BSMM551DSP

خطّی الجبرا

(Linear Algebra)

برائے

حصہ دوم۔لیب مینول

(Part II–Lab Manual)

بیچلر آف سائنس (بی۔ایس سی)

(پانچواں سمسٹر)

نظامت فاصلاتی تعلیم

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

حیدرآباد-32، تلنگانہ-انڈیا

تصدیق نامہ

تصدیق کی جاتی ہے کہ بی ایس سی (پانچواں سمسٹر) خطی الجبرا کے تجرباتی حصہ کے کام کا یہ اصلی ریکارڈ ہے جسے

____

نے مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کے اسٹڈی سینٹر_______________________ میں تعلیمی سال

__________ کے دوران تیار کیا۔

تاریخ

دستخط کونسلر

فہرست

بلاک 5۔ برداری فضائیں اور خطی تحویلات

(Vector Spaces and Linear Transformations)

پانچواں بلاک اکائی 1 سے 4 پر مشتمل ہے۔ جس میں برداری فضاء، تحت فضاء، اساس اور البعد سے متعلق کئی تعریفات اور مسائل ہیں جو اکائی 1 اور 2 میں درج ہیں۔ اکائی 3 اور 4 میں خطی تحویل اور اس کے ماترس کے متعلق کئی مسائل اور ان کے حل دیے گئے ہیں۔

اکائی– 1 برداری فضائیں اور تحت فضائیں

(Vector Spaces and Subspaces)

1.0 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں طلباء کی مسئلہ حل صلاحیت کو بہتر بنانے کے لیے برداری فضائیں اور تحت فضاؤں کے کئی تعریفات، مثالیں اور بہت سے مسائل دیے گئے ہیں۔

1.1 تمہید (Introduction)

تعریف: فرض کیجیے کہ $(F,+,\cdot)$ ایک میدان ہے جس کے عناصر کو میزانیں یا عددیہ (Scalars) کہتے ہیں۔ ایک غیر خالی سٹ V (جس کے عناصر کو بردار کہتے ہیں) کو برداری فضا (یا خطی فضا) کہا جاتا ہے اگر

(I) V میں ایک عمل کو متعارف کیا جائے جسے برداری جمع $(+)$ کہتے ہیں جس کے تحت V ایک تقلیبی گروپ ہے۔ یعنی $(V,+)$ ایک آبیلین گروپ ہو گا۔

i) $\forall x,y \in V, x+y \in V$

ii) $(x+y)+z = x+(y+z), \forall x,y,z \in V$

iii) $\exists \bar{0} \in V \Rightarrow x+\bar{0} = \bar{0}+x = x, \forall x \in V$ (یہاں $\bar{0}$ کو V کا صفر بردار کہتے ہیں)

iv) ہر ایک $x \in V$ کے لیے $y \in V$ اس طرح ہوگا سے کہ $x + y = y + x = \bar{0}$ یعنی $y = -x \in V$ (یہاں $y = -x$ کو بردار $x \in V$ کا جمع کے تحت معکوس کہتے ہیں)

v) $x + y = y + x, \forall x, y \in V$

II. میدان F پر برداری فضا V میں ایک بیرونی عمل '·' جسے عددیہ ضرب (Scalar Multiplication) کہتے ہیں اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$a \cdot x \in V, \forall a \in F, \forall x \in V$

III. دونوں عمل +،· درجہ ذیل خصوصیات کو مطمئن کرتے ہیں:

i) $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y, \forall x, y \in V$

ii) $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x, \forall a, b \in F$

iii) $a(bx) = (ab)x$

iv) $1 \cdot x = x, \forall x \in V$، جہاں 1 میدان F میں اکائی ہے۔

نوٹ: کسی برداری فضا میں دو طرح کے صفر عناصر وجود رکھتے ہیں۔ پہلا صفر $\bar{0} \in V$ جو جمع کے عمل کے تحت ایک برداری اکائی ہے اور دوسرا صفر $0 \in F$ ایک میزان ہے۔

تعریف: میدان F پر ایسی برداری فضا جس میں صرف صفر بردار موجود ہو یعنی $V = \{\bar{0}\}$ ہو تو اسے صفر بردار فضا یا نُل فضا (*Null Space*) کہتے ہیں۔

نوٹ: اگر کسی میدان F پر V ایک برداری فضا ہے تب اس کو $V(F)$ یا V_F یا پھر صرف V سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال: سبھی سہ ابعادی (Three Dimensional) برداروں کا سٹ $V_3(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ با عمل " + "، " · " میدان $\mathbb{R}$ پر ایک برداری فضا ہے جب کہ عمل " + "، " · " درجہ ذیل طریقہ سے متعارف ہیں:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3), \forall x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$$

$$a \cdot x = (a \cdot x_1, a \cdot x_2, a \cdot x_3), \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \& a \in \mathbb{R}$$

حل۔ دیا گیا سٹ ہے

$$V = \mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ میدان $\mathbb{R}$ پر V ایک برداری فضا ہے۔

I. پہلے ہم ثابت کریں گے کہ $(V, +)$ تقلیبی گروپ ہے۔ اس لیے

i) فرض کیجیے کہ $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in V$

چوں کہ $x_i, y_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1,2,3 \& x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 \in \mathbb{R}$

$\therefore x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in V$

$\therefore x + y \in V, \forall x, y \in V$

اس لیے V باعمل + بندشی خاصیت رکھتا ہے۔

ii) $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3), z = (z_1, z_2, z_3) \in V$ کے لیے ہمیں حاصل ہے

$$(x + y) + z = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) + (z_1, z_2, z_3)$$
$$= \big((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, (x_3 + y_3) + z_3\big)$$

چوں کہ $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1,2,3$ اور چوں کہ حقیقی اعداد کا اجماع تلازمی خاصیت کو پوری کرتا ہے۔ اس لیے

$$(x + y) + z = \big(x_1 + (y_1 + z_1) + z_1, x_2 + (y_2 + z_2), x_3 + (y_3 + z_3)\big)$$
$$= (x_1, x_2, x_3) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3)$$
$$= x + (y + z)$$

$\therefore (x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in V$

اس لیے V باعمل + تلازمی خاصیت کو پوری کرتا ہے۔

iii) تمام $x = (x_1, x_2, x_3)$ کے لیے ایک بردار $\bar{0} = (0,0,0) \in V$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$x + \bar{0} = (x_1 + 0, x_2 + 0, x_3 + 0) = (x_1, x_2, x_3) = x$$
$$\bar{0} + x = (0 + x_1, 0 + x_2, 0 + x_3) = (x_1, x_2, x_3) = x$$
$$\Rightarrow x + \bar{0} = \bar{0} + x = x, \forall x \in V$$

اس لیے صفر بردار $\bar{0} = (0,0,0) \in V$ جمع کے عمل کے تحت ایک اکائی ہے۔

iv) ہر ایک $x = (x_1, x_2, x_3) \in V$ کے لیے ایک بردار $-x = (-x_1, -x_2, -x_3) \in V$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$x + (-x) = -x + x = \bar{0}$$

اس لیے $-x = (-x_1, -x_2, -x_3) \in V$ بردار $x = (x_1, x_2, x_3) \in V$ کے لیے جمع کے عمل کے تحت ایک معکوس ہے۔

v) $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in V$ کے لیے ہمیں حاصل ہے

$$(x + y) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$
$$= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, y_3 + x_3)$$
$$= (y_1, y_2, y_3) + (x_1, x_2, x_3)$$

$= y + x$ [چوں کہ $\mathbb{R}$ جمع کے عمل کے تحت تقلیبی ہوتا ہے]

اس لیے

$$x + y = y + x, \forall x, y \in V$$

اس لیے $(V, +)$ تقلیبی گروپ ہے۔

II. اب ہم ثابت کریں گے کہ V میزانی ضرب کے تحت بند شی خاصیت کو مطمئن کرتا ہے۔

فرض کیجیے کہ $x = (x_1, x_2, x_3) \in V$ اور $a \in \mathbb{R}$ تب

$$a \cdot x = (a \cdot x_1, a \cdot x_2, a \cdot x_3) \in V \because a \cdot x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1,2,3$$

اس لیے

$$a \cdot x \in V, \qquad \forall x \in V \& \forall a \in \mathbb{R}$$

اس لیے V میزانی ضرب کے تحت بند شی خاصیت کو مطمئن کرتا ہے۔

III. فرض کیجیے کہ $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in V$ اور $a, b \in \mathbb{R}$ ہیں۔

i) اب

$$\begin{aligned} a \cdot (x + y) &= a \cdot (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \\ &= \big(a \cdot (x_1 + y_1), a \cdot (x_2 + y_2), a \cdot (x_3 + y_3)\big) \\ &= (a \cdot x_1 + a \cdot y_1, a \cdot x_2 + a \cdot y_2, a \cdot x_3 + a \cdot y_3) \\ &= (ax_1, ax_2, ax_3) + (ay_1, ay_2, ay_3) \\ &= ax + ay \end{aligned}$$

ii) پھر

$$\begin{aligned} (a + b)x &= (a + b)(x_1, x_2, x_3) \\ &= \big((a + b)x_1, (a + b)x_2, (a + b)x_3\big) \\ &= (ax_1 + bx_1, ax_2 + bx_2, ax_3 + bx_3) \\ &= (ax_1, ax_2, ax_3) + (bx_1, bx_2, bx_3) \\ &= ax + bx \end{aligned}$$

اس لیے

$$(a + b)x = ax + bx$$

iii) $a(bx) = a(bx_1, bx_2, bx_3)$

$$\begin{aligned} &= \big(a(bx_1), a(bx_2), a(bx_3)\big) \\ &= \big((ab)x_1, (ab)x_2, (ab)x_3\big) \end{aligned}$$

$= (ab)(x_1, x_2, x_3) = (ab)x$

iv) $1 \cdot x = (1 \cdot x_1, 1 \cdot x_2, 1 \cdot x_3) = (x_1, x_2, x_3) = x$

اس لیے بردری فضا کی تعریف میں بعد کی سبھی چار شرائط پوری ہوئیں۔ اس لیے $\mathbb{R}^3 = V_3(\mathbb{R})$ ایک برداری فضا ہے۔

نوٹ: اس برداری فضا کو $V_3(\mathbb{R})$ سے بھی ظاہر کرتے ہیں۔

مثال: حقیقی ضرب کے ساتھ ایک غیر متعین متحویل میں تمام کثیر رکنیوں کا سٹ، بہ لحاظ کثیر رکنیوں کے جمع اور عددیہ ضرب، میدان $\mathbb{R}$ پر، ایک برداری فضا ہوتی ہے۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ $V = \{f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n / a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$ اور کثیر رکنیاں $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$، $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$ برداری فضا V کے عناصر ہیں، جہاں $m > n$ اور $a \in \mathbb{R}$ ہے۔

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + \cdots + b_{n+1}x^{n+1} + \cdots + b_mx^m$$

$$af(x) = aa_0 + aa_1x + aa_2x^2 + \cdots + aa_nx^n$$

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $V(\mathbb{R})$ ایک برداری فضا ہے۔

I. $(V, +)$ ایک تقلیبی گروپ ہے:

i) فرض کیجیے کہ کثیر رکنیاں $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$، $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ برداری فضا V کے عناصر ہیں، جہاں $m > n$ اور $a_0, a_1, \dots b_0, b_1, \dots \in \mathbb{R}$ ہے۔

$$f(x) + g(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m)$$

$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + \cdots + b_{n+1}x^{n+1}$$

$$+ \cdots + b_mx^m [\because a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots \in \mathbb{R}]$$

$$\therefore f(x) + g(x) \in V, \forall f(x), g(x) \in V$$

ii) فرض کیجیے کہ $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$، $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$ اور $h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_lx^l \in V$

تب

$$[f(x) + g(x)] + h(x) = [(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots]$$

$$+ c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_lx^l$$

$$= [(a_0 + b_0) + c_0] + [(a_1 + b_1) + c_1]x + [(a_2 + b_2) + c_2]x^2 + \cdots$$

$$= [a_0 + (b_0 + c_0)] + [a_1 + (b_1 + c_1)]x + [a_2 + (b_2 + c_2)]x^2 + \cdots$$

$$= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) + [(b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)x + \cdots]$$

$$= f(x) + [g(x) + h(x)]$$

اس لیے

$$[f(x) + g(x)] + h(x) = f(x) + [g(x) + h(x)]$$

iii) $O = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n \in V$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ V کے تمام $f(x)$ کے لیے

$$f(x) + O = O + f(x) = f(x)$$

اس لیے O، V کی جمعی اکائی ہے۔

iv) ہر V $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \in V$ کے لیے $-f(x) = -a_0 + (-a_1)x + \cdots \in V$ اس طرح سے ہے کہ

$$f(x) + \left(-f(x)\right) = \left(-f(x)\right) + f(x) = O$$

اس لیے $-f(x) = -a_0 + (-a_1)x + (-a_2)x^2 + \cdots$ کثیر رکنی $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ کا جمعی معکوس ہے۔

v) فرض کیجیے کہ $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ اور $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ برداری فضا V کے عناصر ہیں۔ تب

$$f(x) + g(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m)$$

$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + \cdots + b_{n+1}x^{n+1}$$

$$+ \cdots + b_mx^m$$

$$= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)x + (b_2 + a_2)x^2 + \cdots [\because a_i + b_i = b_i + a_i]$$

$$= (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m) + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)$$

$$= g(x) + f(x)$$

اس لیے

$$f(x) + g(x) = g(x) + f(x), \qquad \forall g(x), f(x) \in V$$

لہٰذا $(V,+)$ ایک تقلیبی گروپ ہے۔

II. V بہ لحاظ عددیہ ضرب بندشی خاصیت کو پورا کرتا ہے:

فرض کیجیے کہ $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \in V$ اور $a \in \mathbb{R}$ ہے۔ اس لیے

$$a \cdot f(x) = a \cdot (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)$$

$$= (aa_0) + (aa_1)x + (aa_2)x^2 + \cdots [\because aa_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1,2,3, \dots]$$

اس لیے

$$a \cdot f(x) \in V, \forall f(x) \in V \& \forall a \in \mathbb{R}$$

اس لیے V بہ لحاظ عددیہ ضرب بندشی خاصیت کو پورا کرتا ہے۔

III. فرض کیجیے کہ $a, b \in \mathbb{R}$ اور $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots$ اور $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots$ برداری فضا V کے عناصر ہیں۔

تب

i) $$a \cdot [f(x) + g(x)] = a \cdot \left((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots\right)$$

$$= a(a_0 + b_0) + a(a_1 + b_1)x + a(a_2 + b_2)x^2 + \cdots$$

$$= (aa_0 + ab_0) + (aa_1 + ab_1)x + (aa_2 + ab_2)x^2 + \cdots$$

$$= [(aa_0) + (aa_1)x + (aa_2)x^2 + \cdots]$$

$$+[(ab_0) + (ab_1)x + (ab_2)x^2 + \cdots]$$

$$= a \cdot f(x) + a \cdot g(x)$$

اس لیے

$$a \cdot [f(x) + g(x)] = a \cdot f(x) + a \cdot g(x)$$

ii) اور

$$(a + b) \cdot f(x) = (a + b) \cdot (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)$$

$$= (a + b)a_0 + (a + b)a_1x + (a + b)a_2x^2 + \cdots$$

$$= [(aa_0 + ba_0) + (aa_1 + ba_1)x + (aa_2 + ba_2)x^2 + \cdots]$$

$$= [(aa_0) + (aa_1)x + (aa_2)x^2 + \cdots]$$
$$+ [(ba_0) + (ba_1)x + (ba_2)x^2 + \cdots]$$

$$= a\cdot(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) + b\cdot(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)$$

$$= a\cdot f(x) + b\cdot f(x)$$

اس لیے

$$(a+b)\cdot f(x) = a\cdot f(x) + b\cdot f(x), \forall f(x) \in V \& \forall a, b \in \mathbb{R}$$

اور (iii

$$a\big(b\cdot f(x)\big) = a\{b\cdot(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)\}$$

$$= a\{(ba_0) + (ba_1)x + (ba_2)x^2 + \cdots\}$$

$$= a(ba_0) + a(ba_1)x + a(ba_2)x^2 + \cdots$$

$$= (ab)a_0 + (ab)a_1x + (ab)a_2x^2 + \cdots$$

$$= (ab)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)$$

$$= (ab)\cdot f(x)$$

اس لیے

$$a\big(b\cdot f(x)\big) = (ab)\cdot f(x), \forall f(x) \in V \& \forall a, b \in \mathbb{R}$$

(iv

$$1\cdot f(x) = 1\cdot(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)$$

$$= (1\cdot a_0) + (1\cdot a_1)x + (1\cdot a_2)x^2 + \cdots$$

$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

$$= f(x)$$

اس طرح برداری فضا کی آخری چار شرائط پوری ہوتی ہیں۔ لہٰذا $V(\mathbb{R})$ ایک برداری فضا ہے۔

1.2: برداری فضا کی خصوصیات (Properties of Vector Space)

نظریہ: فرض کیجیے کہ V میدان F پر ایک برداری فضا ہے۔ تب $\alpha, \beta \in V$ اور $a, b \in$ F کے لیے

(i $a\cdot\bar{O} = \bar{O} = \bar{O}a, \forall a \in F$

(ii $0\cdot\alpha = \bar{O}, \forall \alpha \in V$

(iii $a(-\alpha) = (-a)\alpha = -(a\alpha), \forall \alpha \in V \& \forall a \in F$

$a \cdot (\alpha - \beta) = a\alpha - a\beta$ (iv

$a\alpha = \bar{O}, a \neq 0 \Rightarrow \alpha = \bar{0}$ (v

$a\alpha = a\beta \Rightarrow \alpha = \beta, \forall a \neq 0 \in F$ (vi

$a\alpha = b\alpha \Rightarrow a = b, \forall \alpha \neq \bar{O} \in V$، جہاں $\bar{O}$، V کی جمعی اکائی ہے اور $0 \in F$، F کی جمعی اکائی ہے یا F کا صفر عنصر ہے۔

تحت فضاء (Sub Space)

تعریف: فرض کرو کہ V میدان F پر ایک سمتی فضاء (برداری فضاء) ہے اور W، V کا غیر خالی تحت سٹ ہے۔ تب W کو F پر ایک سمتی تحت فضاء (Vector Subspace) یا تحت فضاء کہتے ہیں۔ اگر W (F) خود مختارانہ انداز میں ایک سمتی فضاء ہے، یعنی

(i) (W,+)، (V,+) کا تحت گروہی ہے (a-b ∈W ∀ a,b ∈W)

(ii) W عددیہ ضرب کے تحت بندشی خاصیت رکھتا ہے۔ (a.α ∈ W ∀ a∈ F, α ∈ W) اور

(iii) $a.(\alpha+\beta) = a\alpha+a\beta$

$(a+b).\alpha = a\alpha + b\alpha$

$a(b\alpha) = (ab)\alpha$

$1.\alpha = \alpha$

نوٹ: اگر V(F) اک سمتی فضاء ہو چونکہ $V \leq V$ ہے۔ V، F پر خود V کی تحت فضاء ہو گی۔ اسی طرح $\{\bar{0}\}$ سٹ جس میں صرف صفر بردار شامل ہے V کی تحت فضاء ہو گی۔

مثال: $\mathbb{R}(\mathbb{R})$، $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ کی تحت فضاء ہے۔

تحت فضاء کی ضروری اور کافی شرط

نظریہ 1۔ فرض کرو کہ V(F) ایک برداری فضاء ہے اور $W \subseteqq V$ تب W، V کی تحت فضاء ہے اگر اور صرف اگر

(i) $\alpha - \beta \in W \ \forall \alpha, \beta \in W$

(ii) $a.\alpha \in W \ \forall \alpha \in W \ \& \ a \in F$

(یا) (W) کو V کی تحت فضاء ہونے کی ضروری اور کافی شرائط ہیں۔

(i) $\alpha + \beta \in W \ \forall \alpha, \beta \in W$

(ii) $a.\alpha \in W, \ \forall a \in F, \alpha \in W$

نظریہ۔2 فرض کرو کہ V(F) ایک برداری فضاء ہے۔ V کا ایک غیر خالی تحت سٹ W، V کی تحت فضاء ہو گی۔ اگر اور صرف اگر

$$a\alpha+b\beta \in W \ \forall\ \alpha, \beta \in W \ \ \forall\ a, b \in F$$

مثال: بتلاؤ کہ آرڈرڈ ٹرایاڈ (p, q, o) جہاں $p,q\in F$ ہوں $V_3(F)$ کی ایک تحت فضاء ہے۔

حل: دیا گیا ہے کہ F ایک میدان ہے۔

$V_3(F) = \{(x, y, z)/x, y, z \in F\}$ ایک

سمتی فضاء ہے اور $W = \{(p, q, o)/p, q \in F\}$

ہمیں بتلانا ہے کہ W, $V_3(F)$ کی تحت فضاء ہے۔

فرض کرو کہ $x = (p,q,o), y = (r,s,o) \in W$ جہاں $p,q,r,s\in F$ ہیں اور $a,b\in F$ کے لیے

$$\begin{aligned} ax+by &= a(p,q,o)+(b(r,s,o) \\ &= (ap,aq,o)+(br,bs,o) \\ &= (ap+br, aq+bs,0)\in W \end{aligned}$$

$$(\because a,b\in F, p,q,r,s\in F \Rightarrow ap+br, aq+bs\in F)$$

$$\therefore ax+by\in W \ \ \forall\ x,y\in W \ \&\ \forall\ a,b\in F$$

$\Leftarrow$ $W(F)$ ‘$V_3(F)$ کی ایک تحت فضاء ہے۔

مثال: اگر $\mathbb{R}$ حقیقی اعداد کا میدان ہے اور $W=\{(x_1, x_2, x_3)/x_1, x_2, x_2 \in Q\}$ ہو تب کیا W‘ $V3(\mathbb{R})$ کی تحت فضاء ہو گی؟

حل: دیا گیا ہے کہ $W=\{x_1, x_2, x_3/x_1, x_2, x_2 \in Q\}$

اگر ہم $a=\sqrt{3}$ اور $\alpha=(2, 3/2, 5)\in W$ لیں

تب $a\alpha = \sqrt{3}\,(2, 3/2, 5)$

$= (2\sqrt{3}, 3/\sqrt{2}, 5\sqrt{3})\notin W$

$\therefore a.\alpha\notin W, \alpha=(2, 3/2, 5)$ اور $a=\sqrt{3}\in\mathbb{R}$

$\Leftarrow$ W عددیہ ضرب کے تحت بندشی خاصیت کو پورا نہیں کرتا ہے۔

$\Leftarrow$ $W(\mathbb{R})$ تحت فضاء نہیں ہو گی۔

نظریات: 1) ضروری اور کافی شرط

2) $W_1 \cap W_2$

(3

$$W_1 \cup W_2$$

نظریہ: دو تحت فضاؤں کا تقاطع پھر سے تحت فضا ہوتا ہے۔

نوٹ: دو تحت فضاؤں کا اجماع تحت فضا ہونا ضروری نہیں ہے۔

نظریہ: برداری فضا V(F) کے تحت فضاؤں کا تقاطع بھی تحت فضا ہے۔

دو تحت فضاؤں کا خطی جمع

فرض کیجیے کہ W_1 اور W_2 برداری فضا V(F) کے دو تحت فضائیں ہیں۔ تب ان کا خطی جمع $W_1 + W_2$ کی تعریف اس کی گئی ہے

$$W_1 + W_2 = \{\alpha_1 + \alpha_2 / \alpha_1 \in W_1, \alpha_2 \in W_2\}$$

نظریہ: اگر W_1 اور W_2 برداری فضا V(F) کے دو تحت فضائیں ہیں۔ تب

(i) $W_1 + W_2$ بھی برداری فضا V(F) کی تحت فضا ہو گی اور

(ii) $W_2 \subseteq W_1 + W_2, W_1 \subseteq W_1 + W_2$

نظریہ: دو تحت فضاؤں کا اجماع ایک تحت فضا ہو گی $\Leftrightarrow$ ایک تحت فضا دوسرے تحت فضا کا حصہ ہو۔

یا

اگر W_1 اور W_2 برداری فضا V(F) کے دو تحت فضائیں ہوں تب $W_1 \cup W_2$ بھی V(F) کی تحت فضا ہے $\Leftrightarrow$ $W_2 \subseteq W_1, W_1 \subseteq W_2$

1.3 عملی مسائل:

1.3.1 فرض کرو کہ میدان $\mathbb{R}$ پر $V = \{(a_1, a_2)/a_1, a_2 \epsilon \mathbb{R}\}$ اور

اگر $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \epsilon V, c \epsilon \mathbb{R}$

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$c.(a_1, a_2) = (ca_1, 0)$ ہو تب کیا $V(\mathbb{R})$ بحوالے '+' '.' سمتی فضاء (Vector Space) ہے۔

1.3.2 بتلاؤ کہ کھلے سقفہ (open interval) $(0, 1)$ پر تعریف شدہ حقیقی قدر والے مسلسل تفاعلوں کا سٹ V، میدان $\mathbb{R}$ پر بحوالے '+'۔ جس کی تعریف ہے

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda\big(f(x)\big)\lambda \epsilon \mathbb{R}$$ ایک سمتی فضاء ہے۔

1.3.3 بتلاؤ کہ $W = \{(x, x, x)/x\epsilon\mathbb{R}\}$ R^3 کی تحت فضاء ہے۔

$$W = \left\{(x_1, x_2, x_3/\begin{matrix} x_1, x_2, x_3\epsilon R \\ x_1 - 2\,x_2 + 3\,x_3 = 0 \end{matrix}\right\}$$

1.3.4 اگر $V = R^3$ ہو اور تب بتلاؤ کہ $V'w$ کی تحت فضاء ہو گی۔

1.3.5 ذیل کے کونسے سٹس R^3 کے تحت فضائیں ہیں۔

(a) $W = \left\{(a, b, c)/\begin{matrix} a = 3b \\ c = -b \end{matrix}\right\}$

(b) $W = \left\{\frac{a,b,c}{a} = 2 + c\right\}$

(c) $W = \left\{\frac{a,b,c}{\alpha a} - 7b + c = 0\right\}$

1.3.6 ثابت کرو کہ $W = \{(x_1, x_2, x_3) \epsilon R^3 / x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$

$'R^3$ کی تحت فضاء نہیں ہے۔

اکائی 2۔ اساس اور البعد

(Basis and Dimension)

2.0 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں طلبا کی مسئلہ حل صلاحیت کو بہتر بنانے کے لیے برداری فضاء کی اساس اور ابعد کے کئی تعریفات، مثالیں اور بہت سے مسائل دیے گئے ہیں۔

2.1 تمہید (Introduction)

خطی اجتماع اور خطی اسپان (Linear Combination &Linear Span)

فرض کرو کہ میدان F پر، V ایک برداری فضاء ہے اور $x_1, x_2, \ldots . x_n \in V$ عددیوں $c_1, c_2, \ldots . c_n \in F$ کے لیے $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots . + c_nx_n$ کو $x_1, x_2, \ldots x_n$ کا خطی اجتماع (Linear Combination) کہتے ہیں۔

اور اگر $S \subseteq V$ ہو تب $L[S] = \left\{c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n / \begin{matrix} x_1, x_2, \ldots x_n \in S \\ c_1, c_2, \ldots c_n \in F \end{matrix}\right\}$

کو ہم S کا خطی اسپان کہتے ہیں۔

نوٹ: 1) L [S]' لامتناہی ہوگا اگر S متناہی ہو یا نا ہو۔ S متناہی ہو سکتا ہے لیکن L[S] لامتناہی ہے۔

2) $S \subseteq L[S]$

نظریہ:

1) برداری فضاء V(F) کے تحت سٹ S کا خطی اسپان L[S]' V کی تحت فضا ہوگی۔

2) فرض کرو کہ $S \subseteq V(F)$' ایک تحت ہے، تب

(a) L[S]=S

(b) L[L[S]]=L[S]

3) فرض کرو کہ $S_1, S_2 \subseteq V(F)$ ہیں تب

(a) $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow L[S_1] \subseteq L[S_2]$

(b) $L[S_1 \cup S_2] = L[S_1] + L[S_2]$

تعریف: خطی طور پر غیر تابع اور تابع بردار:

(Linearly independent and dependent vectors)

فرض کرو کہ میدان F پر V ایک برداری فضاء ہے۔V کے ایک سٹ $S = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ کو خطّی طور پر غیر تابع (Linearly independent) کہتے ہیں اگر $a_1, a_2 \ldots a_n \in F$ کے لیے $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \overline{0}$

$$\Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

بردار $x_1, x_2 \ldots x_n$ کو خطّی طور پر تابع کہتے ہیں اگر کم از کم ایک غیر صفر a_i اس طرح ہو کہ $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \overline{0}$

نوٹ:

1) واحد سٹ $\{x\}(x \neq \overline{0})$ کسی بھی برداری فضاء $V(F)$ میں خطّی طور پر غیر تابع ہو گا۔

2) برداری فضاء $V(F)$ کا ہر سٹ جس میں $\overline{0}$ موجود ہو خطّی طور پر تابع ہے۔

مثال: بتلاؤ کہ $S = \{(1,1,1), (1,0,1)(0,1,0)\}$ ${R^3}'$ کا خطّی طور پر تابع سٹ ہے۔

حل: دیا گیا ہے $S = \{(1,1,1), (1,0,1)(0,1,0)\}$ اور $S \subseteq R^3$ ہے۔فرض کرو کہ $a, b, c' \in R$ کے لیے

$a(1,1,1) + b(1,0,1) + c(0,1,0) = \overline{0} = (0,0,0)$ ہے۔

$$\Rightarrow a + b = 0$$
$$a + c = 0$$
$$\Rightarrow b = c$$

اگر ہم $a = -1$ اور $b = c = 1$ لیں تب $a + b = 0$ اور $a + c = 0$ ہے۔

چونکہ a_1, a_2, a_3 صفر نہیں ہیں S خطّی طور پر تابع سٹ ہے۔

مثال: کیا $S = \{(2,1,4), (1,-1,2)(3,1,-2)\}$ \` R^3 میں خطّی طور پر غیر تابع ہے؟وضاحت کریں۔

حل: دیا گیا ہے کہ $S = \{(2,1,4), (1,-1,2)(3,1,-2)\}$، $a, b, c \in R$ کے لیے فرض کرو کہ

$$a(2,1,4) + b(1,-1,2) + c(3,1,-2) = \overline{0} = (0,0,0)$$
$$\Rightarrow (2a + b + 3c, a - b + c, 4a + 26 - 2c) = (0,0,0)$$
$$\Rightarrow 2a + b + 3c = 0$$
$$a - b + c = 0$$
$$4a + 26 - 2c = 0$$

جس کی ماترس شکل ہے

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - *$$
$$AX = 0 \Leftarrow$$

جہاں $X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ اور $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

یہاں $\det A = |A| = 24 \neq 0$

$\Leftarrow$ نظام * کا صرف صفری حل ہو گا یعنی a, b, c کے صفر قیمتیں ہونگے اس طرح کہ

$$a(2,1,4) + b(1,-1,2) + c(3,1,-2) = \overline{0}$$

$\Leftarrow$ S' خطی طور پر غیر تابع سٹ ہے۔

تعریف: اساس اور البعد (Basis and Dimensions):

فرض کرو کہ $V(F)$ ایک بر داری فضاء ہے V کا ایک سٹ S V' کی اساس (basis) کہلاتی ہے اگر

(i) $L[S] = V$ ہو اور

(ii) S خطی طور پر غیر تابع ہے۔

مثال: $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ ` R^3 کی اساس ہے۔ ایک بر داری فضاء V کی اساس میں موجود عناصر کی تعداد کو V کی البعد (dimension) کہتے ہیں جسے ہم dim V سے ظاہر کرتے ہیں۔ اگر اساس میں 'n' عناصر ہوں تو dim V=n ہو گا۔ اگر اساس میں عناصر کی تعداد متناہی نہ ہو تب V کو لا متناہی البعد کی بر داری فضاء کہتے ہیں۔

رزلٹس:

1) فرض کرو کہ V ایک بر داری فضاء ہے اور $\{x_1, x_2, \dots x_n\}$ ` V میں n بر داریں ہیں اگر $x \in v$ ان n بر داروں کا خطی اجماع ہے تب $\{x, x_1, x_2, \dots x_n\}$ ایک خطی طور پر تابع سٹ ہو گا۔

2) فرض کرو کہ V ایک ایسی بر داری فضاء ہے جس کو m بر داروں سے تکوین (spaned) کیا گیا ہے اگر V میں S، n غیر تابع بر داروں کا سٹ ہے تب $n \leq m$۔ لہٰذا ایک متناہی طور پر مکون بر داری فضاء کے دو اساسوں میں عناصر کی تعداد مساوی ہو گی۔

3) ہر متناہی البعد کی بر داری فضاء کا ایک اساس ضرور وجود رکھتا ہے۔

نظریات:

1) فرض کرو کہ $V(F)$ 'n' البعد کی ایک بر داری فضاء ہے نیز S ` V کا تحت سٹ ہے جس میں n خطی طور پر غیر تابع بر دار ہیں تب S ' V کی اساس ہو گی۔

2) متناہی البعد کے بر داری فضاء کے کسی بھی خطی طور پر غیر تابع تحت سٹ کو اساس پر توسیع دی جاسکتی ہے۔

3) اگر W_1, W_2 متناہی البعد کی بر داری فضاء $V(F)$ کے دو تحت فضائیں ہوں تب

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$

خارج قسمت فضاء(Quotient Space) :

تعریف: اگر W برداری فضاء $V(F)$ کی تحت فضاء ہے تب سٹ $V \,/\, W = \{w + x \,/\, x \in V\}$ بحوالے + اور '.' جس کی تعریف ہے۔

$$(w + x) + (w + y) = w + (x + y)$$
$$a(w + x) = w + ax$$

$\forall a \in F$ ` $\forall w + x, w + y \in V \,/\, W$ ایک برداری فضاء ہے۔ اسے ہم خارج قسمت فضاء کہتے ہیں۔

نظریہ: اگر $V(F)$ ایک متناہی البعد کی برداری فضاء ہے اور W اس کی تحت فضاء تب $\dim\left(\frac{V}{W}\right) = \dim V - \dim W$ ہے۔

2.2 عملی مسائل

2.2.1 : اگر $(x, y, z) \in R^3$ ہے جو $(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)$ کا خطی اجتماع اس طرح ہے۔

$$(x, y, z) = a(1,1,0) + b(1,0,1) + c(0,1,1)$$

تب a, b, c کے قدریں معلوم کرو۔

2.2.2: اگر $p = x^3 - 3x + 5$، $q = x^3 + 2x^2 - x + 1$ اور $r = x^3 + 3x^2$ ہو تب کیا p کو q اور r کے خطی اجتماع میں ظاہر کر سکتے ہیں وضاحت کرو۔

2.2.3. : بتلاؤ کہ $S = \{(1,0,0,-1), (0,1,0,-1), (0,0,1,-1), (0,0,0,1)\}$، R^3 میں خطی طور پر غیر تابع ہے۔

2.2.4. : $M_2(R)$ کا سٹ

$$S=\left\{A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -4 & 4\end{bmatrix}\right\}$$

خطی طور پر غیر تابع ہے یا خطی طور پر تابع ہے بتلاؤ۔

2.2.5: ذیل کا کونسا سٹ $V_3(R)$ کی اساس ہے۔

$$S = \{(2,-3,5),(1,0,-2),(0,2,-1)\} \quad (i)$$

$$S = \{(1,-3,-2),(-3,1,3),(-2,-10,-2)\} \quad (ii)$$

2.2.6 : $P_2(R)$ میں ذیل کا کونسا سٹ اساس ہے۔

$$S = \{1 + 2x - x^2, 4 - 2x + x^2, -9x^2 + 18a - 1\}(a)$$
$$S = \{1 + 2x + x^2, 3 + x^2, x + x^2\}(b)$$

2.2.7. بردار: $\alpha_1 = (2,-3,1), \alpha_2 = (1,4,-2), \alpha_3 = (-8,12,-4), \alpha_4 = (1,37,-17), \alpha_5 = (-3,-5,8)$، $V_3(R)$ کو اسپان کرتے ہیں تب سٹ $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ کا تحت سٹ معلوم کرو جو $V_3(R)$ کی اساس ہے۔

2.2.8. : بتلاؤ کہ $S = \{(1,1,1,1), (0,1,1,1), (0,0,1,1), (0,0,0,1)\}$، R^4 کی اساس ہے۔

اکائی 3 ۔ خطی تحویل

(Linear Transformations)

3.0 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں طلبہ کی مسئلہ حل کرنے کی صلاحیت کو بہتر بنانے کے لیے خطی تحویلات کے مواد کو پیش کیا گیا ہے نیز خطی تحویل سے متعلق مثالیں اور بہت سے مسائل دیے گئے ہیں۔

3.1 تمہید (Introduction)

تعریف: فرض کیجیے کہ $U(F)$ اور $V(F)$ بر داری فضائیں ہیں۔ تب نقش (*Mapping*) $f: U \rightarrow V$ جس کی تعریف اس طرح سے کی جاتی ہے

i) $f(u+v) = f(u) + f(v), \forall\, u, v \in U$

ii) $f(au) = af(u), \forall a \in F \;\&\; u \in U$

کو ہم مارفک (Homomorphism) کہتے ہیں۔

اگر f ایک بر تفاعل ہو تو V کو f کی ہم مارفی شبیہ (Homomorphic Image) کہتے ہیں۔ اگر f ایک تا ایک اور بر تفاعل ہو تو f کو یک مارفیت (Isomorphism) کہتے ہیں۔ اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ U بر داری فضا V کے یک مارفی ہے اور اس کو $V \cong U$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

اب ہم خطی تحویل کی تعریف کو سمجھیں گے۔

تعریف: فرض کیجیے کہ $U(F)$ اور $V(F)$ بر داری فضائیں ہیں۔ تب $T: U \rightarrow V$ خطی تحویل ایک تفاعل ہے جس کی تعریف اس طرح سے کی جاتی ہے

$$T(au + bv) = aT(u) + bT(v), \forall a, b \in F \;\&\; u, v \in U$$

اس کو اس طرح بھی لکھا جا سکتا ہے

$$f(u+v) = f(u) + f(v), \forall\, u, v \in U$$
$$f(au) = af(u), \forall a \in F \;\&\; u \in U$$

اس شرط کو خطی خاصیت (*Linearity Property*) بھی کہتے ہیں۔ یہ شرط درجہ ذیل شرط کے معادل ہوتی ہے

$$T(au + v) = aT(u) + T(v), \forall a \in F \;\&\; u, v \in U$$

خطی تحویلات کا الجبرا (*Algebra of Linear Transformations*)

تعریف: فرض کیجیے کہ $U(F)$ اور $V(F)$ برداری فضائیں ہیں اور U سے V پر T' اور T'' دو خطی تحویلات ہیں۔ تب ان کی اجماع $T' + T''$ کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے کہ

$$(T' + T'')(u) = T'(u) + T''(u), \forall u \in U$$

قضیہ 1۔ فرض کیجیے کہ $U(F)$ اور $V(F)$ دو برداری فضائیں ہیں اور U سے V پر T' اور T'' دو خطی تحویلات ہیں۔ تب ان کا اجماع $T' + T''$ خطی تحویل ہے۔

قضیہ 2۔ فرض کیجیے کہ $U(F)$ اور $V(F)$ دو برداری فضائیں ہیں اور U سے V پر T خطی تحویل ہے۔ اگر $k \in F$ ہو، تب تفاعل kT خطی تحویل ہوتا ہے۔

قضیہ 3۔ برداری فضا U سے برداری فضا V پر سبھی خطی تحویلات کا سٹ $L(U,V)$ بہ عمل برداری جمع (*Vector Addition*) اور میزانی ضرب (*Scalar Multiplication*) ایک برداری فضا ہوتا ہے۔

مثالیں

مثال 1۔ اگر U کوئی برداری فضا ہے، تب اکائی تحویل (*Identity Transformation*) جو U سے U پر اس طرح سے متعارف ہوتا ہے

$$I(u) = u, \forall u \in U$$

ایک خطی تحویل ہے۔

صفر تحویل U سے U پر اس طرح سے متعارف ہوتا ہے

$$T(u) = \bar{0}, \forall u \in U$$

ایک خطی تحویل ہے۔

مثال 2۔ دکھایئے کہ نقش $T: U^3(\mathbb{R}) \to U^2(\mathbb{R})$، جہاں $\mathbb{R}$ ایک میدان ہے، جو اس طرح سے متعارف ہوتا ہے،

$$T(u_1, u_2, u_3) = (u_1 - u_2, u_1 - u_3)$$

ایک خطی تحویل ہے۔

حل۔ فرض کرو کہ $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in U^3(\mathbb{R})$ دو بردار ہیں۔ اگر $a, b \in \mathbb{R}$ ہو تب

$$\begin{aligned} T(au + bv) &= T[a(u_1, u_2, u_3) + b(v_1, v_2, v_3)] \\ &= T(au_1 + bv_1, au_2 + bv_2, au_3 + bv_3) \\ &= (au_1 + bv_1 - au_2 - bv_2, au_1 + bv_1 - au_3 - bv_3) \\ &= \big(a(u_1 - u_2) + b(v_1 - v_2), a(u_1 - u_3) + b(v_1 - v_3)\big) \\ &= a\big((u_1 - u_2), (u_1 - u_3)\big) + b\big((v_1 - v_2), (v_1 - v_3)\big) \end{aligned}$$

$$= aT(u_1, u_2, u_3) + T(v_1, v_2, v_3)$$

$$= aT(u) + bT(v)$$

اس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ دی گئی نقش T ایک خطی تحویل ہے۔

3.2 عملی مسائل

3.2.1 نقش $T: V_3(R) \to V_2(R)$ کی تعریف اس طرح کی گئی ہے کہ $T(a, b, c) = (a - b, a - c)$ تب بتلاؤ کہ T ایک خطّی تحویل ہے۔

3.2.2 اگر $T: R^3 \to R^2$ کی تعریف اگر $T(x, y, z) = (1x1,0)$ سے کی گئی ہو تو کیا T ایک خطّی تحویل ہے؟ وضاحت کیجیے۔

3.2.3 خطّی تحویل $T: R^2 \rightarrow R^2$ کی تعریف معلوم کرو جب کہ دیا گیا ہے کہ

$$T(2,3) = (4,5)$$
$$T(1,0) = (0,0)$$

3.2.4 بتلاؤ کہ $T: R^3 \to R^3$ جس کی تعریف $T(a, b, c) = (a - b, 0, b + c)$ سے کی گئی ہے ایک خطّی تحویل ہو گی۔

3.2.5 ذیل میں دیے گئے تعریفات کی مدد سے معلوم کرو کہ کونسا نقش (Map) ایک خطی تحویل ہے۔

(i) $T: R \to R^3$ ، $T(x) = (x, 2x, 3x)$

(ii) $T: R^2 \to R^2$ ، $T(x, y) = (2x, 3y, 3x, 4y)$

(iii) $T: R^3 \to R^3$ ، $T(x, y, z) = (x - y, x - z)$

3.2.6 کیا R^3 $T: R^2 \to R^3$ جس کی تعریف $T(x, y) = (x + y, 2x - y, 7y)$ ہے ایک خطّی تحویل ہے؟

3.2.7 اگر $T: R^4 \rightarrow R^3$ ایک خطی تحویل ہے جس کی تعریف

$$T(x,y,z,w) = (x - y + z + w, x + 2z - w, x + y + 3z - 3w)$$

$\forall x,y,z,w \in R$ تب $Rank(T) + Nullity(T) = \dim(R^3)$ کی جانچ کرو۔

3.2.8 ایک خطّی تحویل $T: R^3 \to R^2$ معلوم کرو جس کی سعت *(rnage)* برداروں $(1,2,0,-4)$ اور $(2,0,-1,-3)$ کا اسپان ہے۔

3.2.9 خطّی تحویل $T: R^2 \to R^3$، $T(x,y) = (x+y, x-y, y)$ کے لیے نل اسپیس (*Null Space*) وسعت (*range*)، ریانک (*rank*) اور نلّی ٹی (*Nullity*) معلوم کرو۔

3.2.10 خطّی تحویل $T: R^3 \to R^2$، $T(x, y, z) = (x - y, x + z)$ کے لیے ریانک *(Rank)* اور نلّی ٹی *(Nullity)* معلوم کرو۔

اکائی 4 ۔ خطی تحویل کی ماترس فارم

(Matrix representation of a linear transformation)

4.0 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں طلبہ کی مسئلہ حل کرنے کی صلاحیت کو بہتر بنانے کے لیے خطی تحویل کی ماترس سے متعلق تعریفات، مثالیں اور بہت سے مسائل دیے گئے ہیں۔

4.1 تمہید (Introduction)

تعریف: اگر $T: U(F) \to V(F)$ ایک خطی تحویل ہے، $B_1 = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$، $U(F)$ کی اساس ہے اور $B_2 = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$، $V(F)$ کی اساس ہو تب $T(u_1), T(u_1), \cdots T(u_1) \in V = [B_2]$ ہے۔ اس طرح

$$
\begin{aligned}
T(u_1) &= a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{m1}u_m \\
T(u_2) &= a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{m2}u_m \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
T(u_n) &= a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{mn}u_m
\end{aligned}
$$

ہیں اور

$$
[T: B_1, B_2]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}
$$

کو T کی ماترس بہ حوالہ $B_1 = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ اور $B_2 = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ کہتے ہیں۔

4.2 عملی مسائل

4.2.1 خطّی تحویل $T: R^3 \to R^3$، $T(x, y, z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$ کی بحوالے اساس $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ ماترس معلوم کرو۔

4.2.2: اگر $T: R^3 \to R^3$، $T(x, y, z) = (x + y, 2z - x)$ ایک خطی تحویل ہے تب بحوالے ذیل کے اساسوں کے T کی ماترس معلوم کرو۔

$$B_1 = \{(1,0,1), (1,1,1), (1,0,0)\}$$
$$B_2 = \{(0,1), (1,0)\}$$

بلاک 6۔ مخصوص قیمتیں، مخصوص بردار اور اندرونی ضربی فضائیں

(Eigen Values and Eigen Vectors and Inner Product Spaces)

چھٹابلاک اکائی 5 سے 8 پر مشتمل ہے۔ جس میں اکائی 5 اور 6 میں ماترس اور خطی تحویلات کے خصوصی قیمتیں، خصوصی بردار اور کواڈریٹک فارمس کے متعلق کئی تعریفات اور مسائل دیے گئے ہیں۔ اکائی 7 اور 8 میں اندرونی ضربی فضاؤں کے کئی تجرباتی مسائل اور ان کے حل درج ہیں۔

اکائی 5۔ خصوصی قیمتیں اور خصوصی بردار— کیلے ھیملٹن نظریہ

(Eigen Values and Eigen Vector – Cayley Hamilton Theorem)

5.0 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں طلبہ کی مسئلہ حل کرنے کی صلاحیت کو بہتر بنانے کے لیے مربع ماترس کے خصوصی قدریں، خصوصی بردار اور کیلے ھیملٹن نظریہ کے اطلاقات سے متعلق بہت سے مسائل دیے گئے ہیں۔ طلبا اس اکائی کے مکمل ہونے پر مربع ماترس کے خصوصی قدریں، خصوصی بردار معلوم کر سکیں گے نیز کیلے ھیملٹن نظریہ کے استعمال سے دی گئی ماترس کا معکوس بھی معلوم کر سکیں گے۔

5.1 تمہید (Introduction)

اگر A ایک $n \times n$ ماترس ہے ہو اور I اسی رتبہ کا وحدہ ماترس ہو تب $A - \lambda I$ کو، جہاں λ کوئی عدد یہ ہے ماترس A کا ممیز ماترس کہتے ہیں اور مساوات

$$|A - \lambda I| = (-1)^n[\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_n] = 0 \qquad \cdots (1)$$

کو ممیز مساوات کہتے ہیں۔

نیز مساوات (1) کے حل سے λ کی جو قدریں مان لیجیے $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ حاصل ہوں گے انہیں ماترس A کے خصوصی قیمتیں کہتے ہیں اور ایک بردار $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

جو $AX = \lambda X$ کو پورا کرتا ہے خصوصی قیمت λ کا خصوصی بردار کہلاتا ہے۔

مثال۔ ماترس $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ کی خصوصی قیمتیں اور خصوصی بردار معلوم کرو۔

حل۔ دیا گیا ماترس ہے $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

اس کی ممیز مساوات ہے

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - 4)(\lambda + 2) + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 3, -1$$

اس لیے A کی خصوصی قیمتیں $3, -1$ ہیں۔

فرض کیجیے کہ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ، $\lambda = 3$ کی خصوصی بردار ہے، تب $AX = 3X$ ہو گا۔

$$\Rightarrow (\lambda - 3I)X = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2-3 & -1 \\ 5 & 4-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -5x - y &= 0 \\ 5x + y &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y}{-5}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$\lambda = -1$ کے لیے $(\lambda + I)X = 0$ ہے۔

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2+1 & -1 \\ 5 & 4+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x - y = 0 \\ 5x + 5y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x + y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y}{-1}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

اس طرح دی گئی ماترس کی مخصوص قیمتیں -1, 3 ہیں اور خصوصی بردار $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ اور $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$ ہیں۔

تعریف: ماترس کی کثیر رکنی (Matrix Polynomial)

ایک عبارت $F(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_nx^n, A_m \neq 0$

جہاں $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_n$ میدان F پر $n \times n$ ماترس ہیں ماترس کی کثیر رکنی درجہ m والی کہلاتی ہے۔

دو ماترس کے کثیر رکنیاں مساوی ہوں گے اگر x کے مساوای قوت والے ارکان کے ضریب مساوی ہوں۔

ماترس کے کثیر رکنیوں کا حاصل جمع اور حاصل ضرب:

فرض کیجیے کہ $F(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_nx^n$, اور $G(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_kx^k$

دو ماترسوں کی کثیر رکنیاں ہیں اگر $m > k$ ہو تب حاصل جمع اور حاصل ضرب کی تعریف اس طرح کی گئی ہے

$$F(x) + G(x) = (A_0 + B_0) + (A_1 + B_1)x + (A_2 + B_2)x^2 + \cdots + (A_n + B_k)x^k$$

اور

$$F(x) \cdot G(x) = (A_0B_0) + (A_0B_1 + A_1B_0)x + \cdots + (A_mB_k)x^{k+m}$$

کیلے ھیملٹن کا نظریہ: مربع ماترس A اپنی ممیز مساوات کو پورا کرتا ہے یعنی

$$|A - \lambda I| = (-1)^n[\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_n] = 0$$

کو پورا کرتا ہے تب

$$A^n + a_1A^{n-1} + a_2A^{n-2} + \cdots + a_nI = 0$$

5.2 عملی مسائل

5.2.1 ماترس $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ کے خصوصی قیمتیں (Eigen Values) اور خصوصی بردار (Eigen Vectors) معلوم کرو۔

5.2.2 ماترس $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ کے خصوصی قیمتیں(Eigen Values)اور خصوصی بردار معلوم کرو۔

5.2.3 ذیل کے خطّی عامل (Linear Operator) کے خصوصی قیمتیں (Eigen Values) معلوم کرو۔

$$T(x, y) = (-2x + 3y), -10x + 9y)، T: R^2 \to R^2$$

5.2.4 اگر $P_2(\mathbb{R})$ پر T ایک خطّی عامل (Linear Operator) اس طرح ہے کہ

$T(f(x)) = f(x) + (x+1)f(x)$، $\forall f(x) \in P_2(\mathbb{R})$ تب T کے خصوصی قیمتیں (Eigen Values) معلوم کرو۔

5.2.5 $T: R^2 \to R^2$ ایک خطی عامل ہو تب $T(x, y) = (x + 2y, -2x + y)$ جس کی تعریف ہے
کیلیے ھیملٹن کے نظریہ کی جانچ کرو۔

5.2.6 : ماترس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ کے لیے کیلے ھیملٹن کے نظریہ کی جانچ کرکے A^{-1} معلوم کرو۔

5.2.7 : ماترس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ کا معکوس A^{-1} (universe) معلوم کرو کیلے ھیملٹن کے نظریہ کے استعمال سے۔

اکائی 6 ۔ مشابہ ماترس اور کواڈراٹک فارمس

(Similar Matrices & Quadratic Forms)

6.0 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں طلبہ کی مسئلہ حل کرنے کی صلاحیت کو بہتر بنانے کے لیے ماترس کا ڈیاگنولائزیشن (Diagonalization) اور کواڈریٹک فارمس کے مسائل دیے گئے ہیں۔

6.1 تمہید (Introduction)

تعریف: فرض کیجیے کہ A اور B دو ماترس ہیں۔ تب A اور B کو مشابہ ماترس کہا جاتا ہے اگر ایک غیر نادر (*Non Singular*) یا مقلوبی ماترس (*Invertible*) P اس طرح وجود رکھتا ہو کہ

$$B = P^{-1}AP$$

مشابہ ماترس کی خصوصیات (Properties of Similar Matrices)

اگر A اور B مشابہ ماترس ہوں۔ تب درجہ ذیل خصوصیات مطمئن ہوتی ہیں:

1. $\rho(A) = \rho(B)$، جہاں ρ ماترس کی رینک کو ظاہر کرتا ہے۔
2. $Tr(A) = Tr(B)$، جہاں Tr ماترس کی ٹریس (*Trace*) کو ظاہر کرتا ہے۔
3. دو مشابہ ماترس کی خصوصی قدریں ($Eigenvalues$) مساوی ہوتی ہیں لیکن ان کے خصوصی بردار ($Eigenvactors$) عام طور پر مختلف ہو سکتے ہیں۔
4. کوئی ماترس اپنے ٹرانس پوز (*Transpose*) کے مشابہ ہوتا ہے، یعنی $A \approx A^T$
5. دو مشابہ ماترس میں ایک جیسی خصوصی کثیر رکنی وجود رکھتی ہیں۔
6. $|A| = |B|$
7. $A^n = B^n$

مثال 1۔ ثابت کیجیے کہ اگر P ماترس Q کے مشابہ ہے تو Q ماترس P کے مشابہ ہو گا۔

حل۔ اگر P ماترس Q کے مشابہ ہے تو ایک مقلوبی ماترس (*Invertible*) A اس طرح وجود رکھتا ہو کہ

$$Q = A^{-1}PA$$

مان لیجیے کہ $B = A^{-1}$

چوں کہ A مقلوبی ماترس (*Invertible*) ہے تو B بھی مقلوبی ماترس ہو گا۔ تب ہمیں حاصل ہے

$$\begin{aligned} B^{-1}QB &= (A^{-1})^{-1}QA^{-1} \\ &= AQA^{-1} \\ &= A(A^{-1}PA)A^{-1} \\ &= AA^{-1}PAA^{-1} \\ &= IPI = P \end{aligned}$$

اس لیے ثابت ہوا کہ اگر P ماترس Q کے مشابہ ہے تو Q ماترس P کے مشابہ ہو گا۔

مثال 2۔ ثابت کیجیے کہ اگر P ماترس Q کے مشابہ ہے اور Q ماترس R کے مشابہ ہو تو P ماترس R کے مشابہ ہو گا۔

حل۔ طلبہ کے لیے مشق

ماترس کی وتری شکل (*Diagonalization of Matrices*)

تعریف: کسی مربع ماترس A کو وتری شکل پذیر ماترس (*Diagonalizable Matrix*) کہا جاتا ہے اگر ایک وتری ماترس (*Diagonal Matrix*) D اور ایک غیر نادر ماترس P اس طرح وجود رکھتا ہے کہ A اور D مشابہ ہوں اور

$$D = P^{-1}AP$$

دوسرے الفاظ میں کوئی مربع ماترس A وتری شکل پذیر کہلائے گا اگر وہ کسی وتری ماترس کے مشابہ ہو۔ اس لیے ماترس A وتری شکل پذیر ہو گا اگر کوئی مقلوبی ماترس P اس طرح وجود رکھتا ہو کہ

$$D = P^{-1}AP$$

جہاں D ایک وتری ماترس ہے۔ تب ہم کہہ سکتے ہیں کہ ماترس P ماترس A کو وتری شکل میں بدل دیتا ہے۔

نوٹ: (1) کوئی مربع ماترس جس کا رتبہ n ہے وتری شکل پذیر ہو گا اگر اور صرف اگر اس میں خطی طور پر غیر تابع n خصوصی بردار وجود رکھتے ہوں۔

(2) اگر کسی مربع ماترس کی خصوصی قدریں مختلف ہوں تو یہ ہمیشہ کسی وتری ماترس کے مشابہ ہو گا۔

مثال 3۔ ماترس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ کو وتری شکل میں تبدیل کیجیے۔

حل۔ دیا گیا ماترس ہے

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

اس کے لیے خصوصی مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$
$$\Rightarrow \lambda = 1, -1$$

اس لیے A کی خصوصی قدریں 1، 1− ہیں۔

خصوصی قدر 1 کے لیے مان لیجیے کہ A کا خصوصی بردار $X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ہے۔ تب

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 0 \\ 2 & -1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad 2x_1 - 2x_2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = x_2 = k(\text{مان لیجیے})$$

$k = 1$ لینے پر $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

خصوصی قدر 1− کے لیے مان لیجیے کہ A کا خصوصی بردار $X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ہے۔ تب

$$\begin{bmatrix} 1+1 & 0 \\ 2 & -1+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad 2x_1 = 2x_1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = 0, x_2 = k(\text{مان لیجیے})$$

$k = 1$ لینے پر $X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

اب وتری ماترس یعنی وہ ماترس جس کے وتری عناصر(*Diagonal Elements*) خصوصی قدریں(*Eigenvalues*) ہوں۔ اس لیے

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اور وہ ماترس جو وتری شکل دیتا ہے یعنی خصوصی بردار جس کے کالم(*Column*) میں ہوں۔

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

اب

$$P^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

اس لیے

$$D = P^{-1}AP$$

تعریف: دوسرے درجے کی کسی متجانس عبارت کو دو درجی شکل کہتے ہیں۔ اس میں موجود متغیرات کی تعداد کو اس کا رتبہ کہتے ہیں۔ دوسرے درجہ کی کسی متجانس عبارت میں ہر ایک رکن دوسرے درجہ کی ہونا ضروری ہے۔ n متغیرات میں دو درجی عام شکل درجہ ذیل ہوتی ہے

$$Q = X'AX = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

جہاں a_{ij} مستقلات ہیں۔ اگر a_{ij} حقیقی اعداد ہوں تب عبارت حقیقی دو درجی شکل کہلاتی ہے۔ اب

$$Q = X'AX = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

$$\begin{aligned}
&= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\
&\quad + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n + \cdots \\
&\quad + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\
&= a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_2x_1 + \cdots \\
&\qquad + (a_{1n} + a_{n1})x_nx_1 \\
&+ a_{22}x_2^2 + (a_{23} + a_{32})x_3x_2 + \cdots \\
&\qquad + (a_{2n} + a_{n2})x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}$$

اس کی ماترس نمائندگی درجہ ذیل ہو گی

$$\begin{aligned}
Q &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \\
&= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \\
&= X'AX
\end{aligned}$$

یہاں $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ ایک توازنی ماترس ہے اور $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ہے۔

نوٹ: اگر $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ ایک دو درجی شکل ہو تب اس کو درجہ ذیل طریقہ سے بھی لکھا جا سکتا ہے

$$a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2, a_{12} = a_{21}$$

جس کو ماترس کی شکل میں اس طرح لکھا جاتا ہے

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}$$

اسی طرح تیسرے رتبہ کی دو درجی شکل (یعنی وہ عبارت جس میں تین متغیرات موجود ہوں) کا ماترس کی شکل درجہ ذیل ہو گی

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$$

یہاں $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ایک توازنی ماترس ہے اور $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ہے۔

نوٹ: کسی ماترس کی دو درجی شکل حاصل کرنے کے لیے یہ ضروری ہے کہ اس کو توازنی بنایا جائے (اگر ماترس توازنی نہ ہو) جس کا طریقہ درجہ ذیل ہے:

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}(a_{12}+a_{21}) & \cdots & \frac{1}{2}(a_{1n}+a_{n1}) \\ \frac{1}{2}(a_{21}+a_{12}) & a_{22} & \cdots & \frac{1}{2}(a_{2n}+a_{n2}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2}(a_{n1}+a_{1n}) & \frac{1}{2}(a_{n2}+a_{2n}) & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

نوٹ: دو درجی شکل کی رینک اس کی توازنی ماترس کی رینک کے برابر ہوتی ہے۔

نوٹ: دو درجی شکل کا ڈٹرمنٹ اس کی توازنی ماترس کے ڈٹرمنٹ کے برابر ہوتی ہے۔

اب ہم کچھ مثالات کی مدد سے دی گئی دو درجی شکل کے لیے توازنی ماترس اور اسی طرح دیے گئے توازنی ماترس کے لیے دو درجی شکل حاصل کرن اسیکھیں گے۔

مثال 1۔ دو درجی شکل $x^2+6xy+5y^2$ کے لیے توازنی ماترس معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی دو درجی عبارت ہے $x^2+6xy+5y^2$

اس کو درجہ ذیل طریقہ سے لکھا جا سکتا ہے

$$xx+3xy+3xy+5yy$$

فرض کیجیے کہ $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ہے۔ تب $X'=[x \quad y]$ اور ماترس $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ ہے۔

اب

$$X'AX=[x \quad y]\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X'AX=x^2+6xy+5y^2$$

اس لیے ماترس $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ دی گئی دو درجی شکل کے لیے توازنی ماترس ہے۔

نارمل شکل یا کینونکل شکل (Normal Form or Canonical Form)

اگر $X'AX$ حقیقی دو درجی شکل ہو تو $X=PY$ ایک غیر نادر خطی تحویل اس طرح وجود رکھتی ہے جو $X'AX$ کو ذیل میں دی گئی شکل میں بدل سکے۔

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_r^2-x_{r+1}^2-x_{r+2}^2\cdots-x_m^2$$

اس شکل کو دی گئی دو درجی شکل کے لیے نارمل شکل یا کینونکل شکل کہتے ہیں۔

دو درجی شکل کی رینک(Rank of Quadratic Forms)

اگر $X'AX$ حقیقی دو درجی شکل ہو تو A کی رینک (مان لیجیے r) کو اس کی دو درجی شکل کی رینک کہتے ہیں۔ اگر ماترس A کی رینک اس کے رتبہ سے کم ہو($r < n$)یا$|A| = 0$ یا ماترس A نادر ہو تو اب دو درجی شکل کو نادر کہتے ہیں، اگر ایسا نہیں ہے تو دو درجی شکل غیر نادر کہلاتی ہے۔

دو درجی شکل کی انڈیکس(Index of Quadratic Forms)

مان لیجیے کہ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 \cdots - x_r^2$ رینک r والی دو درجی شکل $X'AX$ کے لیے نارمل شکل یا کینونکل شکل ہے۔ اس میں p مثبت ارکان ہیں جب کہ $r - p$ منفی ارکان ہیں۔ $X'AX$ کے لیے نارمل شکل یا کینونکل شکل میں مثبت ارکان کی تعداد کو دو درجی شکل کے لیے انڈیکس کہتے ہیں اور منفی ارکان کی تعداد پر مثبت ارکا کی تعداد کی زیادتی کو دو درجی شکل کے لیے سگنیچر ($Signature$) کہا جاتا ہے۔ یعنی دو درجی شکل کا سگنیچر $s = p - (r - p)$ ہو گا۔

دو درجی شکل کا نیچر(*Nature of Quadratic Forms*)

a. کوئی دو درجی شکل $X'AX$ مثبت یقینی کہلاتی ہے اگر A کی سبھی خصوصی قدریں مثبت ہوں یا اس کی رینک اور ماترس A کا رتبہ مساواری ہو اور دو درجی شکل کے سگنیچر کے برابر ہو۔
b. کوئی دو درجی شکل $X'AX$ منفی یقینی کہلاتی ہے اگر A کی سبھی خصوصی قدریں منفی ہوں یا اس کی رینک اور ماترس A کا رتبہ مساواری ہو اور دو درجی شکل کا سگنیچر صفر ہو۔
c. کوئی دو درجی شکل $X'AX$ مثبت ادھا یقینی کہلاتی ہے اگر A کی سبھی خصوصی قدریں مثبت ہوں اور کم از کم ایک صفر ہو یا اس کی رینک، ماترس A کے رتبہ سے چھوٹی ہو اور دو درجی شکل کا سگنیچر اس کی رینک کے برابر ہو۔
d. کوئی دو درجی شکل $X'AX$ منفی ادھا یقینی کہلاتی ہے اگر A کی سبھی خصوصی قدریں منفی ہوں اور کم از کم ایک صفر ہو یا اس کی رینک، ماترس A کے رتبہ سے چھوٹی ہو اور دو درجی شکل کا سگنیچر صفر ہو۔
e. باقی دوسری شکلوں میں دو درجی شکل غیر یقینی کہلاتی ہے۔

6.2 عملی مسائل

6.2.1 : ماترس $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 12 & -11 & 12 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ کی وتری شکل (Diagonal Form) حاصل کیجیے۔

6.2.2 : بتلاؤ کہ ماترس $A = \begin{bmatrix} 8 & -8 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ وتری شکل پذیر(Diagonalizable) ہے۔ نیز اس کی تحویلی ماترس (Transform Matrix)حاصل کیجیے۔

6.2.3 : دودرجی شکل $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_3x_1$ کا نیچر معلوم کرو۔

6.2.4 : ماترس $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ کو وتری شکل(Diagonal Form) میں تحویل کر کے حاصل کردہ نتیجہ سے کواڈریٹک فارم کی تشریح کرو۔

اکائی 7۔ اندرون ضربی برداری فضائیں

(Inner Product Vector Spaces)

7.0 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں طلبا کی مسئلہ حل صلاحیتوں کو بہتر بنانے کے لیے اندرونی ضربی فضاؤں کے تعریفات، مثالیں اور بہت سے مسائل دیے گئے ہیں۔

7.1 تمہید (Introduction)

تعریف: فرض کیجیے کہ F ایک حقیقی یا ملطف اعداد کا میدان ہے، اور V اس پر ایک برداری فضا ہے۔ ایک تفاعل $\langle\cdot,\cdot\rangle$، کارتیسی ضرب $V \times V$ سے میدان F پر اندرونی ضرب کہلاتا ہے اگر یہ درجہ ذیل شرائط کو مطمئن کرے:

i) **غیر منفیت** (Non-negativity): $\langle u, u\rangle \geq 0$ اور $\langle u, u\rangle = 0 \; iff \; u = 0$

ii) **مزدوج توازن** (Conjugate Symmetry): اگر $F = \mathbb{C}$ ہو تب $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$ اور $F = \mathbb{R}$ ہونے پر $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$

iii) **خطیاتی خصوصیت** (Linearity Property): $\langle cu + dv, w\rangle = c\langle u, w\rangle + \mathrm{d}\langle v, w\rangle$، جہاں $c, d \in F$

اندرونی ضرب فضا (Inner Product Space): اندرونی ضرب $\langle\cdot,\cdot\rangle$ کے ساتھ حقیقی (یا ملطف) برداری فضا کو حقیقی (یا ملطف) اندرونی ضرب فضا کہتے ہیں۔

یا

اگر $V(F)$ کوئی اندرونی ضرب فضا ہے اور F حقیقی اعداد کا سٹ ہے تو $V(F)$ کو یوکلیڈین (Euclidean) فضا کہتے ہیں۔ اگر F ملطف اعداد کا سٹ ہو تو $V(F)$ کو وحدیتی (Unitary) فضا کہتے ہیں۔

نارم (*Norm*)

فرض کیجیے کہ V ایک اندرونی ضرب فضا (*Inner Product Space*) ہے اور $u = (u_1, u_2, \ldots u_n) \in V$ ایک بردار ہو تب اس بردار کی نارم کو $\|u\|$ سے ظاہر کرتے ہیں اور اندرونی ضرب کے مثبت جزرالمربع (*Square Root*) کو نارم کہتے ہیں، یعنی

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

اکائی بردار (Unit Vector)

مان لیجیے کہ V ایک اندرونی ضرب فضا ہے۔ اگر $u = (u_1, u_2, \dots u_n)$ اس کا کوئی بردار اس طرح سے ہو کہ اس کی لمبائی 1 ہو یعنی $\|u\| = 1$ تب u کو اکائی بردار کہتے ہیں۔ اس طرح کسی اندرونی ضرب فضا میں کوئی بردار اکائی بردار کہلاتا ہے اگر اس کی لمبائی 1 ہو۔

رزلٹس: (1)۔(**شوارز کی عدم مساوات**): فرض کیجیے کہ V اندرونی ضرب فضا ہے۔ اگر $u, v \in V$ تب

$$|\langle u, v\rangle| \le \|u\| \cdot \|v\|$$

(2)۔**بیسل کی عدم مساوات**(Bessel's Inequality): اگر $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ اندرونی ضرب فضا V کا کوئی مستقیم عمودی سٹ(Orthonormal Set) ہو تو

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle v, u_i\rangle|^2 \le \|v\|^2, \forall v \in V$$

ساتھ ہی

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle v, u_i\rangle|^2 = \|v\|^2 \; iff \; v \in span(S)$$

(3)۔**پارسیوال کا ضابطہ**(Parseval's Identity)

بیان۔ فرض کیجیے کہ V مستقیم عمودی اساس $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ کے ساتھ ایک اندرونی ضرب فضا ہے۔ تب سبھی میزانوں $c_1, c_2, \dots, c_n$ کے لیے

$$\|c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \cdots + c_n\omega_n\|^2 = |c_1|^2 + |c_2|^2 + \cdots + |c_n|^2$$

مثال۔ اگر $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ اور $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ ابعاد n کی برداری فضا $V_n(\mathbb{C})$ کے عناصر ہیں، تب ثابت کیجیے کہ

$$\langle u, v\rangle = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n}$$

اندرونی ضرب ہے۔

حل۔ اس کے لیے ہم اندرونی ضرب کی تمام شرائط پر بحث کریں گے۔

i) **غیر منفیت**(Non-negativity)

$$\begin{aligned}\langle u, u\rangle &= u_1\overline{u_1} + u_2\overline{u_2} + \cdots + u_n\overline{u_n}\\ &= |u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2 \ge 0\end{aligned}$$

اس کے ساتھ ہی اگر

$$\begin{aligned}&\langle u, u\rangle = 0\\ \Rightarrow\; &|u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2 = 0\end{aligned}$$

یہ تبھی ممکن ہے جب تمام $u_i = 0$ ہوں۔ اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ

$\langle u, u\rangle = 0$ اگر اور صرف اگر $u = 0$

ii) **توازن**(Symmetry)

دیا ہے

$$\begin{aligned}\overline{\langle u,v\rangle} &= \overline{u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n}}\\ &= \overline{u_1}\,\overline{\overline{v_1}} + \overline{u_2}\,\overline{\overline{v_2}} + \cdots + \overline{u_n}\,\overline{\overline{v_n}}\\ &= \overline{u_1}\,v_1 + \overline{u_2}\,v_2 + \cdots + \overline{u_n}\,v_n\\ &= v_1\overline{u_1} + v_2\overline{u_2} + \cdots + v_n\overline{u_n}\\ &= \langle v,u\rangle\end{aligned}$$

iii) خطیاتی خصوصیت (Linearity Property)

فرض کیجیے کہ $c, d \in \mathbb{C}$ اور $u, v, w \in V_n(\mathbb{C})$ تب

$$\begin{aligned}cu + dv &= c(u_1, u_2, \cdots, u_n) + d(v_1, v_2, \cdots, v_n)\\ &= (cu_1 + dv_1, c\,u_2 + dv_2, \cdots, cu_n + dv_n)\end{aligned}$$

اب

$$\begin{aligned}\langle cu + dv, w\rangle &= (cu_1 + dv_1)\overline{w_1} + (cu_2 + dv_2)\overline{w_2} + \cdots + (cu_n + dv_n)\overline{w_n}\\ &= (cu_1\overline{w_1} + dv_1\overline{w_1}) + (cu_2\overline{w_2} + dv_2\overline{w_2}) + \cdots\\ &\qquad + (cu_n\overline{w_n} + dv_n\overline{w_n})\\ &= (cu_1\overline{w_1} + cu_2\overline{w_2} + \cdots + cu_n\overline{w_n})\\ &\qquad + (dv_1\overline{w_1} + dv_2\overline{w_2} + \cdots + dv_n\overline{w_n})\\ &= c\langle u,w\rangle + \mathrm{d}\langle v,w\rangle\end{aligned}$$

اس لیے

$$\langle cu + dv, w\rangle = c\langle u,w\rangle + \mathrm{d}\langle v,w\rangle$$

اس طرح $\langle u,v\rangle = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n}$ اندرونی ضرب ہے۔

7.2 عملی مسائل

7.2.1 : فرض کرو کہ $\alpha = (2,1+i,i)$، $V_3(\mathbb{C})$ کے دو بردار ہیں تب $< \alpha, \beta >$، $\|\alpha\|$، $\|\beta\|$ اور $\|\alpha + \beta\|$ معلوم کرو۔

7.2.2 : فضاء میں اگر $f(t) = t$، $g(t) = e^t$ ہوں تب $< f, g >$، $\|f\|$، $\|g\|$ اور $\|f + g\|$ معلوم کرو۔ نیز کوشی ایسکوارز نامساوات کی جانچ کرو۔

7.2.3 :فرض کرو کہ α, β اندرونی ضربی برداری فضاء $V(F)$ کے دو بردار ہیں تب ثابت کرو کہ α, β خطّی طور پر غیر تابع ہونگے۔

$$|<\alpha, \beta>| = \|\alpha\|\|\beta\| \Leftrightarrow$$

7.2.4 : اگر u, v ملطف اندرونی ضربی فضاء $V(\mathbb{C})$ کے دو بردار ہیں تب بتلاؤ کہ

$$4\langle u, v\rangle = \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2$$

اکائی 8۔ گرام اسکیمڈ آرتھاگنلائی زیشن

(Gram Schimidt Orthogonalization)

8.0 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں بھی طلبا کی مسئلہ حل صلاحیت کو بہتر بنانے کے لیے آرتھونارمل اساس سے متعلق مسائل گرام اسکیمڈ آرتھاگنلائی زیشن کے ذریعہ پیش کیے گئے ہیں۔

8.1 تمہید (Introduction)

تعریف: فرض کرو کہ $V(F)$ ایک اندرونی ضربی فضاء ہے اور $\alpha, \beta \in V$ تب α کو β پر عمود(*orthogonal*) کہا جائیں گا اگر $< \alpha, \beta \geq 0$ ہو۔

نوٹ : α،β پر عمود $\beta \Leftrightarrow < \alpha, \beta >= 0, \Leftrightarrow < \beta, \alpha >= 0 \Leftrightarrow$ ،α پر عمود ہو گا۔ یا ہم کہتے ہیں α،β آرتھاگونل ہیں $\alpha, \beta >= 0 \Leftrightarrow$

نوٹ: ہمیں معلوم ہے کہ ہر $\alpha \in V$ کے لیے $< \overline{0}, \alpha >= 0$ ہے۔

$\Leftarrow \overline{0}$ پر $\alpha \in V$ سے عمود ہو گا۔

رزلٹ: 1) اگر اندرونی ضربی فضاء $V(F)$ میں α, β, γ تین بردار اس طرح ہیں کہ α،β سے عمود α،γ سے عمود تب $C \in F$ کے لیے $C\alpha$ بھی β سے عمود ہو گا اور $a, b \in F$ کے لیے α،$\alpha\beta + b\gamma$ پر عمود ہو گا۔

2) اگر α, β حقیقی اندرونی ضربی فضاء $V(F)$ کے دو بردار ہیں تب α, β orthogonal ہونگے۔

$$\|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 \Leftrightarrow$$

تعریف: آرتھاگونل سٹ: فرض کرو کہ $V(F)$ ایک اندرونی ضربی فضاء ہے اور S، V کا غیر خالی تحت سٹ، تب S کو V کا آرتھاگونل سٹ کہا جائیگا اگر $\alpha i, \alpha j \in S \quad \forall i \neq j \quad < \alpha i, \alpha j >= 0$ ہو۔

مثال: $S = \{(2,0,0), (0,1,0), (0,0,5)\}$، $V_3(R)$ کا orthogonal سٹ ہے۔

تعریف: آرتھونارمل سٹ (Orthonormal Set) :

اندرونی ضربی فضاء $V(F)$ کے سٹ $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n\}$ کو orthonormal سٹ کہا جائے گا اگر

$$\forall i \neq j < \alpha i, \alpha j \geq 0 \quad (i)$$
$$\forall i \|\alpha i\| = 1 \quad (ii)$$

مثال: $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$، $V_3(R)$ کا orthonormal سٹ ہے۔

نظریہ (1) کسی بھی اندرونی ضربی فضاء کا غیر صفر عناصر والا آرتھاگونل سٹ خطی طور پر غیر تابع ہے۔

(2) ہر متناہی البعد کی اندرونی ضربی فضاء کا ایک آرتھونارمل اساس (orthonormal basis) ہوگی۔ اس اساس کو گرام اسکمڈ آرتھاگونلائی زیشن (Gram – Schimidt Orthogonalization) کے طریقے سے بناتے ہیں۔

تعریف: آرتھونارمل اساس (Orthonormal basis) :

کوئی بھی اساس S اندرونی ضربی فضاء $V(F)$ کی آرتھونارمل اساس کہلاتی ہے اگر S، V کی اساس ہے۔ نیز S آرتھونارمل سٹ بھی۔

مثال (1) : $S = \{(1,0), (0,1)\}$، $V_2(R)$ کی آرتھونارمل اساس ہے۔

(2) $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$، $V_3(R)$ کی آرتھونارمل اساس ہے۔

8.2 عملی مثائل

8.2.1 : R^3 کی اساس $S = \{(2,1,3), (1,2,3), (1,1,1)\}$ سے آرتھونارمل اساس (*orthonormal basis*) بناؤ۔

8.2.2 R^2 میں $S = \{(1,-3),(2,2)\}$ سے R^2 کی ایک *orthonormal basis* بناؤ۔

8.2.3 گرام اسکیمڈ کے طریقے سے R^3 میں سٹ $\{(0,3,4)\,,(1,0,-1)\,,(1,0,1)\} = S$ سے آرتھونارمل اساس بناؤ۔

نمونہ امتحانی پرچہ

خطی الجبرا(لیب مینول)

BSMM551DSP

بی۔ایس سی-(پانچواں سمسٹر)

وقت:3 Hrs　　　　　**کل نمبر:**35

نوٹ: درج ذیل میں سے کوئی پانچ سوالات کے جواب دیجیے　　　　$5\times 7=35$

1. اگر $V=R^3$ ہو اور تب بتلاؤ کہ $V'W$ کی تحت فضاء ہو گی۔

2. بردار $\alpha_1=(2,-3,1), \alpha_2=(1,4,-2), \alpha_3=(-8,12,-4), \alpha_4=(1,37,-17), \alpha_5=(-3,-5,8)$، $V_3(R)$ کو اسپان کرتے ہیں تب سٹ $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}$ کا تحت سٹ معلوم کرو جو $V_3(R)$ کی اساس ہے۔

3. خطّی تحویل $T: R^3\to R^2$، $T(x,y,z)=(x-y,x+z)$ کے لیے ریانک *(Rank)* اور نلّی ٹی *(Nullity)* معلوم کرو۔

4. خطّی تحویل $T: R^3\to R^3$، $T(x,y,z)=(2y+z,x-4y,3x)$ کی بحوالے اساس $B=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ ماترس معلوم کرو۔

5. ماترس $A=\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ کے خصوصی قیمتیں(Eigen Values)اور خصوصی بردار معلوم کرو ۔

6. ذیل کے خطّی عامل(Linear Operator)کے خصوصی قیمتیں(Eigen Values)معلوم کرو۔

$$T: R^2\to R^2،T(x,y)=(-2x+3y),-10x+9y)$$

7. فضاء میں اگر $f(t)=t$، $g(t)=e^t$ ہوں تب $<f,g>$، $\|f\|$، $\|g\|$ اور $\|f+g\|$ معلوم کرو۔ نیز کوشی ایسکوارز نامساوات کی جانچ کرو۔

8. R^3 کی اساس $S=\{(2,1,3),(1,2,3),(1,1,1)\}$ سے آرتھونارمل اساس *(orthonormal basis)* بناؤ۔