہ حقیقی اعداد کا سٹ جیومترائی طور پر ایک سیدھی لائن ہوتی ہے۔ دوسرے الفاظ میں، حقیقی اعداد کے الجبرائی سٹ $\mathbb{R}$ اور جیومترائی لائن کے درمیان ایک-ایک مطابقت ہوتی ہے۔ ہم نے $\mathbb{R}$ میں ایک وقفہ کی تعریف کو سمجھا کہ یہ وہ سٹ ہوتا ہے جس میں اعداد کے ہر جوڑے یا اختتامی نقاط کی درمیانی قدر جو اس میں موجود ہوں، وجود رکھتی ہے۔اس کے بعد کسی حقیقی عدد کی ہم سائگی کے تصور کی وضاحت کی۔ ہم نے بتایا کہ کا تحت سٹ ایک کھلا سٹ ہوتا ہے اگر اور صرف اگر اس کا ہر نقطہ ایک داخلی نقطہ ہو۔ایک داخلی نقطہ وہ ہوتا ہے جس کا ایک ہم سایہ دیے گئے سٹ کا تحت سٹ ہو۔ حقیقی اعداد کا بند تحت سٹ قطعی طور پر وہ ہے جس کے اجزا $\mathbb{R}$ میں کھلے سٹس ہیں۔ بعد میں ہم نے $\mathbb{R}$ کے تحت سٹ کے لیے بالائی حد اور زیریں حد کے تصور کی تعریف کی ہے۔اس کی وجہ سے $\mathbb{R}$ کے تحت سٹ کے لیے بالائی حد اور زیریں حد اور $\mathbb{R}$ کے دیے گئے تحت سٹ کے اقل ترین بالائی حد اور اعظم ترین زیریں حد کی نشاندہی ہوئی۔ اگر یہ اقل ترین بالائی حد اور اعظم ترین بالائی حد تحت سٹ کے عناصر ہوں تو ان کو بالترتیب تحت سٹ کی قلیل اور عظیم قدریں کہتے ہیں۔ہم نے ان حدود کو وسیع پیمانے پر واضح کرنے والی مختلف مثالوں کا مطالعہ کیا۔

2.5 کلیدی الفاظ (Keywords)

حقیقی خط، اعدادی خط، وقفہ، کھلا اور بند وقفے، داخلی نقطہ، کھلا تحت سٹ، بند تحت ست، نیچے سے بستہ، اوپر سے بستہ، بالائی حد، اقل ترین بالائی حد، اعظم ترین، زیریں حد، اعظم ترین زیریں حد، اقل ترین، بستہ سٹ، غیر بستہ سٹ

2.6 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

2.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. مثبت اعداد نمبر لائن کے۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔ طرف ہوتے ہیں۔

(a) بائیں (b) دائیں (c) نہیں (d) ہر طرف

2. $J = \{x \in \mathbb{R}: -1 \leq x \leq 1, x \neq 0\}$ وقفہ نہیں ہے چوں کہ

(a) $0 \notin J$ (b) $0 \in J$ (c) $-1 \in J$ (d) $1 \in J$

3. لا متناہی سٹ$I = \{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x \leq 1\}$ہے

(a) غیر بستہ (b) متناہی (c) خالی (d) بستہ

4. سٹ$K = \left\{1 + \frac{1}{n}: n \in \mathbb{N}\right\}$میں ہے

(a) اعظم ترین زیریں حد (b) زیریں حد (c) قلیل (d) عظیم

5. ایک کھلا وقفہ $\mathbb{R}$ میں ایک کھلا سٹ ہوتا ہے۔ (T/F)

6. ایک بند وقفہ $\mathbb{R}$ میں ایک بند سٹ ہوتا ہے۔ (T/F)

7. $\mathbb{R}$ میں ہر ایک کھلا سٹ کھلے وقفوں کا اجماع ہوتا ہے۔ (T/F)

8. $\mathbb{R}$ کے صرف تحت سٹس جو کھلے اور بند دونوں ہیں وہ $\mathbb{R}$ اور ϕ ہیں۔ (T/F)

9. ناطق اعداد کا سٹ $\mathbb{Q}$ ــــــــــ ہے۔ (بستہ/غیر بستہ)

10. طبعی اعداد کا سٹ کی اعظم ترین زیریں حد ــــــــــ ہے۔

11. منفی صحیح اعداد کے سٹ کے لیے اقل ترین بالائی حد ــــــــــ ہوتی ہے۔

12. $\mathbb{R}$ کے ہر ایک متناہی تحت سٹ میں ــــــــــ اور ــــــــــ ہوتے ہیں۔

(اعظم ترین زیریں حد، اقل ترین بالائی حد، عظیم، قلیل)

13. درجہ ذیل کا ملاپ کریں:

I.	مثبت حقیقی اعداد کا اقل بالائی حد(Supremum)ہے۔	**a.**	متناہی(Finite)
II.	سبھی مثبت واجبی کسروں کی اعظم زیریں حد(Infimum)ہے۔	**b.**	ایک
III.	حقیقی عدد x کے لیے نقاط کی تعداد مساوی ہے یا نمبر لائن ہے۔	**c.**	**0**
IV.	کسی متناہی سٹ کا اہتزاز ہے۔	**d.**	غیر موجود(Non Existent)

2.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

1. دکھائیے کہ طبعی اعداد کے سٹ $\mathbb{N}$ کے ہر ایک غیر خالی تحت سٹ میں اعظم زیریں حد(Infimum)موجود ہوتی ہے۔

2. حقیقی اعداد کو لائن پر نقاط کے طور پر اور اس کے برعکس کیسے ظاہر کیا جاسکتا ہے؟ تفصیل کے ساتھ بیان کیجیے۔

3. سٹ$A = \left\{\frac{3x+2}{2x+3}: x \in \mathbb{R}, x > 0\right\}$کے لیے اقل ترین بالائی حد $(l.u.b.)$ اور اعظم ترین زیریں حد $(g.l.b.)$ حاصل کرو۔

4. $A = \left\{\frac{(-1)^n}{2n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ کے لیے $l.u.b$ اور $g.l.b$ حاصل کیجیے۔

2.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. کسی مجموعہ کے لیے $l.u.b$ اور $g.l.b$ کی تعریف مثال کے ساتھ کیجیے۔ عظیم (Maximum) اور قلیل (Minimum) کی تعریف کیجیے۔ کچھ مثالیں بھی دیجیے۔
2. مثال کے ساتھ اوپر سے بستہ سٹ اور نیچے سے بستہ سٹ کی تعریف کیجیے اور بستہ سٹ کی بھی تعریف کیجیے اور اس کی وضاحت کیجیے۔
3. $\mathbb{R}$ کے تحت سٹ کے داخلی نقطہ کی تعریف کیجیے۔ $\mathbb{R}$ کے کھلے اور بند تحت سٹ کی تعریف کیجیے۔ مثالیں دیجیے۔
4. کیا درجہ ذیل کھلے یا بند وقفے ہیں؟ جواز پیش کیجیے:

(a) $[2,3)$ (b) $(4,5]$ (c) ϕ (d) $\mathbb{R}$

5. ثابت کرو کہ $\mathbb{R}$ کا کھلا تحت سٹ، کھلے وقفوں کا اجماع ہوتا ہے۔

2.7 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Introduction to Real Analysis, Donald R. Sherbert Robert G. Bartle 4th Edition , 2014
2. Elements Of Real Anyalsis, Narayan Shanti and Raisinghania M.D., 2003
3. Real Analysis, Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick, 4th Edition, 2017
4. Real Analysis, J.N. Sharma and A.R. Vasishtha, 2014
5. Real Analysis, V. Karunakaran, 2011
6. Real Analysis, N.L. Carothers, 2006
7. Basic Real Analysis, Houshang H. Sohrab, 2nd Edition, 2014

اکائی 3۔ $\mathbb{R}$ کی کاملیت

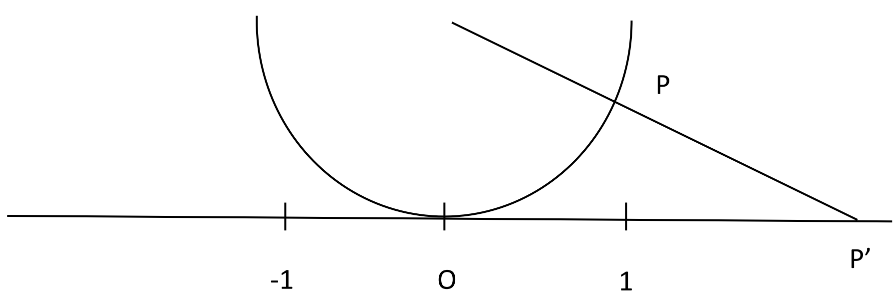
(Completeness of $\mathbb{R}$)

اکائی کے اجزا

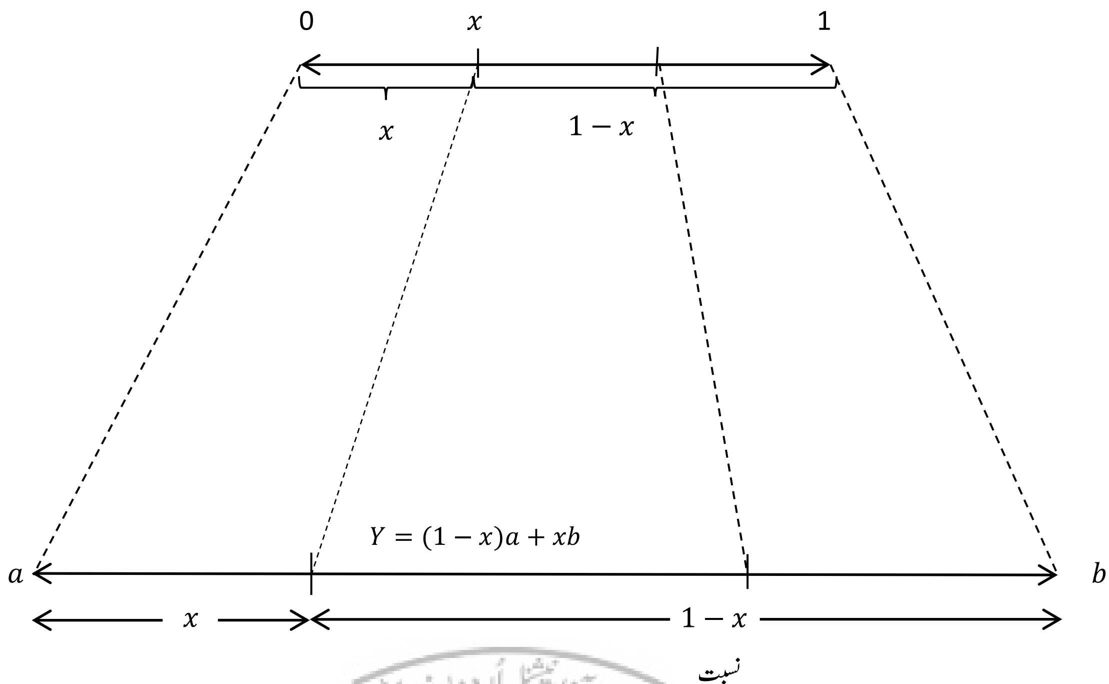
3.0 تمہید (Introduction)

ہم پہلی اکائی کے قضیے 1 میں دیکھ چکے ہیں کہ حقیقی لائن پر سبھی ناطق نقاط کا سٹ شمار پذیر ہوتا ہے اور قضیہ 2 میں ہم نے ثابت کیا کہ حقیقی لائن پر سبھی نقاط کا سٹ شمار پذیر نہیں ہوتا ہے۔ اس سے ہم فوراً اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ غیر ناطق نقاط (یعنی غیر ناطق اعداد) حقیقی لائن پر وجود رکھتے ہیں۔ یقیناً یہ دیکھنا بہت آسان ہے کہ غیر ناطق اعداد کا سٹ غیر شمار پذیر طور پر لا متناہی ہوتا ہے۔ تھوڑا سا فرق کرنے کے لیے ای ٹی بیل (E. T. Bell) نے ایک حیرت انگیز استعارہ ثابت کیا کہ ناطق اعداد حقیقی لائن پر کالے آسمان میں ستاروں کی طرح پایے جاتے ہیں اور پیچھے کا گہرا کالا پن غیر ناطق اعداد کا آسمان ہے۔ اب طلبا اس ثبوت سے واقف ہو گیے ہوں گے کہ 2 کا مربع ریشہ غیر ناطق ہوتا ہے۔ یہ ثبوت ایک نمونہ کی مدد سے غیر ناطق اعداد کی موجودگی کو ظاہر کرتا ہے۔ حقیقت میں، غیر ناطق اعداد کا اچھی تعداد میں موجود ہونا ضروری ہے۔

اگر طلبا مان لیتے ہیں کہ حقیقی لائن پر تمام نقاط کا سٹ غیر شمار پذیر ہے چوں کہ حقیقی اعداد کا سٹ $\mathbb{R}$ لا محدود ہوتا ہے، تب ذیل دلیل سے وہ مایوس ہو سکتے ہیں جو بتاتی ہے کہ $\mathbb{R}$ کا کوئی بھی کھلا وقفہ چاہے کتنا بھی چھوٹا کیوں نہ ہو قطعی طور پر اتنے ہی نقاط رکھتا ہے جتنے کہ خود $\mathbb{R}$ میں ہوتے ہیں۔ فرض کرو کہ a اور b کوئی دو حقیقی اعداد ہیں جب کہ $a < b$ اور مان لیجیے کہ (a, b) ایک کھلا وقفہ ہے۔ شکل (3.0.1) سے ظاہر ہوتا ہے کہ (a, b) کے نقطہ P اور $\mathbb{R}$ کے نقطہ P' کے درمیان کس طرح ایک تا ایک مطابقت (One to One Correspondence) وجود پاتی ہے؛ ہم (a, b) کو ایک نصف دائرہ میں حاصل کرتے ہیں؛ اس نصف دائرہ کو حقیقی لائن $\mathbb{R}$ پر مماسی طور پر چھوڑ دیتے ہیں جیسا کہ شکل (3.0.1) سے ظاہر ہے اور اس کے مبدا کی طرف P اور P' کو جوڑ دیتے ہیں۔ اگر ضابطے اس قسم کی جیومتری وجوحات کے مقابلہ ترجیح پاتے ہیں تو ہم دیکھتے ہیں کہ $y = a + (b - a)x$ حقیقی اعداد $x \in (0,1)$ اور $Y \in (a, b)$ کے درمیان ایک عددی معادلت ہے اور یہ کہ $z = tan\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)$ وقفہ $(0,1)$ اور $\mathbb{R}$ کے درمیان ایک اور عددی معادلت ہے۔



شکل (3.0.1): کھلے وقفہ اور حقیقی لائن کے درمیان ایک ایک مطابقت



شکل 3.0.2: $(0, 1)$ اور (a, b) کے درمیان ایک تا ایک مطابقت (ایک تا ایک اور بر تفاعل)

3.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کو پڑھنے پر آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ

- کاملیت کے موضوع کو سمجھ سکیں۔
- آرکمیڈی اصول کو سمجھ سکیں۔
- ڈیڈکائنڈ کٹ سے متعرف ہو سکیں اور
- کاملیت موضوع اور ڈیڈکائنڈ کی خاصیت کا معادل ہونا سمجھ سکیں۔

3.2 استقرا کا اصول (Principle of Induction)

3.2.1 ریاضیاتی استقرا کا اصول (Principle of Mathematical Induction)

فرض کرو کہ $\mathbb{N}$ طبعی اعداد کا سٹ ہے۔ ہر ایک $n \in \mathbb{N}$ کے لیے مان لیجیے کہ $P(n)$ طبعی عدد n کے لیے ایک بیان (Statement) ہے۔ اگر (i) $P(1)$ درست ہو اور (ii) $P(n)$ درست ہے $\Rightarrow P(n+1)$ درست ہے، تب $P(n)$ ہر کسی $n \in \mathbb{N}$ کے لیے درست ہے۔

تعریف: فرض کرو کہ A حقیقی اعداد کا ایک غیر خالی تحت سٹ ہے۔ کسی حقیقی عدد a کو A کا کم ترین عنصر (Least Element) کہا جاتا ہے اگر کسی ایک $x \in A$ کے لیے $a \leq x$ ہو۔

3.2.2 درست ترتیب کا اصول (Principle of Well Ordering)

قضیہ: طبعی اعداد کے سٹ $\mathbb{N}$ کے کسی بھی غیر خالی تحت سٹ میں ایک کم ترین عنصر وجود رکھتا ہے۔

ثبوت: فرض کرو کہ $A \subseteq \mathbb{N}$ اور $A \neq \phi$۔ ہم مان لیتے ہیں کہ A میں کوئی بھی کم ترین عنصر موجود نہیں ہے۔ ایک سٹ B کو $B = \{n \in \mathbb{N}: m \in \mathbb{N}, m \leq n \Rightarrow m \notin A\}$ سے متعارف کرتے ہیں۔ اب $1 \in B$، اگر $1 \notin B$ ہو، تب $1 \in A$ ہوگا اور A کا کم ترین عنصر 1 ہوگا جو کہ ہمارے مفروضہ سے تضاد کرتا ہے کہ A میں کوئی کم ترین عنصر وجود نہیں رکھتا۔ فرض کرو کہ $n \in B$، تب $m \in \mathbb{N}, m \leq n \Rightarrow m \notin A$ ہوگا۔ ہم دعویٰ کرتے ہیں کہ $n + 1 \in B$، اگر $n + 1 \notin B$ ہو، تب ایک عدد m اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $m \in \mathbb{N}, m \leq n + 1$ اور $m \in A$ ہو۔ اگر اب یہ پیروی کرتا ہے کہ $m = n + 1$ اور $n + 1 \in A$ کیوں کہ اگر $m \leq n + 1$، تب $m \leq n$ اور $m \notin A$ جو کہ ایک تضاد ہے۔

چوں کہ ہمارے مفروضہ سے کہ A میں کوئی کم ترین عنصر وجود نہیں رکھتا، تب ایک عدد $p \in A$ وجود رکھتا ہے اس طرح سے کہ $p < n + 1$ ہے۔ اگر $n < p < n + 1$ ہو، تب $p \notin \mathbb{N}$ ہوگا۔ اس لیے $p \leq n$، لیکن $p \in \mathbb{N}$، $p \leq n \Rightarrow p \notin A$ جو کہ حقائق $p \in A$ سے متصادم ہے۔ اس لیے $n \in B \Rightarrow n + 1 \in B$ اور $B = \mathbb{N}$ ہے۔ تب B کی تعریف سے $m \notin A \Rightarrow A = \phi$

اس طرح مفروضہ کہ A میں کوئی کم ترین عدد وجود نہیں رکھتا غلط ہوا۔ اس لیے A میں ایک کم ترین عدد وجود رکھتا ہے۔

آپ پہلی اکائی میں دی گئیں درجہ ذیل تعریفات کو یاد کیجیے:

تعریف: سٹ $\mathbb{R} = \{x: x \in \mathbb{R}, x = 0, x \in \mathbb{N}, \text{یا} - x \in \mathbb{N}\}$ کو صحیح اعداد کا سٹ $\mathbb{Z}$ کہتے ہیں۔

اگر $x \in \mathbb{N}$ ہو، اور x ایک مثبت صحیح عدد ہو اور اگر $-x \in \mathbb{N}$ تب x ایک منفی صحیح عدد کہلاتا ہے۔ عدد 0 (صفر) کو غیر منفی غیر مثبت صحیح عدد مانا جاتا ہے۔ سٹ $\mathbb{N} \cup \{0\}$ منفی صحیح اعداد کا سٹ ہے۔

تعریف: سٹ $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}: m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$ کو ناطق اعداد (Rational Numbers) کا سٹ $\mathbb{Q}$ کہتے ہیں۔ مساوی طور پر $\mathbb{Q} = \{x: x \in \mathbb{R} \;\&\; \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } nx \in \mathbb{N}\}$ ہوتا ہے۔ ایسا حقیقی عدد جو ناطق عدد نہ ہو، غیر ناطق عدد کہلاتا ہے۔

3.2.3 $\mathbb{Q}$ کے لیے آرکمیڈی خاصیت (Archimedean Property for $\mathbb{Q}$)

قضیہ: اگر $x, y \in \mathbb{Q}$ اور $x > 0$، تب ایک عدد $n \in \mathbb{N}$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $nx > y$ ہو۔

ثبوت: اگر $x > y$ ہو تو $n = 1$ ہوگا۔ اگر $x = y$ ہو تو $n = 2$ ہوگا۔ فرض کرو کہ $0 < x < y$ ہے، $x = \frac{p}{q}$ اور $y = \frac{r}{s}$ لے کر ہمیں $nps \geq n > rq$ حاصل ہوتا ہے اور $\frac{nps}{qs} > \frac{rq}{qs}$ یا $n\left(\frac{p}{q}\right) > \frac{r}{s}$ جس سے ہم حاصل کرتے ہیں $nx > y$، جہاں $p, q, r, s \in \mathbb{N}$ اور $n = rq + 1$

3.3 کاملیت موضوع(Completeness Axiom)

اوپر سے بستہ حقیقی اعداد کے مجموعہ کی اقل ترین بالائی حد(Least Upper Bound) ہوتی ہے۔ اس طرح حقیقی اعداد کے نظام کو قطعی طور پر کامل ترتیبی میدان(Complete Ordered Field) کی طرح بیان کیا جاسکتا ہے۔

3.3.1 آرکمیڈی اصول(Archimedean Principle)

اگر b اور c حقیقی اعداد ہیں اور اگر $c > 0$، تب ایک طبعی عدد n اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $nc > b$

ثبوت: فرض کرو کہ $c > 0$ اور $nc \leq b$ کے ساتھ ہر ایک $n \in \mathbb{N}$ کے لیے دو حقیقی اعداد b اور c وجود رکھتے ہیں، تب b مجموعہ $A = \{x: x = nc, n \in \mathbb{N}\}$ کی بالائی حد ہوگی۔ کاملیت کے موضوع سے ایک حقیقی عدد وجود رکھتا ہے اس طرح سے کہ $a = l.u.b.A$ ہو۔ اب چوں کہ $a - c < a$ اور $a - c$، A کی بالائی حد نہیں ہے۔ اس لیے $nc \in A$ اس طرح سے کہ $nc > a - c$ ہوگا۔ لیکن اس کا مطلب یہ ہے کہ $(n + 1)c > a$ ہوگا۔ چوں کہ $(n + 1)c > a$ سٹ A کا ایک عنصر ہے جو ہمارے مفروضہ (a مجموعہ A کی بالائی حد ہے) سے تضاد کرتا ہے۔

تبصرہ(Remark): اوپر دیے گئے قضیے میں $c = 1$ درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ ہر ایک حقیقی عدد b کے لیے ایک مثبت صحیح عدد n اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $n > b$ ہے۔ اسی طرح ہر ایک حقیقی عدد b کے لیے ایک صحیح عدد m اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $m < b$ ہے۔ ساتھ ہی ہر ایک حقیقی عدد b کے لیے ایک طبعی عدد n اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $b > \frac{1}{n}$ ہو۔

3.3.2 کاملیت کے لیے ڈیڈِکائنڈ کی خاصیت(Dedekind's Completeness Property)

فرض کرو کہ A اور B دو غیر خالی مجموعہ ($\mathbb{R}$ کے تحت سٹ) ہیں۔ تب تمام $a \in A$ اور $b \in B$ کے لیے مرتب جوڑے (A, B) کو کہا جاتا ہے کہ وہ ایک کٹ یا ڈیڈکائنڈ کٹ کی تشکیل کرتا ہے اگر $A \cap B = \phi$، $A \cup B = \mathbb{R}$ اور $a < b$ ہو۔ ڈیڈکائنٹ کی خاصیت کے مطابق یا تو A میں اعظم عدد موجود ہوگا یا B میں اقل عدد موجود ہوگا۔

3.4 کاملیت موضوع اور ڈیڈِکائنڈ کی خاصیت کی معادلت

(Equivalence of Completeness Axiom and Dedekind's Property)

درجہ ذیل ایک دوسرے کے معادل ہیں:

i) اگر تمام حقیقی اعداد کو دو غیر مشترک جماعتوں L اور U میں اس طرح بانٹ دیا جائے کہ ہر ایک جماعت خالی نہ ہو، ہر ایک حقیقی عدد کسی ایک جماعت سے ہو اور L کا ہر ایک عدد U کے ہر ایک عدد سے چھوٹا ہو، تب یا تو L میں اعظم ترین عدد موجود ہوگا یا U میں ایک اقل ترین عدد وجود رکھتا ہوگا۔

ii) $\mathbb{R}$ کے ہر ایک غیر خالی اوپر سے بستہ تحت سٹ میں ایک اقل ترین بالائی حد وجود رکھتی ہے۔

ثبوت۔ سب سے پہلے ہم یہ ثابت کریں گے کہ حقیقی اعداد کے لیے کاملیت موضوع ڈیڈِ کائنڈ کی خاصیت کو ضاہر کرتا ہے۔ اس کے لیے فرض کرو کہ $\mathbb{R}$ کے ہر ایک غیر خالی اوپر سے بستہ تحت سٹ میں ایک اقل ترین بالائی حد وجود رکھتی ہے۔ مان لیجیے کہ L اور U حقیقی اعداد کے سٹ $\mathbb{R}$ کے دو غیر خالی تحت سٹ ہیں اس طرح سے کہ $L \cup U = \mathbb{R}$ اور $x \in L, y \in U \Rightarrow x < y$ ہو۔ ہمیں یہ ثابت کرنے کی ضرورت ہے کہ یا تو L میں سب سے بڑا (اعظم ترین) عدد وجود رکھتا ہے یا U میں سب سے چھوٹا (ادنیٰ ترین) عدد موجود ہے۔ چوں کہ L کا ہر ایک رکن U کے ہر ایک رکن سے کم تر ہے تب L اوپر سے بستہ ہوگا۔ اگر L میں سب سے بڑا عدد موجود ہے تو ہمیں کچھ بھی ثابت کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔ اگر L میں سب سے بڑا عدد موجود نہ ہو تو اس کے بالائی حدوں کا سٹ U ہوگا اور حقیقی اعداد کے لیے کاملیت موضوع سے U میں سب سے چھوٹا عدد وجود رکھتا ہے۔ اس لیے یا تو L میں سب سے بڑا عدد وجود رکھتا ہے یا U میں سب سے چھوٹا عدد موجود ہے۔

اس کے بالعکس، فرض کرو کہ ڈیڈِ کائنڈ کی خاصیت درست ہے۔ مان لیجیے کہ S حقیقی اعداد کا اوپر سے بستہ ایک سٹ ہے۔

اب ہم L اور U کی تعریف اس طرح کرتے ہیں کہ

$L = \{x \in \mathbb{R}:$ S کی x بالا حد ہے نہیں$\}$ اور $U = \{x \in \mathbb{R}:$ S کی x بالا حد ہے$\}$ ہیں۔

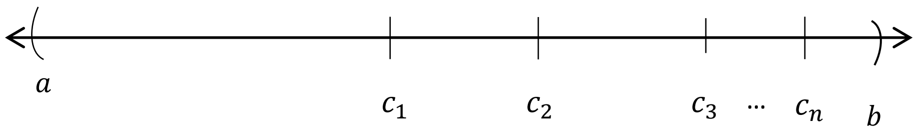
ظاہر ہے کہ $L \neq \phi, U \neq \phi$، $L \cup U = \mathbb{R}$ اور $x \in L, y \in U \Rightarrow x < y$ ہوگا، تب ڈیڈ کائنٹ کی خاصیت کے مطابق یا تو L میں اعظم عدد موجود ہوگا یا U میں اقل عدد موجود ہوگا۔

اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ L میں اعظم عدد موجود ہے اور مان لیجیے کہ وہ α ہے۔ تب $\alpha \in L \Rightarrow \alpha \notin U$ ہوگا اس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ S کی α حد بالا نہیں ہے۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ ایک عنصر $a \in S$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $\alpha < a$ ہو۔ مان لو کہ $\frac{\alpha+a}{2}$ حقیقی عدد ہے، تب $\alpha < \frac{\alpha+a}{2} < a$ ہوگا۔

چوں کہ $\frac{\alpha+a}{2} > \alpha \in L, \frac{\alpha+a}{2} \in U$ ہوگا۔ اس طرح $\frac{\alpha+a}{2}$ سٹ S کی حد بالا نہیں ہے۔ لیکن $\frac{\alpha+a}{2} < a$ ہے، اس لیے $\frac{\alpha+a}{2} \in L$ ہے۔ جو کہ تضاد ہے۔ اس لیے L میں اعظم عدد نہیں ہے۔ اس لیے U میں اقل عدد موجود ہے اور اس لیے میں ایک اقل ترین بالائی حد وجود رکھتی ہے۔

3.4.1 $\mathbb{R}$ میں ناطق یا غیر ناطق اعداد کی کثافت (Density of Rational or Irrational Numbers in $\mathbb{R}$)

فرض کرو کہ $a, b \in \mathbb{Q}$ اور $a < b$ ہے، تب $\frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$ ہوگا۔ مان لیجیے کہ $\frac{a+b}{2} = c_1 \in (a,b)$ ہے۔ c_1 اور b کا اوسط (c_1, b) کا بیچ کا نقطہ $\frac{c_1+b}{2} \in \mathbb{Q}$ ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ یہ c_2 ہے۔ اب فرض کرو کہ $c_n \in \mathbb{Q} \cap (a,b)$، تب c_n اور b کا اوسط (c_n, b) کا بیچ کا نقطہ $c_{n+1} = \frac{c_n+b}{2} \in \mathbb{Q} \cap (a,b)$ ہوگا۔ اس لیے ریاضیاتی استقرا کے اصول سے ناطق اعداد a اور b کے بیچ $n \in \mathbb{N}$ کے لیے لامتناہی ناطق اعداد c_n وجود رکھتے ہیں۔



اس لیے ہم حاصل کرتے ہیں کہ کسی دو ناطق اعداد کے بیچ لا متناہی ناطق اعداد وجود رکھتے ہیں۔ حقیقتاً کسی دو حقیقی اعداد کے بیچ لا متناہی ناطق اعداد ہوتے ہیں۔ اس کو $\mathbb{R}$ میں $\mathbb{Q}$ کی کثافت ($\mathbb{Q}^c$) کہتے ہیں۔

3.5 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے دیکھا کہ $\mathbb{R}$ کے کسی دو کھلے وقفوں کے درمیان ایک ایک مطابقت ہوتی ہے۔ یعنی کسی کھلے وقفہ کی لمبائی اس میں موجود نقاط کی تعداد (جسے کارڈینلیٹی (Cardinality) کہتے ہیں) پر بے اثر ہوتی ہے۔

اس اکائی میں ہم نے کاملیت موضوع کی تعریف کی ہے جس کے مطابق حقیقی اعداد کے اوپر سے بستہ کسی غیر خالی تحت سٹ میں ایک اقل ترین بالائی حد وجود رکھتی ہے۔ اس کو آر کمیڈی اصول کہتے ہیں۔ ہم نے $\mathbb{R}$ کے ڈیڈکائنٹ کٹ کے بارے میں بھی پڑھا جس کے مطابق اگر $\mathbb{R}$ کو دو برابر وقفوں L اور U میں اس طرح تقسیم کیا جائے کہ L کا ہر نقطہ U کے ہر نقطہ سے چھوٹا ہو تو L میں ایک اقل ترین بالائی حد ہو گی یا U میں ایک سب سے چھوٹا عنصر ہو گا۔ حقیقتاً ہم نے ثابت کیا کہ $\mathbb{R}$ کی یہ ڈیڈکائنڈ کٹ خاصیت اور آر کیمڈی اصول معادل ہوتے ہیں۔ ساتھ ہی ہم نے ریاضیاتی استقرا کے اصول کو بھی سمجھا۔ نیز ہم نے طبعی اعداد کے لیے درست ترتیب کا اصول ثابت کیا۔ بالآخر ہم نے حاصل کیا کہ حقیقی اعداد کا سٹ ایک کامل مرتب میدان ہوتا ہے۔

3.6 کلیدی الفاظ (Keywords)

ایک ایک مطابقت، مجموعہ، کاملیت، آر کمیڈی خاصیت، ڈیڈکائنڈ کٹ، ریاضیاتی استقرا کا اصول، درست ترتیب کا اصول

3.7 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

3.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. $x \in \mathbb{R}$ کے لیے x سے چھوٹا یا برابر صحیح اعداد (Integer) ہے۔

(a) $[x]$ (b) $[x-1]$ (c) $[x]+1$ (d) $[x+1]$

جہاں $[x]$، x کا Integral حصہ ہے۔

2. اگر $x, y \in \mathbb{Q}$ ہو تو $x < y$ کے ساتھ تب ان کے درمیان ناطق اعداد ہے

(a) x (b) y (c) $\frac{x+y}{2}$ (d) xy

3. اگر $D = |\mathbb{Q}^c| - |\mathbb{Q}|$ ہے، جہاں $|\mathbb{Q}|$ سٹ $\mathbb{Q}$ میں عناصر کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔ تب

(a) $D > 0$ (b) $D = 0$ (c) $D < 0$ (d) $D \le 0$

4. $L = (-\infty, 1)$ اور $R = [1, \infty)$ ایک ڈیڈکائنڈ کٹ ہے۔ L کی اقل ترین بالائی حد ہے

(a) $-\infty$ (b) 1 (c) ∞ (d) 0

5. من درجہ بالا سوال میں L کا ہر ایک عنصر R کا زیریں حد (Lower Bound) ہوتا ہے۔ (T/F)

6. من درجہ بالا سوال (4) میں R کا ہر ایک عنصر L کی بالائی حد (Upper Bound) ہوتی ہے۔ (T/F)

7. من درجہ بالا سوال (4) میں R اور L کا تقاطع غیر خالی ہوتا ہے۔ (T/F)

8. من درجہ بالا سوال (4) میں R اور L کا اجماع $\mathbb{R}$ ہوتا ہے۔ (T/F)

9. کھلے وقفوں $(0,1)$ اور $(3,5)$ میں ـــــــــ مطابقت ہوتی ہے۔

10. کسی دو ناطق اعداد کے درمیان ـــــــ ناطق اعداد وجود رکھتے ہیں۔ (صرف تناہی/لا تناہی)

11. کسی دو ناطق اعداد کے درمیان ـــــــ غیر ناطق اعداد وجود رکھتے ہیں۔ (صرف تناہی/لا تناہی)

12. کسی دو حقیقی اعداد کے درمیان ـــــــ ناطق اعداد وجود رکھتے ہیں۔ (صرف تناہی/لا تناہی)

13. درجہ ذیل کا ملاپ کریں:

I.	غیر مثبت اور غیر منفی صحیح عدد ہے۔	a.	ϕ
II.	$\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}^c$	b.	$\mathbb{R}$
III.	$\mathcal{Q} \cup \mathcal{Q}^c$	c.	ایک ایک مطابقت
IV.	$(-3,-1)$ اور $\mathbb{R}$ ہیں	d.	0
V.	$(-10,-9)$ اور $(-8,-6)$ میں نقاط کی تعداد ہے۔	e.	مساوی ہیں
		f.	ایک ایک مطابقت

3.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. دکھایئے کہ کسی دو کھلے وقفوں میں ایک ایک مطابقت ہوتی ہے۔
2. کاملیت موضوع اور آرکمڈی اصول کو بیان کیجیے؟ بعد والے کو ناطق اعداد کے لیے ثابت کیجیے۔
3. آرکمڈی اصول کو حقیقی اعداد کے لیے بیان اور ثابت کرو۔
4. ریاضیاتی استقرا کے اصول کو بیان کیجیے اور $n \in \mathbb{N}$ کے لیے دکھایئے کہ

$$1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$$

3.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. درست ترتیب کے اصول کو بیان اور ثابت کرو۔
2. ثابت کرو کہ کاملیت موضوع اور ڈیڈ کائنڈ کی خاصیت معادل ہوتی ہیں۔

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی
MAULANA AZAD NATIONAL URDU UNIVERSITY Estd. 1998

3. ریاضیاتی استقرا کے اصول سے $n \in \mathbb{N}$ کے لیے ثابت کرو $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ اور $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ ہوتا ہے۔

3.8 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Introduction to Real Analysis, Donald R. Sherbert Robert G. Bartle 4th Edition , 2014
2. Elements Of Real Anyalsis, Narayan Shanti and Raisinghania M.D., 2003
3. Real Analysis, Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick, 4th Edition, 2017
4. Real Analysis, J.N. Sharma and A.R. Vasishtha, 2014
5. Real Analysis, V. Karunakaran, 2011
6. Real Analysis, N.L. Carothers, 2006
7. Basic Real Analysis, Houshang H. Sohrab, 2nd Edition, 2014

اکائی 4۔ بولزانو وائرسٹراس قضیہ

(Bolzano Weierstrass Theorem)

اکائی کے اجزا

4.0 تمہید (Introduction)

دوسری اکائی میں ہم نے بند سٹ کے تصور کے بارے میں پڑھا۔ کوئی سٹ بند سٹ ہوتا ہے اگر اور صرف اگر اس کا تتمہ (Complement) کھلا سٹ ہو اور کوئی سٹ کھلا سٹ ہوتا ہے اگر اور صرف اگر اس کے نقاط کا ہر ایک نقطہ اندرونی نقطہ (Interior Point) ہو۔ کسی سٹ A کے لیے $x \in \mathbb{R}$ ایک اندرونی نقطہ ہوتا ہے اگر $\epsilon > 0$ کے لیے x کی ہم سائگی (Neighbourhood) $N_\epsilon(x) = (x - \epsilon, x + \epsilon)$ اس طرح وجود رکھتی ہو کہ $N_\epsilon(x) \le A$ ہو۔ اس اکائی میں ہم کسی سٹ کے انتہائی نقطہ (Limit Point) کے تصور کو پیش کریں گے اور یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ کوئی سٹ بند سٹ کہلاتا ہے اگر اور صرف اگر اس میں اس کے تمام انتہائی نقاط موجود ہوں۔

4.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مطالعے کے بعد آپ اس قابل ہوں گے کہ :

- $\mathbb{R}$ کے تحت سٹ کے انتہائی نقطہ کے تصور کو سمجھ سکیں۔
- $\mathbb{R}$ کے تحت سٹ کے تنہا نقطہ کے تصور کو سمجھ سکیں۔
- $\mathbb{R}$ کے تحت سٹ کے نزدیکی اور اس کے انتہائی نقطہ کے تصور کو سمجھ سکیں۔
- بولزانو وائر سٹرا س کی خاصیت کو سمجھ سکیں۔

4.2 کسی سٹ کا انتہائی نقطہ (Limit Point of a Set)

تعریف (Definition): نقطہ $a \in \mathbb{R}$ کسی مجموعہ A کا انتہائی نقطہ کہا جاتا ہے اگر خود a کے علاوہ a کی ہر ایک ہم سائگی میں A کا ایک نقطہ وجود رکھتا ہو۔ مساوی طور پر، حقیقی عدد a سٹ $A \subseteq \mathbb{R}$ کا انتہائی نقطہ ہوتا ہے اگر a کی ہر ایک ہم سائگی میں A کے لا محدود ارکان وجود رکھتے ہوں۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ a کی ہر ایک ہم سائگی N کے لیے سٹ $N \cap A$ ایک لا محدود سٹ ہے۔ کچھ مصنفین انتہائی نقطہ کے لیے مجتمع نقطہ (Accumulation Point)، مکثف نقطہ (Condensation Point)، یا اژدھامی نقطہ (Cluster Point) کا استعمال کرتے ہیں۔

تبصرہ (Remark): کسی مجموعہ کا انتہائی نقطہ سٹ کا ایک رکن ہو بھی سکتا ہے اور نہیں بھی۔ متناہی سٹ میں انتہائی نقطہ نہیں ہوتا ہے۔ کسی لا متناہی سٹ میں یکتا انتہائی نقطہ ہو سکتا ہے یا بہت سارے انتہائی نقطے ہو سکتے ہیں یا کوئی بھی انتہائی نقطہ وجود نہیں رکھتا ہے۔

ماخوذ سٹ (Derived Set): کسی مجموعہ A کے تمام انتہائی نقاط کا سٹ A کا ماخوذ سٹ کہلاتا ہے۔ اس کو A' سے ظاہر کرتے ہیں۔ ریاضیاتی طور پر

$$A' = \left\{x \in \mathbb{R} : \text{کا انتہائی نقطہ ہے } x \; A\right\}$$

1. خالی سٹ، متناہی سٹ اور صحیح اعداد کا سٹ $\mathbb{Z}$ کا کوئی انتہائی نقطہ نہیں ہوتا۔
2. سٹ $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ کا صرف ایک انتہائی نقطہ '0' ہوتا ہے۔ یہ سٹ کا رکن نہیں ہے۔ سٹ کا کوئی بھی نقطہ سٹ کا انتہائی نقطہ نہیں ہے۔

3. $\mathbb{R}$ کا ہر ایک نقطہ ایک انتہائی نقطہ ہوتا ہے کیوں کہ اس کے ہر ایک نقطہ کی ہر ہم سائگی میں سٹ کے ارکان کی تعداد لا محدود ہوتی ہے۔اس لیے $\mathbb{R}' = \mathbb{R}$

4. ناطق اعداد کے سٹ $\mathbb{Q}$ کا ہر ایک حقیقی عدد $\mathbb{Q}$ کا انتہائی نقطہ ہوتا ہے یعنی $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ ہوتا ہے۔اس کی تصدیق کے لیے ہم کسی دو ناطق عدد کا تصور کرتے ہیں جن کے درمیان لا محدود تعداد میں ناطق عدد وجود رکھتے ہیں۔ لیکن کسی دو غیر ناطق اعداد کے درمیان بھی لا محدود تعداد میں ناطق اعداد موجود ہوتے ہیں۔اس لیے ہر ایک غیر ناطق عدد $\mathbb{Q}$ کا انتہائی نقطہ ہوتا ہے اور ہر ایک حقیقی عدد $\mathbb{Q}$ کا انتہائی نقطہ ہوتا ہے۔

اب آپ درجہ ذیل حل شدہ سوال پر غور کریں:

مثال 1۔ $[a,b]$ اور (a,b) کے ماخوذ سٹس کیا ہیں؟

حل۔ $[a,b]' = [a,b]$ اور $(a,b)' = [a,b]$

قضیہ 1۔ کوئی مجموعہ A بند ہوتا ہے اگر اور صرف اگر ماخوذ سٹ A'، مجموعہ A کا تحت سٹ ہو۔

ثبوت۔ فرض کرو کہ A ایک بند مجموعہ ہے۔اگر $A' = \phi$ تب قضیہ خود بہ خود درست ہے۔اگر $A' \neq \phi$ ہو تب فرض کرو کہ $\alpha \in A'$ اب ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $\alpha \in A$ ہے۔اس کو ثابت کرنے کے لیے مان لیجیے کہ اگر $\alpha \notin A$ ممکن ہے۔تب $\alpha \in \mathbb{R} \setminus A$ جو ایک کھلا سٹ ہے۔ اس سے ایک $\epsilon > 0$ اس طرح سے وجود رکھتا ہے کہ $N(\epsilon,\alpha) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$ ہو۔اس کا مطلب یہ ہوا کہ $N(\epsilon,\alpha) \cap A = \phi$ ہے اور جس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ α، A کا انتہائی نقطہ نہیں ہے۔اس لیے ہمارا مفروضہ $\alpha \notin A$ غلط ثابت ہوا۔اس لیے

$\alpha \in A' \Rightarrow \alpha \in A$ یا $A' \subseteq A$ ہے۔

اس کے بالعکس، فرض کرو کہ $A' \subseteq A$ ہے۔ یہ ثابت کرنے کے لیے کہ $\mathbb{R} \setminus A$ کھلا سٹ ہے ہم مان لیتے ہیں کہ $\alpha \in \mathbb{R} \setminus A$ ہے۔اس سے $\alpha \notin A$ حاصل ہوتا ہے۔ لیکن $A' \subseteq A \Rightarrow \alpha \notin A'$ ہے۔اس لیے ایک $\epsilon > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $N(\epsilon,\alpha) \cap A \setminus \{\alpha\} = \phi$ ہے۔لیکن $\alpha \notin A$ ہے۔اس لیے

$$N(\epsilon,\alpha) \cap A = \phi \Rightarrow N(\epsilon,\alpha) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$$

اس لیے $\mathbb{R} \setminus A$ کھلا ہے یا A بند ہے۔

تعریف: فرض کرو کہ A کوئی مجموعہ ہے۔A اور A' کے اجماع کو A کی بندش (Closure) کہتے ہیں۔A کی بندش کو علامت $\bar{A}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔اس لیے

$$\bar{A} = A \cup A'$$

اگر A بند سٹ ہے تب $A' \subseteq A$ ہوتا ہے اور اس صورت میں $\bar{A} = A$ ہے۔ مساوی طور پر اگر $\bar{A} = A$ ہو تو مجموعہ A کو بند سٹ کہتے ہیں۔

تبصرہ: من درجہ بالا قضیہ 1 کو ثابت کرنے سے پہلے ہم نے بتایا کہ کوئی سٹ A بند سٹ ہوتا ہے اگر اور صرف اگر اس کا تتمہ (Complement) کھلا سٹ ہو۔ دوسری تعریف میں کوئی سٹ A بند ہوتا ہے اگر اور صرف اگر $\bar{A} = A$ ہو۔ من درجہ بالا قضیہ بند سٹ کی انہی دو تعریفات کو جوڑتی ہے اور دکھاتی ہے کہ یہ تعریفات معادل ہیں۔

4.3 تنہا نقطہ (Isolated Point)

تعریف: فرض کرو کہ $\mathbb{R}$ میں کوئی مجموعہ A ہے۔ ایک حقیقی عدد x_0 کو A کا ایک تنہا نقطہ کہا جاتا ہے اگر x_0 کا ایک ایسا ہمسایہ وجود رکھتا ہو جس کا A سے تقاطع $\{x_0\}$ ہو۔

مثالیں:

1. ہر ایک صحیح عدد صحیح اعداد کے سٹ $\mathbb{Z}$ کا ایک تنہا نقطہ ہوتا ہے۔
2. اگر O طاق صحیح اعداد کے سٹ کو ظاہر کرتا ہو تو ہر ایک طاق صحیح عدد O کا ایک تنہا نقطہ ہوتا ہے۔
3. ہر ایک طبعی عدد، سٹ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ کا ایک تنہا نقطہ ہوتا ہے۔
4. سٹ $B = \{0\} \cup [1, 2]$ کے لیے '0' ایک تنہا نقطہ اس لیے ہے کیوں کہ '0' کا ایک ہمسایہ $\left(0 - \frac{1}{2}, 0 + \frac{1}{2}\right)$ ہے۔ ساتھ ہی ہمسایہ اور سٹ B میں صرف ایک ہی مشترکہ نقطہ ہے اور وہ '0' ہے۔

4.4 بولزانو وائر سٹر اس قضیہ (Bolzano Weierstrass Theorem)

بیان: ہر بستہ لا متناہی مجموعہ میں ایک انتہائی نقطہ ہوتا ہے۔

ثبوت۔ فرض کرو کہ A کوئی بستہ لا متناہی مجموعہ ہے۔ مان لیجیے کہ a زیریں حد اور b بالائی حد ہے۔ اب ہم فرض کرتے ہیں کہ سٹ

$S = \{x \in \mathbb{R}:$ $(-\infty, x) \cap A$ بڑی حد پر متناہی ہے $\}$

میں ایک انتہائی نقطہ ہوتا ہے۔ چوں کہ A کی ایک زیریں حد a ہے۔ تب سٹ $(-\infty, x) \cap A$ خالی ہو گا۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ $a \in S$ ہے اور S ایک مجموعہ ہے، $x > b \Rightarrow A = (-\infty, x) \cap A$ ایک لا متناہی سٹ ہے اور $x \notin S$ ہے۔ اس لیے $x \in S \Rightarrow x \leq b$ اور S کی ایک بالائی حد b ہے۔ اس لیے S کی اقل ترین بالائی حد وجود رکھتی ہے۔ فرض کرو کہ S کی اقل ترین بالائی حد c ہے۔ تب $\epsilon > 0$ کے لیے $x \in S$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $c - \epsilon < x \leq c$ ہے۔ تب $(-\infty, c - \epsilon) \cap A \subseteq (-\infty, x) \cap A$

لیکن $(-\infty, x) \cap A$ بڑی حد پر متناہی ہے چوں کہ $x \in S$ ہے۔ اس لیے $(-\infty, c - \epsilon) \cap A$ بڑی حد پر متناہی ہے۔ ساتھ ہی S کی اقل ترین بالائی حد c ہے۔ جس کا مطلب یہ ہوا کہ $c + \epsilon \notin S$ ہے۔ اس لیے $(-\infty, c + \epsilon) \cap A$ لا متناہی ہے۔

اب $(c - \epsilon, c + \epsilon) \cap A \subseteq (-\infty, c + \epsilon) \cap A$ ہر ایک $\epsilon > 0$ کے لیے ایک لا متناہی سٹ ہے۔

اس طرح A کا انتہائی نقطہ c ہے۔

تبصرہ 1۔ اگر $T = \{x \in \mathbb{R}:$ $(x, \infty) \cap A$ بڑی حد پر متناہی ہے $\}$ ہو، تب یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ T نیچے سے بستہ سٹ ہے اور T کی اعظم ترین زیریں حد (g.l.b.) A کا انتہائی نقطہ ہوتا ہے۔

تبصرہ 2۔ بولزانو وائر سٹر اس قضیہ میں بیان کی گئیں شرائط صرف کافی (Sufficient) شرائط ہیں۔ کوئی سٹ غیر بستہ ہو سکتا ہے لیکن تب بھی اس میں انتہائی نقطہ ہو سکتا ہے۔ مثال کے لیے $\mathbb{R}$ اور $\mathbb{Q}$ غیر بستہ سٹ ہیں اور ان کے لا متناہی طور پر بہت سارے انتہائی نقاط ہوتے ہیں۔

قضیہ 1۔ کسی بستہ لا متناہی مجموعہ میں اقل ترین اور اعظم ترین انتہائی نقاط ہوتے ہیں۔

ثبوت۔ فرض کرو کہ A کوئی بستہ لا متناہی مجموعہ ہے۔ اب S کی تعریف درجہ ذیل کے طریقہ سے کی گئی ہے

$$S = \{x \in \mathbb{R}: \text{بڑی حد پر متناہی ہے} \ (-\infty, x) \cap A\}$$

فرض کرو کہ S کی اقل ترین بالائی حد c ہے۔ تب A کا انتہائی نقطہ c ہے اور $c \in A'$، جہاں A کا ماخوذ سٹ A' (Derived Set) ہے۔ اگر $x < c$ ہو تب یہ ممکن ہے کہ $y \in S$ کو اس طرح منتخب کیا جائے کہ $x < y \leq c$ ہو۔

اب $y \in S \Rightarrow (-\infty, y) \cap A$ بڑی حد پر متناہی سٹ ہے، تب ہم $\epsilon > 0$ کو اس طرح منتخب کر سکتے ہیں کہ $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq (-\infty, y)$ ہو۔ تب $\mathrm{N}(\epsilon, x) \cap A = (x - \epsilon, x + \epsilon) \cap A \subseteq (-\infty, y) \cap A$ جو کہ بڑی حد پر متناہی سٹ ہے۔ اس لیے $\mathrm{N}(\epsilon, x) \cap A$ ایک متناہی سٹ ہے۔ اس طرح $x < c$، A کا انتہائی نقطہ نہیں ہے۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ $x \notin A'$ اور اس لیے A' کا کم ترین رکن c ہے۔ اس طرح یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ سٹ

$\{x \in \mathbb{R}: \text{بڑی حد پر متناہی ہے} \ (x, \infty) \cap A\}$ کی اعظم ترین زیریں حد d ہے۔ تب A' کا اعظم ترین رکن d ہے۔

تعریف: کسی سٹ A کے تمام اندرونی نقاط کا سٹ A کا اندرون (Interior) کہلاتا ہے اس کو علامت $I(A)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

اس کے متعلق درجہ ذیل سوال پوچھا جا سکتا ہے:

مثال 1۔ $\mathbb{Q}$ کا اندرون (Interior) اور $\mathbb{Q}$ کی بندش (Closure) کیا ہیں؟

حل۔ $\mathbb{Q}$ کا اندرون $I(\mathbb{Q}) = \phi$ ہوگا کیوں کہ $I(\mathbb{Q})$ میں ایسا کوئی حقیقی عدد وجود نہیں رکھتا جو کہ $\mathbb{Q}$ کا اندرون ہو۔

$\mathbb{Q}$ کی بندش $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup D(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ ہوگا کیوں کہ $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c D(\mathbb{Q}) =$ ہوتا ہے۔ ہر حقیقی عدد چاہے ناطق عدد ہو یا غیر ناطق $\mathbb{Q}$ کا انتہائی نقطہ ہوتا ہے۔

مثال 2۔ دکھائیے کہ کسی سٹ A کا اندرون ایک کھلا سٹ ہوتا ہے اور A کا سب سے بڑا کھلا تحت سٹ ہوتا ہے۔

حل۔ فرض کرو کہ A ایک سٹ ہے۔ مان لیجیے کہ A کے اندرون کو $I(A)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ یعنی سٹ A کے تمام اندرونی نقاط کا سٹ $I(A)$ ہوتا ہے۔ اگر $I(A) = \phi$ ہو تو $I(A)$ کھلا سٹ ہوگا کیوں کہ ϕ ایک کھلا سٹ ہے۔ اگر $I(A) \neq \phi$ ہو تو فرض کرو کہ $x \in I(A)$ ہے۔ چوں کہ A کا اندرونی نقطہ x ہے اس لیے ایک کھلا وقفہ I_x اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $x \in I_x \subseteq A$ ہے۔ لیکن I_x ایک کھلا وقفہ ہونے کی وجہ سے اس کے ہر ایک نقطہ کی ہمسا گی ہے۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ I_x کا ہر ایک نقطہ I_x کا اندرونی نقطہ ہوتا ہے۔ لیکن I_x کا اندرونی نقطہ I_x ہے۔ لیکن $I_x \subseteq A$ ہے۔ اس لیے I_x کا ہر ایک نقطہ A کا اندرونی نقطہ ہوتا ہے۔ اس لیے $x \in I_x \subseteq I(A)$ ہے۔ جس کا مطلب یہ ہوا کہ $I(A)$ ایک کھلا سٹ ہے۔

یہ ثابت کرنے کے لیے کہ $I(A)$ سب سے بڑا کھلا تحت سٹ ہے یہ ثابت کرنا ضروری ہے کہ $I(A)$ میں A کا ہر کھلا تحت سٹ وجود رکھتا ہے۔ فرض کرو کہ A کا کھلا تحت سٹ A_1 ہے۔ مان لیجیے کہ $x \in A_1$ ہے۔ چوں کہ کوئی بھی کھلا سٹ اس کے ہر ایک نقطہ کی ہمسا گی ہے اس لیے x کی ہمسا گی A_1 ہے۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ A کا اندرونی نقطہ x ہے یا $x \in I(A)$ ہے۔ اس لیے $x \in A_1 \Rightarrow x \in I(A)$ ہے اور اس لیے

$A_1 \subseteq I(A)$ ہے۔ چوں کہ A کا ہر کھلا تحت سٹ $I(A)$ میں موجود ہے۔ تب A کا $I(A)$ سب سے بڑا کھلا تحت سٹ ہے۔

مثال 3۔ فرض کرو کہ S اور T مجموعے ہیں اور S اور T کے ماخوذ سٹ S' اور T' سے ظاہر کیے گئے ہیں۔ تب

i) $S \subseteq T \Rightarrow S' \subseteq T'$

ii) $(S \cup T)' = S' \cup T'$

iii) $(S \cap T)' \subseteq S' \cap T'$

حل۔ i) اگر $S' = \phi$ اور $S' \subseteq T'$ ہو۔ اگر $S' \neq \phi$ ہو تو مان لیجیے کہ $x \in S'$ ہے۔ تب S کے ارکان کی لا محدود تعداد $N(\epsilon, x)$ میں وجود رکھتی ہے۔ لیکن $S \subseteq T$ اس کا مطلب یہ ہوا کہ $N(\epsilon, x)$ میں T کے ارکان کی لا محدود تعداد ہے۔ جس کا مطلب یہ ہوا کہ T کا انتہائی نقطہ x ہے یا $x \in T'$ ہے۔ اس لیے $x \in S' \Rightarrow x \in T'$ اور اس لیے $S' \subseteq T'$ ہے۔

ii) $S \subseteq S \cup T \Rightarrow S' \subseteq (S \cup T)'$ اور (i) کے استعمال سے $T \subseteq S \cup T \Rightarrow T' \subseteq (S \cup T)'$

اس لیے $S' \cup T' \subseteq (S \cup T)'$ ہو گا۔

یہ ثابت کرنے کے لیے کہ $(S \cup T)' \subseteq S' \cup T'$ ہے، ہم پہلے اس صورت $(S \cup T)' = \phi$ پر غور کرتے ہیں۔ تب $(S \cup T)' \subseteq S' \cup T'$ ہو گا۔ اگر صورت $(S \cup T)' \neq \phi$ ہو تب فرض کرو کہ $x \in (S \cup T)'$ ہے۔ اب چوں کہ $S \cup T$ کا انتہائی نقطہ x ہے، تب $S \cup T$ کے نقاط کی لا متناہی تعداد x کے ہر ایک ہمسایہ میں موجود ہو گی۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ x کے ہر ایک ہمسایہ میں S کے یا T کے یا دونوں کے لا متناہی طور پر بہت سارے نقاط وجود رکھتے ہیں۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ S کا یا T کا ایک انتہائی نقطہ x ہے۔ یعنی $x \in S'$ یا $x \in T'$ ہے جس کا مطلب یہ ہوا کہ $x \in S' \cup T'$ ہے۔ اس لیے $x \in (S \cup T)' \Rightarrow x \in S' \cup T'$ ہوا۔ یعنی $(S \cup T)' \subseteq S' \cup T'$

اب چوں کہ $S' \cup T' \subseteq (S \cup T)'$ اور $(S \cup T)' \subseteq S' \cup T'$ ہیں۔ اس لیے نتیجہ یہ نکلا کہ $(S \cup T)' = S' \cup T'$ ہے۔

iii) چوں کہ $S \cap T \subseteq S \Rightarrow (S \cap T)' \subseteq S'$ اور $S \cap T \subseteq T \Rightarrow (S \cap T)' \subseteq T'$ اس لیے نتیجہ یہ نکلا کہ $(S \cap T)' \subseteq S' \cap T'$ یہ دیکھانے کے لیے کہشمولیت (Inclusion) واجبی ہے فرض کرو کہ $S = (1,2)$ اور $T = (2,3)$ تب $S \cap T = \phi$ اور $(S \cap T)' = \phi' = \phi$ لیکن $S' = [1,2]$ اور $T' = [2,3]$ اس طرح سے کہ $S' \cap T' = \{2\}$ اور $(S \cap T)' \subseteq S' \cap T'$ ہے۔

مثال 4۔ ثابت کیجیے کہ کسی تحت سٹ کا ماخوذ سٹ بند تحت سٹ ہوتا ہے۔

حل۔ مان لیجیے کہ $\mathbb{R}$ کے تحت سٹ A کا ماخوذ سٹ A' ہے۔ ہم نے دیکھا ہے کہ A بند سٹ کہلاتا ہے اگر اور صرف اگر $A' \subseteq A$ ہو۔ اس لیے یہ ثابت کرنے کے لیے کہ A' بند سٹ ہے ہمیں ثابت کرنا ہو گا کہ ماخوذ سٹ کا ماخوذ سٹ یعنی $(A')'$ خود A' میں موجود ہے۔ اگر $(A')' = \phi$ ہو تو $(A')' \subseteq A'$ ہو گا اور A' ایک بند سٹ ہے۔ مان لیجیے کہ $(A')' \neq \phi$ ہے۔ فرض کیجیے کہ $x \in (A')'$ ہے تب A' کا انتہائی نقطہ x ہے۔ تب x کے ہر ایک ہمسایہ میں A' کا کم سے کم ایک نقطہ $y \neq x$ ہوتا ہے۔ لیکن $y \in A'$ ہے۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ A کا انتہائی نقطہ y ہے۔ یعنی y کے ہر ایک ہمسایہ میں A کے لا متناہی طور پر بہت سارے نقاط ہیں۔ لیکن N ان میں سے ایک ہمسایہ ہے۔ تب x کے

ہر ایک ہمسایہ N میں A کے لامتناہی طور پر بہت سارے نقاط موجود ہیں۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ A کا انتہائی نقطہ x ہے۔ اس طرح $x \in (A')' \Rightarrow x \in A'$ اور اس لیے $(A')' \subseteq A'$ ہے۔اس لیے $(A')'$ ایک بند سٹ ہے۔

4.5 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

تجزیہ (Analysis) کا مطالعہ بنیادی طور پر کھلے سٹ، بند سٹ اور انتہائی نقاط کی خصوصیات کو سمجھنے پر منحصر ہے۔ کھلا وقفہ کھلے سٹ کی ایک مثال ہے اور بند وقفہ بند سٹ کی ایک مثال ہے۔ در حقیقت، $\mathbb{R}$ کے ہر کھلے سٹ کو $\mathbb{R}$ میں کھلے وقفوں کے اجماع کے طور پر نمایاں کیا جا سکتا ہے۔ بند سٹ کو کھلے سٹ کی تکمیل کے طور پر بیان کیا جاتا ہے۔ بند سٹ کا ان کی طاقت میں مطالعہ کرنا بھی ممکن ہے نہ کہ صرف کھلے سٹس کی تکمیل کے طور پر۔ اس مقصد کے لیے ہمیں انتہائی نقاط کا استعمال کرنا ہوگا۔ کھلے سٹس کا اختیاری اجماع ایک کھلا سٹ ہوتا ہے اور کھلے سٹس کا متناہی تقاطع کھلا سٹ ہوتا ہے۔ اسی طرح بند سٹس کے اختیاری مجموعہ کا تقاطع ایک بند سٹ ہوتا ہے جب کہ بند سٹس کا ایک متناہی اجماع بند سٹ ہوتا ہے۔ ہم نے حقیقی اعداد کے سٹ کے ایک انتہائی نقتہ کو اس نقطہ کے طور پر بیان کیا ہے جس کے ہر قرب میں سٹس کے ارکان کی تعداد لامحدود ہوتی ہے۔ اژدھامی نقطہ اور مجتمع نقطہ کا استعمال انتہائی نقطہ کے لیے بھی کیا جاتا ہے۔ ہم نے برنارڈ بولزانو (1781-1848) اور کارل وائرسٹراس (1815-1897) کا ایک اہم نظریہ ثابت کیا جس کے مطابق ہر بستہ لامحدود سٹ کا کم سے کم ایک انتہائی نقطہ ہوتا ہے۔

4.6 کلیدی الفاظ (Keywords)

کسی سٹ کا انتہائی نقطہ، کسی سٹ کا تنہا نقطہ، بولزانو وائرسٹراس خاصیت، اژدھامی نقطہ، مجتمع نقطہ، مکثف نقطہ، کسی سٹ کی بند شی خاصیت، کسی سٹ کی بستہ ہونا، کسی مجموعہ کا اندرون، ماخوذ سٹ

4.7 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

4.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. حقیقی اعداد کے کسی متناہی سٹ کا ماخوذ سٹ (Derived Set) ہے

(a) خود وہی سٹ (b) خالی سٹ ϕ (c) $\mathbb{Q}$ (d) $\mathbb{Q}^c$

2. سٹ $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ کا انتہائی نقطہ ________________۔

(a) وجود رکھتا ہے (b) وجود نہیں رکھتا ہے (c) 1 (d) ∞

3. سٹ $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\right\}$ کا انتہائی نقطہ ________________۔

(a) 1 (b) ∞ (c) 0 (d) کوئی نہیں

4. ناطق اعداد کے سٹ $\mathbb{Q}$ کے لیے، ہر ایک ناطق عدد ہے۔

(a) انتہائی نقطہ نہیں ہے (b) ایک نچلی حد (c) ایک بالائی حد (d) ایک انتہائی نقطہ

5. غیر ناطق اعداد کے سٹ $\mathbb{Q}^c$ کے لیے، ہر ایک غیر ناطق عدد ہے۔

(a) انتہائی نقطہ ہے (b) ایک نچلی حد (c) ایک بالائی حد (d) انتہائی نقطہ نہیں ہے

6. کھلے وقفہ (1,3) کا انتہائی نقطہ اس کے تتمے (Complement) میں ہوتا ہے۔ (T/F)

7. سٹ $\mathbb{N} \cup (1,5)$ کا ایک تنہا نقطہ 6 ہے۔ (T/F)

8. وقفہ [1,3) کا ماخوذ سٹ ایک بند وقفہ [1,3] ہوتا ہے۔ (T/F)

9. خالی سٹ کا ماخوذ سٹ غیر خالی سٹ ہوتا ہے۔ (T/F)

10. $\mathbb{R}$ کا ماخوذ سٹ $\mathbb{R}$ کا ایک واجبی تحت سٹ ہوتا ہے۔ (T/F)

11. بند وقفہ [1,4] کے انتہائی نقاط کا سٹ ____________ ہے۔

12. غیر ناطق اعداد کا سٹ ____________ نہیں ہوتا ہے۔

13. ناطق اعداد کا سٹ ____________ نہیں ہوتا ہے۔

14. لاتعداد کھلے سٹس کا تقاطع ضروری نہیں کہ ____________ ہو۔

15. لاتعداد بند سٹس کا اجماع ضروری نہیں کہ ____________ ہو۔

16. درجہ ذیل کا ملاپ کرو:

a.	{1,2,3,4,5,6} کا ماخوذ سٹ	i)	مجموعہ کا انتہائی نقطہ نہیں ہے
b.	کسی مجموعہ کا تنہا نقطہ	ii)	حقیقی اعداد کا سٹ $\mathbb{R}$
c.	بند وقفہ [1,4] کا اندرون	iii)	بند وقفہ [1,7]
d.	کھلے وقفہ (1,7) کا بندشی سٹ	iv)	کھلے وقفہ (1,4)
e.	حقیقی اعداد کے سٹ کا اندرون	v)	خالی سٹ ϕ

4.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. کسی مجموعہ کے انتہائی نقطہ کی تعریف کیجیے۔ ہر اس مجموعے کی مثال دیجیے جس کے کچھ یا کوئی بھی انتہائی نقطہ نہیں ہوتا ہے۔

2. کسی مجموعہ کے تنہا نقطہ کی تعریف کیجیے۔ مجموعوں کی دو مثالیں دیجیے۔ کیا کوئی تنہا نقطہ کسی مجموعہ کا انتہائی نقطہ ہوتا ہے؟

3. دکھائیے کہ حقیقی اعداد کے سٹ کے متناہی تحت سٹ کا کوئی انتہائی نقطہ نہیں ہوتا ہے۔

4. ہر دو لا متناہی سٹس کی ایک مثال دیجیے جن میں بالترتیب صرف ایک انتہائی نقطہ اور صرف دو انتہائی نقطے ہوتے ہوں۔

4.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. دکھائیے کہ کوئی مجموعہ A بند ہوتا ہے اگر اور صرف اگر ماخوذ سٹ A' سٹ A کا تحت سٹ ہو۔
2. بولزانو وائرسٹراس قضیہ کو بیان اور ثابت کرو۔
3. ثابت کرو کہ کسی بستہ لا متناہی مجموعہ میں کم ترین اور اعظم ترین انتہائی نقاط ہوتے ہیں۔
4. دکھائیے کہ کسی سٹ A کا اندرون (Interior) ایک کھلا سٹ ہوتا ہے اور A کا سب سے بڑا کھلا تحت سٹ ہوتا ہے۔
5. دکھائیے کہ

a) $S \subseteq T \Rightarrow S' \subseteq T'$

b) $(S \cup T)' \Rightarrow S' \cup T'$

c) $(S \cap T)' \Rightarrow S' \cap T'$

6. ثابت کرو کہ حقیقی اعداد کے سٹ کے کسی تحت سٹ کا ماخوذ سٹ بند ہوتا ہے۔

4.8 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Introduction to Real Analysis, Donald R. Sherbert Robert G. Bartle 4th Edition , 2014
2. Elements Of Real Anyalsis, Narayan Shanti and Raisinghania M.D., 2003
3. Real Analysis, Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick, 4th Edition, 2017
4. Real Analysis, J.N. Sharma and A.R. Vasishtha, 2014
5. Real Analysis, V. Karunakaran, 2011
6. Real Analysis, N.L. Carothers, 2006
7. Basic Real Analysis, Houshang H. Sohrab, 2nd Edition, 2014

اکائی 5۔ تواتر اور استدقاق

(Sequences and Convergence)

اکائی کے اجزا

5.0 تمہید(Introduction)

تواتر کی بہت سی مثالوں سے ہماری روز مرہ کی زندگی میں سابقہ پڑتا رہتا ہے۔مشہور ریاضیداں لیونارڈو فبوناکی (1240-1170)(Leonardo Fibonacii)نے خرگوشوں(Rabbits)کی ایک کالونی میں ان کا شمار کی جانکاری حاصل کرنے کے لیے اس مفروضہ پر، کہ دو بالغ خرگوشوں کے جوڑے(نر اور مادہ) سے ہر ماہ دو نو عمر خرگوشوں کی پیدائش ہوتی ہے اور یہ دو ماہ میں بلوغت حاصل کر لیتے ہیں اور دوسرے خرگوشوں کے جوڑے کی پیدائش کا سبب بنتے ہیں، ایک ماڈل پیش کیا۔تب پہلے مہینے میں خرگوشوں کے جوڑوں کی تعداد، دوسرے مہینے میں خرگوشوں کے جوڑوں کی تعداد، ... ،nویں مہینے میں خرگوشوں کے جوڑوں کی تعداد کو درجہ ذیل طریقہ سے ظاہر کرتے ہیں

$$1,1,2,3,5,8,13,21, \dots \dots$$

یہ تواتر کی ایک مثال ہے جہاں n واں رکن($n > 2$)اپنے سابقہ دو ارکان کو جوڑ کر حاصل کیا جاتا ہے۔فرض کیجیے کہ ربر کی ایک گیند کھردری(Rough)اُفقی(Vertical) سطح پر اونچائی a میٹر سے نیچے گرائی جاتی ہے۔ ہر بار ٹپہ کھانے کے بعد گیند کی حاصل کردہ اوچائیوں پر غور کریں۔ان اونچائیوں کو ایک ایسے تواتر سے جوڑ کر دیکھا جا سکتا ہے جو بالآخر صفر کی طرف متدق(Converge) ہوتا ہے۔ اگر ہم گیند کے ذریعہ طے کی گئی مسافت حاصل کرنا چاہتے ہیں تو اس طرح حاصل لا متناہی تواتر کو ایک متناہی حقیقی عدد پر مرتکز ہونا لازمی ہے۔آنے والی اکائیوں میں کسی تواتر کے انتہا کے وجود اور اس کی استدقاق(Convergence)سے جڑے سوالات کا علم ہونا ضروری ہے۔

5.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کی تکمیل کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ

- کسی تواتر کی انتہا اور تحت تواتر کی تعریف کر سکیں
- متدق تواتر اور بستہ تواتر کے درمیان رشتہ قائم کر سکیں
- یک رنگی تواتر کی تعریف کر سکیں اور ثابت کر سکیں کہ کوئی یک رنگی تواتر متدق ہوتا ہے اگر اور صرف اگر یہ بستہ ہو۔

5.2 تواتر اور تحت تواتر(Sequence and Subsequence)

تعریف: ایک تواتر نمبروں کا ایک سٹ ہوتا ہے جن کو پہلے نمبر سے شروع کرتے ہوئے دوسرے، تیسرے اور اسی طرز پر ایک ترتیب میں دکھایا جاتا ہے۔ معاداً اگر S ایک مجموعہ (یا حقیقی اعداد کے سٹ کا ایک تحت سٹ) ہو تو S میں کوئی تواتر ایک تفاعل f ہے جو $\mathbb{N}$ سے S پر معرف ہو۔ کسی تواتر کو درجہ ذیل طریقوں سے ظاہر کریں گے

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$ یا

$$f(1), f(2), f(3), \cdots, f(n), \cdots$$

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow S$$
$$n \longrightarrow f(n)$$

کسی تفاعل کو اس کی سعت (Range) سے پہچانا جاتا ہے۔ یعنی $f(n): n \in \mathbb{N}$

سعت کے عناصر یا 1 سے n کی بڑھتی ہوئی مقدار کے مطابق لکھا گیا ہو۔ ہم نے اوپر بتایا ہے کہ تفاعل f کتنے فاصلہ پر ہے۔ کسی تواتر کے لیے ہم ترقیم $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ کو اختیار کرتے ہیں اور اس کو $\{x_n\}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

یہاں ہم تفاعل f کے لیے x کا استعمال کر رہے ہیں۔ کچھ مصنفین $\{x_n\}$ کے لیے $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ کا بھی استعمال کرتے ہیں۔

مثالیں:

i) فرض کیجیے کہ $x_n = n$ تب تواتر $\{x_n\}$ درجہ ذیل ہوگی

$$\{x_n\} = 1,2,3,4,5, \dots\dots, n, \dots$$

ii) فرض کیجیے کہ $x_n = n^2$ تب تواتر $\{x_n\}$ درجہ ذیل ہوگی

$$\{x_n\} = 1, 4, 9, 16, 25, \dots\dots, n^2, \dots$$

تعریف: اگر $\{x_n\}$ ایک تواتر ہے اور اگر $r_1 < r_2 < r_3 < \cdots < r_n < \cdots$ تاکیدی اضافی (Strictly Increasing) طبعی عدد (Natural Numbers) ہوں تب تواتر $\{x_{r_n}\} = x_{r_1}, x_{r_2}, \dots, x_{r_n}, \dots$ کو $\{x_n\}$ کا تحت تواتر کہتے ہیں۔

کسی تحت تواتر کو دو تفاعلات کے مرکب (Composition of two Functions) کے طور پر دیکھا جا سکتا ہے۔ کسی تواتر کے بہت سے تحت تواتر ہو سکتے ہیں۔ جیسے تواتر $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ کے لیے $1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots$ اور $2, 5, 8, 11, \dots, 3n-1, \dots$ تحت تواتر ہیں جب کہ تواتر $1, 3, 5, 7, 9, 13, 11, 15, 17, 19, \dots$ اپنی چھٹی اور ساتویں رقموں کی وجہ سے تحت تواتر نہیں ہے اور تواتر $\{x_n = n\}$ کے لیے $13 \nless 11$ ہے۔

تبصرہ: کسی تواتر کو متعارف کرانے کا سب سے آسان طریقہ یہ ہے کہ اس تواتر کی n-ویں رقم کے لیے ایک ضابطہ دیا جائے اور یہ بتانا بھی ضروری ہے کہ n کی کس قیمت کے لیے یہ ضابطہ درست ہے۔ چند اراکین کا لکھ دینا کسی تواتر کو متعارف کرانے کے لیے کافی نہیں ہے۔

مثالیں:

1. فرض کیجیے کہ $x_n = n$ تب تواتر $\{x_n\}$ اس طرح ہوگا

$$\{x_n\} = 1,2,3,4,5, \dots\dots, n, \dots$$

مان لیجیے کہ تواتر $\{x_n\}$ کا تحت تواتر اس طرح دیا گیا ہے

$$\{x_{2n}\} = 2,4,6, \dots\dots, 2n, \dots$$

2. فرض کیجیے کہ $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots\dots$ ایک تواتر ہے۔ اس کو ذیل طریقہ سے لکھا جا سکتا ہے

$$x_n = (-1)^{n+1}$$

آپ درجہ ذیل سوالات پر غور کریں:

i) من درجہ بالا تواتر کے دو تحت تواتر لکھیے۔

ii) $x_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{اگر } n \text{ جفت ہے} \\ -\frac{1}{n}, & \text{اگر } n \text{ طاق ہے} \end{cases}$ یا $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ تب $\{x_n\} = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots\dots$

iii) فبوناچی تواتر $1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots\ldots$ جہاں $x_1 = 1, x_2 = 1, x_n = x_{n-1} + x_{n-2},\ n > 2$

تعریف: اگر کسی تواتر $\{x_n\}$ کی سعت (Range) نیچے سے بستہ ہو تب $\{x_n\}$ کو نیچے سے بستہ کہا جاتا ہے اور اگر اس کی سعت اوپر سے بستہ ہو تب تواتر $\{x_n\}$ کو اوپر سے بستہ کہتے ہیں۔ اگر تواتر کی سعت اوپر اور نیچے دونوں طرف سے بستہ ہو تب $\{x_n\}$ کو صرف بستہ کہا جاتا ہے۔ معادلی طور پر کوئی تواتر بستہ ہو گا اگر محدود عدد m اور M اس طرح وجود رکھتے ہوں کہ ہر ایک $n \in \mathbb{N}$ کے لیے $m < x_n < M$ ہو۔ اگر $\{x_n\}$ اوپر سے بستہ ہو تو کم ترین حد بالا جو بالائی حدوں میں سب سے چھوٹی ہو اقل ترین بالائی حد (l.u.b.) کہلائے گی اور اسی طرح اعظم ترین زیریں حد (g.l.b.) کی تعریف کی سکتی ہے۔

مثالیں:

1. فرض کیجیے کہ تواتر $\{x_n\}$ ہے، جہاں $x_n = \frac{1}{n}$ ہے۔ اس میں ہر ایک $n > 1$ کے لیے $x_1 = 1$ اور $x_n < 1$ ہے۔ اس لیے تواتر اوپر سے بستہ ہے اور 1 اقل ترین بالائی حد (l.u.b.) ہے۔ اگر $\delta > 0$ ہو تو $n > \frac{1}{\delta}$ کے لیے $0 < x_n < \delta$ حاصل ہو گا۔ اس کی وجہ سے کوئی بھی مثبت عدد اس تواتر کے لیے زیریں حد نہیں ہے اور 0 اعظم ترین زیریں حد (g.l.b.) ہے۔
2. تواتر $\{x_n\}$، جہاں $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$، $x_1 = -1$ اور $x_2 = \frac{1}{2}$ کے دوسرے تمام اعداد ان ہی دو نمبروں کے درمیان وجود رکھتے ہیں۔ اس لیے $\frac{1}{2}$ اقل ترین بالائی حد (l.u.b.) اور -1 اعظم ترین زیریں حد (g.l.b.) ہے۔
3. تواتر $\{x_n\}$ کے لیے جو $x_n = \begin{cases} +1, & \text{اگر } n\text{، 5 سے پذیر تقسیم ہے} \\ 0, & \text{دیگر صورتیں} \end{cases}$ سے متعارف ہے کا ہر رکن 1 ہے یا 0 ہے۔ اس لیے 1 اقل ترین بالائی حد (l.u.b.) اور 0 اعظم ترین زیریں حد (g.l.b.) ہے۔
4. تواتر $\{x_n\}$ کے لیے $x_1 = 0$ اور بچے ہوئے تمام ارکان مثبت ہیں، جہاں $x_n = \sqrt{n} + (-1)^n$ ہے۔ اس لیے 0 اعظم ترین زیریں حد (g.l.b.) ہے۔ تواتر اوپر سے بستہ نہیں ہے، چوں کہ ہمیں دیا گیا ہے کہ $\delta > 0$ ہے، ہم $x_n = \sqrt{n} + (-1)^n \geq \sqrt{n} - 1 > \delta$ کو حاصل کرنے کے لیے $n > (\delta + 1)^2$ کو منتخب کر سکتے ہیں۔

5.3 انتہا اور استدقاق (Limit and Convergence)

تعریف: ایک حقیقی عدد l کو کسی تواتر $\{x_n\}$ کی انتہا کہا جاتا ہے اگر l کے تمام ہم سایوں میں تواتر کے کچھ ارکان کی تعداد کو چھوڑ کر سبھی ارکان وجود رکھتے ہوں۔ معادلاً $l \in \mathbb{R}$ کسی تواتر $\{x_n\}$ کی انتہا ہے اگر ہر ایک $\epsilon > 0$ (چاہے جتنا چھوٹا ہو) کے لیے ایک طبعی عدد $n_0 \in \mathbb{N}$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ تمام $n \geq n_0$ کے لیے $x_n \in (l - \epsilon, l + \epsilon)$ ہو۔ اس کو ہم $lim_{x\to\infty} x_n = l$ لکھتے ہیں۔ اگر l وجود رکھتا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ تواتر $\{x_n\}$، l کی طرف متدق (Convergent) ہے۔ کوئی تواتر اگر متدق نہیں ہو تو اس کو متدع (Divergent) کہتے ہیں۔

کچھ مصنفین اس تواتر کے بارے فرق ظاہر کرتے ہیں جو بستہ نہیں ہیں اور اس لیے وہ $+\infty$ یا $-\infty$ کی طرف متدع ہوتے ہیں۔

تبصرہ: تواتر کے انتہائی نقطہ کی تعریف سے، انتہائی نقطہ تواتر کی سعت (Range) کی انتہا ہوتی ہے لیکن کسی سعت سٹ (SetRange) کے

انتہائی نقطہ اور کسی تواتر کے انتہائی نقطہ کے درمیان بہت تھوڑا فرق ہوتا ہے۔ فرض کیجیے کہ $\{x_n\}$ ایک تواتر ہے جہاں $x_n = 1$ ہے۔ تب تواتر $\{1, 1, 1, \dots\}$ ہوگا جس کی انتہا 1 ہے لیکن سٹ کے طور پر سعت سٹ $\{1\}$ ہے اور متناہی سٹ (چوں کہ اس میں ایک ہی رکن موجود ہے) ہونے کی وجہ سے اس کا کوئی انتہائی نقطہ نہیں ہوتا۔

تبصرہ: چوں کہ کسی تواتر کے ارکان سے ہماری مراد سعت سٹ میں عناصر سے ہے اس لیے سٹس کے انتہائی نقاط کے ساتھ تواتر پر بھی تمام قضیوں کو لاگو کیا جاتا ہے۔

مثال 1۔ $\{x_n\}$ ایک تواتر ہے جہاں $x_n = \frac{1}{n}$ ہے۔ اس کا انتہائی نقطہ 0 ہے چوں کہ 0 کے ہر ایک ہمسایہ میں تواتر $\frac{1}{n}$ کے لا متناہی طور پر بہت سارے ارکان وجود رکھتے ہیں۔

مثال 2۔ $\{x_n\}$ ایک تواتر ہے جہاں $x_n = (-1)^n$ ہے۔ 1 اور -1 اس کے انتہائی نقطے نہیں ہیں کیوں کہ 1 اور -1 لا متناہی طور پر کئی مرتبہ دہرائے گئے ہیں اور x_n کی سعت متناہی ہوتی ہے۔

مثال 3۔ $\{x_n\}$ ایک تواتر ہے جہاں $x_n = n$ ہے۔ اس کا کوئی انتہائی نقطہ نہیں ہے کیوں کہ کسی بھی حقیقی نمبر کے پاس اس کی کسی ہم سائگی میں تواتر کے لا محدود ارکان نہیں ہوتے ہیں۔

تواتر کے لیے بولزانو وائرسٹراس قضیہ (Bolzano Weierstrass Theorem for Sequences)

بیان: ہر ایک بستہ لا متناہی تواتر میں ایک انتہائی نقطہ ہوتا ہے۔

ثبوت: فرض کیجیے کہ $\{x_n\}$ ایک لا متناہی اور بستہ تواتر ہے۔ مان لیجیے کہ $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ہے۔ تواتر $\{x_n\}$ بستہ ہونے کی وجہ سے سٹ S بھی بستہ ہو جائےگا۔ چوں کہ $\{x_n\}$ لا متناہی ہے اس لیے S بھی لا متناہی ہوگا۔ بستہ اور لا متناہی سٹس کے لیے بولزانو وائرسٹراس کے قضیے سے سٹ S کا ایک انتہائی نقطہ l ہوگا۔ اس l میں S کا انتہائی نقطہ وجود رکھتا ہے، تب $(l - \epsilon, l + \epsilon)$ میں S کے لا متناہی تعداد میں ارکان وجود رکھتے ہیں۔

قضیہ 1: ہر ایک متدق تواتر بستہ ہوتا ہے لیکن اس کا برعکس درست نہیں ہوتا۔

ثبوت: فرض کیجیے کہ $\{x_n\}$ کسی قدر l کی طرف متدق ہونے والا تواتر ہے۔ قدر $\delta = l$ لے نے پر ہم دیکھتے ہیں کہ تمام $n \geq m$ کے لیے ایک صحیح عدد اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $|x_n - l| < 1$ ہے۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ $l - 1 < x_n < l + 1, \forall n \geq m$ ہے۔ مان لیجیے کہ λ اور μ کسی متناہی سٹ $\{x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, l - 1, l + 1\}$ کی بالترتیب اعظم ترین اور ادنی ترین قدریں ہیں۔ تب $\mu \leq x_n \leq \lambda, \forall n$ ہے۔ اس لیے تواتر $\{x_n\}$ بستہ ہے۔ تواتر $\{x_n\}$ جو $x_n = (-1)^n$ کے ذریعہ متعارف ہے یعنی $-1 < x_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}$ ہے۔ اس لیے تواتر $\{x_n\}$ بستہ ہے۔ لیکن x_n متدق نہیں ہے۔ حالاں کہ تواتر $\{x_n\}$ بستہ ہے کیوں کہ تمام $a \in \mathbb{R}$ اور $m \in \mathbb{N}$ کے لیے $\epsilon = \frac{1}{2}$ تب ایک عدد $n > m$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $|x_n - a| < \frac{1}{2}$ ہے۔

قضیہ 2: اگر کوئی تواتر $\{x_n\}$ قدر l کی طرف متدق ہے اور قدر m کی طرف بھی متدق ہے تو $l = m$ ہوگا۔

ثبوت: فرض کرو کہ $\delta > 0$ دیا گیا ہے۔ چوں کہ $\{x_n\}$ قدر l کی طرف متدق ہے، تب ایک عدد m_1 اس طرح وجود رکھتا ہے کہ تمام

$n \ge m_1$ کے لیے $|x_n - l| < \frac{\delta}{2}$ ہے۔ چوں کہ $\{x_n\}$ قدر m کی طرف بھی متدق ہے، تب عدد m_2 اس طرح وجود رکھتا ہے کہ تمام $n \ge m_2$ کے لیے $|x_n - m| < \frac{\delta}{2}$ ہے۔ تب سبھی $n \ge max\{m_1, m_2\}$ کے لیے $|x_n - l| < \frac{\delta}{2}$ اور $|x_n - m| < \frac{\delta}{2}$ ہے۔ تب

$$|l - m| \le |l - x_n| + |x_n - m| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

اس لیے $|l - m|$ ایک غیر منفی عدد ہے جو اختیاری $\delta > 0$ سے کم تر ہے۔ اس لیے $|l - m| = 0$ یا $l = m$ ہے۔

قضیہ 3: کوئی حقیقی عدد l کسی تواتر $\{x_n\}$ کا انتہائی نقطہ ہوتا ہے اگر اور صرف اگر $\{x_n\}$ کا ایک تحت تواتر $\{x_{r_n}\}$ اس طرح سے وجود رکھتا ہو کہ یہ قدر l کی طرف متدق ہو۔

ثبوت: اس کا ثبوت مشق کے لیے چھوڑا گیا ہے۔

ن **نتیجہ(Result):**

فرض کیجیے کہ دو تواتر $\{a_n\}$ اور $\{b_n\}$ اس طرح سے ہیں کہ $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ اور $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ تب

(i $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = l + m$

(ii $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = l \cdot m$

(iii $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = \frac{m}{l}, l \neq 0$

سینڈوچ قضیہ(Sandwich Theorem)

بیان: اگر $n \ge k$ کے لیے $a_n \le b_n \le c_n$ ہو اور اگر تواتر $\{a_n\}$ اور $\{c_n\}$ انتہا l کی طرف متدق ہو، تب تواتر $\{b_n\}$ بھی l کی طرف متدق ہو گی۔

ثبوت: فرض کیجیے کہ $\delta > 0$ ہے۔ چوں کہ $a_n \to l$ ہوتا ہے جیسے جیسے $n \to \infty$ ہوتا ہے، تب ایک عدد n_1 اس طرح وجود رکھتا ہے کہ تمام $n \ge n_1$ کے لیے $|a_n - l| < \delta$ ہے۔

اسی طرح، چوں کہ $c_n \to l$ ہوتا ہے جیسے جیسے $n \to \infty$ ہوتا ہے، تب ایک عدد $n_2 \in \mathbb{N}$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ تمام $n \ge n_2$ کے لیے $|c_n - l| < \delta$ ہے۔

فرض کیجیے کہ $N = max\{k, n_1, n_2\}$ ہے۔ تب سبھی $n \ge N$ کے لیے $a_n - l \le b_n - l \le c_n - l$ اور $l - c_n \le l - b_n \le l - a_n$ ہے۔

اس لیے

$$\begin{aligned}|b_n - l| &= max\{(b_n - l), (l - b_n)\}\\ &\le max\{(c_n - l), (a_n - l)\}\end{aligned}$$

اس لیے تمام $n \ge N$ کے لیے $|b_n - l| < \delta$ ہو گا اور پھر اس لیے $b_n \to l$ ہو گا جیسے جیسے $n \to \infty$ ہوتا ہے۔

مثال 4۔ فرض کیجیے کہ $\{b_n\}$ ایک تواتر ہے جہاں

$$b_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}$$

ہے۔

تب تواتر $\{b_n\}$ صفر کی طرف اسدق ہوتی ہے۔اس کو ثابت کرنے کے لیے ہم دو تواتر $\{a_n\}$ اور $\{c_n\}$ کو متعارف کرتے ہیں، جہاں

$$a_n = \frac{n}{(2n)^2} = \frac{1}{4n}$$

اور

$$c_n = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

اب $a_n \le b_n \le c_n$ ہے چوں کہ $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ کے لیے $n^2 \le (n+k)^2 \le (2n)^2$ ہوتا ہے اور

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

اس لیے سینڈوچ قضیہ سے

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

اپنی اکتسابی جانچ کے لیے طلبہ درجہ ذیل سوال سے جانچ کر سکتے ہیں۔

مثال5۔ثابت کیجیے کہ اگر λ ایک مثبت عدد ہے تب $\frac{1}{n^\lambda} \to 0$ ہو گا جیسے جیسے $n \to \infty$ ہوتا ہے۔

مثال6۔اگر $\lambda > 0$ تب $\lambda^{1/n} \to l$ جیسے جیسے $n \to \infty$ ہوتا ہے۔یہاں ہمیں تین صورتوں پر غور کرنا ہو گا

صورت(1): جب $\lambda > 1$ ہو

قدر $a_n = \lambda^{1/n} - 1$ کو درج کیجیے،تب تمام $n \ge 1$ کے لیے $a_n > 0$ ہو گا۔لیکن دور کنی قضیہ کی مدد سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$a_n = \lambda^{1/n} - 1 \Rightarrow \lambda(1 + a_n)^{1/n} \ge 1 + na_n$$

اس لیے $0 < a_n < \frac{\lambda-1}{n}$ ہو گا۔

چوں کہ $\frac{\lambda-1}{n} \to 0$ جب $n \to \infty$ ہو،تب سینڈوچ قضیہ کی مدد سے $a_n \to 0$ ہوتا ہے جب $n \to \infty$ ہوتا ہے۔

صورت(2): جب $\lambda = 1$ ہو

اگر $\lambda = 1$ ہو تب سبھی n کے لیے $\lambda^{1/n} = 1$ ہو گا۔ اگر $0 < \lambda < 1$ ہو، تب $\frac{1}{\lambda} > 1$ اور پہلی صورت کی مدد سے $\frac{1}{\lambda^{1/n}} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1/n} \to 1$ جب $n \to \infty$ ہو۔

اپنی اکتسابی جانچ کے لیے درجہ ذیل سوال پر غور کریں۔

مثال7۔اگر $|x| < 1$ ہو تب ثابت کیجیے کہ $x^n \to 0$ جب $n \to \infty$ ہو۔

مثال8۔اگر $a_n = \sqrt{n-1} - \sqrt{n}$ ہو تب ثابت کیجیے کہ $a_n \to 0$ جب $n \to \infty$ ہو۔

5.4 یک رنگی تواتر(Monotonic Sequences)

تعریف: کوئی تواتر $\{x_n\}$ یک رنگی طور پر بڑھتا ہوا(Monotonically Increasing) کہا جاتا ہے اگر سبھی n کے لیے $x_{n+1} \geq x_n$ ہو۔ ایک تواتر $\{x_n\}$ یک رنگی طور پر گھٹتا ہوا(Monotonically Decreasing) کہا جاتا ہے اگر سبھی n کے لیے $x_{n+1} \leq x_n$ ہو۔ تواتر $\{x_n\}$ کو یک رنگی تواتر(Monotonic Sequence) کہتے ہیں اگر یہ یک رنگی طور پر یا تو بڑھتی ہوئی ہو یا گھٹتی ہوئی تواتر ہو۔

تعریف: کوئی تواتر $\{x_n\}$ تاکیدی طور پر بڑھتا ہوا(Strictly Increasing) یا تاکیدی طور پر گھٹتا ہوا(Strictly Decreasing) کہا جاتا ہے اگر n کی تمام قدروں کے لیے $x_{n+1} > x_n$ ہو یا $x_{n+1} < x_n$ ہو۔

تبصرہ(Remark): ہم نے اس اکائی میں ایک قضیہ ثابت کیا جس کے مطابق ہر ایک متدق تواتر بستہ ہوتا ہے لیکن بہت سے بستہ تواتر ہیں جو کہ متدق نہیں ہیں۔ اب ہم ثابت کریں گے کہ کسی بستہ تواتر کے ساتھ اگر یک رنگی تواتر ہونے کی ایک شرط اور لگادی جائے تو حاصل کردہ تواتر متدق ہوتا ہے۔

قضیہ: ایک یک رنگی تواتر متدق ہوتا ہے اگر اور صرف اگر یہ بستہ ہو۔

ثبوت: ہم قضیہ کو یک رنگی طور پر بڑھتے ہوئے تواتر کے لیے ثابت کرتے ہیں۔ یک رنگی طور پر گھٹتے ہوئے تواتر کے لیے یکساں ثبوت ہوگا۔

فرض کیجیے کہ $\{a_n\}$ ایک یک رنگی طور پر بڑھتا ہوا تواتر ہے۔ اگر $\{a_n\}$ متدق ہے تو (قضیہ 1) سے یہ بستہ ہوگا۔

اس کے بالعکس، فرض کیجیے کہ $\{a_n\}$ بستہ ہے۔ مان لیجیے کہ λ اس کا $l.u.b.$ ہے۔ اب فرض کیجیے کہ $\lambda > 0$ ہے۔ چوں کہ $\{a_n\}$ کا λ، $l.u.b.$ ہے تب ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ $\lambda - \delta$ تواتر کی ایک بالائی حد نہیں ہے۔ اس لیے ایک عدد N اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $a_N < \lambda - \delta$ ہے۔ چوں کہ $\{a_n\}$ ایک یک رنگی طور پر بڑھتا ہوا تواتر ہے، تب سبھی $n \geq N$ کے لیے $a_n \geq a_N$ ہوگا۔ اس لیے سبھی $n \geq N$ کے لیے $\lambda - \delta < a_N \leq a_n \leq \lambda < \lambda + \delta$ ہے۔

اس لیے $a_n \to \lambda$ جب $n \to \infty$ ہے۔

اسی طرح دکھا سکتے ہیں کہ ایک بستہ اور یک رنگی طور پر گھٹتا ہوا تواتر اپنے $g.l.b.$ کی طرف متدق ہوتا ہے۔

تبصرہ(Remark): ہر ایک یک رنگی طور پر بڑھتا ہوا تواتر جو اوپر سے بستہ نہیں $+\infty$ کی طرف متدرع ہوتا ہے۔

مثال9۔ $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ کے ذریعہ دیا گیا تواتر $\{a_n\}$ متدق ہے۔

حل۔ اس کو سمجھنے کے لیے $n \geq 2$ کے لیے دو رکنی قضیہ کا استعمال کی مدد سے $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ کی توسیع کرتے ہیں۔

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k}$$

$$= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

چوں کہ $\left(1 - \frac{r}{n+1}\right) < \left(1 - \frac{r}{n}\right)$ اس لیے

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$
$$\le 1+1+\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$
$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

اس لیے چوں کہ $a_1 < a_2$ کو صاف طور پر دیکھا جا سکتا ہے اس لیے $\{a_n\}$ بڑھتا ہوا تواتر ہے۔

لیکن

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$
$$< 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{n}{k!}$$
$$< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$
$$< 3$$

سبھی $n \ge 2$ کے لیے اور $a_1 = 2 < 3$

اس لیے $\{a_n\}$ بستہ اور بڑھتا ہوا یک رنگی تواتر ہے اور اس لیے متدق ہے۔

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ کو e سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال 10۔ فرض کیجیے کہ $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}, n \ge 1$ ہے، تب دکھایئے کہ $a_n \to 1$ جب $n \to \infty$ ہو۔

حل۔ چوں کہ $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \ge \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \ge \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}, 1 \le k \le n$

ہمیں حاصل ہے

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \ge a_n \ge \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$$

اس لیے

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \ge a_n \ge \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

یہ اس لیے ہے کیوں کہ $1 < \sqrt{1+\frac{1}{n}} < 1+\frac{1}{2n}$ ہوتا ہے۔

اب $\sqrt{1+\frac{1}{n}} \to 1$ جب $n \to \infty$ ہو اور $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \to 1$ جب $n \to \infty$ ہو۔

سینڈوچ قضیہ کی مدد سے $a_n \to 1$ جب $n \to \infty$ ہو۔

مثال 11۔ فرض کیجیے کہ $\alpha > 0$ ہے اور $\beta > \sqrt{\alpha}$ ایک حقیقی عدد ہے۔ مان لیجیے کہ تواتر $\{a_n\}$ کو تمام $n \ge 1$ کے لیے اس طرح سے متعارف کیا گیا ہے کہ $a_1 = \beta$ اور $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n+\frac{\alpha}{a_n}\right)$ ہے۔ ثابت کیجیے کہ $\{a_n\}$ ایک گھٹتا ہوا تواتر ہے جو $\sqrt{\alpha}$ کی طرف متدق

ہے۔

حل۔ دیے گئے متوالی رشتہ سے ہمیں حاصل ہے

$$2a_n a_{n+1} = {a_n}^2 + \alpha = 2{a_n}^2 + \alpha - {a_n}^2$$

اس لیے

$${a_n}^2 - \alpha = 2a_n(a_n - a_{n+1})$$

یعنی

$$a_n - a_{n+1} = \frac{{a_n}^2 - \alpha}{2a_n} = \frac{(a_n - \sqrt{\alpha})(a_n + \sqrt{\alpha})}{2a_n}$$

چوں کہ $a_1 > \sqrt{\alpha}$ ہے اس لیے استقرا کے حساب سے $a_n > \sqrt{\alpha}$ ہوگا۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ $1 < \frac{a_n+\sqrt{\alpha}}{2a_n}$ ہے۔ اس لیے

$$a_n - a_{n+1} < a_n - \sqrt{\alpha} \Rightarrow a_{n+1} > \sqrt{\alpha}$$

اس طرح تمام n کے لیے $a_{n+1} < a_n$ اور $\{a_n\}$ ایک گھٹتا ہوا تواتر ہے جو نیچے سے بستہ ہے۔

ساتھ ہی

$$\begin{aligned}a_{n+1} - \sqrt{\alpha} &= (a_n - \sqrt{\alpha}) - (a_n - a_{n+1})\\ &= (a_n - \sqrt{\alpha})\left(1 - \frac{(a_n + \sqrt{\alpha})}{2a_n}\right)\\ &< (a_n - \sqrt{\alpha})\left(1 - \frac{a_n}{2a_n}\right)\\ &< \frac{a_n - \sqrt{\alpha}}{2}\end{aligned}$$

تکراری اطلاق سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$0 < a_n - \sqrt{\alpha} < \frac{a_n - \sqrt{\alpha}}{2^{n-1}}$$

اس سے ثابت ہوتا ہے کہ $a_n \to \sqrt{\alpha}$ جب $n \to \infty$ ہے۔

تبصرہ(Remark): اس مثال سے ہمیں کسی مثبت عدد α کا تقریبی جذر المربع (Approximate Square Root) حاصل کرنے کا طریقہ ملتا ہے۔ n کو کافی بڑا لینے پر اور a_n کو محسوب کرنے پر ہمیں $\sqrt{\alpha}$ کے قریب تر مطلوبہ قدر حاصل ہو جاتی ہے۔

اپنی اکتسابی جانچ کے لیے درجہ ذیل سوال کو حل کریں:

مشق: دکھایئے کہ تواتر $\{a_n = (-1)^n\}$ متدق نہیں ہے۔

5.5 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے تحت تواتر کی تعریف کے بعد تواتر اور تحت تواتر کی انتہا کی وضاحت کی ہے۔ ہم نے دیکھا کہ کسی متدق تواتر کی ایک یکتا (Unique) انتہا ہوتی ہے۔ نیز ہم نے متدق اور بستہ تواتر کے درمیان رشتہ کے بارے میں جانکاری حاصل کی۔ ہم نے پایا کہ کوئی

بھی متدق تواتر بستہ ضرور ہوتا ہے اور اس کا برعکس درست نہیں ہے۔ مخالف مثال سے اس کو ثابت کیا گیا۔ آخر میں ہم نے یک رنگی تواتر کی تعریف کی۔ ہم یہ بتایا کہ کوئی بستہ تواتر متدق بنتا ہے اگر یہ یک رنگی بھی ہو۔ ہم نے یہ بھی ثابت کیا کہ کوئی یک رنگی تواتر متدق ہوتا ہے اگر اور صرف اگر یہ بستہ ہو۔

5.6 کلیدی الفاظ (Keywords)

تواتر، تحت تواتر، تواتر کی انتہا، استدقاق، یک رنگی تواتر، بستہ تواتر، متدرع، بڑھتا ہوا تواتر، گھٹتا ہوا تواتر، انتہائی نقطہ

5.7 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

5.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. مثبت بڑھتے ہوئے طاق صحیح اعداد کے تواتر میں n-واں رکن __________ ہے۔
2. مثبت بڑھتے ہوئے جفت صحیح اعداد کے تواتر میں n-واں رکن __________ ہے۔
3. بڑھتے ہوئے مفرد اعداد کے تواتر میں 5-واں رکن __________ ہے۔
4. بڑھتے ہوئے کامل مربعی (Perfect Squares) اعداد کے تواتر میں 5-واں رکن __________ ہے۔
5. بڑھتے ہوئے کامل کعبی (Perfect Cubes) اعداد کے تواتر میں n-واں رکن __________ ہے۔
6. فبوناچی (Fibonacci) تواتر $1,1,2,3,5,8,13,21, \ldots$ کی $n \geq 3$ کے لیے n-واں رکن ________ ہے۔
7. بڑھتے ہوئے طبعی اعداد (Natural Numbers) کے تواتر میں n-واں رکن __________ ہے۔
8. تواتر __________ $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ تواتر ہے۔
9. تواتر __________ $1,3,5,7, \ldots$ تواتر ہے۔
10. تواتر __________ $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ تواتر ہے۔
11. کسی تواتر کا دامنہ ہوتا ہے

(a $\mathbb{R}$ (b $\mathbb{N}$ (c $\mathbb{Z}$ (d W

12. ایک تواتر __________ ہوتا ہے۔

(a ایک تفاعل (b ایک رشتہ (c ایک تا ایک تفاعل (d بر تفاعل

13. $3,6,9, \ldots$ تواتر $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ کا __________۔

(a تواتر نہیں ہے (b گھٹتا ہوا تواتر ہے (c ایک تحت تواتر ہے (d متدق تواتر ہے

14. تواتر $1,2,1,2,1,2, \ldots$ کی سعت (Range) ہے۔

a) متناہی b) غیر شمارپذیر c) خالی d) لامتناہی

15. اگر کسی متدق تواتر کی انتہائیں L اور M ہوں تب $L - M$ کس کے مساوی ہے

a) 2M b) 2L c) 2 d) 0

16. درجہ ذیل کو ملایئے

a)	تواتر $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ کی اقل بالائی حد (Supremum)	A)	0
b)	تواتر $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ کی اعظم زیریں حد (Infimum)	B)	$\frac{1}{2}$
c)	تواتر $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ کی اقل بالائی حد (Supremum)	C)	وجود نہیں رکھتی
d)	تواتر ... ,1,2,1,2,1,2 کی انتہا (Limit) ہے	D)	∞
e)	ایک متدق تواتر ہوتا ہے	E)	ضروری نہیں کہ متدق ہو
f)	ایک بستہ تواتر	F)	بستہ

5.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. تواتر اور تحت تواتر کی تعریف کیجیے۔
2. تواتر کے سعت کی تعریف کیجیے۔ مثالیں دیجیے۔
3. تواتر کی انتہا کی تعریف کیجیے۔ مثال دیجیے۔
4. یک رنگی تواتر کی تعریف کیجیے۔ مثالیں دیجیے۔

5.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. بولزانو وائرسٹراس کا قضیہ بیان کیجیے اور ثابت کیجیے۔
2. ثابت کیجیے کہ ہر ایک متدق تواتر بستہ ہوتا ہے لیکن اس کا برعکس درست نہیں۔
3. سینڈوچ قضیہ بیان اور ثابت کیجیے۔

5.8 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Introduction to Real Analysis, Donald R. Sherbert Robert G. Bartle 4th Edition , 2014
2. Elements Of Real Anyalsis, Narayan Shanti and Raisinghania M.D., 2003
3. Real Analysis, Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick, 4th Edition, 2017
4. Real Analysis, J.N. Sharma and A.R. Vasishtha, 2014
5. Real Analysis, V. Karunakaran, 2011
6. Real Analysis, N.L. Carothers, 2006

اکائی 6۔ کوشی تواتر اور لامتناہی سلسلے-I

(Cauchy Sequence and Infinite Series- I)

اکائی کے اجزا

6.0 تمہید(Introduction)

ہم کسی حقیقی تواتر کے استدقاق کو قائم کرنے کے متعدد طریقوں کے بارے میں تفصیل کے ساتھ پڑھ چکے ہیں۔ زیادہ تر طریقوں میں انتہاکا اولین علم ہوناضروری ہے۔ حالانکہ اگر کوئی تواتر یک رنگی ہے تب اس کے استدقاق کی تصدیق انتہا کی جانکاری کے بنا بھی کی جاسکتی ہے۔ کوشی کے طریقہ میں کسی تواتر کے استدقاق کو قائم کرنے میں نہ تو انتہا کے علم کی ضرورت ہے اور نہ ہی تواتر کے یک رنگی ہونے کی ضرورت ہے۔ چوں کہ یہ طریقہ تواتر کے عناصر پر ہی مرکوز ہے،اس لیے یہ زیادہ اچھا طریقہ ہے۔

اس اکائی میں ہم تواتر اور سلسلوں کے استدقاق کے لیے کوشی کے عام قاعدہ کے بارے میں جانکاری حاصل کریں گے۔ ساتھ ہی لامتناہی سلسلوں کی تعریف اوران کے استدقاق پر تفصیلی جانکاری حاصل کریں گے اور چند لامتناہی سلسلوں کے بارے میں پڑھیں گے۔

6.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کی تکمیل کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ

- کسی تواتر کے لیے کوشی کے قضیہ کو ثابت کر سکیں
- لامتناہی سلسلوں کی تعریف اوراس کے استدقاق کے لیے کوشی کے عام قاعدہ کو سمجھ سکیں

6.2 کوشی تواتر(Cauchy Sequence)

ہم کسی حقیقی تواتر کے استدقاق کو قائم کرنے کے متعدد طریقوں کے بارے میں تفصیل کے ساتھ پڑھ چکے ہیں۔ زیادہ تر طریقوں میں انتہاکا اولین علم ہوناضروری ہے۔ حالانکہ اگر کوئی تواتر یک رنگی ہے تب اس کے استدقاق کی تصدیق انتہا کی جانکاری کے بنا بھی کی جاسکتی ہے۔ کوشی کے طریقہ میں کسی تواتر کے استدقاق کو قائم کرنے میں نہ تو انتہا کے علم کی ضرورت ہے اور نہ ہی تواتر کے یک رنگی ہونے کی ضرورت ہے۔ چوں کہ یہ طریقہ تواتر کے عناصر پر ہی مرکوز ہے،اس لیے یہ زیادہ اچھا طریقہ ہے۔

تعریف: کسی تواتر $\{x_n\}$ کو کوشی تواتر کہا جاتا ہے اگر کسی دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے ایک طبعی عدد k اس طرح وجود رکھتا ہے کہ سبھی $m, n \geq k$ کے لیے $|x_m - x_n| < \epsilon$ ہو۔

نوٹ: m کی جگہ $n + p$ درج کرکے، جہاں $p = 1,2,3, \dots$ ہے، من درجہ بالا شرط کو مساوی طور پر ذیل کی طرح بیان کیا جاسکتا ہے

$|x_{n+p} - x_n| < \epsilon$ ، سبھی $n \geq k$ کے لیے اور $p = 1,2,3, \dots$

قضیہ 1: حقیقی اعداد کا کوشی تواتر متدق ہوتا ہے۔

ثبوت: فرض کیجیے کہ $\{x_n\}$ ایک کوشی تواتر ہے۔ سب سے پہلے ہم ثابت کریں گے کہ $\{x_n\}$ ایک بستہ تواتر ہے۔ فرض کیجیے کہ $\epsilon = 1$ ہے، تب ایک طبعی عدد k اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

سبھی $m, n \geq k$ کے لیے $|x_m - x_n| < 1$

اس لیے سبھی $n \geq k$ کے لیے $|x_k - x_n| < 1$

اس کا مطلب یہ ہوا کہ سبھی $n \geq k$ کے لیے

$$x_k - 1 < x_n < x_k + 1$$

فرض کیجیے کہ

$$k_1 = max\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k + 1\}$$
$$k_2 = min\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k - 1\}$$

تب

$$k_2 \leq x_n \leq k_1, \forall n \in N$$

اس لیے $\{x_n\}$ ایک بستہ تواتر ہے۔

بولزانو وائر سٹراس کے قضیہ سے $\{x_n\}$ ایک متدق تحت تواتر ہے۔

مان لیجیے کہ اس متدق تحت تواتر کی انتہا l ہے۔تب l تواتر $\{x_n\}$ کی تحت تواتر کی انتہا ہے۔

اب ہم ثابت کریں گے کہ تواتر l $\{x_n\}$ کی طرف متدق ہے۔

ہم $\epsilon > 0$ کو منتخب کرتے ہیں۔تب ایک طبعی عدد k اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$|x_m - x_n| < \frac{\epsilon}{2}, \forall m, n \geq k$$

چوں کہ $\{x_n\}$ کوشی تواتر ہے۔

چوں کہ l تواتر $\{x_n\}$ کی تحت تواتر اکی نتہا ہے، اس لیے ایک طبعی عدد $q > k$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$|x_q - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

چوں کہ $\{x_n\}$ کوشی تواتر ہے اور $q > k$ اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$|x_q - x_n| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \forall n \geq k$$

اب

$$\begin{aligned} |x_n - l| &= |x_n - x_q + x_q - l| \\ &\leq |x_n - x_q| + |x_q - l| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

یعنی

$$|x_n - l| < \epsilon, \qquad \forall n \geq k$$

یا

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l$$

اس لیے تواتر $\{x_n\}$ متدق ہے۔

قضیہ 2: ایک متدق تواتر کوشی تواتر ہوتا ہے۔

ثبوت: فرض کرو کہ تواتر $\{x_n\}$ متدق ہے اور

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l$$

اس لیے دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے ایک طبعی عدد k اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$|x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \forall n \geq k$$

اگر m, n طبعی اعداد اس طرح سے ہیں کہ $m, n \geq k$ تب

$$|x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

اور

$$|x_m - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

اب

$$|x_m - x_n| = |x_m - l + l - x_n|$$
$$\leq |x_m - l| + |l - x_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

یعنی

$$|x_n - x_n| < \epsilon, \qquad \forall m, n \geq k$$

اس لیے ہر ایک متدق تواتر کوشی تواتر ہوتا ہے۔

مثال 1۔ ثابت کیجیے کہ تواتر $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ایک کوشی تواتر ہے۔

ثبوت۔ فرض کیجیے کہ $x_n = \frac{1}{n}$ اور $\epsilon > 0$ اس لیے ایک طبعی عدد k اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $\frac{2}{k} < \epsilon$

فرض کیجیے کہ اگر $m, n \geq k$ ہوں اور

$$|x_m - x_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \epsilon$$

اس لیے تواتر $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ کوشی تواتر ہے۔

مثال 2۔ ثابت کیجیے کہ تواتر $\{(-1)^n\}$ کوشی تواتر نہیں ہے۔

ثبوت۔ فرض کیجیے کہ $x_n = (-1)^n$ ہے تب

اگر m, n دونوں جفت یا طاق ہوں

$$|x_m - x_n| = |(-1)^m - (-1)^n| = 0$$

اور اگر m, n میں سے ایک جفت اور دوسرا طاق ہو

$$|x_m - x_n| = |(-1)^m - (-1)^n| = 2$$

ہم $\epsilon = \frac{1}{2}$ کو منتخب کرتے ہیں۔ تب یہ ناممکن ہے کہ ایک طبعی عدد k اس طرح وجود رکھتا ہو کہ

$$|x_m - x_n| < \epsilon, \qquad \forall m, n \geq k$$

اس لیے تواتر $\{(-1)^n\}$ کوشی تواتر نہیں ہے۔

6.2.1 کوشی کا استدقاقی معیار (Cauchy's Convergence Criterion)

کوشی کا استدقاق کے لیے عام اصول(Cauchy's General Principle of Convergence)

بیان: ایک تواتر متدق (Convergent) ہوتی ہے اگر اور صرف اگر یہ کوشی تواتر ہو۔

مثال3۔ ثابت کیجیے کہ تواتر $\{x_n\}$ایک کوشی تواتر ہے، جہاں تواتر $x_1 = 0, x_2 = 1 \,\&x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n), \forall n \geq 1$ سے متعارف ہے۔

ثبوت۔

$$x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n)$$
$$x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n) - x_{n+1}$$
$$= -\frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n)$$
$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|, \qquad \forall n \in N$$

اس لیے

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|$$
$$= \frac{1}{2^2}|x_n - x_{n-1}|$$
$$= \cdots = \frac{1}{2^n}|x_2 - x_1| = \frac{1}{2^n}$$

فرض کیجیے کہ $m > n$ہے تب

$$|x_m - x_n| = |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + x_{m-2} + \cdots + x_{n+1} - x_n|$$
$$\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n|$$
$$= \frac{1}{2^{m-2}} + \frac{1}{2^{m-3}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$
$$= \frac{4}{2^n}\left[1 - \frac{1}{2^{m-n}}\right] < \frac{4}{2^n}$$

فرض کیجیے کہ $\epsilon > 0$ ہے تب ایک طبعی عدد kاس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$\frac{4}{2^n} < \epsilon, \qquad \forall n \geq k$$

اس لیے

$$|x_m - x_n| < \epsilon$$

اس لیے، تواتر $\{x_n\}$کوشی تواتر ہے۔

مثال4۔ کوشی کے استدقاق کے لیے عام اصول کی مدد سے ثابت کیجیے کہ تواتر $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$متدق ہے۔

ثبوت۔ فرض کیجیے کہ

$$x_n = \frac{n}{n+1}$$

مان لیجیے کہ pایک طبعی عدد ہے،تب

$$x_{n+p} = \frac{n+p}{n+p+1}$$

$$\Rightarrow \qquad |x_{n+p} - x_n| = \left|\frac{n+p}{n+p+1} - \frac{n}{n+1}\right|$$

$$= \left|\frac{(n+1)(n+p) - n(n+p+1)}{(n+1)(n+p+1)}\right|$$

چوں کہ تمام pکے لیے $\frac{p}{n+p+1} < 1$ ہے۔اس لیے

$$= \frac{p}{(n+1)(n+p+1)} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}, \forall p$$

فرض کیجیے کہ $\epsilon > 0$ ہے تب

$$|x_{n+p} - x_n| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} < n$$

اگر ہم mکو اس طرح منتخب کریں کہ $n > m$ ہو تب m طبعی عدد اس طرح ہو گا کہ

$$|x_{n+p} - x_n| < \epsilon, \forall n \geq m, p = 1,2,3, \ldots$$

اس لیے،تواتر $\{x_n\}$متدق ہے۔

مشق۔ثابت کیجیے کہ تواتر $\{x_n\}$، جہاں $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ متدق نہیں ہے۔

6.2.2 لا متناہی سلسلے(Infinite Series)

فرض کیجیے کہ $\{x_n\}$ایک تواتر ہے۔اس تواتر کو

$$s_1 = x_1,$$
$$s_2 = x_1 + x_2,$$
$$s_3 = x_1 + x_2 + x_3,$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$s_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$$

سے متعارف کیا گیا۔اس کو علامت $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ کے ذریعے دکھایا جاتا ہے۔اس کو لا متناہی سلسلہ کہتے ہیں جس کی تشکیل $\{x_n\}$ سے ہوتی ہے۔

x_n کو سلسلہ کا n-واں رکن کہتے ہیں اور $\{x_n\}$ کو سلسلہ $\sum x_n$ کے جزوی جمع(Partial Sums) کا تواتر کہتے ہیں۔

اگر $\{x_n\}$ایک حقیقی تواتر ہے تو $\sum x_n$ حقیقی اعداد کا سلسلہ ہے۔ہم یہاں صرف حقیقی اعداد کے سلسلہ کے ساتھ مرکوز رہیں گے۔

6.2.3 لا متناہی سلسلوں کا استدقاق اور متدع(Convergence and Divergence of Infinite Series)

لا متناہی سلسلہ $\sum x_n$ کو متدق یا متدع(Convergent or Divergent) کہا جاتا ہے جب کہ تواتر $\{x_n\}$متدق یا متدع ہو۔اگر انتہا

تب ہم اس کو لکھتے ہیں $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s$ تب $\lim_{n\to\infty} x_n = s$

حالاں کہ اگر ∞ یا $-\infty$ ہو $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ تب سلسلہ $\sum x_n$ کو ہم کہتے ہیں کہ یہ ∞ کی طرف یا $-\infty$ کی طرف متدرع (Divergent)/منتشر ہے۔

مثال 5۔ سلسلہ $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots$ پر غور کیجیے۔

حل۔ فرض کیجیے کہ سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ہے۔ تب

$$x_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

مان لیجیے کہ $s_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$ تب

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= \left(1-\frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

اس لیے

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$$

اس لیے سلسلہ متدق ہے اور سلسلہ کا جمع 1 ہے۔

مثال 6۔ سلسلہ $1+2+3+\cdots$ پر غور کیجیے۔

حل۔ مان لیجیے کہ $s_n = 1+2+3+\cdots+n$ ہے، تب

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

اس لیے

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\} = \infty$$

اس لیے سلسلہ متدرع ہے۔

مثال 7۔ سلسلہ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots$ پر غور کیجیے۔

حل۔ مان لیجیے کہ $s_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$ جو ایک جیومترائی سلسلہ ہے، تب

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \\ &= 2-\frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

اس لیے

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left\{2-\frac{1}{2^{n-1}}\right\} = 2$$

اس لیے سلسلہ متدق ہے اور سلسلہ کا جمع 2 ہے۔

جیومترائی سلسلہ (Geometric Series)

ہم سلسلہ $1 + r + r^2 + \cdots$ کو فرض کرتے ہیں، جہاں $|r| < 1$ ہے۔ تب

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} \\ &= \frac{(1-r^n)}{1-r} = \frac{1}{1-r} - \frac{r^n}{1-r} \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{1-r} - \frac{r^n}{1-r}\right\} = \frac{1}{1-r} - 0 = \frac{1}{1-r}$$

چوں کہ $|r| < 1$ ہے اس لیے

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$$

اس لیے سلسلہ متدق ہے اور $\lim_{n\to\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ ہے۔

اگر $|r| \geq 1$ ہو تب

$$s_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}$$

اگر $r = 1$ ہو تب

$$s_n = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1\ (n \text{ مرتبہ}) = n$$

اس لیے

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

اس لیے سلسلہ متدرع ہوتا ہے۔

اگر $r > 1$ ہو تب اس صورت میں

$$s_n = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

اس لیے

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{r^n-1}{r-1}\right) = \infty$$

اس لیے سلسلہ متدرع ہے۔

اگر $r = -1$ ہو تب اس صورت میں

$$s_n = \begin{cases} 1, & \text{اگر } n \text{ طاق ہے} \\ 0, & \text{اگر } n \text{ جفت ہے} \end{cases}$$

اس لیے تواتر متدرع ہوگا۔

اگر $r < -1$ ہو تب اس صورت میں تواتر $\{s_n\}$ متدع ہو گا۔ اس لیے دیا گیا سلسلہ متدع ہے۔

اس طرح جیومترائی سلسلہ $\sum_{r=0}^{\infty} r^n$ متدق ہو گا اگر $|r| < 1$ ہو اور متدع ہو گا اگر $|r| \geq 1$ ہو۔

ہارمونک سلسلہ (Harmonic Series)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

فرض کیجیے کہ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ایک سلسلہ ہے۔ اس لیے $x_n = \frac{1}{n}$ ہو گا۔ اور مان لیجیے کہ $s_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$ ہے، **تب**

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1, \\
s_2 &= 1 + \frac{1}{2}, \\
s_3 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}, \\
s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\
&= 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) \\
s_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\
&> 1 + 3\left(\frac{1}{2}\right) \\
s_{16} &> 1 + 4\left(\frac{1}{2}\right) \\
\therefore s_{2^n} &> 1 + n\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

اس لیے

$$\lim_{n \to \infty} s_{2^n} = \infty$$

چوں کہ $s_{n+1} - s_n = x_{n+1} > 0$ ہے، اس لیے $\{s_n\}$ تاکیدی طور پر بڑھتا ہوا تواتر ہے۔

چوں کہ تحت تواتر $\{s_{2^n}\}$ متدع ہے اس لیے $\{s_n\}$ متدع تواتر ہے۔

اور اس لیے سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ متدع ہے۔

نتیجہ (Result): اگر $\sum x_n$ اور $\sum y_n$ دو سلسلے ہیں جن کا جمع بالترتیب s اور t ہیں تب

(i) سلسلہ $\sum(x_n + y_n)$ جمع s + t کی طرف متدق ہوتا ہے۔

(ii) سلسلہ $\sum kx_n$، جہاں k ایک حقیقی عدد ہے، جمع ks کی طرف متدق ہوتا ہے۔

6.2.4 کوشی کالا متناہی سلسلوں کے لیے استد قاقی اصول

(Cauchy's Convergence Principle for Infinite Series)

بیان: کسی سلسلہ $\sum x_n$ کے استد قاق کے لیے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ کسی دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے ایک طبعی عدد m اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+p}| < \epsilon, \forall n \geq m, p \in \mathbb{N}$$

ثبوت۔ مان لیجیے کہ $s_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$ ہے۔ فرض کیجیے کہ سلسلہ $\sum x_n$ متدق ہے۔ تب تواتر $\{s_n\}$ متدق ہوگا۔

اس لیے تواتر کے استد قاق کے لیے کوشی کے اصول سے تواتر $\{s_n\}$ کوشی تواتر ہے یعنی دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے ایک عدد $m \in N$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$|s_{n+p} - s_n| < \epsilon, \forall n \geq m, p \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow |x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+p}| < \epsilon, \forall n \geq m, p \in \mathbb{N}$$

اس کے بالعکس، فرض کیجیے کہ دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے ایک عدد $m \in N$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+p}| < \epsilon, \forall n \geq m, p \in \mathbb{N}$$

تب

$$|s_{n+p} - s_n| < \epsilon, \forall n \geq m$$

اس لیے $\{s_n\}$ کوشی تواتر ہے۔ اور اس لیے $\sum x_n$ متدق ہے۔

قضیہ 3: کسی سلسلہ $\sum x_n$ کے متدق ہونے کی ضروری شرط $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$ ہے۔

ثبوت: سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ کے جزوی اجماع کے تواتر $\{s_n\}$ پر غور کیجیے۔

ہمیں حاصل ہے

$$s_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n$$
$$s_{n-1} = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1}$$
$$\Rightarrow x_n = s_n - s_{n-1}$$

اب

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1})$$
$$= \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1}$$

چوں کہ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ متدق ہے، تب ہمیں حاصل ہے کہ تواتر $\{s_n\}$ متدق ہے یعنی

$$\lim_{n\to\infty} s_n = l = \lim_{n\to\infty} s_{n-1}$$

اس لیے

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = l - l = 0$$

اس لیے جب $\sum x_n$ کے متدق ہے تب $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ہے۔

لیکن اس کا برعکس ضروری نہیں کہ درست ہو۔ مثال کے لیے فرض کیجیے کہ سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

یہاں

$$x_n = \frac{1}{n}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

لیکن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متدرع ہوتا ہے۔

تعریف: کسی بھی لا متناہی سلسلہ کو جو درجہ ذیل شکل میں ہو

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$$

p -سلسلہ کہتے ہیں۔

قضیہ 4: p -سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ متدق ہوگا اگر $p > 1$ ہو اور متدرع ہوگا اگر $p \leq 1$ ہو

ثبوت: فرض کیجیے کہ s_n جزوی اجماع کے تواتر کو ظاہر کرتا ہے۔

$$s_n = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}$$

صورت (1) جب $p > 1$ ہو:

$$\frac{1}{1^p} = 1$$

اس لیے

$$\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} < \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} = \frac{2}{2^p} = \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^1 \qquad \begin{bmatrix} \because 3 > 2, p > 1 \\ \Rightarrow \quad \frac{1}{3} < \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$
$$\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} < \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} = \frac{4}{4^p} = \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2$$
$$\frac{1}{8^p} + \frac{1}{9^p} + \cdots + \frac{1}{15^p} < \frac{8}{8^p} = \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{(2^n)^p} + \frac{1}{(2^n+1)^p} + \cdots + \frac{1}{(2^{n+1}-1)^p} < \frac{2^n}{(2^n)^p} = \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n$$

چوں کہ $2^{n+1} - 1 = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$ ہوتا ہے، تب جمع کرنے پر

$$s_{2^{n+1}-1} < 1 + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^1 + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n$$
$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2^{p-1}}}$$
$$= \frac{2^{p-1}\left[1 - \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{n+1}\right]}{2^{p-1} - 1}$$

$$< \frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1}, \forall n$$

ہم جانتے ہیں کہ جب n کوئی مثبت صحیح عدد ہوتا ہے، تب

$$2^{n+1} - 1 > 2^n > n$$

اس لیے

$$s_n < s_{2^n} < s_{2^{n+1}-1} < \frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1}$$

اس لیے دیے گئے مثبت ارکان کے جزوی اجماع کا تواتر $\{s_n\}$ بستہ ہوتا ہے اور اسی لیے سلسلہ متدق ہے اگر $p > 1$ ہو۔

صورت (2) جب $p \leq 1$ ہو:

ہم جانتے ہیں کہ اگر n کوئی مثبت صحیح عدد ہوتا ہے اور $p \leq 1$ ہو، تب

$$n^p \leq n \Rightarrow \frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$$

اس لیے

$$1 + \frac{1}{2^p} > 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} > \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} + \frac{1}{8^p} > \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{(2^{m-1}+1)^p} + \frac{1}{(2^{m-1}+2)^p} + \cdots + \frac{1}{(2^m)^p} > \frac{1}{2}$$

جمع کرنے پر ہمیں $s_{2^m} > \frac{m}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔

اگر G کوئی عدد ہے تب ایک عدد $m \in N$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$\frac{m}{2} > G$$

فرض کیجیے کہ $n > 2^m$

$$s_n < s_{2^m} > G$$

اس لیے، جزوی اجماع کا تواتر اوپر سے بستہ نہیں ہے اور اسی لیے سلسلہ متدع ہوتا ہے اگر۔

$$s_n < s_{2^n} < s_{2^{n+1}-1} < \frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1}$$

اس لیے دیے گئے مثبت ارکان کے جزوی اجماع کا تواتر $\{s_n\}$ بستہ ہوتا ہے اور اسی لیے سلسلہ متدق ہے اگر $p \leq 1$ ہو۔

اس لیے p - سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ متدق ہوگا اگر اور صرف اگر $p > 1$ ہو۔

مثالیں:

1. سلسلہ $\cdots + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{1^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ متدق ہے چوں کہ $p = 3 > 1$ ہے۔

2. سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$ متدق ہے چوں کہ $p = \frac{5}{2} > 1$ ہے۔

3. سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ متدع ہے چوں کہ $p = \frac{1}{2} < 1$ ہے۔

6.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے کوشی تواتر کی تعریف کی اور لا متناہی سلسلہ کے بارے میں تفصیلی جانکاری حاصل کی ہے۔ ہم نے تواتر کے کوشی تواتر ہونے یا نا ہونے کی جانچ سیکھی اور اس کے استدقاق کے لیے مختلف مرحلوں کو سمجھا۔ ہم نے لا متناہی سلسلوں کے لیے کوشی کے تصور کو عمومی کرتے ہوئے بتایا کہ لا متناہی سلسلہ متدق ہوتا ہے جب کہ صرف اس کے جزوی اجماع کا تواتر متدق ہو۔

6.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

کوشی تواتر، لا متناہی سلسلہ، سلسلوں کا استدقاق، p - سلسلہ، جیومترائی سلسلہ، ہارمونی سلسلہ

6.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

6.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. فرض کیجیے کہ جزوی جمع (Partial Sums) کے تواتر $\{s_n\}$ کے ساتھ حقیقی اعداد کا سلسلہ $\sum x_n$ ہے۔ سلسلہ متدق ہوتا ہے اگر ________________

2. اگر $\sum x_n$ متدق ہے A کی طرف اور $\sum y_n$ متدق ہے B کی طرف تب سلسلہ $\sum(x_n + y_n)$ ________________ کی طرف متدق ہے۔

3. اگر $\sum x_n$ متدق ہے تب $\lim_{n\to\infty} x_n =$ ____________

4. سلسلہ $\sum(x_n - x_{n-1})$ متدق ہے اگر اور صرف اگر ________________

5. اگر $\{s_n\}$ ایک کوشی تواتر ہے تب ________________ $\{s_n\}$ ہے۔

6. ہر ایک بستہ تواتر کوشی تواتر ہوتی ہے۔ [صحیح/غلط]

7. ہر ایک متدق تواتر کوشی تواتر ہوتی ہے۔ [صحیح/غلط]

8. $\sum \frac{n^n}{n!}$ متدق ہے۔ [صحیح/ غلط]

9. $\sum \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$ متدق ہے۔ [صحیح/غلط]

10. سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ متدع ہے۔ [صحیح/غلط]

6.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

1. دکھائیے کہ ہر ایک کوشی تواتر بستہ ہوتا ہے۔
2. ثابت کیجیے کہ ہر ایک متسدق تواتر کوشی تواتر ہوتی ہے۔
3. ثابت کیجیے کہ سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ متسدق ہے۔

6.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات(Long Answer Type Questions)

1. کسی لامتناہی سلسلہ کے لیے کوشی کے عام اصول کو بیان اور ثابت کیجیے۔
2. تواتر کے لیے کوشی کے قضیہ کو بیان اور ثابت کیجیے۔

6.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد(Suggested Learning Resources)

1. Introduction to Real Analysis, Donald R. Sherbert Robert G. Bartle 4th Edition , 2014
2. Mathematical Analysis, S.C. Malik and Savitha Aror
3. Elements Of Real Anyalsis, Narayan Shanti and Raisinghania M.D., 2003
4. Real Analysis, Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick, 4th Edition, 2017
5. Real Analysis, J.N. Sharma and A.R. Vasishtha, 2014
6. Real Analysis, V. Karunakaran, 2011
7. Real Analysis, N.L. Carothers, 2006
8. Basic Real Analysis, Houshang H. Sohrab, 2nd Edition, 2014

اکائی 7۔ لا متناہی سلسلے-II

(Infinite Series-II)

اکائی کے اجزا

7.0 تمہید(Introduction)

سلسلوں کا استدقاق معلوم کرنے کے لیےان کے جذوی حاصل مجمعوں کے تواتر(Sequence of Partial Sums)کی جانچ کرکے معلوم کیاجاتاہے۔ بیشتر صورتوں میں S_nجو کہ n جزوی جمع شدہ(پہلے nرقوم کا مجموعہ)رقم ہے۔ اس سے آسانی سے استدقاق کی جانچ مشکل ہوتی ہے یاحتمی نہیں ہوتی۔ اس لیےاور بھی جانچ کے طریقے موجود ہیں جنہیں "استدقاق کے جانچ" کہاجاتاہے۔ ان کو اس اکائی میں بحث میں لایاجائے گا۔

7.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے ختم پر طلبااس قابل ہوجائیں گے کہ وہ سلسلوں کی استدقاق اور غیر استدقاق ہونے کو مندرجہ ذیل جانچ کے طریقوں پر پرکھ سکیں:

i) حدمقابلہ جانچ(Limit Comparison Test)

ii) دالمبرت کی نسبت جانچ(D' Alembert's Ratio Test)

iii) کوشی کا n^{th} جذر جانچ(Cauchy's n^{th} Root Test)

iv) تکملی جانچ(Integral Test)

7.2 لامتناہی سلسلے (Infinite Series)

کسی مثبت رقم والے سلسلہ کے استدقاق کو پرکھنے کے لیے کوئی معلوم سلسلہ(یعنی جس کا استدقاق یا غیر استدقاق ہونامعلوم ہو)سے جانچاجاتاہے۔

اس کے لیے دوطرح کے سلسلے استعمال ہوتے ہیں:

1) جیومتری سلسلہ $\sum ar^n$ جوکہ(Geometric Series)

i) متدق(Convergent)ہوگا اگر $r < 1$

ii) منتشر ہوگا اگر $r \geq 1$

2) معاون $p-$سلسلہ $\sum \frac{1}{n^p}$(Auxiliary p −Series)جو کہ

i) متدق ہوگا اگر $p > 1$

ii) منتشر ہوگا اگر $p \leq 1$

7.2.1 مقابلہ جانچ(Comparision Test)

اگر $\sum u_n$ اور $\sum v_n$ دو مثبت سلسلے ہیں اور $n \in \mathbb{N}$ اس طرح کہ k کہ جب $u_n \le kv_n, \forall n \ge m$ ایک مستقل مثبت عدد ہے

تب $\sum u_n$ (i) متدق ہوگا اگر $\sum v_n$ متدق ہو۔

اور $\sum u_n$ (ii) منتشر ہوگا اگر $\sum v_n$ منتشر ہو۔

ثبوت۔ فرض کرو کہ $\mathrm{S_n} = u_1 + u_2 + \cdots u_n$ اور $\mathrm{t_n} = v_1 + v_2 + \cdots v_n$ ہیں۔

تب

$$\begin{aligned} \mathrm{S_n} - \mathrm{S_m} &= u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots u_n \\ &\le k(v_{m+1} + v_{m+2} + \cdots v_n) \\ &= k(\mathrm{t_n} - \mathrm{t_m}) \\ \Rightarrow \mathrm{S_n} &\le k\mathrm{t_n} + h \end{aligned}$$

جہاں $h = S_m - kt_m$ ہے۔

(i) اگر $\sum v_n$ متدق ہے، تب تواتر $\{t_n\}$ بستہ (Bounded) ہوگا۔ اس لیے

$$\mathrm{S_n} < k\mathrm{B} + h, \forall n \ge m$$

اس لیے $\{\mathrm{S_n}\}$ بالائی بستہ ہوگا۔

یعنی $\{\mathrm{S_n}\}$ یک رنگیا ضافی اور بالائی بستہ ہوگا

لہٰذا یک رنگی متدق قضیہ کی بنا $\{\mathrm{S_n}\}$ متدق ہوگا

لہٰذا $\sum u_n$ متدق ہوگا

(ii) اگر $\sum v_n$ منتشر ہو

تب چوں کہ $S_n \le kt_n + h$ اور $\{t_n\}$ بالائی بستہ نہیں ہے۔

لہٰذا $\{\mathrm{S_n}\}$ منتشر ہوگا۔

لہٰذا $\sum u_n$ بھی منتشر ہوگا۔

7.2.2 حد مقابلہ جانچ (Limit Comparison Test)

اگر $\sum u_n$ اور $\sum v_n$ دو مثبت سلسلے ہیں جسکے رقوم حقیقی اعداد ہیں اور $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$

جہاں l غیر صفر متناہی عدد ہے (یعنی $l \ne 0, l \ne \infty$)

تب دونوں سلسلے ایک ہی صفت کے حامل ہوں گے

یعنی یا تو دونوں متدق ہوں گے یا دونوں منتشر ہوں گے

ثبوت۔ اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ اور $l > 0$

تب کسی بھی $\epsilon > 0$ کے لیے ایک عدد $m \in \mathbb{N}$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - l\right| < \epsilon, \forall n \ge m$$

$$\Rightarrow l-\epsilon<\frac{u_n}{v_n}<l+\epsilon$$

$$(1)\text{-------------}\Rightarrow u_n<kv_n, \forall\, n\geq m, k=l+\epsilon>0$$

$$(2)\text{------------}\Rightarrow u_n\geq k'v_n, \forall\, n\geq m, k'=l-\epsilon>0$$

مقابلہ جانچ کی پہلی قسم کے ذریعہ ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ

(1) کے ذریعہ اگر $\sum v_n$ متدق ہے تب $\sum u_n$ متدق ہوگا۔

اور (2) کے ذریعہ اگر $\sum v_n$ منتشر ہے تب $\sum u_n$ بھی منتشر ہوگا۔

لہٰذا یہ ثابت ہوا کہ دونوں سلسلے ایک ہی صفت کے حامل ہوں گے۔

نوٹ: کسی دیے ہوئے سلسلہ $\sum u_n$ کی جانچ کے لیے مناسب $\sum v_n$ جس کی صفت معلوم ہو جیومتری سلسلہ یا p– سلسلے جاکر حد مقابلہ جانچ سے $\sum u_n$ کی صفت معلوم کیجاتی ہے۔

مثال 1۔ $\sum \frac{n^3}{n^5+5n^4+7}$ کے متدق ہونے کی جانچ کیجیے۔

حل۔ مان لو

$$u_n=\frac{n^3}{n^5+5n^4+7}$$
$$<\frac{n^3}{n^5}=\frac{1}{n^2}, \forall n\in\mathbb{N}$$

اور چوں کہ $\sum\frac{1}{n^2}$ ایک p– سلسلہ ہے جہاں $p=2>1$ ہے

اس لیے یہ متدق ہے لہٰذا $\sum u_n$ بھی متدق ہوگا

مثال 2۔ $\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{1}{n}\right)$ کے متدق ہونے کی جانچ کیجیے۔

حل: مان لو کہ

$$\sum u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\log(1)-\log(n)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-\log(n))$$

یعنی $u_n=-\log(n)$

$$log(n)<n, n\geq 1$$
$$\Rightarrow\quad -\log(n)>-n$$

اگر $v_n=-n$ تب $\sum(-n)$ منتشر ہے

لہٰذا مقابلہ جانچ کی مدد سے معلوم ہوا کہ $\sum u_n$ بھی منتشر ہے۔

مثال 3۔ متدق ہونے کی جانچ کیجیے

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{3}{2\cdot3\cdot4}+\frac{5}{3\cdot4\cdot5}+\cdots$$

حل۔ $\sum u_n = \sum \frac{2n-1}{n(n-1)(n+2)}$

یعنی $u_n = \frac{2n-1}{n(n-1)(n+2)}$

Numerator اور Denominator سے n سب سے بڑی مثبت قوت کے ساتھ باہر لینے سے ہم v_n بناتے ہیں۔ یعنی $v_n = \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$

اور یاد رکھو $\sum v_n = \sum \frac{1}{n^2} - p$ سلسلہ ہے جہاں $p = 2 > 1$ ہے، اس لیے یہ متدق ہے۔

اب یہ بھی دیکھو

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n-1}{n(n-1)(n+2)}}{\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}$$

$$= \frac{2-0}{(1+0)(1+0)} = 2$$

یہ غیر صفر متناہی عدد ہے۔

لہٰذا حد مقابلہ جانچ کی مدد سے نتیجہ یہ ہے کہ دونوں $\sum u_n$ اور $\sum v_n$ سلسلے ایک ہی صفت رکھیں گے۔ چوں کہ $\sum v_n = \sum \frac{1}{n^2}$ ایک $-p$ سلسلہ ہے جہاں $p = 2 > 1$ ہے، اس لیے یہ متدق ہے۔ لہٰذا $\sum u_n$ دیا گیا سلسلہ بھی متدق ہے۔

مثال 4۔ سلسلہ $\sum \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ کا استدقاق معلوم کرو۔

حل۔ دیا گیا سلسلہ ہے $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

معقول (Rationalize) بنانے سے

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \times \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{n-(n+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{-1}$$

$$= \sqrt{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}+1}-1\right)$$

$$= \sqrt{n}\left(\left(\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{1}{2}}-1\right)$$

دو رکنی پھیلاؤ (Binomial Expansion) کی مدد سے

$$u_n = \sqrt{n}\left\{\left(1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+\cdots\right)-1\right\}$$

$$= \sqrt{n}\left\{\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+\cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{8n} + \cdots\right\}$$

مان لو $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

تب حد مقابلہ جانچ لگانے سے

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{8n} + \cdots\right\}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{1}{2} - 0 + 0 - \cdots = \frac{1}{2}$$

یہ غیر صفر متناہی عدد ہے۔

لہٰذا حد مقابلہ جانچ کی مدد سے دونوں سلسلے یک صفت ہوں گے۔

چوں کہ $\sum v_n = \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ ہے جہاں $p = \frac{1}{2} < 1$ ہے۔

لہٰذا یہ منتشر ہے لہٰذا دیا گیا سلسلہ $\sum u_n$ بھی منتشر ہوگا۔

مثال 5۔ سلسلہ $\sum\left(\sqrt[3]{n^3+1} - n\right)$ کے استدقاق کی جانچ کیجیے

حل۔ $\sum u_n = \sum\left(\sqrt[3]{n^3+1} - n\right)$

$$u_n = \frac{\left[(n^3+1)^{\frac{1}{3}} - (n^3)^{\frac{1}{3}}\right]\left[(n^3+1)^{\frac{2}{3}} + (n^3+1)^{\frac{1}{3}}\cdot(n^3)^{\frac{1}{3}} + (n^3)^{\frac{2}{3}}\right]}{\left[(n^3+1)^{\frac{2}{3}} + (n^3+1)^{\frac{1}{3}}\cdot(n^3)^{\frac{1}{3}} + (n^3)^{\frac{2}{3}}\right]}$$

$$= \frac{\left[\left\{(n^3+1)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 - \left\{(n^3)^{\frac{1}{3}}\right\}^3\right]}{n^2\left[\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{3}} + 1\right]} \quad [\because a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)]$$

$$= \frac{[n^3 + 1 - n^3]}{n^2\left[\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{3}} + 1\right]}$$

$$= \frac{1}{n^2\left[\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{3}} + 1\right]}$$

اب مان لیجیے کہ $\sum v_n = \sum \frac{1}{n^2}$

اس لیے

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2\left[\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{3}} + 1\right]}}{\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left[\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{3}} + 1\right]}$$
$$= \frac{1}{\left[(1+0)^{\frac{2}{3}} + (1+0)^{\frac{1}{3}} + 1\right]}$$
$$= \frac{1}{3}$$

یہ غیر صفر اور متناہی ہے۔

اس لیے حد مقابلہ جانچ کے مطابق دونوں سلسلے $\sum u_n$ اور $\sum v_n$ یک صفتی ہوں گے

چوں کہ $\sum v_n = \sum \frac{1}{n^2}$ ایک $p-$ سلسلہ ہے، جہاں $p = 2 > 1$ ہے۔ اس لیے $\sum v_n$ متدق ہے۔

لہٰذا دیا گیا سلسلہ بھی متدق ہے۔

مثال 6۔ استدقاق کی جانچ کیجیے

$$\frac{\sqrt{2}-1}{3^3-1} + \frac{\sqrt{3}-1}{4^3-1} + \frac{\sqrt{4}-1}{5^3-1} + \cdots$$

حل۔ یہاں

$$u_n = \frac{\sqrt{n+1}-1}{(n+2)^3-1}$$
$$= \frac{\sqrt{n}\left[\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right]}{n^3\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^3 - \frac{1}{n^3}\right]}$$
$$= \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}}{n^{\frac{5}{2}}\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^3 - \frac{1}{n^3}\right]}$$

اب مان لیجیے کہ $\sum v_n = \sum \frac{1}{n^{5/2}}$

اس لیے

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}}{n^{\frac{5}{2}}\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^3 - \frac{1}{n^3}\right]}}{\dfrac{1}{n^{\frac{5}{2}}}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}}{\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^3 - \frac{1}{n^3}\right]}$$
$$= \frac{\sqrt{1+0} - 0}{[(1+0)^3 - 0]}$$
$$= 1 \neq 0 \;\&\; \neq \infty$$

چوں کہ limit غیر صفر اور متناہی ہے اس لیے حد مقابلہ جانچ کے مطابق دونوں سلسلے $\sum u_n$ اور $\sum v_n$ یا تو متدق ہوں گے یا منتشر ہوں گے

چوں کہ $\sum v_n = \sum \frac{1}{n^{5/2}}$ ایک $p-$ سلسلہ ہے، جہاں $p = \frac{5}{2} > 1$ ہے۔ لہٰذا یہ متدق ہے۔ اس لیے نتیجہ یہ ہے کہ دیا گیا سلسلہ بھی متدق ہے۔

مشق: استدقاق کی جانچ کیجیے:

$$\frac{1}{4\cdot 7\cdot 10}+\frac{1}{7\cdot 10\cdot 13}+\frac{1}{10\cdot 13\cdot 16}+\cdots$$

مثال 7۔ استدقاق کی جانچ کیجیے $\sum \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$

حل۔ ہمیں حاصل ہے

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{3!\,n^3}+\frac{1}{5!\,n^5}-\cdots\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\left[1-\frac{1}{3!\,n^2}+\frac{1}{5!\,n^4}-\cdots\right] \end{aligned}$$

اب اگر $\sum v_n = \sum \frac{1}{n^2}$ لیا جائے

حد مقابلہ جانچ کی جائے

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}\left[1-\frac{1}{3!n^2}+\frac{1}{5!n^4}-\cdots\right]}{\frac{1}{n^2}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{3!\,n^2}+\frac{1}{5!\,n^4}-\cdots\right] \\ &= 1-0+0-\cdots \\ &= 1 \neq 0 \ \& \neq \infty \end{aligned}$$

لہٰذا چوں کہ $\sum v_n = \sum \frac{1}{n^2}$ ایک $p-$ سلسلہ ہے، جہاں $p = 2 > 1$ ہے، جو کہ متدق ہوتا ہے لہٰذا $\sum u_n$ بھی متدق ہوگا

مثال 8۔ سلسلہ $\sum \frac{1}{2^n+3^n}$ کے استدقاق کی جانچ کیجیے۔

حل۔ دیے گئے سلسلہ میں

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{2^n+3^n} \\ &= \frac{1}{3^n\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right]} \end{aligned}$$

یہاں $\sum v_n = \sum \frac{1}{3^n}$ لیا جائے گا۔

تب حد مقابلہ جانچ کرنے سے

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3^n\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right]}}{\frac{1}{3^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right]}$$

$$= \frac{1}{[0+1]}$$

$$= 1 \neq 0 \;\&\; \neq \infty$$

لہٰذا دونوں سلسلے یا تو متدق ہوں گے یا منتشر ہوں گے

ہمیں معلوم ہے $\sum v_n = \sum \frac{1}{3^n}$ جیومتری سلسلہ ہے جس کے لیے $r = \frac{1}{3} < 1$ ہے۔ لہٰذا یہ متدق ہے۔ نتیجتاً $\sum u_n$ بھی متدق ہے۔

مثال 9۔ $\sum u_n = \sum\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$ کے استد قاق کی جانچ کیجیے۔

حل۔ ہمیں حاصل ہے

$$u_n = \sqrt{n^2+1} - n$$

$$= \frac{\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)\left(\sqrt{n^2+1} + n\right)}{\sqrt{n^2+1} + n}$$

$$= \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1} + n}$$

$$= \frac{1}{n\left[\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + 1\right]}$$

یہاں $\sum v_n = \sum \frac{1}{n}$ لیا جائے گا۔

تب حد مقابلہ جانچ لگانے سے

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\left[\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right]}}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left[\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + 1\right]}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \neq 0 \;\&\; \neq \infty$$

اس لیے دونون سلسلے یک صفتی ہوں گے۔ چوں کہ $\sum v_n = \sum \frac{1}{n}$ ایک $p-$ سلسلہ ہے، جہاں $p = 1$ ہے، اس لیے $\sum v_n$ منتشر ہو گا۔ لہٰذا دیا ہوا سلسلہ $\sum u_n$ بھی منتشر ہو گا۔

مشقی سوالات: ذیل کے سلسلوں کا استد قاق جانچ کرو

(i) $\sum\left(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3}\right)$

(ii) $\sum\left(\sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4-1}\right)$

$\sum\left(\sqrt{n^4+1}-n^2\right)$ (iii)

7.2.3 کوشی کی جذر جانچ (Cauchy's Root Test)

اگر $\sum u_n$ مثبت ارقام کا سلسلہ ہو اور $\lim_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}}=l$، تب

i) $\sum u_n$ متدق ہوگا اگر $l<1$

ii) $\sum u_n$ منتشر ہوگا اگر $l>1$

iii) جانچ ناکام ہو جائیگی اگر $l=1$

ثبوت۔ $u_n>0, \forall n\in\mathbb{N}$ اس لیے $(u_n)^{\frac{1}{n}}>0$

لہٰذا $\lim_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}}=l\geq 0$

اور $\epsilon>0$ کے لیے $\exists m\in\mathbb{Z}^+$ اس طرح سے کہ

$$\left|(u_n)^{\frac{1}{n}}-l\right|<\epsilon, \forall n\geq m$$

$$\Rightarrow l-\epsilon<(u_n)^{\frac{1}{n}}<l+\epsilon, \forall n\geq m$$

$$\Rightarrow (l-\epsilon)^n<u_n<(l+\epsilon)^n, \forall n\geq m \quad \text{------} (1)$$

i) اگر $l<1$ تب ϵ کو اس طرح سے منتخب کیا جاسکتا ہے کہ $k=l+\epsilon<1$

تب $0\leq l<k<1$

مساوات (1) کے ذریعہ

$$u_n<(l+\epsilon)^n, \forall n\geq m$$

$$\Rightarrow u_n<k^n, \forall n\geq m$$

لیکن $\sum k^n$ جیومتری سلسلہ ہے جہاں مشترک نسبت $k<1$ اس لیے $\sum k^n$ متدق ہے۔

چنانچہ مقابلہ جانچ کی مدد سے $\sum u_n$ بھی متدق ہوگا۔

ii) اگر $l>1$ تب ϵ اس طرح سے چنا جاسکتا ہے کہ $l-\epsilon>1$

تب مساوات (1) کی مدد سے $(l-\epsilon)^n<u_n, \forall n\geq m$

اب چوں کہ $\sum(l-\epsilon)^n$ جیومتری سلسلہ ہے جہاں مشترک نسبت $l-\epsilon>1$ ہے لہٰذا $\sum(l-\epsilon)^n$ منتشر ہوگا۔

تب مقابلہ جانچ کی وجہ سے $\sum u_n$ بھی منتشر ہوگا۔

iii) اگر $l=1$

تب اس جانچ سے پتہ نہیں چلے گا، کیوں کہ ہم جانتے ہیں کہ $\sum\frac{1}{n}$ منتشر سلسلہ ہے جب کہ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=1$ اور $\sum\frac{1}{n^2}$ متدق سلسلہ ہے اور یہاں بھی $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=1$ اس لیے جانچ $l=1$ پر ناکام ہے۔

نوٹ 1۔ اگر $\sum u_n$ متدق ہے تب $\sum\frac{1}{u_n}$ منتشر ہوگا

کیوں کہ $\sum u_n$ متدق ہونے کی صورت میں $\lim_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}} < 1$

تب $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{u_n}\right)^{\frac{1}{n}} > 1$ ہے،اس لیے $\sum\frac{1}{u_n}$ منتشر ہوگا۔

نوٹ2۔ عام طور پر جذر جانچ اُس سلسلہ پر لگایا جاتا ہے جس کے ارقام میں قوت ہوتی ہے۔

مثال10۔ سلسلہ $\sum\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$ کے استدقاق کی جانچ کرو۔

حل۔ دیے گئے سلسلہ سے

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$$

کوشی کی جذر جانچ لگانے سے

$$\lim_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}\right\}^{\frac{1}{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{1}{e} < 1$$

لہٰذا کوشی جذر جانچ کے مطابق $\sum u_n$ متدق ہے۔

مثال11۔ $\sum\frac{x^n}{n^n}, x > 0$ کا استدقاق جانچ کیجیے۔

حل۔ $u_n = \frac{x^n}{n^n}, x > 0$

جذر جانچ کرنے پر

$$\lim_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{x^n}{n^n}\right\}^{\frac{1}{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}$$
$$= \frac{x}{\infty} = 0 < 1$$

لہٰذا $\sum u_n$ متدق ہے۔

مثال12۔ سلسلہ $\sum\frac{2^n}{n^3}$ کے استدقاق کی جانچ کیجیے۔

حل۔ دیا گیا سلسلہ $\sum u_n = \sum\frac{2^n}{n^3}$ ہے۔

جذر جانچ کرنے پر

$$\lim_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2^n}{n^3}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^{\frac{3}{n}}}$$

یاد رہے کہ $\lim_{n\to\infty}(n)^{\frac{1}{n}} = 1$

$$= \frac{2}{(1)^3} = 2 > 1$$

لہٰذا $\sum u_n$ منتشر ہے۔

مثال 13۔ سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n x^n$ کے استدقاق کی جانچ کیجیے۔

حل۔ یہاں $u_n = \frac{1}{n^3}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n x^n$ ہے۔

جذر جانچ کرنے پر

$$\lim_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n^3}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n x^n\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{n}}}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)x$$

$$= \frac{1}{\left(\lim_{n\to\infty}\left(n^{\frac{1}{n}}\right)\right)^3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}}\right)x$$

ہمیں معلوم ہے کہ $\lim_{n\to\infty}(n)^{\frac{1}{n}} = 1$ ہوتا ہے، اس لیے

$$= \frac{1}{(1)^3}\left(\frac{1+0}{1+0}\right)x = x$$

چوں کہ $\lim_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}}$ کی قیمت $x > 0$ ہے۔ اس لیے سلسلہ $\sum u_n$ مستدق ہوگا اگر $x < 1$ ہو اور منتشر ہوگا اگر $x > 1$ ہو۔

اور $x = 1$ کی صورت میں اس جانچ سے نتیجہ نہیں کہا جا سکتا ہے اس کے لیے حد مقابلہ جانچ کی جائے گی

$x = 1$ پر $u_n = \frac{1}{n^3}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n$ ہوگا۔

اگر $v_n = \frac{1}{n^3}$ لیا جائے تب حد مقابلہ جانچ کرنے پر

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n}{\frac{1}{n^3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}$$

$$= \frac{e^2}{e^3} = \frac{1}{e} = \frac{1}{2.718} \neq 0 \neq \infty$$

لہٰذا دونوں $\sum u_n$ اور $\sum v_n$ یک صفت ہوں گے۔

چوں کہ $\sum v_n = \sum \frac{1}{n^3}$ ایک $p-$سلسلہ ہے، جہاں $p = 3 > 1$ ہے۔ لٰہذا یہ متدق ہے۔

چنانچہ $\sum u_n$ بھی متدق ہوگا۔

نتیجتاً دیا گیا سلسلہ متدق ہے اگر $x \leq 1$

اور منتشر ہے اگر $x > 1$

مثال 14۔ سلسلہ $\sum \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^{3/2}}$ کے استدقاق کی جانچ کیجیے۔

حل۔ دیے گئے سلسلہ سے

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^{3/2}}$$

جذر جانچ لگانے سے

$$\lim_{n\to\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left\{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^{3/2}}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{1}{e} < 1$$

لٰہذا جذر جانچ کے مطابق دیا گیا سلسلہ $\sum u_n$ متدق ہے۔

مثال 15۔ $\sum \frac{x^{2n}}{2^n}$ جہاں $x > 0$ کے استدقاق کی جانچ کیجیے۔

حل۔ یہاں

$$u_n = \frac{x^{2n}}{2^n}$$

جذر جانچ لگانے پر

$$\lim_{n\to\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{x^{2n}}{2^n}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{2}$$

$$= \frac{x^2}{2}$$

لٰہذا اگر $\frac{x^2}{2} < 1$ یعنی $x^2 < 2 \Leftarrow x < \sqrt{2}$ تب $\sum u_n$ متدق ہے۔

اسی طرح اگر $\frac{x^2}{2} > 1$ یعنی $x^2 > 2 \Leftarrow x > \sqrt{2}$ تب $\sum u_n$ منتشر ہے۔

اور اگر $\frac{x^2}{2} = 1$ تب یہ جانچ نتیجہ دینے میں ناکام ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{x^2}{2} = 1 \Leftarrow x^2 = 2$ یعنی $x = \sqrt{2}$ پر

سلسلہ $\sum u_n = \sum \frac{\sqrt{2}^{2n}}{2^n} = \sum \frac{2^n}{2^n} = \sum 1$ منتشر ہے۔

لہٰذا ہم اس نتیجہ پر پہنچے کہ سلسلہ متدق ہے اگر $x < 2$

اور سلسلہ منتشر ہے اگر $x \geq 2$ ہو۔

مثال16۔ دیے گئے سلسلہ کے استد قاق کی جانچ کیجیے

$$\frac{2^1}{1^2}x + \frac{3^2}{2^3}x^2 + \frac{4^3}{3^4}x^3 + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}x^n + \cdots, x > 0$$

حل۔ سلسلہ سے $u_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}x^n$

جذر جانچ لگانے پر

$$\lim_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}x^n\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)\times\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\right)x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)x = x$$

لہٰذا کوشی کے جذر جانچ کے مطابق دیا گیا سلسلہ $\sum u_n$ متدق ہوگا اگر $x < 1$ اور منتشر ہوگا اگر $x > 1$ اور یہ جانچ ناکام ہے اگر $x = 1$

اگر $x = 1$ تب

$$u_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

اگر $v_n = \frac{1}{n}$ لیا جائے اور حد مقابلہ جانچ کی جائے تب

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= e \neq 0 \neq \infty$$

چنانچہ دونوں سلسلے $\sum u_n$ اور $\sum v_n$ یک صفت ہوں گے۔

اور چوں کہ $\sum v_n = \sum\frac{1}{n}$ ایک $p-$ سلسلہ ہے، جہاں $p = 1$ ہے، تو یہ منتشر ہے۔

لہٰذا $\sum u_n$ متدق ہے اگر $x < 1$ اور منتشر ہے اگر $x \geq 1$

مشقی سوالات:

دیے گئے سلسلوں کے استد قاق کی جانچ کیجیے

(i $\sum ne^{-n^2}$

(ii $\sum\left(\frac{n+1}{2n+5}\right)^n$

7.2.4 دالمبرت کی نسبت جانچ (D'Alembert's Ratio Test)

اگر $\sum u_n$ مثبت ارقام کا سلسلہ ہے اور

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$$

تب (i) $\sum u_n$ مستدق ہوگا اگر $l<1$

(ii) $\sum u_n$ منتشر ہوگا اگر $l>1$

(iii) جانچ ناکام ہوگا اگر $l=1$

ثبوت۔ : $\sum u_n$ مثبت ارقام کا سلسلہ ہے

$$\therefore\ \mathrm{u_n}>0,\forall n\in\mathbb{N}$$
$$\Rightarrow\frac{u_{n+1}}{u_n}>0$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l\geq 0$$

$\therefore$ کسی $\epsilon>0$ کے لیے $\exists m\in\mathbb{Z}^+$ اسطرح سے کہ

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-l\right|<\epsilon,\qquad \forall n\geq m$$
$$l-\epsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<l+\epsilon,\qquad \forall n\geq m$$

$n=m,m+1,m+2,\cdots,n-1$ رکھنے پر

$$l-\epsilon<\frac{u_{m+1}}{u_m}<l+\epsilon$$
$$l-\epsilon<\frac{u_{m+2}}{u_{m+1}}<l+\epsilon$$
$$l-\epsilon<\frac{u_{m+3}}{u_{m+2}}<l+\epsilon$$
$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$
$$l-\epsilon<\frac{u_n}{u_{n-1}}<l+\epsilon$$

ان کا حاصل ضرب لینے سے

$$(l-\epsilon)^{n-m}<\frac{u_n}{u_m}<(l+\epsilon)^{n-m},\qquad \forall n\geq m$$
$$\Rightarrow\frac{(l-\epsilon)^n}{(l-\epsilon)^m}<\frac{u_n}{u_m}<\frac{(l+\epsilon)^n}{(l+\epsilon)^m}$$
$$(1)\text{-------}\Rightarrow(l-\epsilon)^n\frac{u_m}{(l-\epsilon)^m}<u_n<(l+\epsilon)^n\frac{u_m}{(l+\epsilon)^m}$$

(i) اگر $l<1$ تب $\epsilon>0$ اسطرح منتخب کیا جاسکتا ہے کہ

$$\mathrm{k}=(\mathrm{l}+\epsilon)<1$$

لہٰذا $0<k<1$ ہے۔اب مساوات (1) سے

$$u_n < \frac{u_m}{k^m} k^n, \qquad \forall n \geq m$$
$$\Rightarrow u_n < \alpha k^n$$

یہاں $\alpha = \frac{u_m}{k^m}$ ہے۔

تب $\sum \alpha k^n$ جیومتری سلسلہ ہے جس کی مشترک نسبت $k < 1$ ہے

لٰہذا یہ متدق ہوگا۔

تب مقابلہ جانچ کی بنا $\sum u_n$ بھی متدق ہوگا۔

(ii) اگر $l > 1$ تب $\epsilon > 0$ اس طرح منتخب کیا جاسکتا ہے کہ $k' = (l - \epsilon) > 1$

مساوات (1) کے حوالے سے

$$\frac{u_m}{(k')^m} (k')^n < u_n, \qquad \forall n \geq m$$
$$\Rightarrow \qquad \beta (k')^n < u_n$$

یہاں $\beta = \frac{u_m}{(k')^m}$ ہے۔

تب $\sum \beta (k')^n$ جیومنتری سلسلہ سے جس کا مشترک نسبت $k' > 1$ ہے

لٰہذا یہ منتشر ہوگا۔

تب مقابلہ جانچ کی بنا $\sum u_n$ بھی منتشر ہوگا۔

(iii) اگر $l = 1$ ہو، تب اس جانچ کی بنا پر فیصلہ نہیں کیا جاسکتا ہے کیوں کہ اس صورت میں سلسلہ متدق بھی ہوسکتا ہے اور منتشر بھی ہوسکتا ہے۔

اس کے لیے مثالیں دیکھیں:

$\sum u_n = \sum \frac{1}{n^2}$ ہمیں معلوم ہے کہ یہ متدق سلسلہ ہے۔

اور نسبت جانچ پر

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} = 1$$

اور دیکھیں $\sum u_n = \sum \frac{1}{n}$ ہم جانتے ہیں یہ منتشر سلسلہ ہے اور نسبت جانچ پر

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

لہٰذا دیکھا گیا کہ $l = 1$ کی صورت میں اس جانچ پر نتیجہ نہیں کہا جا سکتا۔ یعنی جانچ ناکام ہے۔

نوٹ: عام طور پر دالمبرٹ کی نسبت جانچ اُن صورتوں میں لگائی جاتی ہے جب کہ سلسلہ کے ارقام میں فیکٹوریل یا x کی قوتیں موجود ہوں۔

جہاں نسبت جانچ ناکام ہو وہاں ریبیز کا جانچ (Raabe's Test) کار گر ہوتا ہے۔

7.2.5 ریبیز جانچ (Raabe's Test)

اگر $\sum u_n$ مثبت ارقام کا سلسلہ ہے اور اگر $l = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

تب (i) $\sum u_n$ متدق ہوگا اگر $l > 1$

اور (ii) $\sum u_n$ منتشر ہوگا اگر $l < 1$

مثال 17۔ سلسلہ $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$ کے استدقاق کی جانچ کیجیے۔

حل۔ یہاں $u_n = \frac{1}{n!} > 0,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$

$$u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$$

نسبت جانچ لگانے پر

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

لہٰذا دی المبرٹ کے نسبت جانچ کے مطابق $\sum u_n$ متدق ہے

مثال 18۔ سلسلہ $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ کے استدقاق پر بحث کیجیے۔

حل۔ دیے گئے سلسلہ سے

$$u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

تب

$$u_{n+1} = \frac{\{(n+1)!\}^2}{\{2(n+1)\}!}$$

نسبت جانچ لگانے پر

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\{(n+1)!\}^2}{\{2(n+1)\}!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\{(n+1)!\}^2}{\{2(n+1)\}!} \times \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\{(n+1)(n)\ldots\}^2}{[(2n+2)(2n+1)(2n)\cdots]} \times \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{n^2\left(2+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}$$
$$= \frac{(1+0)^2}{(2+0)(2+0)} = \frac{1}{4} < 1$$

لہٰذا نسبت جانچ کے مطابق $\sum u_n$ دیا گیا سلسلہ متدق ہے۔

مثال 19۔ سلسلہ $\sum \frac{n^p}{n!}$ کے استدقاق پر بحث کیجیے۔

حل۔ دیے گئے سلسلہ سے

$$u_n = \frac{n^p}{n!}$$

تب

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)^p}{(n+1)!}$$

نسبت جانچ لگانے پر

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\frac{(n+1)^p}{(n+1)!}}{\frac{n^p}{n!}}\right\}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(n+1)^p}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^p}\right\}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n^p\left(1+\frac{1}{n}\right)^p}{(n+1)\times n!} \times \frac{n!}{n^p}\right\}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p}{(n+1)}\right\}$$
$$= \frac{(1+0)^p}{(\infty+1)} = \frac{1}{\infty} = 0 < 1, \forall p \in \mathbb{R}$$

نسبت جانچ کے مطابق دیا گیا سلسلہ $\sum u_n$ متدق ہے۔

مثال 20۔ سلسلہ $(x > 0) \quad \cdots + \frac{4x^3}{27} + \frac{3x^2}{8} + 2x$ کے استدقاق پر بحث کیجیے۔

حل۔ چوں کہ $x > 0$ اس لیے سلسلہ مثبت ارقام کا ہے۔

نسب نما $1, 8, 27, \ldots$

گویا یہ بالترتیب $1^3, 2^3, 3^3, \ldots$ ہیں۔

چنانچہ

$$u_n = \left(\frac{n+1}{n^3}\right) x^n$$

تب

$$u_{n+1} = \left\{\frac{n+2}{(n+1)^3}\right\} x^{n+1}$$

نسبت جانچ لگانے پر

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\left\{\frac{n+2}{(n+1)^3}\right\} x^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n^3}\right) x^n}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n+2}{(n+1)^3}\times\frac{n^3}{n+1}\right\} x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}\times\frac{n^3}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right\} x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}\times\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right\} x$$

$$= \left\{\frac{(1+0)}{(1+0)^3}\times\frac{1}{(1+0)}\right\} x = x$$

لہٰذا نسبت جانچ کے مطابق اگر $x < 1$ تب $\sum u_n$ متدق ہو گا۔

اور اگر $x > 1$ تب $\sum u_n$ منتشر ہو گا۔

اور $x = 1$ پر ٹسٹ یعنی جانچ ناکام ہو گا۔

لہٰذا دوسرے طریقے پر غور کریں۔

$x = 1$ پر

$$\sum u_n = \sum \frac{n+1}{n^3}$$

$$u_n = \frac{n+1}{n^3}$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

یہاں $v_n = \frac{1}{n^2}$ لینے پر

حد مقابلہ جانچ کے مطابق

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$= 1 + 0 = 1 \neq 0 \neq \infty$$

چوں کہ $\sum v_n = \sum \frac{1}{n^2}$ ایک $p-$ سلسلہ ہے، جہاں $p = 2 > 1$ ہے۔اس لیے یہ مستدق ہے۔

لٰہذا $\sum u_n$ بھی مستدق ہو گا۔

خلاصہ یہ ہوا کہ $\sum u_n$ مستدق ہو گا اگر $x \leq 1$

اور $\sum u_n$ منتشر ہو گا اگر $x > 1$

غیر واجب تکمل (Improper Integrals): تکمل $\int_a^\infty f(x)dx\,, a \in \mathbb{R}$ کو غیر واجب تکمل کہا جاتا ہے۔

تعریف: اگر f قابل تکمل تفاعل ہے سبھی $t > a$ کے لیے اور

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx\,, \forall a \leq t < \infty$$

تکمل $\int_a^\infty f(x)dx$ مستدق کہا جائے گا l پر اگر

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = l$$

اور یوں لکھا جائے گا

$$\int_a^\infty f(x)dx = l$$

مثال 21۔ سلسلہ $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ کے استدق کی جانچ کیجیے۔

حل۔ فرض کرو کہ $f(x) = \frac{1}{x^2}$

ہم جانتے ہیں کہ f تمام $x \in [1,\infty)$ کے لیے قابل تکمل ہے۔

$$F(t) = \int_1^t f(x)dx\,, \forall t > 1$$
$$= \int_1^t \frac{1}{x^2}dx$$
$$= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t$$
$$= -\frac{1}{t} + 1$$
$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{t}+1\right) = 0 + 1 = 1$$

لٰہذا $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ مستدق ہے 1 پر۔

7.2.6 تکملی جانچ (Integral Test)

قضیہ: اگر f وقفہ $[1,\infty)$ پر ایک غیر منفی گھٹتا ہوا تفاعل ہے، تب سلسلہ $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ اور تکمل $\int_1^\infty f(x)dx$ دونوں ایک ساتھ مستدق یا

منتشر ہوں گے۔

ثبوت: دیا گیا ہے کہ

$$f(x) \geq 0, \forall x \in [1\infty)$$

لہٰذا $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ مثبت ارقام کا سلسلہ ہے۔

$x \in [1\infty)$ پر ایک عدد $n \in \mathbb{Z}^+$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $n \leq x \leq n+1$

چوں کہ f وقفہ $[1\infty)$ پر گھٹتا ہوا تفاعل ہے، اس لیے

$$f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$$

$$\int_n^{n+1} f(n)\, dx \geq \int_n^{n+1} f(x)\, dx \geq \int_n^{n+1} f(n+1) dx$$

$$(1)\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x)\, dx \geq f(n+1)$$

$n = 1, 2, 3, \cdots$ رکھنے پر اور انکو جمع کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) \geq \int_1^2 f(x)\, dx + \int_2^3 f(x)\, dx + \cdots + \int_{n-1}^{n} f(x)\, dx \geq f(2) + f(3) + \cdots + f(n)$$

فرض کرو کہ $S_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$

اور $I_n = \int_1^2 f(x)\, dx + \int_2^3 f(x)\, dx + \cdots + \int_{n-1}^{n} f(x)\, dx = \int_1^n f(x)\, dx$

اس لیے

$$S_n - f(n) \geq I_n \geq S_n - f(1)$$
$$\Rightarrow -f(n) \geq I_n - S_n \geq -f(1)$$
$$(2)\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \Rightarrow f(n) \leq S_n - I_n \leq f(1)$$

جو کہ تمام $n \in \mathbb{Z}^+$ کے لیے درست ہے۔

تب

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (S_{n+1} - I_{n+1}) - (S_n - I_n) \\ &= (S_{n+1} - S_n) - (I_{n+1} - I_n) \\ &= f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)\, dx \leq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0, \forall n$$

لہٰذا $\{u_n\}$ ایک گھٹتا ہوا توا تر ہے۔

مساوات (2) کے حوالے سے

$$u_n \geq f(n) \geq 0, \forall n$$

یعنی $\{u_n\}$ بستہ زیرین (Bounded Below) ہے۔ اس لیے $\{u_n\}$ متدق ہے۔

چوں کہ $S_n = u_n + I_n$ اور $\{u_n\}$ متدق ہے۔

نتیجتاً $\{S_n\}$ اور $\{I_n\}$ دونوں متدق یا منتشر ہوں گے۔

لہٰذا سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ اور $\int_1^{\infty} f(x)dx$ دونوں ایک ساتھ متدق یا منتشر ہوں گے۔

مثال22۔ ثابت کرو کہ سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ متدق ہے۔ تکملی جانچ کیجیے۔

حل۔ ہم لیں گے

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}, \forall x \in [1, \infty)$$

تب

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

چنانچہ $f(x) > 0$ اور یہ وقفہ $[1, \infty)$ پر گھٹتا ہوا ہوگا۔ تکمل جانچ کرنے پر

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_1^t f(x)dx \\ &= \int_1^t \frac{1}{x^2+1}dx \\ &= [\tan^{-1} x]_1^t \\ &= \tan^{-1} t - \tan^{-1} 1 \\ &= \tan^{-1} t - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

تب

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} F(t) &= \lim_{t\to\infty}\left(\tan^{-1} t - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \tan^{-1} \infty - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

لہٰذا $\frac{\pi}{4}$ پر تکمل $\int_1^{\infty} f(x)dx$ پر متدق ہے۔

مثال23۔ ثابت کرو کہ ہارمونی سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ متدق ہوگا اگر $p > 1$ ہو اور منتشر ہوگا اگر $p \leq 1$ ہو۔

حل۔ فرض کرو کہ

$$f(x) = \frac{1}{x^p}, \forall x \in [1, \infty) \,\&\, p > 0$$

تب $f(x) > 0$ اور یہ وقفہ $[1, \infty)$ پر گھٹتا ہوا ہوگا۔

تکمل جانچ کرنے پر

$$F(t) = \int_1^t f(x)dx$$

$$= \int_1^t \frac{1}{x^p}dx$$
$$= \begin{cases} \frac{t^{1-p}}{1-p}, & p \neq 1 \\ \log t, & p = 1 \end{cases}$$

پھر جیسے $t \to \infty$ ہو گا تب

$t^{1-p} = \frac{1}{t^{p-1}} \to 0$ جب کہ $p > 1$

اور $\frac{1}{t^{p-1}} \to \infty$ جب کہ $p < 1$

اور $\log t \to \infty$ جہاں $p = 1$

لہٰذا

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$$
$$= \frac{1}{1-p}(0) = 0, p > 1$$

یعنی متدق ہے۔

اور

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$$
$$= \frac{1}{1-p}(\infty) = \infty, p < 1$$

اور

$$\log t = \infty, p = 1$$

لہٰذا خلاصہ یہ ہوا کہ $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ متدق ہو گا اگر $p > 1$

اور منتشر ہو گا اگر $p \leq 1$

مثال 24۔ سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3}{n^4+3}$ کی صفت پر بحث کیجیے۔

حل۔ فرض کرو کہ

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^4+3}$$

تب $f(x) > 0, \forall x \in [1, \infty)$

تب تکمل جانچ کرنے پر

$$\int_1^\infty f(x)dx = \int_1^\infty \left(\frac{2x^3}{x^4+3}\right)dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}\log(x^4+3)\right]_1^\infty = \infty$$

لہٰذا $\int_1^\infty f(x)dx$ منتشر ہوا۔

نتیجتاً دیا گیا سلسلہ بھی منتشر ہوا۔

مثال 25۔ ثابت کیجیے کہ سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^p}$ متدق ہوگا اگر $p > 1$ ہو اور منتشر ہوگا اگر $0 < p \leq 1$ ہو۔

حل۔ فرض کرو کہ

$$f(x) = \frac{1}{x(\log x)^p}, x \geq 2$$

تب $f(x) > 0, \forall x \in [2, \infty)$ گھٹتا ہوا ہوگا۔

تب تکمل جانچ کرنے پر

$$\int_2^\infty f(x)dx = \int_2^\infty \left(\frac{1}{x(\log x)^p}\right) dx$$

$\log x = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt$ رکھنے پر ہمیں حاصل ہے

$$\int_2^\infty \left(\frac{1}{x(\log x)^p}\right) dx = \int_{\log 2}^\infty \left(\frac{1}{t^p}\right) dt$$

$$= \left[\frac{t^{1-p}}{1-p}\right]_{\log 2}^\infty$$

$$= \frac{1}{1-p}\left[t^{1-p}\right]_{\log 2}^\infty$$

اگر $p > 1$ تب $1 - p < 0$ تب تکمل متدق ہوگا۔

اور منتشر ہوگا اگر $p \leq 1$

نتیجتاً تکملی جانچ سے معلوم ہوا کہ دیا گیا سلسلہ متدق ہے اگر $p > 1$ اور منتشر ہوگا اگر $p \leq 1$ ہو۔

مثال 26۔ تکملی جانچ کے ذریعے سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$ کا استدقاق معلوم کیجیے۔

حل۔ فرض کیجیے کہ

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}, \forall x \in [1, \infty)$$

تب

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$$

لہٰذا $0 < f(x)$ ہے اور یہ وقفہ $[1, \infty)$ پر گھٹتا ہوا ہوگا۔

تکمل جانچ کرنے پر

$$\int_1^\infty f(x)dx$$

$$= \int_1^\infty \frac{x}{x^2+1}\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_1^\infty$$
$$= \infty$$

یہ منتشر ہے۔ لٰہذا دیا گیا سلسلہ بھی منتشر ہوا۔

مشقی سوالات:

ذیل کے سلسلوں کے استد قاق پر بحث کرو

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$
2. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots$

7.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے مثبت ارقام کے سلسلوں کے استد قاق کو معلوم کرنے مختلف جانچ کے طریقوں پر بحث کی ہے۔ ہم نے جذر جانچ کی اہمیت کو دیکھا ہے جب کہ سلسلہ میں ارقام قوت رکھتے ہوں۔ اور نسبت جانچ کرنا آسان ضرور ہے بہ مقابلہ جذر جانچ۔ لیکن جذر جانچ قوی ہے نسبت جانچ پر۔ عام طور پر دی المبرٹ کا نسبت جانچ اُن صورتوں میں لگایا جاتا ہے جب کہ سلسلہ کے ارقام میں ضربیہ (Factorial) موجود ہوں یا قوتیں اور ضربیے دونوں موجود ہوں۔ آخر میں ہم نے تکمل جانچ کو کس طرح استد قاق کی جانچ کے لیے استعمال کیا جاتا ہے تفصیلاً بحث کی۔

7.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

مقابلہ جانچ، جذر جانچ، نسبت جانچ، تکمل جانچ

7.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

7.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

I: صحیح جواب کی نشاندہی کیجیے

1. سلسلہ $\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$ متدق ہوگا اگر

(a $p > 0$ (b $p < 1$ (c $p > 1$ (d $p \leq 1$

2. سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} (2x)^n$ متدق ہوگا اگر

(a $-1 \leq x \leq 1$ (b $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

c) $-2 < x < 2$ d) $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$

3. متبادل ہارمونی سلسلہ $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ کا حاصل جمع کیا ہوگا

a) صفر   b) لا متناہی   c) $\log 2$ d) نامعلوم

4. فرض کرو کہ $\sum u_n$ مثبت ارقام کا سلسلہ ہے اور متدق بھی ہے تب $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ وجود رکھتا ہے تب اس کی قیمت کیا ہوگی

a) 1 b) > 1 c) ≤ 1 d) < 1

5. سلسلہ $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$ کیا ہے

a) Oscillatory   b) مشروط متدق   c) منتشر   d) مطلق متدق

II: درج ذیل بیان کردہ دعووں کی صحیح یا غلط کی پہچان کیجیے۔

1. سلسلہ $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ متدق ہے (T/F)
2. سلسلہ $\sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}$ متدق ہوگا (T/F)
3. $\sum \frac{1}{nx^n}$ متدق ہوگا اگر $x < 1$ (T/F)
4. سلسلہ $\sum \frac{n!}{(n^2)^n}$ متدق ہوگا (T/F)
5. سلسلہ $\sum \frac{n^3}{3^n}$ متدق ہے (T/F)

7.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

ذیل کے سلسلوں کے استدقاق کی جانچ کیجیے

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^n}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3}\right)$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^3}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n x^n\right]$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^{3/2}}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+5}\right)^n$ 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \cdots (2n+1)}$ 9. $2x + \frac{3x^2}{8} + \frac{4x^3}{27} + \cdots, x > 0$

10. تکمل جانچ کے ذریعہ ثابت کرو کہ $(p > 0)$ $\sum \frac{1}{n^p}$ متدق ہے اگر $p > 1$ اور منتشر ہے اگر $p \le 1$

7.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. کوشی کا جذر جانچ کا کلیہ بیان کرو اور ثابت کرو۔
2. ڈی البرٹ کا نسبت جانچ کا کلیہ بیان کرو اور ثابت کرو۔
3. تکمل جانچ کو بیان کرو اور ثابت کرو۔

7.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد(Suggested Learning Resources)

1. Introduction to Real Analysis R.G. Bartle & D.R. Sherbert
2. Mathematical Analysis T.M. Apostor

اکائی 8۔ متبادل سلسلے۔ مطلق اور مشروط استدقاق

(Alternating Series-Absolute and Conditional Convergence)

اکائی کے اجزا

8.0 تمہید(Introduction)

اب تک ہم نے مثبت ارقام کے سلسلوں کے استدقاق پر بحث کی ہے۔اب ہم ایسی سلسلوں پر بحث کریں گے جن میں مثبت اور منفی ارقام متبادل ہوں گے۔ جس کو $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n$ سے ظاہر کیا جائے گا۔

8.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کی تکمیل پر طلبا اس قابل ہو جائیں گے کہ :

- متبادل سلسلوں پر لیبنٹز(Leibnitz)جانچ کے ذریعہ استدقاق پر بحث کریں۔
- دیا گیا متبادل سلسلہ آیا مطلق ہے یا مشروط متدق ہے معلوم کریں۔

8.2 متبادل سلسلے(Alternating Series)

ایسا سلسلہ جس کے ارقام یکے بعد دیگرے مثبت اور منفی علامات رکھتے ہوں متبادل سلسلہ کہلاتا ہے۔ جس کو یوں ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots + (-1)^n x_n + \cdots$$

مثال:$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ متبادل سلسلہ ہے۔

8.2.1 لیبنٹز کی جانچ(Leibnitz's Test)

بیان: اگر $\sum x_n$ مثبت ارقام کا تواتر ہے جو کہ

a) $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4 \geq \cdots$

b) $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

تب متبادل سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n$ متدق ہو گا۔

ثبوت: فرض کرو کہ

$$s_n = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots + (-1)^{n-1}x_n$$
$$s_{2n} = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots + x_{2n-1} - x_{2n}$$
$$s_{2(n+1)} = s_{2n+2} = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots + x_{2n-1} - x_{2n} + x_{2n+1} - x_{2n+2}$$
$$s_{2n+2} - s_{2n} = x_{2n+1} - x_{2n+2} \geq 0$$

اس لیے کہ a) کے مطابق تواتر گھٹتا ہوا ہے۔یعنی

$$s_{2n+2} \geq s_{2n}$$

لہٰذا $\{s_{2n}\}$ بڑھتا ہوا ہے۔

اس لیے $\{s_n\}$ بڑھتا ہوا ہے۔

$$\begin{aligned} s_{2n} &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots + x_{2n-1} - x_{2n} \\ &= x_1 - [x_2 - x_3 + x_4 - \cdots - x_{2n-1} + x_{2n}] \end{aligned}$$

$\Rightarrow s_{2n} < x_1$

یعنی $\{s_{2n}\}$ بستہ بالا ہے۔

گویا $\{s_{2n}\}$ بڑھتا ہوا اور بستہ بالا ہے۔

اس لیے یک رنگی استدقاق کے قضیہ کے مطابق $\{s_{2n}\}$ متدق ہے

لہٰذا $\{s_n\}$ متدق ہے

نتیجتاً $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n$ متدق ہے۔

مثال 1۔ ثابت کرو کہ متبادل سلسلہ $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ متدق ہے۔

ثبوت: دیا ہوا متبادل سلسلہ یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

$$\Rightarrow \qquad x_n = \frac{1}{n}$$

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \cdots$$

یعنی $\{x_n\}$ گھٹتا ہوا ہے اور ____________(1)

$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ ____________(2)

مساوات (1) اور (2) کی مدد سے لیبنٹز کے جانچ کے مطابق دیا گیا متبادل سلسلہ متدق ہوا۔

مثال ثابت کی گئی۔

8.2.2 مطلق استدقاق (Absolute Convergence)

تعریف: ایک متبادل سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n$ مطلق متدق کہلاتا ہے اگر

i) اگر $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n$ متدق ہے اور

ii) اگر $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ بھی متدق ہے (یعنی مثبت ارقام سلسلہ بھی متدق ہے)

8.2.3 مشروط استدقاق (Conditional Convergence)

تعریف: کوئی متبادل سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n$ مشروط متدق کہلاتا ہے

a) اگر $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n$ متدق ہے اور

b) $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ منتشر ہے (یعنی مثبت ارقام کا سلسلہ منتشر ہے)

قضیہ 1۔ ایک مطلق متدق سلسلہ ہمیشہ متدق ہو گا۔

ثبوت: اگر $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n$ ایک متبادل سلسلہ ہے جو کہ مطلق متدق ہے تب

$$-|x_n| \le x_n \le |x_n|$$
$$\Rightarrow \quad -|x_n| + |x_n| \le x_n + |x_n| \le |x_n| + |x_n|$$
$$\Rightarrow \quad 0 \le x_n + |x_n| \le 2|x_n|$$

چوں کہ سلسلہ مطلق متدق ہے اس لیے $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ متدق ہے۔

اس لیے $\sum_{n=1}^{\infty} 2|x_n|$ متدق ہے۔

تب مقابلہ جانچ کے مطابق $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + |x_n|)$ متدق ہوگا

چوں کہ $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + |x_n|)$ متدق ہے اور $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ متدق ہے۔

اس لیے $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + |x_n| - |x_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ متدق ہے۔

قضیہ ثابت ہوا

نوٹ 1۔اس کا بر عکس قضیہ صحیح ہونا ضروری نہیں ہے۔

مثلاً متبادل سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\mathrm{n}}$ پر ہم نے مثال (1) میں دیکھا کہ لیبنٹز کے جانچ کے مطابق متدق ہے

اور جبکہ $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{n}}$ ایک $p-$ سلسلہ ہے جسمیں $p = 1$ ہے۔ لہٰذا یہ منتشر ہے۔

نوٹ 2۔ اس مثال میں چوں کہ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n$ متدق ہے اور $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ منتشر ہے اس لیے $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\mathrm{n}}$ مشروط متدق ہے۔

مثال 2۔ سلسلہ $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$ کے استدقاق پر بحث کیجیے۔

حل۔ یہ ایک متبادل سلسلہ ہے جس کو یوں ظاہر کیا جا سکتا ہے $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{\mathrm{n}}}$

تب

$$x_n - x_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{n}}} - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{n}-1}} < 0$$

لہٰذا $\{x_n\}$ گھٹتا ہوا اترہے۔-----------------(1)

اور $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ --------(2)

(1) اور (2) کی بنا لیبنٹز کی جانچ کے مطابق دیا گیا سلسلہ متدق ہے۔

مثال 3۔ سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\mathrm{n}}, \forall x \in \mathbb{R}$ کے استدقاق پر بحث کیجیے۔

حل: دیا گیا سلسلہ $\sum u_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\mathrm{n}}, \forall x \in \mathbb{R}$ ہے۔

یہ سلسلہ ہمیشہ مثبت ارقامی نہیں ہے۔

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \times |x|\right| = |x|$$

تب نسبت جانچ کے مطابق $\sum|u_n|$ متدق ہے اگر $|x| < 1$

اور منتشر ہے اگر $|x| > 1$

اگر $x = -1$ ہو، تب $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ متدق ہے۔

اور $x = 1$ پر $\sum u_n$ منتشر ہے۔

مثال 4۔ ثابت کرو کہ سلسلہ $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ سبھی $x \in \mathbb{R}$ کے لیے مطلق متدق ہے۔

حل۔ دیا گیا سلسلہ

$$\sum u_n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \qquad u_n = \frac{x^n}{n!}$$

$$\therefore \sum|u_n| = \sum\frac{|x|^n}{n!}$$

$$\therefore \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{(n+1)}$$

تب

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{|x|}{(n+1)}\right\} = 0 < 1$$

لہٰذا نسبت جانچ کے مطابق $\sum|u_n|$ سبھی $x \in \mathbb{R}$ کے لیے متدق ہے۔ گویا $\sum u_n$ سبھی $x \in \mathbb{R}$ کے لیے مطلق متدق ہے۔

نوٹ: دیا گیا سلسلہ $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x$ ہے۔

مثال 5۔ ثابت کرو کہ سلسلہ $\sum\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ متدق ہے جب کہ $-1 < x \le 1$ ہے۔

حل۔ اگر $x = 1$ ہو، تب $\sum\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = \sum\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ مثال (1) کے حوالہ سے متدق ہے۔

اور اگر $-1 < x < 1$ ہو۔

یعنی $|x| < 1$ تب $u_n = \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ ہے۔

$$\therefore \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{|x|^n} = \frac{n|x|}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{n+1}\right\}|x|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right\}|x| = \frac{1}{1+0}|x| = |x|$$

لہٰذا نسبت جانچ کے مطابق چوں کہ $|x| < 1$ ہے اس لیے $\sum(-1)^{n-1}x_n$ یعنی $\sum\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ متدق ہے $-1 < x <$

1 پر۔ نتیجتاً $\sum \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ متدق ہے $-1 < x \le 1$ پر۔

نوٹ: دیا گیا سلسلہ لوگرتھمی (Logarithmic) سلسلہ $\sum \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = \log(1+x)$ ہے۔

مثال 6۔ ثابت کرو کہ سلسلہ $1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!}x^r + \cdots$ مطلق متدق ہے اگر $|x| < 1$ ہو۔

حل۔ چوں کہ $x \in \mathbb{R}$ اسلیے دیا گیا سلسلہ مثبت ارقام کا نہیں ہے۔ اب

$$(r+1)\text{واں رکن} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!}x^r$$

اور

$$(r+2)\text{واں رکن} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)(n-r)}{(r+1)!}x^{r+1}$$

اس لیے

$$\left|\frac{(r+2)\text{واں رکن}}{(r+1)\text{واں رکن}}\right| = \left|\frac{n-r}{r+1}x\right| = \left|\frac{\frac{n}{r}-1}{1+\frac{1}{r}}\right||x|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(r+2)\text{واں رکن}}{(r+1)\text{واں رکن}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n}{r}-1}{1+\frac{1}{r}}\right||x| = |x|$$

لہٰذا مثبت جانچ کے مطابق دیا گیا سلسلہ متدق ہے ہوگا اگر $|x| < 1$ نتیجتاً دیا گیا سلسلہ مطلق متدق ہوگا اگر $|x| < 1$ ہو۔

نوٹ: دیا گیا سلسلہ $(1+x)^n$ کا پھیلاؤ ہے (دو رکنی پھیلاؤ) (Binomial Expansion)

مثال 7۔ ثابت کرو کہ $\sum(-1)^n \sin\frac{1}{n}$ مطلق متدق نہیں ہے۔

حل۔ دیا گیا سلسلہ ایک متبادل سلسلہ ہے۔

فروض کرو کہ $\sum x_n = \sum(-1)^n \sin\frac{1}{n}$ ہے۔ اس لیے

$$x_n = (-1)^n \sin\frac{1}{n}$$

اور اگر $y_n = \sin\frac{1}{n} > 0, \forall n \in N$

چوں کہ $\frac{1}{n} \in (0,1] \subset \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ اور $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ ہے۔ اس لیے

$$\sin\frac{1}{n} > \sin\frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad y_n > y_{n+1}, \forall n \in N$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\sin\frac{1}{n}\right\} = 0$$

لہٰذا لیبنٹز جانچ (Leibnitz Test) کے مطابق $\sum x_n$ متدق ہے۔ اور

$$\sum|x_n| = \sum\left|(-1)^n \sin\frac{1}{n}\right|$$

$$= \sum\left|\sin\frac{1}{n}\right|$$

$$= \sum \sin\frac{1}{n}$$

اگر $\sum a_n = \sum\frac{1}{n}$ لیا جائے، تب مقابلہ جانچ کرنے پر

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right\} = \lim_{\frac{1}{n}\to 0}\left\{\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right\} = 1 \neq 0 \neq \infty$$

لہٰذا حد مقابلہ جانچ کے مطابق چوں کہ $\sum a_n = \sum\frac{1}{n}$ منتشر ہے۔

اس لیے $\sum|x_n| = \sum\left|(-1)^n\sin\frac{1}{n}\right|$ بھی منتشر ہے۔

لہٰذا دیا گیا متبادل سلسلہ مشروط متدق ہے۔

مثال 8۔ سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ کے استدقاق پر بحث کیجیے۔

حل۔ فرض کرو کہ $\sum x_n = \sum(-1)^{n+1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \sum(-1)^{n+1}y_n$

ایک متبادل سلسلہ ہے، جہاں

$$\begin{aligned} y_n &= \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \\ &= \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} > 0, \forall n \in N \end{aligned}$$

اب دیکھیں کہ

$$\begin{aligned} &\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1} > \sqrt{n+1}+\sqrt{n} \\ \Rightarrow\ &\frac{1}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)} < \frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} \\ \Rightarrow\ &y_{n+1} < y_n, \forall n \in N \end{aligned}$$

لہٰذا $\{y_n\}$ گھٹتا ہوا تواتر ہے۔ --------(1)

اور

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} = 0 \quad \text{--------(2)}$$

مساوات (1) اور (2) کی بنا لیبنٹز جانچ کے مطابق $\sum x_n$ متدق ہے اور

$$\begin{aligned} \sum|x_n| &= \sum\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right| \\ &= \sum\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \sum\frac{1}{\sqrt{n}\left[\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right]} \end{aligned}$$

اب اگر $\sum a_n = \sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ لیا جائے اور حد مقابلہ جانچ کی جائے، تب

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\frac{1}{\sqrt{n}\left[\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right]}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2} \neq 0 \neq \infty$$

لہٰذا چوں کہ $\sum a_n = \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ – p سلسلہ ہے، جہاں $p = \frac{1}{2} < 1$

اس لیے $\sum a_n$ منتشر ہے اس لیے $\sum |x_n|$ بھی منتشر ہے۔

چنانچہ نتیجہ یہ نکلا کہ دیا گیا سلسلہ مشروط متدق ہے۔

مشقی سوالات:

i) سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$ کے استدقاق پر بحث کیجیے

ii) ثابت کرو کہ $\sum \frac{\cos nx}{n^2}, x \in \mathbb{R}$ مطلق متدق ہے

iii) ثابت کرو کہ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}$ مشروط متدق ہے

8.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے متبادل سلسلوں کے استدقاق پر لیبنٹز جانچ کے ذریعہ نتائج اخذ کیے۔ ہم نے یہ بھی ثابت کیا کہ ہر مطلق متدق سلسلہ متدق بھی ضرور ہو گا لیکن اس کا عکس صحیح ہونا ضروری نہیں۔ اور آخر میں ہم نے دئے گئے متبادل سلسلوں کی جانچ اس پر بھی کی کہ آیا وہ مطلق متدق ہیں یا مشروط متدق ہیں۔

8.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

متبادل سلسلہ، لیبنٹز جانچ، مطلق استدقاق، مشروط استدقاق

8.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

8.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. سلسلہ $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ کیا ہو گا

a) مطلق متدق b) مشروط متدق c) منتشر d) مندرجہ بالا کوئی نہیں

2. ہر مطلق متدق سلسلہ لازماً ہو گا

a) متدق b) منتشر c) اہتزازی d) متدق یا منتشر

3. لیبنٹز جانچ قابل اطلاق ان پر ہے

a)مثبت ارقام سلسلہ　　b)متبادل سلسلہ　　c) پہلے دونوں　　d)کوئی نہیں

4. سلسلہ $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}-\frac{1}{\sqrt[5]{3}}+\frac{1}{\sqrt[5]{4}}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{\sqrt[5]{n}}$ ہے۔

a)مطلق متدق　　b)مشروط متدق　　c)منتشر　　d)اہتزازی

5. سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2n-1}$ ہے۔

a)متدق　　b)منتشر　　c)اہتزازی　　d)مندرجہ بالا کوئی نہیں

6. مندرجہ ذیل کو جوڑئے

i) $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$　　a)متدق ہے نسبت جانچ کے مطابق

ii) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$　　b)متدق سے مقابلہ جانچ کے مطابق

iii) $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$　　c)متدق سے نسبت جانچ پر

iv) $\sum\left(\frac{n+1}{2n+5}\right)^n$　　d)مطلق متدق ہے

v) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4-1}\right)$　　e)متبادل سلسلہ

f)متدق ہے تکمل جانچ پر

8.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

1. سلسلہ $\sum\frac{x^n}{n}$ کے استدقاق پر بحث کیجئے

2. بتلاؤ کہ سلسلہ $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$ مطلق متدق ہے۔

3. ثابت کرو کہ $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ مطلق متدق نہیں ہے۔

4. ثابت کرو کہ $\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}-\cdots$ متدق ہے۔

5. ثابت کرو کہ کوئی بھی مطلق متدق سلسلہ لازمی متدق ہوتا ہے۔

8.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات(Long Answer Type Questions)

1. لیبنٹز(Leibnitz) کا قضیہ بیان اور ثابت کرو۔

2. ذیل کے سلسلوں کے استدقاق پر بحث کرو۔

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

8.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد(Suggested Learning Resources)

1. Introduction to Real Analysis, Donald R. Sherbert Robert G. Bartle 4th Edition , 2014

2. Elements Of Real Anyalsis, Narayan Shanti and Raisinghania M.D., 2003
3. Real Analysis, Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick, 4th Edition, 2017
4. Real Analysis, J.N. Sharma and A.R. Vasishtha, 2014
5. Real Analysis, V. Karunakaran, 2011
6. Real Analysis, N.L. Carothers, 2006
7. Basic Real Analysis, Houshang H. Sohrab, 2nd Edition, 2014
8. Mathematical Analysis, S.C. Malik and SavithaArora

اکائی 9۔ تفاعل کی انتہا اور تسلسل

(Limits and Continuity of a Function)

اکائی کے اجزا

9.0 تمہید(Introduction)

ریاضی میں تفاعل کی انتہائیں کسی نقطہ کی ہمسائگی میں تفاعل کی خاصیت کو بتاتی ہیں، بجائے اسکے کہ اُس خاص نقطہ پر۔ یہ ایک سادہ اور قوی نظریہ علم احصا(Calculus) کی بنیاد ہے۔ انتہائیں علم احصا اور ریاضیاتی تجزیہ(Mathematical Analysis) کی اصل ہیں اور یہ تفاعل کے تسلسل کے تفرق اور تکمل میں استعمال ہوتے ہیں۔

9.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے ختم پر طلبا اس قابل ہو جائیں گے کہ :

- انتہا کی تعریف اور اُس کو استعمال کر سکیں۔
- انتہا کے نہ پائے جانے کی صورتوں سے واقف ہوں گے اور وجوہات کو پہچان سکیں۔
- یک طرفہ انتہا اور انتہاؤں کے درمیان رشتہ معلوم کر سکیں۔
- سادہ الفاظ میں انتہا کو بیان کرنا اور انتہاؤں کے کلیوں کو سمجھ سکیں۔

9.2 انتہا کی تعریف(Definition of Limit)

تواتر کے مطالعہ میں ہم نے دیکھا کہ وہ تفاعل ہیں جنکا دامنہ طبعی اعداد کا سٹ ہے۔ یہاں ہم اس تفاعل پر بحث کریں گے جسکے دامنے اور سعت(Range) حقیقی اعداد $\mathbb{R}$ کے تحت سٹ ہیں۔ انتہا کی تعریف کرنے سے پہلے ہم تفاعل کے محدود ہونے پر بحث کریں گے۔

9.2.1 تفاعل کی حدبندی(Boundedness of a Function)

تعریف: ایک تفاعل کسی دامنہ D پر بستہ بالا یا بستہ زیریں کہلاتا ہے اگر اُس کی سعت(Range) بستہ بالا یا بستہ زیریں ہوتی ہے۔ اور جو تفاعل دونوں یعنی بستہ بالا اور بستہ زیریں ہوتا ہے وہ بستہ تفاعل کہلاتا ہے۔

دیگر الفاظ میں ایک تفاعل بستہ ہوگا اگر کسی دامنہ D پر اگر $0 < K$ ∃ اور $|f(x)| \leq K, \forall x \in D$

یک رنگی/ایک صفتی تفاعل(Monotonic Function): فرض کرو کہ تفاعل $f(x)$ کسی درمنہ D پر معرف ہے تب f کو بڑھتا ہوا کہیں گے اگر

$$f(x_1) \leq f(x_2), \forall x_1 < x_2 \ \&\ x_1, x_2 \in D$$

اور f کو گھٹتا ہوا کہیں گے اگر

$$f(x_1) \geq f(x_2), \forall x_1 < x_2 \ \&\ x_1, x_2 \in D$$

مذکورہ صورتوں کو f یک رنگی/ایک صفتی/مونوٹون تفاعلکتے ہیں۔

9.2.2 تفاعل کی انتہا(Limit of a Function)

تعریف: اگر $S \subset \mathbb{R}$ اور اگر $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ ایک تفاعل ہے۔

اگر 'a' ایک انتہائی نقطہ ہے S کا اور $l \in \mathbb{R}$

(i) اگر $f(x) \rightarrow l$ جیسے $x \rightarrow a$ بائیں سے دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے ایک عدد $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $a - \delta < x < a$

$$\Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon, \forall\, x \in S$$

تب $f(a-0) = l$ یا $\lim_{x\to a^-} f(x) = l$

یہاں 'l' کو بائیں انتہا کہتے ہیں۔

(ii) اگر $f(x) \rightarrow l$ جیسے $x \rightarrow a$ دائیں سے دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے ایک عدد $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $a < x < a + \delta$

$$\Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon, \forall\, x \in S$$

تب $f(a+0) = l$ یا $\lim_{x\to a^+} f(x) = l$

یہاں 'l' کو دائیں انتہا کہتے ہیں۔

تفاعل کی انتہا: اگر کسی تفاعل $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ کے دائیں اور بائیں انتہا دونوں وجود رکھتے ہیں اور دونوں برابر ہیں تب وہ یکتا قیمت تفاعل کی انتہا ہے۔

گویا اگر $\lim_{x\to a^-} f(x) = l = \lim_{x\to a^+} f(x)$

تب $\lim_{x\to a} f(x) = l$

نوٹ: $\lim_{x\to a} f(x)$ کے وجود کے لیے 'a' انتہائی نقطہ ہونا چاہیے S کا۔ مگر 'a' S کا ممبر ہونا ضروری نہیں

قضیہ 1۔ کسی تفاعل $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ کے لیے اگر $\lim_{x\to a} f(x) = l$ تب l یکتا ہوگا۔

ثبوت۔ اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ $\lim_{x\to a} f(x) = m \neq l$

اگر $\epsilon = \frac{1}{2}(l-m)$ لیا جائے۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔(1)

چوں کہ $\lim_{x\to a} f(x) = l$ تب ایک عدد $\delta_1 > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $0 < |x-a| < \delta_1$

$$\Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon, \forall\, x \in S$$

اور چوں کہ $\lim_{x\to a} f(x) = m$ بھی ہے۔ اس لیے ایک عدد $\delta_2 > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $0 < |x-a| < \delta_2$

$$\Rightarrow |f(x) - m| < \epsilon, \forall\, x \in S$$

فرض کرو کہ $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$

تب چوں کہ 'a' انتہائی نقطہ ہے S کا۔ اس لیے $\exists\, x \in S$ اس طرح کہ

$$0 < |x-a| < \delta$$

اور $|f(x) - l| < \epsilon, |f(x) - m| < \epsilon,$ ہوگا۔

تب

$$\begin{aligned}|l-m| &= |l-f(x)+f(x)-m|\\ &< |l-f(x)|+|f(x)-m|\\ &< \epsilon+\epsilon\\ &< 2\epsilon\end{aligned}$$

مساوات(1) کے مطابق

$$\begin{aligned}|l-m| &< 2\cdot\frac{1}{2}(l-m)\\ &< (l-m)\end{aligned}$$

یہ ممکن نہیں ہے۔

اسلیے ممکناًفرض کیا گیا جملہ غلط ہے کہ l اور m دو انتہا ہو سکتے ہیں لہٰذا کسی نقطہ پر $f(x)$ کی انتہا وجود رکھتی ہے تو وہ یکتا ہو گی۔

قضیہ ثابت ہوا۔

9.2.3 انتہاؤں پر قضیے (Theorems on Limits)

اب ہم تفاعل کی انتہاؤں پر بحث کریں گے۔ ظاہر ہے اگر $\lim_{x\to a} f(x)=l$، تب f بستہ ہے 'a' کی ہم سائگی میں۔

چوں کہا گر $\epsilon=1$، تب ایک عدد $\delta>0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$\begin{aligned}&\Rightarrow\quad |f(x)-l|<1, \forall\, 0<|x-a|<\delta, \qquad x\in S\\ &\Rightarrow l-1<f(x)<l+1\\ &\Rightarrow\qquad |f(x)|<|l|+1\end{aligned}$$

اگر $a\notin S$ اور $k=|l|+1$ اور $k=Sup\{|f(a)|,|l|+1\}$

تب $|f(x)|\le k$ ہو گا $N_\delta(a)-\{a\}$ پر۔

قضیہ 2۔ اگر $f:S\to\mathbb{R}$ اور $g:S\to\mathbb{R}$ اور 'a' S کا ایک انتہائی نقطہ ہے اور $\lim_{x\to a} f(x)=l$ اور $\lim_{x\to a} g(x)=m$ جہاں $l,m\in\mathbb{R}$ تب

$$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=l+m$$

ثبوت۔ فرض کرو کہ $\epsilon>0$ دیا گیا ہے۔

تب چوں کہ $\lim_{x\to a} f(x)=l$ اس لیے $\exists\delta_1>0$

اور $|f(x)-l|<\frac{\epsilon}{2}, \forall\, 0<|x-a|<\delta_1,\ x\in S$

اسی طرح چوں کہ $\lim_{x\to a} g(x)=m$ اس لیے $\exists\delta_2>0$

اور $|g(x)-m|<\frac{\epsilon}{2}, \forall\, 0<|x-a|<\delta_2,\ x\in S$

اگر $\delta=min(\delta_1,\delta_2)$ ہو تب $0<|x-a|<\delta$ پر

اور $|f(x)-l|<\frac{\epsilon}{2}$ $|g(x)-m|<\frac{\epsilon}{2}$ ہے۔اس لیے

$$|f(x)+g(x)-(l+m)| \le |f(x)-l|+|g(x)-m| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=l+m$$

قضیہ ثابت ہوا

قضیہ بالا کی طرح درج ذیل قضیے بھی ثابت کیے جا سکتے ہیں:

i) $\lim_{x\to a}(fg)(x)=lm$

ii) $\lim_{x\to a}(cf)(x)=cl, c\in\mathbb{R}$

iii) $\lim_{x\to a}(-f)(x)=-l$

iv) $\lim_{x\to a}(f-g)(x)=l-m$

v) $\lim_{x\to a}[f(x)]^n=l^n$

قضیہ 3۔ اگر $g(x)$ ایک بستہ تفاعل ہے S پر اور $f: S \to \mathbb{R}$ تفاعل ہے جس کا $\lim_{x\to a} f(x)=0$ تب $\lim_{x\to a} f(x)\,g(x)=0$

ثبوت۔ چوں کہ $g(x)$ بستہ ہے اس لیے $\exists K\in\mathbb{R}^+$ اس طرح سے کہ $|g(x)|<K, \forall x\in S$

اور چوں کہ $\lim_{x\to a} f(x)=0$ اسلیے $\epsilon>0$ کے لیے $\exists\delta>0$

اور $|f(x)-0|<\frac{\epsilon}{K}, \forall\, 0<|x-a|<\delta,\ x\in S$

تب $|f(x)g(x)-0|=|f(x)g(x)|<\frac{\epsilon}{K}K<\epsilon$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)\,g(x)=0$$

قضیہ ثابت ہوا

قضیہ 4۔ اگر $f: S \to T$ اور $g: T\to\mathbb{R}$ دو تفاعل ہیں اور $a\in D(S)$ ہے۔ اگر $\lim_{x\to a} f(x)=l$ اور $\lim_{y\to l} g(y)=m$ اور $g(l)=m$ تب $\lim_{x\to a}(gof)(x)=m$

ثبوت۔ فرض کرو کہ $\epsilon>0$ اور چوں کہ $\lim_{y\to l} g(y)=m$ اس لیے کہ $\exists\delta_1>0$ اس طرح سے کہ

$$|g(y)-m|<\epsilon, \forall\, 0<|y-l|<\delta_1, \qquad x\in S$$

اور چوں کہ $\lim_{x\to a} f(x)=l$ اس لیے $\delta_1>0$ کے لیے $\exists\delta>0$ اس طرح سے کہ $|f(x)-l|<\delta_1$ ہوگا۔

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |y-l|<\delta_1 \text{-----------} (1)$$

چوں کہ $g(l)=m$ ہے، اس لیے

$$|y-l|<\delta_1 \Rightarrow |g(y)-m|<\epsilon \text{-----------} (2)$$

مساوات (1) اور (2) کی مدد سے

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |g(y)-m|<\epsilon$$
$$\Rightarrow |(gof)(x)-m|<\epsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}(gof)(x) = m$$

قضیہ ثابت ہوا

قضیہ 5۔ سینڈوچ قضیہ (Sandwich Theorem)

اگر f, g, h تفاعل ہیں $S \to \mathbb{R}$ اور اگر $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = l$ اور اگر

$\delta_1 > 0$، $f(x) \leq h(x) \leq g(x), x \in [N(\delta_1, a) - \{a\}] \cap S$

تب $\lim_{x\to a} h(x) = l$

ثبوت۔ دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے $\exists \delta_2 > 0$ اس طرح سے کہ $x \in S$، $0 < |x-a| < \delta_2$

$$|f(x) - l| < \frac{\epsilon}{3} \& |g(x) - l| < \frac{\epsilon}{3}$$

$$\begin{aligned} |g(x) - f(x)| &= |g(x) - l + l - f(x)| \\ &\leq |g(x) - l| + |l - f(x)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < 2\frac{\epsilon}{3} \end{aligned}$$

اگر $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$ ہو تب $|x-a| < \delta$ کے لیے

$$\begin{aligned} |h(x) - l| &\leq |h(x) - g(x)| + |g(x) - l| \\ &\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - l| \\ &< \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} h(x) = l$$

مثال 1۔ اگر $f: \mathbb{R} - \{a\} \to \mathbb{R}$ معرف بہ $f(x) = \frac{x^2-a^2}{x-a}$ انتہا کی تعریف کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے کہ

$$\lim_{x\to a} f(x) = 2a$$

حل۔ $\lim_{x\to a} f(x) = 2a$ کو ثابت کرنے کے لیے ہمیں ثابت کرنا ہوگا کہ دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے $\exists \delta > 0$ اس طرح سے کہ

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2a| < \epsilon$$

$$\begin{aligned} |f(x) - 2a| &= \left|\frac{x^2-a^2}{x-a} - 2a\right| \\ &= \left|\frac{x^2 - a^2 - 2ax + 2a^2}{x-a}\right| \\ &= \left|\frac{x^2 - 2ax + a^2}{x-a}\right| \\ &= \left|\frac{(x-a)^2}{x-a}\right| \\ &= |x-a| \end{aligned}$$

$$|f(x) - 2a| < \epsilon \Leftrightarrow |x-a| < \epsilon$$

$\epsilon > 0$ کے لیے اگر ہم $\delta = \epsilon$ لیں تب

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2a| < \epsilon$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = 2a$$

ثابت کیا گیا۔

مثال 2۔ ثابت کیجیے کہ $\lim_{x\to 0}\frac{3x+|x|}{7x-5|x|}$ کا وجود نہیں ہے۔

حل۔ چوں کہ $|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$

اس لیے

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3x+|x|}{7x-5|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{3x+x}{7x-5x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{2x}=2$$

اور

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{3x+|x|}{7x-5|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{3x-x}{7x+5x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{12x}=\frac{1}{6}$$

چوں کہ $\lim_{x\to 0^+}\frac{3x+|x|}{7x-5|x|}\neq \lim_{x\to 0^-}\frac{3x+|x|}{7x-5|x|}$

اس لیے $\lim_{x\to 0}\frac{3x+|x|}{7x-5|x|}$ کا وجود نہیں ہے۔

مثال 3۔ ثابت کیجیے کہ $\lim_{x\to 0}\frac{3|x|-2x}{3x-2|x|}$ کا وجود نہیں ہے۔

حل۔ چوں کہ $|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$

اس لیے

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3|x|-2x}{3x-2|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{3x-2x}{3x-2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$$

اور

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{3|x|-2x}{3x-2|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{-3x-2x}{3x+2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-5x}{5x}=-1$$

چوں کہ $\lim_{x\to 0^+}\frac{3|x|-2x}{3x-2|x|}\neq \lim_{x\to 0^-}\frac{3|x|-2x}{3x-2|x|}$

اس لیے $\lim_{x\to 0}\frac{3|x|-2x}{3x-2|x|}$ کا وجود نہیں ہے۔

مثال 4۔ ثابت کیجیے کہ $\lim_{x\to 0}\frac{3|x|-2x}{3x-2|x|}=2a$ کا وجود نہیں ہے۔

حل۔ چوں کہ $|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$

اس لیے

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3|x|-2x}{3x-2|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{3x-2x}{3x-2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$$

اور

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{3|x|-2x}{3x-2|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{-3x-2x}{3x+2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-5x}{5x}=-1$$

چوں کہ $\lim_{x\to 0^+}\frac{3|x|-2x}{3x-2|x|}\neq\lim_{x\to 0^-}\frac{3|x|-2x}{3x-2|x|}$ ہے۔

اس لیے $\lim_{x\to 0}\frac{3|x|-2x}{3x-2|x|}$ کا وجود نہیں ہے۔

مثال 5۔ اگر $S=\mathbb{R}-\{0\}$ اور $f:S\to\mathbb{R}$ اس طور پر کہ $f(x)=x\,sin\frac{1}{x}$ تب انتہا کی تعریف کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے کہ $\lim_{x\to 0}f(x)=0$

حل۔ دیا گیا ہے کہ $f(x)=x\,sin\frac{1}{x}$ اور ثابت کرنا ہے کہ $\lim_{x\to 0}f(x)=l=0$ دیے گئے $\epsilon>0$ کے لیے $\exists\delta>0$ اس طرح سے کہ $0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-0|<\epsilon$

$$|f(x)-l|=\left|x\,sin\frac{1}{x}-0\right|$$
$$=\left|x\,sin\frac{1}{x}\right|$$
$$=|x\,|\left|sin\frac{1}{x}\right|$$
$$\le|x|$$
$$|f(x)-l|<\epsilon\Leftrightarrow|x|<\epsilon \text{ یا } |x-0|<\epsilon$$

اگر ہم $\epsilon=\delta$ انتخاب کریں تب $|f(x)-l|<\epsilon$ تب بھی $|x|<\delta$

اس لیے

$$\lim_{x\to 0}f(x)=0$$

ثابت کیا گیا۔

مثال 6۔ اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرف بہ $f(x)=\begin{cases}x+2, & x<1\\ 4x-1, & 1\le x\le 3\\ x^2+5, & x>3\end{cases}$ تب $\lim_{x\to 1}f(x)$ اور $\lim_{x\to 3}f(x)$ کے وجود کی جانچ کیجیے۔

حل۔ سب سے پہلے ہم $\lim_{x\to 1}f(x)$ کی جانچ کریں گے

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1}(x+2)$$
$$=1+2=3$$

اور

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1}(4x-1)$$

$$= 4 - 1 = 3$$

چوں کہ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3 = \lim_{x\to 1^+} f(x)$

اس لیے

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 3$$

یعنی $\lim_{x\to 1} f(x)$ وجود رکھتی ہے۔

اب ہم $\lim_{x\to 3} f(x)$ کی جانچ کریں گے

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3}(4x - 1)$$
$$= 12 - 1 = 11$$

اور

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3}(x^2 + 5)$$
$$= 9 + 5 = 14$$

چوں کہ $\lim_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim_{x\to 3^+} f(x)$

اس لیے $\lim_{x\to 3} f(x)$ کا وجود نہیں ہے۔

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

9.2.4 ∞ پر انتہائیں اور لا متناہی انتہائیں (Limits on ∞and Infinite Limits)

9.2.4.1 لا متناہی انتہائیں (Infinite Limits)

تعریف: اگر $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ یا $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ تب تفاعل f کی انتہا لا متناہی کہلاتی ہے۔

تعریف: اگر $f: S \to \mathbb{R}$ ایک تفاعل ہے اور دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے $0 < \delta \exists$ اس طور پر کہ

$$x \in S, 0 < |x - a| < \delta$$
$$\Rightarrow \quad f(x) > \epsilon$$

تب $\infty \leftarrow f(x)$ جیسے $x \to a$

اور $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ لکھا جائے گا۔

تعریف: اگر $f: S \to \mathbb{R}$ ایک تفاعل ہے اور دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے $0 < \delta \exists$ اس طور پر کہ

$$x \in S, 0 < |x - a| < \delta$$
$$\Rightarrow f(x) > -\epsilon$$

تب $-\infty \leftarrow f(x)$ جیسے $x \to a$

اور $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ لکھا جائے گا۔

مثال 7۔ اگر $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ تب ثابت کیجیے کہ $\lim_{x\to 0} f(x)$ کا وجود نہیں ہے۔

حل۔ ہم جانتے ہیں کہ 0 ایک $\mathbb{R} - \{0\}$ کا انتہائی نقطہ ہے ۔0 کی خارج ہم سائگی (Deleted Neighbourhood) میں $f(x) = \frac{1}{x}$ دونوں مثبت اور منفی قیمتیں لیتا ہے۔

$$\delta > 0, 0 < x < \delta \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} > \epsilon$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x} > \epsilon$$

دیا گیا $\epsilon > 0$ کے لیے اگر انتخاب یوں کیا جائے کہ $0 < \delta < \frac{1}{\epsilon}$، تب

$$0 < x < \delta \Longrightarrow \frac{1}{x} > \epsilon$$

لہٰذا تعریف کے مطابق $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ اور

$$\delta > 0, -\delta < x < 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} < \frac{-1}{\delta} < -\epsilon$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{x} < -\epsilon$$

اس لیے $\epsilon > 0$ کے لیے اگر $0 < \delta < \frac{1}{\epsilon}$ انتخاب کیا جائے تب

$$-\delta < x < 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} < -\epsilon$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

لہٰذا معلوم ہوا کہ $\lim_{x\to 0} f(x)$ کا وجود نہیں ہے۔

مثال 8۔ اگر $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ تب ثابت کیجیے کہ $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$

حل۔ اگر $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ ہو تو تعریف کے مطابق $\epsilon_1 > 0$ کے لیے $\exists \delta > 0$ اس طور پر کہ

$$0 < |x-a| < \delta$$
$$\Longrightarrow f(x) > \epsilon_1$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{\epsilon_1}$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{\epsilon_1} < 0 < \frac{1}{f(x)} < \epsilon_1$$

اس لیے

$$0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{1}{f(x)} - 0\right| < \epsilon$$

جہاں $\frac{1}{\epsilon_1} = \epsilon$ ہے۔ اس لیے

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$$

اور اگر a کی ہر خارج ہم سائگی میں $f(x) > 0$ ہو اور

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0$$

تب $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty$

مثال 9۔ ثابت کیجیے کہ $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

حل۔ فرض کیجیے کہ $\epsilon > 0$ کے لیے ہم ثابت کرتے ہیں کہ $\exists \delta > 0$ اس طور پر کہ

$$|x-0| < \delta$$
$$\Rightarrow f(x) > \epsilon$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} > \epsilon$$
$$\Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{\epsilon}$$
$$\Leftrightarrow x < \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$$

اس لیے دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے اگر $\delta = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} > 0$ ہو، تب

$$0 < |x-0| < \delta \Longrightarrow f(x) > \epsilon$$

اس لیے

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty$$

مثال 10۔ ثابت کیجیے کہ $\lim_{x\to 0}\log|x| = -\infty$

حل۔ فرض کیجیے کہ $\epsilon > 0$ کے لیے اور $\log|x| < -\epsilon$

$$\Rightarrow |x| < \mathrm{e}^{-\epsilon} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\epsilon}}$$

اس لیے دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے اگر $\delta = \frac{1}{\mathrm{e}^{\epsilon}} > 0$ ہو، تب

$$0 < |x| < \delta \Longrightarrow f(x) < -\epsilon$$

اس لیے

$$\lim_{x\to 0}\log|x| = -\infty$$

9.2.4.2 ∞ پر انتہائیں (Limits on ∞)

غور کیجیے کہ تفاعل $\cos\frac{1}{x}$ کیا ہوگا اگر $x \to \infty$ ہو۔

ہم جانتے ہیں کہ جب $x \to \infty$ تب $\frac{1}{x} \to 0$

لہٰذا $\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x} = \cos\frac{1}{\infty} = \cos(0) = 1$

یعنی جب $x \to \infty$ $\cos\frac{1}{x} \to 1$

انتہا کی تعریف کو استعمال کرتے ہوئے ∞ پر کو باقاعدہ بیان کیا جا سکتا ہے۔

تعریف: اگر S ایک مجموعہ (Aggregate) ہے اس خاصیت کے ساتھ کہ کسی بھی $b > 0$ کے لیے $\exists x \in S$ اس طرح سے کہ $x \geq b$

اگر $f: S \to \mathbb{R}$ اور $l \in \mathbb{R}$

تب دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے کہ $\exists \delta > 0$ اس طور پر کہ $x \in S$ اور $x \geq \delta$

$$\Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

تب کہا جائے گا کہ جیسے $x \to \infty$ تب $f(x) \to l$

اور اس کو $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ کی طرح لکھا جائے گا۔

تعریف: اگر S ایک مجموعہ (Aggregate) ہے اس خاصیت کے ساتھ کہ کسی بھی $b > 0$ کے لیے $x \in S$ $\exists$ اس طرح سے کہ $x \leq -b$

اگر $f: S \to \mathbb{R}$ اور $l \in \mathbb{R}$ ہو،

تب دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے کہ $\delta > 0$ $\exists$ اس طور پر کہ $x \in S$ اور $x \leq -\delta$

$$\Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

تب کہا جائے گا کہ جیسے $x \to -\infty$ تب $f(x) \to l$

اور اس کو $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ کی طرح لکھا جائے گا۔

اور اگر $\epsilon > 0$ کے لیے کہ $\delta > 0$ $\exists$ اس طور پر کہ $x \in S$ اور $x \geq \delta$

$$\Rightarrow f(x) > \epsilon$$

تب کہا جائے گا کہ جیسے $x \to \infty$ تب $f(x) \to \infty$

لہٰذا $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

مثال 11۔ ثابت کیجیے کہ $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

حل۔ فرض کیجیے کہ $\epsilon > 0$ کے لیے

$$|f(x) - l| = \left|\frac{1}{x^2} - 0\right| = \frac{1}{x^2}$$

اب

$$|f(x) - l| < \epsilon$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} < \epsilon$$
$$\Leftrightarrow x^2 > \frac{1}{\epsilon}$$
$$\Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$$

اگر ہم $\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} = \delta$ لیں، تب $\delta > 0$ اور

$$\left|\frac{1}{x^2} - 0\right| < \epsilon, \forall x > \delta$$

اس لیے

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

مثال 12۔ ثابت کیجیے کہ $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$

حل۔ چوں کہ $x \to \infty$ اور $x \in (0, \infty)$ لہٰذا $x > 0$

چوں کہ $e > 0, e^x > x, \forall x > 0$ اور

$$x > \delta \Rightarrow e^x > x > \delta > \epsilon$$

لہٰذا $\epsilon > 0$ کے لیے اگر $\epsilon > \delta$ لیا جائے

$$x > \delta \Rightarrow e^x > \epsilon$$

اس لیے

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

نوٹ:

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0$$

مثال13۔ ثابت کیجیے کہ $\lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$ اور $\lim_{x\to0^+} e^{\frac{-1}{x}} = 0$

حل۔ $\delta_1 > 0$ اور $x \to 0^+$ کے لیے

$$x \in (0, \delta_1) \Rightarrow 0 < x < \delta$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{\delta}$$

تب

$$\Rightarrow 0 < x < \delta, e^{\frac{1}{x}} > \frac{1}{x} > \delta > \epsilon$$
$$\Rightarrow \quad e^{\frac{1}{x}} > \epsilon$$

اس لیے

$$\lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$$

اور

$$\lim_{x\to0^+} e^{\frac{-1}{x}} = \lim_{x\to0^+}\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = 0$$

ثابت کیا گیا۔

مثال14۔ اگر $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ تب معلوم کیجیے کہ $\lim_{x\to0} f(x)$ وجود رکھتا ہے یا نہیں۔

حل۔ ظاہر ہے کہ تفاعل کا دامنہ $\mathbb{R} - \{0\}$ ہے اور اس کا انتہائی نقطہ 0 ہے۔

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{0}{1+0} = 0 \quad \left[\because \lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0\right]$$

اور

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to0^+}\frac{1}{e^{\frac{-1}{x}}+1} = \frac{1}{0+1} = 1$$

$$\because \lim_{x\to0^-} f(x) \neq \lim_{x\to0^+} f(x)$$

اس لیے $\lim_{x\to0} f(x)$ کا وجود نہیں ہے۔

مشقی سوالات:

1. اگر $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ تب دکھائیے کہ $\lim_{x\to 0} f(x)$ وجود نہیں رکھتا۔
2. اگر $f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ تب جانچ کیجیے کہ $\lim_{x\to 0} f(x)$ کا وجود ہے یا نہیں۔

مثال 15۔ ثابت کیجیے کہ $\lim_{x\to\infty} e^{-x}\cos x = 0$

حل۔ غور کیجیے کہ

$$\begin{aligned} |f(x)-0| &= |e^{-x}\cos x - 0| \\ &= |e^{-x}\cos x| \\ &= |e^{-x}||\cos x| \\ &= |e^{-x}| [\because\ |\cos x| \le 1] \end{aligned}$$

چوں کہ $e > 0, e^{x} > x, \forall x > 0$ اور

$$\begin{aligned} |f(x)-0| < \epsilon &\Leftrightarrow |e^{-x}| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{e^{x}} < \epsilon \Rightarrow e^{\frac{1}{x}} > \frac{1}{\epsilon} \\ &\Leftrightarrow x > \log\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \end{aligned}$$

اگر ہم δ کا انتقاب یوں کریں $\delta > \log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$، تب

$$|e^{-x}\cos x - 0| < \epsilon, \forall x > \delta$$

اس لیے

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\cos x = 0$$

طریقہ-II

$$\because\ 0 \le |\cos x| \le 1$$
$$\Rightarrow 0 \le |e^{-x}\cos x - 0| \le |e^{-x}|, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

مگر چوں کہ $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$

اس لیے سینڈوچ کے قضیے کے مطابق

$$\lim_{x\to\infty} |e^{-x}\cos x| = 0$$

یعنی

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\cos x = 0$$

مشقی سوالات:

1. ثابت کیجیے $\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sin x = 0$
2. ثابت کیجیے $\lim_{x\to\infty} \frac{x-[x]}{x} = 0$

9.3 اکتسابی نتائج(Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے انتہاؤں کے وجود اور ان کے معلوم کرنے پر بحث کی۔ دیے گئے تفاعل پر دائیں اور بائیں جانب کی انتہائیں اور اُنکے یکتا ہونے پر تفاعل کی انتہا کے موجود ہونے کو پہچانا۔ اسکے علاوہ انتہا انفنٹی اور لا متناہی انتہاؤں کو زیر بحث لایا۔

9.4 کلیدی الفاظ(Keywords)

انتہا، سینڈ وچ قضیہ، انتہا انفنٹی پر، لا متناہی انتہا

9.5 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

9.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. $\lim_{x\to0^+}\frac{3x+|x|}{7x-5|x|}$ کو معلوم کیجیے۔
2. اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرف بہ $f(x)=\begin{cases}x+2, x<1\\4x-1, 1\le x\le 3\\x^2+5, x>3\end{cases}$ تب $\lim_{x\to1^+}f(x)$ کو معلوم کیجیے۔
3. کیا $\lim_{x\to2^-}[x-[x]]=1$ ہے؟
4. $\lim_{x\to\infty}\frac{x-[x]}{x}=$ ____
5. تفاعل f کو دامنہ D پر بڑھتا ہوا کہیں گے اگر __________
6. من درجہ ذیل کو جوڑیے:

.1	$\lim_{x\to0^-}\frac{3x+|x|}{7x-5|x|}$	(a	∞
.2	$\lim_{x\to a}\sin x$	(b	0
.3	$\lim_{x\to2^+}[x-[x]]$	(c	$\frac{1}{6}$
.4	$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}$	(d	$\sin a$
.5	$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}$	(e	1
		(f	2

9.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

1. اگر $f(x)=\left|\frac{x^2+2}{x^2+1}\right|$ اور $\epsilon>0$ تب $\delta>0$ معلوم کیجیے اس طور پر کہ $|f(x)-2|<\epsilon, 0<|x|<\delta$
2. ثابت کیجیے کہ $\lim_{x\to0}\frac{|x|}{x}$ وجود نہیں رکھتا۔

3. اگر $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ تب معلوم کیجیے کہ آیا $\lim_{x\to 0} f(x)$ کا وجود ہے یا نہیں۔

4. فرض کیجیے $S = \mathbb{R} - \{0\}$ اور $f: S \to \mathbb{R}$ اس طور پر کہ $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$ ہو۔ انتہا کی تعریف کے استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے کہ $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

5. اگر $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{-1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{-1}{x}}}$ تب ثابت کیجیے کہ $\lim_{x\to 0} f(x)$ کا وجود نہیں ہے۔

6. ثابت کیجیے کہ $\lim_{x\to\infty} e^{-x}\cos x = 0$

9.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. ثابت کیجیے کہ کسی تفاعل $f: S \to \mathbb{R}$ کے لیے اگر $\lim_{x\to a} f(x) = l$ ہو تب l یکتا ہوگا۔

2. اگر $f: S \to \mathbb{R}$ اور $g: S \to \mathbb{R}$ اور 'a'، S کا انتہائی نقطہ ہے اور $\lim_{x\to a} f(x) = l$ اور $\lim_{x\to a} g(x) = m$ جہاں $l, m \in \mathbb{R}$ تب ثابت کیجیے کہ

$$\lim_{x\to a}\{f(x) + g(x)\} = l + m$$

9.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Introduction to Real Analysis, Donald R. Sherbert Robert G. Bartle 4th Edition , 2014
2. Elements Of Real Anyalsis, Narayan Shanti and Raisinghania M.D., 2003
3. Real Analysis, Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick, 4th Edition, 2017
4. Real Analysis, J.N. Sharma and A.R. Vasishtha, 2014
5. Real Analysis, V. Karunakaran, 2011
6. Real Analysis, N.L. Carothers, 2006
7. Basic Real Analysis, Houshang H. Sohrab, 2nd Edition, 2014

اکائی10۔ مسلسل تفاعل-I

(Continuous Functions- I)

اکائی کے اجزا

10.0 تمہید(Introduction)

علم احصا(Calculus)کے بہت سے میدانوں میں تفاعل کے تسلسل کو سمجھنا ضروری ہوتا ہے۔ مسلسل تفاعل کی خصوصیات اور نقاط غیر تسلسل بڑے دلچسپ ہوتے ہیں۔اس اکائی میں ہم مسلسل تفاعل پر بحث کریں گے۔ بہت سی مثالوں سے مختلف اقسام کے غیر مسلسل تفاعل بھی زیر مطالعہ ہوں گے۔

10.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے ختم پر طلبا اس قابل ہو جائیں گے کہ :

- تفاعل کے تسلسل کو پہچان سکیں۔
- تفاعل کے کسی بھی نقطہ پر مختلف قسم کے غیر مسلسل ہونے کو زیر بحث لا سکیں۔

10.2 تسلسل(Continuity)

10.2.1 کسی نقطہ پر تفاعل کا تسلسل(Continuity at a Point of a Function)

تعریف: اگر S ایک مجموعہ ہے اور $f: S \to \mathbb{R}$ ایک تفاعل ہے۔ تب f کو بائیں سے مسلسل کہا جائے گا اگر دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے ایک عدد $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

اور f کو دائیں سے مسلسل کہا جائے گا اگر دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے ایک عدد $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

پھر اگر دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے ایک عدد $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

تب $x = a$ پر تفاعل f مسلسل ہوگا [یعنی جب f دائیں اور بائیں جانبوں سے مسلسل ہو تو وہ مسلسل کہلاتا ہے۔]

غیر مسلسل تفاعل(Discontinuous Function)

اگر $f: S \to \mathbb{R}$ ہو اور دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے ایک عدد $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| > \epsilon$$

تب $x = a$ پر تفاعل f غیر مسلسل کہلاتا ہے۔

تعریفات(Definitions):

i) اگر $x = a$ پر f دائیں سے مسلسل ہے تب $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

ii) اگر $x = a$ پر f بائیں سے مسلسل ہے تب $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

iii) اگر $x = a$ پر f مسلسل ہے تب $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

نوٹ: تفاعل کے تسلسل کی شرط کی نقطہ $x = a$ پر یہ رشتہ ہوتا ہے کہ $a \in S$ کا ہم سایہ اور $f(a)$ کا ہم سایہ سعت $f(S)$ میں رشتہ ہوتا ہے
$f(S) \subset \mathbb{R}$

کسی بند وقفہ پر تسلسل (Continuity on Closed Interval)

تفاعل $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ کو $[a, b]$ پر مسلسل کہا جاتا ہے اگر

i) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c), \forall c \in [a, b]$

ii) $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b) \,\&\, \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

اگر $[a, b]$ پر f مسلسل ہے تب ہم ظاہر کریں گے $f \in c\,[a, b]$ جب کہ $c\,[a, b]$ سٹ $[a, b]$ پر سبھی مسلسل تفاعل کا سٹ ہے۔

نوٹ:

1. $x = a$ پر f مسلسل ہے اس کا مطلب یہ ہے کہ $y = f(x)$ کا گراف a کی ہم سائگی میں شکستہ نہیں ہے۔
2. $[a, b]$ پر f مسلسل ہے اس کا مطلب یہ ہے کہ $y = f(x)$ کا گراف نقطہ $(a, f(a))$ سے نقطہ $(b, f(b))$ تک شکستہ نہیں ہے۔

مثال 1۔ ایک مستقل تفاعل $f(x) = k, k \in \mathbb{R}$ ہمیشہ $\mathbb{R}$ پر مسلسل ہے۔

حل۔ فرض کیجیے کہ $a \in \mathbb{R}$ اور $\epsilon > 0$ ہے تب کسی بھی $\delta > 0$ کے لیے اور $x \in \mathbb{R}$ پر

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| = |k - k| = 0 < \epsilon$$

اس لیے $\mathbb{R}$ پر f مسلسل ہے۔

مثال 2۔ شناختی تفاعل (Identity Function) $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ مسلسل ہے۔

حل۔ فرض کیجیے کہ $a \in \mathbb{R}$ اور $\epsilon > 0$ ہے اگر $\delta = \epsilon$ لیا جائے تب سبھی $x \in \mathbb{R}$ کے لیے

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| = |x - a| < \epsilon$$

چنانچہ f مسلسل تفاعل ہے۔

مثال 3۔ تفاعل $f(x) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$ مسلسل ہے $\mathbb{R}$ پر۔

حل۔ فرض کیجیے کہ $a \in \mathbb{R}$ اور $\epsilon > 0$ ہے تب غور کیجیے

$$|f(x) - f(a)| = |\sin x - \sin a| = 2\left|\sin\frac{(x-a)}{2}\cos\frac{(x+a)}{2}\right|$$
$$< 2\left|\sin\frac{(x-a)}{2}\right|\left|\cos\frac{(x+a)}{2}\right|$$
$$\because |\sin\theta\ | \le 1,\ \ |\cos\theta| \le 1, \forall 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

اس لیے

$$|\sin x - \sin a| = 2\frac{(x-a)}{2}\cdot 1 = |x - a|$$

اس لیے دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے اگر $\delta = \epsilon$ لیا جائے تب سبھی $x \in \mathbb{R}$ کے لیے

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |\sin x - \sin a| < \epsilon$$

چنانچہ f مسلسل تفاعل ہے۔

تواتر کے اصول یا ہین کا قضیہ (Sequence Criterion or Heine's Theorem):

بیان: کوئی تفاعل $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ کسی نقطہ $a \in S$ پر مسلسل ہوگا اگر اور صرف اگر $f(x_n) \rightarrow f(a)$ جب کہ S کا ہر ایک تواتر $\{x_n\}$ نقطہ a پر متدق ہو۔

ثبوت۔ فرض کیجیے کہ نقطہ a پر f مسلسل تفاعل ہے۔ تب دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے ایک عدد $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $x \in S$ کے لیے

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon \text{------------} (1)$$

ہم ثابت کریں گے کہ $f(x_n) \rightarrow f(a)$ ہے جب کہ S کا ہر تواتر $\{x_n\}$ نقطہ a پر متدق ہو۔

$x_n \rightarrow a$ اس لیے ایک عدد $\delta > 0$ کے لیے $m \in N$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$|x_n - a| < \delta, \qquad \forall n \geq m$$

مساوات (1) سے

$$|f(x_n) - f(a)| < \delta$$

اس لیے $f(a)$ پر تواتر $\{f(x_n)\}$ متدق ہوا۔

اگر $f(a)$ پر تواتر $\{f(x_n)\}$ متدق ہے تو تواتر $\{x_n\}$ نقطہ a پر متدق ہوگا۔

اگر مان لیا جائے کہ نقطہ a پر f مسلسل تفاعل نہیں ہے، تب کسی دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے ایک عدد $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $x \in S$ کے لیے

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \geq \epsilon$$

اگر $n \in N, \delta = \frac{1}{n}$ لیا جائے تب $x_n \in S$ کے لیے

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \Rightarrow |f(x_n) - f(a)| \geq \epsilon$$

اس لیے

$$x_n \longrightarrow a \nRightarrow f(x_n) \longrightarrow f(a)$$

یہ ایک تردید ہے۔

اس لیے ہمارا مان لینا غلط ثابت ہوا کہ نقطہ a پر f مسلسل تفاعل نہیں ہے۔ اس لیے یہ ثابت ہوا کہ نقطہ a پر f مسلسل تفاعل ہے۔

یاد رکھیے کہ نقطہ a پر f مسلسل تفاعل نہیں ہے اگر اور صرف اگر ایک تواتر $\{x_n\}$ اس طرح وجود رکھتی ہے کہ

$\lim_{n\to\infty} x_n = a$ اور $\lim_{n\to\infty}\{f(x_n)\} \neq f(a)$

مثال 4۔ دکھائیے کہ تفاعل $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ معرف بہ $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ مسلسل نہیں ہے۔

حل۔ اگر $a \in \mathbb{Q}$ تب $f(a) = 1$

$$a - \frac{1}{n} < a + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$\mathbb{R}$ پر تکثیف کے باعث (غیر ناطق) $x_n \exists$ اس طور پر کہ

$$a - \frac{1}{n} < x_n < a + \frac{1}{n}$$

$$|x_n - a| < \frac{1}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

اس لیے $\{x_n\}$ کا ظہور ہو گا جو کہ a پر متدق ہو گا۔

اب

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(-1) = -1 \neq f(a)$$

لہٰذا تواتر کے اصول سے f مسلسل نہیں ہے۔

اب اگر $a \in \mathbb{R}$ اور a ایک غیر ناطق عدد ہے تب $f(a) = -1$ اور

$$x_n, n \in \mathbb{N}, \qquad |x_n - a| < \frac{1}{n}$$

اس لیے تواتر $\{x_n\}$ غیر ناطق عدد a پر متدق ہو گا۔ اور

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(1) = 1 \neq f(a)$$

لہٰذا $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ پر تفاعل f مسلسل نہیں ہے۔

نوٹ: اس تفاعل کو ڈرچلیٹ تفاعل (Dirichlet's Function) کہتے ہیں۔

مثال 5۔ دیے گئے تفاعل $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & 0 \le x < 1 \\ 2x^2 - 2x + \frac{3}{2}, & 1 < x \le 2 \end{cases}$ کا $x = 1$ پر مسلسل ہونے پر بحث کیجیے۔

حل۔ 1 وقفہ $[0,2]$ میں انتہائی نقطہ ہے۔

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}$$

اور

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}\left(2x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\because \lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

لہٰذا $x = 1$ پر تفاعل f مسلسل نہیں ہے۔

مثال 6۔ (اپسلون) ϵ اور **(ڈیلٹا)** δ تکنیک کا استعمال کرتے ہوئے دکھایئے کہ تفاعل $f(x) = 5x + 3$ نقطہ $x = 1$ پر مسلسل ہو گا۔

حل۔ دیا گیا ہے

$$f(x) = 5x + 3$$

$$\Rightarrow \quad f(1) = 5(1) + 3 = 8$$
$$\begin{aligned}|f(x) - f(1)| &= |5x + 3 - 8| \\ &= |5x - 5| \\ &= 5|x - 1|\end{aligned}$$

اب

$$\begin{aligned}&|f(x) - f(1)| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow 5|x - 1| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \ |x - 1| < \frac{\epsilon}{5}\end{aligned}$$

لہٰذا $\delta = \frac{\epsilon}{5}$ لیا جائے، تب

$$|x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(1)| < \epsilon$$

اگر $\delta = \frac{1}{n}, n \in N$ لیا جائے تب $x_n \in S$ کے لیے

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \Rightarrow |f(x_n) - f(a)| \geq \epsilon$$

لہٰذا $x = 1$ پر تفاعل f مسلسل ہے۔

مثال 7۔ (اپسلون) ϵ اور **(ڈیلٹا)** δ تکنیک کا استعمال کرتے ہوئے دکھایئے کہ تفاعل $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ نقطہ $x = 0$ پر مسلسل ہے۔

حل۔ دیا گیا ہے

$$\begin{aligned}|f(x) - f(0)| &= \left|x^2 \sin\frac{1}{x} - 0\right| \\ &= \left|x^2 \sin\frac{1}{x}\right| \\ &= |x^2|\left|\sin\frac{1}{x}\right| \\ &\leq |x^2|\end{aligned}$$

اب

$$\begin{aligned}&|f(x) - f(0)| < \epsilon \\ \Rightarrow \quad &|x^2| < \epsilon \\ \Rightarrow \quad &|x| < \sqrt{\epsilon} \\ \Rightarrow \quad &|x - 0| < \sqrt{\epsilon}\end{aligned}$$

یعنی $\delta = \sqrt{\epsilon}$ لیا جائے، تب

$$\begin{aligned}&|x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \epsilon \\ &\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)\end{aligned}$$

لہٰذا $x = 0$ پر تفاعل f مسلسل ہے۔

مثال 8۔ $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{-1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{-1}{x}}}, x \neq 0$ اور $f(0) = 1$ کے تسلسل پر بحث کیجیے

حل۔ دیا گیا ہے کہ

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{-1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{-1}{x}}}, x \neq 0$$
$$= \frac{e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}}{e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}}$$
$$= \frac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{e^{\frac{2}{x}} + 1}$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{e^{\frac{2}{x}} + 1}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1 - e^{\frac{2}{x}}}{1 + e^{\frac{2}{x}}}\right) = \frac{1-0}{1+0} = 1 = f(0)$$

اور

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{e^{\frac{2}{x}} + 1}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{0-1}{0+1}\right) = -1 \neq f(0)$$

چوں کہ

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

اس لیے f نقطہ $x = 0$ پر مسلسل نہیں ہے۔

مثال 9۔ تفاعل $f(x) = |x| + |x-1|$ کے $x = 0, 1$ پر تسلسل کی جانچ کیجیے۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ

$$f(x) = |x| + |x-1|$$

تب

$$f(0) = 1، f(1) = 1$$

صورت-I

جب $x < 0, x - 1 < 0$

$$|x| = -x$$

اور

$$|x-1| = -(x-1) = 1 - x$$
$$f(x) = -x + 1 - x = 1 - 2x$$

صورت-II

جب $0 < x < 1$

$$x > 0 \Rightarrow |x| = x$$
$$x < 1 \quad \Rightarrow x - 1 < 0$$
$$f(x) = |x| + |x-1|$$
$$= x + 1 - x = 1$$

صورت-III

جب $x > 1$

$$x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0$$
$$\therefore |x| = x, \qquad |x-1| = x - 1$$
$$f(x) = |x| + |x-1|$$
$$= x + x - 1 = 2x - 1$$
$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}$$

اب

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

اور

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}(1 - 2x) = 1$$

چوں کہ

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$$

اس لیے f نقطہ $x = 0$ پر مسلسل ہے۔

اور

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}(2x - 1) = 2(1) - 1 = 1$$

اور

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}(1) = 1$$

چوں کہ

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 = \lim_{x\to 1^-} f(x)$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 1 = f(1)$$

اس لیے f نقطہ $x = 1$ پر مسلسل ہے۔

10.2.2 غیر تسلسل/عدم تسلسل (Discontinuity)

ایک نقطہ جس پر ایک تفاعل مسلسل نہیں ہے وہ نقطہ غیر تسلسل کہلاتا ہے۔

عدم تسلسل کی قسمیں (Types of Discontinuity)

***i)* برطرف شدنی غیر تسلسل (Removable Discontinuity)**

اگر $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود رکھتا ہو مگر $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(x)$ یا $f(a)$ غیر معلوم ہو تب f کو $x = a$ پر برطرف شدنی تسلسل

رکھنے والا تفاعل کہیں گے۔

اس صورت میں تفاعل کو مکرر معرف کرنے سے مسلسل کیا جا سکتا ہے۔

جیسے $g(x) = f(x), \;\; x \neq a$

$$g(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

ii) جُست والا عدم تسلسل (Jump Discontinuity)

اگر $\lim_{x \to a^+} f(x)$ اور $\lim_{x \to a^-} f(x)$ دونوں وجود رکھتے ہوں لیکن برابر نہیں ہیں یعنی

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$$

تب $x = a$ پر تفاعل f جُست والا عدم تسلسل رکھتا ہے۔

$\lim_{x \to a^+} f(x) - \lim_{x \to a^-} f(x)$ کو $x = a$ پر جُست کی بلندی کہا جاتا ہے۔

نوٹ: بر طرف شدنی عدم تسلسل یا جُست والا عدم تسلسل کو معمولی عدم تسلسل یا پہلی قسم کا عدم تسلسل کہا جاتا ہے۔

iii) دوسری قسم کا عدم تسلسل (Discontinuity of Second Kind)

اگر $\lim_{x \to a^+} f(x)$ اور $\lim_{x \to a^-} f(x)$ دونوں کا وجود نہیں ہے یعنی لا متناہی ہیں، تب $x = a$ پر تفاعل f دوسری قسم کا عدم تسلسل رکھتا ہے۔

مثال 10۔ $f(x) = \frac{1-\cos 2x}{1-\cos 4x}, x \neq 0$ اور $f(0) = \frac{2}{3}$ کے تسلسل کی جانچ کیجیے۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ

$$f(x) = \frac{1-\cos 2x}{1-\cos 4x} = \frac{2\sin^2 x}{2\sin^2 2x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\sin^2 2x}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{\sin^2 2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \times x^2}{\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 \times 4x^2}$$

$$= \frac{\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{\lim_{2x \to 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 \times 4}$$

$$= \frac{1}{4} \neq f(0) = \frac{2}{3}$$

چوں کہ

$$\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$$

اس لیے f نقطہ $x = 0$ پر بر طرف شدنی عدم تسلسل رکھتا ہے۔

اگر یوں مکرر معرف کیا جائے

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos 4x}, x \neq 0 \\ \dfrac{1}{4}, \qquad\qquad x = 0 \end{cases}$$

تب یہ مسلسل ہو جائے گا۔ گویا کہ عدم تسلسل کو برطرف کر دیا گیا۔

مثال 11۔ اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x^2 - 2x + \frac{3}{2}, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ ہو تب $x = 1$ پر تفاعل کے تسلسل پر بحث کیجیے۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x^2 - 2x + \dfrac{3}{2}, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

اور

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} \left(2x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right) = 2 - 2 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

چوں کہ

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

اس لیے f نقطہ $x = 1$ پر جست عدم تسلسل رکھتا ہے۔

مثال 12۔ اگر $f(x) = x - [x]$ تب $x = 3$ پر تفاعل کے تسلسل پر بحث کیجیے۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ

$$f(x) = x - [x]$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3} (x - [x]) = 3 - 2 = 1$$

اور

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3} (x - [x]) = 3 - 3 = 0$$

چوں کہ

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim_{x \to 3^+} f(x)$$

اس لیے f نقطہ $x = 3$ پر جست عدم تسلسل رکھتا ہے۔

مثال 13۔ اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$ تب f کے تسلسل پر بحث کیجیے۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 0\\ 0, & x=2\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} f(x) &= \lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2}(x+2)=4\end{aligned}$$

اور چوں کہ

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \neq f(x) = 0$$

اس لیے f نقطہ $x = 2$ پر برطرف شدنی عدم تسلسل رکھتا ہے۔

مثال14۔ تفاعل $f(x) = x - [x]$ کے $x = 1$ پر تسلسل کو معلوم کیجیے۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ

$$f(x) = x - [x]$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 - 0 = 1 \quad \because x > 1 \Rightarrow [x] = 1$$

اور

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1}(x - [x])\\ &= 1 - 1 = 0 \qquad [\because x > 1 \Rightarrow [x] = 1]\end{aligned}$$

چوں کہ

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

اس لیے نتیجہ یہ نکلا کہ f نقطہ $x = 1$ پر جست عدم تسلسل رکھتا ہے۔

مثال15۔ درجہ ذیل دیے گئے تفاعل کے تسلسل پر بحث کیجیے اور عدم تسلسل کی اقسام کو بھی معلوم کیجیے

$$f(x)=\begin{cases}-x^2, & x<0\\ 5x-4, & 0\le x<1\\ 4x^2-3x, & 1\le x<2\\ 3x+4, & x\ge 2\end{cases}$$

حل۔ دیے گئے تفاعل کا دامنہ $(-\infty, \infty)$ ہے اور 0، 1، 2 دامنہ پر انتہائی نقاط ہیں۔

ظاہر ہے کہ $f(x) = -x^2$ وقفہ $(-\infty, \infty)$ پر مسلسل ہے۔

اور

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}(-x^2) = 0$$

جب کہ

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}(5x - 4) = -4$$

چوں کہ

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

اس لیے f نقطہ $x = 0$ پر جست عدم تسلسل رکھتا ہے۔

اور $x = 1$ کی صورت میں

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}(4x^2 - 3x) = 1$$

جب کہ

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}(5x - 4) = 5 - 4 = 1$$

اور

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 1$$

لہٰذا f نقطہ $x = 1$ پر مسلسل ہے۔

اور $x = 2$ کی صورت میں

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(3x + 4) = 6 + 4 = 10$$

جب کہ

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2}(4x^2 - 3x) = 16 - 6 = 10$$

اور

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 10$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 10$$

اس لیے f نقطہ $x = 2$ پر مسلسل ہے۔

مثال 16۔ a اور b کی قیمتیں معلوم کیجیے جن کے لیے تفاعل $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 1 \\ ax^2 + b, & 1 < x < 3 \\ 5x + 2a, & x \geq 3 \end{cases}$ ہر نقطے پر مسلسل ہو۔

حل۔ چوں کہ تفاعل f ہر نقطے پر مسلسل ہے اس لیے یہ $x = 1$ اور $x = 3$ پر مسلسل ہوگا۔ اب

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}(2x + 1) = 2 + 1 = 3$$

جب کہ

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}(ax^2 + b) = a + b$$

چوں کہ $f(1) = 3$ اور دیا ہے کہ تفاعل f ہر نقطے پر مسلسل ہے، اس لیے

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$$

اس لیے

$$a + b = 3 \text{------------------} (1)$$

اور چوں کہ $x = 3$ پر تفاعل مسلسل ہے۔ اس لیے

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3}(ax^2 + b) = 9a + b$$

اور

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3}(5x+2a) = 15+2a$$

چوں کہ $f(3) = 15+2a$ اور تفاعل f ہر نقطے پر مسلسل ہے، اس لیے

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$$

اس لیے

$$9a+b = 15+2a$$

$$7a+b = 15 \text{------------------}(2)$$

مساوات (1) اور (2) کو حل کرنے پر ہمیں $a = 2$ اور $b = 1$ حاصل ہوتا ہے۔

مثال 17۔ ثابت کیجیے کہ تفاعل $f(x) = \frac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}$ نقطہ $x = 0$ پر معمولی عدم تسلسل رکھتا ہے۔

حل۔ ہمیں معلوم ہے کہ $\lim_{x\to 0^+}\left(e^{\frac{-1}{x}}\right) = 0$ اور $\lim_{x\to 0^-}\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = 0$ ہوتا ہے۔ اس لیے

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\frac{-1}{x}}}{e^{\frac{-1}{x}}-1}\right) = \frac{0}{0-1} = 0$$

اور

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}\right) = \frac{1}{1-0} = 1$$

چوں کہ

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

اس لیے f نقطہ $x = 0$ پر جست عدم تسلسل رکھتا ہے۔ گویا کہ معمولی عدم تسلسل ہے۔

مشقی سوال:

تفاعل $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+1}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ کے مبدہ $(0,0)$ پر مسلسل ہونے کی جانچ کیجیے۔

مثال 18۔ تفاعل $f(x) = |x-1| + |x-2|$ کے تسلسل کو وقفہ $[0,3]$ میں زیر بحث لائیے۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ

$$f(x) = |x-1| + |x-2|$$

اگر $1 \le x$ ہو، تب $x-1 < 0, x-2 < 0$ ہوں گے۔ اب

$$\begin{aligned} f(x) &= |x-1| + |x-2| \\ &= 1-x+2-x \\ &= 3-2x \end{aligned}$$

$$1 \le x \le 2 \Rightarrow f(x) = x-1+2-x = 1$$

$$2 < x \le 3 \Rightarrow f(x) = x-1+x-2 = 2x-3$$

اس لیے تفاعل ذیل شکل کا ہو گا

$$f(x)=\begin{cases}3-2x, & x\le 1\\ 1, & 1\le x<2\\ 2x-3, & 2<x\le 3\end{cases}$$

اس سے صاف ہوتا ہے کہ f وقفوں $(0,1)$، $(1,2)$ اور $(2,3)$ پر مسلسل ہے۔

اب

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1}(1)=1$$

اور

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1}(3-2x)=1$$

چوں کہ

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=1=\lim_{x\to 1^-} f(x)$$

اور چوں کہ

$$\lim_{x\to 1} f(x)=1=f(1)$$

اس لیے f نقطہ $x=1$ پر مسلسل ہے۔

اور

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2}(2x-3)=2(2)-3=1$$

اور

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2}(1)=1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x)=1=\lim_{x\to 2^-} f(x)$$

اور چوں کہ

$$\lim_{x\to 2} f(x)=1=f(2)$$

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ f نقطہ $x=2$ پر مسلسل ہے۔

اور $x=3$ پر

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=1=\lim_{x\to 3}(2x-3)=2(3)-3=3=f(3)$$

لہٰذا معلوم ہوا کہ f نقطہ $x=3$ پر مسلسل ہے۔

مزید یہ کہ

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1=\lim_{x\to 0}(3-2x)=3=f(0)$$

اس لیے f نقطہ $x=0$ پر مسلسل ہے۔

لہٰذا وقفہ $[0,3]$ پر دیا گیا تفاعل مسلسل ہے۔

مثال 19۔ تفاعل $x\neq 0$، $f(x)=\frac{xe^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ اور $f(0)=0$ کے تسلسل کو مبدا $(0,0)$ پر زیر بحث لائیے۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ

$$f(x) = \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

اس لیے

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{xe^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{e^{\frac{-1}{x}}+1}\right) = \frac{0}{0+1} = 0 \left[\because \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{-1}{x}} = 0 \;\&\; \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0\right]$$

اور

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{xe^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right) = \frac{0\times 0}{1+0} = 0$$

اور چوں کہ

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

اس لیے f نقطہ $x = 0$ پر مسلسل ہے۔

10.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے دیے گئے تفاعل کے کسی نقطہ اور بند وقفہ پر تسلسل پر بحث کی۔ نیز عدم تسلسل تفاعل کی اقسام کی بھی ہمیں معلومات حاصل ہوئیں۔

10.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

تسلسل، تواتر سے اصول پہچان، عدم تسلسل، جست عدم تسلسل، معمولی عدم تسلسل

10.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

10.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. اگر f نقطہ a پر دائیں سے مسلسل ہے تب $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \cdots$

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$ مسلسل تفاعل ہے؟

a) صرف چند صورتوں میں　b) معلوم نہیں کیا جا سکتا　c) مسلسل ہے　d) عدم مسلسل ہے

3. اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2}-x, & x < 2 \\ 1, & x = 2 \\ x-\frac{3}{2}, & x > 2 \end{cases}$ ہو، تب f

(a $x=2$ پر مسلسل ہے (b $x=2$ پر عدم مسلسل ہے (c $\lim_{x\to 2} f(x)=1$ (d کوئی نہیں

4. ذیل میں سے کون سا تفاعل مسلسل نہیں ہے؟

(a $[x]$ (b $|x|$ (c e^x (d $\frac{1}{x}, x\neq 0$

5. تفاعل $f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$ کے تسلسل کی جانچ کیجیے۔

(a $x=-2$ پر عدم مسلسل ہے (b ہر جگہ مسلسل ہے

(c $x=2$ پر عدم مسلسل ہے (d $x=4$ پر عدم مسلسل ہے

6. اگر k ایک صحیح عدد ہے تب $\lim_{x\to k}(x-[x])$

(a -1 ہے (b وجود نہیں رکھتا (c 1 ہے (d 0 ہے

10.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. (اپسلون) ϵ اور (ڈیلٹا) δ تکنیک سے ثابت کیجیے کہ تفاعل $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}, x\neq 0$ اور $f(0)=0$ کے مسلسل ہے۔
2. تفاعل $f(x)=\frac{1-\cos 2x}{1-\cos 4x}, x\neq 0 \;\&\; f(0)=\frac{2}{3}$ کے تسلسل کی جانچ کیجیے۔
3. ثابت کرو کہ $f(x)=\frac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}$ نقطہ $x=0$ پر مسلسل نہیں ہے۔
4. تفاعل $f(x)=\begin{cases}-x^2, & x\leq 0\\ 5x-4, & 0\leq x<1\\ 4x^2-3x, & 1<x<2\\ 3x+4, & x\geq 2\end{cases}$ کے تسلسل پر بحث کیجیے۔
5. اگر $f(x)=\frac{xe^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}, x\neq 0 \;\&\; f(0)=0$ ہو تب مبدا $(0,0)$ پر تفاعل کے تسلسل پر بحث کیجیے۔
6. ثابت کیجیے کہ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرف بہ $f(x)=\frac{x-|x|}{x}, x\neq 0 \;\&\; f(0)=2$ مسلسل ہے لیکن $x=0$ پر نہیں۔

10.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. تفاعل $f(x)=|x|+|x-1|$ کے تسلسل کی جانچ $x=0,1$ پر کرو۔
2. a اور b کی قیمتیں معلوم کیجیے جن کے لیے تفاعل $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\leq 1\\ ax^2+b, & 1<x<3\\ 5x+2a, & x\geq 3\end{cases}$ ہر جگہ مسلسل ہو۔

10.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Introduction to Real Analysis, Donald R. Sherbert Robert G. Bartle 4th Edition , 2014
2. Elements Of Real Analysis, Narayan Shanti and Raisinghania M.D., 2003
3. Real Analysis, Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick, 4th Edition, 2017
4. Real Analysis, J.N. Sharma and A.R. Vasishtha, 2014

5. Real Analysis, V. Karunakaran, 2011
6. Real Analysis, N.L. Carothers, 2006
7. Basic Real Analysis, Houshang H. Sohrab, 2nd Edition, 2014
8. Mathematical Analysis, S.C. Malik and SavithaArora

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی
मौलाना आज़ाद नेशनल उर्दू विश्वविद्यालय
Estd. 1998
MAULANA AZAD NATIONAL URDU UNIVERSITY

اکائی 11۔ مسلسل تفاعل- II

(Continuous Functions – II)

اکائی کے اجزا

11.0 تمہید (Introduction)

پچھلی اکائی میں ہم نے دیے گئے تفاعل کی جانچ کی کہ آیا وہ مسلسل ہے یا نہیں۔ ہم نے مختلف قسم کی عدم تسلسل پر بھی بحث کی۔ اب ہم بالخصوص اپنی توجہ تفاعل کے جمع، ضرب کے تسلسل پر مبذول کریں گے۔ ہم بستہ وقفہ پر مسلسل تفاعل کی خصوصیات پر بحث کریں گے اور یکساں تسلسل کے تصور کو بیان کریں گے۔

11.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے ختم پر طلبا اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- بوریل کے قضیہ کو ثابت کریں اور Maximum Modulus Theorem ثابت کر سکیں۔
- درمیانی قیمت کا قضیہ ثابت کر سکیں۔
- ثابت کر سکیں کہ ہر مسلسل تفاعل بستہ وقفہ پر یکساں مسلسل (Uniform Continuous) ہوتا ہے۔

11.2 مسلسل تفاعل کا الجبرا (Algebra of Continuous Function)

11.2.1 مسلسل تفاعل کے الجبرا پر قضیے (Theorems on Algebra of Continuous Function)

اس حصہ میں ہم $f+g$، fg، $\frac{f}{g}$ اور gof کے تسلسل پر بحث کریں گے۔

قضیہ 1۔ اگر $f: S \to R$ اور $g: S \to R$ دو تفاعل ہیں۔ اگر f اور g دونوں کسی نقطہ 'a' پر مسلسل ہیں تب $f+g$ بھی 'a' پر مسلسل ہوگا۔

ثبوت۔ فرض کرو کہ $\in > 0$ چوں کہ f مسلسل ہے 'a' پر لہٰذا $\in > 0$ کے لیے $\exists \delta_1 > 0$ اس طور پر کہ

$$x \in S, |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \frac{\in}{2}$$

اسی طرح چوں کہ g مسلسل ہے 'a' پر لہٰذا $\in > 0$ کے لیے $\exists \delta_2 > 0$ اس طور پر کہ

$$x \in S, |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \frac{\in}{2}$$

اگر $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ تب

$$x \in S, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{\in}{2} \text{ اور } |g(x) - g(a)| < \frac{\in}{2}$$

غور کرو

$$|(f+g)(x) - (f+g)(a)| = |f(x) + g(x) - f(a) - g(a)|$$
$$\leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \frac{\in}{2} + \frac{\in}{2} = \in$$

$\therefore$ $f+g$ مسلسل ہے 'a' پر

قضیہ ثابت ہوا۔

نوٹ: اگر $f: S \to R$ اور $g: S \to R$ اور $a \in S$ اور دونوں تفاعل 'a' پر مسلسل ہیں تب $f - g$ بھی مسلسل ہو گا 'a' پر۔

قضیہ 2۔ اگر $f: S \to R$ اور $g: S \to R$ اور $a \in S$ اگر f اور g 'a' پر مسلسل ہیں، تب fg بھی مسلسل ہو گا 'a' پر۔

ثبوت۔ فرض کرو کہ $\in > 0$ دیا گیا۔ تب چوں کہ f اور g مسلسل ہیں 'a' پر اس لیے $\exists \delta_1, \delta_2 > 0$ اس طرح سے کہ

(1 $x \in S, |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{1}{2}\frac{\in}{|g(a)|+\in}$

(2 $x \in S, |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \frac{1}{2}\frac{\in}{|f(a)|+\in}$

مزید یہ کہ $\exists \delta_3 > 0$ اس طور پر کہ

(3 $x \in S, |x-a| < \delta_3 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \in \Rightarrow \big||f(x)| - |f(a)|\big| < \in \Rightarrow |f(x)| < |f(a)| + \in$

اگر $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ تب (1)، (2) اور (3) صحیح ہوں گے ہر $x \in S, |x-a| < \delta$

$$\begin{aligned}
\therefore |(fg)(x) - (fg)(a)| &= |f(x)g(x) - f(a)g(a)| \\
&= |f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)| \\
&\le |f(x)g(x) - f(x)g(a)| + |f(x)g(a) - f(a)g(a)| \\
&\le |f(x)||g(x) - g(a)| + |g(a)||f(x) - f(a)| \\
&< \{|f(a)|+\in\}\frac{\in}{2\{|f(a)|+\in\}} + |g(a)|\frac{\in}{2\{|g(a)|+\in\}} \\
&< \frac{\in}{2} + \frac{\in}{2} \\
&< \in \quad \forall\, x \in S, |x-a| < \delta
\end{aligned}$$

$\therefore$ fg مسلسل ہے 'a' پر

قضیہ ثابت ہوا۔

نوٹ:

1) اگر f ایک مسلسل تفاعل ہے 'a' پر اور $C \in R$ تب cf مسلسل ہو گا 'a' پر۔

2) اگر f مسلسل ہے 'a' پر تب $(-1)\, f = -f$ بھی مسلسل ہو گا 'a' پر۔

3) اگر f مسلسل ہے 'a' پر تب $f.f = f^2$ بھی مسلسل ہو گا 'a' پر۔

4) اگر $f(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ جہاں $a_n \neq 0$ $a_0, a_1, a_2 \cdots a_n \in R$ اور $n \in N$ تب f مسلسل ہو گا $\forall a \in R$ پر۔

قضیہ 3۔ اگر $g: S \to R$ اور $a \in S$ اور اگر g مسلسل ہے کسی 'a' پر، اس طرح کہ $g(a) \neq 0$ تب $\frac{1}{g}$ بھی مسلسل ہو گا 'a' پر۔

ثبوت۔ فرض کرو کہ $\in > 0$ دیا گیا، اور $\in_1 = min\left\{\frac{\in|g(a)|^2}{2}, \frac{|g(a)|}{2}, \in\right\}$

چوں کہ g مسلسل ہے 'a' پر $\therefore$ $\exists \delta > 0$ اس طور پر کہ

$$x \in S, |x-a| < S \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \in_1$$

$$\Rightarrow |g(x)| > |g(a)| - \epsilon_1$$
$$\Rightarrow |g(x)| > |g(a)| - \frac{|g(a)|}{2} = \frac{|g(a)|}{2}$$

$\therefore$ $\epsilon > 0$ کے لیے $\exists \delta > 0$ اس طرح کہ

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}\right| = \left|\frac{g(a) - g(x)}{g(x)g(a)}\right| < \frac{\epsilon_1}{\frac{|g(a)|}{2}|g(a)|}$$
$$\Rightarrow \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}\right| < \frac{\epsilon\,|g(a)|^2}{2\left|\frac{g(a)}{2}\right||g(a)|} = \epsilon$$

اس لیے $\frac{1}{g}$ مسلسل ہے 'a' پر۔

نوٹ : اگر $f: S \to R$ اور $g: S \to R$ اور $a \in S$ اور پھر اگر f اور g دونوں مسلسل ہیں 'a' پر $g(a) \neq 0$ تب $\frac{f}{g}$ بھی مسلسل ہوگا 'a' پر۔

مثال 1۔ اگر $f(x) = \tan(x)\ \forall x \in R - A$ جب کہ $A = \left\{n\pi + \frac{\pi}{2} : n \in Z\right\}$ تب f مسلسل ہوگا $R - A$ پر۔

حل۔ Sine اور Cosine تفاعل R پر مسلسل ہوتے ہیں اور $\cos x \neq 0\ \forall x \in R - A$

$\therefore$ $f(x) = \frac{sinx}{cosx} = tanx$ مسلسل ہوگا $R - A$ پر۔

قضیہ 4۔ اگر $f: S \to T$ اور $g: T \to R$ اور $a \in S$ پھر اگر f مسلسل ہے 'a' پر اور g مسلسل ہے $f(a)$ پر تب مرکب تفاعل gof مسلسل ہوگا 'a' پر۔

ثبوت۔ فرض کرو کہ $y = f(x) \forall x \in S$ اور $b = f(a)$

چوں کہ g مسلسل ہے $f(a) = b$ پر اس لیے دیے گئے $\epsilon > 0$ پر $\exists \delta_1 > 0$ اس طور پر کہ

$$y \in T, |y - b| < \delta_1 \Rightarrow |g(y) - g(b)| < \epsilon$$

چوں کہ f مسلسل ہے 'a' پر اس لیے $\delta_1 > 0$ پر $\exists \delta > 0$ اس طور پر کہ

$$x \in S, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta_1$$

یا

$$x \in S, |x - a| < \delta \Rightarrow |y - b| < \delta_1, y \in T$$
$$x \in S, |x - a| < \delta \Rightarrow |g(y) - g(b)| < \epsilon$$
$$\Rightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| < \epsilon$$
$$\Rightarrow \left|(gof)_{(x)} - (gof)_{(y)}\right| < \epsilon$$

gof مسلسل ہوا 'a' پر

قضیہ ثابت ہوا۔

نتیجہ (Corollary): اگر $f: S \to R$ اور $f(x) \geq 0\ \forall x \in S$ اور f مسلسل ہے $a \in S$ پر تب $\sqrt{f}$ بھی مسلسل ہوگا 'a' پر۔

ثبوت۔ دی گیا ہے کہ $f(x) \geq 0\ \ \forall x \in S \Rightarrow f(x) \in [0, \infty)$

ہم جانتے ہیں کہ $g(x) = \sqrt{x}$ مسلسل ہوتا ہے $[0, \infty)$ پر۔

اب $h(x) = (gof)(x) = g\big(f(x)\big) = \sqrt{f(x)}\forall x \in S$

چوں کہ f مسلسل ہے $a \in S$ پر اور g مسلسل ہے $f(a) \in [0, \infty)$ پر۔

اس لیے مرکب تفاعل $h = gof = \sqrt{f}$ مسلسل ہوگا $a \in S$ پر۔

قضیہ 5۔ اگر $f: S \to R$ مسلسل ہے $a \in S$ پر تب $|f|$ مسلسل ہوگا $a \in S$ پر۔

ثبوت۔ چوں کہ f مسلسل ہے $a \in S$ پر، اس لیے $0 <\in$ کے لیے $\exists\delta > 0$ اس طور پر کہ

$$x \in S, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| <\in$$
$$\therefore x \in S, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f(a)| <\in$$

لہٰذا $|f|$ مسلسل ہوا $a \in S$ پر

قضیہ ثابت ہوا۔

نوٹ: قضیہ بالا کا عکس صحیح ہونا ضروری نہیں۔ یعنی اگر $|f|$ مسلسل ہو 'a' پر تب 'a' پر f مسلسل ہونا ضروری نہیں۔

غور کرو: $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq o \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

تب $|f|(x) = |f(x)| = 1$

لہٰذا $|f|$ مسلسل ہوگا مستقلاً 1 ہونے کی بنا

جب کہ f کے متعلق

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

اور $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0} -1 = -1$

لہٰذا $\lim_{x\to 0+} f(x) \neq \lim_{x\to 0-} f(x)$

اس لیے f عدم مسلسل ہوگا '0' پر۔

لہٰذا نوٹ صحیح ہے۔

11.2.2 بند وقفہ پر مسلسل تفاعل کی خصوصیات

(Properties of Continuous Function on a Closed Interval)

فرض کرو کہ $f: [a, b] \to R$ مسلسل تعامل ہے $[a, b]$ پر تب f درج ذیل خصوصیات کو مطمئن کرتا ہے۔

1) اہتزازی خصوصیت (Oscillation Property)

2) بستوی خصوصیت (Boundedness Property)

3) ہمسائگی خصوصیت (Neighbourhood Property)

4) درمیانی قیمت کی خصوصیت (InetrmediateValue Property)

اب ہم ان خصوصیات پر یکے بعد دیگر بحث کریں گے۔

1) اہتزازی خصوصیت (Oxillation Property)

بند وقفہ کی تقسیم (Partition of a closed interval)

اگر $[a,b]$ ایک بند وقفہ ہے۔ اگر $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} = b$ تب متناہی سٹ $P = \{x_0, x_1, x_2 \dots x_{n-1}, x_n\}$ کو $[a,b]$ کی تقسیم کہلاتا ہے۔ $(n+1)$ نقاط $x_0, x_1 \dots x_n$ کو نقاط تقسیم کہتے ہیں۔

'n' بند وقفے $[x_0, x_1], [x_1, x_2] \dots [x_{r-1}, x_r] \dots [x_{n-1}, x_n]$ تحت وقفے کہلاتے ہیں۔

پہلی قسم $[a,b]$ کے $r-$واں تحت وقفہ $[x_{r-1}, x_r]$ ہے اس کو I_r سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس کا طول $(x_r - x_{r-1})$ ہوتا ہے جس کو δ_r سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

11.2.2.1 بوریل کا قضیہ (Borel's Theorem)

اگر تفاعل f مسلسل ہے وقفہ $[a,b]$ پر تب $0 <\in$ کے لیے $[a,b]$ کا ایک $\exists$ تقسیم P اس طور پر کہ $x_1, x_2 \in I_r$، $|f(x_1) - f(x_2)| <\in$، جہاں $I_r = [t_{r-1}, t_r]$

ثبوت۔ فرض کرو کہ f مسلسل ہے $[a,b]$ پر تب $0 <\in$ پر $\exists \in > 0$ اس طور پر کہ

$$x \in [a,b] \& [x-c] < \delta \;\&\; c \in [a,b]$$

$$1)\quad |f(x)|$$

$$2)\quad |f(x) - f(c)| <\in/2$$

اگر ممکن ہو تو فرض کرلیں کہ کوئی تقسیم $p = \{a = t_0, t_1, t_2 \dots t_n = b\}$ نہیں ہے کہ $|f(x_1) - f(x_2)| <\in$ ہو۔

اب اگر $I = [a,b]$ کو دو برابر حصوں میں تقسیم کریں تب $[a,c], [c,b]$ جہاں $c = \frac{a+b}{2}$ ہے، تب قضیہ کم از کم ایک تحت وقفہ میں صحیح نہیں ہوگا۔

فرض کرو $I_1 = [a_1, b_1]$ تب $l[I_1] = b_1 - a_1$

$$= \frac{b-a}{2} = \delta_1 \quad \forall I_1 \leq [a,b]$$

پھر I_1 کو دو حصوں میں تقسیم کریں اس طور پر کہ قضیہ کا نتیجہ صحیح/درست نہیں ہو $I_2 = [a_2, b_2]$ میں تب $I_2 \subseteq I_1 \subseteq I$

$$\delta_2 = l[I_2] = b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{b-a}{2}\right] = \frac{b-a}{2^2}$$

اسی طرح ریاضیاتی استقرا (Mathematical Induction) کی بنیاد پر ہم ایسے 'n' تحت وقفے بنا سکتے ہیں $I_n = [a_n, b_n]$ اس طور پر کہ

$$\textbf{1)}\quad I_n \subseteq I_{n-1} \subseteq \cdots I_2 \subseteq I_1 \subseteq I$$

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \dots \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 \leq b$$

$$\textbf{2)}\quad \delta_n = b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

3) قضیہ درست نہیں ہے $I_n = [a_n, b_n], \forall n$ تب nested intervals theorem کی بنا تواتر $\{a_n\}$ اور $\{b_n\}$ متسدق ہوں گے کسی انتہا 'l' پر، تب $l \in [a_n, b_n]$

تب چوں کہ f مسلسل ہے $[a, b]$ پر اس لیے مسلسل ہوگا 'l' پر بھی تب (1) کے مطابق

$$|f(x) - f(l)| < \frac{\in}{2}, \forall |x - l| < \frac{\delta}{2}$$

اگر ہم منتخب کریں $m \in N$ اس طور پر کہ

$$\frac{b-a}{m} < \delta \Rightarrow \delta_m = b_m - a_m = \frac{b-a}{2^m} < \frac{b-a}{m} < \delta$$

$$\begin{bmatrix} 2^m > m \\ \frac{1}{2^m} < \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

اس لیے $l \in [a_m, b_m]$ اس لیے ہر $x \in [a_m, b_m]$ پر

$$|x - l| < b_m - a_m < \delta$$

$$\Rightarrow \qquad |f(x) - f(l)| < \frac{\in}{2}, \forall x \in [a_m, b_m]$$

$$\therefore x_1, x_2 \in [a_m, b_m] \Rightarrow |f(x_1) - f(l)| < \in/2 \ \& \ |f(x_2) - f(l)| < \in/2$$

$$\therefore |f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - f(l) + f(l) - f(x_2)|$$
$$\le |f(x_1) - f(l)| + |f(l) - f(x_2)|$$
$$< \in/2 + \in/2 = \in$$

یہ ایک تردید ہے۔ اس لیے ممکن مفروضہ غلط ہے۔

ایک تقسیم P، $[a, b]$ کی اس طرح سے وجود رکھتی ہے کہ

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \in, \qquad \forall x_1, x_2 \in I_r$$

نوٹ: ہر تحت وقفہ I_r تقسیم P پر $Sup\ f - \text{Inf}\ f \le \in$ ہوگا۔

2) بستوی خصوصیت (Boundedness Property)

تعریف: ایک تفاعل $f: S \to R$ بند یا بستہ کہلاتا ہے اگر $\exists M > 0$ اس طور پر کہ

$$|f(x)| \le M, \qquad \forall x \in S$$

بستوی خصوصیت پر قضیہ (Theorem on Boundedness Property)

بیان: اگر $f: [a, b] \to R$ ایک مسلسل تفاعل ہے $[a, b]$ پر تب f وقفہ $[a, b]$ پر بستہ ہوگا۔

ثبوت۔ چوں کہ f مسلسل ہے $[a, b]$ پر اس لیے $\in = 1$ پر ایک تقسیم $P[a, b]$ کی $P = \{a = t_0, t_1 \ldots t_n = b\}$ اس طور پر کہ

$$|(f(x_1) - f(x_2)| < 1, x_1, x_2 \in I_r = [t_{r-1}, t_r]$$

{Borel کے قضیہ کے مطابق} اگر

$$x \in [a, b] \Rightarrow a \le x \le b$$

فرض کرو کہ $t_1, t_2 \ldots t_r$ نقاط 'a' اور 'x' کے درمیان ہیں۔ تب

$$|f(x) - f(a)| = |f(x) - f(t_r) + f(t_r) - f(t_{r-1}) + f(t_{r-1}) + \cdots + f(t_1) - f(a)|$$
$$\leq |f(x) - f(t_r)| + |f(t_r) - f(t_{r-1})| + \cdots + |f(t_1) - f(a)|$$
$$< 1 + 1 + \cdots (r+1)\text{ مرتبہ} = (r+1)$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(a)| < r + 1, \ r = n - 1$$
$$\Rightarrow |f(x) - f(a)| < n - 1 + 1$$
$$\Rightarrow |f(x) - f(a)| < n$$
$$\Rightarrow f(a) - n < f(x) < f(a) + n$$

یعنی $f(x)$ بستہ/بندہوا دو حدود کے درمیان چوں کہ n اور $f(a)$ محدود ہیں۔

لٰہذا f بستہ/بندہوا $[a, b]$ پر۔

قضیہ ثابت ہوا۔

مطلق اعظم– اقل قیمت کا قضیہ (Absolute Maximum – Minimum Theorem)

بیان: اگر $f: [a, b] \to R$ مسلسل ہے $[a, b]$ پر تب f بستہ ہوگا $[a, b]$ پر اور f اپنے حدود Inf اور Sup کو $[a, b]$ میں اختیار کرتا ہے۔

ثبوت۔ دیا گیا ہے کہ $f: [a, b] \to R$ مسلسل ہے $[a, b]$ پر لٰہذا وہ بستہ ہے۔

فرض کرو کہ $M = Sup\{f(x): x \in [a, b]\}$

اور $m = Inf\{f(x): x \in [a, b]\}$

یعنی M اور m بالترتیب اقل ترین حد بالا اور اعظم ترین حد زیریں ہیں، یعنی علویہ اور سفلیہ ہیں۔

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $f(x) = M$ کسی $x \in [a, b]$

اور $f(x) = m$ کسی $x \in [a, b]$

گویا یہ ثابت کرنا ہے کہ $f(c) = M, \quad c \in [a, b]$

$f(d) = m, \quad d \in [a, b]$

i) اگر ممکن ہو تو مان لیں کہ $f(x) < M \ \ \forall x \in [a, b]$

$$\Rightarrow M - f(x) > 0, \qquad \forall x \in [a, b]$$

$\therefore$ M تو ایک مستقل قیمت ہے اور f مسلسل ہے $[a, b]$ پر

اس لیے $M - f(x)$ وقفہ $[a, b]$ پر مسلسل ہوگا

اور پھر $\frac{1}{M - f(x)}$ وقفہ $[a, b]$ پر مسلسل ہوگا چوں کہ $M - f(x) \neq 0$

چنانچہ $\frac{1}{M - f(x)}$ وقفہ $[a, b]$ پر بستہ ہوگا

تب $K > 0$ اس طرح ہے کہ

$$\frac{1}{M - f(x)} \leq K, \qquad \forall x \in [a, b]$$

$$\Rightarrow \quad M - f(x) \geq \frac{1}{K}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \leq M - \frac{1}{K}, \quad \forall x \in [a,b]$$

یہاں $M - \frac{1}{K}$ ایک حد بالا ہوا $f(x)$ کا جو کہ تردید ہے۔

اس لیے کہ M اقل ترین حد بالا (Sup) ہونے پر $M - \frac{1}{K}$ حد بالا نہیں ہو سکتا۔

یہ اس لیے ہوا کہ ہمارا ممکن ہونے کا مفروضہ غلط ہے۔

اس لیے $c \in [a,b]$ اس طور پر ہے کہ $f(x) = M$ ہوگا۔

ii) اگر مان لیں ممکن ہو کہ $f(x) > m, \ \forall x \in [a,b]$

$$\Rightarrow f(x) - m > 0, \quad \forall x \in [a,b]$$

تب $\{f(x) - m\}$ وقفہ $[a,b]$ پر مسلسل ہوگا

اس لیے $\frac{1}{f(x)-m}$ وقفہ $[a,b]$ پر مسلسل ہوگا

لہٰذا $\frac{1}{f(x)-M}$ وقفہ $[a,b]$ پر بستہ ہوگا

تب $K' \in R^+$ اس طرح سے کہ $\frac{1}{f(x)-m} < K'$

$$\Rightarrow f(x) - m \geq \frac{1}{K'} \Rightarrow f(x) \geq m + \frac{1}{K'}$$

گویا $m + \frac{1}{K'}$ حد زیریں ہوا جو کہ ممکن نہیں۔ اس لیے کہ m اعظم ترین حد زیرین ہے۔ یہاں تردید ہوئی، یہ اس لیے ہوا کہ مفروضہ $f(x) > m, \ \forall x \in [a,b]$ غلط ہے۔

اس لیے $f(x) \ngtr m$ اور چوں کہ $f(x) \nless m$ چنانچہ $d \in [a,b]$ ، $f(d) = m,$ ہوگا۔

گویا یہ ثابت کیا گیا کہ f اپنے حدود کو $[a,b]$ میں اختیار کرتا ہے۔

قضیہ ثابت ہوا۔

3) ہمسائگی خصوصیت (Neighbourhood Property)

اگر تفاعل $f: [a,b] \to R$ نقطہ 'a' پر مسلسل ہے اور $f(a) \neq 0$ تب $\delta > 0$ اس طور پر ہے کہ تمام $x \in [a, a+\delta)$ کے لیے $f(x)$ کی علامت $f(a)$ کی ہی ہوگی۔

ثبوت: چوں کہ f مسلسل ہے 'a' پر اس لیے $\in > 0$ پر $\delta > 0$ اس طور پر ہے کہ

$$x \in (a, a+\delta) \subset [a,b], |f(x) - f(a)| < \in$$

$$\Rightarrow f(a) - \in < f(x) < f(a) + \in, \quad \forall x \in (a, a+\delta) \qquad ....(1)$$

چوں کہ $f(a) \neq 0$ کو اگر $f(a) > 0$ لیا جائے اور $\in = \frac{1}{2} f(a) > 0$

تب مساوات (1) ہوگا

$$0<\frac{1}{2}f(a)<f(x)<\frac{3}{2}f(a),\forall x\in(a,a+\delta)$$
$$\Rightarrow \qquad f(x)>0,\ \ \forall x\in(a,a+\delta)$$

یعنی $f(x)$ کی علامت $f(a)$ کی ہی پائی گئی۔

اور اب اگر $f(a)<0$ لیا جائے اور $\in=-\frac{1}{2}f(a)>0$ تب (1) یوں ہوگا۔

$$\frac{3}{2}f(a)<f(x)<\frac{1}{2}f(a)<0, \qquad \forall x\in(a,a+\delta)$$
$$\Rightarrow \qquad f(x)<0,\ \ \forall x\in(a,a+\delta)$$

اس صورت میں بھی $f(x)$ کی علامت $f(a)$ کی ہی پائی گئی۔

قضیہ ثابت ہوا۔

نوٹ:

1. $f:[a,b]\to R$ نقطہ $c\in(a,b)$ پر مسلسل ہے اور $f(c)\neq 0$ تب $\delta>0$ اس طرح ہے کہ تمام $x\in(c-\delta,c+\delta)$ کے لیے $f(x)$ کی علامت $f(c)$ کی ہی ہوگی
2. اگر $f:[a,b]\to R$ نقطہ 'b' پر مسلسل تفاعل ہے اور $f(b)\neq 0$ تب $\delta>0$ اس طور پر ہے کہ تمام $x\in(b-\delta,b)$ کے لیے $f(x)$ کی علامت $f(b)$ کی ہی ہوگی۔

4) درمیانی قیمت کی خصوصیت (Intermediate Value Property)

مذکورہ قضیہ میں ہم نے جانا کہ اگر ایک تفاعل $f:[a,b]\to R$ مسلسل ہے اس بند وقفہ میں تب f بستہ ہوتا ہے۔ اس کے $l.u.b$ اور $g.l.b$ کے بیچ۔ اور یہ بھی قضیہ ہم نے دیکھا کہ ان حدود کو f اختیار بھی کرتا ہے۔ اب ہم یہ ثابت کریں گے کہ اگر حدود m اور M ہیں تب ان دونوں کے درمیانی تمام قیمتوں کو بھی اختیار کرتا ہے $[a,b]$ میں۔

بولزانو یا ریشوں کی تعین کا قضیہ (Bolzano's or Location of roots Theorem)

بیان: اگر f وقفہ $[a,b]$ پر مسلسل ہے اور $f(a)$ اور $f(b)$ کی علامتیں مختلف ہوں تب $c\in(a,b)$ اس طور پر ہے کہ $f(c)=0$

ثبوت۔

صورت (I): $f(a)<0$ اور $f(b)>0$

یعنی
$$f(a)<0<f(b)$$

غور کرو کہ سٹ
$$S=\{x\in[a,b]:f(x)<0\}$$

تب چوں کہ $f(a)<0$ اس لیے $a\in S$ اور چوں کہ $f(b)>0$ اس لیے $b\notin S$

لٰہذا $S\neq\phi$ اور b اس کا حد بالا ہوگا۔

تب کاملیت کے علم متعارفہ کی وجہ S کا Sup موجود ہوگا فرض کرو کہ وہ 'c' ہے۔

چوں کہ f ‘a’ پر مسلسل ہے اور $f(a) < 0$ اس لیے $\delta > 0$ اس طور پر ہے کہ تمام $x \in (a, a+\delta)$ کے لیے $f(x) < 0$ ہوگا۔

$$\Rightarrow x \in S$$
$$\Rightarrow a + \frac{\delta}{2} \leq \text{Sup}\, S = c$$
$$\therefore \quad a \neq c$$

اور چوں کہ f مسلسل ہے ‘b’ پر اور $f(x) > 0$

$\therefore$ $\delta_1 > 0$ اس طور پر ہے کہ $f(x) > 0,\ \forall x \in (b - \delta_1, b)$

$$\Rightarrow x \in S \ \Rightarrow b \neq c$$
$$\Rightarrow c \in (a, b)$$

یعنی $b >\in> a$ ہے۔ اب اگر $f(c) < 0$ لیا جائے

تب $\delta > 0$ اس طرح سے ہے کہ $f(x) < 0,\ \forall x \in (c - \delta, c + \delta)$

اور یوں بھی ہوگا کہ $f(x) < 0,\ \forall x \in (c, c + \delta)$ تو پھر $x > c$ ہوگا۔

یہ ایک تردید ہوگی کیوں کہ $c = Sup\ S$ اس لیے

$$f(c) \nless 0 \qquad \text{———}(1)$$

اسی طرح اگر $f(c) > 0$ لیا جائے تب $\delta > 0$ اس طرح ہے کہ $f(x) > 0, \forall x \in (c - \delta, c + \delta)$ اس لیے $c = Sup\ S$ اس لیے $\delta \in S$ اور $c - \delta < d \leq c$

مگر $d \in S$ تب $f(d) < 0$

یہ پھر تردید ہوگی کیوں کہ $f(d) > 0$ اس لیے

$$f(c) \ngtr 0 \qquad \text{———}(2)$$

اب تثلیث کے قانون (Trichotomy Law) کی مدد سے اور مساوات (1) اور (2) کی مدد سے $f(c) = 0$ ہوگا۔

صورت (II): فرض کرو کہ $f(a) > 0\ \&\ f(b) < 0$

تب $f(b) < 0 < f(a)$

تب اگر $F: [a, b] \to R$ اور $F(x) = -f(x), \forall x \in [a, b]$

تب $F(a) = -f(a)$ اور $F(b) = -f(b)$

تو پھر $F(a) < 0 < F(b)$ ہوگا۔

اور چوں کہ f مسلسل ہے $[a, b]$ پر لہٰذا F بھی مسلسل ہوگا $[a, b]$ پر۔

تب مذکورہ صورت (1) کے مطابق $c \in (a, b)$ اس طرح سے کہ $F(c) = 0$ ہوگا۔

قضیہ ثابت ہوا۔

نوٹ:

(1) $f(a)\cdot f(b) < 0$ سے مراد $f(a)$ اور $f(b)$ کی علامتیں ضد پر (مختلف) ہیں۔

(2) اگر f مسلسل ہے $[a,b]$ پر اور $f(a) < 0 < f(b)$ یا $f(a) > 0 > f(b)$ تب $c \in (a,b)$ اس طرح ہوگا کہ $f(c) = 0$ یعنی $c \in (a,b)$ تفاعل کا ریشہ ہوا۔ اس لیے اس قضیہ کو ریشہ کی تعین کا قضیہ بھی کہتے ہیں۔

بولزانو کا درمیانی قیمت کا قضیہ(Bolzano's Intermediate Value Theorem)

بیان: اگر f مسلسل ہے $[a,b]$ پر اور $f(a) \neq f(b)$ تب $f(a)$ اور $f(b)$ کی ہر قیمت کو $f(x)$ اختیار کرے گا $[a,b]$ میں۔

یا

اگر f مسلسل ہے $[a,b]$ پر اور اگر $K \in R$ جو $f(a)$ اور $f(b)$ کے درمیان ہے تب $c \in (a,b)$ اس طور پر کہ $f(c) = K$

ثبوت۔ اگر $g: [a,b] \to R$ اور $g(x) = f(x) - K$ جہاں $f(a) < k < f(b)$

تب g مسلسل ہوگا $[a,b]$ پر

اور

$$g(a) = f(a) - K < 0$$
$$g(b) = f(b) - K > 0$$

یعنی g مسلسل ہے اور $g(a)\ \&\ g(b)$ کی علامتیں مختلف ہیں۔ اس لیے $c \in (a,b)$ اس طور پر ہے کہ $g(c) = 0$ ہوگا۔ (بولزانو کے قضیہ کے مطابق)

لہٰذا

$$g(c) = f(c) - K = 0$$
$$\Rightarrow f(c) = K$$

اس سے ثابت ہوا کہ f تفاعل $f(a)$ اور $f(b)$ کی ہر قیمت کو اختیار کرتا ہے $[a,b]$ میں۔

مثال 1۔ ثابت کرو کہ مساوات $x^3 - 5x + 3 = 0$ کا ایک حقیقی ریشہ 0 اور 1 کے بیچ ہے۔

حل۔ تفاعل $f: [0,1] \longrightarrow R$ پر غور کرو جو $f(x) = x^3 - 5x + 3$ ہے۔

چوں کہ یہ ایک کثیر رکنی جملہ ہے (Polynomial) اس لیے یہ مسلسل ہے $[0,1]$ پر اور $f(0) = 3\ \&\ f(1) = -1$

یعنی دونوں علامتیں ضد پر ہیں۔

لہٰذا درمیانی قیمت کے قضیہ کے مطابق $c \in (0,1)$ اس طور پر ہے کہ $f(c) = 0$ ہوگا یعنی $c^3 - 5c + 3 = 0$ ہوگا۔

مطلب $c \in R$ ایک ریشہ ہے 0 اور 1 کے بیچ۔

مثال 2۔ اگر f مسلسل ہے $[a,b]$ پر ٹھیٹ مونوٹون ہے $[a,b]$ پر اور $f(a) < K < f(b)$ تب صرف ایک $c \in (a,b)$ اس طور پر کہ $f(c) = K$

حل۔ اگر f کو ٹھیٹ بڑھتا ہوا لیا جائے $[a,b]$ پر

اگر ممکن لیا جائے کہ $c_1, c_2 \in [a,b]$ اور $c_1 > c_2$ تب

$$f(c_1) > f(c_2) \Rightarrow K > K$$

جو کہ ممکن نہیں

$$\therefore K = f(c_1) = f(c_2)$$
$$\Longrightarrow \qquad c_1 = c_2$$
$$\therefore \qquad c \in (a,b)$$

کہ $f(c) = K$ یکتا ہے۔

مثال 3۔ اگر f مسلسل ہے $[a,b]$ پر اور $\{a_1, a_2 \cdots a_n\} < [a,b]$ تب ثابت کرو کہ $c \in (a,b)$ اس طور پر ہے کہ

$$f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n) = nf(c)$$

حل۔ چوں کہ f مسلسل ہے $[a,b]$ پر اس لیے f بستہ ہے اس وقفہ پر اور اپنے حدود کو اختیار بھی کرتا ہے $[a,b]$ میں۔ m اور M حدود ہوں، تب

$$m \le f(a_1) \le M$$
$$m \le f(a_2) \le M$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$m \le f(a_n) \le M$$

ان سب کو جمع کرنے سے $nm \le f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n) \le nM$

$$\Longrightarrow \qquad m \le \frac{f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)}{n} \le M$$

درمیانی قیمت کے قضیہ کے مطابق $c \in (a,b)$ اس طور پر کہ

$$f(c) = \frac{f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n)}{n}$$
$$\Longrightarrow f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n) = nf(c)$$

ثابت ہوا۔

مثال 4۔ ثابت کرو کہ تفاعل $f: R \to R$ مصرف بہ $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ مسلسل اور بستہ ہے۔

حل: $|x|$ مسلسل ہے R پر

تب $1 + |x|$ مسلسل ہے R پر

لٰہذا $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ بھی R پر مسلسل ہوگا

ظاہر ہے $\frac{1}{1+|x|} > 0$

$$\Longrightarrow 1 + |x| \ge 1$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{1+|x|} \le 1$$
$$\therefore 0 < \frac{1}{1+|x|} \le 1 \quad \forall x \in R$$

لٰہذا f بستہ ہوا R پر

چوں کہ $f(0) = \frac{1}{1+0} = 1$

$$\Longrightarrow supf = 1$$

اور f کا کوئی Inf نہیں ہے۔

11.2.2.2 یکساں تسلسل (Uniform Continuity)

تعریف: اگر S ایک مجموعہ ہے اور $f: S \to R$ ایک تفاعل ہے تب f کو یکساں مسلسل کہا جاتا ہے S پر اگر دیے گئے $\in > 0$ کے لیے ایک $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$\forall x_1, x_2 \in S, |x_1 - x_2| < \delta$$
$$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \in$$

نوٹ:

1. یکساں تسلسل وہ خاصیت ہے جو کسی نقطہ پر نہیں بلکہ پورے مجموعہ S پر (دامنہ) بحث کی جاتی ہے۔
2. یکساں تسلسل میں $\delta(\in)$ یعنی δ صرف $\in$ پر منحصر ہوتا ہے x پر نہیں۔ گویا نقطہ بحث سے مبرا ہوتا ہے۔
3. f یکساں مسلسل نہیں ہوگا S پر اگر $\in > 0$ پر $\delta > 0$ اس طور پر کہ

$$|x_1 - x_2| < \delta \ \& \ |f(x_1) - f(x_2)| \geq \in$$

مثال 5۔ ایک مستقل تفاعل $f: R \to R$، $f(x) = c, c \in R$ یکساں مسلسل ہوتا ہے R پر۔

حل۔ دیے گئے $\in > 0$ پر $\delta > 0$ لیا جائے گا کہ $x_1, x_2 \in R, |x_1 - x_2| < \delta$

$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = |c - c| = 0 < \in$ لہٰذا مستقل تفاعل ہمیشہ یکساں مسلسل ہوتا ہے۔

مثال 6۔ اگر $f: R \to R$ دیا گیا $f(x) = 7x - 2$ تب f یکساں مسلسل ہوگا R پر۔

حل۔ فرض کرو کہ $\in > 0$ اور $x_1, x_2 \in R$

تب

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |7x_1 - 2 - (7x_2 - 2)|$$
$$= |7x_1 - 7x_2|$$
$$= 7|x_1 - x_2|$$

اگر $\delta = \frac{\in}{7}$ لیا جائے تب

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = 7|x_1 - x_2| < 7 \cdot \frac{\in}{7} = \in$$

لہٰذا f یکساں مسلسل ہوا R پر۔

قضیہ 6۔ اگر $f: S \to R$ یکساں مسلسل ہے تب f مسلسل ہے S پر۔

ثبوت۔ فرض کرو کہ $f: S \to R$ یکساں مسلسل ہے S پر۔ تب $\in > 0$ پر $\delta > 0$ اس طور پر کہ

$$x_1, x_2 \in S, |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \in$$

اگر $x_1 = x$ اور $x_2 = c$ لیا جائے تب $\in > 0$ کے لیے $\delta > 0$ اور

$$|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \in$$

لہٰذا $f(x)$ مسلسل ہوا $x = c$ پر۔

چوں کہ c کوئی بھی نقطہ ہے S کا جہاں f مسلسل ہوا۔ لٰہذا f پورے S پر مسلسل ہے۔

نوٹ: قضیہ بالا کا عکس درست ہونا ضروری نہیں ہے۔ یعنی تسلسل $\not\Rightarrow$ یکساں تسلسل

مثال 7۔ غور کرو $f: R \to R$ اور $f(x) = x^2$ تب f مسلسل ہے R پر۔ اب ہم بتائیں گے کہ f یکساں مسلسل نہیں ہے۔

حل۔ فرض کرو $\in > 0$ اور $\delta > 0$ اس طور پر کہ

$$x_2 = x_1 + {}^{\delta}/_{2}$$

$$|x_1 - x_2| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

تب

$$\begin{aligned}|f(x_1) - f(x_2)| &= |{x_1}^2 - {x_2}^2| \\ &= |x_1 + x_2||x_1 - x_2| \\ &= \frac{\delta}{2}\left|2x_1 + \frac{\delta}{2}\right| = x_1\delta + \frac{\delta^2}{4}\end{aligned}$$

اور

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \in$$

$$\Leftrightarrow x_1\delta + \frac{\delta^2}{4} < \epsilon \qquad \left(\because \frac{\delta^2}{4} > 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \qquad x_1\delta < \in, \quad \forall x_1 \in R, x_1 > 0$$

لیکن یہ ممکن نہیں ہے۔ اس لیے f یکساں نہیں ہے۔

قضیہ 7۔ اگر f مسلسل ہے $[a, b]$ پر تب f یکساں مسلسل ہو گا $[a, b]$ پر۔

ثبوت۔ فرض کرو کہ $\in > 0$ اور چوں کہ f مسلسل ہے $[a, b]$ پر اس لیے بوریل (Borel) کے قضیہ کے مطابق تقسیم P کا وجود ہو گا $P = \{a = t_0, t_1, t_2 \cdots t_{n-1}, t_n = b\}$ اس طور پر کہ

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\in}{2}, \quad \forall x_1, x_2 \in I_r \text{ .... (1)}$$

اگر $\delta = \frac{1}{2}\min\{|t_r - t_{r-1}| > 0, 1 \le r \le n\}$

اگر $x_1, x_1 \in [a, b]\ \&\ |x_1 - x_2| < \delta$

تب x_1, x_2 یا تو ایک ہی تحت وقفہ میں ہوں گے یا دو متواتر تحت وقفوں میں ہوں گے۔

صورت 1: فرض کرو کہ x_1, x_2 ایک ہی تحت وقفہ میں ہیں۔

تب $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\in}{2} < \in, \quad \forall |x_1 - x_2| < \delta$

صورت 2: اگر x_1, x_2 دو متواتر وقفوں میں ہیں۔

فرض کرو کہ وہ $[t_{r-1}, t_r]\ \&\ [t_r, t_{r+1}]$ ہیں

تب

$$\begin{aligned}|f(x_1) - f(x_2)| &= |f(x_1) - f(t_r) + f(t_r - f(x_2)| \\ &\le |f(x_1) - f(t_r)| + |f(t_r) - f(x_2)|\end{aligned}$$

$$< \frac{\in}{2} + \frac{\in}{2} = \in$$

دونوں ہی صورتوں میں f یکساں مسلسل پایا گیا $[a, b]$ پر

قضیہ ثابت ہوا۔

قضیہ 8۔ اگر f یکساں مسلسل ہے کسی مجموعہ S پر اور $\{S_n\}$ کوشی (Cauchy) تواتر ہے تب $\{f(S_n)\}$ بھی کوشی تواتر ہوگا۔

ثبوت۔ دیا گیا ہے کہ f یکساں مسلسل ہے S پر۔ اس لیے $\in > 0$ کے لیے $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$x_1, x_2 \in S, |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \in \quad \text{.........} \quad (1)$$

چوں کہ $\{S_n\}$ کوشی تواتر ہے اس لیے $\delta > 0$ کے لیے $\exists\, m \in \mathbb{Z}^+$ اس طرح کہ

$$|S_p - S_q| < \delta, \qquad \forall p, q \geq \delta$$

$\therefore$ (1) کی مدد سے $\in > 0$ کے لیے $\exists\, m \in \mathbb{Z}^+$ اس طرح کہ

$$|f(S_p) - f(S_q)| < \in, \quad \forall p, q \geq m$$

$\therefore$ $\{f(S_n)\}$ ایک کوشی تواتر ہے۔

مثال 8۔ بتلاؤ کہ تفاعل $f(x) = x^3$ یکساں مسلسل ہے $[-2,2]$ پر۔

حل۔ فرض کرو کہ $x_1, x_2 \in [-2,2]$ تب $|x_1| \leq 2$ اور $|x_2| \leq 2$

تب غور کرو

$$\begin{aligned}
|f(x_1) - f(x_2)| &= |{x_1}^3 - {x_2}^3| \\
&= |(x_1 - x_2)({x_1}^2 + {x_2}^2 + x_1x_2)| \\
&= |x_1 - x_2||{x_1}^2 + {x_2}^2 + x_1x_2| \\
&\leq |x_1 - x_2|(|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_1||x_2|) \\
&\leq |x_1 - x_2|(2^2 + 2^2 + 2 \cdot 2) = 12|x_1 - x_2|
\end{aligned}$$

$$\therefore |f(x_1) - f(x_2)| < \in, \quad \forall |x_1 - x_2| < \frac{\in}{12}$$

یعنی $\in > 0$ کے لیے $\delta = \frac{\in}{12}$ اس طور پر کہ

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \in, \quad \forall |x_1 - x_2| < \delta$$

$\therefore$ f یکساں مسلسل ہے $[-2,2]$ پر

ثابت ہوا۔

مثال 9۔ ثابت کرو کہ تفاعل جو R^+ پر معرف ہے $f(x) = \sin(\frac{1}{x}), x > 0$ مسلسل ہے لیکن R^+ پر یکساں مسلسل نہیں ہے۔

حل۔ فرض کرو کہ 'a' مثبت حقیقی عدد ہے تب 'a' ایک انتہائی نقطہ ہے R^+ کا

$$\therefore \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \sin\frac{1}{x} = \sin\frac{1}{a} = f(a)$$

چوں کہ 'a' کوئی بھی نقطہ ہے R^+ کا

اس لیے f مسلسل ہے R^+ پر

اوراب کسی بھی $\delta > 0$ کے لیے $m \in Z^+$ اس طور پر کہ

$$\frac{1}{2n(n\pi + \frac{\pi}{2})} < \delta, \quad \forall n \geq m$$

فرض کرو کہ $x_1 = \frac{1}{m\pi+\pi/2}, x_2 = \frac{1}{m\pi}, \ x_1, x_2 \in R^+$

$$|x_1 - x_2| = \left|\frac{1}{m\pi + \pi/2} - \frac{1}{m\pi}\right| = \left|\frac{m\pi - m\pi - \pi/2}{m\pi(m\pi + \frac{\pi}{2})}\right| = \frac{1}{2m(m\pi + \frac{\pi}{2})} < \delta$$

لیکن

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\sin\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right) - \sin m\pi\right| = |\cos m\pi| = 1 > \epsilon$$

لٰہذا f یکساں مسلسل نہیں ہے R^+ پر۔

مشقی سوالات:

1. تعریف کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کرو کہ $f(x) = x^2$ یکساں مسلسل ہے $[-a, a]$ پر۔
2. تعریف کے مطابق بتلاؤ کہ $f(x) = x^2 + 3x$، $[-1,1]$ پر یکساں مسلسل ہے۔

11.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے مسلسل تفاعل کے الجبرا پر بحث کی۔ مسلسل تفاعل کی چند اہم خصوصیات کو بھی کسی بند وقفہ پر ہم نے دیکھا۔ یکساں تفاعل کو بھی پہچانا۔ ہم نے دیکھا کہ دو تفاعلات جو مسلسل ہیں اس کا جمع اور مرکب بھی مسلسل ہوتا ہے۔ بوریل کا قضیہ اور درمیانی قیمت کا قضیہ کو بھی ثابت کیا گیا۔ یہ بھی جانا کہ دیا گیا تفاعل کب یکساں مسلسل ہوتا ہے۔

11.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

وقفہ کی تقسیم، اہتزازی کی خصوصیت، بولزانو کا قضیہ، تسلسل اور یکساں تسلسل

11.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

11.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

I جائزہ لو کہ آیا دیے گئے بیان صحیح ہیں یا غلط

1. تفاعل $f(x) = \cos\sqrt{1 + x^2}$ مسلسل ہے R پر۔ (T/F)
2. اگر $S = \{x \in R / 0 < r < 4\}$ اور $f(x) = x^2$ تب f یکساں مسلسل ہے S پر۔ (T/F)
3. تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ مسلسل اور یکساں مسلسل ہے $(0, \infty)$ پر۔ (T/F)

4. ہر بستہ تفاعل f مسلسل ہوتا ہے۔ (T/F)

5. اگر $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ مسلسل اور بستہ ہے $(-\infty,\infty)$ پر تب f اپنے حدود اختیار کرتا ہے۔ (T/F)

II خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔

1. ہر مسلسل تفاعل ــــــــــ ہوتا ہے۔

2. ہر یکساں مسلسل تفاعل ــــــــــ ہوتا ہے۔

3. اگر $f:[a,b]\to R$ مسلسل ہے $'b'$ پر اور $f(b)\neq 0$ تب $x\in(b-\delta,b]$ ــــــــــ

4. ایک مستقل تفاعل ہمیشہ ــــــــــ ہوتا ہے۔

5. اگر f مسلسل ہے $[a,b]$ پر اور $f(a)\,\&\,f(b)$ مختلف علامتیں رکھتے ہیں تب ــــــــــ

11.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. اگر $f:S\to R$ اور $g:S\to R$ اور $a\in S$ پھر اگر f اور g مسلسل ہیں $'a'$ پر تو ثابت کرو کہ $f+g$ بھی مسلسل ہوگا $'a'$ پر۔

2. اگر $f:S\to R$ مسلسل ہے $a\in S$ پر تب ثابت کرو کہ $|f|$ بھی مسلسل ہوگا $'a'$ پر۔ کیا اس کا عکس بھی صحیح ہوگا؟

3. ثابت کرو کہ ہر مسلسل تفاعل بستہ ہوگا۔

4. ثابت کرو کہ ہر یکساں مسلسل تفاعل مسلسل ہوگا۔ کیا اس کا عکس بھی درست ہوگا؟

5. ثابت کرو کہ تفاعل $f(x)=x^3$ یکساں مسلسل ہے $[-2,2]$ پر۔

11.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. بوریل کے قضیہ کو بیان اور ثابت کرو۔

2. ثابت کرو کہ ہر مسلسل تفاعل اپنے حدود کو اختیار کرتا ہے۔

3. درمیانی قیمت کے قضیہ کو بیان اور ثابت کرو۔

4. ثابت کرو کہ ہر مسلسل تفاعل کسی بند وقفہ $[a,b]$ پر یکساں مسلسل بھی ہوتا ہے۔

11.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Introduction to Real Analysis: R.G. Bartle and D.R. Shevbert.
2. Mathematical Analysis: New Age International (P) Ltd.
3. Mathematical Analysis: T.M. Apostol.

اکائی 12۔ تفاعلات کا تفرق

(Differentiation of Functions)

اکائی کے اجزا

12.0 تمہید (Introduction)

اس سے قبل آپ تفاعل کے مسلسل ہونے کے بنیادی نکات کو اچھی طرح ذہن نشین کر لیے ہیں اور ان کو دو حصوں میں اس طرح تقسیم کرتے ہوئے (i) مسلسل تفاعل (ii) غیر مسلسل تفاعل کو اچھی طرح سمجھ چکے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ غیر مسلسل تفاعل غیر مشتق ہوتا ہے۔ اس باب میں ہم اپنی توجہ تفاعل اور مسلسل تفاعل کے تفرق پذیر ہونے پر رکھیں گے لیکن اس کو دو مختلف حصوں میں پڑھیں گے۔

(i) کسی نقطہ پر تفاعل کا تفرق پذیر ہونا (ii) کسی وقفہ میں تفاعل کا تفرق پذیر ہونا

12.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے ختم پر آپ کو اس قابل ہونا چاہیے کہ ہم کوئی نقطہ پر تفاعل کے تفرق پذیر ہونے اور کسی وقفہ میں تفرق پذیر ہونے کو اچھی طرح سمجھ چکے ہوں۔ ہم تفرق پذیر تفاعل کی الجبرا پر بھی اچھی طرح عبور حاصل کر چکے ہوں۔ مزید ہم اوسط قیمت کے قضیے جیسے رولز کا مسئلہ لیگرانج کا مسئلہ اور کوشی کا اوسط قیمت کا قضیہ بھی پڑھ چکے ہوں اور ان مسئلوں پر متفرق سوالات بھی حل کر لیے ہوں۔ مزید ہم علم مثلثی تفاعل اور قوت نما سلسلہ کا پھیلاؤ بھی ٹیلر سلسلہ اور میکلارین سلسلہ سے کر سکتے ہیں۔ ہم ٹیلر سلسلہ اور مکلارین سلسلہ سے متعلق عددی سوالات بھی حل کرنے کے قابل ہو چکے ہوں گے۔

12.2 کسی نقطہ پر تفاعل کی تفرق پذیری (Differentiability of a Function at a Point)

تعریف: فرض کرو $f: S \to R$ ایک تفاعل ہے جہاں 'S' مجموعہ ہے۔ فرض کرو 'c' کوئی نقطہ ہے S میں یعنی $c \in S$ جہاں c ایک انتہائی نقطہ ہے S کا یا $c \in S \cap \bar{S}$

(i) اگر $(x \neq c)$, $\underset{x\to c^+}{Lt} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ موجود ہوتا ہے، تب ہم کہیں گے f تفرق پذیر ہے، دائیں جانب 'c' پر۔ اس لمٹ کو دائیں ہاتھ کا لمٹ 'c' پر کہتے ہیں اور اس کو $f'(c \neq 0)$ یا صرف $Rf'(c)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

(ii) اگر $(x \neq c)$, $\underset{x\to c^-}{Lt} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ موجود ہوتا ہے، تب ہم کہیں گے f تفرق پذیر ہے بائیں جانب 'c' پر۔ اس لمٹ کو بائیں ہاتھ کا لمٹ 'c' پر کہتے ہیں اور اس کو $Lf'(c)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

(iii) اگر $(x \neq c)$, $\underset{x\to c}{Lt} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ موجود ہوتا ہے، تب ہم کہیں گے f تفرق پذیر ہے 'c' پر۔ اس لمٹ کو f کا تفرق 'c' پر کہتے ہیں۔ اس کو $f'(c)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

اہم نکات کو یاد رکھیں:

i) $Lf'(c)$ کو رجعت پسندانہ تفرق یا بائیں ہاتھ کا تفرقی ضریب 'c' کہتے ہیں۔

ii) $Rf'(c)$ کو بتدریج بڑھنے والا تفرق یا دائیں ہاتھ کا تفرقی ضریب 'c' پر کہتے ہیں۔

iii) $\underset{x\to c}{Lt}\,\psi(x) = f'(c)$ اور $\underset{x\to c^+}{Lt}\,\psi(x) = f'(c+0)$ اور $\underset{x\to c^-}{Lt}\,\psi(x) = f'(c-0)$

iv) $f'(c)$ وجود رکھتا ہے اگر اور صرف اگر $Rf'(c)$ اور $Lf'(c)$ موجود ہوں اور مساوی ہوں۔

12.3 کسی وقفہ میں تفاعل کی تفرق پذیری (Differentiability of Function in an Interval)

فرض کرو $f:[a,b]\to R$ ایک تفاعل ہے۔ f کو $[a,b]$ پر قابل تفرق کہتے ہیں اگر

i) $f'(c)$ موجود ہو پر $\forall c\in(a,b)$

ii) $Rf'(a) = f'(a+0)$ موجود ہو اور

iii) $Lf'(b) = f'(b-0)$ موجود ہو

12.3.1 تفاعل کا تفرق (Differentiation of Function)

فرض کرو $f:S\to R$ ایک تفاعل ہے جہاں S مجموعہ ہے۔ اگر f تفرق پذیر ہو $c\in S$ تب تفرق $f'(c)$ یکتا ہوگا۔

مثال 1۔ فرض کرو $f:R\to R$ مستقل تفاعل کی تعریف اس طرح کی گئی ہے $f(x)=k$ تمام $x\in R$ کے لیے

حل۔ فرض کرو $c\in R$ اس طرح سے کہ $f(c)=k$ ، $\underset{x\to c}{Lt}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$

$$\underset{x\to c}{Lt}\frac{k-k}{x-c} = \underset{x\to c}{Lt}\frac{0}{x-c} = 0$$

چوں کہ c تبدیل ہونے والا ہے تمام $c\in R$ کے لیے قابل قبول ہے۔ پس $c\in R$ اور $f'(c)=0$

∴ پس مستقل تفاعل کا تفرق "صفر" ہوتا ہے۔ یہاں ایک بات بڑی دلچسپ ہے کہ اس مسئلہ کا عکس بھی صادق ہوتا ہے۔ یعنی اگر $f'(c)=0$ تمام $x\in R$ کے لیے۔ تب f ایک مستقل تفاعل ہے R پر۔

اس مستقل تفاعل کا تفرق صفر ہوتا ہے اور اس کا برعکس بھی

مثال 2۔ فرض کرو $f(x)=1+x,\ x\le 2$ اور $f(x)=5-x, x>2$ پر یعنی فرض کرو $f(x)=\begin{cases}1+x, & x\le 2\\ 5-x, & x>2\end{cases}$

حل۔ $x = 2$ کے بائیں جانب کے پڑوس میں $f(x)=1+x$ اور $f(2)=3$

$$\underset{x\to 2^-}{Lt}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \underset{x\to 2^-}{Lt}\frac{(1+x)-3}{x-2} = \underset{x\to 2^-}{Lt}1 = 1 = Lf'(2)$$

$x = 2$ کے دائیں جانب کے پڑوس (nbd) میں $f(x)=5-x$, $f(2)=3$

$$\underset{x\to 2^+}{Lt}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \underset{x\to 2^+}{Lt}\frac{(5-x)-3}{x-2} = \underset{x\to 2^+}{Lt}(-1) = -1 = Rf'(2)$$

یہاں ہم تفاعل $f(x)$ کا مشاہدہ کرتے ہیں کہ بائیں ہاتھ کا تفرق اور دائیں ہاتھ کا تفرق دونوں موجود ہوتے ہیں مگر مساوی نہیں ہیں۔

مثال 3۔ $f(x)=\sin x, \forall x\in R$

حل۔ غور کرو

$$\underset{x\to a}{Lt}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\underset{x\to a}{Lt}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$$

$$=\underset{x\to a}{Lt}\frac{2cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}$$

$$=\underset{x\to a}{Lt}\,cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\underset{x\to a}{Lt}\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\left(\frac{x-a}{2}\right)}$$

$$=\cos a.1=\cos a$$

$\therefore f(x)=\sin x$ تفرق پذیر ہے جو تمام $a\in R$ پر اور $f'(a)=\cos a$ یا $f'(x)=\cos x$ تمام $x\in R$ کے لیے

12.3.2 تفرق کا جیومتریہ معنی (Geometrical Meaning of Differentiation)

فرض کرو کہ $P(a,f(a))$ اور $Q(a+h,f(a+h))$ دو نقاط ہیں منحنی $y=f(x)$

پر فرض کرو کہ کارڈ PQ اور عکس نقطہ P پر x محور کے ساتھ L اور T پر ملتے ہیں۔

فرض کرو کہ $\underline{|QLX} = \alpha$ اور $\underline{|PTX} = \theta$۔ PN، OX پر عمود وار ہے اور PH عمود وار ہے QM پر تب

$$PH = NM = OM - ON = a + h - a = h$$

اور

$$QH = QM - MH = QM - PN = f(a+h) - f(a)$$

$$\therefore tan\,\alpha = \frac{QH}{PH} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad \ldots\ldots(1)$$

جیسا کہ $h \to 0$، تب نقطہ Q منحنی پر اس طرح حرکت کرتا ہے جس کے وہ P کے قریب تر ہو جائے یعنی کورڈ PQ (Cord) تک پہنچ جاتا ہے۔ مماس کی خط TP کے اور زاویہ α ' θ کے قریب تر ہو جاتا ہے۔ پس لمٹ $h \to 0$ تب مساوات $tan\,\theta = f'(a)$ ہو جاتا ہے۔

پس $f'(a)$ ایک مماس ہے اور منحنی $y=f(x)$ پر نقطہ $P(a,f(a))$ پر کا مماس کا خط $x-$ محور کے ساتھ tan کا زاویہ ہوتا ہے۔

12.4 مشتقات کا الجبرا (Algebra of Derivatives)

اس عنوان میں ہم مشتقات کا الجبرا کے اہم پہلوؤں کو مسئلہ کی صورت میں لکھتے ہیں۔ ان کا ثبوت طلبا کی دلچسپی پر منحصر ہے۔

مثال 1۔ فرض کرو $f:[a,b]\to R$، $g:[a,b]\to R$ $c\in[a,b]$ پر تفرق پذیر ہیں تب

$f.g$ $f+g$ ، $f-g$ ، تفرق پذیر ہوتے ہیں 'c' پر اور

i) $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$

ii) $(f-g)'(c) = f'(c) - g'(c)$

iii) $(f.g)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$

مثال3۔ اگر $g:[a,b]\to R$ تفرق پذیر ہے $c\in[a,b]$ پراور $g(c)\neq 0$ تب $\dfrac{1}{g}$ تفرق پذیر ہے 'c' پر اور

$$\left(\frac{1}{g}\right)(c) = \frac{-g'(c)}{[g(c)]^2}$$

نتیجہ:

(i) اگر $f:[a,b]\to R$ تفرق پذیر ہے $c\in[a,b]$ اور $K\in R$ پر تب Kf بھی تفرق پذیر ہی ہوگا 'c' پر اور

$$(kf)'(c) = kf'(c)$$

(ii) اگر $f:[a,b]\to R$ اور $g:[a,b]\to R$ تفرق پذیر ہے 'c' پر اور $K,l\in R$ پر تب $Kf+lg$ بھی تفرق پذیر ہی ہوگا 'c' پر

اور $(kf+lg)'(c) = kf'(c) + lg'(c)$

(iii) اگر $f:[a,b]\to R$ اور $g:[a,b]\to R$ تفرق پذیر تفاعل ہیں 'c' پر اور $g(c)\neq 0$ تب $\frac{f}{g}$ بھی تفرق پذیر ہوگا 'c'

پر اور $\left(\frac{f}{g}\right)'(c)$ اس طرح لکھا جاتا ہے

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{g(c)f'(c) - f(c)g'(c)}{[g(c)]^2}$$

زنجیر کا کلیہ (Chain rule)

اگر $f:[a,b]\to R$ تفرق پذیر ہے $c\in[a,b]$ اور $g:I\to R$ پر جہاں I سعت ہے اور f تفرق پذیر ہے $f(c)$ پر۔ تب gof بھی 'c' پر تفرق پذیر ہوگا اور $(gof)'(c) = g'[f(c)].f'(c)$

اس کو تفرق کے لیے زنجیر کا کلیہ کہتے ہیں۔

یعنی $u=f(a),\ y=g(u)$ تب زنجیر کا کلیہ کے مطابق $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$

12.4.1 تفاعل کے اعلیٰ رتبے کے مشتقات (Higher Order Derivatives of a Function)

فرض کرو f تفرق پذیر ہے وقفہ I میں اور f' تفرق ہے f کا اگر $\underset{h\to 0}{Lt}\frac{f'(x+h)-f(x)}{h}$ موجود ہوتا ہے ہر ایک $x\in I_1\subset I$ میں تب یہ کہا جاتا ہے کہ f تفرق پذیر ہے I پر اور f' کا تفرق f'' سے ظاہر کرتے ہیں۔

f'' کو دوسرے درجہ کا تفرق کہتے ہیں۔ اس طرح f'' دوبارہ تفرق پذیر ہے۔ $I_2\subset I_1\subset I$ تب ہم کہیں گے کہ تفاعل f تیسرے درجہ کا تفرق I_2 میں رکھتا ہے اور اس کو f''' سے ظاہر کرتے ہیں۔ اسی طرح آگے بڑھتے ہوئے استقرا کے اصول سے اگر $f^{(n-1)}$ تفرق پذیر ہے۔

$I_{n-1}\subset I_{n-2}\subset \ldots\subset I_2\subset I_1\subset I$ تب ہم کہیں گے f ,n–واں درجہ کا تفرق رکھتا ہے I_{n-1} میں اور اس کو $f^{(n)}$ سے ظاہر کرتے ہیں یعنی $f^{(n)}(x) = \underset{h\to 0}{Lt}\dfrac{f^{(n-1)}(x+h)-f^{(n-1)}(x)}{h}$

نوٹ:

1. اگر $f^n(x)$ موجود ہو تب $f, f', f'', \ldots f^{(n-1)}$ تمام تفرق پذیر ہیں x پر اور $f, f', f'', \ldots f^{(n-2)}$ تمام مسلسل ہیں x پر۔

2. انٹرمیڈئیٹ قدر کی خصوصیت کا کلیہ

اگر $f:[a,b]\to R$ اس طرح ہو کہ f' $[a,b]$ پر تفرق پذیر ہیں اور $f'(a) \neq f'(b)$ اور K حقیقی عدد ہے $f'(a)$ اور $f'(b)$ کے درمیان تب ایک نقطہ $c \in [a,b]$ موجود ہوتا ہے اس طرح کہ $f'(c) = K$

دوسرے الفاظ میں اگر f (a,b) پر تفرق پذیر ہے اور $f'(a) \neq f'(b)$ تب $f'(x)$، $f'(a)$ اور $f'(b)$ کی تمام قدریں اختیار کرتا ہے کم از کم ایک بار وقفہ (a,b) میں۔

12.5 اوسط قیمت کے قضیے (Mean Value Theorems)

اس سے پہلے ہم مسلسل تفاعل بند وقفہ $[a,b]$ میں اور تفرق پذیر کھلا وقفہ (a,b) میں پڑھ چکے ہیں اس کو ہی اوسط قیمت کے قضیے کہتے ہیں۔ یہی مسئلے تفاعل f کی قدروں اور ان کے تفرق سے منسلک ہے۔

12.5.1 رولز کا قضیہ (Rolle's Theorem)

بیان: اگر $f:[a,b]\to R$ ایسا تفاعل ہے کہ

(i) f بند وقفہ $[a,b]$ میں مسلسل ہے۔

(ii) f کھلے وقفہ (a,b) میں تفرق پذیر ہے۔

(iii) $f(a) = f(b)$ تب ایک حقیقی عدد $c \in (a,b)$ موجود رہتا ہے اس طرح سے کہ $f'(c) = 0$

ثبوت۔ فرض کرو f بند وقفہ $[a,b]$ میں مسلسل تفاعل ہے۔ پس f بند وقفہ $[a,b]$ میں بستہ (Bounded) ہے اور اپنی حدودی قیمتیں اختیار کرتا ہے۔

$\alpha, \beta \in [a,b]$ اس طرح کہ $f(\alpha) = m = Inf(f)$ ، $f(\beta) = M = Sup(f)$ بند وقفہ $[a,b]$ میں

صورت (i)

فرض کرو $m = M$ تب $f(x) = m$ تمام $x \in [a,b]$ کے لیے پس f مستقل تفاعل ہے بند وقفہ $[a,b]$ میں اور لہٰذا $f'(x) = 0$ تمام $x \in [a,b]$ دس اس صورت میں مسئلہ صادق ہوتا ہے۔

صورت (ii)

فرض کرو $M \neq m$ چوں کہ $f(a) = f(b)$ اور $M \neq m$ اس لیے یا تو M اور m دونوں $f(a)$ اور $f(b)$ سے مختلف ہیں جس کا مطلب یہ ہے کہ $M \neq f(b)$ ، $M \neq f(a)$ یا $m \neq f(b)$, $m \neq f(a)$

فرض کرو کہ $M \neq f(a)$, $M \neq f(b)$

تب

$$f(\beta) = M \neq f(a) \Rightarrow \beta \neq a$$

اور

$$f(\beta) = M \neq f(b) \Rightarrow \beta \neq b$$

$$\beta \in (a,b)\ \alpha < \beta < b$$

f کے (a,b) میں تفرق پذیری ہونے کا مطلب یہ ہے کہ $\beta \in (a,b)$ پس f، β پر تفرق پذیر ہے۔

اب ہم ثابت کریں گے

$$f'(\beta) < 0\text{---------}(1)$$

تب $\delta_1 > 0$ موجود ہوتا ہے اس طرح سے کہ $f(x) > f(\beta) = M$ تمام $x \in (\beta - \delta_1, \beta) \subset [a,b]$

جو کہ ایک متضاد بیان ہے جیسا کہ M، l.u.b یا Supremum ہے۔

اس طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$f'(\beta) \ngtr 0\text{---------}(2)$$

پس مساوات (1) اور (2) سے $f'(\beta) = 0$ $\beta \in (a,b)$, موجود ہوتا ہے اس طرح سے کہ $f'(\beta) = 0$ پس مسئلہ ثابت اور صادق ہوتا ہے۔

اہم نکات (Points to be Remembered)

i) مندرجہ بالا مسئلہ اس بات کی ضمانت دیتا ہے کہ کم از کم ایک حقیقی عدد $c \in (a,b)$ وجود رکھتا ہے جس کے لیے $f'(c) = 0$
یہ ضروری نہیں ہے کہ ہم f تفرق پذیر ہو $[a,b]$ میں لیکن صرف (a,b) میں تفرق پذیر ہونا چاہیے۔

ii) اگر $f: [a,b] \to R$ رولز کے قضیہ کی شرائط کو پورا کرتا ہے، تب f' l.u.b اور g.l.b پر صفر ہوتا ہے۔

iii) اگر $m \neq f(a)$ اور $m \neq f(b)$ تب ہم ثابت کرتے ہیں $f'(\alpha) = 0$، $\alpha \in (a,b)$

iv) رولز کا مسئلہ قابل قبول نہیں ہوتا، اگر f غیر مسلسل ہو کوئی نقطہ $[a,b]$ پر یا f، (a,b) پر تفرق پذیر نہ ہو یا $f(a) \neq f(b)$

رولز کے قضیہ کی جیومتریہ تشریح (Geometrical Meaning of Rolle's Theorem)

فرض کرو $f: [a,b] \to R$ ایک تفاعل ہے۔ رولز کے مسئلے کی تینوں شرائط کو مطمئن کرتا ہے۔

تب اس کا گراف $y = f(x)$ اس طرح ہے کہ

i) یہ ایک مسلسل منحنی ہے۔ نقاط $A[a, f(a)]$ سے نقطہ $B[b, f(b)]$ تک

ii) یہ ایک ایسی منحنی ہے جس پر ایک مماس گذرتا ہے دو نقاط A اور B کے درمیان سے

iii) $f(a)$ اور $f(b)$ کے مختصات اس کے دوسرے (ends) ہیں اور A اور B پر اور مساوی ہیں۔

رولز کے مسئلہ سے ایک نقطہ $c \in (a,b)$ موجود ہوتا ہے اس طرح سے کہ $f'(c)=0$ یعنی ایک نقطہ $C[c, f(c)]$ دو نقاط A اور B کے درمیان واقع ہو سکتے ہیں اس طرح سے کہ ایک خط متوازی ہوتی ہے محور کے۔

اب رولز کے مسئلہ سے ایک نقطہ $c \in (a,b)$ موجود ہوتا ہے اس طرح سے کہ $f'(c) = 0$ یعنی $c \in (a, b)$ ایک حقیقی ریشہ ہے $f'(x)=0$ کا

مثال 1۔ رولز کے مسئلہ کی تصدیق کرو $f(x)=\cos x$ ، $[\pi, 5\pi]$ کے درمیان۔

حل۔ فرض کرو $f(x)=\cos x$ ہم جانتے ہیں کہ یہ ایک تفرق پذیر ہے تمام $x \in R$ کے لیے $f(x)=\cos x$ ایک مسلسل ہے $[\pi, 5\pi]$ پر اور تفرق پذیر ہے۔ $(\pi, 5\pi)$ پر اور $f(\pi)=\cos\pi=-1=\cos(5\pi)=f(5\pi)$ ہیں $f(x)=\cos x$ ، رولز کے مسئلہ کے تمام شرائط کو مطمئن کرتا ہے $(\pi, 5\pi)$ کے درمیان

$$f'(x) = -\sin x = 0$$
$$\Rightarrow x = 2\pi, 3\pi, 4\pi \in (\pi, 5\pi)$$

یعنی تین نقاط $x = 2\pi, 3\pi, 4\pi$ موجود ہوتے ہیں اس طرح کہ $f'(x)=0$

مثال 2۔ رولز کے مسئلہ کی تصدیق کرو $f(x)=2x^3+x^2-4x-2$ کے لیے۔

حل۔ چوں کہ f ایک ناطق تکملی تفاعل ہے x میں اور f مسلسل اور تفرق پذیر ہے x کی تمام حقیقی قدروں کے لیے پس رولز کے مسئلہ کے پہلے دو شرائط مطمئن ہوتے ہیں کوئی بھی وقفہ میں۔

غور کرو $f'(x)=0$ جس سے حاصل ہوتا ہے

$$2x^3+x^2-4x-2=0$$
$$(x^2-2)(2x+1)=0$$
$$x=\pm\sqrt{2}, -\frac{1}{2}$$

پس

$$f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$

اب ہم $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ کا علاقہ پر غور کریں گے، جو رولز کے مسئلہ کے تمام شرائط کی تصدیق کرتا ہے۔

ہم کو چاہیے کہ $f'(x)=0$ صفر ہوتا ہے تصدیق کرنا ہے کہ کم از کم ایک دفعہ $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ کھلے وقفہ میں

$f'(x)=6x^2+2x-4$ ہوتا ہے جہاں $6x^2+2x-4$ یا $3x^2+x-2$ ہے۔یعنی

$$(3x-2)(x+1)=0$$
$$\Rightarrow x=\frac{2}{3}, -1$$

$$f'(-1) = f'\left(\frac{2}{3}\right) = 0$$

چوں کہ دونوں نقاط $-1, \frac{2}{3}$ واقع ہوتے ہیں $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ کے درمیان پس رولز کے مسئلہ کو تصدیق کیا گیا ہے۔

مثال3۔ رولز کے مسئلہ کی جانچ کرو تفاعل $f(x) = 1-(x-1)^{2/3}$, $[0,2]$ کے درمیان

حل۔ چوں کہ f ایک الجبرائی تفاعل ہے، f مسلسل ہے $[0,2]$ اگر f تفرق پذیر R پر تب

$$f'(x) = 0 - \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}-1}$$

$$= \frac{-2}{3(x-1)^{\frac{1}{3}}}$$

تفاعل f کی تعریف $x = 1$ پر نہیں کی جاسکتی۔

f تفرق پذیر بھی نہیں ہے 1 پر یعنی $1 \in (0,2)$

یعنی f رولز کے مسئلہ کی دوسری شرط کو مطمئن نہیں کرتا ہے۔

اس لیے رولز کا مسئلہ دیے ہوئے تفاعل $[0,2]$ پر قابل قبول نہیں ہوتا ہے۔

مثال4۔ کیا رولز کا مسئلہ $f(x) = |x|$ ، $[-2,2]$ میں قابل قبول ہوتا ہے۔

حل۔ فرض کرو $f(x) = |x|$ یہ ایک $[-2,2]$ پر مسلسل ہے اور $f(-2) = 2 = f(2)$ ، $f(x) = |x|$ ، $0 \in [-2,2]$ پر تفرق پذیر نہیں ہوتا ہے، چوں کہ رولز کے مسئلہ کی دوسری شرط مطمئن نہیں ہوتی ہے۔

$f(x) = |x|$ ، $[-2,2]$ میں رولز کے مسئلہ کی تصدیق نہیں ہوتی ہے۔

لگرانج کا اوسط قیمت کا قضیہ (Lagrange's Mean Value Theorem)

(پہلا اوسط قیمت کا قضیہ)

بیان: اگر $f: [a,b] \to R$ ایسا تفاعل ہے کہ

i) f وقفہ $[a,b]$ میں مسلسل ہے

ii) f وقفہ (a,b) تفرق پذیر ہے

تب ایک نقطہ $c \in (a,b)$ موجود ہوتا ہے اس طرح سے کہ

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

ثبوت: تفاعل φ کو غور کرو، φ کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے $\varphi: [a,b] \to R$ ، $\varphi(x) = f(x) + A(x)$ جہاں A ایک مستقل اس طرح ہے کہ $\varphi(a) = \varphi(b)$

$$\Rightarrow f(a) + Aa = f(b) + Ab$$

$$-A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ldots\ldots. \quad (1)$$

دیا گیاہے کہ (a, b) f پر تفرق پذیر ہے اور x ایک تفرق پذیر تفاعل ہے اور A مستقل ہے اس کا مطلب یہ ہوا کہ

$\varphi(x) = f(x) + A(x)$ تفرق پذیر ہے۔

پس رولز کے مسئلہ کے تمام شرائط مطمئن ہوتے ہیں تفاعل φ کے لیے۔

پس ایک نقطہ $c \in (a,b)$ موجود ہوتا ہے اس طرح کہ $\varphi'(c) = 0$

لیکن

$$\varphi'(x) = f'(x) + A$$

$$0 = \varphi'(c) = f'(c) + A$$

$$-A = f'(c) \ \ldots\ldots \quad (2)$$

پس مساوات (1) اور (2) سے

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

قضیہ ثابت ہوا۔

دوسری صورت (Second Form)

لگرانج کے اوسط قیمت کے قضیہ میں، اگر $b - a = h$ درج کریں تب $a + \theta h$ مساوی ہوتا ہے a کے۔ اگر $\theta = 0$ اور b کے مساوی ہوگا، اگر $\theta = 1$ پس $a + \theta h$ جہاں $0 < \theta < 1$ کا مطلب a اور b کے درمیان کوئی قدر ہوتی ہے۔ اس مندرجہ بالا مسئلہ کو اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$f(a + h) - f(a) = hf(a + \theta h)، [0 < \theta < 1]$$

لگرانج کے اوسط قیمت کے قضیہ کا جیومٹریہ تجزیہ

شکل میں صاف ظاہر ہوتا ہے کہ فرض کرو $A < B$، $f(x)$

کی ترسیم ہے $[a, b]$ میں اور فرض کرو کہ وتر AB زاویہ α بناتا ہے x محور کے ساتھ اس طرح کہ

$$\tan\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$= f'(c) \qquad \text{[اوسط قیمت کے قضیہ سے]}$$

جہاں $a < c < b$

پس کوئی نقطہ $c \in (a, b)$ موجود ہوتا ہے اس طرح کہ منحنی کا مماس نقطہ $[c, f(c)]$ پر متوازی ہے پر متوازی ہے وتر AB کے

مثال 1۔ اگر $f(x) = x(x - 1)(x - 2),\ a = 0,\ b = \frac{1}{2}$ کے لیے اوسط قیمت کے قضیہ سے c معلوم کرو

حل۔ دیا گیا ہے $f(x) = x(x-1)(x-2),\ a = 0,\ b = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} f(b) &= f\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right) \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

اور $f(a) = 0$

$$\therefore \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\frac{3}{8}-0}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$$

مزید

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x-1)(x-2) \\ &= x^3 - 3x^2 + 24 \\ \Rightarrow f'(x) &= 3x^2 - 6x + 2 \\ \Rightarrow f'(c) &= 3c^2 - 6c + 2 \end{aligned}$$

لگرانج کے اوسط قیمت کے قضیہ سے

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

$$\therefore 3c^2 - 6c + 2 = 3/4$$

$$\Rightarrow 12c^2 - 24c + 5 = 0$$

$$\Rightarrow c = \frac{24 \pm \sqrt{(24)^2 - 4(12)(5)}}{24}$$

$$\Rightarrow c = \frac{6 \pm \sqrt{21}}{6}$$

$$\Rightarrow c = \frac{6+\sqrt{21}}{6},\ \frac{6-\sqrt{21}}{6}$$

$\frac{6-\sqrt{21}}{6} = 1 - \frac{\sqrt{21}}{6}$ واقع ہوتا ہے $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ کھلے وقفہ میں

$$\therefore c = \frac{6-\sqrt{21}}{6}$$

مطلوبہ قدر ہے۔

مثال2۔ بتاؤ کہ $0 < \frac{1}{2}\log\frac{e^x - 1}{x} < 1$ تمام $x > 0$ کے لیے

حل۔ غور کرو $f(x)=e^x$ ، $[0,x]$ میں

$$f'(x)=e^x$$

یہاں ہم مشاہدہ کر چکے ہیں کہ $f(x)$ لگرانج کے اوسط قیمت کے مسئلہ کے تمام شرائط کو مطمئن کرتا ہے۔اس لیے

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(c), 0<c<x$$
$$\Rightarrow f(x)-f(0)=xf'(\theta x), \qquad 0<\theta<1$$
$$\Rightarrow \quad e^x-1=xe^{\theta x}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{e^x-1}{x}=e^{\theta x}$$
$$\Rightarrow \quad \theta x=\log\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$$
$$\Rightarrow \quad \theta=\frac{1}{x}log\left(\frac{e^x-1}{x}\right), \qquad 0<\theta<1$$
$$0<\frac{1}{x}\log\left(\frac{e^x-1}{x}\right)<1$$

واقع ہوتا ہے۔

مثال3۔ اوسط قیمت قضیہ سے $\sqrt[3]{28}$ کو محسوب کرو۔

حل۔ فرض کرو $f(x)=\sqrt[3]{x}$ جہاں $x\in[27,28]$ صاف طور پر $f(x)$ مسلسل اور تفرق پذیر ہے $[27,28]$ میں اور $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3}$ میں لگرانج کے اوسط قیمت کے قضیہ سے $c\in[27,28]$ موجود ہونا ہے اس طرح سے کہ

$$\frac{\sqrt[3]{28}-\sqrt[3]{27}}{28-27}=\frac{1}{3c^{2/3}}$$
$$\sqrt[3]{28}=\sqrt[3]{27}+\frac{1}{3c^{2/3}}$$
$$<3+\frac{1}{3(27)^{2/3}}=3+\frac{1}{27}$$
$$=3.037$$

مثال4۔ بتاؤ کہ $x>\log(1+x)>\frac{x}{1+x}$ اگر $f(x)=\log(1+x)$ تمام $x>0$ کے لیے

حل۔ غور کرو، $f(x)=\log(1+x)$ کی تعریف $[0,t]$ کی جاتی ہے جہاں $t>0$

ہم مشاہدہ کر چکے ہیں کہ $[0,t]$ ، $f(x)$ پر مسلسل اور $(0,t)$ پر تفرق پذیر ہے۔

$$f'(x)=\frac{1}{1+x} \text{ تمام } x\in(0,t)$$

لگرانج کے مسئلہ سے $c\in(0,t)$ موجود ہوتا ہے۔

اس طرح کہ

$$\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'(c)$$
$$\frac{\log(1+t)-\log 1}{t}=\frac{1}{1+c},\ \forall 0<c<t\ldots\ldots\quad(1)$$

لیکن $0<c<t$

$$(2)\text{------}\frac{1}{1+0}>\frac{1}{1+c}>\frac{1}{1+t}$$

مساوات(1) اور (2)سے

$$1>\frac{\log(1+t)}{t}>\frac{1}{1+t}\ \text{تمام}\ t>0$$

یا $$t>log(1+t)>\frac{t}{1+t}\ \text{تمام}\ t>0$$

یا $$x>\log(1+x)>\frac{x}{1+x},\forall x>0$$

پس ثابت کیا گیا ہے۔

کوشی کا اوسط قیمت قضیہ(Cauchy's Mean Value Theorem)

بیان: فرض کرو f اور g دو تفاعلات کی تعریف اس طرح کی گئی ہے۔

f اور g اور $[a,b]\to R$ اس طرح ہیں کہ

(i) g,f مسلسل ہیں $[a,b]$ پر

(ii) g,f تفرق پذیر ہیں (a,b) پر

(iii) $g'(x)\neq 0$. تمام $x\in(a,b)$ تب ایک نقطہ c اس طرح موجود ہوتا ہے کہ $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$

ثبوت: $\phi:[a,b]\to R$ کی تعریف اس طرح کی گئی ہے۔

$\phi(x)=f(x)+k\,g(x)$ جہاں $k\in R$ اس طرح ہے کہ

$$\phi(a)=\phi(b)$$

غور کرو $\phi(a)=\phi(b)$ اس لیے

$$f(a)+k\,g(a)=f(b)+k\,g(b)$$
$$\Rightarrow\ -k[g(b)-g(a)]=f(b)-f(a)\qquad\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$\Rightarrow\qquad k=-\left[\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right]\cdots\cdots\cdots(2)$$

چوں کہ f، $[a,b]$ پر مسلسل اور g،$[a,b]$ پر مسلسل ہیں۔

(i) $\phi(x)=f(x)+k\,g(x)$ بھی مسلسل ہے $[a,b]$ پر اور f تفرق پذیر ہے (a,b) پر اور g بھی تفرق پذیر ہے (a,b) پر اور

(ii) $\phi(x)=f(x)+k\,g(x)$ بھی تفرق پذیر ہے (a,b) پر اور $\phi(a)=\phi(b)$ یعنی رولز کے مسئلہ کے تمام شرائط مطمئن ہو گئے ہیں۔

اس لیے $c \in (a,b)$ موجود ہوتا ہے اس طرح کہ $\phi'(c) = 0$ چوں کہ ϕ تفرق پذیر ہے۔

(a,b) پر اور $c \in (a,b)$

$$\Rightarrow \phi'(c) = f'(c) + k\,g'(c) = 0$$
$$\Rightarrow \phi'(c) = 0$$
$$(\because g'(c) \neq 0) \Rightarrow k = -\frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \cdots\cdots\cdots (3)$$

اس مساوات (2) اور (3) سے

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

قضیہ ثابت ہوا۔

کوشی کے اوسط قیمت قضیہ کی دوسری صورت (Second Form of Cauchy's Mean Value Theorem)

فرض کرو g, f دو تفاعلات کی تعریف اس طرح کی گئی ہے $f:[a, a+h] \to R$ اور $g:[a, a+h] \to R$ اس طرح سے کہ

(i) g, f مسلسل ہے $[a, a+h]$ پر

(ii) g, f تفرق پذیر ہے $(a, a+h)$ پر اور

(iii) $g'(x) \neq 0$ تمام $x \in (a, a+h)$ پر تب $0 < \theta < 1$ موجود ہوتا ہے اس طرح سے کہ

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{g(a+h) - g(a)} = \frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)}$$

اہم نقاط جو نوٹ کئے گئے ہیں:-

(i) اگر ہم $g(x) = x$ درج کرتے ہیں تب کوشی کا مسئلہ لگرانج کے مسئلہ میں تبدیل ہو جاتا ہے۔

(ii) اگر $f(x) = 0$ اور $g(x) = 0$ مشترک ریشہ "a" رکھتا ہے تب

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, c \in (a, x)$$

مثال 1۔ کوشی اسط قیمت والے قضیہ کی تصدیق کرو تفاعلات x^2 اور x^3 کے $[1,2]$ علاقہ میں۔

حل۔ فرض کرو $f(x) = x^2$ ، $\phi(x) = x^3$ تب

$$\phi'(x) = 3x^2 \text{، } f'(x) = 2x$$

تب کوشی اوسط قیمت والے قضیہ کے مطابق

$$\frac{\phi(2) - \phi(1)}{f(2) - f(1)} = \frac{8-7}{4-1} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{\phi'(x)}{f'(c)} = \frac{3}{2}c \text{ اور}$$

$$\frac{7}{3} = \frac{3}{2}c$$

$$c=\frac{14}{9}$$

اور ہم یہاں یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ $c=\frac{14}{9}\in(1,2)$ پس کوشی اوسط قیمت والے قضیہ کی تصدیق ہوتی ہے۔

مثال2۔ کوشی اوسط قیمت والے قضیہ میں اگر ہم $\phi(x)=\sqrt{x}$ اور $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ ہو تب 'c' a اور b کا جیومٹریہ اوسط ہوگا اور اگر ہم $\phi(x)=\frac{1}{x^2}$ اور $f(x)=\frac{1}{x}$ لکھتے ہیں تب 'c' a اور b کا ہار مونی اوسط ہوتا ہے۔

حل۔ اگر $\phi(x)=\sqrt{x}$ اور $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ تب

$$\frac{\phi(b)-\phi(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{\phi'(c)}{f'(c)}$$

$$\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)}=\frac{\frac{1}{2}c^{-1/2}}{-\frac{1}{2}c^{-3/2}}$$

$-\sqrt{ab}=-c$ یا $c=\sqrt{ab}$

یعنی 'c' جیومٹریہ اوسط ہوتا ہے a اور b کا دوبارہ اگر فرض کرو $\phi(x)=\frac{1}{x^2}$ اور $f(x)=\frac{1}{x}$

$$\frac{\phi(b)-\phi(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{\phi'(c)}{f'(c)}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{b^2}\right)-\left(\frac{1}{a^2}\right)}{\left(\frac{1}{b}\right)-\left(\frac{1}{a}\right)}=\frac{-2c^{-3}}{-c^{-2}}$$

$$\Rightarrow\frac{a+b}{ab}=\frac{2}{c}\Rightarrow c=\frac{2ab}{a+b}$$

یعنی 'c' ہار مونی اوسط ہوتا ہے a اور b کا۔

اوسط قیمت قضیہ پر مختلف مثالیں (Different Examples on Mean Value Theorem)

مثال1۔ اگر g,f تفرق پذیر ہیں $[0,1]$ پر اس طرح کہ $\{f(0)=2, g(0)=0; f(1)=6, g(1)=2\}$

تب بتاؤ کہ $c\in(0,1)$ موجود ہوتا ہے اس طرح کہ $f'(c)=2g'(c)$

حل۔ g,f تفرق پذیر ہیں $(0,1)$ پر تب g,f مسلسل ہیں $[0,1]$ پر

کوشی کے اوسط قیمت والے قضیہ کے خاص صورت کے مطابق $c\in(0,1)$ موجود ہوتا ہے تب

$$[f(1)-f(0)]g'(c)=[g(1)-g(0)]f'(c)$$

یعنی $(6-2)g'(c)=(2-0)f'(c)$

$$f'(c)=2g'(c)$$

پس ثابت ہوا ہے۔

مثال2۔ فرض کرو $f(x) = x^3 - 3x + k = 0$ تب بتاؤ کہ کوئی بھی حقیقی عدد K موجود نہیں ہوتا ہے اس طرح کہ تفاعل f دو متفرق ریشے رکھتا ہے۔ فرض کرو کہ $(0,1)$ پر۔

حل۔ فرض کرو کہ $f(x) = x^3 - 3x + k = 0$ ، $(0,1)$ ، $f'(x) = 3x^2 - 3$

فرض کرو α, β دو متفرق ریشے ہیں $f(x) = 0$ کے $[0,1]$ پر

تب $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$ اور $f(\alpha) = 0,\ f(\beta) = 0$ اور $[\alpha, \beta] \subset (0,1)$

پس $f(x)$ ایک کثیر رکنی ہے جسکا درجہ 3 ہے، اور f مسلسل اور تفرق پذیر ہے $[\alpha, \beta]$ پر۔

رولز کے مسئلہ سے $c \in (\alpha, \beta)$ موجود ہوتا ہے اس طرح کہ $f'(c) = 0$

$\therefore\ c \in (\alpha, \beta)$ تب

$$3c^2 - 3 = 0$$
$$\Rightarrow c = \pm 1$$
$$\Rightarrow 0 < \alpha < \beta < 1$$

$$\Rightarrow c = \pm 1$$

جو ایک متضاد ہے۔

$\therefore\ f(x) = 0$ دو متفرق ریشے رکھتا ہے $(0,1)$ پر

جب کہ K کوئی قدر نہیں رکھتا۔

مثال3۔ منحنی $y = x^3$ کے لیے، ایک نقطہ معلوم کرو اس طرح سے کہ نقاط $(-1, -1)$ اور $(2,8)$ کو ملانے والی خط قطعہ متوازی ہوتی ہے۔ خط کے جو مماس ہے۔

حل۔ فرض کرو $f(x) = x^3$ پر $[-1, 2]$.

پس $f(x)$ مسلسل ہے $[-1, 2]$ پر اور تفرق پذیر ہے $(-1, 2)$ پر یہاں ہم لگرانج کا اوسط قیمت والا مسئلہ استعمال کرتے ہیں۔

$c \in (-1, 2)$ موجود ہوتا ہے اس طرح کہ

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - (-1)} = \frac{8 + 1}{3}$$
$$\Rightarrow \quad 3c^2 = 3 \Rightarrow c = \pm 1$$

لیکن $-1 \notin (-1, 2)$

$c = 1$ ہی $(-1, 2)$ کے درمیان واقع ہوتا ہے

اگر $A(-1, -1)$ اور $B(2,8)$ پر کھینچا گیا مماس متوازی ہوتا ہے کارڈ AB کے۔

مثال4۔ فرض کرو $f(x) = \sin^{-1} x + \cos^{-1} x$ پر $(-1, 1)$

حل۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{(-1)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= 0 \quad (-1 < x < 1)$$

پس f ایک مسلسل تفاعل ہے (-1 , 1) پر۔

مستقل کی قدر معلوم کرنے کے لیے $x = 0$ درج کرنا ہے تب $f(x) = c$ حاصل ہوگا۔

چوں کہ $x \in [-1,1]$ $\quad \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2},$

$$\therefore \mathrm{c} = \frac{\pi}{2}$$

مثال5۔ لگرانج کے اوسط قدر والے قضیہ کو استعمال کرتے ہوئے بتاؤ کہ $10.22 < \sqrt{105} < 10.25$

حل۔ فرض کرو $[100,105]$ $x \in$ تمام $f(x) = \sqrt{x}$

یہاں ہم یہ مشاہدہ کر رہے ہیں کہ $f(x)$ مستقل اور تفرق پذیر ہے $[100,105]$ پر اور $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

لیگرانج کے اوسط قدر والے قضیہ کے مطابق $c \in (100,105)$ موجود ہوتا ہے اس طرح کہ

$$\frac{f(105) - f(100)}{105 - 100} = f'(c)$$

$$\frac{\sqrt{105} - \sqrt{100}}{5} = \frac{1}{2\sqrt{c}} \quad \text{تمام} \quad 100 < c < 105$$

$$\sqrt{105} - 10 = \frac{5}{2\sqrt{c}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

لیکن $100 < c < 105$

$$\sqrt{100} < \sqrt{c} < \sqrt{105}$$

$$10 < \sqrt{c} < \sqrt{105} < 11$$

$$\frac{1}{10} > \frac{1}{\sqrt{c}} > \frac{1}{11}$$

$$\frac{5}{2}.\frac{1}{10} > \frac{5}{2}.\frac{1}{\sqrt{c}} > \frac{5}{2}.\frac{1}{11}$$

مساوات (1) سے

$$\frac{5}{22} < \sqrt{105} - 10 < \frac{5}{20}$$

$$0.22 < \sqrt{105} - 10 < 0.25$$

$$\Rightarrow 10.22 < \sqrt{105} < 10.25$$

پس ثابت کیا گیا ہے۔

مثال6۔ بتاؤ کہ $|\sin x_1 - \sin x_2| \le |x_1 - x_2|$. تمام $x_1, x_2 \in R$ کے لیے

حل۔ فرض کرو کہ $x_1 = x_2$ تب $x_1 - x_2 = 0$ اور

$$|\sin x_1 - \sin x_2| = 0 \Rightarrow |\sin x_1 - \sin x_2| = |x_1 - x_2|$$

فرض کرو کہ $x_1 < x_2$

فرض کرو کہ $f(x) = \sin x$ تمام $x \in [x_1, x_2]$

$\therefore f(x)$ مسلسل اور تفرق پذیر ہے $[x_1, x_2]$ پر لیگرانج کے اوسط قدر والے مسئلہ سے $c \in (x_1, x_2)$ ہے اس طرح سے کہ

$$\frac{\sin x_1 - \sin x_2}{x_1 - x_2} = f'(c) = \cos c$$

$$\left|\frac{\sin x_1 - \sin x_2}{x_1 - x_2}\right| = |\cos c| \le 1$$

$$|\sin x_1 - \sin x_2| \le |x_1 - x_2|$$

اسی طرح ہم $x_1 > x_2$ کے لیے بھی یہی نتیجہ اخذ کرتے ہیں۔

12.6 عام اوسط قیمت کے قضیے: سلسلوں کا پھیلاؤ

(General Mean Value Theorems:Expansion of Series)

سلسلوں کا پھیلاؤ(Expansion of Series)

ٹیلر کا قضیہ(Taylor's Theorem)

بیان: اگر $f:[a,b] \in R$

i) $f^{(n-1)}$ مسلسل ہے $[a,b]$ پر

ii) $f^{(n-1)}$ تفرق پذیر ہے (a,b) پر یا $f^{(n)}$ وجود رکھتا ہے (a,b) پر اور $p \in Z^+$ تب ایک نقطہ $c \in (a,b)$ موجود ہوتا ہے اس طرح سے کہ

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \mathrm{R_n}$$

جہاں $R_n = \dfrac{(b-a)^p (b-c)^{n-p}}{(n-1)!\ p} f^n(p)$

جو باقی رکن ہے

ثبوت۔ فرض کرو $F:[a,b] \to R$ کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے

$$F[x]=f(b)-f(x)-\frac{(b-x)}{1!}f'(x)-\frac{(b-x)^2}{2!}f''(x)+\dots+\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)-A\left[\frac{b-x}{b-a}\right]^p$$

جہاں A حقیقی عدد ہے اس طرح کہ $F(a) = F(b)$ یعنی رولز کے قضیے کی تیسری شرط پوری کرے

$$\Rightarrow 0=f(b)-f(a)-\frac{(b-a)}{1!}f'(a)-\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\dots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)-A\left[\frac{b-a}{b-a}\right]^p$$

$$f(b)=f(a)+\frac{(b-a)}{1!}f'(a)+\dots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+A........(1)$$

$f^{(n-1)}$ مسلسل ہے $[a,b]$ پر یعنی $f, f'\ f'',\dots f^{(n-1)}$ مسلسل ہے $[a,b]$ پر

$f^{(n-1)}$ تفرق پذیر ہے (a,b) یعنی $f, f'\ f'',\dots f^{(n-1)}$. تفرق پذیر ہیں (a,b) پر

چوں کہ $(b-x),(b-x)^2,....(b-x)^{n-1},\ (b-x)^p$ متغیر x میں کثیر رکنی ہیں اور یہ مسلسل اور R پر تفرق پذیر ہیں۔

پس F مسلسل ہے (a,b) پر اور تفرق پذیر ہے (a,b) پر

لہٰذا F رولز کے مسئلہ کی تمام شرائط کو مطمئن کرتا ہے، تب ایک نقطہ $c\in(a,b)$ موجود ہوتا ہے اس طرح کہ $F'(c)=0$ ، تب غور کیجیے

$$F'(x)=-f'(x)-\left\{-f'(x)+\frac{(b-x)}{1\,!}f''(x)\right\}-\cdots\{\quad\}\cdots$$
$$-\left\{-\frac{(-b-x)^{n-2}}{(n-2)\,!}f^{(n-1)}(x)+\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)\,!}f^{(n)}(x)\right\}+\frac{Ap}{(b-a)^p}(b-x)^{p-1}$$

$$F'(x)=-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)\,!}f^{(n)}(x)+\frac{Ap}{(b-a)^p}(b-x)^{p-1}$$

$c\in(a,b)$ کے لیے $F'(c)=0$ اس لیے

$$-\frac{(b-c)^{n-1}}{(n-1)\,!}f^{n}(c)+\frac{Ap}{(b-a)^p}(b-c)^{p-1}=0$$

$$\Rightarrow A=\frac{(b-a)^p(b-c)^{n-p}}{(n-1)\,!\ p}f^{n}(c).......(2)$$

مساوات(1)اور(2)سے

$$f(b)=f(a)+\frac{(b-a)}{1!}f'(a)+\dots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{(b-a)^p(b-c)^{n-p}}{(n-1)!\ p}f^{n}(c)$$

ریمارک: $R_n=\dfrac{(b-a)^p(b-c)^{n-p}}{(n-1)!\ p}f^{n}(c)$ کو n ارکان کے بعد کا باقی کہتے ہیں۔ اس کو باقی بشکل روشے بھی کہتے ہیں۔

(i) اگر $P = n$ درج کریں تب ہم کو حاصل ہوگا

$$R_n=\frac{(b-a)^n f^{n}(c)}{(n)!}$$

جس کو باقی بشکل لیگرانج کہتے ہیں۔

(ii) اگر $P = 1$ درج کریں تب ہم کو حاصل ہو گا

$$R_n = \frac{(b-a)(b-c)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n}(c)$$

جس کو باقی بشکل کوشی کہتے ہیں۔

ٹیلر کے قضیہ کی دوسری صورتیں: اگر $f:[a,a+h]\to R$ اس طرح کہ

(i) $f^{(n-1)}$ مسلسل ہے $[a,a+h]$ پر

(ii) $f^{(n-1)}$ تفرق پذیر ہے $(a,a+h)$ پر اور $p\in Z^{+}$ تب ایک حقیقی عدد $0<\theta<1$ موجود ہوتا ہے اس طرح سے کہ

$$f(a+h)= f(a)+\frac{h}{1!} f'(a)+\frac{h^{2}}{2!} f''(a)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)+\mathrm{R}_{\mathrm{n}}$$

جہاں $R_n = \dfrac{h^{n}(1-\theta)^{n-p}\, f^{n}(a+\theta h)}{(n-1)!\; p}$

ریمارکس:

(i) باقی بشکل روشے $R_n = \dfrac{h^{n}(1-\theta)^{n-p}\, f^{n}(a+\theta h)}{(n-1)!\; p}$

(ii) باقی بشکل لیگرانج $R_n = \dfrac{h^{n} f^{n}(a+\theta h)}{n!}$

(iii) باقی بشکل کوشی $R_n = \dfrac{h^{n}(1-\theta)^{n-1}\, f^{n}(a+\theta h)}{(n-1)!}$

میکلارن کا قضیہ (Maclaurin's Theorem)

بیان: اگر تفاعل $f:[0,x]\to R$ اس طرح سے کہ

(i) $f^{(n-1)}$ مسلسل ہے $[0,x]$ پر

(ii) $f^{(n-1)}$ تفرق پذیر ہے $(0,x)$ پر اور $p\in Z^{+}$ تب

ایک حقیقی عدد $\theta\in(0,1)$ موجود ہوتا ہے اس طرح سے کہ

$$f(x)= f(0)+xf'(0)+\ldots+\frac{(x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0)+\frac{x^{n}(1-\theta)^{n-p}\, f^{n}(\theta x)}{(n-1)!\; p}$$

ثبوت۔ تفاعل $f:[0,x]\to R$ کی گئی ہے

$$F[s]= f(x)- f(s)-(x-s) f'(s)+\ldots-\frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(s)-A\left(\frac{x-s}{x}\right)^{p}$$

یہاں A حقیقی عدد کو اس طرح منتخب کیا جاتا ہے کہ $F(0) = F(x)$ [رولز کی تیسری شرط] اب

$$0=f(x)-f(0)-x\,f'(0)+...+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)-A$$

$$f(x)=f(0)+x\,f'(0)+...+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+A \qquad ......I$$

$f^{(n-1)}$ مسلسل ہے $[0,x]$ پر

یعنی $f, f', f'',.....f^{(n-1)}$ مسلسل ہے

$f^{(n-1)}$ تفرق پذیر ہے $(0,x)$ پر

یعنی $f, f', f'',.....f^{(n-1)}$ تفرق پذیر ہے $(0,x)$ پر

یہاں $(x-s),(x-s)^2,(x-s)^3,....(x-s)^{n-1},\left(\frac{x-1}{x}\right)^p$

کثیر رکن تفاعلات ہیں اور وہ مسلسل اور تفرق پذیر ہے $[0,x]$ پر

لہٰذا F مسلسل ہے $[0,x]$ پر اور تفرق پذیر ہے $(0,x)$ پر اور

$$F[x]=F(0)$$

پس F رولز کے مسئلہ کے تمام شرائط کو مطمئن کرتا ہے۔ پس ایک نقطہ $c\in(0,x)$ موجود ہوتا ہے اس طرح کہ $F'[c]=0$ یعنی

$0<\theta<1$ اس طرح سے کہ $F'(\theta x)=0$

لیکن

$$F'(s)=0-f'(s)-\left\{(-1)f'(s)+(x-s)f''(s)\right\}-\left\{\frac{-2(x-s)f''(s)}{2!}+\frac{(x-s)^2f''(s)}{2!}\right\}$$

$$.......\left\{-\frac{(n-1)(x-s)^{n-2}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(s)+\frac{(x-s)^n}{(n-1)!}f^{(n)}(x)\right\}-\frac{A}{x^p}p(x-s)^p(-1)$$

$$F'(s)=-\frac{(x-s)^n}{(n-1)!}f^{(n)}(x)+\frac{A}{x^p}p(x-s)^p$$

$$F'(\theta x)=0\Rightarrow-\frac{(x-\theta x)^n}{(n-1)!}f^{(n)}(\theta x)+\frac{A}{x^p}p(x-\theta x)^p=0$$

$$A=\frac{x^n(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\,p}........(II)$$

مساوات I اور II سے

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)...+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+\frac{x^n}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+\frac{x^n(1-\theta)^{n-p}f^n(\theta x)}{(n-1)!\,p}$$

ریمارک:

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

1) باقی بشکل روشے $R_n = \dfrac{x^n (1-\theta)^{n-p} f^n(\theta x)}{(n-1)!\, p}$

$p = n$ درج کرنے پر باقی بشکل لیگرانج حاصل ہوتی ہے

$$R_n = \frac{x^n f^n(\theta x)}{(n)!}$$

$p = 1$ درج کرنے پر باقی بشکل کوشی حاصل ہوتی ہے

$$R_n = \frac{x^n (1-\theta)^{n-1} f^n(\theta x)}{(n-1)!}$$

2) ٹیلر قضیہ میں اگر ہم $a = 0$ اور $b = x$ ، $c = \theta x$ درج کرتے ہیں تب ہم کو میکلارن کی صورت حاصل ہوتی ہے۔

3) نتیجہ (ٹیلر کے قضیے کے ذریعہ):

ایک تفاعل f، اگر ٹیلر کے مسئلہ کے تمام شرائط کو مطمئن کرتا ہے $(a-h, a+h)$ اور $x \in [a-h, a+h]$ تب $f(x)$ کو مندرجہ ذیل کی صورت میں لکھا جاتا ہے

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) \ldots + \frac{1}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} f^{(n-1)}(a)$$
$$+ \frac{1}{n!}(x-a)^n f^n(a + \theta\overline{x-a}) \;;\; 0 < \theta < 1$$

4) نتیجہ (میکلارین کا مسئلہ):-

ایک تفاعل $f(x)$ ، اگر ٹیلر کے مسئلہ کے شرائط کو مطمئن کرتا ہے $[-h, h]$ پر $h > 0$ اور $x \in [-h, h]$ تب

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) \ldots + \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} f^{(n-1)}(0) + \ldots + \frac{1}{n!} x^n f^n(\theta x) \;;\; 0 < \theta < 1$$

ٹیلر کا سلسلہ (Taylor's Series)

تعریف: اگر f تفاعل ہر درجے کے مسلسل تفرق رکھتا ہے $[a-h, a+h]$ میں اور ٹیلر کا باقی $R_n \to 0$ جیسا کہ $n \to \infty$ تب تمام $x \in [-h, h]$ کے لیے

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f^n(a) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots$$

جس کو ٹیلر کا سلسلہ f کا "a" پر کہتے ہیں۔

میکلارن سلسلہ (Maclaurin's Series)

تعریف: اگر تفاعل f درجہ کے مسلسل تفریق رکھتا ہے $[-h, h]$ میں اور میکلارین کا باقی $R_n \to 0$ ہوتا ہے جیسا کہ $n \to \infty$ تب تمام

$x \in [-h,\ h]$ کے لیے

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^n}{n!} f^n(0) = f(0) + (x) f'(0) + \frac{(x)^2}{2!} f''(0) \ldots + \frac{(x)^n}{n!} f^{(n)}(0) + \ldots$$

جس کو میکلارین کا سلسلہ f کا "0" صفر پر کہتے ہیں۔

مثال 1۔ غور کرو $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$ عام اوسط قیمت والے قضیہ کو استعمال کرتے ہوئے $f(x)$ کو $(x-1)$ کے ارکان میں پھیلاؤ۔

حل۔ دیا گیا ہے $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$

ایک کثیر رکنی ہے۔ 5 ویں درجہ کا x میں اور یہ مسلسل اور تمام تفرقات رکھتا ہے $[1-h,\ 1+h]$ بند وقفہ میں جہاں $h \in R$ 5 ویں درج تک پہنچے تک $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$

پس $f(1) = 0,\ f'(1) = 0,\ f''(1) = 0,\ f'''(1) = 18,\ f^{iv}(1) = 72,\ f^{v}(1) = 120$

$f^{(n)}(x) = 0$ تمام $n \geq 6$ کے لیے

ٹیلر کے سلسلے سے

$$f(x) = f(1) + (x-1) f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2!} f''(1) + \frac{(x-1)^3}{3!} f'''(1) + \frac{(x-1)^4}{4!} f^{iv}(1) + \frac{(x-1)^5}{5!} f^{v}(1)$$

$$f(x) = 0 + 0 + 0 + \frac{18(x-1)^3}{3!} + \frac{72(x-1)^4}{4!} + \frac{120(x-1)^5}{5!}$$

$$f(x) = 3(x-1)^3 + 3(x-1)^4 + (x-1)^5$$

مثال 2۔ اگر $f(x) = \log(1+x)$ تب ٹیلر کے مسئلہ کو باقی بشکل لیگرانج میں لکھیے۔

حل۔ فرض کرو $f(x) = \log(1+x)$، یہ n ویں تفرق رکھتا ہے تمام $x \in (2-h,\ 2+h)$ کے لیے $h > 0$ اور

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{(1+x)^{n+1}}$$

$$,\quad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2},\ f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}\ ,\quad f^{iv}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}\quad f'(x) = \frac{1}{(1+x)}$$

$\therefore$ f, f', f'', f''' تمام مسلسل ہے $[2-h,\ 2+h]$ پر اور $f'''(x)$ تفرق پزیر ہے $[2-h,\ 2+h]$ ہو ٹیلر کے مسئلہ سے، ہم لکھ سکتے ہیں

$$f(x) = f(2) + (x-2) f'(2) + \frac{(x-2)^2}{2!} f''(2) + \frac{(x-3)^3}{3!} f'''(2) + + \frac{(x-2)^4}{4!} f^{iv}(2 + \theta\ \ x-2)$$

جہاں $0 < \theta < 1$

$$\log(1+x)=\log 3+(x-2)\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{(x-2)^2}{2!}\left(-\frac{1}{3^2}\right)+\frac{(x-2)^3}{3!}\left(\frac{2}{3^3}\right)+\frac{(x-2)^4}{4!}\left(-\frac{6}{2+\theta x-2}\right)$$

$$=\log 3+\left(\frac{x-2}{3}\right)-\frac{(x-2)^2}{2!3^2}+\frac{2(x-2)^3}{3!3^3}-\frac{6(x-2)^4}{4!(2+\theta x-2)^4}$$

مثال3۔ بتاؤ کہ $x-\frac{x^3}{3!}\le \sin x\le x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$ تمام $x\ge 0$

اور $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\le \sin x\le x-\frac{x^3}{3!}$ تمام $x<0$

حل۔ صورت(i) فرض کرو $x=0$ تب

$$x-\frac{x^3}{3!}=0\ ,\ x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}=0\ ,\ \sin x=0$$

اس طرح

$$x-\frac{x^3}{3!}=\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$$

صورت(ii) فرض کرو $x>0$ اور $f(x)=\sin x$ تمام $x\in[-h,\ h]$

$h>0$ جو میکلارن مسئلہ کے تمام شرائط کو مطمئن کرتا ہے اور

$$f'(x)=\cos x\ \ f''(x)=-\sin x\ ,\ f''(x)=-\cos x$$

$$f^{iv}(x)=\sin x\ \ f^{v}(x)=\cos x$$

میکلارن کے مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے R_n کی صورت میں ارکان کے بعد ہم کو حاصل ہوگا۔

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(\theta x)$$ جہاں $0<\theta<1$

$$\sin x=\sin 0+x(\cos 0)+\frac{x^2}{2!}(-\sin 0)+\frac{x^3}{3!}(\cos\theta x)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}(\cos\theta x)$$

لیکن $\cos\theta x<1\quad \forall\theta x, x>0$

$$\Rightarrow x-\frac{x^3}{3!}\cos\theta x>x-\frac{x^3}{3!}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}\cos\theta x>x-\frac{x^3}{3!}$$

ٹیلر کے مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے لیگرانج کی صورت R_n کے 5ارکان

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}(\cos\theta x)$$

لیکن $\cos\theta x < 1 \quad \forall \theta x,\ x > 0$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}(\cos\theta x) < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

پس $x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

پس صورت (i) اور صورت (ii) سے

$$x - \frac{x^3}{3!} \le \sin x \le x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \text{ تمام } x \ge 0$$

صورت (iii) فرض کرو $x < 0$، $y = -x$ درج کرو جہاں $y > 0$

اب صورت (iii)

$$y - \frac{y^3}{3!} \le \sin y \le y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} \text{ تمام } y > 0$$

$$(-x) - \frac{(-x)^3}{3!} \le \sin(-x) \le -x - \frac{(-x)^3}{3!} + \frac{(-x)^5}{5!}$$

تمام $x > 0$ کے لیے پس ثابت ہو گیا ہے۔

مثالیں:

(i) e^x **کا پھیلاؤ**

حل۔ فرض کرو $f(x) = e^x$ تمام $x \in R$

$$f^{(n)}(x) = e^x \text{ تمام } x \in R \text{ اور } n \in N$$

$$\therefore f^{(n)}(0) = e^0 = 1 \text{ تمام } n \in N$$

اور $f^{(n)}(x) = e^x$ موجود ہوتا ہے اور یہ تمام $x \in R$ کے لیے مسلسل ہے۔ اب لگرانج بشکل R_n کی اور

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x) \text{ جہاں } 0 < \theta < 1$$

$$R_n = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x} \quad \text{،} 0 < \theta < 1$$

لیکن $\underset{n\to\infty}{Lt} \frac{x^n}{n!} = 0$

$$\underset{n\to\infty}{Lt} R_n = \underset{n\to\infty}{Lt} \frac{x^n}{n!} \underset{n\to\theta x}{Lt} e^{\theta x} = 0.e^{\theta x} = 0$$

$f(x) = e^x$ میکلارن سلسلہ کا پھیلاؤ ہے تمام $x \in [-h,\ h]$ کے لیے

$$\therefore e^x = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + ... \frac{x^n}{n!}$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2!}+....+\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

2) $\sin x$ کا پھیلاؤ

حل۔ فرض کرو $x\in R$ تمام $f(x)=\sin x$ کے لیے

پس $x\in R$ تمام $f^{(n)}(x)=\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)$

اور تمام $n\in N$ $f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}$

اس طرح کہ

$$f(0)=0 \text{ ، } f'(0)=\sin\frac{\pi}{2}=1 \text{ ، } f''(0)=\sin\pi=0,---$$

یعنی اگر $f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & if\, n\, is\ even\\ \pm1, & if\, n\, is\ odd\end{cases}$

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)$$

موجود ہے اور مسلسل ہے R پر

$\therefore$ f مسلسل تفرق رکھتا ہے ہر درجہ کا $[-h,\ h]$ پر جہاں $h>0$

R_n کے لگرانج کی صورت

$$R_n=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x)=\sin\left(\frac{n\pi}{2}+\theta x\right)$$

جہاں $0<\theta<1$

$$|R_n|=\left|\frac{x^n}{n!}\right|\left|\sin\left(\frac{n\pi}{2}+\theta x\right)\right|\le\left|\frac{x^n}{n!}\right|$$

تمام $x\in R$ کے لیے $\underset{n\to\infty}{Lt}\left(\frac{x^n}{n!}\right)=0$

$$\underset{n\to\infty}{Lt}|R_n|=0$$

پس $\underset{n\to\infty}{Lt}\ R_n=0$

یعنی $f(x)=\sin x$ میکلارن سلسلہ کا پھیلاؤ ہے تمام $x\in[-h,\ h]$ کے لیے اور $h>0$

پس تمام $x\in R$ کے لیے

$$\sin x=0+x(1)+\frac{x^2}{2!}(0)+\frac{x^3}{3!}(-1)+---$$

$$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}---$$

3) میکلارن کے مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کرو کہ

$$e^x \cos x = 1 + x - \frac{2x^2}{3!} - \frac{2x^4}{4!} - - -$$

حل۔ فرض کرو $f(x) = e^x \cos x$ تمام $x \in R$ کے لیے

ہم جانتے ہیں کہ تمام $n \in N$ اور $x \in R$ کے لیے $f^{(n)}(x) = \left(\sqrt{2}\right)^n e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$

اب $n \in N$ تمام $f^{(n)}(0) = (2)^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

جیسا کہ $f(0) = 1$ $f'(0) = \sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} = 1$

$$f''(0) = 2(0) = 0, \; f'''(0) = 2^{3/2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2$$

پس $f(x)$ مسلسل تفرق رکھتا ہے $[-h, h]$ پر اور $h > 0$

غور کرو R_n کا لگرانج صورت

$$R_n = \frac{x^n}{n!} 2^{n/2} e^{\theta x}.\cos\left(\theta x + \frac{n\pi}{4}\right)$$

$$\left|R_n\right| = \left|\frac{x^n}{n!}\right| 2^{n/2} e^{\theta x}.\left|\cos\left(\theta x + \frac{n\pi}{4}\right)\right| \le 2^{n/2} e^{\theta x}\left|\frac{x^n}{n!}\right|$$

لیکن $\underset{n\to\infty}{L}\left|\frac{x^n}{n!}\right| = 0$ اور $\underset{n\to\infty}{L} R_n = 0$

$f(x) = e^x \cos x$ میکلارین سلسلہ پھیلاؤ رکھتا ہے تمام $x \in [-h, h]$ کے لیے اور تمام $x \in R$ کے لیے جو اس طرح ہوگا

$$e^x \cos x = 1 + x(1) + \frac{x^2}{2!}(0) + \frac{x^3}{3!}(-2) + \frac{x^4}{4!}(-4) + - - -$$

$$= 1 + x - \frac{2x^3}{3!} - \frac{4x^4}{4!} + - - -$$

4) بتاؤ کہ $\sin^{-1} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{9x^5}{5!} + - - -$

حل۔ فرض کرو $x \in [-1,1]$ تمام $f(x) = \sin^{-1} x$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \;........(1)$$

$$\Rightarrow \left(1 - x^2\right)\left[f'(x)\right]^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left(1 - x^2\right).2.f'(x) f''(x) + (-2x)\left[f'(x)\right]^2 = 0 \;----------(2)$$

مساوات(2) کو n دفعہ تفرق کرتے ہوئے لیبنٹز کے مسئلہ سے ہم کو حاصل ہوگا۔

$$\Rightarrow \left\{\left(1-x^2\right).f^{(n+2)}(x)+n.f^{(n+1)}(-2x)+\frac{n(n-1)}{2}f^{(n)}(-2)\right\} -\left\{x.f^{(n+1)}(x)+n.f^{(n)}(1)\right\}=0$$

$$\Rightarrow \left(1-x^2\right).f^{(n+2)}(x)-(2n+1).x.f^{(n+1)}(x)-n^2 f^{(n)}(x)=0$$

$x=0$ درج کرنے پر،

$$\Rightarrow f^{(n+2)}(0)-n^2.f^{(n)}(0)=0$$

$$\Rightarrow f^{(n+2)}(0)=n^2.f^{(n)}(0)$$

پس $f(x)=\sin^{-1}x$ مسلسل تفرق رکھتا ہے، ہر درجہ کا $[-h,h]\subset[-1,1]$ پر، $h>0$ پس

$$\Rightarrow f(0)=-0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=1^2$$

$$f'''(0)=2^2,\ f''(0)=0,\ f^{v}(0)=3^2;\ f'''(0)=3^2$$

.میکلارین کے سلسلہ کے پھیلاؤ کے مطابق

$$f(x)=\ f(0)=xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\frac{x^4}{4!}f^{iv}(0)+\frac{x^5}{5!}f^{v}(0)+....$$

$$=0+x(1)+0+\frac{x^3}{3!}(1)+0+\frac{x^5}{5!}(3)^2+....$$

$$=x+\frac{x^3}{3!}+9\frac{x^5}{5!}+....$$

$$\sin^{-1}=x+\frac{x^3}{3!}+9\frac{x^5}{5!}+....$$

5) $f(x)=sin\left(\left(\frac{\pi}{4}\right)+x\right)$ کو میکلارین کا مسئلہ استعمال کرتے ہوئے پھیلاؤ۔

حل۔ فرض کرو $x\in R$. تمام $f(x)=sin\left(\left(\frac{\pi}{4}\right)+x\right)$

ہم جانتے ہیں کہ $f(x)$ کا n واں تفرق $f^{(n)}(x)$ ہے۔

اور تمام $n\in N$ کے لیے $f^{(n)}(0)=sin\left(\frac{n\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)$

اس طرح

$$f(0)=sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'(0)=sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$f^{(n)}(x)$ موجود ہوتا ہے اور یہ مسلسل ہے R پر۔

اس لیے f مسلسل تفرق رکھتا ہے $[-h,h]$ جہاں $h>0$ باقی بشکل لگرانج سے $\left(\frac{n\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\theta x\right)$ جہاں $R_n=\frac{x^n}{n!}.\sin\left(\frac{n\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\theta x\right)$

$0<\theta<1$

$$|R_n|=\left|\frac{x^n}{n!}\right|.\left|\sin\left(\frac{n\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\theta x\right)\right|\le\left|\frac{x^n}{n!}\right|$$

$$\underset{n\to\infty}{Lt}|R_n|=0$$

$$\underset{n\to\infty}{Lt}R_n=0$$

$\therefore$ $f(x)=sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$ میکلارن سلسلہ کے پھیلاؤ رکھتا ہے تمام $x\in[-h,\ h]$ کے لیے $h>0$

پس، تمام $x\in R$ کے لیے

$$sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x^2}{2!}-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x^3}{3!}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x^4}{4!}+---$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-....\right)$$

مشقی سوالات حل کریں:

1) $e^x\sin x=x+x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30}+....$

2) R_n کو لیگرانج کے باقی ساتھ $f(x)=\cos x$

3) x^8+x^5 کو $(x-1)$ کی قوتوں میں پھیلاؤ۔

12.7 کلیدی الفاظ (Keywords)

تفرق پذیری، الجبرا، اعلیٰ رتبہ، مشتقات

12.8 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے مختلف نکات پر بحث کی اور کسی تفاعل کے کسی نقطہ پر تفرق پذیر ہونا اور کوئی علاقہ پر تفرق پذیر ہونے کو سمجھا۔ ہم نے کئی اہم سوالات کو حل کیا ہے جس میں تفاعل کے تفرق پذیر ہونے پر روشنی ڈالی ہے۔ یہاں پر تفرق پذیر تفاعلات کے الجبرا کی فہرست بھی تیار کی ہے۔ خاص کر ہم نے رولز کا مسئلہ لگرانج کا مسئلہ اور کوشی کا اوسط قدر والے قضیہ کو ان کے ثبوت کے ساتھ پڑھا ہے۔ اس کے ساتھ کئی حل شدہ سوالات پر عنوان حل کئے۔ اس کے بعد ٹیلر کے مسئلہ اور میکلارن کے مسئلہ کی بھی مشق کی اور دئے ہوئے تفاعلات $f(x)$ کو ان

سلسلوں سے پھیلانے کا ہنر سیکھا ہے۔ آخر کار ہم نے بہت اچھے اور کافی مقدار میں حل شدہ سوالات بچوں کی مدد کے لیے درج کیا ہے۔

12.9 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

12.9.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

A) خالی جگہ کو پُر کریں

1. دائیں اور بائیں ہاتھ کے تفرقات $f(x) = 2 + x$ اگر $x \geq 0$ اور $f(x) = 2 - x$ اگر $x < 0$ اور $x = 0$ پر ------------------------۔

2. $f(x) = x^2|x|$ کا تفرق $x = 0$ پر ------------------

3. رولز کا مسئلہ نا قابل قبول ہوتا ہے اگر تفاعل f ------------ یا ------------

4. اگر $f:[0,3] \to R$ کی تعریف $f(x) = 0$ تمام $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ سے لی گئی ہے۔ کیا f مسلسل ہے $x = \frac{1}{2}$ پر --------

5. اگر $f(x) = |x|$ ، $[-2,2]$ میں رولز کا مسئلہ استعمال نہیں ہوتا کیوں کہ --------

6. کیا رولز کا مسئلہ $f(x) = \tan x$ ، $a = 0$ اور $b = \pi$ کے لیے استعمال ہوتا ہے۔

7. تفاعل $[1,2]$ پر $f(x) = 1 + x^2$ لیگرانج اوسط قدر والے تفاعل سے c کی قدر کیا ہوگی۔

متعدد امتحانی سوالات

1. جیومتری کے مطابق اوسط قیمت والے قضیہ کہتا ہے کہ کم از کم ایک نقطہ c منحنی $y = f(x)$ جس کا x محور (a,b) پر واقع ہوتا ہے تب اس کا ------------------------

a) $y = x$ کے متوازی ہوگا   b) y محور کے متوازی ہوگا

c) منحنی کے آخری سروں کو جوڑنے سے بنے خط کے متوازی   d) x محور کے متوازی ہوگا

2. اگر رولز کا مسئلہ $y = f(x)$ ، $[a,b]$ پر تصدیق ہوتا ہے تب ایک نقطہ $c \in (a,b)$ موجود ہوگا اس طرح کہ

a) $f(c) = 0$ b) $f'(c) = 0$ c) $f'(c) > 0$ d) $f(c) < 0$

3. c کی قدر منحنی $y = f(x)$ ، $[-1,1]$ میں، لیگرانج کے مطابق

a) 1   b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $[-1,1]$ میں موجود نہیں ہے

4. c کی قدر معلوم کرو، تفاعل $f(x) = x^2 - 8x + 12$ ، $(2,6)$ میں رولز کے قضیہ کے مطابق

a) 4   b) 6   c) 8   d) 2

5. کوشی اوسط قیمت قضیہ لیگرانج اوسط قیمت قضیہ کی صورت اختیار کر لیتا ہے اگر ------------

a. $f(x) = 0$ b) $g(x) = x$ c. $f'(c) = 0$ d) $g'(x) = 0$

6. اوسط قدر والے مسئلہ میں $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ اگر $a = 0$، $b = \frac{1}{2}$ اور $f(x) = x(x-1)(x-2)$ تب c کی قدر۔۔۔۔۔۔۔۔۔

(a $1-\frac{\sqrt{15}}{6}$ (b $1+\sqrt{15}$ (c $1-\frac{\sqrt{21}}{6}$ (d $1+\sqrt{21}$

12.9.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. نقطہ x پر تفاعل کے تفرق پذیر ہونے کی تصریف لکھئے۔
2. وقفہ میں تفاعل کے تفرق پذیر ہونے کی تعریف لکھئے۔
3. رولز کے مسئلہ کو بیان کرو؟
4. لیگرانج اوسط قدر والے قضیہ کو بیان کرو۔
5. کوشی کے اوسط قدر والے قضیہ کو بیان کرو۔
6. ٹیلر کے سلسلہ کی تعریف کرو مختلف R_n کے ساتھ۔
7. میکلارن کے سلسلہ کی تعریف کرو مختلف R_n کے ساتھ۔
8. ٹیلر کے مسئلہ کو بیان کرو؟
9. میکلاریں کے مسئلہ کو بیان کرو؟
10. اوسط قدر والے قضیہ کے کیا اطلاق یا استعمالات لکھیے۔
11. رولز کے مسئلہ کا جیومتریہ پر بحث کیجیے۔
12. لیگرانج اوسط قدر والے قضیہ کا جیومتریہ نظریہ لکھیے۔

12.9.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. رولز کے مسئلہ کو بیان اور ثابت کرو۔ اور اس کا جیومتریہ نظریہ بھی لکھیے۔
2. لیگرانج اوسط قدر والے قضیہ کو بیان اور ثابت کرو اور اس کا جیومتریہ نظریہ بھی لکھیے۔
3. کوشی اوسط قدر والے قضیہ کو بیان کرو ثابت کرو اور اس کا ترسیمی اظہار بھی کیجیے۔
4. میکلاریں سلسلہ کے پھیلاؤ کی تعریف کرو مختلف باقی بشکلوں کے ساتھ۔
5. ٹیلر سلسلہ کے پھیلاؤ کی تعریف کرو مختلف باقی صورتوں کے ساتھ بیان اور ثابت کرو۔
6. (i) ٹیلر کا قضیہ بیان اور ثابت کیجیے۔ (ii) میکلاریں کا قضیہ بیان اور ثابت کیجیے۔
7. مندرجہ ذیل کے اطلاق پر بحث کرو۔

(i) رولز کا قضیہ (a) $(0,2\pi)$ میں $f(x) = \sin x$ (b) $[0,\pi]$ میں $f(x) = \tan x$

(c) $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ ، $[1,3]$ پر

(ii) لیگرانج اوسط قیمت قضیہ درجہ ذیل تفاعل پر بحث کیجیے:

(a) $b=e, a=1,\ \ f(x)=\log x$ (b) $b=1, a=-1,\ \ f(x)=\frac{1}{x}$

8. c کی قدر معلوم کرو۔ اگر اوسط قیمت قضیہ کی شرائط کو مطمئن کرتا ہے۔

(i) لیگرانج کا قضیہ

(a $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$ ، $[0,4]$ پر

(b $h=\frac{1}{2}, a=1; f(x)=x^3$

(ii) کوشی اوسط قیمت قضیہ

(a $f(x)=\frac{1}{x^2}, g(x)=\frac{1}{x}, [a,b]$ پر $a,b>0$

(b $f(x)=e^x, g(x)=e^{-x}, [a,b]$ پر $a,b>0$

(c $\left[-\frac{\pi}{2},0\right], f(x)=sinx\ , g(x)=cosx$ پر

(d $\left[0,\frac{\pi}{2}\right], f(x)=x^2\ , g(x)=cosx$ پر

9. مندرجہ ذیل کو ثابت کرو، اوسط قدر والے مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے

(i) $1+x<e^x<1+xe^x \quad \forall x>0$

(ii) $x-\frac{x^2}{2(1+x)}<\log(1+x)<x-\frac{x^2}{2}$ ، $x>0$ کے لیے

(iii) $\frac{y-x}{1+y^2}<\tan^{-1}y-\tan^{-1}x<\frac{y-x}{1+x^2}$ ، $0<y<x$ کے لیے نیز اخذ کرو کہ $\frac{\pi}{4}+\frac{3}{25}<\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)<\frac{\pi}{4}+6$

(iv) $\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{15}<\sin^{-1}(0.6)<\frac{\pi}{6}+\frac{1}{8}$

10. مندرجہ ذیل کا پھیلاؤ میکلارن کے قضیہ کو استعمال کرتے ہوئے R_n کے لیگرانج کی صورت کے ساتھ لکھیے

(i) e^x (ii) $\cos x$ (iii) $\log(1+x)$

11. میکلارن کے قضیہ کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے کہ $e^x\sin x = x+x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30}+-----$

12. ثابت کیجیے کہ $\tan^{-1}x = x-\frac{x^3}{5}+\frac{x^5}{5}+-----$

12.10 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Introduction to Real Analysis, Donald R. Sherbert Robert G. Bartle 4th Edition , 2014
2. Elements Of Real Anyalsis, Narayan Shanti and Raisinghania M.D., 2003
3. Real Analysis, Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick, 4th Edition, 2017

4. Real Analysis, J.N. Sharma and A.R. Vasishtha, 2014
5. Real Analysis, V. Karunakaran, 2011
6. Real Analysis, N.L. Carothers, 2006
7. Basic Real Analysis, Houshang H. Sohrab, 2nd Edition, 2014

اکائی 13۔ ریمان تکمل-I

(Riemann Integral-I)

اکائی کے اجزا

13.0 تمہید(Introduction)

سابقہ مطالعہ سے ہم جانتے ہیں کہ کوئی تفاعل کا تکمل اس کا مخالف مشتق ہوتا ہے۔1850 میں ریمان ایک نیا تصور پیش کیا جس کو تکمل کہتے ہیں۔انہوں نے انتہائی مجموعوں اور رقبوں کے طریقے کوانتہائی جمع بندی کرتے ہوئے تکمل کا نام دیا۔ جسے مجموعوں کے انتہا کے طور پر یا تفرق کے معکوس عمل کے طور پر پیش کیا۔ریمان نے اس کو بلکل دوسرے طریقہ سے چند تفاعلوں کے ذریعہ پیش کیاجوایک وقفہ پر تعریف کیے گئے تھے۔ان تفاعلوں کو ریمان تکمل پذیر تفاعل کہا گیا۔ہم ریمان تکمل کااستعمال کرتے ہوئے مختلف اہم تفاعلات کا مطالعہ کریں گے جیسے زینہ تفاعل، مسلسل تفاعلات، مونوٹون تفاعلات وغیرہ۔ ہم نے دیکھا ہے کہ بعض تفاعلات ریمان تکمل نہیں ہوتے۔پس ہم ریمان تکمل کو سمجھنے کے لیےابتدائی تصورات جو ریمان تکمل سے متعلق ہیں اس کو سمجھیں گے۔

13.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد طلبا کواس قابل ہو جانا چاہیے کہ وہ زیریں ریمان حاصل جمع اور بالائی ریمان حاصل جمع کے معنی اور مقاصد پر عبور حاصل کر چکے ہوں گے۔یہاں چند اہم تقسیم پر نقاط کی بحث کی جائے گی اور اسکے منسلک مسئلے بھی پڑھیں گے۔اس اکائی میں جن سوالات پر عبور حاصل ہوگا اس کی مدد سے طلبا تفاعلات پر ریمان تکمل کا استعمال کرنے کے قابل ہوں گے۔اور وہ اس کے منسلک سوالات جو ریمان کے مجموعہ کے متعلق ہو اور ریمان تکمل کے سوالات بھی حل کرنے کے قابل ہوں گے۔اس سے قبل بنیادی نقاط کو سمجھنے کی کوشش کریں گے۔ان ابتدائی نقاط کو ذہن نشین کرنا چاہیے۔

13.2 ابتدائیہ(Preliminaries)

تقسیم(Partition): فرض کرو کہ $I = [a,b]$ میں ایک بند وقفہ ہےI کی تقسیم(Partition)سے مراد محدود مرتب نقاط کا ایک سٹ P ہے،یعنی

$$P = \{a = x_0, x_1, \dots x_{n-1}, x_n = b\}$$

اس طرح سے کہ

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

اور

$$I_1 = [x_0, x_1],\ I_2 = [x_1, x_2] \dots .I_n = [x_{n-1}, x_n]$$

P کے نقاط $[a,b]$ کو غیر ملحقہ ہوئے تحت وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ $\Delta x_r = x_r - x_{r-1}, r = 1,2,3, \dots, n$ کے لیے اس طرح کہ x_r △ایک قطعہ ہے$I_r = [x_{r-1}, x_r]$کا۔تمام طولوں کے قطعوں کو P تقسیم کے حصے ہے آعظم طول کو$\|P\|$نارم(Norm)سے ظاہر کرتے ہیں،یااس کو نارم(Mesh) بھی کہتے ہیں۔

$$\therefore \|P\| = Max\{\Delta x_r : r = 1,2, \dots n\}$$

P کے نارم کو $\mu(P)$ سے بھی ظاہر کرتے ہیں۔

تعریف: ایک تقسیم P^* بھی نفیس تر تقسیم ہے P کی یا P^* ایک باریک ہے P سے اگر اور صرف اگر $P \subset P^*$ یعنی P^* کی تیاری میں ہر ایک نقطہ P کا استعمال کیا گیا ہے۔

فرض کرو کہ P_1 اور P_2 دو تقسیم ہے اور P^* ان کا مشترک نفیس تر تقسیم ہے اگر $P^* = P_1 \cup P_2$ ہو

تبصرہ:

1. اگر P' نفیس تر ہے P سے تب P کا ہر ایک نقطہ P' کا ایک نقطہ ہوگا اور P' کئی نقاط رکھتا ہے یعنی نقاط کی تعداد P' میں زیادہ ہے P کے نقاط سے۔
2. فرض کرو کہ $I = [a, b]$ ایک وقفہ ہے۔ اگر P، P' وقفہ I کے دو تقسیم ہیں تب $P \subset P \cup P'$ اور $P' \subset P \cup P'$ تب $P \cup P'$ کو مشترک نفیس تر کہا جائے گا P اور P' کا۔
3. اگر P اور P' وقفہ I کے دو تقسیم ہیں اور $P \subset P'$ تب $\|P'\| \leq \|P\|$ یعنی نارم P' کم ہوگا یا مساوی ہوگا P کے نارم سے۔
4. $\sum_{i=1}^{n} \Delta_i = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots \Delta_n = (x_1 - a) + (x_2 - x_1) + \ldots (b - x_{n-1}) = b - a$

نوٹ: بعض مصنفین Δ_i کے بجائے δ_i استعمال کرتے ہیں۔

5. جس P کا نارم، صفر کے قریب تر پہنچ جاتا ہے تب تقسیم P کے نقاط کی تعداد، لا متناہی کو پہنچ جاتی ہے یعنی اگر $\|P\| \to 0$ تب $n(P) \to \infty$

13.3 بالائی ریمان اور زیریں ریمان کا حاصل جمع (Upper Riemann and Lower Riemann Sum)

فرض کرو کہ $f: I \to R$ ایک بستہ تفاعل ہے اور $I: [a, b]$ ایک بند وقفہ ہے۔ مان لیجیے کہ $[a, b]$ کی ایک تقسیم $P = \{a = x_0, x_1, \ldots x_{n-1}, x_n = b\}$ ہے۔ جیسا کہ f وقفہ $[a, b]$ میں بستہ تفاعل ہے، اس کا مطلب f ہر تحت وقفہ میں بھی بستہ ہوگا۔ فرض کرو Infimum اور Supremum، f کے $[a, b]$ میں m اور M سے ظاہر کئے جاتے ہیں۔ غور کرو کہ r واں تحت وقفہ $I_r = [x_{r-1}, x_r],\ r = 1,2, \ldots n$ تب m_r اور M_r کو f کے Infimum اور Supremum سے تعبیر کرتے ہیں۔

بالائی ریمان حاصل جمع (Upper Riemann Sum): بالائی ریمان حاصل جمع یا بالائی ڈربوکس (Dorboux) حاصل جمع، تقسیم P کے متناظر مجموعہ کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے کہ

$$U(P, f) = M_1\Delta_1 + M_2\Delta_2 + \ldots M_n\Delta_n = \sum_{r=1}^{n} M_r\Delta_r$$

زیریں ریمان حاصل جمع (Lower Riemann Sum): زیریں ریمان حاصل جمع یا زیریں ڈربکوس (Dorboux) حاصل جمع، تقسیم P کے متناظر مجموعہ کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے کہ

$$L(P, f) = m_1\Delta_1 + m_2\Delta_2 + \ldots m_n\Delta_n = \sum_{r=1}^{n} m_r\Delta_r$$

نوٹ:

1. بعض مصنفین اس طرح کا اظہار کرتے ہیں $L(P,f)=\sum_{i=1}^{n} m_r\delta_r$ اور $U(P,f)=\sum_{i=1}^{n} M_r\delta_r$
2. ریمان کے مجموعوں کو مختصراً R مجموعے سے ظاہر کرتے ہیں۔
3. یہ بات مشاہدہ کی گئی ہے کہ $L(P,f)\le U(P,f)$
4. $L(P,-f)=-U(P,f)$
5. $U(P,-f)=-L(P,f)$

اہتزازی مجموعہ (Oscillatory Sum): اگر $f: I\to R$ اس طرح کہ $I:[a,b]$ ایک بستہ تفاعل ہے اور $P\in\phi[a,b]$ تب $U(P,f)-L(P,f)$ کو f کا احتزازی مجموعہ تقسیم P کے متناظر کہتے ہیں۔یعنی یہ $U(P,f)$ اور $L(P,f)$ کا فرق ہے۔اس کو $W(P,f)$ یا $o(P,f)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

پس اہتزازی مجموعہ

$$W(P,f)=U(P,f)-L(P,f)$$

نوٹ:

1) $W(P,f)\ge 0$ چوں کہ $[U(P,f)-L(P,f)\ge 0,\ \ or\ L(P,f)\le U(P,f)]$

2)
$$\begin{aligned}W(P,f)&=U(P,f)-L(P,f)\\&=\sum_{i=1}^{n}M_r\delta_r-\sum_{i=1}^{n}m_r\delta_r\\&=\sum_{i=1}^{n}(M_r-m_r)\delta_r\end{aligned}$$

یہاں ہم اہم نتائج پر پہنچ چکے ہیں اور ان کو ہم مسئلہ کے طور پر پڑھیں گے اور اس کا ثبوت بھی پیش کرنے کی کوشش کریں گے۔

مثال 1۔ فرض کرو کہ $f: I[a,b]\to R$ ایک بستہ تفاعل ہے اور P وقفہ $[a,b]$ پر تقسیم ہے، تب بتاؤ کہ

i) $L(P,f)\le U(P,f)$

ii) $U(P,-f)=-L(P,f)$

iii) $L(P,-f)=-U(P,f)$

حل۔ فرض کرو کہ $P=\{a=x_0,x_1,\dots x_{n-1},x_n=b\}$ تقسیم ہے اور $f: I[a,b]\to R$ ایک بستہ تفاعل ہے۔ تفاعل f کے Sup اور Inf وقفہ $[a,b]$ پر M اور m ترتیب وار ہیں۔

غور کرو کہ r رواں تحت وقفہ $[a,b]$ پر $I_r=[x_{r-1},x_r]$ ہے، جہاں $r=1,2,\dots n$ ہیں۔ تب

$$m_r=Inf\ f(x),\quad x_{r-1}\le x\le x_r$$

اور

$$M_r=Sup\ f(x),\quad x_{r-1}\le x\le x_r$$

ہیں۔ بالائی ریمان مجموعہ کی تعریف کے مطابق

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_r \Delta_r$$

اور زیریں ریمان مجموعہ کی تعریف کے مطابق

$$L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_r \Delta_r$$

i)ہم جانتے ہیں کہ

$$M_r \geq m_r, \quad r = 1,2,3, \ldots n$$
$$\Rightarrow M_r \Delta_r \geq m_r \Delta_r, \; r = 1,2,3, \ldots n$$

اس لیے

$$\sum_{i=1}^{n} M_r \Delta_r \geq \sum_{i=1}^{n} m_r \Delta_r$$
$$\Rightarrow L(P,f) \leq U(P,f)$$

ii)چوں کہ f وقفہ $[a,b]$ پر بستہ تفاعل ہے۔اس لیے f - بھی وقفہ $[a,b]$ پر ایک بستہ تفاعل ہو گا۔

فرض کرو کہ M_r اور m_r ترتیب وار f کے I_r پر Sup اور Inf ہیں۔

تب $-M_r$ اور $-m_r$ ترتیب وار $-f$ کے I_r پر Inf اور Sup ہوں گے۔ اس لیے بالائی اور زیریں مجموعہ کی تعریف سے

$$U(P,-f) = \sum_{i=1}^{n} -m_r \Delta_r = -\sum_{i=1}^{n} m_r \Delta_r = -L(P,f)$$

اور

$$L(P,-f) = \sum_{i=1}^{n} -M_r \Delta_r = -\sum_{i=1}^{n} M_r \Delta_r = -U(P,f)$$

اس لیے

$$U(P,-f) = -L(P,f)$$

اور

$$L(P,-f) = -U(P,f)$$

پس ثابت کیا گیا ہے۔

قضیہ 2۔ فرض کرو کہ وقفہ $[a,b]$ پر بستہ تفاعل f کی تعریف کی گئی ہے۔اگر M اور m تفاعل f کے وقفہ $[a,b]$ پر ترتیب وار Sup اور Inf ہوں۔تب وقفہ $[a,b]$ پر کسی تقسیم P کے لیے

$$m(b-a) \leq L(P,f) \leq U(P,f) \leq M(b-a)$$

ثبوت۔ فرض کرو کہ $P = \{a = x_0, x_1, \ldots x_{r-1}, x_r \ldots x_n = b\}$ تقسیم ہے اور m_r اور M_r ترتیب وار r کے تحت وقفہ $I_{r-1} = [x_{r-1}, x_r]$ میں Inf اور Sup کو ظاہر کرتے ہیں۔ تب ہم جانتے ہیں کہ $m \leq m_r \leq M_r \leq M$

$$\sum_{i=1}^{n} m\Delta x_r \leq \sum_{i=1}^{n} m_r\Delta x_r \leq \sum_{i=1}^{n} M_r\Delta x_r \leq \sum_{i=1}^{n} M\Delta x_r$$

یعنی

$$m(b-a) \leq L(P,f) \leq U(P,f) \leq M(b-a)$$

$$\left[\begin{aligned} \because \sum_{i=1}^{n} m\Delta x_r &= m\sum_{i=1}^{n}(x_r - x_{r-1}) \\ &= m(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \dots x_n - x_{n-1}) \\ &= m(x_n - x_0) \\ &= m(b-a) \\ \sum_{i=1}^{n} M\Delta x_r &= M(b-a) \text{ اسی طرح} \end{aligned}\right]$$

پس $L(P,f)$ اور $U(P,f)$ بستہ سٹ تشکیل پاتے ہیں۔

رزلٹس:

1. وقفہ $[a,b]$ پر تمام تقسیم P کے لیے $L(P,f) \leq U(P,f)$
2. فرض کرو کہ f وقفہ $[a,b]$ پر ایک بستہ تفاعل ہے اور فرض کرو کہ P، f کی $[a,b]$ پر تقسیم کو ظاہر کرتی ہے اور P' تقسیم P کی نفیس تر تقسیم ہے۔تب $L(P',f) \geq L(P,f)$ اور $U(P',f) \leq U(P,f)$
3. $m(b-a) \leq L(P,f) \leq U(P,f) \leq M(b-a)$ یعنی تفاعل f بستہ ہے اور $L(P,f)$ اور $U(P,f)$ بستہ سٹ تشکیل پاتے ہیں۔

قضیہ 3۔ فرض کرو f, g دو بستہ تفاعلات ہیں جو $[a,b]$ پر تعریف کیے گئے ہیں اور مان لیجیے کہ P وقفہ $[a,b]$ پر تقسیم ہے۔تب

a) $U(P,f+g) \leq U(P,f) + U(P,g)$

b) $L(P,f+g) \geq L(P,f) + L(P,g)$

c) $w(P,f+g) \leq w(P,f) + w(P,g)$

ثبوت۔ دیا گیا ہے کہ f, g وقفہ $[a,b]$ پر بستہ تفاعلات ہیں P تقسیم ہے $P = \{a = x_0, x_1, \dots x_{r-1}, x_r \dots x_n = b\}$

فرض کرو کہ $m_r^{(1)}$ اور $M_r^{(1)}$ تفاعل f کے وقفہ I_r پر Inf اور Sup ہیں اور $m_r^{(2)}$ اور $M_r^{(2)}$ تفاعل g کے وقفہ I_r پر Inf اور Sup ہیں اور m_r اور M_r تفاعل $f+g$ کے وقفہ I_r پر Inf اور Sup ہیں۔

$M_r^{(1)}$ اور $M_r^{(2)}$ تفاعلات f, g کے وقفہ I_r پر Sup ہیں۔اس لیے تمام $x \in I_r$ کے لیے

$$f(x) \leq M_r^{(1)}، g(x) \leq M_r^{(2)}$$
$$f(x) + g(x) \leq M_r^{(1)} + M_r^{(2)}, \forall x \in I_r$$

اس لیے $M_r^{(1)} + M_r^{(2)}$ تفاعل $f+g$ کا وقفہ I_r پر بالائی بستہ ہے۔

لیکن M_r تفاعل $f+g$ کا وقفہ I_r پر اقل ترین بالائی بستہ ہے۔اس لیے وقفہ I_r پر تمام $r = 1,2,3,\dots,n$ کے لیے

$$M_r \leq M_r^{(1)} + M_r^{(2)}$$

اس لیے

$$U(P, f+g) = \sum_{i=1}^{n} M_r \Delta_r$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left(M_r^{(1)} + M_r^{(2)}\right) \Delta_r$$
$$= \sum_{i=1}^{n} M_r^{(1)} \Delta_r + \sum_{i=1}^{n} M_r^{(2)} \Delta_r$$
$$\leq U(P, f) + U(P, g)$$
$$\therefore U(P, f+g) \leq U(P, f) + U(P, g)$$

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$L(P, f+g) \geq L(P, f) + L(P, g)$$

اور

$$W(P, f+g) \leq U(P, f+g) - L(P, f+g)$$
$$\leq \{U(P, f) + U(P, g)\} - \{L(P, f) + L(P, g)\}$$
$$\leq \{U(P, f) - L(P, f)\} + \{U(P, g) - L(P, g)\}$$
$$= W(P, f) + W(P, g)$$

قضیہ 4۔ فرض کرو $f : I[a,b] \to R$ ایک بستہ تفاعل ہے اور P', P'' وقفہ $[a, b]$ پر دو تقسیم ہیں اس طرح کہ $P' \subset P''$ تب بتاؤ کہ

a) $U(P', f) \geq U(P'', f)$

b) $L(P', f) \leq L(P'', f)$

c) $w(P', f) \geq w(P'', f)$

ثبوت۔ چوں کہ f وقفہ $[a, b]$ پر بستہ تفاعل ہے۔ تب ایک حقیقی مثبت عدد یعنی $k \in R^+$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$|f(x)| < k, \forall x \in [a, b]$$

اس لیے f کا Sup وقفہ $[a, b]$ پر k سے چھوٹا یا برابر ہے۔ یعنی

$$\sup_{a \leq x \leq b} f(x) \leq k$$

فرض کرو کہ $P' = \{a = x_0, x_1, \ldots x_{r-1}, x_r \ldots x_n = b\}$ اور $P'' = \{a = x_0, x_1, \ldots x_{r-1}, y_1, x_r \ldots x_n = b\}$

اس طرح سے کہ P'' میں تقسیم P سے ایک نقطہ y_1 زائد ہے۔

فرض کرو کہ M_r, m_r تفاعل f کے Inf اور Sup کو ظاہر کرتے ہیں $I_r = [x_{r-1}, x_r]$ میں

فرض کرو کہ Q_2, Q_1 تفاعل f کے Suprema ہیں $[x_{r-1}, y_1]$، $[y_1, x_r]$ میں

فرض کرو ψ_2, ψ_1 تفاعل f کے Infima ہیں $[x_{r-1}, y_1]$ اور $[y_1, x_r]$ کے ترتیب وار

$$M_r \geq Q_1, Q_2 \text{ اور } m_r \geq \psi_1, \psi_2$$

P' کے r- ویں تحت وقفہ کے مزید دو یا دو سے زائد تحت وقفوں میں تقسیم کیے جاتے ہیں P'' میں اور باقی مساوی طور پر تحت وقفوں میں P'، P'' برابر ہوتے ہیں۔

$$U(P',f)-U(P'',f)=M_r(x_r-x_{r-1})-\{Q_1(y_1-x_{r-1})+Q_2(x_r-y_1)\}$$
$$\geq M_r(x_r-x_{r-1})-\{M_r(y_1-x_{r-1})+M_r(x_r-y_1)\}=0 \text{-----------}(1)$$

دوبارہ

$$U(P',f)-U(P'',f)=M_r\{\overline{x_r-y_1}+\overline{y_1-x_{r-1}}\}-\{Q_1(y_1-x_{r-1})+Q_2(x_r-y_1)\}$$
$$=(M_r-Q_1)(y_1-x_{r-1})+(M_r-Q_2)(x_r-y_1)$$

لیکن

$$0\leq(M_r-Q_1)\leq|M_r|+|Q_1|\leq 2k$$

مساوات(1) سے

$$0\leq(M_r-Q_2)\leq|M_r|+|Q_2|\leq 2k$$
$$\therefore U(P',f)-U(P'',f)\leq 2k(y_1-x_{r-1})+2k(x_r-y_1)$$
$$\leq 2k(x_r-x_{r-1})=2k\Delta_r\leq 2k\|P\| \text{-----------}(2)$$

پس مساوات(1)اور(2) سے

$$0\leq U(P',f)-U(P'',f)\leq 2k\|P\|$$

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$0\leq L(P'',f)-L(P',f)\leq 2k\|P\|$$

فرض کروا گر P'' مزید تقسیم ہوتا ہے P' کے تب ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$0\leq U(P',f)-U(P'',f)\leq 2\text{k}\|P\| \text{----------}(A)$$
$$0\leq U(P',f)-U(P'',f)\leq 2k\|P\|$$

اور

$$0\leq L(P'',f)-U(P',f)\leq 2k\|P\| \text{-----------}(B)$$

مساوات A اور مساوات B سے

$$U(P',f)\geq U(P'',f)$$

اور

$$L(P',f)\leq L(P'',f)$$

نیز

$$L(P',f)\leq L(P'',f)\leq U(P'',f)\leq U(P',f)$$

چوں کہ ہم جانتے ہیں کہ زیریں مجموعہ، تقسیم P کے کم یا مساوی ہوتے بالائی مجموعہ کے۔اس لیے

$$W(P',f)-W(P'',f)=\{U(P',f)-L(P',f)\}-\{U(P'',f)-L(P'',f)\}$$
$$=\{U(P',f)-U(P'',f)\}-\{L(P'',f)-L(P',f)\}\geq 0+0=0$$

$$\therefore \quad W(P',f) \geq W(P'',f)$$

پس مساوات (a)،(b) اور (c) ثابت ہو گئے ہیں۔

قضیہ 5۔ اگر P' اور ''P وقفہ $[a,b]$ پر دو تقسیم ہیں، تب بتاؤ کہ

$$L(P',f) \leq U(P'',f)$$

ثبوت۔ فرض کرو $P = P' \cup P''$

P نفیس تر تقسیم ہے دونوں P' اور P'' کی

$$L(P',f) \leq L(P,f) \text{ اور } U(P,f) \leq U(P'',f)$$

لیکن $L(P,f) \leq U(P,f)$ کوئی بھی تقسیم P کے لیے

$$\Rightarrow L(P',f) \leq U(P'',f)$$

اس لیے زیریں کا مجموعہ کم یا مساوی ہوتا ہے بالائی مجموعہ کے

قضیہ 6۔ اگر $f: I[a,b] \to R$ ایک بستہ تفاعل ہے P ایک تقسیم ہے۔ تب سٹ $\{L(P,f) | P \in \phi[a,b]\}$ بھی بستہ بالائی ہوگا اور سٹ $\{U(P,f) | P \in \phi[a,b]\}$ زیریں بستہ ہوگا۔

ثبوت۔ فرض کرو $P = \{a = x_0, x_1, \dots x_{n-1}, x_n = b\}$ ایک تقسیم ہے $[a,b]$ کی اور فرض کرو کہ M، m ترتیب وار f کے $[a,b]$ پر Supremum اور Infimum کو ظاہر کرتے ہیں اور M_r ، m_r ترتیب وار f کے I_r میں Supremum اور Infimum ہیں $r = 1,2,3, \dots$ کے لیے

ہم جانتے ہیں کہ $r = 1,2,3, \dots$ کے لیے $m \leq m_r \leq M_r \leq M$ ہوتا ہے۔ اس لیے

$$m\Delta_r \leq m_r\Delta_r \leq M_r\Delta_r \leq M\Delta_r$$

$r = 1,2,3, \dots$ کے لیے

$$\sum_{r=1}^{n} m\Delta_r \leq \sum_{r=1}^{n} m_r\Delta_r \leq \sum_{r=1}^{n} M_r\Delta_r \leq \sum_{r=1}^{n} M\Delta_r$$

$$m\sum_{r=1}^{n} \Delta_r \leq L(P,f) \leq U(P,f) \leq M\sum_{r=1}^{n} \Delta_r$$

$$m(b-a) \leq L(P,f) \leq U(P,f) \leq M(b-a)$$

پس ہر ایک تقسیم $[a,b]$ کے لیے

$$L(P,f) \leq M(b-a) \text{ اور } U(P,f) \geq m(b-a)$$

$M(b-a)$ بالائی بستہ ہوگا سٹ $\{L(P,f) | P \in \phi[a,b]\}$ کا اور $m(b-a)$ زیریں بستہ ہوگا سٹ $\{U(P,f) | P \in \phi[a,b]\}$

مثالیں:

1. غور کرو وقفہ $[a,b] = [1,4]$ اور فرض کرو P تقسیم ہے $P = \{1,2,3,4\}$ تب، اگر P کے تحت وقفے $I_1 = [1,2]; I_2 = [2,3]$

اور$I_3 = [3,4]$ہیں تب بتاؤ کہ $\|P\| = 1$

2. غور کرو$[a,b] = [0,1]$ اور$P = \{0,0.2,0.4,0.6,0.8,1\}$ اور$I_1 = [0,0.2]$، $I_2 = [0.2,0.4]$ $I_3 = [0.4,0.6]$، $I_4 = [0.6,0.8]$اور $I_5 = [0.8,1]$ ہیں، تب تحت وقفوں کا طول $\Delta_1 = 0.2$، $\Delta_2 = 0.2 = \Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5$ اور $\|P\| = 0.2$ ہوگا۔

3. غور کرو تفاعل f کی تعریف اس طرح کی گئی ہے $f(x) = \frac{1}{x}$ وقفہ $[1,2]$ پر اور $P = \{1,1.2,1.4,1.6,1.8,2\}$ اور $I_1 = [1,1.2]$، $I_2 = [1.2,1.4]$، $I_3 = [1.4,1.6]$، $I_4 = [1.6,1.8]$اور $I_5 = [1.8,2]$ کے تحت وقفے $I_1, I_2, \ldots, I_5$ ہیں جن میں ہر ایک کا طول $\Delta_r = 0.2,\ r = 1,2,3,4,5$ کے مساوی ہے۔ یہاں ہم مشاہدہ کررہے ہیں کہ $f(x) = \frac{1}{x}$ وقفہ $[1,2]$ پر ایک گھٹتا ہوا تفاعل ہے۔

$$M_1 = 1; M_2 = \frac{1}{1.2}; M_3 = \frac{1}{1.4}; M_4 = \frac{1}{1.6}; M_5 = \frac{1}{1.8}$$
$$m_1 = \frac{1}{1.2}; m_2 = \frac{1}{1.4}; m_3 = \frac{1}{1.6}; m_4 = \frac{1}{1.8}; m_5 = \frac{1}{2}$$

اب

$$\begin{aligned} U(P,f) &= \sum_{1}^{n} M_r \Delta_r \\ &= 0.2\left[1 + \frac{10}{12} + \frac{10}{14} + \frac{10}{16} + \frac{10}{18}\right] \\ &= 2\left[\frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16} + \frac{1}{18}\right] \\ &= 2[0.1 + 0.083 + 0.071 + 0.063 + 0.056] \\ &= 0.75 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(P,f) &= 0.2\left[\frac{10}{12} + \frac{10}{14} + \frac{10}{16} + \frac{10}{18} + \frac{10}{20}\right] \\ &= 2\left[\frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \frac{1}{20}\right] \\ &= 2[0.083 + 0.071 + 0.063 + 0.056 + 0.050] \\ &= 0.65 \end{aligned}$$

$$W(P,f) = U(P,f) - L(P,f) = 0.75 - 0.65 = 0.1$$

حل شدہ سوالات:

1. $f(x) = x^2$ کا $[0,2]$ میں x محور کے ساتھ بند علاقہ کا بالائی مجموعہ معلوم کرو۔

حل۔ فرض کرو کہ $f(x) = x^2$ کی تعریف $[0, 2]$ پر کی گئی ہے۔

غور کرو $b - a = 2 - 0 = 2$

$$\Delta_r = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}, \forall r = 1,2, \dots, n$$

اب

$$\text{بالائی مجموعہ} = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} f\left(\frac{2}{n} i\right) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{n} i\right)^2$$

$$= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{4}{n^2} (i)^2$$

$$= \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i)^2 = \frac{8}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2}$$

$$= \frac{8n^2 + 12n + 4}{3n^2}$$

جو کہ ایک مطلوبہ بالائی مجموعہ ہے۔

.2 $f(x) = x^2$ اور $x = 0, x = 2$ x کا محور کے ساتھ حد بند علاقہ کا زیریں مجموعہ معلوم کرو۔

حل۔ غور کرو $\Delta_r = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$

$$m_i = f\left(\frac{2}{n}(i-1)\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} \cdot \frac{4}{n^2} (i-1)^2$$

$$= \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^{n} \left(i^2 - 2i + 1\right)$$

$$= \frac{8}{n^3} \left[\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right]$$

$$= \frac{8}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{n(n+1)}{2} + n\right]$$

$$= \frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3.2\frac{n(n+1)}{3} + n\right]$$

$$= \frac{8}{n^3}\left[\frac{2n^3+3n^2+n}{6} - \frac{6n^2+6n}{6} + \frac{6n}{6}\right]$$

$$= \frac{8}{n^3}\left[\frac{2n^3-3n^2+n}{6}\right]$$

$$= \frac{8}{n^2}\left[\frac{2n^2-3n+1}{6}\right]$$

$$= \frac{8n^2-12n+4}{3n^2}$$

جو کہ ہمارا مطلوبہ زیریں مجموعہ ہے۔

3. $f(x) = x$ کا تقسیم $P = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ کے $L(P; f)$ اور $U(P, f)$ کی قدر معلوم کرو؟

حل۔ دی ہوئی تقسیم $P = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ اور $f(x) = x$ ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ تحت علاقے $I_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right]; I_2 = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]; I_3 = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ ہیں۔

ہم کو m_r اور M_r کی قدریں ہر ایک I_r کے تحت وقفہ کے معلوم کرنا ہے جہاں $r = 1$ تا 3

تحت وقفوں میں

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \Rightarrow m_1 = 0 \ and \ M_1 = \frac{1}{3}$$

$$I_2 = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \Rightarrow m_2 = \frac{1}{3} \ and \ M_2 = \frac{2}{3}$$

$$I_3 = \left[\frac{2}{3}, 1\right] \Rightarrow m_3 = \frac{2}{3} \ and \ M_3 = 1$$

$$\Delta_1 = M_1 - m_1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

$$\Delta_2 = M_2 - m_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\Delta_3 = M_3 - m_3 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

غور کرو

$$L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i$$

$$L(P,f) = \sum_{i=1}^{3} m_i \Delta_i$$

$$= m_1\Delta_1 + m_2\Delta_2 + m_3\Delta_3$$

$$= 0\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

اور

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{3} M_i \Delta_i$$

$$= M_1\Delta_1 + M_2\Delta_2 + M_3\Delta_3$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + 1.\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

4. منحنی $f(x) = 5 - x^2$ کا $[0, 2]$ پر زیریں علاقہ کا رقبہ زیریں ریمان تکمل کے مجموعہ $n = 5$ کو استعمال کرتے ہوئے معلوم کرو۔

حل۔ فرض کرو $f(x) = 5 - x^2$ یہاں ہم مشاہدہ کر رہے ہے کہ $f(x)$ ایک گھٹتا ہوا تفاعل ہے چوں کہ $f'(x) = -2x < 0$ جہاں $x > 0$

جیسا کہ $f(x)$ ایک گھٹتا ہوا تفاعل ہے $[0, 2]$ پر، ہم دائیں جانب کا ریمان کا مجموعہ محسوب کریں گے۔ زیریں ریمان مجموعہ معلوم کرنے کے لیے

پس $\Delta_x = \frac{b-a}{n}$ جہاں $a = 0$، $b = 2$ اور $n = 5$

$$\Delta_x = \frac{2-0}{5} = \frac{2}{5} \text{ اور } f(x_i) = 5 - \left[0 + \frac{2}{5}i\right]^2$$

جیسا کہ $x_i = a + \Delta x_i$ ہے۔

اب زیریں ریمان کا مجموعہ اس طرح حاصل کیا جاتا ہے

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{2}{5}\left[5 - \left(0 + \frac{2}{5}i\right)^2\right] = \frac{2}{5}\left[\left(5 - \frac{4}{25}\right) + \left(5 - \frac{16}{25}\right) + \left(5 - \frac{36}{25}\right) + \left(5 - \frac{64}{25}\right) + (5-4)\right]$$

$$= \frac{2}{5}[16.2] = 6.48$$

5. اگر $f(x) = x^2$ کی تعریف $[0,1]$ پر کی گئی ہے اور $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ تب محسوب کرو $L(P,f)$ اور $U(P,f)$

حل۔ فرض کرو $f(x) = x^2$ وقفہ $[0,1]$ پر

$a = 0$، $b = 1$ اس لیے $b - a = 1$

تحت وقفے

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{4}\right] \Rightarrow m_1 = 0 \text{ and } M_1 = \frac{1}{16}$$

$$I_2 = \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right] \Rightarrow m_2 = \frac{1}{16} \text{ and } M_2 = \frac{4}{16}$$

$$I_3 = \left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right] \Rightarrow m_3 = \frac{4}{16} \text{ and } M_3 = \frac{9}{16}$$

$$I_4 = \left[\frac{3}{4}, 1\right] \Rightarrow m_4 = \frac{9}{16} \text{ and } M_4 = 1$$

اب

$$L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

یہاں $\Delta x_i = \frac{1}{4}, \forall\, i = 1,2,3,4$

$$L(P,f) = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + m_3\Delta x_3 + m_4\Delta x_4$$

$$= 0\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{16}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{4}{16}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{9}{16}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{9}{16}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{14}{16}\right] = \frac{7}{32}$$

اب $U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{4} M_i \Delta x_i$$

$$= M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + M_3\Delta x_3 + M_4\Delta x_4$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{9}{16} + 1\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{30}{16}\right] = \frac{15}{32}$$

مطلوبہ جواب $L(P,f) = \frac{7}{32}$ اور $U(P,f) = \frac{15}{32}$

6. فرض کرو تفاعل f کی تعریف $[0,1]$ پر کی گئی ہے اس طرح کہ $f(x) = 2x - 1$ اور $P = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$

تب $L(P,f)$ اور $U(P,f)$ معلوم کرو۔

حل۔ فرض کرو کہ $f(x) = 2x - 1$ کی تعریف $[0,1]$ پر کی گئی ہے اور $P = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ تحت وقفے I_1, I_2, I_3 اور m_i اور M_i کو مندرجہ ذیل میں معلوم کریں گے:

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \Rightarrow m_1 = -1 \text{ and } M_1 = -\frac{1}{3}$$

$$I_2 = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{3} \text{ and } M_2 = \frac{1}{3}$$

$$I_3 = \left[\frac{2}{3}, 1\right] \Rightarrow m_3 = \frac{1}{3} \text{ and } M_3 = 1$$

$L(P,f)$ کی تعریف کے مطابق $L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ اس لیے

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^{3} m_i \Delta x_i$$

یہاں $\Delta x_i = \frac{1}{3}, \forall\, i$

$$= m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + m_3\Delta x_3$$

$$= \frac{1}{3}\left[-1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right] = -\frac{1}{3}$$

اور $U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ ہے۔ اس لیے

$$U(P, f) = \sum_{i=1}^{3} M_i \Delta x_i$$

$$= M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + M_3\Delta x_3$$

$$= \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 1\right] = \frac{1}{3}$$

پس مطلوبہ جواب $L(P,f) = -\frac{1}{3}$ اور $U(P,f) = \frac{1}{3}$ ہیں۔

.7 تفاعل $f(x) = \sin x$ کے $[0, \pi]$ پر زیریں ریمان کا مجموعہ، تقسیم $P = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\}$ کے لیے معلوم کرو؟

حل۔ فرض کرو $f(x) = \sin x$ وقفہ $[0, \pi]$ پر اور $P = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\}$

اس لیے تحت وقفے

$$I_1 = \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow m_1 = 0 \text{ and } M_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$I_2 = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \Rightarrow m_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \; and \; M_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$I_3 = \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right] \Rightarrow m_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \; and \; M_3 = 0$$

اب $L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ اس لیے

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^{3} m_i \Delta x_i$$

$$= m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + m_3 \Delta x_3$$

$$= 0\left(\frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{\pi\sqrt{3}}{3}\right)$$

8. مثال نمبر (7) میں دئے ہوئے تفاعل کا $U(P, f)$ معلوم کرو۔

حل۔

$$U(P, f) = \sum_{i=1}^{3} M_i \Delta x_i$$

$$= M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + M_3 \Delta x_3$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 0\right) = \left(\frac{\pi\sqrt{3}}{3}\right)$$

اہم نکات:

1. تقسیم کا نارم $\|p\| = Max\{\Delta x_r : r = 1,2,\ldots n\}$

2. $\|p\| \to 0 \;\; \Rightarrow n(P) \to \infty$

3. بالائی ریمان کا مجموعہ

$$\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \ldots + M_n \Delta x_n$$

4. زیریں ریمان کا مجموعہ

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n$$

5. بالائی ریمان کا مجموعہ یا بالائی ڈر باکس کو $U(P,f)$ سے ظاہر کرتے ہیں اور زیریں ریمان کا مجموعہ یا زیریں ڈر باکس کا مجموعہ کو $L(P,f)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

6. $L(P,f) \le U(P,f)$

7. $L(P,-f) = -U(P,f)$

8. $U(P,-f) = -L(P,f)$

9. $W(P,f)$ کو اہتزازی (Oscillatory) مجموعہ کہتے ہیں اور اس کی تعریف $U(P,f)$ اور $L(P,f)$ کا فرق ہوتا ہے یعنی

$$W(P,f) = U(P,f) - L(P,f)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} (M_r - m_r)\Delta x_r$$

10. اگر $f:[a,b] \to R$ ایک بستہ تفاعل ہے اور M, m ترتیب وار Sup اور Inf کو ظاہر کرتے ہیں $[a,b]$ پر تب

$$m(b-a) \le L(P,f) \le U(P,f) \le M(b-a)$$

11. اگر f اور g دو بستہ تفاعلات ہیں $[a,b]$ پر اور P تقسیم ہے تب

a) $U(P, f+g) \le U(P,f) + U(P,g)$

b) $L(P, f+g) \ge L(P,f) + U(P,g)$

c) $w(P, f+g) \le w(P,f) + w(P,g)$

13.4 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس باب میں ہم نے کئی نقاط پر بحث کی اور مختلف تعریفیں مثالات کے ذریعہ تقسیم کی خصوصیات سمجھی۔ ہم نے اہم مسئلوں کے ثبوت اور اس کی خصوصیات بھی پڑھیں۔ مثالوں کے اہم نقاط کو سمجھنے کے بعد ہم نے بالائی ریمان کے مجموعہ (بالائی ڈر باکس کا مجموعہ) اور زیریں ریمان کے مجموعہ (زیریں ڈر باکس کا مجموعہ) اور اہتزاز کے مجموعہ کی تعریف کو سمجھا۔

ہم نے اہم مسئلوں کے ثبوت اور اس کے متناظر مثالوں کو پڑھا اور اس پر عبور حاصل کیا۔ اہم نکات کی ایک فہرست بھی بطور حوالہ تیار کی گئی ہے۔

13.5 کلیدی الفاظ (Keywords)

بالائی ریمان تکمل، زیریں ریمان تکمل، اہتزازی

13.6 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

13.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. اگر f ایک بستہ تفاعل ہے $[a,b]$ پر اور P' نہایت ہی نفیس تقسیم ہے P کے تب $L(P',f) =$ ________

2. اگر f, g دو بستہ تفاعلات ہیں $[a,b]$ پر اور P تقسیم ہے تب $L(P, f+g) =$ ________

3. اگر $P \subset P^*$ تب $U(P^*, f) =$ ____________

4. فرض کرو $f(x) = x$ وقفہ $[a,b]$ پر اور $P=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right\}$ تب $L(P,f) =$ ________ اور $U(P,f) =$ ________

5. $L(P,f)$ ایک گھٹتا ہوا تفاعل کا اس طرح ہوگا ________

6. اگر f ایک بستہ تفاعل ہے $[a,b]$ پر اور $P=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},1\right\}$ تب $\|P\| =$ __________

a) 0　b) $\frac{1}{4}$　c) 1　d) ان میں سے کوئی نہیں

7. فرض کرو P تقسیم ہے $[a,b]$ کی اور f بستہ تفاعل ہے اور $P=\{0,0.1,0.3,0.5,0.8,1\}$ تب $\|P\| =$ _______

a) 0.3　b) 0　c) 1　d) 0.8

8. اگر f ایک بستہ تفاعل ہے $[a,b]$ پر اور $P \in \phi[a,b]$ تب $U(P,f+g) =$ ________

a) $U(P,f+g) \le U(P,f)+U(P,g)$　b) $U(P,f+g) = L(P,f)+L(P,g)$

c) $U(P,f+g) \ge U(P,f)+U(P,g)$　d) $U(P,f+g) \le L(P,f)+L(P,g)$

9. اہترازی مجموعہ $W(P,f)$ کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے

a) صفر　b) $\sum_{r=1}^{n}(M_r+m_r)\Delta x_r$　c) $U(P,f)-L(P,f)$　d) کوئی نہیں

10. زیریں ریمان مجموعہ $f(x) = x^2$، وقفہ $[2,3]$ میں، تقسیم $P=\{2,2.2,2.4,2.6,2.8,3\}$ کے ساتھ

a) 1　b) 0　c) 5.84　d) کوئی نہیں

11. زیریں ریمان مجموعہ $f(x) = 5 - x^2$ اور تقسیم $P=\left\{0,\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},1\right\}$ میں

a) 0　b) 6.48　c) 5　d) کوئی نہیں

12. اگر $f(x) = 2x - 1$، وقفہ $[0,1]$ میں ہو اور $P=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right\}$ تب $L(P,f)$ ہے

a) $\frac{1}{3}$　b) $-\frac{1}{3}$　c) صفر　d) کوئی نہیں

13. اگر f گھٹتا ہوا تفاعل ہے $[a,b]$ پر تب زیریں ریمان کا مجموعہ محسوب کرو۔۔۔۔۔۔

a) دائیں ریمان کا مجموعہ　b) بائیں ریمان کا مجموعہ　c) دونوں　d) نہ a) اور نہ b)

14. اگر P_1, P_2، $[a,b]$ کی تقسیم ہیں اور $P_1 \subset P_2$ تب P_2 کو ______________ کہتے ہیں۔

a) P_1 کا Infimum　b) P_1 کی تقسیم　c) P_1 کا Supremum　d) نفیس تر تقسیم

13.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

1. تقسیم کی تعریف کرواور نارم کی تقسیم کی تعریف معہ مثالات لکھیے۔
2. بالائی ریمان کے مجموعہ کی تعریف کرو مع مثالات۔
3. زیریں ریمان کے مجموعے کی تعریف کرو مع مثال
4. اگر P', P'' وقفہ $[a,b]$ کی تقسیم ہیں تب بتاؤ کہ $L(P', f) \le U(P'', f)$
5. اگر $f(x) = x$ وقفہ $[0,1]$ پر $n = 5$ کے ساتھ تب $L(P,f)$ اور $U(P,f)$ کی قدریں معلوم کرو۔

13.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات(Long Answer Type Questions)

1. اگر $f(x) = 5 - x^2$ $[0,2]$ کا $n = 6$ کے ساتھ $L(P,f)$ اور $U(P,f)$ کی قدریں معلوم کرو۔
2. اگر $f(x) = 2x - 1$، وقفہ $[1,2]$ $n = 6$ کے ساتھ $L(P,f)$ اور $U(P,f)$ کی قدریں معلوم کرواور نیز $W(P,f)$ کو محسوب کرو۔
3. اگر f, g دو بستہ تفاعلات ہیں $[a,b]$ پر اور P تقسیم ہے تب بتاؤ کہ
   a) $U(P, f+g) \le U(P,f) + U(P,g)$
   b) $L(P, f+g) \ge L(P,f) + L(P,g)$
   c) $W(P, f+g) \le W(P,f) + W(P,g)$
4. فرض کرو f بستہ تفاعل ہے $[a,b]$ پر اور m اور M، Inf اور Sup ہیں f کے $[a,b]$ پر تب بتاؤ کہ

$$m(b-a) \le L(P,f) \le U(P,f) \le M(b-a)$$

13.7 تجویز کردہ اکتسابی مواد(Suggested Learning Resources)

1. Introduction to Real Analysis, Donald R. Sherbert Robert G. Bartle 4th Edition , 2014
2. Elements Of Real Anyalsis, Narayan Shanti and Raisinghania M.D., 2003
3. Real Analysis, V. Karunakaran, 2011
4. Real Analysis, N.L. Carothers, 2006

اکائی 14۔ ریمان تکمل-II

(Reimann Integration -II)

اکائی کے اجزا

14.0 تمہید (Introduction)

گذشتہ اکائی میں ہم ریمان کے سوالات کے تصورات کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ موجودہ اکائی میں ہم کو بالائی اور زیریں ریمان تکملات کی تعریفات، مثالوں اور اس سے جڑے ہوئے مسئلوں پر بحث کرنا ہے۔ ریمان تکمل کی تعریف، ریمان تکمل پذیری (R-Integrability) کی ضروری اور کافی شرائط سیکھیں گے۔ یک رنگی اور مسلسل تفاعلات اور R-تکمل پذیری سے جڑے ہوئے ڈرباکس کے مسئلے اور دوسرے مسئلوں کے بارے میں سیکھیں گے۔ اُس کے علاوہ R-تکمل کی دوسری صورت کے بارے میں بھی معلومات حاصل کریں گے۔ تمام تصورات کا مثالوں کے ذریعہ مشاہدہ کریں گے۔

14.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کو سیکھنے کے بعد طلبا، ریمان تکملات کے بالائی تکمل اور نچلی تکمل کو جانیں گے۔ ریمان تکملات کے بنیادی تصورات اور مختلف سوالات کو حل کرنے کے قابل ہوں گے۔ حاصل شدہ معلومات کی مدد سے طلبا ریمان تکملات سے جڑے ہوئے سوالات کو سمجھیں گے اور حل کرنے کے قابل ہوں گے۔ چند اہم مسئلوں کے ثبوت کو سمجھنے کے قابل بن جائیں گے۔

14.2 ریمان تکمل (Riemann Integral)

14.2.1 بالائی اور زیریں ریمان تکمل (Upper and Lower Riemann Integral)

تعریفات:

بالائی تکمل (Upper Integral): فرض کرو کہ $f : I[a,b] \to R$ ایک بستہ تفاعل ہے اور $P = \{a = x_0, x_1, \ldots x_{n-1}, x_n = b\}$، وقفہ $[a,b]$ کی تقسیم ہے۔تب f کا وقفہ $[a,b]$ میں بالائی ریمان تکمل، اس طرح تعریف شدہ ہے کہ $U(P, f)$ کا انفیمم (Infimum)۔اس کو $\bar{\int_a^b} f$ یا $\bar{\int_a^b} f(x)dx$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

زیریں تکمل (Lower Integral): وقفہ $[a,b]$ میں f کا زیریں تکمل اس طرح تعریف شدہ ہے کہ $L(P, f)$ کا سپریمم (Supremum) اس کو $\underline{\int_a^b} f$ یا $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

مان لو کہ f وقفہ $[a,b]$ میں حد بند تفاعل (Bounded Function) ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ $L(P, f)$ کے تمام اعداد کا سٹ، بہ لحاظ وقفہ $[a,b]$ کے P جزوی حصوں سے $M(b-a)$ پر بالائی حد بند ہے۔اس طرح $L(P, f)$ کا ایک سپریمم وجود رکھتا ہے۔ $L(P, f)$ کا یہ سپریمم، زیریں ریمان تکمل (Lower Riemann Integral) کہلاتا ہے یا مختصر f کا زیریں R - تکمل (Lower R- Integral)، وقفہ $[a,b]$ میں کہلاتا ہے اس کو $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

اسی طرح سے $U(P,f)$ کے تمام اعداد کا سٹ، زیریں حد بند $m(b-a)$ ہے۔تب اس میں ایک انفیمم(Infimum)وجود رکھتا ہے تو یہ انفیمم، بالائی ریمان تکمل(Upper Riemann Integral) کہلاتا ہے یا مختصراً اس کو f کا بالائی R تکمل وقفہ $[a,b]$ میں کہتے ہیں۔اس کو $\bar{\int_a^b} f(x)dx$ سے ظاہر کرتے ہیں۔اس طرح $\int_{\underline{a}}^b f(x)\,dx = \sup\{L(P,f):\ P \in \phi[a,b]\}$ اور

$$\bar{\int_a^b} f(x)\,dx = Inf\{U(P,f): P \in \phi[a,b]\}$$

نوٹ:

1) $\int_{\underline{a}}^b (-f) = -\int_a^{\bar{b}} f$

2) $\int_a^{\bar{b}} (-f) = -\int_{\underline{a}}^b f$

14.2.2 ریمان تکمل (Riemann Integral)

تعریف: فرض کرو کہ ایک تفاعل f وقفہ $[a,b]$ میں تعریف شدہ ہے اور f ایک حد بند(Bounded)ہے۔تب f ایک ریمان قابل تکمل (Riemann R-Integrable)ہے یا f وقفہ $[a,b]$ پر R قابل تکمل ہے اگر $\int_{\underline{a}}^b f = \bar{\int_a^b} f$ اور ان کی مشترکہ قدر کو f کا وقفہ $[a,b]$ میں R تکمل کہتے ہیں اور اس کو $\int_a^b f$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

اب ہم $R[a,b]$ کے تمام حد بند تفاعلات کی جماعتوں جو وقفہ $[a,b]$ پر تعریف شدہ ہیں، ظاہر کرتے ہیں۔جو وقفہ $[a,b]$ پر ریمان قابل تکمل ہیں۔اعداد a اور b ترتیب وار تکمل کے زیریں اور بالائی حد(Limit) کہلاتی ہیں۔

تفاعل f کے وقفہ $[a,b]$ پر تکمل پذیری کے حدود درجہ ذیل ہیں:

(i) تفاعل f حد بند(Bounded)ہوتا ہے۔

(ii) تکمل کا وقفہ متناہی(Finite)ہوتا ہے اس لیے کوئی بھی متناہی نقاط متناہی نہیں ہوتے۔

(iii) ہر ایک حد بند تفاعل "تکمل پذیر" ہونا ضروری نہیں ہے یعنی $\int_{\underline{a}}^b f \neq \int_a^{\bar{b}} f$

نوٹ:

1. ایک حد بند تفاعل f ریمان قابل تکمل ہوتا ہے وقفہ $[a,b]$ پر اگر اور صرف اگر $\int_{\underline{a}}^b f = \int_a^{\bar{b}} f$

2. اگر f ایک حد بند تفاعل ہے اس طرح سے کہ $\int_{\underline{a}}^b f \neq \int_a^{\bar{b}} f$ تب f ایک وقفہ $[a,b]$ پر "ریمان قابل تکمل" نہیں ہوتا۔

مثال 1۔ ایک مستقل تفاعل $f(x)=k$ ، R قابل تکمل وقفہ $[a,b]$ پر

فرض کرو کہ $f(x)=k$ ، $\forall x\in[a,b]$ ایک مستقل تفاعل ہے، جہاں $k\in R$

تب یہ صاف ہوگا کہ f وقفہ $[a,b]$ پر حد بند ہے اور $\inf f = k = \sup f$

فرض کرو کہ $P=\{a=x_0, x_1, \ldots x_{n-1}, x_n=b\}$ ایک تقسیم ہے $[a,b]$ پر تب یہ مان لو کہ

$$\bar{\int_a^b} f = inf\,\{k\Delta x_1 + k\Delta x_2 + \ldots. + k\Delta x_n\}$$

$$= inf\;\; k\,\{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots. + \Delta x_n\}$$

$$= inf\;\; k(b-a) \ldots\ldots(1)$$

یہ بھی مان لو کہ

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{k\Delta x_1 + k\Delta x_2 + \ldots. + k\Delta x_n\}$$

$$= \sup\; k\,\{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots. + \Delta x_n\}$$

$$= \sup\; k(b-a) \ldots\ldots(2)$$

تب مساواتوں (1) اور (2) سے $k \in R[a,b]$ اور $\int_a^b k = k(b-a)$

مثال2۔ فرض کرو کہ $f(x)=x$ وقفہ $[0,1]$ پر تعریف شدہ ہے تب $\underline{\int_0^1} xdx$ اور $\bar{\int_0^1} xdx$ کی قدر محسوب کرنا اس طرح کہ تکمل کو n مساوی حصوں میں تقسیم کیا جائے تب بتاؤ کہ $f \in R[0,1]$

حل۔ فرض کرو کہ $f(x)=x$ وقفہ $[0,1]$ پر تعریف شدہ ہے اور $P=\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots \frac{n-1}{n}, 1\right\}$ اب اس میں $m_r = \frac{r-1}{n}$ ،

$M_r = \frac{r}{n}$ اور $\Delta x_r = \frac{1}{n}(r=1,2,\ldots.n)$

$$\therefore \quad L(P,f) = \left[0.\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{2}{n}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{3}{n}\left(\frac{1}{n}\right) +, \ldots. \frac{n-1}{n}\frac{1}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}[1+2+\ldots+(\mathrm{n}-1)] = \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{n-1}{2n}$$

اور

$$U(P,f) = \left[\frac{1}{n}.\frac{1}{n} + \frac{2}{n}\frac{1}{n} + \ldots + \frac{n}{n}\frac{1}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}[1+2+\ldots+\mathrm{n}] = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}$$

اب

$$\int_{0}^{1} x\,dx = \underset{\|P\|\to 0}{Lt}\, L(P,f) = \underset{n\to\infty}{Lt}\, \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}$$

اور

$$\overline{\int_{0}^{1}} x\,dx = \underset{\|P\|\to 0}{Lt}\, U(P,f) = \underset{n\to\infty}{Lt}\, \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\because \quad \underline{\int_{0}^{1}} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\overline{\int_{0}^{1}} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f \in R[0,1]$$

14.3 ریمان تکمل پر قضیے(Theorems on Riemann Integral)

14.3.1 ڈرباکس کا قضیہ(Darboux Theorem)

اگر $f : I[a,b] \to R$ ایک حد بند تفاعل ہے تب ہر ایک $\in > 0$ کے لیے $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$U(P,f) < \int_{a}^{\bar{b}} f(x)\,dx + \in \text{ (i)}$$

$$L(P,f) > \int_{\bar{a}}^{b} f(x)\,dx - \in \text{ (ii)}$$

اور ہر ایک تقسیم P کے ساتھ $\|P\| < \delta$ کے لیے

ثبوت۔ دیا گیا ہے کہ f ایک حد بند علاقہ تفاعل ہے تب ایک رکن $M > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $|f(x)| \le M$، تمام $x \in [a,b]$ کے لیے مان لو کہ دیے گئے $\varepsilon > 0$ کے لیے $\int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx$ ، $U(P,f)$ کا تفیم(Infimum) ہے تمام P تقسیم کے لیے تب ایک تقسیم P اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$U(P_1,f) < \int_{a}^{\bar{b}} f + \frac{\varepsilon}{2} \ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

اب فرض کرو کہ $P_1 = \{a = x_0, x_1, \ldots x_{n-1}, x_n = b\}$ اس طرح کہ P_1 میں جملہ $(n+1)$ نقاط موجود ہیں۔ تب کوئی $\delta > 0$ اس طرح لیں کہ

$$\delta < \frac{\varepsilon}{2M(n-1)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(II)}$$

اب یہ مان لو کہ تقسیم P ، $\delta > \|P\|$ کے ساتھ اس طرح ہو کہ P کے تحت وقفوں کو گروپس میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

(i) وہ تحت وقفے جس میں کچھ x_r اس کے اندرونی حصہ(Interior) میں ہوگا اور یہ یقینی طور پر عدد $(n-1)$ ہوگا۔

(ii) تحت وقفے جس میں P_1 کے تحت وقفے پائے جاتے ہیں تب جو وقفہ (I) کے اوپر لیا گیا ہو $U(P, f) = \sum M_r \Delta x_r + \sum M_r \Delta x_r$
جو وقفہ (II) کے اوپر لیا گیا ہو

$$= U_1 + U_2 \text{ ....(III)}$$

لیکن (I) کے وقفوں کی جملہ تعداد $(n-1)$ سے زیادہ نہیں ہو سکتی۔

$$U_1 \le (n-1)\delta M < (n-1)\frac{\varepsilon}{2M(n-1)}.M = \frac{\varepsilon}{2} \text{.........}(IV)$$

اب مساوات (II) سے $U(P, f)$ کا مجموعہ $U(P, f)$ سے زیادہ نہیں ہو سکتا۔

$$U_2 \le U(P,f) < \int_a^{\bar{b}} f + \frac{\varepsilon}{2} \text{........ (V)}$$

تب مساواتیں (III)، (IV) اور (V) سے

$$U(P, f) < \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^{\bar{b}} f + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$U(P, f) < \int_a^{\bar{b}} f + \varepsilon \text{.......}(VI)$$

(VI) سے پتہ چلتا ہے کہ تمام P کے تقسیم $\|P\| < \delta$ کے ساتھ اسی طرح سے ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$L(P, f) > \int_{\underline{a}}^{b} f - \varepsilon$$

14.3.2 تکمل پذیری کے لیے ضروری اور کافی شرط

(Necessary and Sufficient Condition for Integrability)

بیان: ایک تفاعل $f : [a,b] \to R$ حد بند تفاعل ہے تب f وقفہ $[a,b]$ پر تکمل پذیر ہوتا ہے اگر اور صرف اگر ہر ایک $\varepsilon > 0$ کے لیے ایک تقسیم P وقفہ $[a,b]$ کا، اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $0 \le U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$

ثبوت۔

ضروری شرط (Necessary Condition)

فرض کرو کہ f "ایک ریمان تکمل پذیر" تفاعل ہے وقفہ $[a,b]$ پر تب

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x) = \int_a^{\bar{b}} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \text{ -------(1)}$$

فرض کرو کہ $\varepsilon > 0$ کے لیے ڈرباکس مسئلہ سے ایک رکن $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$U(P, f) < \int_a^{\bar{b}} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} \text{ -------(2)}$$

$$L(P,f) > \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} \text{-------}(3)$$

ہرایک تقسیم P کے لیے $\|P\| < \delta$ کے ساتھ

اب مساواتوں (1) اور (2) سے

$$U(P,f) < \int_{a}^{b} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

اور مساواتوں (1) اور (3) سے

$$\int_{a}^{b} f(x)dx < L(P,f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

اس طرح

$$U(P,f) < \left[L(P,f) + \frac{\varepsilon}{2}\right] + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$U(P,f) - \mathrm{L}(P,f) < \varepsilon$$

اس کے علاوہ $U(P,f) - \mathrm{L}(P,f) \geq 0$ اس لیے

$$0 \leq U(P,f) - \mathrm{L}(P,f) < \varepsilon$$

کافی شرط (Sufficient Condition)

ہرایک $\varepsilon > 0$ کے لیے وقفہ $[a,b]$ میں ایک تقسیم P اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $0 \leq U(P,f) - \mathrm{L}(P,f) < \varepsilon$

تعریف سے

$$\int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx = \inf\{U(P,f) \ / \ P \in [a,b]\}$$

$$\Rightarrow \int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx \leq U(P,f) \text{-------}(1)$$

تعریف سے

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = \sup\{L(P,f) \ / \ P \in [a,b]\}$$

$$\Rightarrow \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx \geq L(P,f)$$

$$-\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx \leq -L(P,f) \text{-------}(2)$$

مساوات (1) اور (2) سے

$$\int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx - \int_{\bar{a}}^{b} f(x)dx \le U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$$

اور بھی

$$\int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx - \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx \ge 0$$

تب ہر ایک $\varepsilon > 0$ کے لیے

$$-\varepsilon \le \int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx - \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx < \varepsilon$$

$$\int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx = \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx$$

تب f "ریمان تکمل پذیر" ہے وقفہ $[a,b]$ پر

ریمارک: $f:[a,b]$ تب ہر ایک $\varepsilon > 0$ کے لیے $P \in \phi[a,b]$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $0 \le w(P,f)$

مثال 1۔ بتاؤ کہ تفاعل $f(x)=1$ جب کہ $x \in Q$ اور $f(x)=-1$ جب کہ $x \in R-Q$ "ایک ریمان تکمل پذیر" نہیں ہے وقفہ $[a,b]$ پر

حل۔ تفاعل f کی دی گئی تعریف سے

$$-1 \le f(x) \le 1, \quad \forall x \in [a,b]$$

تب f ایک حد بند تفاعل وقفہ $[a,b]$ پر ہوگا اور $\inf f = -1$ اور $Sup\ f = 1$

فرض کرو کہ $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots x_n = b\}$ وقفہ $[a,b]$ اور I_r میں ایک تقسیم ہے، تب m_r اور M_r ترتیب وار I_r پر f کے inf اور Sup ہوں گے۔ $r = 1,2,3 \ldots n$ جب کہ , $M_r = 1\ m_r = -1$

$$L(P,f) = \sum_{1}^{n} m_r \Delta x_r = \sum_{1}^{n} (-1)\Delta x_r = -(b-a)$$

اور

$$U(P,f) = \sum_{1}^{n} M_r \Delta x_r = \sum_{1}^{n} \Delta x_r = (b-a)$$

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = -(b-a)$$

تب $L(P,f) = -(b-a)$ ایک مستقل ہوگا۔

$$\bar{\int_a^b} f(x)dx = (b-a)$$

تب $U(P, f) = (b-a)$ مستقل ہوگا۔

ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ دونوں بالائی اور نچلی ریمان تکمل وجود رکھتے ہیں۔ لیکن وہ مساوی نہیں ہیں۔اس لیے f وقفہ $[a,b]$ پر "ریمان تکمل پذیر" نہیں ہے۔

مثال2۔ اگر f ایک تفاعل اس طرح تعریف شدہ f کا وقفہ $[0,1]$ پر اس طرح کہ

x غیر ناطق ہے جب کہ $f(x) = 0$

x ناطق ہے جب کہ $f(x) = 1$

تب $\underline{\int_0^1} f$ اور $\bar{\int_0^1} f$ محسوب کرو اور مزید بتاؤ کہ $f \notin R[0,1]$

حل۔ تفاعل f صاف طور پر بستہ تفاعل ہے اور $x \in [0,1]$ تمام $0 \le f(x) \le 1$

اگر P کوئی تقسیم ہے تب کوئی تحت وقفہ (Subinterval) وقفہ P $[x_{r-1}, x_r]$ میں

$m_r = 0$ اور $M_r = 1$ ، تمام $r = 0,1,2,......n$ کے لیے

$$L(P, f) = [0.\Delta x_1 + 0.\Delta x_2 + ... + 0.\Delta x_n] = 0$$

اور

$$U(P, f) = [1.\Delta x_1 + 1.\Delta x_2 + ... + 1.\Delta x_n]$$
$$= [\Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_n] = 1$$

$$\therefore \underline{\int_0^1} f = \lim_{n\to\infty} L(P, f) = 0$$

اور

$$\therefore \bar{\int_0^1} f = \lim_{n\to\infty} U(P, f) = 1$$

$$\Rightarrow \underline{\int_0^1} f \neq \bar{\int_0^1} f$$

اس لیے $f \notin R[0,1]$

مثال3۔ بتاؤ کہ $f(x) = (3x+1)$ وقفہ $[1,2]$ پر تکمل پذیر ہوتا ہے اور $\int_1^2 (3x+1)dx = \frac{11}{2}$

حل۔ فرض کرو کہ $f(x)=(3x+1)$ وقفہ $[1,2]$ پر ایک بستہ تفاعل ہے۔ غور کرو کہ تقسیم

$P=\left\{1,1+\frac{1}{n},1+\frac{2}{n},\ldots+1+\frac{r}{n},\ldots,2\right\}$ ہے۔

غور کرو کہ r واں تحت وقفہ $I_r=\left[1+\frac{r-1}{n},1+\frac{r}{n}\right]$ اور اس کا ہر ایک اصول کا تحت وقفہ $\Delta_r=\frac{1}{n}$

چوں کہ $f(x)=(3x+1)$ ایک بڑھتا ہوا تفاعل ہے $[1,2]$ پر

$$M_r=\sup\ of\ \ f\ \ in\ I_r=3\left(1+\frac{r}{n}\right)+1=4+\frac{3r}{n}$$

$$m_r=\inf\ \ of\ \ f\ in\ I_r=3\left(1+\frac{r-1}{n}\right)+1$$

$$=4+\left(\frac{3(r-1)}{n}\right)$$

$$U(P,f)=\sum_{r=1}^{n}M_r\Delta x_r=\sum_{1}^{n}\left(4+\frac{3r}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$$=\sum_{r=1}^{n}\frac{4}{n}+\sum_{r=1}^{n}\frac{3}{n^2}(r)$$

$$=\frac{4}{n}(n)+\frac{3}{n^2}\sum_{r=1}^{n}r$$

$$=4+\frac{3}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=4+\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$L(P,f)=\sum_{r=1}^{n}m_r\Delta x_r=\sum_{1}^{n}\left(4+\frac{3(r-1)}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$$=\frac{4}{n}\sum_{r=1}^{n}1+\frac{3}{n^2}\sum_{r=1}^{n}(r-1)$$

$$=\frac{4}{n}(n)+\frac{3}{n^2}\frac{(n-1)n}{2}$$

$$=4+\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$\underline{\int_{1}^{2}}f(x)dx=\underset{n\to\infty}{Lt}L(P,f)=\underset{n\to\infty}{Lt}\left[4+\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=4+\frac{3}{2}=\frac{11}{2}$$

$$\overline{\int_{1}^{2}}f(x)dx=\underset{n\to\infty}{Lt}U(P,f)=\underset{n\to\infty}{Lt}\left[4+\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= 4 + \frac{3}{2} = \frac{11}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\int_{1}^{2}} f = \overline{\int_{1}^{2}} f$$

اس لیے $f \in R[1,2]$ اور $\int_1^2 (3x+1)dx = \frac{11}{2}$

مثال 4۔ اگر $f(x) = x^2$ ، $[0,a]$ پر، $a > 0$ تب بتاؤ کہ $f \in R[0,a]$ اور $\int_0^a f$ معلوم کرو۔

حل۔ تقسیم P کو غور کرو (اس میں n مساوی حصہ ہیں)

$$P = \left\{0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \ldots, \frac{(n-1)a}{n}, \frac{na}{n} = a\right\}$$

اب $m_r = \frac{(r-1)a^2}{n^2}$ ، $M_r = \frac{a^2r^2}{n^2}$

$$L(P,f) = \left[0.\frac{a}{n} + \frac{1^2.a^2}{n^2}\frac{a}{n} + \frac{2^2.a^2}{n^2}\frac{a}{n} + \ldots + \frac{(n-1)^2.a^2}{n^2}\frac{a}{n}\right]$$

$$= \frac{a^3}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2\right]$$

$$= \frac{a^3}{n^3}\left[\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right] = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}.a^3$$

$$U(P,f) = \left[\frac{a^2}{n^2}.\frac{a}{n} + \frac{2^2.a^2}{n^2}\frac{a}{n} + \frac{3^2.a^2}{n^2}\frac{a}{n} + \ldots + \frac{n^2.a^2}{n^2}\frac{a}{n}\right]$$

$$= \frac{a^3}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right]$$

$$= \frac{a^3}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.a^3$$

$$\underline{\int_0^a} x^2 dx = \underset{n\to\infty}{Lt} \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}.a^3 = \frac{a^3}{3}$$

$$\overline{\int_0^a} x^2 dx = \underset{n\to\infty}{Lt} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.a^3 = \frac{a^3}{3}$$

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$$

مثال5۔ اگر $f(x)=x+x^2$ ، x کی ناطق قدروں کے لیے $[0,2]$ پر اور $f(x)=x^2+x^3$ ، n کی غیر ناطق قدروں کے لیے $[0,2]$ پر ترتیب بالائی اور زیریں ریمان تکمل $[0,2]$ پر محسوب کرو۔

حل۔

$$\underline{\int_0^2} f=\int_0^1 (x^2+x^3)dx+\int_1^2 (x+x^2)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{4}{2}+\frac{8}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{53}{12}$$

$$\overline{\int_0^2} f=\int_0^1 (x+x^2)dx+\int_1^2 (x^2+x^3)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right]_1^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{8}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{83}{12}$$

مثال6۔ مندرجہ ذیل تفاعل f کی تعریف

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ جب کہ x ناطق عدد ہے

$f(x)=1-x$ جب کہ x غیر ناطق عدد ہے

کے لیے بالائی اور زیریں R کے تکملات معلوم کرو۔

حل۔ غور کرو

$$(1-x^2)-(1-x)^2=2x-2x^2$$
$$=2x(1-x)،\forall x\in(0,1)$$

یعنی

$$\sqrt{1-x^2}>1-x,\forall x\in(0,1)$$

لہٰذا

$$\underline{\int_0^1} f=\int_0^1 (1-x)dx=\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\overline{\int_0^1} f=\int_0^1 f\neq\overline{\int_0^1} f\Rightarrow f\notin R[0,1]$$

مثال7۔ بتاؤ کہ تفاعل $f(x)=\sin x$ ، $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ میں تکمل پذیر ہے اور نیز بتاؤ کہ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=1$

حل۔ فرض کرو کہ $f(x)=\sin x$

صاف طور پر ظاہر ہوتا ہے کہ f بستہ تفاعل ہے $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ پر

تقسیم پر غور کرو $P = \left\{0, \frac{\pi}{2n}, \frac{2\pi}{2n}, \ldots \frac{r\pi}{2n}, \ldots\ldots \frac{n\pi}{2n}\right\}$

r-واں تحت وقفہ $I_r = \left[\frac{(r-1)\pi}{2n}, \frac{r\pi}{2n}\right]$ ہے۔ اب $\Delta_r = \frac{\pi}{2n}$

یہاں $f(x)$ ایک بڑھتا ہوا تفاعل ہے $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ پر

$$M_r = Sup\ of\ f on\ I_r = sin\left(\frac{r\pi}{2n}\right)$$

$$m_r = Inf\ \ of\ f on\ I_r = sin\frac{(r-1)\pi}{2n}$$

$$U(P,f) = \sum_{r=1}^{n} M_r\Delta_r = \sum_{r=1}^{n}\left(\sin\frac{r\pi}{2n}\right)\times\frac{\pi}{2n}$$

$$= \frac{\pi}{2n}\left[\sin\frac{\pi}{2n} + \sin\frac{2\pi}{2n} + \ldots + \sin\frac{n\pi}{2n}\right]$$

$$U(P,f) = \frac{\pi}{2n}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{(n-1)}{2}.\frac{\pi}{2n}\right)\sin\frac{n\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}\right]$$

$$= \frac{\frac{\pi}{2n}\sin\frac{(n+1)}{4n}\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4n}}$$

$$= \frac{\frac{\pi}{2\sqrt{2}n}\left\{\sin\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{4n} + \cos\frac{\pi}{4}.\sin\frac{\pi}{4n}\right\}}{\sin\frac{\pi}{4n}}$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}n}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4n} + 1\right)$$

$$= \frac{\pi}{4n}\left(\cos\frac{\pi}{4n} + 1\right)$$

اسی طرح

$$L(P,f) = \frac{\pi}{4n}\left(\cot\frac{\pi}{4n} - 1\right)$$

$$\therefore \underline{\int_{0}}^{\pi/2} f(x)dx = \underset{n\to\infty}{Lt} L(P,f) = \underset{n\to\infty}{Lt}\frac{\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{Tan\left(\frac{\pi}{4n}\right)} - \underset{n\to\infty}{Lt}\left(\frac{\pi}{4n}\right) = 1 - 0 = 1$$

اور

$$\overline{\int_{0}^{\pi/2}} f(x)dx = \underset{n\to\infty}{Lt} U(P,f) = 1$$

$$\therefore \underline{\int_{0}}^{\pi/2} f(x)dx = \int_{0}^{\overline{\pi/2}} f(x)dx = 1$$

اس لیے $f(x)=\sin x$ تکمل پذیر ہے $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ پر اور بالآخر $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$

14.4 ریمان تکمل کی دوسری تعریف (Second Definition of Riemann Integration)

تعریف: فرض کرو کہ f تفاعل کی تعریف اس طرح کی گئی ہے $f:[a,b]\to R$ اور تقسیم $P=\{a=x_0,x_1,x_2,...x_n=b\}$ تقسیم ہے $[a,b]$ پر اور ایک سٹ $\{Q_1,Q_2,...Q_n\}\subset[a,b]$ ایسا ہے $x_{r-1}\le Q_r\le x_r$ تمام $1 \quad r=n$

تب تفاعل f کو ریمان تکمل پذیر کہتے ہیں $[a,b]$ پر اگر $\varepsilon>0$ ایک $\delta>0$ موجود ہوتا ہے کوئی حقیقی عدد l کے ساتھ $\left|\sum_1^n f(Q_r)\delta_r - l\right|<\varepsilon$ تمام تقسیم $[a,b]$ پر

$\|P\|<\delta$ کے ساتھ اور $Q_r\in[x_{r-1},x_r]$ عدد l کو f کا $[a,b]$ پر ریمان تکمل کہتے ہیں اور اس کو $\int_a^b f(x)dx$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

نوٹ: ہم نے اس بات کا مشاہدہ کئے ہیں کہ پہلے اور دوسرے تعریفیں ریمان تکمل کے مساوی ہوتے ہیں۔

14.5 یک رنگی اور مسلسل تفاعلات پر قضیے

(Theorems on Monotonic and Continuous Functions)

قضیہ 1۔ اگر $f:[a,b]\to R$ مسلسل تفاعل ہو تو f بھی $[a,b]$ پر تکمل پذیر ہوگا۔

ثبوت۔ f کے وقفہ $[a,b]$ میں مسلسل ہونے کا یہ مطلب ہے کہ f اس وقفہ $[a,b]$ میں بستہ ہوگا اور بوریل کے مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے ہر ایک $\varepsilon>0$ کے لیے ایک تقسیم $P=\{a=x_0,x_1,x_2,...x_n=b\}$ ، $[a,b]$ پر موجود ہوگا اس طرح کہ

$$|f(y_r)-f(z_r)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

تمام $y_r,z_r\in I_r$ ، $r=1,2,...n$ کے لیے۔

I_r میں فرض کرو کہ Sup اور $\inf$ کو M_r اور m_r سے ترتیب وار ظاہر کیا جاتا ہے، چوں کہ f ایک مسلسل ہے I_r پر یعنی ψ_r موجود ہوگا اور $\eta_r\in I_r$ اس طرح کہ

$$m_r = f(\psi_r) \text{ اور } M_r = f(\eta_r)$$

$$M_r - m_r = |f(\psi_r)-f(\eta_r)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, r=1,2,3....n$$

پس

$$
\begin{aligned}
w(P,f) &= U(P,f) - L(P,f)\\
&= \sum_1^n (M_r - m_r)\delta_r\\
&< \sum_1^n \left(\frac{\in}{b-a}\right)\delta_r\\
&= \frac{\in}{b-a}\sum_1^n \delta_r\\
&= \frac{\in (b-a)}{b-a} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

پس کوئی $\varepsilon > 0$ کے لیے $P \in [a,b]$ اس طرح موجود ہوتا ہے کہ $0 \le W(P,f) < \varepsilon$

یعنی f تکمل پذیر ہوگا $[a,b]$ پر

ریمارک: چند تفاعلات ایسے ہوتے ہیں جو تکمل پذیر ہوتے ہیں لیکن مسلسل نہیں ہوتے(یہاں اس بات کی یاددہانی کرائی جاتی ہے کہ "مسلسل" ہونا کوئی ضروری نہیں بلکہ صرف کافی ہے)

قضیہ 2۔ اگر f وقفہ $[a,b]$ میں ایک رنگی (Monotonic) ہو تو بتاؤ کہ $f \in R[a,b]$

ثبوت۔ فرض کرو کہ f ایک رنگی نہ گھٹنے والا تفاعل ہے۔ $\varepsilon > 0$ کے لیے وقفہ $[a,b]$ کی تقسیم $P = \{a = x_0, x_1, x_2, ...x_n = b\}$ پر غور کرو جس کے لیے $\|P\| \le \dfrac{\in}{[f(b) - f(a) + 1]}$.

فرض کرو کہ m_r اور M_r وقفہ I_r میں ترتیب وار f کے inf اور Sup ہیں اس طرح سے کہ

$m_r = f(x_{r-1})$ اور $M_r = f(x_r)$

(چوں کہ f ایک نہ گھٹنے والا تفاعل ہے) اس لیے

$$
\begin{aligned}
U(P,f) - L(P,f) &= \sum_1^n (M_r - m_r)\Delta x_r\\
&= \sum_1^n [f(x_r) - f(x_{r-1})]\Delta x_r\\
&\le \frac{\in}{[f(b) - f(a) + 1]}[f(x_r) - f(x_{r-1})]\\
&= \frac{\in}{[f(b) - f(a) + 1]}[f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \ldots + f(x_n) - f(x_{n-1})]\\
&= \frac{\epsilon}{[f(b) - f(a) + 1]}[f(b) - f(a)] < \epsilon
\end{aligned}
$$

پس $f \in R[a,b]$ ثابت کیا گیا ہے۔

اسی طرح ہم یہ بھی ثابت کر سکتے ہیں کہ f وقفہ $[a,b]$ پر نہ گھٹنے والا تفاعل ہو گا۔

ریمارکس:

1) اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ ، $[1,2]$ پر تب ہم کہیں گے f ایک نہ گھٹنے والا تفاعل ہو گا اور $\frac{1}{x}$ ، $[1,2]$ پر تکمل پذیر ہو گا۔

2) $f(x) = x^2$ کے لیے $[a,b]$ پر بڑھنے والا تفاعل ہو گا اور x^2 ، $[a,b]$ پر تکمل پذیر ہو گا۔

3) اگر تفاعل $f : [a,b] \to R$ متناہی اعداد کے انتہائی نقاط رکھتے ہیں اس سٹ کے جس میں f غیر مسلسل ہے تب f تکمل پذیر ہو گا $[a,b]$ پر۔

4) R تکمل پذیر تفاعلات کے لا متناہی نقاط غیر مسلسل ہوں گے $[a,b]$ میں۔

5) چند R تکمل پذیر تفاعلات ہوں گے جو غیر مسلسل نقاط کے سٹ کے لا متناہی انتہائی نقاط رکھتے ہیں۔

6) $f(x) = \log x$ ایک مسلسل تفاعل ہے $[a,b]$ پر $b > a > 0$ ، $\log x \in R[a,b]$

7) $f(x) = e^x$ ایک مسلسل تفاعل ہے $[a,b]$ پر جو R کا تحت سٹ ہے یعنی $e^x \in R[a,b]$

مثال 1۔ فرض کرو $f(x) = \frac{1}{3^n}$ یہاں $\frac{1}{3^{n+1}} < x \le \frac{1}{3^n}$

$(n = 0,1,2,3,....)$ اور $f(0) = 0$ تب بتاؤ کہ $f \in R[0,1]$

حل۔ اگر $n = 0, \quad f(x) = 1; \quad \frac{1}{3} < x \le 1$

$$n = 1, \quad f(x) = \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{3^2} < x \le \frac{1}{3}$$

$$n = n, \quad f(x) = \frac{1}{3^n}; \quad \frac{1}{3^{n+1}} < x \le \frac{1}{3^n}$$

جہاں $x = 0$ ، $f(x) = 0$

تمام $x \in [0,1]$ ، $f \in [0,1]$ اور f بستہ تفاعل ہے $I[0,1]$ اور f کا سٹ $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \ldots \frac{1}{3^n}, \ldots\right\}$

لا متناہی نقاط رکھتا ہے جو غیر مسلسل ہو سکتا ہے انتہائی نقطہ 0 کے ساتھ۔

پس بالا مسئلہ ثابت ہو گیا ہے f تکمل پذیر ہو گا $[0,1]$ پر۔

مثال 2۔ فرض کرو f کی تعریف $f(x) = |x|$ ، $[-1,2]$ پر اگر $-1 \le x \le 1$ اور $f(x) = 3x + x^2$ اگر $1 < x < 2$ تب بتاؤ کہ

$f \in R[-1,2]$

حل۔ چوں کہ $0 \le f(x) \le 1 \ , \forall x \in [-1,1]$

$$4 < f(x) \le 12, \ \forall \ x \in (1,2)$$

$f(x)$ وقفہ $[-1,2]$ پر ایک بستہ تفاعل ہے۔

یہاں صاف ظاہر ہوتا ہے کہ، f نقاط $x = 1,2$ پر غیر مسلسل ہے۔

f کے دو نقاط، غیر مسلسل ہے۔

پس f ، R تکمل پذیر ہے $[-1,2]$ پر

مثال 3۔ فرض کرو $f(x)$ کی تعریف $[0,1]$ پر اس طرح تعریف کی گئی ہے $f(x) = \begin{cases} 1, x \neq \frac{1}{2} \\ 0, x = \frac{1}{2} \end{cases}$

تب بتاؤ کہ $f \in R[0,1]$ اور نیز محسوب کرو $\int_0^1 f(x)dx$

حل۔ فرض کرو $0 \le f(x) \le 1$ تمام $x \in [0,1]$ ، کے لیے یعنی f ایک بستہ تفاعل ہے $[0,1]$ پر

$[0,1]$ ایک تقسیم پر غور کرو اس طرح سے کہ $\frac{1}{2} \in I_s = [x_{s-1}, x_s]$ تب $r = 1,2,...n$ تمام $M_r = m_r = 1$ اور $r = s$ کے لیے

$M_s = 1$ اور $m_s = 0$, $r \neq s$ ..اور

$$w(P,f) = \sum_1^n (M_r - m_r)\Delta_r = \sum_1^{s-1}(M_r - m_r)\Delta_r + (M_s - m_s)\Delta_s + \sum_{s+1}^n (M_r - m_r)\Delta_r$$

$$= \sum_1^{s-1}(1-1)\Delta_r + (1-0)\Delta_r + \sum_{s+1}^n (1-1)\Delta_r = 1.\Delta_s = (x_s - x_{s-1}).......(1)$$

$\varepsilon > 0$ کے لیے، ایک تقسیم P ، $[0,1]$ کو منتخب کرتے ہیں اس طرح کہ $x_s - x_{s-1} < \varepsilon$ اور $x_{s-1} < \frac{1}{2} < x_s$

مساوات سے $0 \le W(P,f) < \varepsilon$

f تکمل پذیر ہے $[0,1]$ پر اور $\int_0^{\bar{1}} f(x)dx = \int_{\underline{0}}^1 f(x)dx$ اور

$$\int_0^{\bar{1}} f(x)dx = \underset{n\to\infty}{Lt}\, U(P,f) = \underset{n\to\infty}{Lt}\sum_1^n M_r\Delta_r = \underset{n\to\infty}{Lt}\sum_1^n 1.\Delta_r$$

$$\underset{n\to\infty}{Lt}\sum_1^n (1) = 1$$

اس لیے

$$\int_0^1 f(x)dx = 1$$

بنیادی تصورات (Key Concepts)

(1 $\int_{\underline{a}}^b f(x)dx = \sup\{L(P,f) : P \in \wp[a,b]\}$

2) $\int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx = Inf\{U(P,f): P\in \wp[a,b]\}$

3) $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = -\int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx$

4) $\int_{a}^{\bar{b}} \left(-f(x)dx\right) = -\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx$

5) ایک بستہ تفاعل f ,R تکمل پذیر ہوتا ہے تب $\int_{\underline{a}}^{b} f = \int_{a}^{\bar{b}} f$

6) چند تفاعلات ایسے ہیں جو کہ تکمل پذیر ہے لیکن وہ مسلسل نہیں ہے۔

7) اگر f .یک رنگی تفاعل ہے $[a,b]$ تب $f\in R[a,b]$

8) ایک بستہ تفاعل f کے متناہی نقاط غیر مسلسل ہوتے ہیں $[a,b]$ تب f ,R تکمل پذیر ہے $[a,b]$ پر

9) R تکمل پذیر ہونے پر چند پابندیاں ہیں تفاعل f کے لیے $[a,b]$ پر

10) $\int_{\underline{a}}^{b} f$ موجود ہوتا ہے تب $\int_{a}^{\bar{b}} f$ بھی موجود ہو گا لیکن $\int_{\underline{a}}^{b} f \neq \int_{a}^{\bar{b}} f$ تب $f\notin R[a,b]$

14.6 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے بالائی ریمان تکمل اور زیریں ریمان تکمل کی تعریفیں پڑھی ہیں اور اس کے بنیادی تصورات پر عبور حاصل کیا ہے اور اس کو مثالات کے ذریعے مشق کی گئی ہے۔

ریمان تکمل کے اہم مسئلہ کا ثبوت بھی پیش کیا ہے۔ خاص کر یک رنگی اور مسلسل تفاعلات کے مسئلہ پر کافی بحث کی ہے اور بہت سارے سوالات کو حل کیا ہے۔

14.7 کلیدی الفاظ (Keywords)

ریمان تکمل، بالائی ریمان تکمل، زیریں ریمان تکمل

14.8 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

14.8.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

خالی جگہ کو پُر کریں:

1. تفاعل f کے ریمان تکمل پذیر ہونے کی لازمی اور ضروری شرط۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔ہے۔

2. کوئی بستہ تفاعل وقفہ $[a,b]$ میں، زیریں ریمان تکمل بالائی ریمان تکمل سے -------- ہوتا ہے۔

3. ایک بستہ تفاعل f ریمان تکمل پذیر ہوگا اگر اور صرف اگر ----------

4. اگر f یک رنگی تفاعل ہے $[a,b]$ پر تب $\int_a^b f$ ---------- ہے۔

5. اگر $[a,b]$ پر بستہ تفاعل f کے غیر مسلسل نقاط کا سٹ متناہی ہو تب f ------------ ہے۔

6. f کے R تکمل پذیر ہونے کی شرط ہے کہ f ---------------- ہے۔

7. اگر $f(x) = x^2$ اور $P = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ تب $L(P, f) = \ldots..$

8. اگر $f(x) = e^x$، $[0,1]$ پر مسلسل ہے تب

9. ہر R ۔تکمل پذیر تفاعل ---------------- ہوتا ہے۔

10. $w(P, f) = ------$

11. $w(P, f)$ کو R ۔تکمل پذیر کے رقوم میں ظاہر کیجیے۔

12. اگر f کی تعریف $(0,2)$ پر اس طرح کی گئی ہے $f(x) = x + x^2$ جہاں x ناطق ہے اور $f(x) = x^2 + x^3$ غیر ناطق ہے تب بالائی ریمان تکمل $(0,2)$ میں

(a $\frac{53}{12}$ (b $\frac{83}{12}$ (c $\frac{12}{83}$ (d کوئی نہیں

13. اگر f کی تعریف $[0,1]$ پر کی گئی ہے اور $f(x) = \begin{cases} 1, x \in Q \\ -1, \text{غیر ناطق ہے } x \end{cases}$

(a. f بستہ ہے (b f بستہ نہیں ہے

(c. f بستہ اور R تکمل پذیری ہے (d ان میں سے کوئی نہیں

14. تفاعلات جو یک رنگی اور بستہ ہوتے ہیں وقفہ میں وہ ---------------- ہیں۔

(a مسلسل (b تفرق پذیر (c ریمان تکمل پذیر (d کوئی نہیں

15. فرض کرو $f(x) = \frac{1}{x}$ کی تعریف $(0,1)$ میں کی گئی ہے $\frac{1}{n} \ge x > \frac{1}{n+1}$ کے لیے اور $f(0) = 0$ تب $f(x)$ ' $(0,1)$ میں --------

(a غیر مسلسل ہے (b R ۔تکمل پذیر نہیں ہے

(c R ۔تکمل پذیر ہے (d ان میں سے کوئی نہیں

16. فرض کرو $f(x) = 1$، جب کہ x ناطق اور $f(x) = 0$ جب کہ x غیر ناطق ہے تب f ایک

(a $\int_0^1 f(x)dx$ کا وجود ہوگا (b R ۔تکمل پذیر نہ ہوگا

c) تفرق پذیر ہوگا   d) دونوں $\underline{\int_a^b} f$ اور $\overline{\int_a^b} f$ وجود رکھتے ہیں لیکن مساوی نہیں ہوں گے

14.8.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. بالائی اور زیریں ایماں تکمل کی تعریف لکھیے۔
2. $f(x)$ کے R تکمل پذیر ہونے کی اہم اور ضروری شرط بیان کیجیے۔
3. ڈرباکس کے مسئلہ کو بیان کرو۔
4. $f(x)$ کی تعریف $f(x) = x^2$,$[0, a]$ پر کی گئی ہے تب اس کے زیریں اور بالائی ایماں معلوم کرو۔
5. اگر f یک رنگی تفاعل ہے $[a, b]$ پر تب بتاؤ کہ f ,$[a, b]$ پر تکمل پذیر ہوتا ہے۔
6. ریمان تکمل کی متبادل تعریف لکھیے۔

14.8.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. کوئی تفاعل f کے ریمان تکمل پذیر ہونے کی اہم اور ضروری شرط کو بیان اور ثابت کرو۔
2. بستہ تفاعل کے تکمل پذیر نہ ہونے کی مثال کو قائم کریں۔
3. اگر $f(x) = cosx$ تمام $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ بتاؤ کہ f $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ پر تکمل پذیر ہوتا ہے اور پھر بتاؤ کہ $\int_0^{\pi/2} \cos x dx = 1$
4. بتاؤ کہ $f(x) = 3x + 1$ ، $[1, 2]$ پر تکمل پذیر ہوتا ہے اور نیز بتاؤ کہ $\int_1^2 (3x+1)dx = \frac{11}{2}$
5. ڈرباکس کے مسئلہ کو بیان اور ثابت کرو۔
6. اگر $f \in [a, b]$ اور m, M ترتیب وار تفاعل f کے $[a, b]$ پر inf اور sup کو ظاہر کرتے ہیں تب بتاؤ کہ

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

14.9 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Introduction to Real Analysis, Donald R. Sherbert Robert G. Bartle 4th Edition , 2014
2. Elements Of Real Anyalsis, Narayan Shanti and Raisinghania M.D., 2003
3. Real Analysis, J.N. Sharma and A.R. Vasishtha, 2014
4. Real Analysis, V. Karunakaran, 2011
5. Basic Real Analysis, Houshang H. Sohrab, 2nd Edition, 2014

اکائی 15۔ ریمان تکمل کی خصوصیات

(Properties of Riemann Integration)

اکائی کے اجزا

15.0 تمہید (Introduction)

پچھلی اکائی میں ہم نے زیریں ریمان تکمل اور بالائی ریمان تکمل اور ریمان تکمل کو جانا۔ ہم نے ڈرباکس قضیہ اور ریمان تکمل ہونے کے لیے ضروری اور کافی قضیہ پر بحث کی اور بڑی تعداد میں مسائل کو حل کیا۔ اس اکائی میں ہم ریمان تکمل تفاعل کی خصوصیات کے قضیے اور تبصروں پر بحث کریں گے۔

15.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے اختتام پر طلبا اس قابل ہو جائیں گے کہ :

- ریمان تکمل تفاعل کی خصوصیات کو سمجھ سکیں۔
- ریمان تکمل تفاعل پر مبنی مسائل کو حل کرنا سمجھ سکیں۔

15.2 ریمان تکمل کی خصوصیات (Properties of Riemann Integration)

ریمان تکمل پذیر تفاعل کی خصوصیات کو قضیوں اور تبصروں اور مناسب مثالوں کے ذریعے تعریفات کی روشنی میں سمجھیں گے۔

تعریفات:

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\bar{b}} f(x)dx = \int_{\bar{a}}^b f(x)dx$ ، جہاں $b > a$

2. اگر $b < a$ تب $\int_a^b f = -\int_b^a f$ جب کہ $f \in R[a,b]$ اور $\int_a^a f = 0$

قضیہ 1۔ اگر $f: I[a,b] \to R$ ریمان تکمل پذیر تفاعل ہے یعنی $f \in R[a,b]$ تب

$$-f \in R[a,b] \text{ اور } \int_a^b (-f)(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

ثبوت۔ دیا گیا ہے کہ $f \in R[a,b]$

اس لیے

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\bar{a}}^b f(x)dx = \int_a^{\bar{b}} f(x)dx$$

فرض کرو کہ $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$ وقفہ $[a,b]$ کی تقسیم ہے۔ فرض کیجیے کہ m_r اور M_r وقفہ $[a,b]$ پر خصوصاً $[x_{r-1}, x_r]$ پر f کے بالترتیب اسفل (Infimum) اور عضمیٰ (Supremum) ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ f وقفہ $[a,b]$ پر بستہ ہوگا تب $-f$ بھی وقفہ $[a,b]$ پر بستہ ہوگا۔ اب

$$Inf\ (-f) = -Sup\ f = -M_r \text{ on } I_r$$
$$Sup\ (-f) = -Inf\ f = -m_r \text{ on } I_r$$

اور

$$U(P,f)=\sum_{1}^{n}-m_r\Delta_r=-\sum_{1}^{n}m_r\Delta_r=-L(P,f)$$
$$L(P,f)=\sum_{1}^{n}-M_r\Delta_r=-\sum_{1}^{n}M_r\Delta_r=-U(P,f)$$

اس لیے

$$\int_a^b(-f)\,(x)dx=\inf\{U(P,f)|P\in\phi[a,b]\}=\inf\{-L(P,f)|P\in\phi[a,b]\}$$
$$=Sup\{L(P,f)|P\in\phi[a,b]\}=-\int_a^b f(x)dx$$
$$\int_a^b f(x)dx=Sup\,\{L(P,f)|P\in\phi[a,b]\}$$
$$=Sup\,\{-U(P,f)\}$$
$$=-\inf\{U(P,f)\}$$
$$=-\int_a^{\overline{b}} f(x)dx$$
$$=-\int_a^b f(x)dx$$

اس لیے

$$\int_a^{\overline{b}}(-f)\,(x)dx=\int_{\overline{a}}^{b}(-f)\,(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$$

چنانچہ

$-f\in R[a,b]$ اور $\int_a^b(-f)\,(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$

لٰہذا ثابت ہوا۔

قضیہ 2۔ اگر تفاعل f وقفہ $[a,b]$ پر ریمان تکمل پذیر ہے تب $|f|$ بھی ریمان تکمل پذیر ہوگا۔

یا

اگر $f\in R[a,b]$ تب $|f|\in R[a,b]$

ثبوت۔ اگر $f\in R[a,b]$ تب $P=\{a=x_0,x_1,x_2,\dots,x_n=b\}$ تقسیم پر $\epsilon>0$ اس طور پر کہ

$$0\le U(P,f)-L(P,f)<\epsilon\Rightarrow 0\le w(P,f)<\epsilon \text{ -------------(1)}$$

f چوں کہ بستہ ہوگا $[a,b]$ پر

$$\Rightarrow |f(x)|<k, for\ k\in R^+,\forall x\in[a,b]$$

لٰہذا f بستہ ہوگا $[a,b]$ پر۔

فرض کیجیے کہ m_r اور M_r وقفہ $\mathrm{I_r}$ پر f کے Inf اور Sup ہوں اور m_r^* اور M_r^* وقفہ $\mathrm{I_r}$ پر $|f|$ کے Inf اور Sup ہیں۔ تب $\psi, \eta \in I_r$ کے لیے

$$\big||f(\psi)| - |f(\eta)|\big| \leq |f(\alpha) - f(\beta)|$$

$$\therefore M_r^* - m_r^* \leq M_r - m_r ، r = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\Rightarrow U(P, |f|) - L(P, |f|) = \sum_{r=1}^{\infty} (M_r^* - m_r^*)\Delta_r$$

$$\leq \sum_{r=1}^{\infty} (M_r - m_r)\Delta_r$$

$$\leq U(P, f) - L(P, f) < \epsilon \qquad \text{(1)}$$ بحوالے

اس لیے $|f|$ ریمان تکمل پذیر ہے۔یعنی $|f| \in R[a, b]$

مشاہدہ: قضیہ بالا کا عکس صحیح ہونا ضروری نہیں ہے۔یعنی اگر $|f|$ ریمان تکمل پذیر ہے تب f کا ریمان تکمل پذیر ہوا یسا ضروری نہیں۔

اسے اس مثال سے سمجھا جا سکتا ہے۔

اگر $f: I[a, b] \to R$ معرف بہ
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ -1, & x \in R - Q \end{cases}$$

تب $[a, b]$ کی تقسیم $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$ پر

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = Inf\{U(P, f)\}$$

$$= Inf\left\{\sum_{r=1}^{n} 1.\Delta_r\right\}$$

$$= Inf\{b - a\} = b - a$$

اور پھر

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = Sup\{L(P, f)\}$$

$$= Sup\left\{\sum_{r=1}^{1} (-1).\Delta_r\right\}$$

$$= Sup\{-(b - a)\} = -(b - a)$$

$\therefore \underline{\int_a^b} f \neq \overline{\int_a^b} f \Rightarrow f \notin R[a, b]$ چوں کہ $|f|(x) = |f(x)| = 1, \forall x \in R$

چوں کہ $|f|$ ایک مستقل تفاعل ہے اس لیے $|f| \in R[a, b]$

قضیہ 3۔ اگر $f: I[a, b] \to R$ ریمان تکمل پذیر ہے تب تفاعل f^2 بھی ریمان تکمل پذیر ہے

ثبوت۔ ہم جانتے ہیں کہ اگر $f \in R[a, b]$ تب $|f| \in R[a, b]$

چوں کہ f بستہ ہے $[a, b]$ پر اس لیے $|f|$ بھی بستہ ہوگا $[a, b]$ پر

لہٰذا $|f|^2$ بھی بستہ ہوگا $[a, b]$ پر

تب f^2 بھی بستہ ہوگا $[a, b]$ پر اس لیے کہ $f^2 = |f|^2$

اگر $Sup\ f = M > 0$ وقفہ $[a, b]$ پر

تب $\epsilon > 0$ کے لیے ایک تقسیم P اس طور پر کہ

$$\sum_{r=1}^{n}(M_r - m_r)\Delta_r = U(P, |f|) - L(P, |f|) < \frac{\epsilon}{2M+1} \quad \text{--------}(1)$$

اور اگر I_r میں

$$\left.\begin{aligned} Inf\ (f^2) &= m_r^2 \\ Sup\ (f^2) &= M_r^2 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} \therefore U(P, f^2) - L(P, f^2) &= \sum_{r=1}^{n}(M_r^2 - m_r^2)\Delta_r \\ &= \sum_{r=1}^{n}[(M_r - m_r)(M_r + m_r)]\Delta_r \\ &= \sum_{r=1}^{n}[(M_r - m_r)(M + M)]\Delta_r \\ &= 2M\sum_{r=1}^{n}(M_r - m_r)\Delta_r \\ &< 2M\frac{\epsilon}{2M+1} < \epsilon \end{aligned}$$

اس لیے $\epsilon > 0$ کے لیے تقسیم P ہوگا $[a, b]$ کا اس طور پر کہ

$$U(P, f^2) - L(P, f^2) < \epsilon$$

لٰہذا $f^2 \in R[a, b]$

اس لیے قضیہ ثابت ہوا۔

قضیہ 4۔ اگر f ریمان تکمل پذیر ہے $[a, b]$ پر ہے اور k کوئی مستقل حقیقی عدد ہے، تب $kf \in R[a, b]$ اور

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

ثبوت۔ اس قضیہ کا ثبوت طلبا کی مشق کے لیے چھوڑ دیا گیا ہے۔

قضیہ 5۔ اگر f اور g ریمان تکمل پذیر ہیں $[a, b]$ پر تو $f + g$ ریمان تکمل پذیر ہوگا $[a, b]$ پر اور

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

ثبوت۔ چوں کہ $f, g \in R[a, b]$ اس لیے f, g بستہ ہوں گے $[a, b]$ پر لہٰذا $f + g$ بھی بستہ ہوگا وقفہ $[a, b]$ پر

اگر $\epsilon > 0$ اور $f \in R[a, b]$ تب $\delta' > 0$ اس طور پر وجود رکھتا ہے کہ

$$U(P_1, f) - L(P_1, f) < \frac{\epsilon}{2},\ \text{جہاں}\ \|P_1\| < \delta' \quad \text{------------}(1)$$

اور $g \in R[a,b]$ تب $\delta'' > 0$ اس طور پر ہے کہ

$$U(P_2, g) - L(P_2, g) < \frac{\epsilon}{2}, \text{جہاں} \|P_2\| < \delta'' \text{-----------} (2)$$

اگر $P = P_1 \cup P_2$ تب

$$\|P\| < \|P_1\| \& \|P\| < \|P_2\|$$
$$\Rightarrow \quad \|P\| < \delta' \& \|P\| < \delta''$$

تب تقسیم P کے لیے (1) اور (2) صحیح ہوں گے

اور غور کیجیے

$$\begin{aligned} W(P, f+g) &= U(P, f+g) - L(P, f+g) \\ &\leq [U(P,f) - L(P,f)] + [U(P,g) - L(P,g)] \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

$$\therefore \epsilon > 0, \delta = max\{\delta', \delta''\} \Rightarrow 0 \leq w(P,f) < \epsilon, \text{جہاں} \|P\| < \delta$$

اس لیے $f + g \in R[a,b]$

$$f \in R[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_1^n f(\xi_r)\delta_r$$

$$g \in R[a,b] \Rightarrow \int_a^b g(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_1^n g(\xi_r)\delta_r$$

مگر

$$\begin{aligned} \lim_{\|P\|\to 0} \sum_1^n (f+g)(\xi_r)\delta_r &= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{r=1}^n \{f(\xi_r) + g(\xi_r)\}\delta_r \\ &= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{r=1}^n f(\xi_r)\delta_r + \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{r=1}^n g(\xi_r)\delta_r \end{aligned}$$

اس لیے

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

قضیہ ثابت ہوا۔

نتائج:

(i) اگر $f, g \in R[a,b]$ تب $f - g \in R[a,b]$ اور $\int_a^b (f-g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

(ii) اگر $f, g \in R[a,b]$ اور $k, l \in R$ تب $(kf + lg) \in R[a,b]$

قضیہ 6۔ اگر $f, g \in R[a,b]$ تب $f.g \in R[a,b]$

ثبوت۔ چوں کہ $f, g \in R[a,b]$ اس لیے f, g بستہ ہیں وقفہ $[a,b]$ پر

اس لیے $f.g$ بھی بستہ ہوگا وقفہ $[a,b]$ پر

اب غور کیجیے

$$(f+g)^2-(f-g)^2=4f.g$$

$$(1)\text{------------}f.g=\frac{1}{4}[(f+g)^2-(f-g)^2]$$

گزشتہ قضیوں کے مطابق ہم جانتے ہیں کہ اگر $f,g\in R[a,b]$ تب $f+g$ اور $f-g$ بھی ریمان تکمل پذیر ہوں گے وقفہ $[a,b]$ پر

تب $(f+g)^2$ اور $(f-g)^2$ بھی ریمان تکمل پذیر ہوں گے

پھر $(f+g)^2-(f-g)^2$ بھی ریمان تکمل پذیر ہوگا

لہٰذا $\frac{1}{4}[(f+g)^2-(f-g)^2]\in R[a,b]$

یعنی $f.g\in R[a,b]$

قضیہ ثابت ہوا۔

نتیجہ: f,g ریمان تکمل پذیر ہو سکتا ہے وقفہ $[a,b]$ پر جب کہ $f,g\notin R[a,b]$

مثال: $f(x)=\begin{cases}0, & x\in Q\\ 1, & x\in R-Q\end{cases}$ اور $g(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\in R-Q\end{cases}$ تب

$$(f.g)(x)=f(x)g(x)=0,\forall x\in R$$

اب $f.g$ ایک مستقل تفاعل ہوا، اس لیے یہ ریمان تکمل پذیر ہے۔

جب کہ ہم دیکھتے ہیں کہ f,g ریمان تکمل پذیر نہیں ہیں۔

قضیہ 7۔ اگر $f\in R[a,b]$ اور $a<c<b$ تب $f\in R[a,c]$ اور $f\in R[c,b]$ اور

$$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$$

ثبوت۔ چوں کہ $f\in R[a,b]$ تب ریمان تکمل پذیری کی کافی اور ضروری شرط کے مطابق f غیر مسلسل نقاط کے سٹ A کی پیائش صفر ہوگی۔

ظاہر ہے کہ سٹ $A\cap[a,c]$ کی پیائش صفر ہے۔

اس لیے $f\in R[a,c]$

اس طرح $f\in R[c,b]$

اگر تقسیم P_1 ہے $[a,c]$ کا اور P_2 تقسیم ہے $[c,b]$ کا۔

$P_1\cup P_2$ تقسیم ہوگا $[a,b]$ کا جس کے جزیے P_1,P_2 کے جزیے ہوں گے۔

$$(1)\text{---------}\ L(P_1,f)+L(P_2,f)=L(P_1\cup P_2,f)\le\underline{\int_a^b} f$$

چوں کہ $f\in R[a,b]$ اس لیے

$$\int_a^b f = \int_{\underline{a}}^b f$$

تب(1)سے

$$(2)\text{-----------} \qquad L(P_1,f) + L(P_2,f) \le \int_a^b f$$

$Sup\{L(P_1,f)\}$لینے سے

$$\int_{\underline{a}}^b f + L(P_2,f) \le \int_a^b f$$

لیکن $\int_{\underline{a}}^c f = \int_a^c f$ چوں کہ $f \in R[a,c]$

اس لیے

$$\int_a^c f + L(P_2,f) \le \int_a^b f$$

$Sup\{L(P_2,f)\}$لینے سے

$$(3)\text{-----------} \qquad \int_a^c f + \int_a^b f \le \int_a^b f$$

$$U(P_1,f) + U(P_2,f) \ge \int_a^{\overline{b}} f$$

چوں کہ $f \in R[a,b]$اس لیے

$$U(P_1,f) + U(P_2,f) \ge \int_a^b f$$

$$\int_a^c f + L(P_2,f) \le \int_a^b f$$

$Inf\{U(P_2,f)\}$لینے سے

$$(4)\text{-----------} \qquad \int_a^c f + \int_c^b f \ge \int_a^b f$$

مساوات(3)اور(4)سے

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

قضیہ ثابت ہوا۔

نوٹ: من درجہ بالا تصور کو بڑھانے سے اس کو یوں عام کیا جاسکتا ہے کہ

$$\int_a^b f = \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + + \int_{c_2}^{c_3} f + \cdots + \int_{c_{n-1}}^b f$$

نوٹ: اگر $f \in R[a,b]$ اور $[c,d] \subset [a,b]$ تب $f \in R[c,d]$

مثال۔ $f(x) = \begin{cases} x, 0 \le x \le 1 \\ 1, \quad x > 1 \end{cases}$ تکمل پذیر ہوگا وقفہ $[0, 2]$ پر

حل۔ اگر $f(x) = f_1 + f_2$ جہاں $f_1(x) = x, 0 \le x \le 1$ اور $f_2(x) = 1, x > 1$

$f_1(x) = x$ مسلسل ہے وقفہ $[0, 1]$ پر اور

$$\int_0^1 f_1(x)dx = k\int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}$$

اور پھر $f_2(x) = 1, 1 \le x \le 2$

لہٰذا f_2 مسلسل ہے وقفہ $[1, 2]$ پر

لہٰذا f_2 ریمان تکمل پذیر ہے وقفہ $[1, 2]$ پر

چنانچہ

$$\int_1^2 f_2(x)dx = k\int_1^2 1\, dx = [2 - 1] = 1$$

نتیجتاً f_1 ریمان تکمل پذیر ہے وقفہ $[0, 1]$ پر اور

f_2 ریمان تکمل پذیر ہے وقفہ $[1, 2]$ پر

لہٰذا $f = f_1 + f_2$ ریمان تکمل پذیر ہوگا وقفہ $[0, 2]$ پر

اس لیے

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f_1(x)dx + \int_1^2 f_2(x)dx = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$\int_a^b f(x)dx$ پر لامساوات (Inequalities on $\int_a^b f(x)dx$)

قضیہ 8۔ اگر $f \in R[a, b]$ اور $f(x) \ge 0, \forall x \in [a, b]$ تب $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

ثبوت۔ دیا گیا ہے کہ $f \in R[a, b]$

اگر تفاعل f کے m اور M وقفہ $[a, b]$ پر Infimum اور Supremum ہوں، تب چوں کہ $f(x) \ge 0, \forall x \in [a, b]$ اس لیے $m \ge 0$

تب کسی بھی تقسیم $P \in [a, b]$ کے لیے

$$L(P, f) \ge m(b - a) \Rightarrow L(P, f) \ge 0$$
$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = Sup\{L(P, f)\} \ge 0$$

لہٰذا

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\overline{b}} f(x)dx \ge 0$$

ثابت کیا گیا۔

قضیہ 9۔ اگر $f \in R[a,b]$ اور $f(x) \ge 0, \forall x \in [a,b]$ تب $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

ثبوت۔ چوں کہ f ریمان تکمل پذیر ہے اس لیے $|f|$ اور $-|f|$ بھی ریمان تکمل پذیر ہوں گے $[a,b]$ پر۔

$$\int_a^b -|f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$$

$$\Rightarrow -\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx$$

$$\le \int_a^b |f(x)|dx$$

اس لیے

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \ge \int_a^b |f(x)|dx$$

نوٹ: قضیہ بالا کا عکس صحیح ہونا ضروری نہیں ہے۔

مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ -1, & x \in R - Q \end{cases}$

غور کیجیے کہ f وقفہ $[0,1]$ پر تکمل پذیر نہیں ہے جب کہ $|f|$ تکمل پذیر ہے۔

قضیہ 10۔ اگر $f, g \in R[a,b]$ اور $f(x) \ge g(x), \forall x \in [a,b]$ تب $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$

ثبوت۔ چوں کہ $f, g \in R[a,b]$ اس لیے $f - g \in R[a,b]$

اور چوں کہ دیا گیا ہے $f(x) \ge g(x), \forall x \in [a,b]$ اس لیے

$$f(x) - g(x) \ge 0, \qquad \forall x \in [a,b]$$

$$\Rightarrow (f-g)(x) \ge 0, \qquad \forall x \in [a,b]$$

$$\Rightarrow \int_a^b (f-g)(x)dx \ge 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \ge 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \ge 0$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$$

قضیہ ثابت ہوا۔

قضیہ 11۔ اگر $f \in R[a,b]$ اور m اور M وقفہ $[a,b]$ پر تفاعل f کے Infimum اور Supremum ہیں تب

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

اور $\qquad \int_a^b f(x)dx = \mu(b-a) \qquad$ جہاں $\mu \in [m, M]$

ثبوت۔ چوں کہ f کے m اور M وقفہ $[a,b]$ پر Infimum اور Supremum ہیں، تب

$$m \leq f(x) \leq M, \qquad \forall x \in [a,b]$$

چوں کہ m اور M مستقل ہیں اس لیے تکمل پذیر ہیں، یعنی

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx$$

اس لیے

$$(1)\text{--------}m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

اور چوں کہ $\mu \in [m,M]$، اس لیے

$$m \leq \mu \leq M$$

تب

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b \mu dx \leq \int_a^b M dx$$

اس لیے

$$(2)\text{--------}m(b-a) \leq \mu(b-a) \leq M(b-a)$$

مساوات (1) اور (2) سے مناسب μ کی قیمت پر $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$ ہوگا۔

ثابت کیا گیا۔

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{3+x^2}, \forall x \in [1,3]$ تب سبھی $x \in [1,3]$ کے لیے $0 < f'(x) = \frac{x}{\sqrt{3+x^2}}$ ہوگا۔

اور چوں کہ f وقفہ [1،3] پر بڑھتا ہوا ہے۔ اس لیے

$$f(1) = \sqrt{3+1^2} = 2 = m$$

اور

$$f(3) = \sqrt{3+3^2} = 2\sqrt{3} = M$$

اس لیے

$$2(3-1) \leq \int_1^3 \sqrt{3+x^2}dx \leq \sqrt{12}(3-1)$$

$$\Rightarrow 4 \leq \int_1^3 \sqrt{3+x^2}dx \leq 2\sqrt{12}$$

قضیہ 11۔ اگر $f \in R[a,b]$ اور $|f(x)| \leq k, \ \forall x \in [a,b]$ اور $k \in R^+$ تب $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq k(b-a)$

ثبوت۔ اس قضیہ کا ثبوت طلبا کی مشق کے لیے چھوڑ دیا گیا ہے۔

قضیہ 12۔ اگر $f \in R[a,b]$ تب $\phi(t) = \int_a^t f(x)dx \ \ , t \in [a,b]$ وقفہ $[a,b]$ پر مسلسل ہوگا

ثبوت۔ چوں کہ $f \in R[a,b]$ اس لیے بستہ ہوگا $[a,b]$ پر

اس لیے $k \in R^+$ اس طور پر ہوگا کہ

$$|f(x)| \leq k, \qquad \forall x \in [a,b]$$

اگر $c \in [a,b]$ اور $\epsilon > 0$

تب

$$\begin{aligned}\phi(c+h)-\phi(c) &= \left|\int_a^{c+h} f(x)dx - \int_a^c f(x)dx\right| \\ &= \left|\int_a^c f(x)dx + \int_c^{c+h} f(x)dx - \int_a^c f(x)dx\right| \\ &= \left|\int_c^{c+h} f(x)dx\right| \\ &\le k|c+h-c| \\ &= k|h| \\ &< \epsilon\end{aligned}$$

اگر $|h| < \delta < \frac{\epsilon}{k}$

کسی بھی $\epsilon > 0$ کے لیے ہم لے سکتے ہیں $\delta \left(< \frac{\epsilon}{k}\right)$

اس طور پر کہ

$$\phi(c+h)-\phi(c) < \epsilon, \qquad \forall |h| < \delta$$

لہٰذا ϕ نقطہ $c \in [a,b]$ پر مسلسل ہوا گویا ϕ وقفہ $[a,b]$ پر مسلسل ہے۔

قضیہ 13۔ اگر $f \in R[a,b]$ اور $c \in [a,b]$، f پر مسلسل ہے تب $\phi(t) = \int_a^t f(x)dx\ , t \in [a,b]$ نقطہ c پر تفرق پذیر ہوگا اور $\phi'(c) = f(c)$

ثبوت۔ چوں کہ $c \in [a,b]$، f پر مسلسل ہے

اس لیے $\epsilon > 0$ کے لیے $\exists \delta > 0$ اس طور پر کہ

$$|f(x)-f(c)| < \epsilon,\ \forall |x-c| < \delta \text{-------------}(1)$$

غور کیجیے کہ $|h| < \delta$

تب

$$\begin{aligned}\phi(c+h)-\phi(c) &= \int_a^{c+h} f(x)dx - \int_a^c f(x)dx \\ &= \int_c^{c+h} f(x)dx\end{aligned}$$

$$\int_c^{c+h} f(c)dx = f(c)\int_c^{c+h} dx = hf(c)$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\phi(c+h)-\phi(c)}{h} - f(c)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(x)dx - \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(c)dx\right| \\ &= \left|\frac{1}{h}\int_c^{c+h}\{f(x)-f(c)\}dx\right|\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{|h|}\left|\int_{c}^{c+h} |f(x) - f(c)| dx\right|$$
$$< \frac{1}{|h|}\left|\int_{c}^{c+h} \epsilon dx\right| = \frac{1}{|h|}\epsilon|h| = \epsilon$$

اس لیے ϕ نقطہ c پر تفرق پذیر ہے اور $\phi'(c) = f(c)$

تبصرہ:

1. اگر $\phi(t) = \int_{t}^{b} f(x)dx$ وقفہ $[a,b]$ پر مسلسل ہے تب

$$\phi(0) = \int_{0}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to 0}\phi(t)$$

2. اگر f وقفہ $[a,b]$ پر مسلسل ہے تب $\phi(t) = \int_{a}^{b} f(x)dx\,, t \in [a,b]$ تفرق پذیر ہوگا سبھی $x \in [a,b]$ کے لیے اور

$$\phi'(x) = f(x)$$

تعریف: اگر $f \in R[a,b]$ اور $\phi: [a,b] \to R$ اس طور پر ہے کہ $\phi'(x) = f(x),\ \forall x \in [a,b]$ تب ϕ کو اصلی تفاعل یا اولیہ (Primitive) یا ضد مشتق (Anti Derivative) کہا جاتا ہے۔

تبصرے:

1. f کا اولیہ یکتا نہیں ہوتا۔ اگر ϕ اولیہ ہے f کا تب $\phi + c, c \in R$ بھی اولیہ ہوتا ہے f کا۔

مثال کے طور پر $f(x) = \sin x$ اور $f: [a,b] \to R$

ہمیں معلوم ہے کہ $\sin x$ مسلسل ہے $[a,b]$ پر۔

اس لیے $\sin x$ کا اولیہ رہے گا۔

اگر $\phi: [a,b] \to R$ معرفہ بہ $\phi(x) = -\cos x$ تب

$$\phi'(x) = (-\cos x)' = \sin x\,, \qquad \forall x \in [a,b]$$

لہٰذا $\phi(x) = -\cos x$ تفاعل $\sin x$ کا اولیہ ہوا $[a,b]$ پر۔

اور اگر $\phi(x) = -\cos x + c, c \in R$ تب بھی

$$\phi'(x) = (-\cos x + c)' = \sin x\,, \qquad \forall x \in [a,b]$$

لہٰذا $\phi(x) = -\cos x + c$ بھی اولیہ ہوتا ہے $[a,b]$ پر۔

یعنی اولیہ یکتا نہیں ہوتا ہے۔

2. f کا مسلسل ہونا ضروری نہیں اس کے اولیہ کے وجود کے لیے۔

مثال کے لیے $\phi(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$ وقفہ $[a,b]$ پر۔ تب $\phi'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

ظاہر ہے ϕ' مسلسل نہیں $x = 0$ پر

اگر ϕ' کو $[0,1]$ پر دیکھیں تب $\phi'(x) = f(x)$ مسلسل نہیں ہے $[0,1]$ پر۔ جب کہ اولیہ کا وجود ہے۔

مثال 1۔ ثابت کیجیے کہ $\frac{\sqrt{3}}{8} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{\sqrt{2}}{6}$

حل۔ غور کیجیے

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{(x - \tan x)\cos x}{x^2}$$

$$\because x < \tan x \ \ in \ \left[0, \frac{\pi}{2}\right], f'(x) < 0, \forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$$

اس لیے f وقفہ $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ میں گھٹتا ہوا ہے۔

اب چوں کہ گھٹتا ہوا ہے، اس لیے

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sin x}{x}\right) dx \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{8} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sin x}{x}\right) dx \leq \frac{\sqrt{2}}{6}$$

مثال 2۔ اگر $f(x) = \int_0^x \sqrt{t + t^6} dt, \forall x > 0$ تب $f'(x)$ معلوم کیجیے۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ

$$\phi(t) = \sqrt{t + t^6}, \forall t \in [0, x]$$

$$\because f'(x) = \phi(x), \forall x > 0, f'(3) = \phi(3) = \sqrt{3 + 3^6} = \sqrt{732} \cong 27$$

مثال 3۔ محسوب کیجیے: $lim_{x \to 1^+} \frac{\int_1^x |t-1| dx}{sin(x-1)}$

حل۔ فرض کیجیے کہ $f(x) = \int_1^x |t - 1| \, dx$ اور $g(x) = \sin(x-1)$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \int_1^1 |t - 1| \, dx = 0 \ \& \lim_{x \to 1^+} g(x) = \sin(1 - 1) = 0$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \ form$$

اب لاپتال کے قاعدے کے ذریعے سے

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{|x - 1|}{cos(x-1)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)}{cos(x-1)} = 0$$

مثال 4۔ ثابت کیجیے $0 < \int_0^1 \frac{xdx}{8 + x^3} < \frac{1}{a}$

حل۔ فرض کیجیے کہ

$$f(x) = \frac{x}{8 + x^3}$$

اس لیے

$$f'(x) = \frac{(8 + x^3)1 - x(3x^2)}{(8 + x^3)^2}$$
$$= \frac{8 - 2x^3}{(8 + x^3)^2}$$

ظاہر ہے کہ f گھٹتا ہوا وقفہ $[0, 1]$ ہے۔

تب $$m = f(0) = 0; M = f(1) = \frac{1}{9}$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$m(b - a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b - a)$$
$$0(1 - 0) \le \int_0^1 \frac{xdx}{8 + x^3} \le \frac{1}{9}(1 - 0) \Rightarrow 0 \le \int_0^1 \frac{xdx}{8 + x^3} \le \frac{1}{9}$$

مثال 5۔ ثابت کیجیے کہ $4 \le \int_1^3 \sqrt{3 + x^3}dx \le 2\sqrt{30}$

حل۔ غور کیجیے کہ $$f(x) = \sqrt{3 + x^3}, \forall x \in [1, 3]$$

ظاہر ہے کہ f بستہ ہے وقفہ $[1, 3]$ پر اور بڑھتا ہوا ہے۔ لہٰذا

$$m = f(1) = \sqrt{3 + 1} = 2; M = f(3) = \sqrt{3 + 3^3} = \sqrt{30}$$

چوں کہ f یک رنگی ہے اس لیے $f \in R[a, b]$ لہٰذا

$$m(b - a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b - a)$$
$$2(3 - 1) \le \int_1^3 \sqrt{3 + x^3}dx \le \sqrt{30}(3 - 1) \Rightarrow 4 \le \int_1^3 \sqrt{3 + x^3}dx \le 2\sqrt{30}$$

ثابت کیا گیا۔

15.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس موجودہ اکائی میں ہم نے توجہ دی ریمان تکمل کے اہم قضیوں پر۔ یہ تمام قضیے ریمان تکمل کی خصوصیات ہیں۔ ان میں بعض قضیوں کے عکس صحیح ہونا ضروری نہیں ہے ان کو مثالوں کے ذریعے تحقیق میں لیا گیا ہے۔ ریمان تکمل کے قضیے اور خصوصیات مسائل کو حل کرنے میں مددگار ہوتے ہیں۔ ان کو استعمال کرکے بہت سے مسائل کو حل کیا گیا۔

15.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

ریمان تکمل، عکس

15.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

15.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. اگر $f \in R[a,b]$ تب $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le$ ______

2. اگر ریمان تکمل پذیر ہو تب $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx =$ ______

3. اگر $f \in R[a,b]$ اور M اور m وقفہ $[a,b]$ پر $Sup\ f$ اور $Inf\ f$ ہیں تب

$$\_\_\_\_\_\_ \le \int_a^b f(x)dx \le \_\_\_\_\_\_$$

4. اگر $f \in R[a,b]$ تب ______

5. اگر $f,g \in R[a,b]$ تب $\int_a^b (f+g)(x)dx =$ ______

6. اگر $f \in R[a,b]$ تب

(a $|f|$ ریمان تکمل پذیر نہیں ہے

(b $|f|$ ریمان تکمل پذیر ہوگا مگر عکس نہیں

(c $|f|$ ریمان تکمل پذیر ہوگا اور عکس بھی صحیح ہوگا

(d کوئی نہیں

7. اگر $f \in R[a,b]$ اور $k \in R$ تب $kf \in R[a,b]$ اور

(a $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

(b $\int_a^b kf(x)dx \neq \int_a^b k^2 f(x)dx$

(c $\int_a^b kf(x)dx \neq k\int_a^b f(x)dx$

(d کوئی نہیں

8. اگر f مسلسل تفاعل ہے وقفہ $[a,b]$ پر اور $F(x) = \int_a^x f(t)dt\, , \forall x \in [a,b]$ تب

(a $F'(x) = f(x), \forall x \in [a,b]$

(b $F'(x) = f'(x), \forall x \in [a,b]$

(c $F(x) = f'(x), \forall x \in [a,b]$

(d $F(x) = f(x), \forall x \in [a,b]$

9. اگر $f,g \in R[a,b]$ اور $g(x) \le f(x), \forall x \in [a,b]$ تب

(a $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$

(b $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

(c $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$

(d $\int_a^b f(x)dx \neq \int_a^b g(x)dx$

10. اگر $f(x) = \int_0^x \sqrt{t+t^6}dt, \forall x > 0$ تب $f'(2)$

(a $\sqrt{3(1+3^5)}$

(b $\sqrt{(3+3^7)}$

(c 0

(d $\sqrt{(3+3^6)}$

15.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. ریمان تکمل پذیر تفاعل کی کوئی پانچ خصوصیات بیان کیجیے۔
2. ریمان تکمل پذیر تفاعل کی جمع اور ضرب کی خصوصیات لکھیے۔
3. ریمان تکمل پذیر تفاعل کی تعریف کیجیے اور مثال دیجیے۔
4. اگر $f \in R[a,b]$ تب ثابت کیجیے $f^2 \in R[a,b]$
5. ایک مخالف مثال دیجیے یہ قائل کرنے کے لیے کہ تکمل پذیری کے لیے تفاعل کا مسلسل ہونا ضروری نہیں۔

15.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. اگر $f \in R[a,b]$ اور M اور m وقفہ $[a,b]$ پر $Sup\ f$ اور $Inf\ f$ ہیں تب

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a), \mu \in [m,M] \text{ اور } m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

2. اگر $f \in R[a,b]$ اور $k \in R$ تب $f \pm g \in R[a,b]$ اور

$$\int_a^b (f \pm g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

3. ثابت کیجیے کہ $4 \le \int_1^3 \sqrt{3+x^3}dx \le 2\sqrt{30}$
4. ثابت کیجیے کہ $0 < \int_0^1 \frac{xdx}{8+x^3} \le \frac{1}{9}$
5. ثابت کیجیے $\int_0^1 e^{-x} cos^2\ x\ dx < \int_0^1 e^{-x^2} cos^2\ x\ dx < \int_0^1 e^{-x^2}\ dx$
6. ثابت کیجیے $\frac{\sqrt{3}}{8} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x} dx \le \frac{\sqrt{2}}{6}$

15.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Introduction to Real Analysis, R. G. Bartle, D.R. Sherbert
2. A Text Book of Mathematics Vol. II, S. Chand
3. Real Analysis , J. N.Sharma, A. R. Vashishtha

اکائی 16۔ تکملی احصا کا اساسی قضیہ : اوسط قیمت قضیے
(Fundamental Theorem of Integral Calculus : Mean Value Theorems)

اکائی کے اجزا

16.0 تمہید(Introduction)

پچھلی اکائی میں ہم نے تکمل پذیر تفاعل کی خصوصیات کو دیکھا اور ان کے متعلقہ مسائل کو حل کرنے میں استعمال کیا۔اس اکائی میں ہم تکملی احصا کا اساسی قضیہ اور اوسط قیمت کا پہلا اور دوسرا قضیہ ثابت کر کے اسے متعلقہ مسائل کو حل کرنے میں استعمال کریں گے بھی اور یہ جانیں گے کہ تکمل حاصل جمع کی انتہا ہوتا ہے۔مسائل کو تکملی احصا کے قضیے اور اوسط قیمت کے قضیوں کو استعمال کر کے حل کریں گے۔

16.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے ختم پر طلبا مندرجہ ذیل قضیوں کو سمجھ کر ان کے متعلقہ مسائل کو حل کرنے کے قابل ہو جائیں گے:

- تکمل کا اساسی قضیہ
- اوسط قیمت کے قضیے

16.2 تکملی احصا کا اساسی قضیہ(Fundamental Theorem of Integral Calculus)

بیان: اگر f ایک مسلسل تفاعل ہے $[a,b]$ پر اور $f \in R[a,b]$ اور اگر ϕ تفرق پذیر ہے $[a,b]$ پر اس طرح سے کہ تمام $x \in [a,b]$ کے لیے $\phi'(x) = f(x)$ یعنی ϕ اولیہ(Primitive) ہے f کا تب

$$\int_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a)$$

ثبوت۔ چوں کہ ϕ تفرق پذیر ہے $[a,b]$ پر اور

$$\phi'(x) = f(x), \forall x \in [a,b] \text{ ... ...(1)}$$

اور چوں کہ $f \in R[a,b]$ اس لیے وقفہ $[a,b]$ کی ایک تقسیم $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$ اور

$$x_{r-1} \le \xi_r \le x_r, r = 1, 2,3, \dots, n$$

تب

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)\Delta\, x_r = \int_a^b f(x)dx$$

چوں کہ ϕ تفرق پذیر ہے اس لیے مسلسل بھی ہے ہر وقفہ $[x_{r-1}, x_r], r = 1, 2,3, \dots, n$ پر۔

اس لیے لگرانج کے اوسط قیمت قضیہ کے مطابق

$$\phi(x_r) - \phi(x_{r-1}) = (x_r - x_{r-1})\phi'(\xi_r), \xi_r \in (x_{r-1}, x_r), r = 1, 2,3, \dots, n$$

$$\sum_{r=1}^{n}[\phi(x_r) - \phi(x_{r-1})] = \sum_{r=1}^{n} \phi'(\xi_r)\Delta\, x_r$$

مساوات(1) سے

$$\sum_{r=1}^{n}[\phi(x_r)-\phi(x_{r-1})]=\sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)\Delta\, x_r$$

$$\Rightarrow \{\phi(x_1)-\phi(x_0)\}+\{\phi(x_2)-\phi(x_1)\}+\cdots+\{\phi(x_n)-\phi(x_{n-1})\}=\sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)\Delta\, x_r$$

$$\Rightarrow \phi(x_n)-\phi(x_0)=\sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)\Delta\, x_r$$

$$\therefore \lim_{\|P\|\to 0}[\phi(x_n)-\phi(x_0)]=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)\Delta\, x_r$$

مساوت(2) سے

$$\phi(b)-\phi(a)=\int_a^b f(x)dx$$

قضیہ ثابت ہوا۔

تبصرہ(1): اس قضیہ کو تکمل احصا کا دوسرا اساسی قضیہ بھی کہتے ہیں۔

تبصرہ(2): اگر ϕ' مسلسل ہے وقفہ $[a,b]$ پر تب $\int_a^b \phi'(x)dx=\phi(b)-\phi(a)$

مثال 1۔ ثابت کیجیے کہ $\int_0^1 x^3\, dx=\frac{1}{4}$

حل۔ چوں کہ $f(x)=x^3$ مسلسل ہے R پر اس لیے یہ $[0,1]$ پر بھی مسلسل ہو گا۔ لہٰذا $\int_0^1 x^3\, dx$ کا وجود ہو گا۔

اگر $\phi(x)=\frac{x^4}{4}$ اولیہ لیا جائے وقفہ $[0,1]$ پر تب ϕ ظاہر ہے تفرق پذیر ہے وقفہ $[0,1]$ پر اور $\phi'(x)=x^3=f(x),\forall x\in[0,1]$

لہٰذا تکمل کے اساسی قضیہ کے مطابق

$$\int_0^1 x^3\, dx=\phi(1)-\phi(0)=\frac{1^4}{4}-\frac{0^4}{4}=\frac{1}{4}$$

مثال 2۔ ثابت کرو کہ $\int_a^b e^{mx}dx=\frac{1}{m}(e^{mb}-e^{ma})$

حل۔ اگر $f(x)=e^{mx}$ تب یہ مسلسل ہے R پر اور خصوصاً $[a,b]$ پر۔ لہٰذا $\int_a^b e^{mx}dx$ کا وجود ہو گا۔

اب اگر $\phi'(x)=e^{mx}=f(x),\forall x\in[a,b]$

تب $\phi(x)=\frac{1}{m}e^{mx}$ اولیہ ہو گا۔

تب

$$\int_a^b e^{mx}dx=\phi(b)-\phi(a)$$
$$=\frac{1}{m}e^{mb}-\frac{1}{m}e^{ma}$$
$$=\frac{1}{m}(e^{mb}-e^{ma})$$

ثابت کیا گیا۔

مثال 3۔ ثابت کرو کہ $\int_a^b \cos mx\, dx = \frac{1}{m}(\sin mb - \sin ma)$

حل۔ $f(x) = \cos mx$ مسلسل ہے R پر اس لیے وقفہ $[a,b]$ پر بھی مسلسل ہوگا اور اگر $\phi(x) = \frac{\sin mx}{m}$ لیا جائے وقفہ $[a,b]$ پر تب

$$\phi'(x) = \cos mx$$

اس لیے ϕ اولیہ ہے f کا وقفہ $[a,b]$ پر۔ تب تکمل احصا کے اساسی قضیہ کے مطابق

$$\int_a^b \cos mx\, dx = \phi(b) - \phi(a) = \frac{1}{m}(\sin mb - \sin ma)$$

مثال 4۔ ثابت کیجیے کہ $f(x) = x[x]$ تکمل پذیر ہوگا وقفہ $[0,2]$ پر اور $\int_0^2 x[x]\, dx = \frac{3}{2}$

حل۔ ہم جانتے ہیں کہ $f(x) = x[x]$ نقطہ $x = 1$ پر مسلسل ہے۔ لیکن f بستہ ہے اور صرف حدود نقاط پر غیر مسلسل ہے۔ اس لیے f ریمان تکمل پذیر ہوگا وقفہ $[0,2]$ پر۔ اور

$$\int_0^2 x[x]\, dx = \int_0^1 x[x]\, dx + \int_1^2 x[x]\, dx$$
$$= \int_0^1 0\, dx + \int_1^2 x(1)\, dx$$
$$= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

مشقی سوالات:

1. ثابت کیجیے کہ $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}$
2. ثابت کیجیے کہ $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{6}$

16.3 تکمل حاصل جمع کی انتہا کے طور پر (Integral as a Limit of a Sum)

قضیہ 1۔ اگر $f \in R[a,b]$ تب $\int_a^b f(x)dx = lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} hf(a+rh)$، جہاں $h = \frac{b-a}{n}$

ثبوت۔ چوں کہ $f \in R[a,b]$ اور تقسیم $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$ کو یوں بھی لکھا جاسکتا ہے

$$P = \{a, a+h, \quad a+2h, \dots, a+nh = b\}$$

تب ہر تحت وقفہ کا طول $h = \frac{b-a}{n}$ ہوگا اور $I_r = [a+(r-1)h, a+rh]$

اگر $a + (r-1)h \le \xi_r \le a + rh$، جہاں $r = 1,2,3,\dots,n$

تب

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)\Delta x_r$$
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} hf(a+rh)\,; \xi_r = a + rh$$

تبصرہ(1): سلسلہ کو اس طرح لکھو $lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right)$

تبصرہ(2): $\frac{r}{n}$ کے عوض x اور $\frac{1}{n}$ کے عوض dx لکھو۔

تبصرہ(3): $\lim_{n\to\infty}\sum f$ کے عوض $\int_0^1 f$ لکھو۔

مثال 5۔ تکمل حاصل جمع کی انتہا کے طور پر استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے کہ $\int_0^a \sin x\,dx = 1-\cos a$

حل۔ فرض کیجیے کہ $f(x)=\sin x$ اور f وقفہ $[a,b]$ پر مسلسل ہے۔ لہٰذا $\int_0^a \sin x\,dx$ کا وجود ہوگا۔

اب قضیہ بالا کے مطابق

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} hf(a+rh)\text{ ، } h=\frac{b-a}{n}=\frac{a}{n}$$

$$\therefore \int_0^a \sin x\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{a}{n}\sin\frac{ra}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}\left[\sin\frac{a}{n}+\sin\frac{2a}{n}+\cdots+\sin\frac{na}{n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}\left[\frac{\sin\left(\frac{a}{n}+\frac{n-1}{2}\cdot\frac{a}{n}\right)\cdot\sin\frac{na}{2n}}{\sin\frac{a}{2n}}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\left[\frac{1}{\left(\frac{\sin\frac{a}{2n}}{\frac{a}{2n}}\right)}\cdot\sin\frac{a}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\sin\frac{a}{2}\right]$$

$$= 2\frac{1}{1}\cdot\sin\frac{a}{2}\cdot\sin\frac{a}{2} = 2\sin^2\frac{a}{2} = 1-\cos a$$

مثال 6۔ تکمل $\int_0^1\frac{1}{1+x}dx = 1-\cos a$ کو حاصل جمع کی انتہا کے طور پر ظاہر کرو اور ثابت کرو کہ

$$\log 2 = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right]$$

حل۔

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right] = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{n+r}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{r}{n}}$$

$$= \int_0^1\frac{1}{1+x}dx$$

اگر $f(x)=\frac{1}{1+x}, \forall x\in[0,1]$ تب f مسلسل ہے۔ لہٰذا $f\in R[0,1]$

غور کیجیے

$$\phi(x) = log_e(1+x)\,,\forall x\in[0,1]$$
$$\phi'(x) = f(x), \forall x\in[0,1]$$

اساسی قضیہ کے مطابق

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \phi(b) - \phi(a)$$
$$= \phi(1) - \phi(0)$$
$$= \log(1+1) - \log(1+0)$$
$$= \log(2)$$

مشقی سوالات:

1. ثابت کرو کہ $\log 3 = lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n}\right]$
2. ثابت کرو کہ $1 - \cos 1 = lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{1}{n} + \sin\frac{2}{n} + \cdots + \sin\frac{n}{n}\right]$
3. ثابت کرو کہ $lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{n}{n^2+r^2} = \frac{\pi}{4}$
4. تکمل $\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$ کو حل کرو حاصل کی انتہا کو استعمال کرتے ہوئے۔

16.4 اوسط قیمت قضیے (Mean Value Theorems)

16.4.1 اوسط قیمت کا پہلا قضیہ (First Mean Value Theorem)

اگر $f \in R[a,b]$ اور m & M تفاعل کے Sup اور Inf ہیں اور $\mu \in [m, M]$ تب $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$ اور اگر تفاعل مسلسل ہے تب

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c), a \le c \le b$$

ثبوت۔ ظاہر ہے کہ $m \le f(x) \le M, \forall x \in [a,b]$

چوں کہ $f \in R[a,b]$ اور m & M مستقل ہیں اس لیے تکمل پذیر ہیں۔

لہٰذا

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx$$

اس لیے

$$(1) \cdots\cdots\cdots m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

اور چوں کہ $\mu \in [m, M]$

$$m \le \mu \le M$$

m، M اور μ مستقل ہیں اس لیے تکمل پذیر ہیں۔

اس لیے

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b \mu dx \le \int_a^b M dx$$

اس لیے

$$(2) \cdots\cdots\cdots m(b-a) \le \mu(b-a) \le M(b-a)$$

مساوات(1)اور(2)سے μ کی مناسب قیمت کے لیے

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

اور اگر f مسلسل ہے تب کسی $c \in [a,b]$ کے لیے $f(c) = \mu$ ہوگا۔ تو پھر

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

قضیہ ثابت ہوا۔

16.4.2 اوسط قیمت کا دوسرا قضیہ (Second Mean Value Theorem)

بیان: اگر $f, g \in R[a,b]$ اور $g(x) \ge 0$ or $g(x) \le 0, \forall x \in [a,b]$ تب $\mu \in [m, M]$ اس طور پر ہوگا کہ $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$ جب کہ m, M تفاعل f کے Sup اور Inf ہیں وقفہ $[a,b]$ پر۔

ثبوت۔

صورت(1): فرض کرو کہ غیر منفی تفاعل ہے یعنی $g(x) \ge 0, \forall x \in [a,b]$ چوں کہ $f \in R[a,b]$ اس لیے f بستہ ہے۔ اس لیے

$$m \le f(x) \le M, \forall x \in [a,b]$$

اور

$$mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x) [\because g(x) \ge 0]$$

$$\Rightarrow \int_a^b mg(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le \int_a^b Mg(x)dx$$

اس لیے

$$(1) \cdots\cdots\cdots m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$

اور چوں کہ $m \le f(x) \le M$ اس لیے

$$\Rightarrow \qquad mg(x) \le \mu g(x) \le Mg(x)$$

$$\Rightarrow \int_a^b mg(x)dx \le \int_a^b \mu g(x)dx \le \int_a^b Mg(x)dx$$

اس لیے

$$(2) \cdots\cdots\cdots m\int_a^b g(x)dx \le \mu\int_a^b g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$

مساوات(1)اور(2)سے مناسب μ کی قیمت کے لیے یہ ہوگا کہ

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$$

صورت(2): اگر g غیر مثبت ہے یعنی $g(x) \le 0, \forall x \in [a,b]$ تب $-g(x) \ge 0$ اور نتیجہ بالا سے

$$\int_a^b f(x)[-g(x)]dx = \mu\int_a^b -g(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$$

دونو صورتوں میں قضیہ ثابت ہوا۔

تبصرہ(1):

قضیہ بالا میں دی گئیں شرائط کے علاوہ اگر f مسلسل ہے تب $c \in [a,b]$ اس طرح سے ہے کہ

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

اس لیے کہ $\mu \in [m,M]$

اس لیے $\exists c \in [a,b]$ اور $f(c) = \mu$ ہوگا۔

تبصرہ(2) اگر $f,g \in R[a,b]$ اور $g(x) \ge 0 , \forall x \in [a,b]$ تب

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$

جہاں m, M تفاعل f کے وقفہ $[a,b]$ پر Sup اور Inf ہیں۔

مثال 7۔ ثابت کیجیے $\frac{1}{4} < \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{15}}$

حل۔ فرض کیجیے کہ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

تب $1-x^2$ مسلسل ہے R پر اور خصوصاً $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ پر

اور $\sqrt{1-x^2}$ مسلسل ہے $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ پر چوں کہ $1-x^2 > 0$

اور چوں کہ $1-x^2 \neq 0, \forall x \in \left[0,\frac{1}{4}\right]$ اس لیے $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ مسلسل ہے $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ پر۔

لہٰذا f تکمل پذیر ہے $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ پر

تب اوسط قیمت کے پہلے قضیے سے

$$\exists c \in \left(0,\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = f(c)\left(\frac{1}{4}-0\right)$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$$

$$0 < c < \left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow 0 < c^2 < \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow 0 > -c^2 > -\frac{1}{16}$$
$$\Rightarrow 1 > 1 - c^2 > \left(1 - \frac{1}{16}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} < \frac{1}{\sqrt{15}}$$

اس لیے

$$\frac{1}{4} < \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{15}}$$

مثال 8۔ اوسط قیمت قضیہ کی مدد سے قائل کرو کہ $\frac{\pi}{4} \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x \, dx \le \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

حل۔ فرض کرو کہ $f(x) = \sec x \, , x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

ظاہر ہے f مسلسل ہے لہٰذا $f \in R\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ اور اوسط قیمت کے پہلے قضیے کے مطابق

$$\exists c \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \ni \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x \, dx$$
$$= \sec c \left(\frac{\pi}{4} - 0\right)$$
$$= \frac{\pi}{4} \sec c$$
$$0 < c < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos 0 > \cos c > \cos \frac{\pi}{4}$$
$$\Rightarrow 1 < \sec c < \sqrt{2}$$
$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} \sec c < \frac{\pi}{4} \sqrt{2}$$
$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x \, dx < \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$\frac{\pi}{4} \sec c = \frac{\pi}{4}\sqrt{2}$ اور $c = 0$ کے لیے $\frac{\pi}{4} \sec c = \frac{\pi}{4}$ ہے۔ لہٰذا

$$\frac{\pi}{4} \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x \, dx \le \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

مثال 9۔ ثابت کیجیے کہ $\frac{\pi^3}{24} \le \int_0^{\pi} \frac{x^2}{5 + 3\cos x} dx \le \frac{\pi^3}{6}$

حل۔ فرض کیجیے کہ $f(x) = \frac{1}{5 + 3\cos x}$ اور $g(x) = x^2$

چوں کہ f اور g مسلسل ہیں اس لیے تکمل پذیر ہیں اور g کی علامت ایک ہے وقفہ $[0, \pi]$ پر

$$-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow 2 \le 5 + 3\cos x \le 8$$
$$\Rightarrow \frac{1}{8} \le \frac{1}{5 + 3\cos x} \le \frac{1}{2}$$

$f(x) = \frac{1}{5 + 3\cos x}$ کے لیے $\mathrm{m} = \frac{1}{8}; M = \frac{1}{2}$ وقفہ $[0, \pi]$ پر

تب اوسط قیمت کے دوسرے قضیہ کے مطابق

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{8}\int_0^\pi x^2 dx \le \int_0^\pi \frac{x^2}{5+3\cos x}dx \le \frac{1}{2}\int_0^\pi x^2 dx$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{8}\times\frac{\pi^3}{3} \le \int_0^\pi \frac{x^2}{5+3\cos x}dx \le \frac{1}{2}\times\frac{\pi^3}{6}$$

$$\therefore \frac{\pi^3}{24} \le \int_0^\pi \frac{x^2}{5+3\cos x}dx \le \frac{\pi^3}{6}$$

مثال10۔ثابت کروکہ $\frac{1}{\pi} \le \int_0^1 \frac{\sin \pi x}{1+x^2}dx \le \frac{2}{\pi}$

حل۔فرض کیجیے کہ , $g(x) = \sin \pi x\, , f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

ظاہر ہے f اور g مسلسل ہیں اس لیے $f, g \in R[0,1]$ اور $g(x) = \sin \pi x > 0, \ \ \forall x \in [0,1]$

اور چوں کہ f گھٹتا ہوا ہے۔اس لیے

$$Inf\ f = f(1) = \frac{1}{2}$$

اور

$$Sup\ f = f(0) = 1$$

تب اوسط قیمت کے قضیہ کے مطابق $\mu \in [\frac{1}{2}, 1]$ اس طور پر کہ

$$\int_0^1 \frac{\sin \pi x}{1+x^2}dx = \mu\int_0^1 \sin \pi x\, dx = f(\xi)\int_0^1 \sin \pi x\, dx = \frac{2}{\pi}$$

$$\int_0^1 \frac{\sin \pi x}{1+x^2}dx = f(\xi)\frac{2}{\pi}, \quad 0 < \xi < 1$$

لیکن

$$0 \le \xi \le 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \le f(\xi) \le 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi} \le \frac{2}{\pi}\cdot f(\xi) \le 1\cdot\frac{2}{\pi}$$

$$\therefore \frac{1}{\pi} \le \int_0^1 \frac{\sin \pi x}{1+x^2}dx \le \frac{2}{\pi}$$

مثال11۔اوسط قیمت کے قضیہ کی مدد سے ثابت کروکہ $x > log(1+x) > \frac{x}{1+x}, x \ge 0$

حل۔فرض کیجیے کہ , $g(x) = 1, f(x) = \frac{1}{1+x}$ وقفہ $[0, t]$ پر

ہم دیکھتے ہیں کہ f اور g وقفہ $[0, t]$ پر بستہ اور تکمل پذیر ہیں۔ساتھ ہی g کی ایک ہی علامت $[0, t]$ پر ہے۔تب اگر

$$0 < x < t \Rightarrow 1 < 1 + x < 1 + t$$

$$\Rightarrow 1 > \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+t}$$

تب اوسط قیمت کے دوسرے قضیہ کے مطابق $\exists\mu$ جو کہ f کی حدود $Inf\ \&\ Sup$ کے بیچ ہو گا اور

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$$

جہاں μ تفاعل کے بالائی قدروں کے درمیان ایک عدد ہے۔اس لیے

$$\int_0^t \frac{1}{1+x}dx = \mu \int_a^b 1dx = \mu t$$
$$\Rightarrow \log(1+\mathrm{t}) = \mu\mathrm{t}, \qquad \frac{1}{1+t} < \mu < 1$$

اگر $t \geq 0$ تب

$$\frac{1}{1+t} < \mu < 1 \Rightarrow \frac{1}{1+t} < \frac{\log(1+\mathrm{t})}{t} < 1$$
$$\Rightarrow \frac{t}{1+t} < \log(1+\mathrm{t}) < t$$

چنانچہ

$\frac{x}{1+x} < log(1+x) < x$ یا $x > log(1+x) > \frac{x}{1+x}$

مثال 12۔ کیا ہم $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$ کو محسوب کر سکتے ہیں $x = \frac{1}{t}$ کے ساتھ ؟

حل۔ مان کیجیے کہ $\phi(x) = \tan^{-1} x, f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in [-1,1]$

تب $\phi'(x) = \frac{1}{1+x^2} = f(x)$

تب تکمل کے اساسی قضیہ کے مطابق

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(-1)$$

اگر $x = \frac{1}{t} = g(t)$ رکھا جائے تب $g'(t) = -\frac{1}{t^2}$ اور $x = -1 \Rightarrow t = -1$ اور $x = 1 \Rightarrow t = 1$

اس لیے

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-1}^{1} \frac{-dt}{1+t^2} = -\frac{\pi}{2}$$

متبادل $x = \frac{1}{t}$ تکمل کی درست قیمت دینے میں ناکام ہے چوں کہ

$$g(t) = \frac{1}{t}, \quad g'(t) = -\frac{1}{t^2}$$

کا $0 \in [-1,1]$ پر وجود نہیں ہے۔

مثال 13۔ اوسط قیمت کے قضیہ کی تسدیق کروا گر تمام $x \in [-1,1]$ کے لیے $f(x) = x$ اور $g(x) = e^x$ ہوں۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ تمام $x \in [-1,1]$ کے لیے $f(x) = x$ اور $g(x) = e^x$ ہیں۔

ہم دیکھتے ہیں کہ f اور g وقفہ $[-1,1]$ پر مسلسل ہیں۔

اس لیے$f, g \in R[-1, 1]$اور$g(x) > 0,\ \forall x \in [-1, 1]$

اوسط قیمت قضیہ کی تمام شرائط پوری ہوئیں۔اب

$$(1) \cdots\cdots\cdots \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = \int_{-1}^{1} xe^x dx = [xe^x - e^x]_{-1}^{1} = \frac{2}{e}$$

اور

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = \int_{-1}^{1} e^x dx = [e^x]_{-1}^{1} = e - e^{-1} = \frac{e^2 - 1}{e}$$

چوں کہ $[-1, 1]$پر f مسلسل ہے۔اس لیے وہ$f(-1) = -1$اور$f(1) = 1$کے بیچ کی ہر قیمت رکھتا ہے۔

فرض کیجیے کہ $\mu = \frac{2}{e^2-1}$ ہے۔چوں کہ $e > 2$ ہوتا ہے۔اس لیے

$$e^2 > 4 \Rightarrow e^2 - 1 > 3$$

اور اگر$0 < \mu < 1$تب$\exists \xi \in [-1, 1]$اس طور پر کہ

$$(2) \cdots\cdots\cdots f(\xi) \int_{-1}^{1} g(x)dx = \frac{2}{e^2 - 1} \times \frac{e^2 - 1}{e} = \frac{2}{e}$$

مساوات(1)اور(2)سے ہم اخذ کرتے ہیں کہ

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_{-1}^{1} g(x)dx$$

چنانچہ اوسط قیمت کا قضیہ دوم کی تصدیق ہوتی ہے۔

16.5 اکتسابی نتائج(Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے بہت ہی اہم قضیہ پر بحث کی جو کہ تکملی احصا کا اساسی قضیہ کہلاتا ہے۔اس کو استعمال کرتے ہوئے چند مسئلے حل کیے۔اس کے علاوہ ہم نے اوسط قیمت کے دو قضیے بھی ثابت کیے اور ان کو استعمال کرتے ہوئے مسائل کو حل کیا۔

16.6 کلیدی الفاظ(Keywords)

اوسط قیمت قضیہ، تکملی احصا کا اساسی قضیہ

16.7 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

16.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. تکملی احصا کا اساسی قضیہ____________
2. اوسط قیمت کے پہلے قضیہ کا بیان لکھیے۔

3. $\int_{-2}^{2}|x|dx =$ ________

4. $\int_a^b \sin x\, dx =$________

5. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{\frac{3}{n}}+e^{\frac{6}{n}}+\cdots+e^{\frac{3n}{n}}\right)=$____

6. $\int_0^2 x[x]dx =$ ________

a) $\frac{2}{3}$ b) x

c) $\frac{3}{2}$ d) $x+[x]$

7. $\int_0^2[x]dx =$ ________

a) 0   b) 2

c) 1   d) کوئی نہیں

8. اگر $f(x)=x^2-4x-2$ تب f بڑھتا ہوا ہے________پر

a) $[2,\infty]$ b) $(2,\infty)$

c) $(0,\infty)$ d) $[\infty,2]$

9. تفاعل $f(x)=|x|+|x-1|+|x-2|$ تفرق پذیر ہے________پر

a) $0,1,2$ b) $0,-1,-2$

c) $-1,2$ d) کوئی نہیں

10. اگر $f(x)=x^3-2x^2+3x-2$ تب معلوم کرو کہ $c\in(0,2)$ اور $2f'(c)=f(2)-f(0)$

a) وجود نہیں ہے   b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{3}{4}$

16.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. تکملی احصا کا اساسی قضیہ بیان کیجیے۔
2. اوسط قیمت کا پہلا قضیہ بیان کیجیے۔
3. اوسط قیمت کا دوسرا قضیہ بیان کیجیے۔

16.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. تکملی احصا کا اساسی قضیہ بیان اور ثابت کیجیے۔
2. اوسط قیمت کا پہلا قضیہ بیان اور ثابت کیجیے۔

3. اوسط قیمت کا پہلا قضیہ بیان اور ثابت کیجیے۔

درجہ ذیل سوالات کو تکملی احصا کے اساسی قضیہ یا اوسط قیمت قضیہ میں سے مناسب قضیہ کا استعمال کر کے ثابت کیجیے:

4. $\frac{\pi}{4} \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x \, dx \le \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

5. $\frac{1}{4} < \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{15}}$

6. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n}\right) = \log 3$

7. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{1}{n} + \sin\frac{2}{n} + \cdots + \sin\frac{n}{n}\right) = 1 - \cos 1$

8. $\int_a^b \sin x \, dx = \cos a - \cos b$

9. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$

10. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{6}$

11. $1 < \int_0^1 \sqrt{1+x^4}\, dx < 1.414, \ i.e. \sqrt{2}$

12. $\frac{1}{3\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x}} dx < \frac{1}{3}, \ i.e. \sqrt{2}$

13. $\frac{2\pi}{13} < \frac{dx}{10+3\cos x} < 2\pi$

16.8 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Introduction to Real Analysis, R. G. Bartle, D.R. Sherbert
2. A Text Book of Mathematics Vol. II, S. Chand
3. Real Analysis , J. N.Sharma, A. R. Vashishtha

نمونہ امتحانی پرچہ

ریاضی (حقیقی تجزیہ)

BSMM401CCT

بی۔ایس سی۔(چوتھا سمسٹر)

وقت: 3 گھنٹے | نشانات: 70

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم اور حصہ سوم۔ ہر جواب کے لیے لفظوں کی تعداد اشارتاً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1۔ حصہ اول میں 10 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/خالی جگہ پر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ $10 \times 1 = 10$

2۔ حصہ دوم میں آٹھ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالات کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریبین 200 لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 6 نمبرات مختص ہیں۔ $5 \times 6 = 30$

3۔ حصہ سوم میں پانچ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالات کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریبین 500 لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 10 نمبرات مختص ہیں۔ $3 \times 10 = 30$

حصہ اول

(i) متسدع تواتر کی تعریف کیجیے۔

(ii) یک رنگی تواتر کی ایک مثال دیجیے۔

(iii) سٹ $S = \left\{\frac{1}{n} : n \in N\right\}$ کے کتنے انتہائی نقطے ہوں گے

(a 1 (b 0

(c 2 (d کوئی نہیں

(iv) اقل ترین حد بالا کی تعریف کرو۔

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ متسدق ہوگا اگر

(a $p = 1$ (b $p < 1$

(c $p > 1$ (d کوئی نہیں

(vi) بڑھتے ہوئے تواتر کی ایک مثال دو۔

(vii) یکساں تسلسل کی ایک مثال دیجیے۔

(viii) تفاعل $f(x) = |x|$، $x = 0$ پر تسلسل ہے مگر مشتق پذیر نہیں۔ صحیح\غلط

(ix) رول کا نظریہ کو بیان کیجیے۔

(x) کوشی کے اوسط قیمت نظریہ کو بیان کیجیے۔

حصہ دوم

2. بتلاؤ کہ دو کھلے سٹوں کا اتحاد (union) بھی ایک کھلا سٹ ہو گا۔

3. بتلاؤ کہ لا متناہی بند سٹوں کا تقاطع بھی ایک بند سٹ ہے۔ کیا یہ بیان اتحاد (union) کے لیے درست ہے ایک مثال کے ذریعہ سمجھایئے۔

4. بتلاؤ کہ $<S_n>_{n=1}^{\infty}$ جہاں $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$ ہے ایک متدق تواتر ہے۔

5. سلسلہ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{logn}{2n^3-1}$ کے استدقاق کی جانچ کرو۔

6. بتلاؤ کہ سلسلہ $\frac{\sqrt{1}}{1} + \frac{\sqrt{2}}{5} + \frac{\sqrt{3}}{8} + \cdots$ متدق ہے۔

7. تکملی جانچ کے استعمال سے بتلاؤ کہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\ (p > 0)$ متدق ہے اگر $p > 1$ اور مستبع ہے اگر $p \leq 1$۔

8. اگر $f(x) = \frac{1-cos2x}{1-cos\,4x}\ (x \neq 0)$ اور $f(0) = 2/3$ تب $f(x)$ کے تسلسل ہونے کا امتحان کرو۔

9. تفاعل $f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ کی $x = 0$ پر تفرق پذیری کی جانچ کرو۔

حصہ سوم

10. بتلاؤ کہ $f(x) = |x| + |x-1|$، $x = 0,1$ پر تسلسل ہے لیکن تفرق پذیر نہیں۔

11. ثابت کرو کہ $f(x) = \frac{x\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}\right)}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}$، $f(0) = 0$ ہو تب بتلاؤ کہ $x = 0$ پر f مسلسل ہے مگر مشتق پذیر نہیں۔

12. بتلاؤ کہ ذیل میں دیے گئے سلسلے متدق ہیں۔

(i) $\frac{\sqrt{1}}{1} + \frac{\sqrt{2}}{5} + \frac{\sqrt{3}}{8} + \cdots$ (ii) $\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{3}{2\cdot3\cdot4} + \frac{5}{3\cdot4\cdot5} + \cdots$

13. لیگرانج کے اوسط قیمت قضیہ کو بیان اور ثابت کیجیے اور اس کے استعمال سے $f(x) = x(x-1)(x-2)$ کی c معلوم کیجیے جب کہ $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

14. بتلاؤ کہ $f(x) = 3x + 1$، $[1, 2]$ پر تکمل پذیر ہے نیز $\int_1^2 f(x)dx = 11/2$ ہے۔

BSMM450CCP

لیب مینول

حقیقی تجزیہ

تصدیق نامہ

تصدیق کی جاتی ہے کہ بی ایس سی (چوتھا سمسٹر) حقیقی تجزیہ کے تجرباتی حصہ کے کام کا یہ اصلی ریکارڈ ہے جسے

____

نے مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کے اسٹڈی سینٹر______________________________ میں تعلیمی سال

______________ کے دوران تیار کیا۔

تاریخ

دستخط کونسلر

بلاک 5 ۔ تواتر اور سلسلوں کے عملی مسائل

(Practical Problems on Sequences and Series)

پانچواں بلاک اکائی 17 سے 20 پر مشتمل ہے۔ جس میں حقیقی اعداد اور بستہ سٹس سے متعلق کئی تعریفات اور مسائل ہیں جو اکائی 17 میں درج ہیں۔ اکائی 18 میں تواتر اور ان کے استدقاق (Convergence) کے تجرباتی مسائل پیش کیے گئے ہیں۔ اکائی 19 اور 20 میں لا متناہی سلسلوں سے متعلق کئی مسائل اور ان کے حل دیے گئے ہیں۔

اکائی 17۔ حقیقی عددی نظام اور بستہ سٹس

(Real Number System and Bounded Sets)

17.0 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں طلبا کی مسئلہ حل صلاحیت کو بہتر بنانے کے لیے حقیقی عددی نظام اور بستہ سٹس کے کئی تعریفات، مثالیں اور بہت سے مسائل دیے گئے ہیں۔

17.1 تمہید (Introduction)

ایک ایسا حقیقی عدد جس کی شکل p/q کی ہے جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں $(p, q \epsilon \mathbb{Z})$ اور $q \neq 0$ ناطق عدد (Rational Number) کہلاتا ہے۔ ناطق اعداد کے سٹ کو ہم $\mathbb{Q}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} / \begin{matrix} p, q \in \mathbb{Z} \\ q \neq 0 \end{matrix}\right\}$

یہاں $\mathbb{Z} = \{\ldots \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots .\}$ صحیح اعداد کا سٹ ہے۔

ناطق اعداد کی مثالیں

$$\ldots . -\frac{5}{11}, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -2, -1, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{11}{9} \ldots$$

ایسا حقیقی عدد جو $\frac{p}{q}$ کی شکل کا نہ ہو غیر ناطق عدد (Irrational Number) کہلاتا ہے مثلاً

$$\ldots \ldots -\sqrt[3]{2}, -\sqrt[3]{5}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{2}, 2+\sqrt{2}, \sqrt{5}$$

اگر ہم غیر ناطق اعداد کے سٹ کو Q' سے ظاہر کریں تو $\mathbb{R} = QUQ'$ حقیقی اعداد کا سٹ یا حقیقی اعداد کا نظام کہلاتا ہے۔

تعریف: حقیقی عدد کی مطلق قیمت(Modulus of A Real Number)

حقیقی عدد کی مطلق قیمت: اگر $x \in \mathbb{R}$ ہو تب x کی مطلق قیمت جسے ہم $|x|$ سے ظاہر کرتے ہیں کی تعریف اس طرح کی گی ہے۔

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مثال: $|2| = 2$ اور $|-3| = -(-3) = 3$

مطلق قیمت کے خصوصیات(Properties of Modulus)

(i) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $|x\, y| = |x||y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(iii) $\left|\frac{x}{y}\right| = |x| \quad \forall x, y \neq 0 \in \mathbb{R}$

(iv) $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(v) $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(vi) کسی $\delta > 0$ اور $x \in \mathbb{R}$ کے لیے $|x| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x < \delta$

(vii) کسی $\delta > 0$ اور $x, a \in \mathbb{R}$ کے لیے $|x - a| < \delta \Leftrightarrow a - \delta < x < a + \delta$

بستہ اور غیر بستہ سٹس(Bounded and Unbounded Sets)

حقیقی اعداد $\mathbb{R}$ کے ایک غیر خالی سٹ A کو مجموعہ '(Aggregate)' کہتے ہیں۔

تعریف:(اوپر سے بستہ سٹ / Bounded Above Set)

اگر $A \subseteq \mathbb{R}$ اور $A \neq \phi$ تب A کو Bounded Above سٹ کہا جائے گا اگر ایک حقیقی عدد L اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $x \leq L \ \ \forall x \in A$، نیز 'L' کو A کی حد بالا(Upper Bound) کہتے ہیں۔

مثال: اگر A = {-1, 3, 7, 9, 1, 15, 18} ہو تب $18 \in \mathbb{R}$ اس طرح ہے کہ $x \leq 18 \ \ \forall x \in A$، اس طرح A اوپر سے بستہ سٹ ہے اور 18 A کی حد بالا ہے۔

نوٹ: اگر L سٹ A کی حد بالا ہو تب L سے بڑا کوئی بھی حقیقی عدد 'L'' بھی A کی حد بالا ہے، چوں کہ $L' > L$ اور $x \leq L'$ $\forall x \in A$۔

تعریف:(نیچے سے بستہ سٹ / Bounded Below Set)

اگر $A(\neq \phi) \subseteq \mathbb{R}$ ہے تب سٹ A کو نیچے سے بستہ سٹ کہتے ہیں اگر ایک $M \in \mathbb{R}$ اس طرح ہو کہ $M \leq x \ \forall x \in A$ اور 'M' کو سٹ A کی حد پائین(Lower Bound) کہتے ہیں۔ اوپر دی گئی مثال سے $-1 \in \mathbb{R}$ اس طرح ہے کہ $-1 \leq x \forall x \in A$، یہاں 1- کو A کا حد پائین کہتے ہیں۔

نوٹ: اگر M، A کی حد پائین ہے تب M سے چھوٹا ہر $M' \in \mathbb{R}$ بھی A کی حد پائین ہے۔

تعریف:(اقل ترین حد بالا / Least Upper Bound)

اگر کسی مجموعہ A کی ایک حد بالا L ہو نیز L س چھوٹا کوی عدد حد بالا نہ ہو تو L کو A کی اقل ترین حد بالا یا Least UpperBound(l.u.b) کہا جاتاہے۔حد بالا کو A کا علویہ (supremum) بھی کہا جاتا ہے۔

تعریف:(اعظم ترین حد پائین/ Greatest Lower Bound)

اگر کسی مجموعہ A کی ایک حد پائین M ہو نیز M سے بڑا کوئی بھی حقیقی عدد A کی حد پائین نہ ہو تب M کو A کی اعظم ترین حد پائین (Greatest Lower Bound) یا Infimum بھی کہتے ہیں۔

مثال 1: بستہ مجموعہ $A = \left\{\frac{1}{n}/n \in N\right\}$ کے لیے $Sup\ A = 1$ اور $Inf\ A = 0$ ہیں۔

مثال 2: اگر $A = (1,2]$ ہو تب $1 < x \le 2\ \forall x \in A$ اور $Sup\ A = 2$ اور $Inf\ A = 1$ ہیں۔

کاملیت کا علم متعارفہ (Completeness Axiom)

حقیقی اعداد کا وہ سٹ جو اوپر سے بستہ ہو ایک اقل ترین حد بالا رکھتا ہے۔اسی طرح $\mathbb{R}$ کا ایک غیر خالی تحت سٹ جو نیچے سے بستہ ہو ایک اعظم ترین حد پائین رکھتا ہے۔

آرشمیری اصول (Archimedean Property)

اگر $x > 0, y \in \mathbb{R}$ ہوں تب ایک طبعی عدد n (Natural Number) اس طرح وجود رکھتا ہے کہ n.x>y۔

وقفہ (Intervals)

$\mathbb{R}$ کا ایک تحت سٹ S (Interval) وقفہ کہلاتا ہے اگر $a, b \in S$ اور $a < x < b \implies x \in S$

مثالیں:

(1) $\emptyset$ ایک وقفہ ہے۔

(2) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ وقفے نہیں ہیں۔

(3) $S = (2,3) \cup (3,4)$ وقفہ نہیں ہے۔

(4) $A = (1,2)$ ایک وقفہ ہے۔

اگر $a, b \in \mathbb{R}$ ہو تب

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R}/a < x < b\}$ کو کھلا وقفہ (Open Interval) کہتے ہیں۔

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R}/a \le x \le b\}$ کو بند وقفہ (Closed Interval) کہتے ہیں۔

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R}/a < x \le b\}$ کو دائیں سے بند اور بائیں سے کھلا وقفہ (Right Closed And Left Open Interval) کہتے ہیں۔

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R}/a \le x < b\}$ کو دائیں سے کھلا اور بائیں سے بند وقفہ (Right Open Left Closed Interval) کہتے ہیں۔

نقطہ کی ہمسائگی (Neighbourhood of a point)

اگر $a \in \mathbb{R}$ اور $\delta > 0$ کوئی حقیقی عدد ہو تب سٹ

$N_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R}/|x-a| < \delta\} = (a-\delta, a+\delta)$ کو 'a' کی δ ہمسائگی Neighbourhood کہتے ہیں۔

مثال: اگر $a = 2$ اور $\delta = 0.1$ ہو تب N_0. $N_{0.1}(2) = (2-0.1, 2+0.1) = (1.9, 2.1)$ یعنی

$(1.9, 2.1)$، $a = 2$ کی 0.1–ہمسائگی ہے۔

تعریف: داخلی نقطہ (Interior Point)

فرض کرو کہ $A \subseteq \mathbb{R}$ اور $a \in A$۔ اگر ایک حقیقی عدد $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $a \in N_\delta(a) \subset A$ تب 'a' کو A کا داخلی نقطہ (Interior Point) کہتے ہیں۔

مثال: اگر $A = (2,5)$ تب 2.1, 3, 3.5, 4... ، A کے داخلی نقاط ہیں۔

کھلا سٹ (Open Set)

اگر $A \subset \mathbb{R}$ اور A کا ہر نقطہ 'a' A کا ایک داخلی نقطہ ہو تب A کو $\mathbb{R}$ کا ایک کھلا سٹ کہتے ہیں۔

مثال: ϕ، $\mathbb{R}$، $(1,2)$ کے کھلے سٹس ہیں۔

انتہائی نقطہ (Limit Point)

کوئی نقطہ $a \epsilon \mathbb{R}$ ایک مجموعہ A کا انتہائی نقطہ کہلاتا ہے اگر a کی ہر ہمسائگی $N_\delta(a)$ میں 'a' سے مختلف A کا کوئی نقطہ موجود ہو۔

Limit Point کو Cluster Point، Accumulation Point اور Condensation Point بھی کہا جاتا ہے۔

تعریف Derived Set:

کسی مجموعہ A کے تمام انتہائی نقاط کے سٹ کو A کا Derived Set کہتے ہیں۔ اسے $D(A)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 1: اگر $\boldsymbol{A = \left\{\frac{1}{n}/n\epsilon N\right\}}$ ہو تب $\boldsymbol{D(A) = \{0\}}$

2: کوئی محدود سٹ (Finite Set)، N اور $\mathbb{Z}$ کے کوئی بھی انتہائی نقاط نہیں ہوں گے۔

بند سٹ (Closed Set)

$\mathbb{R}$ کا ایک تحت سٹ A' closed set' کہلاتا ہے اگر $D(A) \subseteq A$ ہو یعنی A کے تمام انتہائی نقاط A میں موجود ہوں۔

مثال: $\mathbb{R}$، $[a,b]$، $\mathbb{R}$، کے بند سٹس ہیں۔

بولزانو وائر شٹراس قضیہ (Bolzano – Weierstrass Theorem)

ہر لا متناہی بستہ مجموعہ کا ایک انتہائی نقطہ ہوتا ہے۔

سٹ کا اندرون (Interior of a Set)

کسی سٹ A کے تمام داخلی نقاط کا سٹ A کا داخل یا اندرون (Interior) کہلاتا ہے۔ اسے ہم سٹ کا $Int(A)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال: $A = [1,2]$ کے لیے $Int(A) = (1,2)$ ہے۔

تعریف: سٹ کا حالہ یا گھیرا (Closure of a set)

اگر $A \subseteq \mathbb{R}$ کا closure جسے ہم $\bar{A}$ سے ظاہر کرتے ہیں کی تعریف $\bar{A} = AUD(A)$ ہے۔

مثال: فرض کرو کہ $A = (1,2]$ ہے تب $D(A) = [1,2]$ اور

$\bar{A} = AUD(A) = (1,2]U\,[1,2] = [1,2]$ ہے۔

17.2 مثالیں:

17.2.1 (i) $\delta > 0$ کے لیے $|x| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x < \delta$

(ii) $-|x| \leq x \leq |x|$

حل(i): دیا گیا ہے کہ $\delta > 0$ اور $|x| < \delta$ اگر $x \geq 0$ ہو تب $x = |x|$ اور

$$-\delta < 0 \leq x = |x| < \delta \implies -\delta < x < \delta$$
$$\therefore |x| < \delta \implies -\delta < x < \delta$$

اگر $-\delta < x < \delta$ ہو تب $x < \delta$ اور $-\delta < x$، $-\delta < x \implies \delta > -x$، $\therefore -x < \delta$، $\therefore \pm x < \delta \implies |x| < \delta$

اس طرح $|x| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x < \delta$ ہے۔

(ii) اگر $0 \leq x$ ہو تب

$$-x \leq 0 \leq x = |x|$$
$$\implies -x = -(x) = -|x| \leq x \leq |x|$$

اگر $x < 0$ ہو تب $|x| = -x$

$\therefore x < 0 < -x = |x|$ ____________ (*)

$\therefore x = -(-x) = -|x| \implies -|x| \leq x \leq |x|$

(بحوالہ (*) کے)

مثال 17.2.2

(i) $A = (1,2)$ کا Derived Set معلوم کرو۔

(ii) بتلاؤ کہ کھلے سٹوں کا لامتناہی تقاطع (Arbitrary Intersection) کھلا نہیں ہے۔

حل(i): فرض کرو کہ $x \in A = (1,2)$

x' A کا اندرونی نقطہ ہے

$\Leftarrow$ $\in > 0$ کے لیے

$(x-\in, x+\in) \cap (1,2) \neq \phi$

$\Leftarrow$ x، A کا انتہائی نقطہ ہے۔

اس طرح ہر $x \in (1,2)$، $A = (1,2)'$ کا انتہائی نقطہ ہو گا۔ نیز $(1, 1+\in) \cap (1,2) \neq \phi$ اور

$(2-\in, 2) \cap (1,2) \neq \phi$

$\Longleftarrow$ 1،2 بھی $(1, 2)$ $= A$ کے انتہائی نقاط ہیں۔

$D\,(1, 2) = [1, 2]$

(ii) $a \in \mathbb{R}$ کے لیے فرض کرو کہ $I_n = \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) \forall n = 1,2,3 \ldots \ldots$ ہر I_n ایک کھلا سٹ (open set) ہے۔

لیکن $\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ جو کہ ایک بند سٹ ہے کھلا نہیں۔

17.3 عملی مثائل:

17.3.1 بتلاؤ کہ دو کھلے سٹوں کا اتحاد (Union) بھی ایک کھلا سٹ ہو گا۔

17.3.2 بتلاؤ کہ لامتناہی بند سٹوں کا تقاطع بھی ایک بند سٹ ہے۔ کیا یہ بیان اتحاد (union) کے لیے درست ہے ایک مثال کے ذریعہ سمجھایئے۔

17.3.3 ذیل کے سٹوں کے Infimum اور supremum معلوم کرو۔

(i) $S = \left\{\frac{1}{n} / n \in N\right\}$ (ii) $S = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} / n \in N\right\}$

17.3.4 ذیل کے سٹوں کے Infimum اور Supremum معلوم کرو۔

(i) $S = \{x \in \mathbb{R}^+ / x^3 < x\}$

(ii) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle/ \begin{matrix} x > 0 \\ x^2 < 2 \end{matrix} \right\}$

17.3.5 ذیل کے سٹوں کے Derived sets معلوم کرو۔

(i) $S = \left\{\frac{1}{n} / n \in N\right\}$

(ii) $S = \left\{2 + \frac{1}{n} / n \in N\right\}$

(iii) $S = \left\{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} / m, n \in N\right\}$

اکائی 18۔ تواتر اور ان کا استدقاق

(Sequences and their Convergence)

18.0 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں آپ تواتر کی تعریف اور اس کے مختلف مثالوں کے بارے میں جان کاری حاصل کریں گے۔ نیز اس کے استدقاق (Convergence) کے طریقوں سے بھی واقف ہو کر کئی مسائل حل کر سکیں گے۔

18.1 تمہید (Introduction)

حقیقی تواتر (Real Sequence) یا تواتر (Sequence)

ایک حقیقی تواتر (Real Sequence) ایک تفاعل $f: N \to \mathbb{R}$ ہے جس میں ہر $n \in N$ کے لیے ایک $f(n)$، $\mathbb{R}$ میں ہوگا۔

اس تواتر کو ہم $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یا $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ یا $< x_n >_{n=1}^{\infty}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 1: اگر $x_n = n$ ہو تو $< x_n >_{n=1}^{\infty} = 1,2,3, \dots \dots n, \dots \dots \dots$

اگر $< x_n > = \langle (-1)^n \rangle_{n=1}^{\infty}$ ہو تب

$< x_n >_{n=1}^{\infty} = -1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1 \dots \dots \dots$

مثال 2: اگر
$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \text{ جفت} \\ -\frac{1}{n} & n \text{ طاق} \end{cases}$$

تب $< x_n > = -1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{5}, \dots \dots \dots$

مستقل تواتر (Constant Sequence)

ایک تواتر $< x_n >_{n=1}^{\infty}$ مستقل تواتر کہلاتا ہے اگر $x_n = K$ ہو $\forall n$

مثلاً $< x_n > = 2,2,2,2,2,2,2, \dots \dots \dots$ ۔

تواتر کی سعت (Range of a sequence):

تواتر کے تمام مختلف ارکان کے سٹ کو تواتر کی سعت (Range) کہتے ہیں۔

مثال: تواتر $<(-1)>_{n=1}^{\infty} = <x_n>_{n=1}^{\infty}$ کی سعت ہے $\{-1,1\}$

بستہ تواتر (Bounded Sequence):

ایک تواتر $<x_n>_{n=1}^{\infty}$ بستہ تواتر کہلاتی ہے اگر دو حقیقی اعداد k_1, k_2 اس طرح وجود رکھتے ہوں کہ $k_1 \leq x_n \leq k_2 \ \forall n$

مثال: $<(-1)^n>_{n=1}^{\infty}$ اور $<1+(-1)^n>_{n=1}^{\infty}$ بستہ تواتر ہیں۔

تواتر کی انتہا اور استدقاق (Limit and Convergence of a Sequence)

فرض کرو کہ $<x_n>_{n=1}^{\infty}$ ایک تواتر ہے۔ ایک حقیقی عدد 'l' $<x_n>_{n=1}^{\infty}$ کی انتہاء کہلاتی ہے۔ اگر ہر $\in > 0$ کے لیے ایک مثبت صحیح عدد N اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $|x_n - l| < \in \ \forall n \geq N$ اسے ہم $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

تعریف: ایک تواتر $<x_n>_{n=1}^{\infty}$، l کی طرح متدق کہلاتا ہے اگر ہر $\in > 0$ کے لیے ایک مثبت عدد m اس طرح ہو کہ $|x_n - l| < \in$ $\forall n \geq m$ یعنی $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ ہو اسے ہم $<x_n> \to l$ سے بھی ظاہر کرتے ہیں۔

(i) $<\frac{1}{n}>_{n=1}^{\infty} \to 0$ (ii) $<\frac{2n}{n+3}>_{n=1}^{\infty} \to 2$

رزلٹس:

1۔ ہر ایک متدق تواتر (Convergent Sequence) بستہ (Bounded) ہوتا ہے۔

2۔ $\lim_{n\to\infty} x_n = l \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n - l) = 0$

3۔ اگر $\lim_{n\to\infty} x_n = l, \lim_{n\to\infty} y_n = m$ تب $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = l \pm m$

4۔ اگر $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ اور $C \in \mathbb{R}$ تب $\lim_{n\to\infty} cx_n = cl$۔

5۔ اگر $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ اور $\lim_{n\to\infty} x_n = m$ تب $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = lm$

متدع تواتر (Divergent Sequence):

ایسا تواتر $<x_n>_{n=1}^{\infty}$ جو متدق نہیں ہے مسدع (Divergent) کہلاتا ہے۔ اگر تواتر بستہ نہ ہونے کی صورت میں $+\infty$ یا $-\infty$ کی طرف متدع ہوتا ہے۔

یک رنگی تواتر (Monotonic sequence) :

تواتر $<x_n>_{n=1}^{\infty}$ کو بڑھتا ہوا یک رنگی تواتر (Monotonically Increasing) کہا جاتا ہے اگر $x_{n+1} \geq x_n \forall n$

$<x_n>$ کو گھٹتا ہوا یک رنگی تواتر (Monotonically Decreasing) کہا جاتا ہے اگر $x_{n+1} \leq x_n \forall n$۔

کوشی تواتر (Cauchy Sequence):

تواتر $<x_n>$ کو کوشی تواتر کہا جاتا ہے اگر ہر $\in > 0$ کے لیے ایک مثبت صحیح عدد N اس طرح ہو گا کہ $|x_p - x_q| < \in \ \forall p, q >, N$

رزلٹس:

1۔ ایک یک رنگی تواتر متدق ہو گا $\Leftrightarrow$ وہ بستہ ہو۔

2۔ہر متسد قتواتر کو شیتواتر ہے۔

18.2 مثالیں(Examples)

18.2.1 : بتلاؤ کہ تواتر $< \frac{3n+4}{2n+1} >$ گھٹتا ہوا نیچے سے بستہ ہے(Decreasing & Bounded Below)

حل: فرض کرو کہ $x_n = \frac{3n+4}{2n+1}$

$$x_{n+1} = \frac{3(n+1)+4}{2(n+1)+1} = \frac{3n+7}{2n+3}$$

$$x_n - x_{n+1} = \frac{3n+4}{2n+1} - \frac{3n+7}{2n+3}$$

$$= \frac{5}{(2n+1)(2n+3)} > 0 \forall n \in N$$

$\Leftarrow$ $x_n > x_{n+1}$

$\Leftarrow$ (x_n)ایک گھٹتا ہوا تواتر ہے۔

نیز

$$x_n = \frac{3/2(2n+1)+5/2}{2n+1}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{5}{2(2n+1)} > \frac{3}{2} \quad \forall n \in N$$

$$\Rightarrow x_n > \frac{3}{2} \forall n \in N$$

$\Leftarrow$ $< x_n >$ نیچے سے بستہ ہے۔

18.2.2 ثابت کرو کہ $< x_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} >_{n=1}^{\infty}$ متدق(Convergent)ہے۔

حل: دیا گیا ہے کہ

$$x_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

تب

$$x_{n+1} = 2 - \frac{1}{2^{n+1-1}}$$

$$= 2 - \frac{1}{2n}$$

ہمیں معلوم ہے کہ ہر $n \in N$ کے لیے $2^n > 2^{n-1}$ ہو گا۔

$\Leftarrow$ $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-1}}$

$\Leftarrow$ $2 - \frac{1}{2^n} > 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

$\Leftarrow$ $x_{n+1} > x_n, \forall n$

$\Leftarrow$ $< x_n >$ ایک بڑھتا ہوا تواتر ہے۔

نیز

$$x_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 2 \forall n \in N$$

$\Leftarrow$ $< x_n >$ ایک بڑھتا ہوا تواتر ہے جو اوپر سے بستہ ہے۔

$\Leftarrow$ $< x_n >$ متسدق ہو گا۔

18.3 عملی مسائل

18.3.1 بتلاؤ کہ $< S_n >_{n=1}^{\infty}$ جہاں $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$ ہے ایک متسدق تواتر ہے۔

18.3.2 : بتلاؤ کہ تواتر $< x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} >$ مستدق ہوگا۔

18.3.3 : بتلاؤ کہ تواتر < $x_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}$ > ایک متدق تواتر ہوگا۔

18.3.4: ثابت کرو کہ $< x_n = \frac{n}{n^2+1} >$ گھٹتا ہوا، نیچے سے بستہ تواتر ہے۔

18.3.5 : اگر $x_n = \frac{3}{2}$ اور $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$ تب ثابت کرو کہ $> x_n >$ یک رنگی اور بستہ ہوگا۔

اکائی 19۔ لا متناہی سلسلے – I
(Infinite Series – I)

19.0 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں طلبا لا متناہی سلسلوں (Infinite Series) کی جانکاری حاصل کر کے نیز ان کے استدقاق (Convergence) کو جانچنے کے چند طریقوں سے واقف ہو جائیں گے۔

19.1 تمہید (Introduction)

پچھلی اکائی میں آپ نے حقیقی تواتر (Real Sequence) کے بارے میں معلومات حاصل کی۔ اس اکائی میں آپ اس حقیقی تواتر (Real Sequence) کے ارکان کو جوڑنے کے کانسیپٹ کا مطالعہ کریں گے۔

فرض کرو کہ $\langle x_n\rangle_{n=1}^{\infty}$ ایک لا متناہی حقیقی تواتر ہے۔ اس کے n^{th} جزوی حاصل جمع کو اس طرح ظاہر کرتے ہیں۔

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \forall n \in N$$

یعنی

$$S_1 = x_1, S_2 = x_1 + x_2, S_3 = x_1 + x_2 + x_3, \ldots ....$$

اگر تواتر $\langle S_n\rangle_{n=1}^{\infty}$ کی انتہا وجود رکھتی ہے تب ہم انتہا کی قدر (Limit Value) کو $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$ سے بیان کرتے ہیں۔ جس کو ہم لا متناہی سلسلہ (Infinite Series) کہتے ہیں۔

اگر n^{th} جزوی جمع کی تواتر $\langle S_n\rangle_{n=1}^{\infty}$، s کی طرف متدق ہو تب ہم سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ کو s کے جانب متدق (Convergent) کہیں گے۔

ایک لا متناہی ہندسہ سلسلہ $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + .. + \frac{1}{3^{n-1}} + \cdots$ (Geometric Series) پر غور کریں۔ اس میں n^{th} جذوی جمع (n^{th} Partial Sum)

$$\begin{aligned} S_n &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{\left(1-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2} \in \mathbb{R}$$

رزلٹس:

1) اگر $\sum u_n$ اور $\sum v_n$ دو لا متناہی سلسلے ہیں جو بالترتیب u اور v کی طرف متدق ہیں۔تب $\sum(u_n + v_n)$، $u + v$ کی طرف $\sum(u_n - v_n)$، $u - v$ کی طرف $\sum cu_n$، cu کی طرف متدق ہیں۔

2) اگر سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ متدق ہو تب $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ ہو گا۔

کوشی کا استدقاق کے لیے عام اُصول : (Cauchy's General Principle of Convergence)

سلسلہ $\sum u_n$ متدق ہوگا اگر اور صرف اگر ہر $0 < \in$ کے لیے ایک مثبت صحیح عدد N اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_n| < \in \quad \forall n > m \geq N$$

p – جانچ (p – Test):

مثبت ارقام کا لا متناہی سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ متدق (Convergent) ہوگا اگر $p>1$ اور مستع (Divergent) ہے اگر $p \leq 1$

مقابلہ جانچ (Comparision Test)

فرض کرو کہ $\sum u_n$ اول $\sum v_n$ دو مثبت ارقام کے دو سلسلہ ہیں۔اس طرح ہیں کہ $u_n \leq kv_n$ جہاں k ایک مستقل ہے تب

(*i*) $\sum u_n$ متدق ہوگا اگر $\sum v_n$ متدق ہو

(*ii*) $\sum v_n$ مستع ہوگا اگر $\sum u_n$ مستع ہو

انتہا مقابلہ جانچ (Limit Comparision Test)

اگر $\sum u_n$ اور $\sum v_n$ دو مثبت ارقام کے سلسلہ ہیں۔اس طرح کہ $0 \neq l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$ تب $\sum u_n$ اور $\sum v_n$ دونوں ایک ساتھ متدق یا متدرع ہوں گے۔

ہندسہ سلسلہ (Geometric Series)

ہندسہ سلسلہ $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ جہاں $r \in \mathbb{R}$ ہے، $\frac{1}{1-r}$ کی طرف متدق ہوگا اگر $|r| < 1$ ہو اور مستع ہوگا اگر $r \geq 1$

کوشی کی n^{th} جذر جانچ (Cauchys n^{th} – root test)

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ایک مثبت ارقام کا لا متناہی سلسلہ ہو اس طرح کہ $l = \lim_{n\to\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}}$ تب

(*i*) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ متدق ہوگا اگر $l < 1$ ہو

(*ii*) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ مستع ہوگا اگر $l > 1$ ہو

(*iii*) $l = 1$ کے لیے اس جانچ سے کچھ نہیں کہا جا سکتا ہے۔

19.2 مثالیں (Examples)

---

1) سلسلہ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{2n^3 - 1}$ کے استدقاق کی جانچ کرو:

حل: دیا گیا سلسلہ ہے $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{2n^3 - 1}$

ہمیں معلوم ہے کہ $n \geq 2$ کے لیے $\log n < n$ اور

$$\frac{1}{2n^3-1} \le \frac{1}{n^3}$$
$$\frac{\log n}{2n^3-1} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} \Leftarrow$$

چوں کہ $\sum \frac{1}{n^2}$ متدق ہے $p = 2 > 1$ کی وجہ سے مقابلہ جانچ کی مدد سے ہم بتا سکتے ہیں کہ $\sum \frac{\log n}{2n^3-1}$ بھی متدق ہے۔

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ کے استد قاق کی جانچ کرو۔

حل: دیا گیا سلسلہ ہے $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

فرض کرو کہ $u_n = \left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$

$$\Rightarrow u_n = \left(\frac{1}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)(1+\frac{2}{n})}\right)$$

مان لو کہ $v_n = \frac{1}{n^2}$ ہے تب $\frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)(1+\frac{2}{n})}$ اور $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{(1+0)(1+0)} = 1 \neq 0$

تب ہم انتہا مقابلہ جانچ Limit Comparision Test کی مدد سے بتا سکتے ہیں کہ $u_n \in$ اور $v_n \in$ دونوں سلسلہ متدق یا مستع ہوں گے۔

لیکن $\sum v_n = \frac{1}{n^2}$ متدق ہے، چوں کہ $p = 2 > 1$ ہے۔ اس لیے $\sum u_n = \sum \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ بھی متدق ہو گا۔

3) سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ کے استد قاق کی جانچ کرو۔

حل: دیا گیا سلسلہ ہے $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

فرض کرو کہ $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ ہے۔

تب

$$u_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n}\left[1+\sqrt{\frac{n\times 1}{n}}\right]}$$
$$= \frac{1}{n^{1/2}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}$$

اگر ہم $v_n = \frac{1}{n^{1/2}}$ لیں تب

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)} \Big/ \frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{1+\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

تب Limit Comparision Test کی مدد سے ہم بتا سکتے ہیں کہ $\sum u_n$ اور $\sum v_n$ دونوں سلسلہ متدق یا مستنع ہوں گے۔ چوں کہ $\sum v_n = \sum \frac{1}{n^{1/2}}$، $p = \frac{1}{2} < 1$ کی وجہ سے مستنع ہے۔اس لیے $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ بھی مستنع ہے۔

4) سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$ کے استد قاق کی جانچ کرو۔

حل: دیا گیا سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ہے۔

اور

$$u_n^{\frac{1}{n}} = \left[n\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]^{1/n}$$

$$= n^{1/n}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}.\frac{2}{3}$$

$$= \frac{2}{3}\cdot \lim_{n\to\infty} n^{1/n} = \frac{2}{3}1 = \frac{2}{3} < 1$$

تب بحوالے کوشی n^{th}–جذر جانچ کے، دیا گیا سلسلہ $\sum n\left(\frac{2}{3}\right)^n$ متستد قہو گا۔

19.3 عملی مسائل

19.3.1 استد قاق کی جانچ کرو۔

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3})$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4-1})$

19.3.2 بتلاؤ کہ ذیل میں دیے گئے سلسلے مستدق ہیں۔

(i) $\frac{\sqrt{1}}{1} + \frac{\sqrt{2}}{5} + \frac{\sqrt{3}}{8} + \cdots$ (ii) $\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{3}{2\cdot3\cdot4} + \frac{5}{3\cdot4\cdot5} + \cdots$

19.3.3 استدقاق کی جانچ کرو۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)}{n(n+1)(n+2)}$$

مولانا آزاد نیشنل اُردو یونیورسٹی
मौलाना आज़ाद नेशनल उर्दू यूनिवर्सिटी
Estd. 1998
MAULANA AZAD NATIONAL URDU UNIVERSITY

19.3.4 ذیل میں دیے گئے سلسلوں کے استدقاق کی جانچ کرو۔

(a) $\sum \frac{1}{(\log n)^n}$ (b) $\sum \left(\frac{n+1}{2n+5}\right)^n$

19.3.5 استدقاق کی جانچ کرو۔

(a) $\sum \frac{x^n}{n}$

(b) $\sum \frac{1}{n^3}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$

19.3.6 بتلاؤ $\sum\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^{\left(\frac{3}{2}\right)}}$ مستدق ہے۔

اکائی 20۔لا متناہی سلسلے – II

(Infinite Series – II)

20.0 مقاصد(Objectives)

اس اکائی میں طلبا استدقاق، مطلق استدقاق(Absolute Convergence) اور مشروط استدقاق (Conditional Convergence) کے مختلف مسائل کو حل کرنے کی جانکاری حاصل کرکے دیے ہوئے لا متناہی سلسلوں کے استدقاق کی جانچ کرسکیں گے۔

20.1 تمہید(Introduction)

اکائی(19) میں ہم نے مثبت ارقام کے لا متناہی سلسلوں اور ان کے استدقاق کے متعلق سے چند مختلف جانچوں کے استعمال سے کئی مسائل کا حل معلوم کیے تھے۔اس اکائی میں ہم D' Alemberts Ratio – Test کو شی کی تکملی جانچ(Cauchys Integral Test)اور Leibnitz – Test کے متعلق مسائل کو حل کرنے کے طریقوں کے بارے میں جانکاری حاصل کریں گے۔

نسبت جانچ(Ratio – Test)

اگر $\sum u_n$ ایک مثبت ارقام کا سلسلہ اس طرح ہے کہ $l = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ تب

(i) $\sum u_n$ متدق ہوگا اگر $l < 1$ ہو

(ii) $\sum u_n$ مستبع ہوگا اگر $l > 1$ ہو

(iii) اگر $l = 1$ ہو تب اس جانچ سے کچھ نہیں کہا جاسکتا۔

کوشی تکمل جانچ(Cauchys Integral Test)

فرض کرو کہ f، $[1,\infty)$ پر غیر منفی گھٹتا ہوا تفاعل ہے۔تب سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ اور تکمل $\int_1^{\infty} f(x)dx$ دونوں متدق یا مستبع ہوں گے۔

متبادل سلسلے(Alternating Series)

سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$ کو متبادل سلسلہ کہتے ہیں۔

مثلاً $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$

مطلق استدقاق(Absolute Convergence)

اگر سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ کے لیے سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ مسدق ہو، تب سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ کو Absolute Convergent سلسلہ کہتے ہیں۔

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ مسدق ہو اور $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ مستع تو اس سلسلہ کو مشروط متدق (Conditionally Convergent) کہا جاتا ہے۔

Leibnitz Test : اگر $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ایک مثبت ارقام کی تواتر اس طرح ہے کہ

(i $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \cdots \geq u_n \geq u_{n+1} \geq \cdots$

(ii $lim_{n\to\infty} u_n = 0$

تب متبادل سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ متدق ہو گا۔

20.2 مثالیں (Examples)

---

1) استدقاق کی جانچ کرو: $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$

حل: دیا گیا سلسلہ ہے $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$

یہاں $u_o = 1$ اور $u_n = \frac{1}{n!}$

$$\therefore u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}$$

$$= \frac{1}{(n+1)} \times n!$$

$$= \frac{1}{(n+1)n!} \times n! = \frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{u_n + 1}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

نسبت جانچ (Ratio Test) کی مدد سے دیا گیا سلسلہ متدق ہو گا۔

2) سلسلہ $\sum \frac{1\cdot2\cdot3\cdots n}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}$ کے استدقاق کی جانچ کرو۔

حل: دیا گیا سلسلہ $\sum u_n = \sum \frac{1\cdot2\cdot3\cdots n}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}$ ہے۔

$$\Rightarrow u_n = \frac{1\cdot2\cdot3\cdots n}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}$$

$$\therefore u_{n+1} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdots n(n+1)}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)(2n+3)}$$

$$\therefore \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdots n(n+1)}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)(2n+3)} \times \frac{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots n}$$

$$= \frac{n+1}{2n+3} = \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n(2+3/n)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2+3/n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{u_n+1}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{2+3/n}\right)=\frac{1+0}{2+0}=\frac{1}{2}<1$$

$\Leftarrow$ نسبت جانچ کی مدد سے دیا گیا سلسلہ متدق ہوگا۔

3) تکملی جانچ کے استعمال سے بتلاؤ کہ $(p>0)$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ متدق ہے اگر $p>1$ اور مستع ہے اگر $p\le 1$

حل: دیا گیا سلسلہ ہے $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$

فرض کرو کہ $x\in[1,\infty)$ $\quad f(x)=\frac{1}{x^p}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

$f(x)$ کی تعریف سے یہ بات واضح ہے کہ $f(x)>0\ \forall x\in[1,\infty)$ اور $f(x)$، $[1,\infty)$ پر ایک گھٹتا ہوا تفاعل ہے۔

$$\therefore \int_1^{\infty}f(x)dx=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx=\int_1^{\infty}x^{-p}dx$$

$$=\frac{x^{-p+1}}{-p+1}=\left[\frac{1}{1-p}\,x^{1-p}\right]_1^{\infty}$$

$p=1$ کے لیے

$$[logx]_1^{\infty}=\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx$$

$$\therefore [logx]_1^{\infty}=log\infty-log1=\infty-0=\infty$$

$\Leftarrow$ $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx$ مستع ہے اس لیے $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ تکملی جانچ کی مدد سے مستع ہوگا جب $p=1$ ہو۔

اگر $p<1$ ہو تب

$$\int_1^{\infty}f(x)dx=\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^{\infty}$$

$$=\infty-\frac{1}{1-p}=\infty$$

$\Leftarrow$ $\int_1^{\infty}f(x)dx$، $p<1$ کے لیے مستع ہے تب $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ بھی مستع ہوگا $p<1$ کے لیے۔

اگر $p<1$ ہو تب $1-p<0$ ہے اور

$$\int_1^{\infty}f(x)dx=\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^{\infty}=0-\frac{1}{1-p}=\frac{1}{p-1}$$

$\Leftarrow$ $\int_1^{\infty}f(x)dx$، $\frac{1}{p-1}$ کی طرف متدق ہوگا اس لیے $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ بھی متدق ہے اگر $p>1$ ہو۔ اس طرح دیا گیا سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ متدق ہوگا اگر $p>1$ ہو اور مستع ہے اگر $p\le 1$

4) ثابت کرو کہ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots$ متدق ہے۔

حل: دیا گیا سلسلہ متبادل سلسلہ ہے اور $u_n = \frac{1}{n!}$ یہ واضح ہے کہ $u_n > 0$ اور $u_n > u_{n+1} \quad \forall\, n$ اور
$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$ تب Leibnitz Test کی مدد سے ہم بتا سکتے ہیں کہ دیا گیا سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ متدق ہوگا۔

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی
मौलाना आज़ाद नेशनल उर्दू युनिवर्सिटी
Estd. 1998
MAULANA AZAD NATIONAL URDU UNIVERSITY

20.3 عملی مسائل

20.3.1 نسبت جانچ(Ratio Test) کی مدد سے بتلاؤ کہ سلسلے

(i) $\sum \frac{1}{3^n+1}$ اور (ii) $\sum \frac{n^2(n+1)^2}{n!}$ متدق ہوں گے۔

20.3.2 استدقاق کی جانچ کرو $\sum \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\cdot\frac{1}{n}$

20.3.3 استد قاق کی جانچ کرو۔

(i) $\sum \frac{x^n}{n}$ (ii) $\sum \frac{x^{n-1}}{n^2+1} (x > 0)$

20.3.4 تکملی جانچ (Integral Test) کے استعمال سے بتلاؤ کہ سلسلہ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(logn)^p}$ متدق ہوگا اگر $p > 1$ ہو اور مستع ہے اگر $p \leq 1$

20.3.5 کوشی تکملی جانچ کی مدد سے بتلاؤ کہ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$ متدق ہے۔

20.3.6 استدقاق کی جانچ کرو۔

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{n}}$ اور (ii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{logn}$

20.3.7 ذیل کے سلسلوں کے لیے مطلق اور مشروط استدقاق(Absolute And Conditional Convergence) کی جانچ کرو۔

(i) $\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{5\cdot6}-\frac{1}{7\cdot8}+\cdots$ اور (ii) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{nlogn}$

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی
मौलाना आज़ाद नेशनल उर्दू युनिवर्सिटी
Estd. 1998
MAULANA AZAD NATIONAL URDU UNIVERSITY

بلاک– 6 مسلسل تفاعل-تفاعلوں کا تفرق اور تکمل کے عملی مسائل

(Practical Problems on Continuous Functions , Differentiation and Integration of Functions)

اس بلاک میں چار اکائیاں ہیں اکائی 21 سے لیکر اکائی 24 تک۔اکائی 21 میں طلبا تفاعلوں کی انتہا اور تسلسل تفاعلوں کے بارے میں جانکاری حاصل کر کے ان سے متعلق بہت سے مسائل حل کریں گے۔اکائی 22 میں تفاعلوں کے تفرق اور ان کے چند مسائل حل کریں گے۔اکائی 23 میں اوسط قیمت نظریات کے بہت سے مسائل حل کریں گے۔آخری اکائی 24 میں ریمان تکمل کے کئی مسائل کے حل معلوم کریں گے۔

اکائی 21۔ تفاعل کی انتہا اور مسلسل تفاعلات

(Limit of a Function and Continuous Functions)

21.0 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے ختم تک آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ تفاعل کی انتہا اور ایک نقطہ پر تفاعل کے تسلسل میں فرق کر سکیں گے اور ان سے متعلق کئی مسائل حل کریں گے۔

21.1 تمہید (Introduction)

اس اکائی میں تفاعل کی انتہا اور اس کے تسلسل سے متعلق کئی تعریفات اور نظریات کے بارے میں جانکاری حاصل کریں گے۔

تعریف: فرض کرو کہ $S \subseteq \mathbb{R}$، $a \in \mathbb{R}$، S کا انتہائی نقطہ ہے اور $f : S \to R$ ایک تفاعل ہے۔ایک حقیقی عدد $l \in \mathbb{R}$ تفاعل $f(x)$ کی انتہا کہلائیگی جب $x \to a$ ہوا گر ہر $\in > 0$ کے لیے ایک $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$|f(x) - l| < \in \qquad \forall |x - a| < \delta$$

اسے ہم $lim_{x \to a} f(x) = l$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

رزلٹ:

1) اگر کسی نقطہ 'a' پر کسی تفاعل کی انتہا وجود رکھتی ہے تو یہ یکتا (unique) ہوتی ہے۔

2) فرض کرو کہ $S \subseteq \mathbb{R}$ اور S سے $\mathbb{R}$، f, g دو تفاعلات ہیں اس طرح کے $a \in S'$ کے لیے $lim_{x\to a} f(x) = l$ اور $lim_{x\to a} g(x) = m$، تب

$$lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = l \pm m \text{،} lim_{x\to a}(fg)(x) = lm \text{ اور } lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l}{m} (m \neq 0, g(x) \neq 0)$$

تعریف: مسلسل تفاعل (Continuous Function)

فرض کرو کہ $S \subseteq \mathbb{R}$ اور $a \in S$، $f: S \to R$ ایک تفاعل ہے۔ f کو $x = a$ پر مسلسل کہا جاتا ہے اگر $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ یعنی ہر $\in > 0$ ایک $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $|f(x) - f(a)| <\in \quad \forall |x - a| < \delta$۔ نیز تفاعل f کو S پر مسلسل کہا جاتا ہے اگر f، S کے ہر نقطہ پر مسلسل ہو۔

نوٹ:

1) اگر f، $'a'$ پر مسلسل نہ ہو تو اسے a پر غیر مسلسل (discontinuous) کہا جاتا ہے۔

2) اگر $\lim_{x\to a} f(x) = l$ ہو لیکن $f(a) \neq l$ تو کہا جاتا ہے کہ f، $'a'$ پر ایک بر طرف شدنی عدم تسلسل (Removable discontinuity) رکھتا ہے۔

3) اگر a پر f کی سیدھے ہاتھ اور بائیں ہاتھ کی انتہائی وجود رکھتی ہے مگر مساوی نہ ہوں تو کہا جاتا ہے کہ f، $'a'$ پر Jump Discontinuity رکھتا ہے (Discontinuity Of First Kind)۔

یہ دونوں انتہائیں وجود نہ رکھتی ہوں تو f کو a پر Discontinuity Of Second Kind کہا جاتا ہے۔

تعریف: یکساں مسلسل (Uniform Continuity)

فرض کرو کہ $S \subseteq \mathbb{R}$ $f: S \to R$ ایک تفاعل ہے f کو S پر یکساں مسلسل کہا جاتا ہے اگر ہر $\in > 0$ کے لیے ایک $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$|f(x) - f(y)| <\in \quad \forall x, y \in S, |x - y| < \delta$$

رزلٹ: ہر یکساں تسلسل تفاعل تسلسل ہوگا۔

21.2 مثالیں (Examples)

1) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x}}{e^{1/x}+1}$ اگر وجود رکھتی ہو تو اسے معلوم کرو۔

حل: $x \to 0-$ کے لیے $\frac{1}{x} \to -\infty$

$$\Rightarrow e^{1/x} \to 0$$

اور $x \to 0+$ کے لیے $\frac{1}{x} \to +\infty$

$$\Rightarrow e^{-1/x} \to 0$$

اس لیے

$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^{1/x}}{e^{\frac{1}{x}}+1}=\lim_{x\to 0}+\frac{1}{1+e^{-1/x}}=\frac{1}{1+0}=1$$

اور
$$\lim_{x\to 0-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+1}=\frac{0}{0+1}=0$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+1}\neq \lim_{x\to 0+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+1}$$

اس لیے $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ وجود نہیں رکھتا۔

2) فرض کرو کہ $f(x)=\frac{x^2+x-6}{x-2}\ (x\neq 2)$ ہے۔ کیا $x=2$ پر f کی تعریف اس طرح ہو سکتی ہے کہ f، $x=2$ پر مسلسل ہو۔

حل: دیا گیا ہے $f(x)=\frac{x^2+x-6}{x-2}\ (x\neq 2)$ اور

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+3)(x-2)}{(x-2)}=\lim_{x\to 2}x+3=5$$

اگر $f(2)=5$ ہو تب $x=2$ پر $f(x)$ مسلسل ہوگا۔

3) $\in,\delta$ کی تکنیک سے بتلاؤ کہ $f(x)=5x+3$، $x=1$ پر مسلسل ہے۔

حل: دیا گیا تفاعل ہے $f(x)=5x+3$ اور $x=1$

فرض کرو کہ $0<\in$ ہے۔ اگر $|f(x)-f(1)|<\in$

$$\Longrightarrow |5x+3-8|=|5x-5|=5|x-1|<5.\frac{\in}{5}$$

(اگر $|x-1|<\delta=\frac{\in}{5}$ ہو)

$$\therefore |f(x)-f(1)|<\in \qquad \forall |x-1|<\delta=\frac{\in}{5}$$

$\Longleftarrow$ $f(x)$، $x=1$ پر مسلسل ہے۔

4) اگر تفاعل f کی تعریف اس طرح کی گئی ہے کہ

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 (x\le 0)\\ &= 5x-4\ \ (0<x<1)\\ &= 4x^2-3x\ \ (1\le x<2)\\ &= 3x+4\ \ (x\ge 2)\end{aligned}$$

تب f کے مسلسل ہونے پر بحث کرو۔ نیز غیر مسلسل ہونے کے طریقوں کو بتلاؤ۔

حل: دیا گیا تفاعل

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 (x\le 0)\\ &= 5x-4\ \ (0<x<1)\\ &= 4x^2-3x\ \ (1\le x<2)\\ &= 3x+4\ \ (x\ge 2)\end{aligned}$$

اس تفاعل کے لیے

$$f(0)=0$$

$f(1) = 4.1^2 - 3.1 = 1$
$f(2) = 3.2 + 4 = 10$

اور $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} -x^2 = 0$

$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} 5x - 4 = -4$

$\Leftarrow \lim_{x\to 0} f(x)$ وجود نہیں رکھتی ہے۔ نیز $f(x)$، $x = 0$ پر Jump Discontinuity رکھتا ہے۔

اور $\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} 5x - 4 = 1$

$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} 4x^2 - 3x = 1$

$\therefore \lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

$\Leftarrow$ $x = 1$ پر $f(x)$ مسلسل ہے۔

اور $\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} 4x^2 - 3x = 10$

$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} 3x + 4 = 10$

$\therefore \lim_{x\to 2} f(x) = 10 = f(2)$

$\Leftarrow$ $x = 2$ پر $f(x)$ مسلسل ہے۔

21.3 عملی مسائل

21.3.1 اگر $f(x) = 2x (0 \le x < 1)$

$= 4x (1 < x \le 2)$

$= 3 (x = 1)$

تب $x = 1$ پر f کے مسلسل ہونے کا امتحان کرو۔

21.3.2 ثابت کرو کہ $f(x) = x \ \sin\frac{1}{x} (x \neq 0)$

$$= 0 \ (x = 0)$$

$x = 0$ پر متسلسل ہوگا۔

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی
मौलाना आज़ाद नेशनल उर्दू यूनिवर्सिटी
Estd. 1998
MAULANA AZAD NATIONAL URDU UNIVERSITY

21.3.3 اگر $f(x) = \frac{1-cos2x}{1-cos\,4x}(x \neq 0)$ اور $f(0) = \frac{2}{3}$ تب $f(x)$ کے $x = 0$ پر مسلسل ہونے کا امتحان کرو۔

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی
मौलाना आज़ाद नेशनल उर्दू यूनिवर्सिटी
Estd. 1998
MAULANA AZAD NATIONAL URDU UNIVERSITY

21.3.4 $\in, \delta$ کی تکنیک کی مدد سے بتلاؤ کہ
$f(x) = x\, sin\frac{1}{x} (x \neq 0)$، $f(0) = 0$، $x = 0$ پر مسلسل ہوگا۔

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی
मौलाना आज़ाद नेशनल उर्दू यूनिवर्सिटी
Estd. 1998
MAULANA AZAD NATIONAL URDU UNIVERSITY

21.3.5 اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ کی تعریف اس طرح ہے کہ $f(x)=0(x\in Q)$ اور $f(x)=1(x\in\mathbb{R}-Q)$ تب بتلاؤ صرف $x=0$ پر f مسلسل ہے۔

21.3.6 بتلاؤ کہ $(0, 1)$ پر $f(x) = \frac{1}{x}$ مسلسل ہے مگر یکساں مسلسل نہیں۔

اکائی 22۔ تفرق–I

(Differentiation – I)

22.0 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے ختم کرنے تک آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ کسی تفاعل کی ایک نقطہ پر اور ایک وقفہ میں تفرق پذیری کی تعریف کر سکیں گے اور اس کی مدد سے بہت سے تفاعلات کی تفرق پذیری کی جانچ کر سکیں گے۔

22.1 تمہید (Introduction)

تعریف: فرض کرو کہ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ایک تفاعل ہے۔ نیز $p\in(a,b)$ ۔ f کو نقطہ p پر تفرق پذیر یا **مشتق پذیر** (Differentiable) کہا جاتا ہے اگر $(x\neq p)$ $\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ وجود رکھتا ہو۔

یہ انتہا بشرط وجود $x=p$ پر تفاعل کا **مشتق** کہلاتی ہے اور اسے $f'(p)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ یعنی $f'(p)=\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ اگر انتہاء $\lim_{x\to p^+}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ وجود رکھتی ہو تو کہا جاتا ہے کہ f نقطہ $x=p$ پر سیدھی طرف سے **مشتق پذیر** ہے اور اسے $R(f'(p))$ سے ظاہر کرتے ہیں اور $R(f'(p))$ کو f کا $x=p$ پر سیدھے ہاتھ کا **مشتق** کہا جاتا ہے۔ اسی طرح $L(f'(p))=\lim_{x\to p^-}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ کو بائیں ہاتھ کا **مشتق** کہا جاتا ہے

اگر $L(f'(p))=R(f'(p))$ ہو تب f کو $x=p$ پر **مشتق پذیر** کہتے ہیں نیز $f'(p)=L(f'(p))=R(f'(p))$ ہے۔

رزلٹس:

1) اگر f کسی نقطہ پر تفرق پذیر ہو تو وہ اس نقطہ پر **مسلسل** ہوگا۔

2) اگر f , g دو تفاعلات ہوں جو $c\in(a,b)$ پر **مشتق پذیر** ہوں تو ان کا حاصل جمع اور حاصل فرق دونوں c پر **مشتق پذیر** ہیں نیز $(f+g)'(c)=f'(c)+g'(c)$ اور $(f-g)'(c)=f'(c)-g'(c)$ اسی طرح ان کے حاصل ضرب اور خارج قسمت کے لیے

$$(fg)'(c)=f(c)g'(c)+f'(c)g(c)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c)=\frac{g(c)f'(c)-f(c)g'(c)}{[g(c)]^2}$$

3) اگر $A, B \subseteq \mathbb{R}$ اور نقطہ $a \in A \cap B$ پر $f: X \to Y$ اور نقطہ $f(a) \in Y$ پر $g: Y \to \mathbb{R}$ اگر مشتق پذیر ہوں تب نقطہ a پر $gof: X \to \mathbb{R}$ مشتق پذیر ہے۔ نیز $(gof)'(a) = g'(f(a)).f'(a)$ ہوگا۔

22.2 مثالیں (Examples)

1) تفاعل $f(x) = |x|$، $x = 0$ پر مسلسل ہے مگر تفرق پذیر نہیں۔

حل: دیا گیا تفاعل $f(x) = |x|$

$$\therefore f(0) = |0| = 0$$

ہمیں بتلانا ہے کہ $f(x)$، $x = 0$ پر تسلسل ہے۔

$$\therefore \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} |x| = \lim_{x\to 0-} -x = 0$$

اور $$\lim_{x\to 0+} f(x) \lim_{x\to 0+} |x| = \lim_{x\to 0+} x = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

$\Leftarrow f(x)$، $x = 0$ پر مسلسل ہوگا

نیز
$$L(f'(0)) = \lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$= \lim_{x\to 0-} \frac{|x|-0}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x}{x} = -1$$
$$R(f'(0)) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
اور
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{|x|-0}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{x} = 1$$
$$\therefore L(f'(0)) \neq R(f'(0))$$

$\Leftarrow f(x)$، $x = 0$ پر تفرق پذیر نہیں ہے۔

2) تفاعل $f(x) = \begin{Bmatrix} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{Bmatrix}$، $x = 0$ پر تفرق پذیر ہے۔

حل: دیا گیا تفاعل $f(x) = \begin{Bmatrix} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{Bmatrix}$

$$L(f'(0)) = \lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x} - 0}{x-0}$$
$$= \lim_{h\to 0+} \frac{(0-h)^2 \sin\left(\frac{1}{0-h}\right)}{-h} \quad \text{(جب } x = 0 - h \text{ فرض کریں)}$$
$$= \lim_{h\to 0+} -h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = \lim_{h\to 0+} h \sin\frac{1}{h}$$
$$= \left(\lim_{h\to 0+} h\right) \times \left(\lim_{h\to 0+} \sin\frac{1}{h}\right)$$
$$= 0 \times \lim_{h\to 0+} \sin\frac{1}{h} = 0$$
$$R(f'(0)) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x} - 0}{x-0}$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{(0+h)^2 \sin\left(\frac{1}{0+h}\right)}{0+h}$$
$$= \lim_{h\to 0+} h \sin\frac{1}{h} = \left(\lim_{h\to 0+} h\right) \times \lim_{h\to 0+} \sin\frac{1}{h}$$
$$= 0 \times \lim_{h\to 0+} \sin\frac{1}{h} = 0$$
$$\therefore L(f'(0)) = R(f'(0))$$

$\Leftarrow f(x)$، $x = 0$ پر تفرق پذیر ہے۔

(3 تفاعل $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 1 \\ 1 - x & x < 1 \end{cases}$، $x = 1$ پر تفرق پذیر نہیں ہے۔

حل: دیا ہے
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 1 \\ 1 - x & x < 1 \end{cases}$$
$$\therefore f(1) = 1^2 - 1 = 0$$

ہمیں معلوم ہے

$$L(f'(1)) = \lim_{x\to 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$
$$= \lim_{x\to 1-} \frac{1-x-0}{x-1} = \lim_{x\to 1-}(-1) = -1$$
$$R(f'(1)) = \lim_{x\to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}$$
$$= \lim_{x\to 1+} x + 1 = 1 + 1 = 2$$
$$\therefore L(f'(1)) \neq R[f'(1)]$$

$\Leftarrow f(x)$، $x = 1$ پر تفرق پذیر نہیں ہے۔

22.3 عملی مسائل

22.3.1 بتلاؤ کہ $f(x) = x \sin\frac{1}{x}\,(x \neq 0)$ اور $f(0) = 0$، $x = 0$ پر مسلسل (Continuous) ہے مگر تفرق پذیر نہیں۔

22.3.2 تفاعل $f(x) = |x - 1| + |x - 2|$ کے لیے $x = 1,2$ پر تفرق پذیری کی جانچ کرو۔

22.3.3 تفاعل $f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ کی $x = 0$ پر تفرق پذیری کی جانچ کرو۔

22.3.4 تفاعل $f(x) = \begin{cases} 1+\sin x & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 2+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ کی $x = \pi/2$ پر تفرق پذیری کی جانچ کرو۔

22.3.5 بتلاؤ کہ $f(x) = |x| + |x-1|$، $x = 0,1$ پر مسلسل ہے لیکن تفرق پذیر نہیں۔

22.3.6 فرض کرو کہ $f(x) = x\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}\right)$ اور $f(0) = 0$ تب بتلاؤ کہ $f(x)$، $x = 0$ پر مسلسل ہے مگر تفرق پذیر نہیں۔

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی
Estd. 1998
MAULANA AZAD NATIONAL URDU UNIVERSITY

اکائی 23 ۔ تفرق– II
(Differentiation – II)

23.0 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے ختم کرنے تک آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ رول، الگرانج اور کوشی کے اوسط قیمت کے نظریات کے بیانات جان کر ان کے استعمال سے بہت سے مسائل حل کر سکیں گے۔

23.1 تمہید(Introduction)

اوسط قیمت کے نظریات کسی تفاعل کی قیمتوں کو اس کے مشتق سے مربوط کرتے ہیں۔اوسط قیمت کے نظریات یہ بیان کرتے ہیں کہ وقفہ $[a,b]$ میں منحنی $y = f(x)$ پر ایک نقطہ ایسا ہوتا ہے جس پر مماس اس خط کے متوازی ہوتا ہے جو نقاط $(a, f(a))$ اور $(b, f(b))$ سے گزرتا ہے۔

رول کا نظریہ(Rolle's Theorem)

اگر تفاعل $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ اس طرح ہے کہ

i. f، $[a,b]$ پر مسلسل ہے

ii. f، (a,b) پر تفرق پذیر ہے نیز

iii. $f(a) = f(b)$

تب ایک حقیقی عدد $c \in (a,b)$ اس طور پر وجود رکھتا ہے کہ $f'(c) = 0$

لگرانج کا اوسط قیمت کا نظریہ(Lagrange's Mean Value Theorem)

اگر تفاعل $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ایسا ہو کہ

i. f وقفہ $[a,b]$ میں مسلسل ہے اور

ii. f وقفہ (a,b) میں تفرق پذیر

تب لگرانج کا نظریہ یہ بیان کرتا ہے کہ ایک $c \in (a,b)$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

کوشی کا اوسط قیمت نظریہ(Cauchys Mean Value Theorem)

اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ اور $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ دو تفاعل ایسے ہوں کہ

i) f اور g دونوں $[a,b]$ پر مسلسل ہیں

ii) f اور g دونوں (a,b) پر تفرق پذیر ہیں

iii) $g'(x)\neq 0, \forall x\in[a,b]$

تب (a,b) میں ایک نقطہ 'c' اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

23.2 مثالیں (Examples)

1) فرض کرو کہ $f(x)=(x-a)^m(x-b)^n$ ہے جہاں m,n دو مثبت صحیح اعداد ہیں۔ اس تفاعل کے لیے $[a,b]$ Rolle's کے نظریہ کی جانچ کرو۔

حل: دیا گیا تفاعل $f(x)=(x-a)^m(x-b)^n$ ہے۔ جہاں $m,n\in\mathbb{Z}^x$، چوں کہ m,n مثبت اعداد ہیں اور $(x-a)^m$، $(x-b)^n$ کو (Binomial Theorem) کی مدد سے پھیلاؤ کرنے پر یہ بات واضح ہے کہ $f(x)$ ایک کثیر رکنی ہوگا۔ چوں کہ ہر کثیر رکنی مسلسل ہے $f(x)$، $[a,b]$ پر تسلسل ہے۔

اور
$$f'(x)=m(x-a)^{m-1}(x-b)^n+n(x-b)^{n-1}(x-a)^m$$
$$=(x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}[m(x-b)+n(x-a)]$$
$$=(x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}[(m+n)x-(mb+na)]$$

$\Longleftarrow$ $\forall x\in(a,b)\ f'(x)$ وجود رکھتا ہے۔

اور $f(a)=0=f(b)$

اس طرح Rolle's کے نظریہ کے تمام شرائط پورے ہوئے۔ Rolle's کے نظریہ کے حوالے سے ایک $c\in(a,b)$ اس طرح ہوگا کہ

$$f'(c)=0$$
$$\Rightarrow (c-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}[(m+n)c-(mb+na)]=0$$
$$\Rightarrow \quad c(m+n)-(mb+na)=0$$
$$\therefore c=\frac{mb+na}{m+n}\in(a,b)$$

2) ذیل کے تفاعلوں کے لیے Rolle's کے نظریہ کی جانچ کرو۔

(a) $f(x)=|x| \quad \forall x\in[-1,1]$

(b) $f(x)=log\left(\frac{x^2+ab}{x(a+b)}\right) \quad \forall x\in[-1,1]$

حل: (a) دیا گیا تفاعل $f(x)=|x|\ \forall x\in[-1,1]$

ہمیں معلوم ہے کہ $f(x) = |x|$، $x = 0$ پر مسلسل ہے اور $x = 0$ پر $f(x)$ تفرق پذیر نہیں۔ اس لیے Rolle's کا نظریہ $f(x) = |x|$، $[-1, 1]$ میں درست نہیں۔

(b) دیا گیا تفاعل $f(x) = log\left(\frac{x^2+ab}{x(a+b)}\right)$

(i) $f(x) = \log(x^2 + ab) - logx - \log(a + b)$

چوں کہ سارے تفاعلات $\log(x^2 + ab)$، $logx$ اور $\log(a + b)$ مسلسل ہیں $[a, b]$ پر $f(x)$، $[a, b]$ پر مسلسل ہوگا۔

اور (ii) $f'(x) = \frac{2x}{x^2+ab} - \frac{1}{x} = \frac{x^2-ab}{x(x^2+ab)}$

چوں کہ وجود رکھتا ہے تمام $x \in (a, b)$ Rolle's کی دوسری شرط پوری ہوئی۔

نیز (iii) $f(a) = log\left(\frac{a^2+ab}{a(a+b)}\right) = log1 = 0$

$f(b) = log\left(\frac{b^2+ab)}{b(a+b)}\right) = log1 = 0$

$\Leftarrow$ $f(x)$، [a, b] پر Rolle's کے نظریہ کے تینوں شرائط پورے کرتا ہے اور Rolle's کے نظریہ کی مدد سے ایک $c \in (a, b)$ اس طرح ہوگا کہ

$$f'(c) = 0$$
$$\Rightarrow \frac{c^2 - ab}{c(c^2 + ab)} = 0$$
$$\Rightarrow \quad c = \pm\sqrt{ab}$$

3) لگرانج کے اوسط قیمت نظریہ کی تفاعل $f(x) = 2x^2 - 10x + 29 \quad \forall x \in [2,7]$ کے لیے جانچ کرو۔

حل: دیا گیا تفاعل $f(x) = 2x^2 - 10x + 29, \forall x \in [2,7]$ ہے۔

چوں کہ $f(x)$ ایک کثیر رکنی ہے $f(x) = 2x^2 - 10x + 29$، $[2, 7]$ پر مسلسل ہے اور $f'(x) = 4x - 10$، $[2, 7]$ پر وجود رکھتا ہے۔ اس طرح Lagrange نظریہ کے دونوں شرائط پورے ہوتے ہیں اور Lagrange کے نظریہ کی مدد سے ایک $c \in (2,7)$ اس طرح ہوگا کہ

$$f'(c) = \frac{f(7) - f(2)}{7 - 2}$$
$$\Rightarrow \quad 4c - 10 = \frac{57 - 17}{5} = \frac{40}{5} = 8$$
$$\Rightarrow \quad 4c = 18$$
$$c = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} = 4.5$$

اس طرح $c = 4.5 \in (2,7)$ کے لیے $f'(c) = \frac{f(7)-f(2)}{7-2}$ ہوگا۔

4) $f(x) = x(x-1)(x-2)\ \forall x \in [0, \frac{1}{2}]$ کے لیے لگرانج کے اوسط قیمت نظریہ کی جانچ کرو۔

حل: دیا گیا تفاعل $f(x) = x(x-1)(x-2)\ \forall x \in [0, \frac{1}{2}]$

(i) $f(x) = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ایک کثیر رکنی ہے۔اس لیے $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ پر مسلسل ہے۔

(ii) $f^1(x) = 3x^2 - 6x + 2$ $\forall x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ وجود رکھتا ہے۔

$\Leftarrow$ $f(x)$، $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ پر تفرق پذیر ہے

$\Leftarrow$ $f(x)$ لگرانج کے دونوں شرائط $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ پر پورے کرتا ہے۔

اس لیے ایک حقیقی عدد $c \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$f'(c) = \frac{f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)}{\frac{1}{2} - 0}$$

$$\Rightarrow 3c^2 - 6c + 2 = \frac{\frac{3}{8} - 0}{\frac{1}{2} - 0} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 12c^2 - 24c + 5 = 0$$

$$\Rightarrow c = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 240}}{24} = \frac{6 \pm \sqrt{21}}{6}$$

$$\Rightarrow c = 1 + \frac{\sqrt{21}}{6} \notin \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

اور $c = 1 - \frac{\sqrt{21}}{6} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

اس طرح $c = 1 - \frac{\sqrt{21}}{6} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$f'(c) = \frac{f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)}{\frac{1}{2} - 0}$$

5) کوشی اوسط قیمت نظریہ کی $[1, 2]$ پر تفاعلات $f(x) = x^2$ اور $g(x) = x^3$ کے لیے جانچ کرو۔

حل: فرض کرو کہ $f(x) = x^2, g(x) = x^3\ \ \forall x \in [1,2]$

چوں کہ x^2، x^3 کثیر رکنیاں ہیں $[1, 2]$ پر $f(x)$ اور $g(x)$ مسلسل ہیں۔

اور $f'(x) = 2x, g'(x) = 3x^2\ \ \forall x \in (1,2)$ وجود رکھتے ہیں۔

نیز $g'(x) = 3x^2 \neq 0\ \ \forall x \in (1,2)$

$\Leftarrow$ f اور g کوشی اوسط قیمت کے نظریہ کے تمام شرائط پورے کرتے ہیں اور کوشی نظریہ کی مدد سے ایک $c \in (1,2)$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(2) - f(1)}{g(2) - g(1)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2c}{3c^2} = \frac{4-1}{8-1} = \frac{3}{7}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{2}{3c} = \frac{3}{7} \Rightarrow 9c = 14$$
$$\Rightarrow \quad c = \frac{14}{9} \in (1,2)$$

23.3 عملی مسائل

23.3.1 تفاعل $f(x) = x^3 - 4x$ کے لیے $[-2, 2]$ پر رولس کے نظریہ کی جانچ کرو۔

23.3.2 $f(x) = e^x(\sin x - \cos x)$ کے لیے $\left[\frac{\pi}{4}، \frac{5\pi}{4}\right]$ پر Rolle's کے نظریہ کی جانچ کرو۔

23.3.3 $[0, 1]$ پر $f(x) = x^2(1-x)^2$ کے لیے Rolle's کے نظریہ کی جانچ کرو۔

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی
मौलाना आज़ाद नेशनल उर्दू यूनिवर्सिटी
Estd. 1998
MAULANA AZAD NATIONAL URDU UNIVERSITY

23.3.4 لگرانج کے اوسط قیمت نظریہ کی جانچ کرو تفاعل $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ کے لیے $[0, 4]$ پر۔

23.3.5 لگرانج کے اوسط قیمت کے نظریہ کی مدد سے ثابت کرو کہ $1 + x < e^x < 1 + xe^x, \ \forall x > 0$

23.3.6 $'c'$ کی قدر معلوم کرو کوشی اوسط قیمت نظریہ کے لیے ذیل کے تفاعلات کے لیے

(i) $f(x) = e^{x}, g(x) = e^{-x},\ \forall x \in [a, b]$

(ii) $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},\ \forall x \in [a, b]$

اکائی 24۔ ریمان تکمل

(Riemann Integral)

24.0 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے اختتام تک آپ سب اس قابل ہو جائیں گے کہ کسی تفاعل f کے لیے $U(P,f)$ اور $L(P,f)$ کے مثائل حل کر سکیں گے اور ریمان تکمل کی تعریف کی مدد سے بہت سے تفاعلات کے ریمان تکملے معلوم کریں گے۔

24.1 تمہید(Introduction)

تعریف: فرض کرو کہ $I=[a,b]$، $\mathbb{R}$ میں ایک بند بستہ وقفہ (Closed bounded Interval) ہے۔ I کی ایک تقسیم سے مراد محدود مرتب نقاط کا ایک سٹ $P=\{x_0,x_1,x_2,\dots x_n\}$ اس طرح ہے کہ $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$ یہاں $I_1=[x_0,x_1], I_2=[x_1,x_2],\dots .I_r=[x_{r-1},x_r]\dots\ I_n=[x_{n-1},x_n]$ بند وقفہ $[a,b]$ کے تحت وقفے ہیں اور

$$\delta_1=x_1-x_0, \delta_2=x_2-x_1,\dots\ \delta_r=x_r-x_{r-1},\dots\ \delta_n=x_n-x_{n-1}$$

ان کے طول ہیں۔ اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ایک بستہ تفاعل ہے اور $P=\{x_0,x_1,x_2,\dots\ x_{r-1},x_r,\dots\ x_n\}$، $[a,b]$ کی تقسیم ہے۔ نیز

$$m_r=\underset{x_{r-1}\le x\le x_r}{Inf} f(x)$$
$$M_r=\underset{x_{r-1}\le x\le x_r}{Sup} f(x)$$

تب $L(P,f)=\sum_{r=1}^{n} m_r\,\delta_r$ کو زیریں ریمان حاصل جمع (Lower Riemann Sum) کہتے ہیں اور $U(P,f)=\sum_{r=1}^{n} M_r\,\delta_r$ کو بالائی ریمان حاصل جمع (Upper Riemann Sum) کہتے ہیں۔

تعریف: اگر P، P^* وقفہ $[a,b]$ کے دو تقسیم اس طرح ہیں کہ $P\subset P^*$ تب P^* کو تقسیم P کی نفیس تر تقسیم یا (Refinement) کہتے ہیں۔

مثلاً اگر $P=\{2,3,4,5\}$، $[2,5]$ کی کوئی تقسیم ہے۔ تب $P^*=\{2,2.5,3,4,5\}$، P کا Refinement ہے۔

رزلٹ: فرض کرو کہ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ بستہ تفاعل ہے۔ $P=\{x_0,x_1,x_2,\dots x_{r-1},x_r,\dots x_n=b\}$، $[a,b]$ کی تقسیم اور P^*، P کا Refinement تب

$$L(P,f)\le L(P^*,f) \quad \text{(i)}$$
$$U(P^*,f)\le U(P,f) \quad \text{(ii)}$$

نوٹ:

1) ہم دیکھتے ہیں کہ کسی تقسیم کو نفیس تر (Refine) کیا جائے تو زیریں حاصل جمع بڑھتے ہیں اور بالائی حاصل جمع گھٹتے ہیں۔ $[a,b]$ کے تمام تقسیموں کے سٹ کو $\phi[a,b]$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

2) اگر $P=\{a=x_0,x_1,x_2,\dots x_{r-1},x_r\dots x_n=b\}$، $[a,b]$ کی تقسیم ہو تب $\|P\|$ کی تعریف ہے $\|P\|=\text{Max}\{\delta_1,\delta_2,\dots\delta_n\}$

تعریف: ریمان تکمل (Riemann Integral)

اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ایک بستہ تفاعل ہے تب ریمان زیریں تکمل (Lower Riemann integral) کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے۔

$\underset{P}{Sup}\{L(P,f)/P\in\phi[a,b]\}$ اسے $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

یعنی $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx=\underset{P}{Sup}\{L(P,f)/P\in\phi[a,b]\}$

اسی طرح $\int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx=\underset{P}{Inf}\{L(P,f)/P\in\emptyset[a,b]\}$ کو بالائی ریمان تکمل (Upper Riemann Integral) کہتے ہیں۔ اگر $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx$ اور $\int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx$ دونوں وجود رکھتے ہیں۔ اور $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx=\int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx$ تب f کو $[a,b]$ پر ریمان تکمل پذیر (Riemann Integrable) کہتے ہیں۔ اور مشترک قدر کو $\int_{a}^{b} f(x)dx$ سے ظاہر کرتے ہیں اور $[a,b]$ پر تمام ریمان تکمل تفاعل f کے مجموعہ کو $R[a,b]$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

رزلٹس:

1) $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx\le\int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx$

2) $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$ جہاں $m=\underset{a\le x\le b}{Inf}\ f(x)$ اور $M=\underset{a\le x\le b}{Sup}\ f(x)$

3) ایک بستہ تفاعل $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ریمان تکمل پذیر ہوگا $\Leftrightarrow$ ہر $0<\in$ کے لیے ایک تقسیم P اس طرح وجود رکھتی ہے کہ $U(P,f)-L(P,f)<\in$

4) $[a,b]$ پر ہر مسلسل تفاعل f تکمل پذیر ہوگا۔

5) اگر f وقفہ $[a,b]$ میں یک رنگی (Monotonic) ہو تو f ریمان تکمل پذیر ہے۔

6) اگر $f\in R[a,b]$ اور ϕ تفاعل f کا اولیہ (Primitive) ہو (یعنی $\phi'(x)=f(x)$) تب

$$\int_a^b f(x)dx=\phi(b)-\phi(a)$$

7) اگر $f\in R[a,b]$ تو $\int_a^b f(x)dx=\underset{n\to\infty}{Lim}\sum_{r=1}^{n} hf(a+rh)$ جہاں $h=\frac{b-a}{n}$ اور $P=\{a=x_0,x_1,x_2,\dots x_{r-1},x_r,\dots x_n=b\}$

24.2 مثالیں (Examples)

1) (i) $[0,7]$ کی تقسیم $P = \{0, .5, 1, 2.5, 3, 5.1, 6, 7\}$ کے لیے $\|P\|$ معلوم کرو۔

(ii) $[0\ ,1]$ پر تقسیم $\mathrm{P} = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ کے لیے تفاعل $f(x) = x^2$ کا $U(P, f)$ اور $L(P, f)$ معلوم کرو۔

حل: (i) $[0\ ,7]$ کی دی گئی تقسیم $P = \{0, .5, 1, 2.5, 3, 5.1, 6, 7\}$ ہے جہاں

$$\delta_1 = 0.5, \delta_2 = 0.5, \delta_3 = 1.5, \delta_4 = 0.5, \delta_5 = 2.1, \delta_6 = 0.9, \delta_7 = 1$$

تب

$$\|P\| = Max\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6, \delta_7\}$$
$$= Max\{0.5, 0.5, 1.5, 0.5, 2.1, 0.9, 1\} = 2.1$$
$$\therefore \|P\| = 2.1$$

(ii) دیا گیا تفاعل $f(x) = x^2$ ہے اور $[0, 1]$ کی تقسیم $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ یہاں $\delta_1 = \frac{1}{4} = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4$ اور

$$m_1 = \underset{a \le x \le \frac{1}{4}}{Inf}\ f(x) = x^2 = 0$$

$$m_2 = \underset{\frac{1}{4}a \le x \le \frac{1}{2}}{Inf}\ f(x) = x^2 = \frac{1}{16}$$

$$m_3 = \underset{\frac{1}{2}a \le x \le \frac{3}{4}}{Inf}\ f(x) = x^2 = \frac{1}{4}$$

$$m_4 = \underset{\frac{3}{4}a \le x \le 1}{Inf}\ f(x) = x^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$\therefore L(P, f) = \sum_{r=1}^{n} m_r \delta_r$$
$$= m_1\delta_1 + m_2\delta_2 + m_3\delta_3 + m_4\delta_4$$
$$= 0 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1 + 4 + 9}{64}$$
$$= \frac{14}{64} = \frac{7}{32}$$
$$\Rightarrow L(P, f) = \frac{7}{32}$$

اور

$$M_1 = \underset{0 \le x \le \frac{1}{4}}{Sup}\ f(x) = x^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

$$M_2 = \underset{\frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2}}{Sup}\ x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$M_3 = \underset{\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{4}}{Sup}\ x^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$M_4 = \underset{\frac{3}{4} \le x \le 1}{Sup}\ x^2 = 1^2 = 1$$

$$\therefore U(P, f) = \sum_{\mathrm{r}=1}^{4} \mathrm{m_r \delta_r}$$

$$= M_1\delta_{1+}M_2\delta_2 + M_3\delta_3 + M_4\delta_4$$
$$= \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{4}$$
$$= \frac{1+4+9+16}{6} = \frac{30}{64} = \frac{15}{32}$$
$$\therefore U(P,f) = \frac{15}{32}$$

2) فرض کرو کہ $[0,1]$ پر f کی تعریف اس طرح ہے

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ -1, & x \notin Q \end{cases}$$

تب بتلاؤ کہ $f \notin \mathrm{R}[0,1]$

حل: دیا گیا تفاعل ہے $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ -1, & x \notin Q \end{cases}$ اور یہ واضح ہے کہ $-1 \le f(x) \le 1$ ہے۔

$\Longleftarrow$ f، $[0,1]$ پر بستہ تفاعل ہے۔

فرض کرو کہ $P = \{0 = x_0, x_1, x_2, \dots x_n = 1\}$ وقفہ $[0,1]$ کی تقسیم ہے ہمیں معلوم ہے کہ $m_r = -1$ اور $M_r = 1$ ہے $\forall r = 1,2,3,\dots n$

$$\therefore U(P,f) = \sum_{r=1}^{n} M_r\delta_r = \sum_{r=1}^{4} 1\cdot\delta_r$$
$$= \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n = 1 - 0 = 1$$
$$L(P,f) = \sum_{r=1}^{n} m_r\delta_r$$
$$= \sum_{r=1}^{4} (-1)\delta_r = -1$$
$$\therefore \underline{\int_0^1} f(x)dx = \sup_P\{L(P,f)\} = Sup\{-1\} = -1$$

اور

$$\therefore \overline{\int_0^1} f(x)dx = \inf_P\{U(P,f)\} = inf\{1\} = 1$$
$$\Rightarrow \underline{\int_0^1} f(x)dx \neq \overline{\int_0^1} f(x)dx$$

$\Longleftarrow \quad f \notin R[0,1]$

3) ثابت کرو کہ $[0,a]$ پر $f(x) = x^2$ تکمل پذیر ہے اور $\int_0^a x^2dx = \frac{a^3}{3}$ ہو گا۔

حل: دیا گیا تفاعل ہے $f(x) = x^2 \quad \forall x \in [0,a]$

فرض کرو کہ $P = \left\{0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \frac{3a}{n}, \dots \frac{(r-1)a}{n}, \frac{ra}{n}, \dots a\right\}$، $[0, a]$ کی ایک تقسیم ہے اور $I_r = \left[\frac{(r-1)a}{n}, \frac{ra}{n}\right]$ تب $\delta_r = \frac{a}{n}$ ہوگا۔

چوں کہ $f(x) = x^2$، $[0, a]$ پر بڑھتا ہوا تفاعل ہے۔

$$M_r = \underset{\frac{(r-1)a}{n} \leq x \leq \frac{ra}{n}}{Sup} f(x) = x^2 = \frac{r^2 a^2}{n^2}$$

$$m_r = \underset{\frac{(r-1)a}{n} \leq x \leq \frac{r}{a}}{Inf} f(x) = x^2 = \frac{(r-1)^2 a^2}{n^2}$$

$$\therefore U(P, f) = \sum_{r=1}^{n} M_r \delta_r = \sum_{r=1}^{n} \frac{r^2 a^2}{n^2} \cdot \frac{a}{n}$$

$$= \frac{a^3}{n^3} \sum_{r=1}^{n} r^2$$

$$= \frac{a^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\therefore U(P, f) = \frac{a^3}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

اور

$$L(P, f) = \sum_{r=1}^{n} m_r \delta_r$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \frac{(r-1)^2 a^2}{n^2} \cdot \frac{a}{n}$$

$$= \frac{a^3}{n^3} \sum_{r=1}^{n} (r-1)^2 = \frac{a^3}{n^3} \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}$$

$$\therefore L(P, f) = \frac{a^3}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

$$\therefore \int_{\underline{0}}^{a} f(x)dx = \lim_{n \to \infty} L(P, f)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{a^3}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2a^3/6 = a^3/3$$

اور

$$\int_{0}^{\overline{a}} f(x)dx = \lim_{n \to \infty} U(P, f)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{a^3}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{a^3}{6} \times 2 = a^3/3$$

$\Longleftarrow$ $f \in R[0, a]$ اور $\int_0^a f(x)dx = \frac{a^3}{3}$

24.3 عملی مثائل

24.3.1 $[0,1]$ پر تفاعل $f(x) = 2x - 1$ اور تقسیم $P = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ کے لیے $L(P,f)$ اور $U(P,f)$ معلوم کرو۔

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی
मौलाना आज़ाद नेशनल उर्दू यूनिवर्सिटी
Estd. 1998
MAULANA AZAD NATIONAL URDU UNIVERSITY

24.3.2 $[0, a]$ پر تفاعل $f(x) = x^3$ کے لیے بتلاؤ کہ $\int_0^a f(x)dx = \frac{a^4}{4}$ ہے۔

24.3.3 بتلاؤ کہ $f(x) = 3x + 1$، $[1, 2]$ پر تکمل پذیر ہے نیز $\int_1^2 f(x)dx = \frac{11}{2}$ ہے۔

24.3.4 بتلاؤ $f(x) = 2x + 1$، $[1, 2]$ پر تکمل پذیر ہے اور $\int_1^2 (2x + 1)dx = 4$ ہے۔

24.3.5 ثابت کرو کہ $\int_1^2 f(x)dx = 7$ ہوگا جب $f(x) = 2x + 4$ ہے۔

24.3.6 بتلاؤ $f(x) = x$، $[a, b]$ پر تکمل پذیر ہوگا اور $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ ہے۔

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی
मौलाना आज़ाद नेशनल उर्दू यूनिवर्सिटी
Estd. 1998
MAULANA AZAD NATIONAL URDU UNIVERSITY

نمونہ امتحانی پرچہ

ریاضی(لیب مینول)

BSMM450CCP

بی۔ایس سی- (چوتھا سمسٹر)

وقت:3 Hrs — کل نمبر:35

نوٹ: درج ذیل میں سے کوئی پانچ سوالات کے جواب دیجیے — $5\times7=35$

1. بتلاؤ کہ لا متناہی بند سٹوں کا تقاطع بھی ایک بند سٹ ہے۔ کیا یہ بیان اتحاد(Union) کے لیے درست ہے ایک مثال کے ذریعہ سمجھایئے۔
2. بتلاؤ کہ تواتر $< x_n = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n} >$ ایک متدق تواتر ہوگا۔
3. استدقاق کی جانچ کرو: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)}{n(n+1)(n+2)}$
4. کوشی تکملی جانچ کی مدد سے بتلاؤ کہ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$ متدق ہے۔
5. اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ کی تعریف اس طرح ہے کہ $f(x)=0(x\in Q)$ اور $f(x)=1(x\in\mathbb{R}-Q)$ تب بتلاؤ صرف $x=0$ پر f مسلسل ہے۔
6. تفاعل $f(x)=\begin{cases}x\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ کی $x=0$ پر تفرق پذیری کی جانچ کرو۔
7. لگرانج کے اوسط قیمت کے نظریہ کی مدد سے ثابت کرو $1+x<e^x<1+xe^x \quad \forall x>0$
8. $[0,a]$ پر تفاعل $f(x)=x^3$ کے لیے بتلاؤ کہ $\int_0^a f(x)dx=\frac{a^4}{4}$ ہے۔

اہم نکات