BSMM651DSP

لیب مینول

عددی تجزیہ

(Numerical Analysis)

برائے حصہ دوم

(چھٹا سمسٹر)

تصدیق نامہ

تصدیق کی جاتی ہے کہ بی۔ یس سی۔(چھٹا سمسٹر)عددی تجزیہ کے تجرباتی حصہ کے کام کا یہ اصلی ریکارڈ ہے جسے

____

نے مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کے اسٹڈی سینٹر______________________ میں تعلیمی سال

______________ کے دوران تیار کیا۔

تاریخ

دستخط کونسلر

فہرست

بلاک 5۔الجبرائی وٹرانسینڈنٹل مساواتیں۔ خطی الجبرائی مساواتوں کے نظام

پانچواں بلاک اکائی 1تا4پر مشتمل ہے۔ جس میں خطائیں،اقسام،الجبرائی اور ٹرانسینڈنٹل مساواتوں کے کئی مسائل اور ان کے حل ہیں جو اکائی 1اور 2میں درج ہیں۔اکائی 3اور 4میں خطی الجبرائی مساواتوں کے نظام اور ان کے حل کے کئی طریقوں کے مسائل درج ہیں۔

اکائی۔1 خطائیں اقسام،الجبرائی اور ٹرانسینڈنٹل مساواتیں-I

(Error – Types – Algebraic and Transcendental Equations-I)

1.0 مقاصد(Objectives)

اس اکائی میں طلباء کی مسئلہ حل صلاحیت کو بہتر بنانے کے لیے خطائیں ان کے اقسام اور الجبرائی اور ٹرانسینڈنٹل مساواتوں کے کئی تعریفات مثالیں اور بہت سے مسائل درج ہیں۔اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ دیے گئے کوئی بھی الجبرائی اور ٹرانسینڈنٹل مساوات کا حل دریافت کر سکیں گے۔

1.1 تمہید(Introduction)

تعریف: حقیقی قیمت (Exact Value) اوراور قریبی قیمت (Approximate Value) کے درمیان کے فرق کو خطا (Error) کہتے ہیں۔

خطاکے اقسام (Types of Errors):

مطلق خطا (Absolute Error):

اگر X حقیقی قیمت(Exact Value)اور X' قریبی قیمت(Approximate Value)ہے تب $E_A = |X - X'|$ کو مطلق خطا(Absolute Error)کہتے ہیں۔

اضافی خطا(Relative Error):

اگر X اور X' حقیقی اور قریبی قیمتیں ہوں تب $E_R = \left|\frac{X - X'}{X}\right| = \frac{E_A}{|X|}$ کو X کی اضافی خطا کہتے ہیں۔اور

اسے E_R سے ظاہر کرتے ہیں۔

فیصدی خطا (Percentage Error) :

$E_P=E_R x100$ کو فیصدی خطا کہتے ہیں۔

مثال 1: اگر 2/3 کی قریبی قیمت 0.667 ہو تب اضافی خطا معلوم کرو۔

حل: حقیقی قیمت $X = \frac{2}{3}$ ہے اور قریبی قیمت $X' = 0.667$ تب مطلق خطا $E_A = |X - X'| = \left|\frac{2}{3} - 0.667\right|$

اور اضافی خطا $E_R = \left|\frac{X - X'}{X}\right| = \left|\frac{\frac{2}{3} - 0.667}{\frac{2}{3}}\right| = |1 - 0.667 \times 3/2| = 0.0005$

مثال: اگر $X = 625.483$ کی قریبی قیمت 625 ہو تب فیصدی خطا معلوم کرو۔

حل: دیا گیا ہے کہ $X = 625.483$ اور $X' = 625$ تب فیصد خطا ہے

$$E_P = \left|\frac{X - X'}{X}\right| \times 100 = \left|\frac{625.483 - 625}{625.483}\right| \times 100 = 0.077$$

الجبرائی مساواتوں کے حل کا طریقہ:

تنصیف کا طریقہ (Bisection Method):

اگر $f(x) = 0$ کوئی الجبرائی مساوات ہو تب a اور b کی وہ قیمتیں معلوم کرو جب $f(a) < 0$ اور $f(b) > 0$ ہو تب $f(x) = 0$ کا ریشہ a اور b کے درمیان ہوگا۔ فرض کرو کہ اس کی تقریبی قدر $x_0 = \frac{a+b}{2}$ ہے تب اگر $f(x_0) = 0$ ہو تو $x = x_0$ ، $f(x) = 0$ کا ایک ریشہ ہے ورنہ ریشہ a اور x_0 کے درمیان یا x_0 اور b کے درمیان ہوگا۔ فرض کرو کہ وہ ریشہ $x_1 = \frac{x_0 + b}{2}$ ہے اور اس طریقہ کار کو اس وقت تک دہراتے جائیں گے جب تک کسی مطلوبہ صحت کا ریشہ حاصل نہ ہو جائے۔

مثال: تنصیف کے طریقے سے مساوات $x^3 - x - 1 = 0$ کا ایک ریشہ اعشاریہ کے دو مقامات تک معلوم کرو۔

حل: دی گئی مساوات ہے $x^3 - x - 1 = 0$ یہاں $f(1) = -1 < 0$ اور $f(2) = 5 > 0$

$\Leftarrow$ ریشہ 1 اور 2 کے درمیان ہوگا۔ تنصیف کے طریقے سے فرض کرو کہ $x_1 = \frac{1+2}{2} = 1.5$

$\therefore \; f(x_1) = f(1.5) = 0.875 > 0$

$\Leftarrow$ $f(x) = 0$ کا ایک ریشہ 1 اور 1.5 کے درمیان ہوگا۔ اسی طرح فرض کرو کہ $x_2 = \frac{1+1.5}{2} = 1.25$

$\therefore \; f(x_2) = f(1.25) = -0.297 < 0$

$\therefore \; f(1.25) < 0$

$\Leftarrow$ $f(x) = 0$ کا ایک ریشہ 1.25 اور 1.5 کے درمیان ہوگا۔

فرض کرو کہ $x_3 = \frac{1.25+1.5}{2} = 1.375$ اور $f(1.375) = 0.2246 > 0$ $\Leftarrow$ $f(x) = 0$ کا ایک ریشہ 1.25 اور 1.375 کے درمیان ہوگا۔ فرض کرو کہ $x_4 = \frac{1.25+1.375}{2} = 1.313$ اور $f(x_4) = f(1.313) = -0.0494 < 0$

$\Leftarrow f(x)=0$ کا ایک ریشہ 1.313 اور 1.375 کے درمیان ہوگا۔ فرض کرو کہ $x_5=\dfrac{1.313+1.375}{2}=1.344$ تب

$f(x_5)=f(1.344)=0.0837>0 \Leftarrow f(x)=0$ کا ایک ریشہ 1.313 اور 1.344 کے درمیان ہوگا۔

فرض کرو کہ $x_6=\dfrac{1.313+1.344}{2}=1.329$ اور $f(x_6)=f(1.329)=0.0183>0 \Leftarrow f(x)=0$ کا ایک ریشہ 1.313

اور 1.329 کے درمیان ہوگا اور $x_7=\dfrac{1.313+1.329}{2}=1.321$ ، $f(x_7)=f(1.321)=-0.0158<0$

$\Leftarrow f(x)=0$ کا ایک ریشہ 1.321 اور 1.329 کے درمیان ہے، یعنی $x=1.32$ ، $f(x)=0$ کا ریشہ ہے اعشاریہ کے دو مقامات تک۔

ریگولا فالسی طریقہ (Regula – Falsi Method) :

یہ طریقہ تنصیف کے طریقے کے برابر ہے۔ تنصیف کے طریقے کے طرح x_0 اور x_1 اس طرح معلوم کرو کہ $f(x_0)<0$ اور $f(x_1)>0$ ۔

$y=f(x)$ کی ترسیم وقفہ (x_0, x_1) میں x– محور کو قطع کرتی ہے۔ جس کا مطلب ہے کہ نقطہ قطع پر حقیقی ریشہ موجود ہے۔ اگر $(x_0, f(x_0))$ اور $(x_1, f(x_1))$

مختصات ہوں تب قوسی وتر کی مساوات ہے $\dfrac{y-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ اگر $x_2=(x_2,0)$ ، $y=f(x)=0$ کا ریشہ ہو تب

$\dfrac{0-f(x_0)}{x_2-x_0}=\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \Leftarrow x_2=x_0-\dfrac{(x_1-x_0)}{(f(x_1)-f(x_0))}f(x_0)$ تب ہم دیکھیں گے کہ $f(x_2)$ کی علامت کیا ہے۔

اگر $f(x_2)<0$ تب $x_2\to x_0$ اور اگلا تقربہ معلوم کریں گے اور اگر $f(x_2)>0$ ہو تب $x_2\to x_1$ اور $f(x_2)\to f(x_1)$ تب اگلا تقربہ مطلوبہ صحت حاصل ہونے تک معلوم کریں گے۔

تکرار کا طریقہ یا متواتر تقربہ کا طریقہ (Iteration Method & Successive Approximation Method) :

فرض کرو کہ $y=f(x)=0$ مساوات کے لیے حقیقی ریشہ معلوم کرنا ہے۔ اس مساوات کو $x=\phi(x)$ میں ترتیب دیں۔ تب ابتدائی تقربہ x_0 لیا جاتا اس طرح کہ $|\phi'(x_0)|<1$ مطمئن کرتا ہے۔ پھر $x_1=\phi(x_0)$ اگلا تقربہ محسوب کیا جاتا ہے اور متواتر تقربے $x_2=\phi(x_1), x_3=\phi(x_2), x_4=\phi(x_3)\ldots\ldots\ldots\ldots, x_n=\phi(x_{n-1}),\ldots\ldots\ldots$ ہونگے۔ اس طریقے پر تکرار جب تک کی جاتی ہے کہ مطلوبہ صحت کا ریشہ حاصل ہو۔

مثال: مساوات $f(x)=x^3-2x-5=0$ کا ایک حقیقی ریشہ معلوم کرو ریگولا فالسی کے طریقہ پر۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ

ہم دیکھتے ہیں کہ $f(x)=x^3-2x-5=0 \qquad \cdots(1)$

$$f(0) = -5 < 0$$
$$f(1) = (1)^3 - 2(1) - 5 = -6 < 0$$
$$f(2) = (2)^3 - 2(2) - 5 = -1 < 0$$
$$f(3) = (3)^3 - 2(3) - 5 = 16 > 0$$

چونکہ $f(2)$ اور $f(3)$ مختلف علامتیں رکھتے ہیں۔اس لیے 2اور 3 کے بیچ ایک حقیقی ریشہ ضرور ہوگا۔چونکہ $f(2) = -1 < 0$ اس لیے $x_0 = 2$ اور $f(3) = 16 > 0$ اس لیے $x_1 = 3$ لیا جائے گااور پھر متواتر تقریبہ معلوم کیے جائیں گے جو درج ذیل جدول میں ظاہر کیے گئے ہیں

$Iteration$	x_0	x_1	$-ve$ $f(x_0)$	$+ve$ $f(x_1)$	$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$	$f(x_2)$
1	2	3	–1	16	2.059	–0.386 < 0
2	2.059	3	–0.386	16	2.0812	–0.1479 < 0
3	2.0812	3	–0.1479	16	2.0896	–0.059 < 0
4	2.0896	3	–0.059	16	2.0929	–0.018 < 0
5	2.0929	3	–0.018	16	2.0939	

تقریبہ 4اور 5 سے ظاہر ہے کہ $x = 2.09$ اعشاریہ کے دو مقامات تک صحیح حقیقی ریشہ ہے۔

مثال: مساوات $x^3 + x^2 - 1 = 0$ کے لیے وقفہ $[0, 1]$ میں ایک حقیقی ریشہ معلوم کرو جس کے لیے تکرار کا طریقہ استعمال کرو۔ اعشاریہ کے چار مقامات صحیح ہوں۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ $x^3 + x^2 - 1 = 0$

اس کو ہم یوں بھی لکھ سکتے ہیں

$$x^2(x+1) - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x^2(x+1) = 1$$
$$\Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{x+1}$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \phi(x)$$

اب

$$\phi'(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$|\phi'(x)| = \left|-\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^{\frac{3}{2}}}\right| < 1$$

ہوناچاہیے۔ایسا x_0 ہمیں تلاش کرناچاہیےاوروقفہ $[0, 1]$ بھی دیاگیاہے۔اگرہم $x_0 = 0.5$ لیں تب

$|\phi'(0.5)| = \frac{1}{2}\frac{1}{(0+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} < 1$ شرط پوری کرتاہے۔لہٰذا $x_0 = 0.5$ لیاجاسکتاہے۔اور عمومی ضابطہ

$$x_{n+1} = \phi(x_n)$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{x_n + 1}}, n = 0, 1, 2, \cdots$$

اور تقربات کوذیل کے جدول میں ظاہر کریں گے۔

$Iteration$	x_n	$x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{x_n+1}}$
0	0.5	0.81649
1	0.81649	0.74196
2	0.74196	0.75767
3	0.75767	0.75643
4	0.75643	0.75454
5	0.75454	0.75495
6	0.75495	0.75486
7	0.75486	0.75488

چھٹےاور ساتویں تقربے میں ہم دیکھتے ہیں کہ $x = 0.7548$ اعشاریہ کے 4 مقامات تک ریشہ متدق ہے۔

1.2 عملی مسائل:

1.2.1 $x = 1.5 \pm 0.0025$ پر $y = 6x^5 - 3x^4$ میں اضافی خطا اور فیصدی خطا معلوم کرو۔

1.2.2 تنصیف کے طریقے سے مساوات $x^3 - 5x + 3 = 0$ کا ایک حقیقی ریشہ معلوم کرو۔

1.2.3 تنصیف کے طریقے سے مساوات $x^3 - x - 11 = 0$ کا ایک حقیقی ریشہ معلوم کرو۔

1.2.4 ریگولا–فالسی طریقے سے مساوات $x^3 - x - 4 = 0$ کا ایک حقیقی ریشہ معلوم کرو۔

1.2.5 ریگولا–فالسی طریقے سے مساوات $e^x \sin x = 1$ کا ایک حقیقی ریشہ معلوم کرو۔

1.2.6 تواتر کے طریقہ سے $3x = \cos x + 1$ کو حل کیجیے۔

اکائی 2۔الجبرائی اور ٹرانسینڈینٹل مساواتیں - II

2.0 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں طلباء کی مسئلہ حل صلاحیت کو بہتر بنانے کے لیے الجبرائی اور ٹرانسینڈینٹل مساواتوں کے ریشے معلوم کرنے کے لیے نیوٹن کا طریقہ استعمال کیا گیا ہے۔ آخر میں بہت سے مسائل دیے گئے ہیں۔ اس اکائی کے مکمل کر لینے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ الجبرائی اور ٹرانسینڈینٹل مساوات کے ریشے نیوٹن کے طریقہ سے معلوم کر سکیں گے۔

2.1 تمہید (Introduction)

نیوٹن—رافسن کے طریقہ سے ہم

مساوات کے ریشہ کی بہتر قدریں معلوم کر سکتے ہیں جو پہلی اکائی کے طریقوں سے بھی بہتر ہوں گے۔ فرض کرو کہ $f(x)=0$

کا ایک تقربی ریشہ x_0 ہے اور فرض کرو کہ $x_1 = x_0 + h$

اس ریشے کی صحیح قدر ہے۔ اس طرح $f(x_1)=0$ ہو گا۔ $f(x_0+h)$ کا ٹیلر کے سلسلے میں پھیلاؤ لکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

اس میں دوسرے اور زائد رتبہ والے مشق کو نظر انداز کرنے سے حاصل ہے $f(x_0)+hf'(x_0)=0 \Leftarrow h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

اس طرح x_0 سے بہتر تقربہ $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ ہے اس سے تقربات $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$، $x_3, x_4, \ldots\ldots\ldots, x_n$

اور $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$، ۔۔۔۔۔۔۔ حاصل ہوں گے۔ اسے نیوٹن رافسن کا ضابطہ کہتے ہیں۔

مثال: نیوٹن—رافسن کے طریقے کی مدد سے مساوات $f(x) = x^3 - 3x - 5 = 0$ کا ایک ریشہ معلوم کرو۔

حل: دی گئی مساوات ہے $f(x) = x^3 - 3x - 5 = 0$

چوں کہ $f(2) = -3$ اور $f(3) = 13$ ہے۔ 2 اور 3 کے درمیان ایک ریشہ موجود ہو گا۔ ہم $x_0 = 3$ اگر منتخب کرتے ہوں تب نیوٹن —رافسن کے ضابطہ کی مدد سے $x_1 = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 2.46$ ہو گا۔ اسی طرح $x_2 = 2.46 - \frac{f(2.46)}{f'(2.46)} = 2.295$

اور $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2.279$ اور $x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 2.279 \Leftarrow f(x)=0, x = 2.279$ کا ایک ریشہ ہو گا۔

2.2 عملی مسائل

2.2.1 نیوٹن—رافسن کے طریقہ سے مساوات $3x = \cos x + 1$ کا ایک حقیقی ریشہ معلوم کرو۔

2.2.2 نیوٹن–رافسن کے طریقہ سے مساوات $x^5 - 5x + 2 = 0$ کا ایک حقیقی ریشہ معلوم کرو۔

2.2.3 نیوٹن–رافسن کے طریقہ سے مساوات $x^4 - x - 13 = 0$ کا ایک حقیقی ریشہ معلوم کرو۔

2.2.4: نیوٹن—رافسن کے طریقہ سے مساوات $x^3 - 5x + 3 = 0$ کا ایک حقیقی ریشہ معلوم کرو۔

2.2.5 نیوٹن–رافسن کے طریقہ سے مساوات $\tan x = 4x$ کاایک حقیقی ریشہ معلوم کرو۔

اکائی 3۔ خطی الجبرائی مساواتوں کا نظام - I

(گاس اسقاط اور گاس جارڈن طریقے)

3.0 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں طلباء کی مسئلہ حل صلاحیت کو بہتر بنانے کے لیے الجبرائی مساواتوں کے نظام کے حل کے لیے گاس اسقاط طریقہ اور گاس جارڈن طریقہ دیا گیا ہے۔ان کی مدد سے طلباء بہت سے مسائل کا حل معلوم کر سکیں گے۔

3.1 تمہید (Introduction)

اس اکائی میں خطی الجبرائی مساواتوں کے نظام کو حل کرنے کے لیے دو طریقہ (1) گاس اسقط کا طریقہ اور (2) گاس جارڈن کا طریقہ دیے گئے ہیں۔

گاس کا اسقاط طریقہ (Gauss Elimination Method) :

یہ ایک بنیادی اسقاطی طریقہ ہے جس میں مساواتوں کے نظام کو Upper Triangular نظام میں مختصر کیا جاتا ہے۔ جس کو حل کرنے کے لیے مؤخر اندراج استعمال کیا جاتا ہے۔اس طریقہ کو ہم تین متغیر کے مساواتوں کے نظام کے ذریعہ سمجھائیں گے۔ فرض کرو کہ

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \quad \text{-------------(I)} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

ایک نظام ہے۔اس سے اضافہ شدہ ماترس بنانے سے حاصل ہے

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix}$$

x_1 کو ساقط کرنے کے لیے پہلی مساوات کو $\frac{-a_{21}}{a_{11}}$ سے ضرب دے کر دوسری مساوات میں جمع کرتے ہیں۔ اسی طرح x_1 کو تیسری مساوات سے ساقط کرنے کے لیے پہلی مساوات کو $\frac{-a_{31}}{a_{11}}$ سے ضرب دے کر حاصل ضرب کو تیسری مساوات میں جمع کرتے ہیں۔ جس سے

حاصل ہے

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22}' & a_{23}' & b_2' \\ 0 & a_{32}' & a_{33}' & b_3' \end{bmatrix}$$

$$\frac{-a_{32}'}{a_{22}'}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22}' & a_{23}' & b_2' \\ 0 & a_{32}' & a_{33}' & b_3' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22}' & a_{23}' & b_2' \\ 0 & 0 & a_{33}'' & b_3'' \end{bmatrix}$$

جس کے ذریعہ x_1, x_2, x_3 کی قیمتیں حاصل کی جاسکتی ہیں۔

مثال: مندجہ ذیل مساواتی نظام کو گاس اسقاط طریقہ سے حل کرو۔

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 10 \\ 3x + 2y + 3z &= 18 \\ x + 4y + 9z &= 16 \end{aligned}$$

حل: دیا گیا نظام ہے

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 10 \\ 3x + 2y + 3z &= 18 \quad \text{----------} (\mathrm{I}) \\ x + 4y + 9z &= 16 \end{aligned}$$

پہلی مساوات کو $-\frac{3}{2}$ اور دوسری کو $-\frac{1}{2}$ سے ضرب دے کر تیسری مساوات میں جمع کرنے پر حاصل ہوتے ہیں مساوات

$$\begin{aligned} \frac{y}{2} + \frac{3}{2}z &= 3 \\ \frac{7}{2}y + \frac{17}{2}z &= 11 \end{aligned}$$

اضافہ شدہ ماترس اس طرح حاصل ہوتی ہے $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & 3 \\ 0 & 7/2 & 17/2 & 11 \end{bmatrix}$ دوسری مساوات کو 7- سے ضرب دے کر تیسری میں جمع کرنے پر حاصل ہے $\begin{aligned} 2x + y + z &= 10 \\ y/2 + 3z/2 &= 3 \\ -2z &= -10 \end{aligned}$ $\Leftarrow x = 7, y = -9, z = 5$

$\Leftarrow$ نظام I کا حل ہے $x = 7, y = -9, z = 5$۔

گاس جارڈن کا طریقہ:

جب گاس اسقاط کے طریقے میں a_{11} ، a_{22}' یا a_{33}'' میں سے کوئی ایک صفر ہو جائے اس صورت میں صفوں کی دوبارہ ترتیب سے طریقے کی ترمیم کی جاسکتی ہے تاکہ محور غیر صفر ہوں۔ یہاں تیسری مساوات میں صرف x_2 کو ساقط کرنے کے بجائے ہم اس کو پہلے مساوات سے ہی حاصل کر سکتے ہیں۔ تاکہ اضافہ شدہ ماترس ہو $\begin{bmatrix} a_{11}' & 0 & a_{13}' & b_1 \\ 0 & a_{22}' & a_{23}' & b_2' \\ 0 & 0 & a_{33}'' & b_3'' \end{bmatrix}$ جس سے ہم x_1, x_2, x_3 کی قیمتیں آسانی سے حاصل کر سکتے ہیں۔

مثال: گاس جارڈن کے طریقے سے حل کرو $x+2y+z=8, 2x+3y+4z=20, 4x+3y+2z=16$ ۔

حل: دے گیے مساوات ہیں

$$\begin{aligned} x+2y+z&=8 \quad -(1)\\ 2x+3y+4z&=20-(2)\\ 4x+3y+2z&=16-(3) \end{aligned}$$

مساوات 1 کی مدد سے مساوات 2 اور 3 میں x کو ساقط کرنے پر حاصل ہے

$$\begin{aligned} x+2y+z&=8 \quad -(4)\\ -y+2z&=4 \quad -(5)\\ -5y-2z&=-16 \quad -(6) \end{aligned}$$

5 کی مدد سے 4 اور 6 سے y کو ساقط کرنے سے حاصل ہے

$$\begin{aligned} x+5z&=16 \quad -(7)\\ -y+2z&=4 \quad -(8)\\ -12z&=-36 \quad -(9) \end{aligned}$$

7 اور 8 سے z ساقط کرنے پر حاصل ہے 12x=12,-6y=-12,-12z=-36۔

$\Rightarrow \quad x=1, y=2, z=3$۔

3.2 عملی مسائل

3.2.1 گاس اسقاط کے طریقہ سے حل معلوم کرو $3x+y+2z=3, 2x-3y-z=3, x+2y+z=4$ ۔

3.2.2 گاس اسقاط کے طریقہ سے حل معلوم کرو $6x+3y+2z=6, 6x+4y+3z=0, 20x+15y+12z=0$ ۔

3.2.3 گاس جارڈن کے طریقہ سے حل معلوم کرو $x+2y+z=8, 2x+3y+4z=20, 4x+3y+2z=16$ ۔

3.2.4 گاس جارڈن کے طریقہ سے حل معلوم کرو $x+y+z=9, 2x-3y+4z=13, 3x+4y+5z=40$ ۔

اکائی 4۔ خطی الجبرائی مساواتوں کے نظام - II

(گاس جیکوبی اور گاس سائیڈل طریقے)

4.0 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ اس قابل ہو جائیں گے۔ دیے گئے کوئی بھی خطی الجبرائی مساواتوں کے نظام کو(1) گاس جیکوبی اور (2) گاس سائیڈل کے طریقے سے استعمال کر کے ان نظام کے حل دریافت کر سکیں گے۔

4.1 تمہید(Introduction)

پچھلی اکائی میں ہم خطی الجبرائی مساواتوں کے نظام کے حل کے دو طریقوں (1) گاس اسقاط اور (2) گاس جارڈن سے واقف ہوئے ہیں اور ان کے استعمال سے بہت سے الجبرائی نظام کے حال حاصل کر سکیں ہیں۔ اس اکائی میں خطی الجبرائی مساواتوں کے نظام کے حل کے اور دو طریقوں کے بارے میں جانکاری حاصل کریں گے۔

(1) گاس جاکوبی کا طریقہ

اور (2) گاسائیڈل کا طریقہ

گاس جیکوبی کا طریقہ:

ہم زماں خطی مساواتکے نظام کا حل–گاس جیکوبی کا طریقہ

غور کور کہ 'n' مساوات اور 'n' غیر معلوم متغیرات کا نظام ہے۔

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + --- a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + --- a_{2n}x_n = b_2 \\
&- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\
&- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + --- a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
$$

جس میں وتری عناصر a_{11} غیر صفر ہوں۔ اگر ویسا نہیں ہے تب فروری ردوبدل کیا جائے گا۔ اب ہم اس نظام کو اس ترتیب پر لکھیں گے۔

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 .... - a_{1n}x_n\right] \\
x_2 &= \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 .... - a_{2n}x_n\right] \\
&\cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n &= \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 .... - a_{nn-1}x_{n-1}\right]
\end{aligned}
$$

فرض کرو کہ ابتدائی تقربہ $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, ..., x_n^{(0)}$

ہے، تب ان کو استعمال کرتے ہوئے پہلا تقرب $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, ..., x_n^{(1)}$

معلوم کیا جائے گا۔ جس کو ذیل میں بتایا گیا ہے۔

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)} .... - a_{1n}x_n^{(0)}\right]$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(0)} - a_{23}x_3^{(0)} .... - a_{2n}x_n^{(0)}\right]$$

. . .   .

. .   . .

$$x_n^{(1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - a_{n1}x_1^{(0)} - a_{n2}x_2^{(0)} .... - a_{nn-1}x_{n-1}^{(0)}\right]$$

اسی طرح تکرار کر کے اگلے تقرب معلوم کیے جاتے ہیں۔ عمومی تکراری طریقہ یوں بنے گا۔

$$x_1^{(n+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(n)} - a_{13}x_3^{(n)} .... - a_{1n}x_n^{(n)}\right]$$

$$x_2^{(n+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(n)} - a_{23}x_3^{(n)} .... - a_{2n}x_n^{(n)}\right]$$

. . .   .

. .   . .

$$x_n^{(n+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - a_{n1}x_1^{(n)} - a_{n2}x_2^{(n)} .... - a_{nn-1}x_{n-1}^{(n)}\right]$$

اس نظام کو ماترس کی شکل میں $X = BX + C$ لکھا جا سکتا ہے۔اور $X^{(n+1)} = BX^{(n)} + C$

اس کے متدق ہونے کی شرط $\|B\| < 1$ ہو گی۔

طریقہ کار: مندرجہ بالا نظریہ میں ‘n’ مساوات اور ‘n’ متغیرات طے گیے تھے۔ لیکن عملی میدان میں ہم 3 مساوات اور 3 متغیرات پر بحث کریں گے۔ تا کہ سمجھنے میں مزید آسانی ہو اور مرحلہ وار استدقاق سمجھ سکیں۔

غور کرو

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

جہاں ارکان a_{11}, a_{22}, a_{33} بڑے ہیں دوسرے ارکان کے مقابل۔ پھر

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3\right]$$
$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3\right]$$
$$x_3 = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2\right]$$

ابتدائی تقربہ میں $x_1^{(0)} = 0, x_2^{(0)} = 0, x_3^{(0)} = 0$ لیا جائے گا۔

تب پہلا تقربہ معلوم کیا جائے گا۔

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)}\right]$$
$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(0)} - a_{23}x_3^{(0)}\right]$$
$$x_3^{(1)} = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x_1^{(0)} - a_{32}x_2^{(0)}\right]$$

پھر دوسرا تقربہ معلوم کیا جائے گا۔

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(1)} - a_{13}x_3^{(1)}\right]$$
$$x_2^{(2)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(1)}\right]$$
$$x_3^{(2)} = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)}\right]$$

تکرار جاری رکھیں گے مطلوبہ صحت کے حصول تک۔ان تقربوں کو ایک جدول میں ظاہر کریں گے۔

مثال: دیے گئے نظام مساوات کو گس جیکوبی کے طریقہ سے حل کرو۔

$$3x + y - z = 3$$
$$2x - 8y + z = -5$$
$$x - 2y + z = 8$$

حل: دیا گیا نظام ہے

$$3x + y - z = 3$$
$$2x - 8y + z = -5$$
$$x - 2y + z = 8$$

اس کو یوں بدل کر لکھیں گے۔

$$x = \frac{1}{3}[3 - y + z]$$
$$y = \frac{1}{8}[5 + 2x + z]$$
$$z = \frac{1}{9}[8 - x + 2z]$$

گاس جیکوبی کے مطابق ابتدائی طور پر $x_1^{(0)} = 0, x_2^{(0)} = 0, x_3^{(0)} = 0$

لیا جاتا ہے۔اور $x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}$

معلوم کیا جاتا ہے۔

جس کی وجہ

$$x^{(1)} = \frac{1}{3}[3 - 0 + 0] = 1$$
$$y^{(1)} = \frac{1}{8}[5 + 2(0) + 0] = 0.6250$$
$$z^{(1)} = \frac{1}{9}[8 - 0 + 2(0)] = 0.8889$$

اور ان کو استعمال کر کے دوسرا تقربہ

$$x^{(2)} = \frac{1}{3}\left[3.y^{(1)} + z^{(1)}\right]$$
$$y^{(2)} = \frac{1}{8}\left[5 + 2x^{(1)} + z^{(1)}\right]$$
$$z^{(2)} = \frac{1}{9}\left[8 - x^{(1)} + 2y^{(1)}\right]$$

معلوم کیا جائے گا۔اب ان کی قیمتیں ہم درج جدول میں ظاہر کریں گے۔

Iteration No	$x^{(n+1)}$	$y^{(n+1)}$	$z^{(n+1)}$
0	1	0.6250	0.8889
1	1.0880	0.9861	0.9167
2	0.9769	1.0116	0.9871
3	0.9919	0.9926	1.0251
4	1.0042	0.9980	0.9993
5	1.0002	1.0010	0.9992
6	1.0002	1.0000	1.0000

7	0.9999	1.0000	1.0000
8	1.0000	1.0000	1.0000

جدول میں ہمیں $x=1, y=1, z=1$ جمع حل موصول ہوا۔

گاس سائیڈل طریقہ:

گاس سیڈل کا طریقہ:

غور کرو ایک ہم زماں مساوات کے نظام پر

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

اس نظام میں مان رکھو کہ a_{ii} عناصر (اولی وتری عناصر) بڑے ہیں دوسروں کے مقابلے۔ پھر ان مساوات کو اس ترتیب پر بدلیں گے۔

$$x = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}y - a_{13}z\right]$$

$$y = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x - a_{23}z\right]$$

$$z = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x - a_{32}y\right]$$

اب گاس سیڈل کے طریقہ میں $x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}$ معلوم کرنے کا طریقہ گاس جیکوبی کے طریقہ سے قدرے الگ ہے۔ وہ اس طرح ہے۔

$$x^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}y^{(0)} - a_{13}z^{(0)}\right], y^{(0)} = 0, z^{(0)} = 0$$

$y^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x^{(0)} - a_{23}z^{(0)}\right]$ $z^{(0)} = 0$ اور $x^{(1)}$ ابھی معلوم کی گئی قیمت ہوگی

$z^{(1)} = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x^{(0)} - a_{32}y^{(0)}\right]$ $x^{(1)}$ اور $y^{(1)}$ ابھی اسی تقربہ میں معلوم کی گئی قیمتیں ہیں

نوٹ: یعنی قیمت کے معلوم کرنے میں تازہ ترین قیمتوں کو استعمال کیا جاتا ہے جہاں تک ممکن ہو اسی طرح اگلا تقربہ یہ بنے گا۔

$$x^{(2)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}y^{(1)} - a_{13}z^{(1)}\right]$$

$$y^{(2)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x^{(2)} - a_{23}z^{(1)}\right]$$

$$z^{(2)} = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x^{(2)} - a_{32}y^{(2)}\right]$$

اس طرح (n+1) واں تقربہ یہ بنے گا۔

$$x^{(n+1)}=\frac{1}{a_{11}}\left[b_1-a_{12}y^{(n)}-a_{13}z^{(n)}\right]$$
$$y^{(n+1)}=\frac{1}{a_{22}}\left[b_2-a_{21}x^{(n+1)}-a_{23}z^{(n)}\right]$$
$$z^{(n+1)}=\frac{1}{a_{33}}\left[b_3-a_{31}x^{(n+1)}-a_{32}y^{(n+1)}\right]$$

طریقہ کی تکرار مطلوبہ صحت کے حامل ہونے تک کی جاسکتی ہے۔ ہم غور کرتے ہیں کہ یہ طریقہ گاس جیکوبی کے طریقہ پر ایک اصلاح/بہتری ہے۔ جس میں تازہ ترین قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے جلد استدقاق ہوتا ہے۔ بلکہ گاس سیڈل دُگنا تیز مستدق ہے گاس جیکوبی کے مقابلے۔

مثال: گاس سیڈل کے طریقہ پر حل کیجیے

$$5x+2y+z=12$$
$$x+4y+2z=15$$
$$x+2y+5z=20$$

حل: ہم دیکھتے ہیں کہ تکراری طریقہ کے اطلاق کی شرائط برائے استدقاق

$$|a_{11}|>|a_{12}|+|a_{13}|$$

$$|a_{22}|>|a_{21}|+|a_{23}|$$

اور

$$|a_{32}|>|a_{31}|+|a_{32}|$$

پوری ہوتی ہیں۔

چنانچہ اطلاق کے پیش رفت میں دیے گئے مساوات سے

$$x=\frac{1}{5}[12-2y-z]$$
$$y=\frac{1}{4}[15-x-2z]$$
$$z=\frac{1}{5}[20-x-2y]$$

اب پہلے تقربہ کا عمل اس طرح ہوگا۔

$$x^{(1)}=\frac{1}{5}\left[12-2y^{(0)}-z^{(0)}\right]\ ,y^{(0)}=0,\ \ z^{(0)}=0$$
$$=2.40$$

اور

$$y^{(1)}=\frac{1}{4}\left[15-x^{(1)}-2z^{(0)}\right]\ ,x^{(1)}=2.4,\ \ z^{(0)}=0$$
$$y^{(1)}=\frac{1}{4}[15-2.4-0]=3.15$$

اور پھر

$$z^{(1)} = \frac{1}{5}\left[20 - x^{(1)} - 2y^{(1)}\right] \quad , x^{(1)} = 2.4,\; y^{(1)} = 3.15$$

$$z^{(1)} = \frac{1}{5}\left[20 - 2.4 - 2(3.15)\right] = 2.26$$

دوسرا تقربہ یوں بنے گا

$$x^{(2)} = \frac{1}{5}\left[12 - 2y^{(1)} - z^{(1)}\right]$$

$$y^{(2)} = \frac{1}{4}\left[15 - x^{(2)} - 2z^{(1)}\right]$$

$$z^{(2)} = \frac{1}{5}\left[20 - x^{(2)} - 2y^{(2)}\right]$$

اسی طرح پیش رفت ہو گی ان کی قیمتوں کو جدول میں ظاہر کریں گے۔

n	$x^{(n+1)}$	$y^{(n+1)}$	$z^{(n+1)}$
0	2.4	3.15	2.26
1	0.688	2.448	2.8832
2	0.8441	2.0973	2.9922
3	0.9626	2.0132	3.0022
4	0.9942	2.0003	3.0010
5	0.9997	1.9996	3.0002
6	1.0001	1.9997	3.0002
7	1.0000	1.9999	3.0000
8	1.0000	2.0000	3.0000

جدول سے ظاہر ہے کہ طریقہ $x = 1, y = 2, z = 3$ پر مستدق ہے۔

4.2 عملی مسائل

4.2.1 خطی مساواتوں کے نظام

$$\begin{aligned} 8x+y+z&=8 \\ 2x+4y+z&=4 \\ x+3y+3z&=5 \end{aligned}$$

کو گاس جیکوبی کے طریقہ سے حل کرو۔

4.2.2 خطی مساواتوں کے نظام

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 4 \\ x + 2y + z &= 4 \\ x + y + 2z &= 4 \end{aligned}$$

کو گاس جیکوبی کے طریقہ سے حل کرو۔

4.2.3 خطی مساواتوں کے نظام

$$
\begin{aligned}
30x - 2y + 3z &= 75 \\
2x + 2y + 18z &= 30 \\
x + 17y - 2z &= 48
\end{aligned}
$$

کو گاس سائیڈل کے طریقہ سے حل کرو۔

4.2.4 خطی مساواتوں کے نظام

$$\begin{aligned} x + 10y + z &= 6 \\ 10x + y + z &= 6 \\ x + y + 10z &= 6 \end{aligned}$$

کو گاس سائیڈل کے طریقہ سے حل کرو۔

بلاک—6 تحریف—عددی تفرق اور عددی تکمل

(Interpolation – Numerical Differentiation & Numerical Integration)

چھٹا بلاک اکائی 5 سے 8 پر مشتمل ہے۔ جس میں اکائی 5 اور 6 میں تحریف، منقسمہ فرقیں، مرکزی فرقیں، مساوی اور غیر مساوی وقفوں کی تحریف کے بارے میں معلومات درج ہیں۔ اکائی 7 اور 8 میں عددی تفرق، عددی تکمل اور معمولی تفرقی مساواتیں اور ان کے حل سے متعلق کئی مسائل دیے گئے ہیں۔

اکائی 5

تحریف—منقسمہ فرقیں اور مرکزی فرقیں

(Interpolation – Divided differences and Central differences)

5.0 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ تحریف (Interpolation)، منقسمہ اور مرکزی فرقوں (Divided and Central Differences) کی معلومات حاصل کر کے ان کے استعمال سے کئی مسائل کو حل کر سکیں گے۔

5.1 تمہید (Introduction)

اگر کسی تفاعل کا گراف دیے گئے نقطوں کے سٹ میں سے گزرتا ہے تو اس تفاعل کی قیمتوں کو محسوب کرنے کے عمل کو تحریف (Interpolation) کہا جاتا ہے۔ یہ وہ تکنیک ہے جہاں پر جدولی تفاعل کو غیر جدولی قیمتوں کی تخمین اس مفروضہ کے تحت کی جاتی ہے کہ تفاعل کا گراف کافی حد تک جدولی نقطوں کے درمیان ہموار ہے۔ یہ اس وقت ممکن ہو گا جب تحریفی تفاعل (Interpolation Function) کا نچلے درجے کی کثیر رکنیوں سے تقارب کیا جائے۔

تعریف: مقدم فرقی عامل (Forward Difference Operator)

فرض کرو کہ ایک تفاعل f کی تفاعلی قیمتوں $f(a), f(a+h), f(a+2h), \ldots\ldots$

کا جدول غیر تابع متغیر $x = a, a+h, a+2h, \ldots\ldots$ پر بنایا گیا ہو تب

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

کو ہم first forward difference پہلے درجے کا مقدم کہتے ہیں $f(x)$ کا دوسرے درجے کا فرق اس طرح ہے۔

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = \Delta(f(x+h) - f(x)) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x)$$
$$= f(x+2h) - f(x+h) - (f(x+h) - f(x)) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$

عمومی طور پر n ویں درجے کا f(x) کا فرق ہے

$$\Delta^n(f(x)) = \Delta(\Delta^{n-1}(f(x)) = \Delta^{n-1}(f(x+h)) - \Delta^{n-1}(f(x)$$

مؤخر فرق (Backward difference) :

$\nabla(f(x)) = f(x) - f(x-h)$ اور $\nabla(f(x+h)) = f(x+h) - f(x)$ ، $f(x)$ اور $f(x+h)$ کے مؤخر فرق کہلاتے ہیں۔اسی طرح $\nabla^2(f(x)) = \nabla(\nabla f(x)) = \nabla(f(x) - f(x-h)) = f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)$

$f(x)$ کا دوسرا مؤخر فرق کہلاتا ہے۔

تعریف:متبدل عامل(Shift Operator):

عامل E جس کی تعریف ہے $E(f(x)) = f(x+h)$ کو $f(x)$ کا متبدل عامل (Shift Operator) کہتے ہیں۔

تعریف:منقسمہ فرقیں (Divided differences) :

فرض کرو کہ x کی واضح قیمتوں $x_0, x_1, x_2, x_3, ...x_n$ کے لیے تفاعل $f(x)$ معلوم ہے اور تفاعلی قدریں $f(x_0), f(x_1), f(x_2), f(x_3), ...f(x_n)$ ہیں، جہاں $x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, ...x_n - x_{n-1}$ غیر مساوی وقفیں ہیں۔

پہلے منقسمہ فرق کی تعریف ہے منقسم فرق اس طرح مصرف ہے جس کی کتابت $\triangle$ ہے۔

$$\triangle f(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f(x_i, x_{i+1})$$

جہاں $i = 0,1,2, \cdots, n$

تو پھر

$$\begin{aligned}
f\ \ x_0, x_1\ \ &= \triangle f\ \ x_0\ \ = \frac{f\ \ x_1\ \ - f\ \ x_0}{x_1 - x_0} \\
f\ \ x_1, x_2\ \ &= \triangle f\ \ x_1\ \ = \frac{f\ \ x_2\ \ - f\ \ x_1}{x_2 - x_1} \\
&\vdots \\
f\ \ x_{n-1}, x_n\ \ &= \triangle f\ \ x_{n-1}\ \ = \frac{f\ \ x_n\ \ - f\ \ x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}
\end{aligned}$$

دوسرے درجہ کا منقسم فرق اس طرح ہو گا۔

$$f\ \ x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\ \ = \triangle^2 f\ \ x_i\ \ = \frac{f\ \ x_{i+1}, x_{i+2}\ \ - f\ \ x_i, x_{i+1}}{x_{i+2} - x_i}$$

چنانچہ

$$f\ \ x_0, x_1, x_2\ \ = \triangle^2 f\ \ x_0\ \ = \frac{f\ \ x_1, x_2\ \ - f\ \ x_0, x_1}{x_2 - x_0}$$

اس لیے

$$f(x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n) = \Delta^n f(x_0) = \frac{f(x_1, x_2, \cdots, x_n) - f(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})}{x_n - x_0}$$

یہ بات غور کی گئی ہوگی کہ اونچے درجہ کا منقسم فرق کو محسوب کرنے کے لیے اس کے نیچے درجہ کے منقسم فرقوں کو استعمال کیا گیا ہے۔ ذیل میں منقسم فرقوں کے جدول کی تشکیل کو سمجھایا گیا ہے۔ اسے نیوٹن کا منقسم فرقوں کا جدول کہتے ہیں۔

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	$\Delta^4 f(x_i)$
x_0	$f(x_0)$	$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$	$\frac{\Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)}{x_2 - x_0}$	$\frac{\Delta^2 f(x_1) - \Delta^2 f(x_0)}{x_3 - x_0}$	$\frac{\Delta^3 f(x_1) - \Delta^3 f(x_0)}{x_4 - x_0}$
x_1	$f(x_1)$	$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$	$\frac{\Delta f(x_2) - \Delta f(x_1)}{x_3 - x_1}$	$\frac{\Delta^2 f(x_2) - \Delta^2 f(x_1)}{x_4 - x_1}$	
x_2	$f(x_2)$	$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$	$\frac{\Delta f(x_3) - \Delta f(x_2)}{x_4 - x_2}$		
x_3	$f(x_3)$	$\frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}$			
x_4	$f(x_4)$				

مثال۔ $\Delta_y x^2$ محسوب کیجیے۔

حل۔ ہم جانتے ہیں

$$\Delta_y f(x) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

$$\therefore \Delta_y x^2 = \frac{y^2 - x^2}{y - x} = \frac{(y - x)(y + x)}{y - x} = y + x$$

مثال۔ $\Delta^2_{y,z} x^3$ محسوب کیجیے۔

حل۔

$$\begin{aligned}
\Delta^2_{y,z} x^3 &= \frac{\Delta_z y^3 - \Delta_y x^3}{z - x} \\
&= \frac{\frac{z^3 - y^3}{z - y} - \frac{y^3 - x^3}{y - x}}{z - x} \\
&= \frac{\frac{(z-y)(z^2+yz+y^2)}{z-y} - \frac{(y-x)(y^2+xy+x^2)}{y-x}}{z - x} \\
&= \frac{(z^2 + yz + y^2) + (-y^2 - xy - x^2)}{z - x} \\
&= \frac{z^2 - x^2 + yz - xy}{z - x} \\
&= \frac{(z - x)(z + x) + y(z - x)}{z - x} \\
&= x + y + z
\end{aligned}$$

مرکزی فرقیں(Central Differences)

بعض صورتوں میں ایک رقم کی فرقیں جنہیں مرکزی فرقیں کہا جاتا ہے استعمال کرنا مفید ہوتا ہے۔ مرکزی فرقوں کا عامل δ اس طرح مصرف ہے۔

$$
\begin{aligned}
y_1 - y_0 &= \delta y_{\frac{1}{2}} \\
y_2 - y_1 &= \delta y_{\frac{3}{2}} \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
y_n - y_{n-1} &= \delta y_{n-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

وغیرہ

$$
\begin{aligned}
\delta^2 y_1 &= \delta y_{\frac{3}{2}} - \delta y_{\frac{1}{2}} \\
\delta^2 y_2 &= \delta y_{\frac{5}{2}} - \delta y_{\frac{3}{2}} \\
\delta^3 y_{\frac{3}{2}} &= \delta^2 y_2 - \delta^2 y_1
\end{aligned}
$$

وغیرہ۔

مندرجہ ذیل جدول مرکزی فرقوں کی مزید وضاحت کرتا ہے۔

x	y	δy	$\delta^2 y$	$\delta^3 y$	$\delta^4 y$	$\delta^5 y$
x_0	y_0	$\delta y_{\frac{1}{2}} = y_1 - y_0$				
x_1	y_1	$\delta y_{\frac{3}{2}}$	$\delta^2 y_1 = \delta y_{\frac{3}{2}} - \delta y_{\frac{1}{2}}$	$\delta^3 y_{\frac{3}{2}} = \delta^2 y_2 - \delta^2 y_1$		
x_2	y_2	$\delta y_{\frac{5}{2}}$	$\delta^2 y_2$	$\delta^3 y_{\frac{5}{2}}$	$\delta^4 y_2 = \delta^3 y_{\frac{5}{2}} - \delta^3 y_{\frac{3}{2}}$	$\delta^5 y_{\frac{5}{2}}$
x_3	y_3	$\delta y_{\frac{7}{2}}$	$\delta^2 y_3$	$\delta^3 y_{\frac{7}{2}}$	$\delta^4 y_3$	$= \delta^4 y_3 - \delta^4 y_2$
x_4	y_4	$\delta y_{\frac{9}{2}}$	$\delta^2 y_4$			
x_5	y_5					

مرکزی فرق کو ضابطہ کے طور پر یوں بتایا جا سکتا ہے۔

$$\delta f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right)$$

اور غور کریں

$$
\begin{aligned}
\delta f(x) &= E^{1/2} f(x) - E^{-1/2} f(x) \\
&= \left(E^{1/2} - E^{-1/2}\right) f(x)
\end{aligned}
$$

لہٰذا $\delta = E^{1/2} - E^{-1/2}$

δ کی مزید خصوصیات اور عوامل سے رشتے

$$\delta = \Delta E^{-1/2} = E^{-1/2} \Delta \quad \text{(i)}$$

ثبوت: چونکہ

$$
\begin{aligned}
\delta f(x) &= f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right) \\
&= \Delta f\left(x - \frac{h}{2}\right) \\
&= \Delta E^{-1/2} f(x) \\
&= E^{-1/2} \Delta f(x)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \delta = \Delta E^{-1/2} = E^{-1/2}\Delta$$

$$\delta = \nabla E^{1/2} = E^{1/2}\nabla \quad \text{(ii)}$$

ثبوت: چونکہ تعریف کے مطابق

$$\delta f(x) = f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right)$$
$$= \nabla f\left(x+\frac{h}{2}\right)$$
$$= \nabla E^{1/2} f(x)$$
$$= E^{1/2}\nabla f(x)$$
$$\Rightarrow \delta = \nabla E^{1/2} = E^{1/2}\nabla$$

$$\delta^n f(x) = \Delta^n f\left(x-\frac{nh}{2}\right) = \nabla^n f\left(x+\frac{nh}{2}\right) \quad \text{(iii)}$$

ثبوت: چونکہ ہم جانتے ہیں کہ

$$\delta f(x) = \Delta E^{-1/2} f(x)$$
$$\Rightarrow \delta^n f(x) = \Delta^n E^{-n/2} f(x)$$
$$= \Delta^n f\left(x-\frac{nh}{2}\right)$$

اور

$$\delta f(x) = \nabla E^{\frac{1}{2}} f(x)$$
$$\Rightarrow \delta^n f(x) = \nabla^n E^{\frac{n}{2}} f(x)$$
$$= \nabla^n f\left(x+\frac{nh}{2}\right)$$

تعریف: اوسط عامل $\boldsymbol{\mu}$ (Average Operator μ)

اوسط عامل μ کی تعریف یوں ہے کسی تفاعل $f(x)$ پر جہاں وقفہ کا طول h ہے۔

$$\mu f(x) = \frac{1}{2}\left[f\left(x+\frac{h}{2}\right) + f\left(x-\frac{h}{2}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[E^{\frac{1}{2}} f(x) + E^{-\frac{1}{2}} f(x)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}}\right) f(x)$$
$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{2}\left(E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}}\right)$$

مثال۔ حل کیجیے: $\dfrac{\nabla^3 x^3}{\delta^2 x^2}$

حل۔

$$\frac{\nabla^3 x^3}{\delta^2 x^2} = \frac{(\Delta \mathrm{E}^{-1})^3 x^3}{(\Delta E^{-1/2})^2 x^2}$$
$$= \frac{\Delta^3 \mathrm{E}^{-3} x^3}{\Delta^2 E^{-1} x^2}$$
$$= \frac{\Delta^3 (x-3)^3}{\Delta^2 (x-1)^2}$$

$$= \frac{\Delta^3(x^3 - 9x^2 + 27x - 27)}{\Delta^2(x^2 - 2x + 1)}$$

چوں کہ $\Delta^{\mathrm{n}} x^m = 0$ جبکہ $n > m$ اس لیے

$$= \frac{\Delta^3 x^3}{\Delta^2 x^2}$$

$$[\because \Delta^{\mathrm{n}} x^n = n!] \Rightarrow \frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3$$

5.2 عملی مسائل

5.2.1 $\underset{y}{\Delta} x^2$ محسوب کیجیے ۔

5.2.2 $\Delta[e^{2x}\log 3x]$ کو معلوم کیجیے۔

5.2.3 $y_x = (3x + 1)(3x + 4) \cdots (3x + 22)$ کا چوتھا فرق معلوم کیجیے۔

5.2.4 دیے گئے جدول کے لیے منقسم فرقوں کا جدول بنائیے۔

x	4	5	7	10	11	13
$f(x)$	48	100	294	900	1210	2028

اکائی 6۔ مساوی اور غیر مساوی وقفوں کی تحریف

(Interpolation with equal and unequal intervals)

6.0 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے ختم کرنے تک آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ

نیوٹن کے مقدم تحریفی ضابطہ کا استعمال کرتے ہوئے جدول شدہ قدروں کے سٹ کے آغاز کے قریب y کی قدروں کو تحریف کرکے تفاعل کی قدر تلاش کر سکیں۔

نیوٹن کے مئوقر تحریفی ضابطہ کا استعمال کرتے ہوئے جدول شدہ قدروں کے سٹ کے آخری قدر کے قریب y کی قدروں کو تحریف کرکے تفاعل کی قدر تلاش کر سکیں۔ کی دی گئی قیمت کے لیے تفاعل کی قدر کا اندازہ کرنے کے لیے نیوٹن کے منقسیمہ تفریق کا ضابطہ کا اطلاق کر سکیں۔

x کی دی گئی قیمت کے لیے تفاعل کی قدر کا اندازہ کرنے کے لیے لیگرانج کے تحریفی ضابطہ کا اطلاق کر سکیں۔

6.1 تمہید(Introduction)

نیوٹن- گریگوری کا مساوی وقفوں کے لیے مقدم تحریفی ضابطہ

نیوٹن- گریگوری کا مساوی وقفوں کے لیے مقد متحریفی ضابطہ درجہ ذیل ہے

$$f(x_0+hu)= f(x_0)+u\Delta f(x_0)+\frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0)+\frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 f(x_0)+\cdots$$
$$+\frac{u(u-1)(u-2)\cdots\{u-(n-1)\mathrm{h}\}}{3!}\Delta^n f(x_0),$$

جہاں $u=\dfrac{x-x_0}{h}$ ہے۔

مثال۔ دیے گئے ڈاٹا سے ایک تفاعل کی شکل حاصل کیجیے

x : 0	1	2	3	4
$f(x)$: 3	6	11	18	27

حل۔ فرقی جدول اس طرح ہو گا

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0	3			
		3		
1	6		2	
		5		0
2	11		2	
		7		0
3	18		2	
		9		
4	27			

یہاں $u=\dfrac{x-a}{h}$, $a=0, h=1$ ہیں۔

اس کے لیے نیوٹن- گریگوری کا ضابطہ اس طرح دیا گیا ہے

$$f(x)=f(0)+x\Delta f(0)+\frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 f(0)+\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\Delta^3 f(0)$$

$$=3+x\cdot 3+\frac{x(x-1)}{2}(2)+0$$

$$=3+3x+x^2-x$$

$$=x^2+2x+3$$

$$\therefore\ f(x)=x^2+2x+3$$

مثال۔ دیے گئے جدول سے $\sin 52^\circ$ کی قدر حاصل کیجیے

$\theta:$	45°	50°	55°	60°
$f(x):$	$0\cdot 7071$	$0\cdot 7660$	$0\cdot 8192$	$0\cdot 8660$

حل۔ فرقی جدول اس طرح ہو گا

θ	$f(\theta)=\sin\ \theta$	$\Delta f(\theta)$	$\Delta^2 f(\theta)$	$\Delta^3 f(\theta)$
45°	0.7071			
		0.0589		
50°	0.7760		−0.0057	
		0.0532		−0.0007
55°	0.8192		−0.0064	
		0.0468		
60°	0.8660			

نیوٹن- گریگوری کے مقدم تحریفی ضابطہ سے ہمیں حاصل ہے

$$f(x_0+hu)=f(x_0)+u\Delta f(x_0)+\frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0)+\frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 f(x_0)+\cdots \quad (1)$$

یہاں $u=\dfrac{52^\circ-45^\circ}{5^\circ}=\dfrac{7}{5}=1.4$, $x_0=45^\circ, x_0+uh=52^\circ, h=5^\circ$ ہیں۔

$$f(52^\circ)=f(45^\circ)+1.4\Delta f(45^\circ)+\frac{1.4(1.4-1)}{2!}\Delta^2 f(45^\circ)+\frac{1.4(1.4-1)(1.4-2)}{3!}\Delta^3 f(45^\circ)$$

$$=0.7071+1.4\times 0.0589-\frac{1.4(0.4)}{2}\times 0.0057+\frac{1.4(0.4)(0.6)}{6}\times 0.0007$$

$$=0.7071+0.08246-0.001596+0.0000392$$

$$= 0.7880032$$

اس لیے

$$\sin 52^\circ = 0.7880032$$

قضیہ 2۔نیوٹن- گریگوری کامساوی وقفوں کے لیے موخّر تحریفی ضابطہ درجہ ذیل ہے

$$f(a+nh+hu) = f(a+nh) + u\nabla f(a+nh) + \frac{u(u+1)}{2!}\nabla^2 f(a+nh) + \cdots$$

مثال۔درجہ ذیل ڈاٹاسے $x = 2.65$ پر y کی قیمت محسوب کیجیے

x	-1	0	1	2	3
y	-21	6	15	12	3

حل۔چوں کہ $x = 2.65$ جدول کی آخری قدر کے خریب ہے اس لیے ہم درجہ ذیل نیوٹن- گریگوری کامساوی وقفوں کے لیے موخر تحریفی ضابطہ کااستعمال کریں گے۔

$$y_u = y_n + u\nabla y_n + \frac{u(u+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{u(u+1)(u+2)}{3!}\nabla^3 y_3 + \frac{u(u+1)(u+2)(u+4)}{4!}\nabla^4 y_4 + \cdots$$

یہاں $x = 2.65, x_n = 3, h = 1$ اس لیے

$$u = \frac{x - x_n}{h} = \frac{2.65 - 3}{1} = -0.35$$

$\nabla y_n, \nabla^2 y_n$ وغیرہ کو حاصل کرنے کے لیے موخر تفریقی جدول بناتے ہیں

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$
0 -1	-21				
		27			
	6		-18		
1		9		6	
	15		-12		0
2		-3		6	
	12		-6		
3		-9			
	3				

$$y = 3 + (-0.35)(-9) + \frac{(-0.35)(-0.35+1)}{2!}(-6) + \frac{(-0.35)(-0.35+1)(-0.35+2)}{3!}(6)$$
$$= 6.4571$$

نیوٹن کامنقسمہ تفریق کاتحریفی ضابطہ

(Newton's Divided Difference Interpolation Formula)

فرض کیجیے کہ $y = f(x)$ کی $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ کے متعلق مقداریں $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \cdots, f(x_n)$ ہیں۔اب

$$\underset{x_1}{\Delta} f(x) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

$$\Rightarrow (x - x_1)\underset{x_1}{\Delta} f(x) = f(x) - f(x_1)$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_1) + (x - x_1)\underset{x_1}{\Delta} f(x) \qquad \cdots (1)$$

دو بارہ

$$\underset{x_1,x_2}{\Delta^2} f(x) = \frac{\underset{x_1}{\Delta} f(x) - \underset{x_2}{\Delta} f(x_1)}{x-x_2}$$

$$\therefore \underset{x_1}{\Delta} f(x) = \underset{x_2}{\Delta} f(x_1) + (x-x_2) \underset{x_1,x_2}{\Delta^2} f(x) \qquad \cdots (2)$$

اسی طرح

$$\underset{x_1,x_2}{\Delta^2} f(x) = \underset{x_2,x_3}{\Delta^2} f(x_1) + (x-x_3) \underset{x_1,x_2,x_3}{\Delta^3} f(x) \qquad \cdots (3)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\underset{x_1,x_2,\cdots,x_n}{\Delta^n} f(x) = \underset{x_2,x_3,\cdots,x_{n+1}}{\Delta^n} f(x_1) + (x-x_{\text{n+1}}) \underset{x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}}{\Delta^{n+1}} f(x) \qquad \cdots (4)$$

تب مساوات (1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1) + (x-x_1)\left[\underset{x_2}{\Delta} f(x_1) + (x-x_2) \underset{x_1,x_2}{\Delta^2} f(x)\right] \\ &= f(x_1) + (x-x_1) \underset{x_2}{\Delta} f(x_1) + (x-x_1)(x-x_2) \underset{x_1,x_2}{\Delta^2} f(x) \end{aligned}$$

مساوات (3) سے $\underset{x_1,x_2}{\Delta^2} f(x)$ کی قیمت درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1) + (x-x_1) \underset{x_2}{\Delta} f(x_1) + (x-x_1)(x-x_2) \underset{x_2,x_3}{\Delta^2} f(x_1) \\ &\quad + \left[(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \underset{x_1,x_2,x_3}{\Delta^3} f(x)\right] \\ &= f(x_1) + (x-x_1) \underset{x_2}{\Delta} f(x_1) + (x-x_1)(x-x_2) \underset{x_2,x_3}{\Delta^2} f(x_1) + (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\ &\quad \underset{x_1,x_2,x_3}{\Delta^3} f(x) \end{aligned}$$

اسی طرز پر آگے بڑھنے اور $\underset{x_1,x_2,\cdots,x_n}{\Delta^n} f(x)$ کی قدر کو درج کرنے سے ہمیں ہوتا ہے

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1) + (x-x_1) \underset{x_2}{\Delta} f(x_1) + (x-x_1)(x-x_2) \underset{x_2,x_3}{\Delta^2} f(x_1) + \cdots \\ &\quad + (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{\text{n}}) \underset{x_2,x_3,\cdots,x_n}{\Delta^n} f(x_1) + (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{\text{n+1}}) \\ &\quad \underset{x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}}{\Delta^{n+1}} f(x) \\ &= f(x_1) + (x-x_1) \underset{x_2}{\Delta} f(x_1) + (x-x_1)(x-x_2) \underset{x_2,x_3}{\Delta^2} f(x_1) + \cdots \\ &\quad + (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{\text{n}}) \underset{x_2,x_3,\cdots,x_{n+1}}{\Delta^n} f(x_1) + R_{n+1} \end{aligned}$$

جہاں $R_{n+1} = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{\text{n+1}}) \underset{x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}}{\Delta^{n+1}} f(x)$ ہے۔

چوں کہ $f(x)$ ایک n درجہ کی کثیر رکنی ہے ، اس لیے

$$\underset{x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}}{\Delta^{n+1}} f(x) = 0$$

$$\Rightarrow R_{n+1} = 0$$

اب ہمیں ملتا ہے

$$f\ x\ = f\ x_1\ +\ x - x_1\ \underset{x_2}{\Delta} f\ x_1\ +\ x - x_1\ \ x - x_2\ \underset{x_2,x_3}{\Delta^2} f\ x_1\ + \cdots$$
$$+\ x - x_1\ \ x - x_2\ \cdots\ x - x_n\ \underset{x_2,x_3,\cdots,x_{n+1}}{\Delta^n} f\ x_1$$

یہ ضابطہ نیوٹن کا منقسمہ تفریق کا تحریفی ضابطہ کہلاتا ہے۔

رمارک: اس ضابطہ کو منقسمہ تفریق کے جدول کی مدد سے لکھا جا سکتا ہے:

a) جدول سے $f(x)$ کی کسی ایک قیمت کو لے کر ابتدا کیجیے۔

b) مرحلہ بہ مرحلہ اعلیٰ تفریق تک پہنچیں، جن میں سے ہر ایک اوپر یا نیچے کی سمت میں ہو سکتا ہے۔

c) کسی بھی مرحلے پر متعارف کرایا گیا x_i اگلی اصطلاح کے عوامل کا تعین کرے گا، یعنی اگلی اصطلاح میں ایک اور عنصر $x - x_i$ شامل ہو گا۔

مندرجہ ذیل جدول میں، فرض کریں کہ ہم تفاعل کی قدر $f(x_3)$ کے ساتھ شروع کرتے ہیں اور لگاتار اعلیٰ فرقوں کی طرف منتقل کرتے ہیں جیسا کہ تیروں کے ذریعے دکھایا گیا ہے

$f\ x_1$				
$f\ x_2$	$\underset{x_2}{\Delta} f\ x_1$	$\underset{x_2,x_3}{\Delta^2} f\ x_1$	$\underset{\boldsymbol{x_2,x_3,x_4}}{\boldsymbol{\Delta^3}}\ \boldsymbol{f\ x_1}$	
$\boldsymbol{f\ x_3}$	$\underset{\boldsymbol{x_3}}{\boldsymbol{\Delta}}\ \boldsymbol{f\ x_2}$	$\underset{\boldsymbol{x_3,x_4}}{\boldsymbol{\Delta^2}}\ \boldsymbol{f\ x_2}$		$\underset{\boldsymbol{x_2,\cdots,x_5}}{\boldsymbol{\Delta^4}}\ \boldsymbol{f\ x_1}$
$f\ x_4$	$\underset{x_4}{\Delta} f\ x_3$	$\underset{x_4,x_5}{\Delta^2} f\ x_3$	$\underset{x_3,x_4,x_5}{\Delta^3} f\ x_2$	
$f\ x_5$	$\underset{x_5}{\Delta} f\ x_4$			

یہاں ہم $\boldsymbol{f(x_3)}$ لیتے ہیں اور فرقیں $\underset{\boldsymbol{x_3}}{\boldsymbol{\Delta}} \boldsymbol{f(x_2)}$، $\underset{\boldsymbol{x_3,x_4}}{\boldsymbol{\Delta^2}} \boldsymbol{f(x_2)}$، $\underset{\boldsymbol{x_2,x_3,x_4}}{\boldsymbol{\Delta^3}} \boldsymbol{f(x_1)}$ اور $\underset{\boldsymbol{x_2,\cdots,x_5}}{\boldsymbol{\Delta^4}} \boldsymbol{f(x_1)}$ لیتے ہیں۔

دوسرے، تیسرے...... پانچوے ارکان کے جزو ضربی، $x - x_3$، $x - x_3\ \ x - x_2$، $x - x_3\ \ x - x_2\ \ x - x_4$ اور $x - x_3\ \ x - x_2\ \ x - x_4\ \ x - x_1$ ہیں۔اب

$$f\ x\ = f\ x_3\ +\ x - x_3\ \underset{x_3}{\Delta} f\ x_2\ +\ x - x_3\ \ x - x_2\ \underset{x_3,x_4}{\Delta^2} f\ x_2$$
$$+\ x - x_3\ \ x - x_2\ \ x - x_4\ \underset{x_2,x_3,x_4}{\Delta^3} f\ x_1$$
$$+\ x - x_3\ \ x - x_2\ \ x - x_4\ \ x - x_1\ \underset{x_2,\cdots,x_5}{\Delta^4} f\ x_1$$

نیوٹن کے منقسمہ تفریق کے تحریفی ضابطہ کو لکھنے کے اس طریقے کو ٹیڑھا-میڑھا(Zig-Zag) قاعدہ یا شیفرڈ(Sheppard) قاعدہ کہتے ہیں۔

مثال۔اگر $f\ 1\ = 3, f\ 3\ = 31, f\ 6\ = 223, f\ 10\ = 1011, f\ 11\ = 1343$ ہو تو نیوٹن کے منقسمہ تفریق کے تحریفی ضابطہ کا استعمال کرکے $f\ 8$ کی قدر حاصل کیجیے۔

حل۔ منقسمہ تفریق کی جدول کی تشکیل اس طرح ہوگی

x	$f\ x$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
1	3	$\frac{31-3}{3-1}=14$	$\frac{50}{5}=10$	$\mathbf{\frac{9}{9}=1}$	$\mathbf{0}$
3	31	$\frac{223-31}{6-3}=64$	$\mathbf{\frac{133}{7}=19}$	$\frac{8}{8}=1$	
6	223	$\frac{1011-223}{10-6}=197$	$\frac{135}{5}=27$		
10	1011	$\frac{1343-1011}{11-10}=332$			
11	1343				

نیوٹن کا منقسمہ تفریق کا تحریفی ضابطہ درجہ ذیل ہے

$$f\ x\ = f\ 1\ +\ x-1\ \underset{3}{\Delta} f\ 1\ +\ x-1\ \ x-3\ \underset{6,10}{\Delta^2} f\ 1\ +\ x-1\ \ x-3\ \ x-6\ \underset{3,6,10}{\Delta^3} f\ 1$$

تفریق، $f\ 1$ کی قیمت اور $x = 8$ درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا

$$\begin{aligned} f\ 8\ &= 3+\ 8-1\ 14+\ 8-1\ \ 8-3\ 10+\ 8-1\ \ 8-3\ \ 8-6\ 1 \\ &= 3+98+350+70 \\ &= 521 \end{aligned}$$

مثال۔دی گئی جدول کے ڈاٹا سے نیوٹن کے منقسمہ تفریق کے ضابطہ کا استعمال کرکے $f\ 9$ کی قدر حاصل کیجیے۔

x	5	7	11	13	17
$f(x)$	150	392	1452	2366	5202

حل۔ منقسمہ تفریق کی جدول کی تشکیل اس طرح ہوگی

x	$f\ x$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
5	150	$\frac{392-150}{7-5}=121$	$\frac{265-121}{11-5}=24$	$\mathbf{\frac{32-24}{13-5}=1}$	0
7	392	$\frac{1452-392}{11-7}=265$	$\mathbf{\frac{457-265}{13-7}=32}$	$\frac{42-32}{17-7}=1$	
11	1452	$\frac{2366-1452}{13-11}=457$	$\frac{709-457}{17-11}=42$		
13	2366	$\frac{5202-2366}{17-13}=709$			
17	5202				

یوٹن کا منقسمہ تفریق کا تحریفی ضابطہ درجہ ذیل ہے

$$
\begin{aligned}
f\ x\ &= f\ x_1\ +\ x-x_1\ \underset{x_2}{\Delta} f\ x_1\ +\ x-x_1\ \ x-x_2\ \underset{x_2,x_3}{\Delta^2} f\ x_1\ +\cdots \\
&\quad +\ x-x_1\ \ x-x_2\ \cdots\ x-x_n\ \underset{x_2,x_3,x_4}{\Delta^3} f\ x_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f\ 9\ &= 150+\ 9-5\ 121+\ 9-5\ \ 9-7\ 24+\ 9-5\ \ 9-7\ \ 9-11\ 1 \\
&= 150+484+192-16 \\
&= 810
\end{aligned}
$$

مثال۔نیوٹن کا منقسمہ تفریق کا تحریفی ضابطہ کا استعمال کر کے $f(8)$ اور $f(15)$ کی قدر حاصل کیجیے

x	4	5	7	10	11	13
$f(x)$	48	100	294	900	1210	2028

حل۔خود حل کریں۔ **جواب۔**$f\ 8\ = 448$،$f\ 15\ = 3150$

مثال۔نیوٹن کا منقسمہ تفریق کا تحریفی ضابطہ کا استعمال کر کے $f(8)$ اور $f(15)$ کی قدر حاصل کیجیے

x	-4	-1	0	2	5
$f(x)$	1245	33	5	9	1335

حل۔خود حل کریں۔

x	$f\ x$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
-4	1245				
		-404			
-1	33				
		-28	94		
0	5	2	10	-14	3
		442	88	13	
2	9				
5	1335				

نیوٹن کا منقسمہ تفریق کا تحریفی ضابطہ سے ہمیں حاصل ہے

$$
\begin{aligned}
f\ x\ &= f\ x_0\ +\ x-x_0\ [x_0,x_1]+\ x-x_0\ \ x-x_1\ [x_0,x_1,x_2] \\
&\quad +\ x-x_0\ \ x-x_1\ \ x-x_2\ [x_0,x_1,x_2,x_3] \\
&\quad +\ x-x_0\ \ x-x_1\ \ x-x_2\ \ x-x_3\ [x_0,x_1,x_2,x_3,x_4] \\
f\ 9\ &= 1245+\ x+4\ \ -404\ +\ x+4\ \ x+1\ 94+\ x+4\ \ x+1\ \ x-0\ \ -14 \\
&\quad +\ x+4\ \ x+1\ \ x-0\ (x-2)\ 3 \\
&= 3x^4-5x^2+6x^2-14x+5
\end{aligned}
$$

لیگرانج کا تحریفی ضابطہ (Lagrange's Interpolation Formula)

فرض کیجیے کہ $f(x)$ کی $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ کے متعلق $(n+1)$ مقداریں $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)$ ہیں۔تب $f(x)$ کو n درجہ کی کثیر رکنی کی طرح اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$f\ x\ = \frac{x-x_1\quad x-x_2\quad x-x_3\ \cdots\ x-x_n}{x_0-x_1\quad x_0-x_2\quad x_0-x_3\ \cdots\ x_0-x_n} f\ x_0$$
$$+\frac{x-x_0\quad x-x_2\quad x-x_3\ \cdots\ x-x_n}{x_1-x_0\quad x_1-x_2\quad x_1-x_3\ \cdots\ x_1-x_n} f\ x_1\ + \cdots$$
$$+\frac{x-x_0\quad x-x_1\quad x-x_3\ \cdots\ x-x_{n-1}}{x_n-x_0\quad x_n-x_1\quad x_n-x_2\ \cdots\ x_n-x_{n-1}} f\ x_n$$

اس کو لیگرانج کا تحریفی ضابطہ کہتے ہیں۔

مثال۔ دیا ہے $f\ 15\ = 336, f\ 7\ = 192, f\ 1\ = 168$ ہے، تو لیگرانج کے تحریفی ضابطہ کا استعمال کر کے $f\ 10$ کی قدر حاصل کیجیے۔

حل۔ یہاں $x_0 = 1, x_1 = 7, x_2 = 15$ اور $y_0 = 168, y_1 = 192, y_2 = 336$ ہیں۔ ہمیں $f\ 10$ حاصل کرنا ہے ۔
لیگرانج کا تحریفی ضابطہ درجہ ذیل ہے

$$y = \frac{x-x_1\quad x-x_2}{x_0-x_1\quad x_0-x_2} y_0 + \frac{x-x_0\quad x-x_2}{x_1-x_0\quad x_1-x_2} y_1 + \frac{x-x_0\quad x-x_1}{x_2-x_0\quad x_2-x_1} y_2$$
$$y = f\ 10\ = \frac{10-7\quad 10-15}{1-7\quad 1-15} \times 168 + \frac{10-1\quad 10-15}{7-1\quad 7-15} \times 192 + \frac{10-1\quad 10-7}{15-1\quad 15-7} \times 336$$
$$= \frac{-15}{84} \times 168 + \frac{-45}{-48} \times 192 + \frac{27}{112} \times 336$$
$$= -30.005 + 180 + 81.01$$
$$= 231.005$$

6.2 عملی مسائل

6.2.1 لیگرانج کا تحریفی ضابطہ استعمال کرتے ہوئے ذیل کے جدول سے y کی قدر معلوم کرو جب x=10 ہے

X	5	6	9	11
Y	12	13	14	16

6.2.2 لیگرانج کا تحریفی ضابطہ استعمال کرتے ہوئے ذیل کے ڈاٹا سے $f(x)$ معلوم کرو

X	0	2	3	6
f(x)	648	704	729	792

6.2.3 لیگرانج کا تحریفی ضابطہ استعمال کرتے ہوئے ذیل کے ڈاٹا سے کثیر رکنی $f(x)$ معلوم کرو

x	-4	-1	0	2	5
y	1245	33	5	9	1335

اکائی 7

عددی تفرق اور عددی تکمل

(Numerical Differentiation and Numerical Integration)

7.0 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد طلبا کو اس قابل ہو جانا چاہیے کہ :

وہ کسی دیے گئے نقطہ پر نیوٹن کے مقدم اور موقر تحریفی ضابطوں کی مدد سے مشتقات کی پہلے، دوسرے اور تیسرے درجہ کی قدر معلوم کر سکیں۔

ٹریپزوڈل، سمپسن کے $\frac{1}{3}$ اور سمپسن کے $\frac{3}{8}$ قاعدوں کا استعمال کر کے دی گئی حدود کے اندر تکمل حاصل کر سکیں۔

بولے کے قاعدے کے استعمال سے دیے گئے تکمل کو محسوب کر سکیں۔

7.1 تمہید (Introduction)

عددی تفرق (Numerical Differentiation)

مشتقات کے لیے ضابطے (Formulae for Derivatives): فرض کیجیے کہ تفاعل $y = f(x)$ جس کی قیمتیں $x_i = x_0 + ih$، $i = 0,1,2,\cdots,n$ کے لیے جدول میں دی گئی ہیں۔

نیوٹن کا مقدم تحریفی ضابطہ اس طرح سے دیا جاتا ہے

$$y = y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots \qquad \cdots(1)$$

جہاں $u = \frac{x-x_0}{h}$ ہے۔

مساوات (1) کو بہ لحاظ u تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہے

$$\frac{dy}{dx} = \Delta y_0 + \frac{2u-1}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{3u^2-6u+2}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots$$

اب

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{h}\frac{dy}{du}$$

اس لیے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2u-1}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{3u^2-6u+2}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{4u^3-18u^2+22u-6}{4!}\Delta^4 y_0 + \cdots\right] \ldots(2)$$

جیسا کہ ہمیں معلوم ہے $x = x_0, u = 0$

اس لیے مساوات(2)میں $u=0$ درج کرنے پر ہمیں حاصل ہے

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{h}\left[\Delta y_0-\frac{1}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{2}{3}\Delta^3 y_0-\frac{1}{4}\Delta^4 y_0+\cdots\right]\cdots(3)$$

مساوات(2)کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{du}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{du}{dx}=\frac{1}{h}\frac{d}{du}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0+(u-1)\Delta^3 y_0+\frac{6u^2-18u+11}{12}\Delta^4 y_0+\cdots\right]\ldots(4)$$

مساوات(2)میں $u=0$ درج کرنے پر ہمیں حاصل ہے

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=x_0}=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0-\Delta^3 y_0+\frac{11}{12}\Delta^4 y_0+\cdots\right]$$

اسی طرح

$$\left[\frac{d^3y}{dx^3}\right]_{x=x_0}=\frac{1}{h^3}\left[\Delta^3 y_0-\frac{3}{2}\Delta^4 y_0+\cdots\right]$$

موقر تفریقی ضابطہ سے مشتقات(Derivatives using Backward Difference Formula)

اب فرض کیجیے کہ نیوٹن کا موقر تفریقی ضابطہ درجہ ذیل ہے

$$y=y_n+u\nabla y_n+\frac{u(u+1)}{2!}\nabla^2 y_n+\frac{u(u+1)(u+2)}{3!}\nabla^3 y_3+\frac{u(u+1)(u+2)(u+3)}{4!}\nabla^4 y_4+\cdots \qquad ....(1)$$

مساوات(1)کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہے

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{h}\left[\nabla y_n-\frac{2u+1}{2!}\nabla^2 y_n+\frac{3u^2+6u+2}{3!}\nabla^3 y_n+\frac{4u^3+18u^2+22u+6}{4!}\nabla^4 y_n+\cdots\right]$$

ہمیں معلوم ہے $x=x_n$ پر $u=0$ ہے۔اس لیے

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_n}=\frac{1}{h}\left[\nabla y_n+\frac{1}{2}\nabla^2 y_n+\frac{1}{3}\nabla^3 y_n+\frac{1}{4}\nabla^4 y_n+\cdots\right]$$

اسی طرح

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=x_n}=\frac{1}{h^2}\left[\nabla^2 y_n+\nabla^3 y_n+\frac{11}{12}\nabla^4 y_n+\cdots\right]$$

$$\left[\frac{d^3y}{dx^3}\right]_{x=x_n}=\frac{1}{h^3}\left[\nabla^3 y_n+\frac{3}{2}\nabla^4 y_n+\cdots\right]$$

مثال۔ xاور y کی قیمتوں کی درجہ ذیل جدول سے $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1.5}$ اور $\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=1.5}$ حاصل کیجیے:

x	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
y	3.375	7.0	13.625	24.0	38.875	59.0

حل۔ سب سے پہلے ہم تفریقی جدول کی تشکیل کریں گے۔

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
1.5	3.375					
		3.625				
2.0	7.0		3			
		6.625		0.75		
2.5	13.625		3.75		0	
		10.375		0.75		0
3.0	24.0		4.5		0	
		14.875		0.75		
3.5	38.875		5.25			
		20.125				
4.0	59.0					

یہاں $x_0 = 1.5, y_0 = 3.375, h = 0.5$ ہیں۔

نیوٹن-کے مقدم متفریق کے لیے تحریفی ضابطہ سے ہمیں حاصل ہے

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0} = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \frac{1}{5}\Delta^5 y_0 + \cdots\right]$$

$$\Rightarrow \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1.5} = \frac{1}{0.5}\left[3.625 - \frac{1}{2}(3) + \frac{1}{3}\;0.75\; - \frac{1}{4}\;0\; + \frac{1}{5}\;0\;\right]$$

$$= \frac{1}{0.5}[3.625 - 1.5 + 0.25]$$

$$= 4.75$$

اور

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=x_0} = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 + \cdots\right]$$

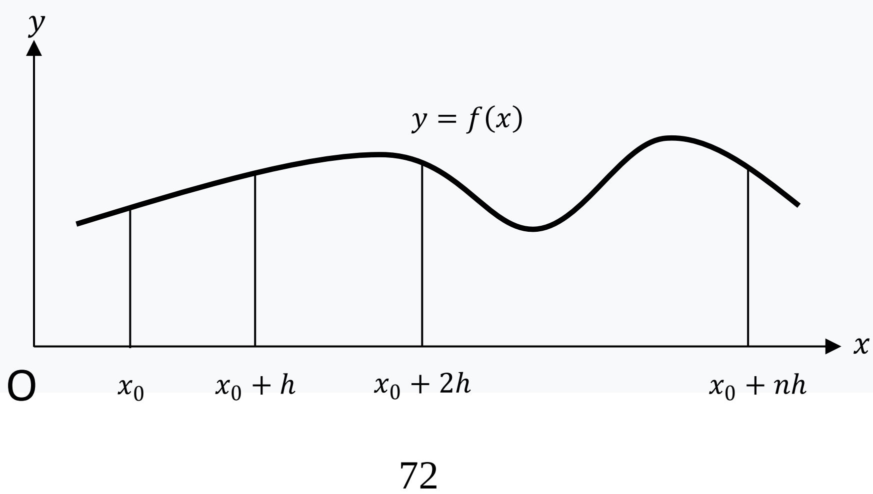
$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=1.5} = \frac{1}{0.5^{\;2}}\left[3 - 0.75 + \frac{11}{12}\;0\; - \frac{5}{6}\;0\;\right]$$

$$= \frac{2.25}{0.25} = 9$$

نیوٹن-کوٹس کواڈریچر ضابطہ(Newton-Cotes Quadrature Formula)

فرض کیجیے کہ $I = \int_a^b f(x)dx$ ہے، جہاں $f(x)$ کی، مقداروں $x = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ کے لیے قیمتیں $y_0, y_1, y_2, \cdots y_n$ ہیں۔اب ہم وقفہ $[a, b]$ کو h لمبائی کے n تحت وقفوں میں اس طرح سے بانٹ تے ہیں کہ

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \cdots, x_n = x_0 + nh = b$$



تب،

$I = \int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)dx = h\int_0^n f(x_0+uh)du$ $\qquad$ $x_0 + uh$ اور $dx = hdu$ درج کرنے پر

نیوٹن کے موقر تحریفی ضابطہ سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$f(x) = y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)(u-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \cdots$$

اب

$$I = h\int_0^n [y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots] du$$

رکن بہ رکن تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\,dx = nh[y_0 &+ \frac{n}{2}\Delta y_0 + \frac{n(2n-3)}{12}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-2)^2}{24}\Delta^3 y_0 \\ &+ \left(\frac{n^4}{5} - \frac{3n^3}{2} + \frac{11n^2}{3} - 3n\right)\frac{\Delta^4 y_0}{4!} \\ &+ \left(\frac{n^5}{6} - 2n^4 + \frac{34n^3}{4} - \frac{50n^2}{3} + 12n\right)\frac{\Delta^5 y_0}{5!} + \cdots] \qquad ....(1)\end{aligned}$$

اس کو نیوٹن-کوٹس کواڈریچر ضابطہ کہتے ہیں۔ $n = 1, 2, 3, \cdots$ اس ضابطہ میں درج کرکے ہم درجہ ذیل اہم ضابطے حاصل کریں گے۔

ٹریپزوڈل قاعدہ (Trapezoidal Rule)

مساوات (1) میں $n = 1$ درج کرکے اور منحنی کو نقطوں (x_0, y_0) اور (x_1, y_1) کے درمیان ایک خط کی طرح لے کر، یعنی، ایک پہلے رتبہ کی کثری رکنی اس طرح لیتے ہیں کہ ایک سے زیادہ رتبوں کے فرق صفر ہو جائیں۔ تب ہمیں حاصل ہے

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx = h\left(y_0 + \frac{1}{2}\Delta y_0\right) = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_1\right) \qquad \left[\because \Delta y_0 = y_1 - y_0\right]$$

اسی طرح

$$\int_{x_0+h}^{x_0+2h} f(x)\,dx = h\left(y_1 + \frac{1}{2}\Delta y_1\right) = \frac{h}{2}\left(y_1 + y_2\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\int_{x_0+(n-1)h}^{x_0+nh} f(x)\,dx = h\left(y_{n-1} + \frac{1}{2}\Delta y_{n-1}\right) = \frac{h}{2}\left(y_{n-1} + y_n\right)$$

ان تکملات کو جمع کرنے پر ہمیں حاصل ہے

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[\left(y_0 + y_n\right) + 2\left(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right)\right]$$

اس کو ٹریپزوڈل ضابطہ کہتے ہیں۔

ہر ایک پٹی کا رقبہ منفرد طور پر حاصل کیا جاتا ہے۔تب منحنی کے نیچے اور مختصات x_0 اور x_n کے درمیانی رقبہ n ٹراپیزیم کے رقبوں کی جمع کے تقریباً مساوی ہوتا ہے۔

سمپسن کا $\frac{1}{3}$ قاعدہ (Simpson's $\frac{1}{3}$ Rule)

من درجہ بالا مساوات (1) میں $n = 2$ درج کر کے اور منحنی کو نقطوں (x_0, y_0)، (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) کے درمیان ایک مکافی کی طرح لے کر، یعنی، ایک دوسرے رتبہ کی کثیر رکنی اس طرح لیتے ہیں کہ دوسرے سے زیادہ رتبے کے فرق صفر ہو جائیں۔تب ہمیں حاصل ہے

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)\,dx = 2h\left(y_0 + \Delta y_0 + \frac{1}{6}\Delta^2 y_0\right) = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

اسی طرح

$$\int_{x_0+2h}^{x_0+4h} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(y_2 + 4y_3 + y_4\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\int_{x_0+(n-2)h}^{x_0+nh} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right)$$

n جفت ہونے پر

ان تمام تکملات کو جمع کرنے پر، جب کہ n جفت ہے، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[\left(y_0 + y_n\right) + 4\left(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}\right)\right]$$

اس کو سمپسن کا $\frac{1}{3}$ قاعدہ کہتے ہیں۔

سمپسن کا $\frac{3}{8}$ قاعدہ (Simpson's $\frac{3}{8}$ Rule)

من درجہ بالا مساوات (1) میں $n = 3$ درج کر کے اور منحنی کو نقطوں (x_i, y_i)، جہاں $i = 0,1,2,3$ پر ایک تیسرے رتبہ کی کثیر رکنی اس طرح لیتے ہیں کہ تیسرے رتبے سے زیادہ کے فرق صفر ہو جائیں۔تب ہمیں حاصل ہے

$$\int_{x_0}^{x_0+3h} f(x)\,dx = 3h\left(y_0 + \frac{3}{2}\Delta y_0 + \frac{3}{4}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{8}\Delta^3 y_0\right) = \frac{3h}{8}\left(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3\right)$$

اسی طرح

$$\int_{x_0+3h}^{x_0+5h} f(x)\,dx = \frac{3h}{8}\left(y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

x_0 سے $x_0 + nh$ تک کے تمام تکملات کو جمع کرنے پر، جب کہ n ایک 3 کا ضریب ہے، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\,dx = \frac{3h}{8}\left[\left(y_0 + y_n\right) + 3\left(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + \cdots + y_{n-1}\right) + 2\left(y_3 + y_6 + \cdots + y_{n-3}\right)\right]$$

اس کو سمپسن کا $\frac{3}{8}$ قاعدہ کہتے ہیں۔

مثال ۔ تکمل $\int_0^1 x^3 dx$ کو 5 تحت وقفوں کے ساتھ ٹریپزوڈل کے قاعدے سے محسوب کیجیے۔

حل۔ یہاں

$$a = 0, b = 1, n = 5, y = x^3$$
$$\therefore h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = 0.2$$

x اور y کی قیمتیں درجہ ذیل جدول میں دی گئیں ہیں

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	0.008	0.064	0.216	0.512	1

ٹریپزوڈل کے قاعدے سے

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[\left(y_0 + y_n\right) + 2\left(y_1 + y_2 + y_3\right)\right]$$

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{0.2}{2}\left[\left(0.008+1\right) + 2\left(0.064+0.216+0.512\right)\right]$$
$$= \left(0.1\right)\left(2.592\right)$$
$$= 0.2592$$
$$= 0.26$$

مثال۔ درجہ ذیل جدول سے منحنی اور x محور ($x = 7.47$ اور $x = 7.52$) سے گھرے ہوئے حصہ کا رقبہ محسوب کیجیے۔

x	7.47	7.48	7.49	7.50	7.51	7.52
$y = f(x)$	1.93	1.95	1.98	2.01	2.03	2.06

حل۔ یہاں $n = 5, h = 0.1$

ٹریپزوڈل کے قاعدے سے مطلوبہ رقبہ ہے

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[\left(y_0 + y_n\right) + 2\left(y_1 + y_2 + y_3\right)\right]$$

$$\int_{7.47}^{7.52} y dx = \frac{0.01}{2}\left[\left(1.93+2.06\right) + 2\left(1.95+1.98+2.01+2.03\right)\right]$$
$$= 0.005\left(3.99+15.94\right)$$
$$= 0.09965$$

7.2 عملی مثائل

7.2.1 تکمل $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ کو 4 تحت وقفوں کے ساتھ ٹریپزوڈل کے قاعدے سے محسوب کیجیے۔

7.2.2 سمپسن کے $\frac{3}{8}$ قاعدہ کی مدم سے $\int_0^6 \frac{dx}{1+x}$ اخز کرو۔

7.2.3 سمپسن کے $\frac{1}{3}$ قاعدہ کی مدت سے n=6 کے لیے $\int_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{x}$ کی قدر معلوم کرو۔

اکائی 8۔ معمولی تفرقی مساواتیں اور ان کے حل (آئیلر طریقہ دو اور چار کے رنگے کٹا طریقے)

(Ordinary Differential Equations-Euler and Runge Kutta Methods)

8.0 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر طلبہ کو اس قابل ہو جائیں گے کہ :

ٹیلر سلسلہ کے طریقہ اور دیگر تخمینہ لگانے کے پکارڈ کے طریقہ (Picard's Method of Successive Approximation) سے پہلے رتبے کی تفرقی مساوات کا عددی حل حاصل کر سکیں۔

یولر کے طریقہ اور ترمیم شدہ یولر کے طریقہ سے حاصل کسی تفرقی مساوات کا موازنہ کر سکیں

اس اکائی کے مکمل ہونے پر طلبا اس قابل ہو جائیں گے کہ پہلے رتبے اور پہلے درجے کی تفرقی مساوات کو رنگے۔کٹّا کے طریقوں سے حل کر سکیں۔

8.1 تمہید (Introduction)

ٹیلر سلسلہ کے طریقہ سے حل (Solution by Taylor's Series)

فرض کریں کہ $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ شرط $y(x_0) = y_0$ کے ساتھ ایک تفرقی مساوات ہے۔اب

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad \cdots(1)$$

مساوات (1) کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y'$$

$$\Rightarrow y'' = f_x + f_y y' \qquad \cdots(2)$$

یکے بعد دیگر تفرق کرنے پر ہمیں y''', y^{iv} وغیرہ مشتقات حاصل ہوتے ہیں۔ $x = x_0$ اور $y = y_0$ درج کرنے پر ہمیں $y_0', y_0'', y_0''', \cdots$ حاصل ہوتے ہیں۔

$y(x)$ کا $x = x_0$ کے گرِد ٹیلر سلسلہ کا پھیلاؤ اس طرح سے دیا جاتا ہے

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}y''(x_0) + \cdots$$

$$= y_0 + (x - x_0)y_0' + \frac{(x-x_0)^2}{2!}y_0'' + \cdots \qquad \cdots(3)$$

$y_0', y_0'', y_0''', \cdots$ کی قیمتیں درج کرنے پر ہم x کی تمام قیمتوں کے لیے $y(x)$ حاصل کرتے ہیں جس کے لیے مساوات(3) مستدق(Convergent)ہے۔ مان لیں کہ $x_1 = x_0 + h$ اور

$$y(x_1) = y_1 = y_0 + \frac{h}{1!}y_0' + \frac{h^2}{2!}y_0'' + \cdots$$

ایک بار y_1 معلوم ہو جائے، تو ہم مساوات(1)اور(2)کے استعمال سے تمام $y_1', y_1'', y_1''', \cdots$ کا حساب لگا سکتے ہیں۔تب $y(x)$ کو ٹیلر کے سلسلہ میں $x = x_1$ کے گرِد پھیلایا جاسکتا ہے اور ہمیں حاصل ہے

$$y(x_1 + h) = y(x_2) = y_2 = y_1 + \frac{h}{1!}y_1' + \frac{h^2}{2!}y_1'' + \cdots \qquad \cdots(4)$$

اسی طرز عمل کے ساتھ ہم $y(x)$ کا حل حاصل کر لیتے ہیں۔

مساوات(4)کو اس طرح بھی لکھا جاسکتا ہے

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{1!}y_1' + \frac{h^2}{2!}y_1'' + o(h^3)$$

جہاں h کی تیسری اور اعظم قوتوں والے تمام ارکان کو $o(h^3)$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

اگر ہم h^3 اور h کی اعلی قوتوں والے تمام ارکان کو چھوڑتے ہوئے y_2 کی قدر محسوب کرتے ہیں تو تراش ایرر(Truncation Error) kh^3 ہوگا ، جہاں k ایک مستقل ہے اور اس کے متناظر ٹیلر کا سلسلہ دوسرے رتبے کا کہلاتا ہے۔

عام طور پر، اگر ٹیلر کے سلسلہ کے پھیلاؤ میں سے h^{n+1} اور h کی اعلی قوتوں والے تمام ارکان کو ہٹا دیا جائے تو ایرر h^{n+1} کے متناسب ہوگا اور اس طرح حاصل ٹیلر کے سلسلہ کا رتبہ n ہوگا۔

نوٹ: اگر ہم یکے بعد دیگر مشتقات بآسانی حاصل کر سکتے ہیں تو، ٹیلر سلسلہ کا طریقہ سب سے بہتر ہے جس میں صرف ایک ہی مرحلہ ہے۔ اگر $f(x,y)$ میں پیچیدہ الجبرائی شکلیں ہوں تو اعلی مشتقات حاصل کرنا بہت تھکا دینے والا کام ہوگا اور اس لیے یہ طریقہ ناکام رہتا ہے۔ اس لیے ہم اور بھی بہتر طریقوں کے بارے میں پڑھیں گے، جیسے یولر اور رنگے کٹا کے طریقے۔

مثال۔ ٹیلر سلسلہ کے طریقہ کا استعمال کر کے مساوات $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ کو $x = 0.4$ کے لیے حل کیجیے، جب کہ دیا گیا ہے کہ

$$x = 0 \Rightarrow y = 0$$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$y' = f(x,y) \qquad \cdots(1)$$

جہاں $f(x,y) = x^2 + y^2$ ہے۔

مساوات(1)کو بہ لحاظ x بار بار تفرق کرتے ہیں جس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 2x + 2y \cdot y'$$

$$y''' = 2 + 2\left(y'\right)^2 + 2y \cdot y''$$
$$y^{iv} = 6y' \cdot y'' + 2y \cdot y'''$$

$x = 0$ پر $y = 0$ ہے، یعنی $y'(0) = 0, y''(0) = 0, y'''(0) = 0, y^{iv}(0) = 0$

$x = 0$ کے خریب ٹیلر کا سلسلہ اس طرح ہوتا ہے

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2!}y''(0) + \frac{x^3}{3!}y'''(0) + \cdots$$
$$= \frac{x^3}{3!}(2) + 0\cdots \text{ (اعلی رتبے کے ارکان کو چھوڑ کر)}$$
$$= \frac{x^3}{3}$$

اس لیے

$$y(0.4) = \frac{0.064}{3} = 0.02133$$

پکارڈ کے طریقہ سے حل (Solution by Picard's Method)

فرض کریں کہ

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad \cdots(1)$$

ابتدائی شرط $y = y_0$ جب کہ $x = x_0$ کے ساتھ پہلے رتبے کی تفرقی مساوات ہے۔

مساوات (1) کو انتہاؤں کے درمیان تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx$$
$$\Rightarrow y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx \qquad \cdots(2)$$

یہ ایک تکملی مساوات ہے جس میں تکمل کے نشان کے تحت نامعلوم متغیر y ہے۔

حل کے لیے $f(x, y)$ میں $y = y_0$ درج کر کے پہلی تقریبی قدر y_1 حاصل کرتے ہیں اور مساوات (2) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx$$

اسی طرح دوسری تقریبی قدر y_2 کے لیے $f(x, y)$ میں $y = y_1$ درج کرتے ہیں اور مساوات (2) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)dx$$

اسی طرز عمل پر ہم حاصل کرتے ہیں

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})dx$$

یہ پکارڈ کا تکراری ضابطہ کہلاتا ہے۔

نوٹ: پکارڈ کے طریقہ سے تقریبی قدروں(Approximation Values) کا ایک تواتر $y_1, y_2, \cdots$ حاصل ہوتا ہے جس میں سے ہر ایک اپنے سے پہلے کے مقابلے بہتر نتیجہ فراہم کرتا ہے۔ لیکن یہ طریقہ اس وقت استعمال کیا جا سکتا ہے جب کہ یکے بعد دیگر تکمل(Successive Integration) حاصل کرنا آسان ہو۔

مثال۔ پکارڈ کے طریقے سے تفرقی مساوات $y' = y + x$ کا یکے بعد دیگر تقریبی حل محسوب کیجیے اس طرح کہ $y = 1$ جب $x = 0$ ہے۔

حل۔ پکارڈ کا تکراری ضابطہ نیچے لکھا گیا ہے

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})dx$$

جہاں $n = 1, 2, 3, \cdots$

پہلی تقریبی قدر کے لیے $x + y$ میں $y = 1$ درج کرتے ہیں

$$y_1 = 1 + \int_0^x (1 + x)dx = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

دوسری تقریبی قدر کے لیے $y' = y + x$ میں $y = 1 + x + x^2$ درج کرتے ہیں

$$y_2 = 1 + \int_0^x \left[(1 + x + \frac{x^2}{2}) + x \right] dx$$
$$= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6}$$

اسی طرح y_3 کو اس طرح حاصل کیا جاتا ہے

$$y_3 = 1 + \int_0^x \left[(1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6}) + x \right] dx$$
$$= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24}$$

یولر کے طریقہ سے حل(Solution by Euler's Method)

گزشتہ حصہ میں ہم نے دیکھا کہ ٹیلر سلسلہ کا طریقہ اور پکارد کے طریقہ سے کسی تفرقی مساوات کا حل قوتی سلسلہ کی شکل میں حاصل ہوتا ہے۔ اب ہم ان طریقوں کی وضاحت کریں گے جو اقدار کے سٹ کو جدول کی شکل میں حل فراہم کرتے ہیں۔

فرض کریں کہ

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad \cdots(1)$$

$y(x_0) = y_0$ کے ساتھ ایک تفرقی مساوات ہے۔

مان لیجیے کہ مساوات(1) کو y کے لیے نقاط $x_r = x_0 + rh$ ، $r = 1, 2, 3, \cdots$ پر حل کرنا چاہتے ہیں۔

مساوات(1) کو انتہاؤں x_0 اور x_1 کے درمیان تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int_{y_0}^{y_1} dy = \int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dx$$

$$\Rightarrow y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dx \qquad \cdots(2)$$

فرض کریں کہ $x_0 \le x \le x_1$ میں $f(x,y) = f(x_0,y_0)$ ہے۔ اس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y_1 = y_0 + \left(x_1 - x_0\right) f(x_0,y_0) \qquad \cdots(3)$$

اسی طرح اگر $x_1 \le x \le x_2$ ہو تب ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y_2 = y_1 + \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)dx$$

$f(x,y)$ کی جگہ $f(x_1,y_1)$ رکھنے پر ہم حاصل کرتے ہیں

$$y_2 = y_1 + hf(x_1,y_1)$$

اسی طرز پر ہمیں درجہ ذیل عام ضابطہ حاصل ہوتا ہے

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n,y_n),\ n = 0,1,2,\cdots$$

یہ یولر کا ضابطہ کہلاتا ہے۔

مساوات(2) میں $f(x,y)$ کو $f(x_0,y_0)$ کے ذریعے تقریبی قدر حاصل کرنے کی بجائے، اب ہم تکمل کی تقریبی قدر حاصل کرنے کے لیے ٹریپزوڈل کے قاعدے کو استعمال کررتے ہیں، جس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0,y_0) + f(x_1,y_1)\right]$$

اس طرح اب ہم $n = 0,1,2,\cdots$ کے لیے تکراری ضابطہ حاصل کرتے ہیں

$$y_1^{n+1} = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0,y_0) + f(x_1,y_1^{(n)})\right] \qquad \cdots(3)$$

جہاں $y_1^{(n)}$ ، y_1 کے لیے n—ویں تقریبی قدر ہے۔

تکراری ضابطہ(3) کی ابتدا، یولر ضابطہ سے $y_1^{(0)}$ کو منتخب کرکے، کی جاسکتی ہے۔

$$y_1^{(0)} = y_0 + hf(x_0,y_0)$$

اس کو یولر کا ترمیم شدہ طریقہ (Euler's Modified Method) کہا جاتا ہے۔

مثال ۔ یولر کے طریقے سے تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = 1 + xy$ کا $y\left(0\right) = 2$ کے ساتھ حل کیجیے۔ نیز $y\left(0.1\right), y\left(0.2\right), y\left(0.3\right)$ کو حاصل کریں۔ یولر کے ترمیم شدہ طریقہ سے بھی قیمتیں حاصل کریں۔

حل۔ یولر کا تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ کے عددی حل کے لیے ضابطہ نیچے لکھا گیا ہے

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n,y_n),\ n = 0,1,2,\cdots \qquad \cdots(1)$$

دیا ہے $f(x,y) = 1 + xy, x_0 = 0,\ y_0 = 2 \,\&\, h = 0.1$

مساوات(1) میں $n = 0$ درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} y(0.1) = y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) \\ &= 2 + (0.1)f(0,2) \\ &= 2 + (0.1)(1+0) \\ &= 2.1 \end{aligned}$$

اب $x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$

مساوات(1) میں $n = 1$ درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} y(0.2) = y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) \\ &= y_1 + h(1 + x_1 y_1) \\ &= 2.1 + (0.1)\left[1 + (0.1)(2.1)\right] \\ &= 2.221 \end{aligned}$$

دوبارہ $x_2 = x_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2$

مساوات(1) میں $n = 2$ درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} y(0.3) = y_3 &= y_2 + hf(x_2, y_2) \\ &= y_2 + h(1 + x_2 y_2) \\ &= 2.221 + (0.1)\left[1 + (0.2)(2.221)\right] \\ &= 2.3654 \end{aligned}$$

$$\therefore y(0.1) = 2.1, y(0.2) = 2.221, y(0.3) = 2.3654$$

یولر کے ترمیم شدہ طریقہ سے حل:

$y_1 = 2.1$ کے لیے ابتدائی قدر

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} &= y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)\right] \\ &= 2 + \frac{0.1}{2}\left[1 + 1 + (0.1)(2.1)\right] \\ &= 2.2205 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1^{(2)} &= y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f\left(x_1, y_1^{(1)}\right)\right] \\ &= 2 + \frac{0.1}{2}\left[1 + 1 + (0.1)(2.2205)\right] \\ &= 2.1111 \end{aligned}$$

اسی طرز پر عمل کرتے ہوئے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y_1^{(3)} = 2.1105$$
$$y_1^{(4)} = 2.1105$$

اس لیے y_1 کی فائنل قیمت 2.1105 ہے۔

اب ابتدائی قدر

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + hf\left(x_0 + h, y_1\right) \\ &= 2.1105 + 0.1\left[1 + \left(0.1\right)\left(2.1105\right)\right] \\ &= 2.2316 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2^{(1)} &= y_1 + \frac{h}{2}\left[f\left(x_0 + h, y_1\right) + f\left(x_0 + 2h, y_2\right)\right] \\ &= 2.1105 + \frac{0.1}{2}\left[\left\{1 + \left(0.1\right)\left(2.1105\right)\right\} + \left\{1 + \left(0.2\right)\left(2.2316\right)\right\}\right] \\ &= 2.2434 \end{aligned}$$

اسی طرز پر عمل کرتے ہوئے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y_2^{(2)} = 2.2435, \quad y_2^{(3)} = 2.2434$$
$$\therefore y_2 = 2.2434$$

اب ابتدائی قدر

$$\begin{aligned} y_3 &= y_2 + hf\left(x_0 + 2h, y_2\right) \\ &= 2.2434 + \left(0.1\right)\left[1 + \left(0.2\right)\left(2.2434\right)\right] \\ &= 2.2579 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3^{(1)} &= y_2 + \frac{h}{2}\left[f\left(x_0 + 2h, y_2\right) + f\left(x_0 + 3h, y_3\right)\right] \\ &= 2.2434 + \frac{0.1}{2}\left[\left\{1 + \left(0.2\right)\left(2.2434\right)\right\} + \left\{1 + \left(0.3\right)\left(2.2579\right)\right\}\right] \\ &= 2.3997 \end{aligned}$$

اسی طرز پر عمل کرتے ہوئے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y_3^{(2)} = 2.4018, \quad y_3^{(3)} = 2.4019, \quad y_3^{(4)} = 2.4019$$
$$\therefore y_2 = 2.4019$$
$$\Rightarrow y_1 = 2.1105,\ y_2 = 2.2434,\ y_3 = 2.4019$$

پہلے رتبے کا رنگے-کٹّا کا طریقہ (First Order Runge-Kutta Method)

ہم جانتے ہیں کہ یولر کا طریقے

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = y_0 + hy_0^1 \qquad \left[\because y' = f\left(x, y\right)\right]$$

ٹیلر کے سلسلہ کی مدد سے بائیں ہاتھ کی طرف(L.H.S)کی توسیع کرنے پر

$$y_1 = y(x_0 + h) = y_0 + \frac{h}{1!}y_0' + \frac{h^2}{2!}y_0'' + \frac{h^3}{3!}y_0''' + \cdots$$

اس لیے یولر کا طریقہ پہلے رتبے کا رنگے۔کٹّا کا طریقہ ہوتا ہے۔

دوسرے رتبے کا رنگے-کٹّا کا طریقہ(Second Order Runge-Kutta Method)

ترمیم شدہ یولر کے ضابطہ ہمیں دیتا ہے

$$\begin{aligned} y_1^{(0)} &= y_0 + hf(x_0, y_0) \\ y_1^{(2)} &= y_0 + \frac{h}{2}\left[f\left(x_0, y_0\right) + f\left(x_1, y_1^{(1)}\right)\right] \\ &= y_0 + \frac{h}{2}\left[f_0 + f\left(x_0 + h, y_0 + hf_0\right)\right] \qquad \cdots(1) \end{aligned}$$

جہاں $f_0 = f\left(x_0, y_0\right)$ ہے۔

اب اگر ہم $k_1 = hf_0$ اور $k_2 = hf\left(x_0 + h, y_0 + k_1\right)$ درج کریں تو مساوات(1) تبدیل ہو جائے گی

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}\left[k_1 + k_2\right]$$

جو دوسرے رتبے کا رنگے-کٹّا کا ضابطہ ہے۔

تیسرے رتبے کا رنگے-کٹّا کا طریقہ(Third Order Runge-Kutta Method)

تیسرے رتبے کا رنگے-کٹّا کا طریقہ درجہ ذیل مساوات سے ظاہر کیا جاتا ہے

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}\left[k_1 + 4k_2 + k_3\right]$$

جہاں

$$\begin{aligned} k_1 &= hf\left(x_0, y_0\right) \\ k_2 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= hf\left(x_0 + h, y_0 + 2k_2 - k_1\right) \end{aligned}$$

چوتھے رتبے کا رنگے-کٹّا کا طریقہ(Fourth Order Runge-Kutta Method)

عام طور پر اس طریقہ کا استعمال تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = f\left(x, y\right), y\left(x_0\right) = y_0$ کو حل کرنے کے لیے کیا جاتا ہے۔

یہاں ہم

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf\left(x_0, y_0\right) \\
k_2 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) \\
k_3 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) \\
k_4 &= hf\left(x_0 + h, y_0 + k_3\right)
\end{aligned}
$$

کو محسوب کرتے ہیں۔تب

$$y_1 = y\left(x_0 + h\right) = y_0 + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]$$

$\left(x_1, y_1\right)$ سے ابتدہ کرتے ہوئے اور اس عمل کو بار بار دوہرانے پر ہمیں $\left(x_2, y_2\right)$ وغیرہ حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۔ تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = xy + y^2, y(1) = 2, h = 0.1$ کے لیے دوسرے رتبے کے رنگے-کٹّا کے طریقے کے دو مرحلوں کو لکھو۔

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$\frac{dy}{dx} = xy + y^2, x_0 = 1, y_0 = 2, h = 0.1$$

پہلا مرحلہ: $i = 0$

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf\left(x_0, y_0\right) \\
&= h\left(x_0 y_0 + y_0^2\right) \\
&= \left(0.1\right)\left[\left(1 \times 2\right) + \left(2\right)^2\right] \\
&= 0.6 \\
k_2 &= hf\left(x_0 + h, y_0 + k_1\right) \\
&= \left(0.1\right)\left[\left(1.1\right)\left(2.6\right) + \left(2.6\right)^2\right] \\
&= \left(0.1\right)\left[2.86 + 6.76\right] \\
&= 0.962 \\
y_1 &= y_0 + \frac{1}{2}\left[k_1 + k_2\right] \\
&= 2 + \frac{1}{2}\left[0.6 + 0.962\right] \\
&= 2.781
\end{aligned}
$$

دوسرا مرحلہ: $i = 1$

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf\left(x_1, y_1\right) \\
&= h\left(x_1 y_1 + y_1^2\right) \\
&= \left(0.1\right)\left[\left(1.1 \times 2.781\right) + \left(2.781\right)^2\right] \\
&= 1.079 \\
k_2 &= hf\left(x_1 + h, y_1 + k_1\right) \\
&= \left(0.1\right)\left[\left(1.2\right)\left(3.86\right) + \left(3.86\right)^2\right] \\
&= 1.953 \\
y_2 &= y_1 + \frac{1}{2}\left[k_1 + k_2\right] \\
&= 2.781 + \frac{1}{2}\left[1.079 + 1.953\right] \\
&= 4.297
\end{aligned}
$$

8.2 عملی مثائل

8.2.1 ٹیلر کے سلسلے کے طریقے سے مساوات $y' = x - y^2, y(0) = 1$ کو حل کرو نیز $y(0.1), y(0.2)$ کے قدریں معلوم کرو۔

8.2.2 أئیلر کے طریقے سے جب $h = 0.1$ ہو مساوات کا $y' = x + y, y(0) = 1$ کا حل معلوم کرو نیز $y(0.3)$ کی قدر اخز کرو۔

8.2.3 رنگے کٹہ دور تبی طریقے سے جب $h = 0.25$ مساوات $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}, y(2) = 2$ کا حل دریافت کرو نیز $y(2.5)$ کی قدر معلوم کرو۔

8.2.4 رنگے کٹہ چار رتبی طریقے سے مساوات $\frac{dy}{dx} = x^2 - y, y(0) = 1$ سے $y(0.1), y(0.2)$ معلوم کرو۔

8.2.5 **مساوات** $y' = \frac{y-x}{y+x}, y(0) = 1$ سے جب $h = 0.2$ ہو $y(0.2)$ کی **قدر** معلوم کرو۔

نمونہ امتحانی پرچہ

ریاضیات (لیب مینول)

BSMM651DSP

بی۔ایسسی- (چھٹا سمسٹر)

وقت: 3 Hrs　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　کل نمبر: 35

نوٹ: درج ذیل میں سے کوئی پانچ سوالات کے جواب دیجیے　　　　$5\times 7=35$

1. ریگولا—فالسی طریقے سے مساوات $e^x \sin x = 1$ کا ایک حقیقی ریشہ معلوم کرو۔

2. نیوٹن—رافسن کے طریقہ سے مساوات $x^5 - 5x + 2 = 0$ کا ایک حقیقی ریشہ معلوم کرو۔

3. گاس اسقاط کے طریقہ سے حل معلوم کرو $3x + y + 2z = 3, 2x - 3y - z = 3, x + 2y + z = 4$ ۔

4. خطی مساواتوں کے نظام
$$\begin{aligned} 8x + y + z &= 8 \\ 2x + 4y + z &= 4 \\ x + 3y + 3z &= 5 \end{aligned}$$
کو گاس جیکوبی کے طریقہ سے حل کرو۔

5. دیے گئے جدول کے لیے منقسم فرقوں کا جدول بنائیے۔

x	4	5	7	10	11	13
$f(x)$	48	100	294	900	1210	2028

6. لیگرانج کا تحریفی ضابطہ استعمال کرتے ہوئے ذیل کے ڈاٹا سے $f(x)$ معلوم کرو

x	0	2	3	6
$f(x)$	648	704	729	792

7. سمپسن کے $\frac{3}{8}$ قاعدہ کی مدد سے $\int_0^6 \frac{dx}{1+x}$ اخذ کرو۔

8. رنگےکٹہ دورتبی طریقے سے جب $h = 0.25$ مساوات $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}, y(2) = 2$ کا حل دریافت کرو نیز $y(2.5)$ کی قدر معلوم کرو۔