BNMM201DCT

تفرقی مساوات

(Differential Equations)

بی۔ایس سی۔(آنرس)

چار سالہ پروگرام

دوسرا سمسٹر (ریاضی)

مرکز برائے فاصلاتی و آن لائن تعلیم

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

حیدرآباد۔32، تلنگانہ، بھارت

Copyright © 2025, Maulana Azad National Urdu University, Hyderabad
All right reserved. No part of this publication may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronically or mechanically, including photocopying, recording or any information storage or retrieval system, without prior permission in writing form the publisher (registrar@manuu.edu.in)

ISBN : 978-81-994264-2-9
Course : Differential Equations
First Edition : October 2025
Copies : 600
Price : 230/-(The price of the book is included in admission fee of distance mode students)

Course Coordinator

Dr. Khaja Moinuddin, Professor, (Mathematics), School of Sciences, MANUU

Editorial Board/Editors

Dr. Khaja Moinuddin, Prof. (Mathematics), School of Sciences, MANUU

Dr. Kashif Khan, (Mathematics), Centre for Distance and Online Education, MANUU

Dr. Syed Syed Abdul Hai, Head, Dept of Mathematics, MAM Govt. Junior College, Nampally, Hyderabad

Production

Prof. Nikhath Jahan, Professor (Urdu), CDOE MANUU	Mr. P Habibulla, Assistant Registrar, Purchase & Stores Section, MANUU	Dr. Mohd Akmal Khan, Assistant Professor (C), CDOE MANUU
Mohd Abdul Naseer, Section Officer, CDOE MANUU	Shaik Ismail, UDC, CDOE, MANUU	Syed Faheemuddin, LDC,Purchase & Stores Section, MANUU

On behalf of the Registrar, Published by:
Centre for Distance and Online Education
Maulana Azad National Urdu University
Gachibowli, Hyderabad-500032 (TG), India
*Director:*dir.dde@manuu.edu.in*Publication:*ddepublication@manuu.edu.in
Phone number: 040-23008314 Website: manuu.edu.in
CRC Prepared by Dr. Kashif Khan, Faculty of Mathematics, CDOE, MANUU
Printed at: Print Time & Business Enterprises, Gachibowli, Hyderabad

فہرست

پیغام	وائس چانسلر، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی	6
پیغام	ڈائرکٹر، مرکز برائے فاصلاتی و آن لائن تعلیم	7
کورس کا تعارف	کورس کوآرڈی نیٹر (ریاضی)	8

اکائی نمبر	اکائی کا نام	مصنف	صفحہ نمبر
1۔	تفرقی مساوات کی تشکیل	ڈاکٹر خواجہ معین الدین	9
2۔	پہلے رتبے اور پہلے درجے کی تفرقی مساواتیں	ڈاکٹر خواجہ معین الدین	21
3۔	ٹھیک مساوات	ڈاکٹر خواجہ معین الدین	37
4۔	پہلے رتبے اور پہلے درجے کی خطی تفرقی مساواتیں	ڈاکٹر خواجہ معین الدین	57
5۔	پہلے رتبے اور اعلی درجے کی تفرقی مساواتیں-I	ڈاکٹر کاشف خان	73
6۔	پہلے رتبے اور اعلی درجے کی تفرقی مساواتیں-II	ڈاکٹر کاشف خان	88
7۔	پہلے رتبے اور اعلی درجے کی تفرقی مساواتیں-III	ڈاکٹر کاشف خان	102
8۔	پہلے رتبے کی تفرقی مساواتوں کے اطلاقات: عمودی ٹراجکٹری	ڈاکٹر کاشف خان	120
9۔	مستقل ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساوات	ڈاکٹر کاشف خان	139
10۔	مستقل ضریب کی غیر متجانس خطی تفرقی مساواتوں کے خاص تکملے	ڈاکٹر کاشف خان	154

11۔	متغیر ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساوات	ڈاکٹر کاشف خان	182
12۔	متغیر ضریب کی اعلیٰ رتبے کی خطی تفرقی مساواتیں (پیرامیٹرس کے تغیر کا طریق)	ڈاکٹر کاشف خان	198
	نمونہ امتحانی پرچہ		212
	لیب مینول		214
1۔	تفرقی مساواتوں کی تشکیل، پہلے رتبے اور پہلے درجے کے تفرقی مساواتوں کے مسائل	ڈاکٹر خواجہ معین الدین	215
2۔	ٹھیک مساواتیں، خطی تفرقی مساوات اور ان کے مسائل	ڈاکٹر خواجہ معین الدین	225
3۔	پہلے رتبے اور اعلیٰ درجے کی تفرقی مساواتوں کے مسائل	ڈاکٹر کاشف خان	236
4۔	کلیرو کی مساوات، تفرقی مساوات کے اطلاقات اور عمودی ٹراجکٹری کے مسائل	ڈاکٹر کاشف خان	243
5۔	مستقل ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساواتوں کے مسائل	ڈاکٹر کاشف خان	253
6۔	متغیر ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساوات اور پیرامیٹرس کے تغیر کے مسائل	ڈاکٹر کاشف خان	261
	نمونہ امتحانی پرچہ		271
	تصدیق نامہ		272

مصنفین کی تفصیلات

Writer's Details

Dr. Kashif Khan, (Mathematics), Centre for Distance and Online Education, MANUU	ڈاکٹر کاشف خان، ریاضی، مرکز برائے فاصلاتی وآن لائن تعلیم، مانو، حیدرآباد
Dr. Khaja Moinuddin, Professor, Department of Mathematics, School of Sciences, MANUU	ڈاکٹر خواجہ معین الدین، پروفیسر، شعبہ ریاضی، مانو، حیدرآباد

پروف ریڈرس: 1. ڈاکٹر کاشف خان 2. ڈاکٹر خواجہ معین الدین

ٹائٹل پیج: ابراہیم اکرم صدیقی

پیغام

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی (MANUU) 1998 میں پارلیمنٹ کے ایک ایکٹ کے ذریعے قائم کی گئی۔ یہ ایک مرکزی جامعہ ہے جس نے این اے اے سی کی جانب سے گریڈ +A حاصل کیا ہے۔ اس جامعہ کے قیام کے مقاصد ہیں: (1) اردو زبان کا فروغ، (2) پیشہ ورانہ اور تکنیکی تعلیم کو اردو میڈیم میں قابل رسائی اور دستیاب بنانا، (3) روایتی اور فاصلاتی طریقۂ تعلیم کے ذریعے تعلیم فراہم کرنا، اور (4) خواتین کی تعلیم پر خصوصی توجہ دینا۔ یہ وہ نکات ہیں جو اس مرکزی جامعہ کو دیگر تمام مرکزی جامعات سے ممتاز کرتے ہیں اور اسے ایک انفرادیت بخشتے ہیں۔ قومی تعلیمی پالیسی 2020 میں بھی مادری زبانوں اور علاقائی زبانوں میں تعلیم حاصل کرنے پر زور دیا گیا ہے۔

اردو کے ذریعے علم کے فروغ کا مقصد یہی ہے کہ اردو جاننے والے طبقے کے لیے عصری علوم اور مضامین تک رسائی آسان بنائی جائے۔ ایک طویل عرصے تک اردو میں درسی مواد کی کمی رہی ہے۔ اردو یونیورسٹی کے پاس اب اردو میں 350 سے زیادہ کتابوں کا ذخیرہ موجود ہے اور ہر سمسٹر کے ساتھ اس تعداد میں اضافہ ہو رہا ہے۔ اردو یونیورسٹی این ای پی 2020 کے وژن کے مطابق مادری/گھریلو زبان میں تعلیمی مواد فراہم کرنے کے قومی مشن کا حصہ بننے کو اپنے لیے ایک اعزاز سمجھتی ہے۔ مزید یہ کہ اردو بولنے والا طبقہ اردو میں مطالعہ کے مواد کی عدم دستیابی کے سبب نئے اُبھرتے شعبوں اور جدید تر معلومات کے موجودہ میدانوں میں تازہ ترین معلومات واطلاعات کے حصول سے محروم نہیں رہے گا۔ مذکورہ بالا میدانوں میں مواد کی دستیابی کی بدولت حصولِ معلومات کا نیا شعور بیدار ہوا ہے جو یقیناً اردو داں طبقے کی دانشورانہ ترقی پر اثر انداز ہوگا۔

فاصلاتی اور آن لائن طلبہ کے لیے تعلیم وتدریس کے عمل کو سہل بنانے کے لیے یونیورسٹی کا سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن (CDOE) اردو اور متعلقہ مضامین میں خود اکتسابی مواد (SLM) کی تیاری کو یقینی بناتا ہے۔

MANUU فاصلاتی اور آن لائن لرننگ کے طلبہ کے لیے SLM بلا معاوضہ فراہم کرتا ہے۔ یہ مواد اُردو کے ذریعے علم حاصل کرنے میں دلچسپی رکھنے والے ہر شخص کے لیے برائے نام قیمت پر دستیاب ہے۔ تعلیم تک رسائی کے دائرے کو مزید پھیلانے کے مقصد سے، اردو/ہندی/انگریزی/عربی میں eSLM یونیورسٹی کی ویب سائٹ پر مفت ڈاؤن لوڈ کے لیے دستیاب رکھا گیا ہے۔

مجھے بے حد خوشی ہے کہ متعلقہ فیکلٹی کی محنت اور مصنفین کے مکمل تعاون کی بدولت FYUG بی۔اے، بی۔ایس سی اور بی۔کام کی کتابوں کی اشاعت کا عمل بڑے پیمانے پر شروع ہو گیا ہے۔ فاصلاتی اور آن لائن لرننگ کے طلبہ کی سہولت کے لیے خود اکتسابی مواد (SLM) کی تیاری اور اشاعت کا عمل یونیورسٹی کے لیے اہمیت رکھتا ہے۔ مجھے یقین ہے کہ ہم اپنے خود تعلیمی مواد کے ذریعے اردو جاننے والے ایک بڑے طبقے کی ضروریات کو پورا کرنے کے قابل ہوں گے اور اس یونیورسٹی کے مقصدِ قیام کو پورا کریں گے اور اپنے ملک میں اپنی موجودگی کو جائز ٹھہرا سکیں گے۔

نیک تمناؤں کے ساتھ!

پروفیسر سید عین الحسن
شیخ الجامعہ، مانو

پیغام

موجودہ دور میں فاصلاتی تعلیم کو دنیا بھر میں ایک نہایت مؤثر اور مفید طریقۂ تعلیم کے طور پر تسلیم کیا جاتا ہے اور بڑی تعداد میں لوگ اس طریقۂ تعلیم سے فائدہ اٹھا رہے ہیں۔ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی نے بھی اردو زبان بولنے والے عوام کی تعلیمی ضروریات کو مد نظر رکھتے ہوئے اپنے قیام کے وقت سے ہی فاصلاتی تعلیم کا طریقہ متعارف کرایا۔ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی نے 1998 میں ڈائریکٹوریٹ آف ڈسٹنس ایجوکیشن (نظامتِ فاصلاتی تعلیم) کے ساتھ کام کا آغاز کیا اور 2004 سے باقاعدہ پروگرام شروع ہوئے، اس کے بعد مختلف شعبہ جات قائم کیے گئے۔

یو جی سی نے ملک میں نظام تعلیم کو مؤثر طور پر منظم کرنے میں ایک اہم کردار ادا کیا ہے۔ اوپن اینڈ ڈسٹنس لرننگ (ODL) موڈ کے تحت چلنے والے مختلف پروگرام، جو سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن (CDOE) میں چل رہے ہیں، یو جی سی-ڈی ای بی کے منظور شدہ ہیں۔ یو جی سی-ڈی ای بی نے فاصلاتی اور باقاعدہ تعلیم کے نصاب کو ہم آہنگ کرنے پر زور دیا ہے تاکہ فاصلاتی تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ کے معیار کو بہتر بنایا جاسکے۔ چونکہ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی ایک دُہرے طرز (ڈوئل موڈ) کی یونیورسٹی ہے جو فاصلاتی اور روایتی دونوں طریقۂ تعلیم کی خدمات فراہم کرتی ہے، اس لیے اپنے مقاصد کو یو جی سی-ڈی ای بی کے رہنما خطوط کے مطابق حاصل کرنے کے لیے اس نے چوائس بیسڈ کریڈٹ سسٹم (CBCS) متعارف کرایا گیا جس کا خود اکتسابی مواد (Self Learning Materials) یو جی سی کے قوانین اور کریڈٹ فریم کے مطابق نئے سرے سے تیار کیے جاچکا ہے۔

سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن (CDOE) کل انیس (19) پروگرام پیش کرتا ہے جن میں یو جی، پی جی، بی ایڈ، ڈپلومہ اور سرٹیفکیٹ پروگرام شامل ہیں۔ اس کے ساتھ ساتھ تکنیکی مہارتوں پر مبنی پروگرام بھی شروع کیے جارہے ہیں۔ سی ڈی اوای نے جولائی 2025 سے این ای پی-2020 کے مطابق چار سالہ یو جی پروگرام کا آغاز کیا ہے۔ بی اے، بی ایس سی اور بی کام کے آنرز پروگراموں کو این سی ایف کے مطابق ڈیزائن کیا گیا ہے جس سے طلبہ کو آنرز ڈگری حاصل کرنے میں مدد ملے گی۔ سال 2025-2026 سے ایم بی اے پروگرام او ڈی ایل موڈ میں متعارف کرایا گیا ہے۔

مانو نے طلبہ کی سہولت کے لیے نو ریجنل سنٹرز (بنگلورو، بھوپال، دربھنگہ، دہلی، کولکاتا، ممبئی، پٹنہ، رانچی اور سری نگر) اور چھ سب ریجنل سنٹرز (حیدر آباد، لکھنؤ، جموں، نوح، وارانسی اور امراوتی) کا ایک وسیع نیٹ ورک قائم کیا ہے۔ اس کے علاوہ وجے واڑا میں ایک ایکسٹینشن سنٹر بھی قائم کیا گیا ہے۔ ان ریجنل اور سب ریجنل سنٹروں کے تحت ایک سو پچاس سے زیادہ لرنر سپورٹ سنٹر (LSCs) اور بیس پروگرام سنٹر بیک وقت چلائے جارہے ہیں تاکہ طلبہ کو تعلیمی اور انتظامی سہولیات فراہم کی جاسکیں۔ سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن اپنی تعلیمی اور انتظامی سرگرمیوں میں آئی سی ٹی کا بھرپور استعمال کرتا ہے اور اپنے تمام پروگراموں میں صرف آن لائن موڈ کے ذریعے ہی داخلے فراہم کرتا ہے۔

طلبہ کے لیے سیلف لرننگ میٹیریل (SLM) کی سوفٹ کاپی سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن کی ویب سائٹ پر دستیاب کرائی جاتی ہیں اور آڈیو و ویڈیو ریکارڈنگ کے لنک بھی ویب سائٹ پر فراہم کیے جاتے ہیں۔ اس کے علاوہ طلبہ کو ای۔ میل اور واٹس ایپ گروپ کی سہولت بھی فراہم کی جارہی ہے جن کے ذریعے انہیں پروگرام کے مختلف پہلوؤں جیسے کورس رجسٹریشن، اسائنمنٹ، کاؤنسلنگ، امتحانات وغیرہ کے بارے میں مطلع کیا جاتا ہے۔ باقاعدہ کاؤنسلنگ کے علاوہ گزشتہ دو برسوں سے طلبہ کے تعلیمی معیار کو بہتر بنانے کے لیے زائد تدارکی (Remedial) آن لائن کاؤنسلنگ بھی فراہم کی جارہی ہے۔

امید کی جاتی ہے کہ سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن تعلیمی اور معاشی طور پر پسماندہ آبادی کو عصری تعلیم کے دھارے میں شامل کرنے میں ایک اہم کردار ادا کرے گا۔ تعلیمی ضروریات کو مد نظر رکھتے ہوئے نئی تعلیمی پالیسی (NEP-2020) کے مطابق مختلف پروگرامز میں تبدیلیاں کی گئی ہیں اور توقع ہے کہ اس سے اوپن اینڈ ڈسٹنس لرننگ کے نظام کو مزید مؤثر اور کارآمد بنانے میں مدد ملے گی۔

پروفیسر محمد رضا اللہ خان

ڈائرکٹر، سی ڈی اوای، مانو

کورس کا تعارف

زیر نظر کتاب تفرقی مساوات کے موضوعات سے متعلق ہے اور یہ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کے بی۔ایس سی۔(آنرس) کورس کے سال اول کے دوسرے سمسٹر کے نصاب پر مشتمل ہے۔ تفرقی مساوات، ریاضی، سائنس یا انجینئرنگ میں بنیادی حیثیت رکھتا ہے۔ یہ کتاب طلبا کو تفرقی مساوات کے بنیادی تصورات کو سمجھنے اور اپنی زندگی اور اطراف میں اس کا استعمال کرنے کا ایک بہترین موقع فراہم کرتی ہے۔ اس کتاب کی نمایاں خصوصیت یہ ہے کہ اس میں مواد کو سہل طریقہ سے آسان زبان میں مثالوں کے ساتھ سمجھایا گیا ہے تاکہ طلبا اپنے مضمون کو از خود سمجھ سکیں۔ کتاب کو دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ جس میں پہلا حصہ نظریات (تھیوری) پر مبنی ہے اور دوسرا حصہ پریکٹکل (تجربوں) پر منحصر ہے۔

پہلا حصہ بارہ (12) اکائیوں پر مشتمل ہے۔ اکائی 1 تا 3 میں تفرقی مساوات کی تشکیل اور ان کے حل حاصل کرنے کے مختلف طریقوں کو شامل کیا گیا ہے۔ اکائی 4 تا 6 میں پہلے رتبے اور پہلے درجے کی خطی تفرقی مساوات کے بارے میں بنیادی معلومات اور ساتھ ہی اعلی درجہ کی تفرقی مساوات کے حل کو آسان انداز میں سمجھایا گیا ہے۔ اکائی 7 اور 8 میں کلیرو کی مساوات اور اس کے حل حاصل کرنے کا طریقہ اور تفرقی مساوات کے اطلاقات درج ہیں۔

اکائی 9 اور 10 میں مستقل ضریب کی متجانس اور غیر متجانس خطی تفرقی مساواتا ور ان کے عام اور خاص حل معلوم کرنے کے طریقوں پر روشنی ڈالی گئی ہے۔ اکائی 11 اور 12 میں متغیر ضریب کے متجانس خطی تفرقی مساوات کی بنیادی معلومات درج کی گئی ہیں اور پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے سے متغیر ضریب کی خطی تفرقی مساوات کے حل کو کرنے کے طریقہ کو تفصیل کے ساتھ درج کیا گیا ہے۔

طلبا کی مسئلہ حل صلاحیت کو بہتر بنانے کے لیے اکائی 1 سے اکائی 6 تک تجرباتی حصے (Practical Manual) کو شامل کیا گیا ہے جس میں تفرقی مساوات کے مسائل اور ان کے حل کو تلاش کرنے کے طریقے پیش کیے گئے ہیں۔

اس کتاب کی تدوین میں مصنفین، مترجمین، تدریسی و غیر تدریسی و انتظامی عملے کے تعاون کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ کتاب کو معیاری اور قابل عمل و فہم بنانے کی ہر ممکن کوشش کی گئی ہے، تاہم کوئی بھی کوشش اپنے آپ میں مکمل نہیں ہوتی۔ اس ضمن میں اساتذہ کرام، ماہرین، طلبا کی آرا و مشوروں کا خیر مقدم کیا جائے گا۔

ڈاکٹر خواجہ معین الدین
کورس کوآرڈی نیٹر

اکائی 1۔ تفرقی مساوات کی تشکیل

(Formation of Differential Equations)

اکائی کے اجزا

1.0 تمہید

1.1 مقاصد

1.2 تفرقی مساوات اس کا رتبہ اور درجہ

1.3 تفرقی مساواتوں کی تشکیل

1.4 اکتسابی نتائج

1.5 کلیدی الفاظ

1.6 نمونہ امتحانی سوالات

1.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

1.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

1.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

1.0 تمہید(Introduction)

اگر $y = f(x)$ کوئی دیا گیا تفاعل ہے تب اس کا مشتق $\frac{dy}{dx}$(Derivative) تبدیلی کی شرح کو ظاہر کرتا ہے(متغیر y کی تابع x) تفرقی مساوات کا نام خود اس بات کا غماز ہے کہ یہ وہ مساوات ہے جس میں نامعلوم مقدار y اور x کے مشتقات متغیر کے ذریعے جوڑے گئے ہیں۔

تفرقی مساوات دو قسم کے ہیں:

(i) معمولی تفرقی مساوات(Ordinary Differential Equations) یا (ODE)

(ii) جزوی تفرقی مساوات(Partial Differential Equations) یا(PDE)

وہ مساوات جس میں نامعلوم تفاعل(Unknown Function) اور اس کے معمولی مشتقات(Ordinary Derivatives) شامل ہوں، معمولی تفرقی مساوات کہلاتی ہے۔ وہ مساوات جس میں نامعلوم تفاعل اور اس کے جزوی مشتقات(Partial Derivatives) شامل ہوں، جزوی تفرقی مساوات کہلاتی ہے۔

1.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کو مکمل کرنے پر آپ اس قابل ہو جایں گے کہ

- تفرقی مساوات کے رتبے(Order) اور درجے(Degree) سے واقف ہو سکیں۔
- خطی اور غیر خطی تفرقی مساواتوں میں فرق کر سکیں۔
- دیے گیے تفاعل سے اختیاری مستقلات(Arbitrary Constants) کو ساقط کر کے اس کی تفرقی مساوات حاصل کر سکیں۔

1.2 تفرقی مساوات اس کا رتبہ اور درجہ(Differential Equation , its Order and Degree)

تفرقی مساوات(Differential Equation): تفرقی مساوات وہ مساوات ہے جس میں کسی تابع متغیر کے مشتقات موجود ہوں۔ جیسے کہ :

$$\frac{dy}{dx} + 2x = 0 \qquad \text{.....(1)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 7\frac{dy}{dx} + 9y = 0 \qquad \text{.....(2)}$$

$$\sqrt{\frac{dy}{dx}} = 2x - \frac{dy}{dx} \qquad \text{.....(3)}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4\left(\frac{dy}{dx}\right) + 4x \qquad \text{.....(4)}$$

$$3y = 2x\frac{dy}{dx} + \frac{1}{dy/dx} \qquad \text{.....(5)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2z \qquad \text{.....(6)}$$

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6z \qquad \text{.....(7)}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^7 + 2y = e^x \qquad \text{.....(8)}$$

مندرجہ بالا مساوات میں (1)تا(5)اور(8)معمولی تفرقی مساوات(ODE) کہلاتی ہیں۔چوں کہ ان میں ایک تابع متغیر "y "اور ایک غیر تابع متغیر "x "موجود ہیں۔جب کہ (6)اور(7) جزوی تفرقی مساوات(PDE) کہلاتی ہیں،چوں کہ اس میں ایک تابع متغیر اور دو غیر تابع متغیرات موجود ہیں۔

نوٹ: مساوات $F\left(x, y, y', y'', \ldots\ldots\ldots y^{(n)}\right) = 0$ ایک n رتبے والی معمولی تفرقی مساوات کو ظاہر کرتا ہے۔ تفرقی مساوات کے درجے اور رتبے کے بارے میں آگے بحث کی جائے گی۔اس طرح کی تفرقی مساوات بہت زیادہ استعمال میں آتی ہیں اور بہت سے شعبے ہیں جن میں ان مساوات کا استعمال کیا جاتا ہے۔ خصوصاً وہ تمام مسائل جن میں کوئی چیز وقت کے مطابق گھٹتی یا بڑھتی ہے اسے ہم تفرق کے ذریعے ظاہر کرتے ہیں۔ مثلاً $\frac{ds}{dt}$ جہاں S فاصلہ اور t وقت ہے تب $\frac{ds}{dt}$ رفتار(Velocity) کو اور $\frac{d^2s}{dt^2}$ اسراع(Acceleration) کو ظاہر کرتا ہے۔ چنانچہ مختلف طبقات کے مسائل تفرقی مساوات میں ظاہر کر کے اور ان کے حل سے بہت سی نامعلوم چیزوں کو معلوم کیا جا سکتا ہے۔ ریاضیاتی نمونہ سازی(Mathematical Modeling) ریاضی کی وہ شاخ ہے جو آج بہت سے طبعی نظاموں کو ریاضی کے مسائل میں تبدیل کر کے انہیں پھر حل کر کے مطلوبہ خصوصیات کا مطالعہ کیا جاتا ہے۔ان ماڈلس میں تفرقی مساوات کا بہت بڑا کردار استعمال میں آتا ہے۔

تفرقی مساوات کا رتبہ(Order of Differential Equation):

تفرقی مساوات کا رتبہ اس کے اعظم ترین مشتق(Highest Derivative) کا رتبہ ہوتا ہے جو اس میں شامل ہو۔

مثلاً: $\frac{dy}{dx} + 5y = 0$ کا رتبہ(Order) ایک ہے

$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{5dy}{dx} + 6y = e^{2x}$ کا رتبہ 2 ہے اور

$\frac{d^3y}{dx^3} - 2x\frac{d^2y}{dx^2} + 7y = 0$ کا رتبہ 3 ہے۔

تفرقی مساوات کا درجہ(Degree of Differential Equation):

تفرقی مساوات کے اعظم ترین مشتق کی قوت اس مساوات کا درجہ کہلاتی ہے۔ مثلاً $\frac{dy}{dx} + 2x = 0$ کا درجہ 1 ہے اور

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 7y = 0$ کا درجہ 3 ہے چوں کہ اعظم ترین مشتق $\frac{d^2y}{dx^2}$ کی قوت 3 ہے۔

مثال 1۔ $\left[4 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right]^{3/2} = \frac{d^2y}{dx^2}$ کا رتبہ اور درجہ معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات $\left[4 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right]^{3/2} = \frac{d^2y}{dx^2}$ ہے۔ $\frac{3}{2}$ قوت کو صحیح بنانے پر حاصل ہوگا۔یعنی دونوں جانب مربع لینے پر حاصل ہے

$$\left[4+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right]^3=\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^9+48\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+12\left(\frac{dy}{dx}\right)^6+64=\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

اوراس مساوات میں اعظم ترین مشتق $\frac{d^2y}{dx^2}$ ہے جس کی قوت 2 ہے اس لیے تفرقی مساوات کا درجہ 2 اور رتبہ بھی 2 ہے۔

خطی اور غیر خطی تفرقی مساواتیں(Linear and Non-Linear Differential Equations)

تفرقی مساوات خطی کہلاتی ہے، اگر تابع متغیر (Dependent Variable) اور ہر ایک شامل مشتق صرف پہلے درجے کا ہو اور تابع متغیر اور مشتقات کے حاصل ضرب شامل نہ ہوں۔ وہ مساوات جو خطی نہ ہو غیر خطی تفرقی مساوات کہلاتی ہے۔ مثلاً مساوات $\frac{dy}{dx}+y=x^2$ اور $\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+y=e^x$ خطی تفرقی مساواتیں ہیں اور $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+5y=cos\ x$ غیر خطی ہے۔

1.3 تفرقی مساواتوں کی تشکیل(Formation of Differential Equations)

ہم جانتے ہیں کہ کس طرح ایک طبعی صورت حال کو متناظر ایک تفرقی مساوات میں ظاہر کیا جاتا ہے۔ چند مثالیں:

1۔ آبادی کا مسئلہ وقت کے اعتبار سے بڑھتا ہے یا نمو کا مسئلہ (Growth Problem) جیسے جراثیم کی پیداوار تابکار عنصر کا انحطاط وغیرہ کو ہم مندرجہ ذیل تفرقی مساواتوں میں ظاہر کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ $x(t)$ افزائیش ہے، وقت t پر اور یہ شرح افزائیش $\frac{d}{dt}(x(t))$ کے متناسب ہوتی ہے یعنی:

$$\frac{d(x(t))}{dt}\propto x(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d(x(t))}{dt}=kx(t)$$

جہاں k تناسب کا مستقل (Constant) ہے جو اضافہ (Growth) کی صورت میں مثبت اور انحطاط کی صورت (Decay) میں منفی ہوگا۔ چنانچہ $\frac{dx}{dt}=kx$ ایک پہلے درجے اور پہلے رتبے کی تفرقی مساوات ہے۔ جہاں x ایک t کے تابع متغیر ہے۔

منحنیوں کے خاندان(Family of Curves):

$y=mx+c$ خطوط مستقیم کا نظام ہے جہاں m ڈھال (Slope) ہے اور c مقطوعہ (Intercept) ہے۔

$$y=mx+c \qquad \text{.....(1)}$$

مساوات (1) کو اگر بہ لحاظ x تفرق کریں تو ہمیں $\frac{dy}{dx}=m$ حاصل ہوگا۔

$$\Rightarrow \quad y=\frac{dy}{dx}x+c$$

$$\Rightarrow x\frac{dy}{dx} - y + c = 0$$

دیے ہوئے نظام کے خاندان کی تفرقی مساوات ہے۔

ذیل میں ہم کسی دی ہوئی منحنی کے خاندان کے لیے تفرقی مساوات تشکیل دینے کا قاعدہ درج کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ $F(x, y, c_1, c_2, \dots\dots\dots, c_n) = 0$ ایک منحنی کے خاندان کو ظاہر کرتا ہے جہاں $c_1, c_2, \dots\dots, c_n$، n اختیاری مستقلات ہیں۔

$$F(x, y, c_1, c_2, \dots\dots\dots, c_n) = 0 \qquad \dots\dots(1)$$

مساوات(1) کو n مرتبہ تفرق کرنے پر حاصل ہے

$$F'(x, y, y', c_1, c_2, \dots\dots\dots, c_n) = 0 \qquad \dots\dots(2)$$

$$F''(x, y, y', y'', c_1, c_2, \dots\dots\dots, c_n) = 0 \qquad \dots\dots(3)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$F^{(n)}(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}, c_1, c_2, \dots\dots\dots, c_n) = 0 \qquad \dots\dots(n+1)$$

مندرجہ بالا حاصل $n + 1$ مساوات میں سے n اختیاری مستقلات کو ساقط کرنے سے n رتبے والا تفرقی مساوات حاصل ہوگا۔اس طرح ہم ایک تفرقی مساوات کی تشکیل کر سکتے ہیں۔

مثال 1۔ منحنی $y^2 = 4ax$ سے تفرقی مساوات تشکیل کرو۔

حل: دی گئی مساوات ہے

$$y^2 = 4ax \qquad \dots\dots(1)$$

جہاں a اختیاری مستقل(Arbitrary Constant) ہے۔

دونوں جانب بہ لحاظ x تفرق کرنے پر حاصل ہے

$$2y\,\frac{dy}{dx} = 4a$$

$$\Rightarrow \quad y\,\frac{dy}{dx} = 2a$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{y}{2}\frac{dy}{dx} \qquad \dots\dots(2)$$

(1)اور(2) سے 'a' کو ساقط کرنے سے یعنی 'a' کی قدر مساوات(1) میں درج کرنے سے x $y^2 = 4\left(\frac{y}{2}\frac{dy}{dx}\right)$ حاصل ہوگا۔

$$y = 2x\frac{dy}{dx}$$

یا $2x\frac{dy}{dx} - y = 0$ دی گئی منحنیوں کے خاندان کی تفرقی مساوات کو تعبیر کرتا ہے۔

مثال2۔ منحنیوں $y = ae^{2x} + be^{-2x}$ کی تفرقی مساوات معلوم کرو۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ

$$y = ae^{2x} + be^{-2x} \quad \text{.....(1)}$$

مساوات(1) کو دونوں جانب بہ لحاظ x دو بار تفرق کرنے پر حاصل ہے

$$y' = 2ae^{2x} - 2be^{-2x}$$

اور

$$y'' = 4ae^{2x} + 4be^{-2x}$$
$$= 4(ae^{2x} + be^{-2x})$$

مساوات(1) کا استعمال کرنے پر $y'' = 4y$ حاصل ہے۔

اس طرح $y'' - 4y = 0$ دی گئی مساوات کی تفرقی مساوات ہے۔

متبادل طریقہ(Alternate Method)

دی گئی مساوات ہے

$$y = ae^{2x} + be^{-2x} \quad \text{.....(1)}$$

مساوات(1) سے حاصل شدہ مساواتیں ہیں

$$y' = 2ae^{2x} - 2be^{-2x} \quad \text{.....(2)}$$

اور

$$y'' = 4ae^{2x} + 4be^{-2x} \quad \text{.....(3)}$$

مساوات(1)، (2) اور (3) سے a اور b کو ساقط کرنے سے حاصل ہو گا

$$\begin{vmatrix} y & e^{2x} & e^{-2x} \\ y' & 2e^{2x} & -2e^{-2x} \\ y'' & 4e^{2x} & 4e^{-2x} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad e^{2x} \begin{vmatrix} y & 1 & e^{-2x} \\ y' & 2 & -2e^{-2x} \\ y'' & 4 & 4e^{-2x} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad e^{2x}.e^{-2x} \begin{vmatrix} y & 1 & 1 \\ y' & 2 & -2 \\ y'' & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad y(8+8) - y'(4-4) + y''(-2-2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 16y - 4y'' = 0$$

اس طرح $y'' - 4y = 0$ دیے گیے خاندانوں کی تفرقی مساوات ہے۔

مثال3۔ نصف قطر a والے دائروں $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ سے متعلق تفرقی مساوات معلوم کرو۔ یہاں h اور k مستقلات ہیں جن کو ساقط کرنا ہے۔

حل: دی گئی مساوات ہے

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2 \qquad \ldots\ldots(1)$$

دو بار مساوات(1) کو تفرق کرنے پر حاصل ہے

$$2(x-h)+2(y-k)\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \quad (x-h)+(y-k)\frac{dy}{dx}=0 \qquad \ldots\ldots(2)$$

$$\Rightarrow \quad 1+(y-k)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0 \qquad \ldots\ldots(3)$$

$$\Rightarrow \quad (y-k)=-\frac{\left(1+\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

مساوات(2) سے

$$(x-h)=-(y-k)\frac{dy}{dx}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\times\frac{dy}{dx}$$

مساوات(1) سے

$$\Rightarrow \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}+\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}=a^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1\right\}=a^2$$

اس طرح جو تفرقی مساوات ہمیں چاہیے وہ ہے

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2=a^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

مثال4۔ مستقلات A اور B کو ساقط کر کے دی گئی مساوات $y = e^x(A\ cos\ x + B\ \sin x)$ سے تفرقی مساوات تشکیل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$y = e^x(A\ cos\ x + B\ \sin x) \qquad \text{.....(1)}$$

چوں کہ دو مستقلات ہیں مساوات (1) کو دو بار تفرق کریں۔

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = e^x\{A(-sinx) + B\cos x\} + (A\ cos\ x + B\ \sin x)e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x(-Asinx + Bcosx) + y \qquad \text{.....(2)}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = e^x(-Acosx - Bsinx) + (-Asinx + Bcosx)e^x + \frac{dy}{dx}$$

مساوات (2) سے

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -e^x(Acosx + Bsinx) + \left(\frac{dy}{dx} - y\right) + \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -y + \frac{dy}{dx} - y + \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} - 2y$$

اس طرح مساوات (1) کی تفرقی مساوات $\frac{d^2x}{dx^2} = 2\left(\frac{dy}{dx} - y\right)$ ہے۔

مثال5۔ منحنیوں کے خاندان $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2+\lambda} = 1$ سے اختیاری مستقل λ کو ساقط کر کے تفرقی مساوات حاصل کرو۔

حل: دیے گیے منحنیوں کے خاندان کی مساوات ہے

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2+\lambda} = 1 \qquad \text{.....(1)}$$

مساوات (1) کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر حاصل ہے

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y\,dy/dx}{a^2 + \lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x}{a^2} + \frac{y\,dy/dx}{a^2 + \lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{y\left(\frac{dy}{dx}\right)}{a^2 + \lambda} = -\frac{x}{a^2}$$

دونوں جانب y سے ضرب دینے پر

$$\frac{y^2}{a^2+\lambda} = \frac{-xy}{a^2\left(\frac{dy}{dx}\right)} \qquad \text{.....(2)}$$

مساوات(2) کی قدر مساوات(1) میں درج کرنے پر

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(-xy)}{a^2\left(\frac{dy}{dx}\right)}=1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{a^2}\left[x^2\frac{dy}{dx}-xy\right]=\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad x^2\frac{dy}{dx}-xy=a^2\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad (x^2-a^2)\frac{dy}{dx}-xy=0$$

جو کہ مساوات(1) کی تفرقی مساوات ہے۔

مثال6۔ مساوات $y=ae^x+be^{2x}+ce^{3x}$ (جہاں a,b,c اختیاری مستقلات ہیں) کی تفرقی مساوات حاصل کرو۔

حل: دی گئی مساوات ہے

$$y=ae^x+be^{2x}+ce^{3x} \qquad \ldots\ldots(1)$$

$$\Rightarrow \quad y'=ae^x+b2e^{2x}+c3e^{3x}$$

$$\Rightarrow \quad y'=[ae^x+be^{2x}+ce^{3x}]+be^{2x}+2ce^{3x}$$

$$\Rightarrow \quad y'=y+be^{2x}+2ce^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad y'-y=be^{2x}+2ce^{3x} \qquad \ldots\ldots(2)$$

$$\Rightarrow \quad y''-y'=2be^{2x}+6ce^{3x}$$

$$=2[be^{2x}+2ce^{3x}]+2ce^{3x}$$

$$y''-y'=2(y'-y)+2ce^{3x} \qquad \ldots\ldots(3)$$

مساوات(2) کی مدد سے

$$y''-3y'+2y=2ce^{3x} \qquad \ldots\ldots(4)$$

$$\Rightarrow \quad y'''-3y''+2y'=6ce^{3x}=3(2ce^{3x})$$

مساوات(3) سے $2ce^{3x}$ کی قدر درج کرنے پر

$$y'''-3y''+2y'=3(y''-3y'+2y)$$

$$\Rightarrow y'''-6y''+11y'-6y=0$$

اس طرح مساوات(1) کی تفرقی مساوات ہے۔

$$\frac{d^3y}{dx^3}-6\frac{d^2y}{dx^2}+11\frac{dy}{dx}-6y=0$$

1.4 اکتسابی نتائج(Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم جان چکے ہیں کہ کسی تفرقی مساوات کا رتبہ اس کے اعظم ترین مشتق کا رتبہ ہوتا ہے اور کسی تفرقی مساوات کا درجہ اس میں شامل اعظم ترین مشتق کی قوت ہے۔ جب n اختیاری مستقلات والا کوئی تفاعل دیا جائے تو ہم اسے n دفعہ تفرق کرتے ہیں تاکہ n زائد مساواتیں حاصل ہوں جن میں n اختیاری مستقلات شامل ہوں ان $n+1$ مساواتوں سے n اختیاری مستقلات کو ساقط کر کے n رتبہ والا تفرقی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

1.5 کلیدی الفاظ(Keywords)

اختیاری مستقل، مشتق، اعظم ترین مشتق، درجہ، رتبہ

1.6 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

1.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

i) تفرقی مساوات $(x^2+1)\frac{dy}{dx}+2xy=4x^2$ کا رتبہ اور درجہ ہے

A. 1،1 .B 1,2 .C 2,1 .D ان میں سے کوئی نہیں

ii) مساوات $y=x\frac{dy}{dx}+\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ کا رتبہ.....ہے۔

A. 2 .B 3 .C 1 .D 4

iii) تفرقی مساوات جس کا رتبہ 2 اور درجہ 3 ہو اس کے حل میں کتنے اختیاری مستقلات ہوں گے؟

A. 2 .B 1 .C 3 .D 4

iv) تفرقی مساوات جس کا حل $y=A\cos\left(\frac{n}{x}+\alpha\right)$ ہے.....ہو گی، یہاں α اور A اختیاری مستقلات ہیں۔

A. $x^3y''+n^2y=0$ .B $x^4y''+n^2y=0$

C. $x^4y''-n^2y=0$ .D ان میں سے کوئی نہیں

5. دائروں کے خاندان جن کے مراکز (0,0) پر ہیں کی تفرقی مساوات ہے

A. $x-yy'=0$ .B $y+xy'=0$

C. $x+yy'=0$ .D ان میں سے کوئی نہیں

1.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

ذیل کے مساواتوں سے اختیاری مستقلات کو ساقط کرتے ہوئے تفرقی مساواتیں حاصل کرو:

1. $x^2 + y^2 - 2cy - c^2 = 0$
2. $y = ae^{bx}$
3. $y = ax + bx^2$
4. $y = ax^2 + be^{-x}$
5. $y = asin(mx + b)$
6. $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$

1.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات(Long Answer Type Questions)

1. خطوں کے خاندان $y = mx + \frac{a}{m}$ جہاں m پیرامیٹر ہے، کی تفرقی مساوات معلوم کرو۔
2. ثابت کرو $Ax^2 + By^2 = 1$، جہاں A اور B اختیاری مستقلات ہیں، کی تفرقی مساوات $x[yy'' + (y')^2] = yy'$ ہو گی۔

جوابات:

1.6.1 معروضی سوالا تکے جوابات

1. A
2. C
3. A
4. B
5. C

1.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $(x^2 - 2y^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4xy\frac{dy}{dx} - x^2 = 0$
2. $yy_2 - {y_1}^2 = 0$
3. $x^2y_2 - 2xy_1 + 2y = 0$
4. $(x^2 + 2x)\frac{d^2y}{dx^2} + (x^2 - 2)\frac{dy}{dx} - 2(x + 1)y = 0$
5. $\frac{d^2y}{dx^2} + m^2y = 0$

$$y_3[1 + {y_1}^2] = 3y_1(y_2)^2 \quad .6$$

1.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} + a = 0 \quad .1$$

اکائی 2۔ پہلے رتبے اور پہلے درجے کی تفرقی مساواتیں

(Differential Equations of First Order and First Degree)

اکائی کے اجزا

2.0 تمہید

2.1 مقاصد

2.2 متغیر جدا پذیر کا طریقہ

2.3 متجانس تفرقی مساواتیں

2.3.1 غیر متجانس مساواتیں جو متجانس مساواتوں میں تحویل پذیر ہوں

2.4 اکتسابی نتائج

2.5 کلیدی الفاظ

2.6 نمونہ امتحانی سوالات

2.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

2.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

2.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

2.0 تمہید(Introduction)

پہلے رتبے اور پہلے درجے کی تفرقی مساواتوں کی عام شکل ہے۔

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

جس میں سے ہم y کے لیے حل کرتے ہیں۔اس اکائی میں ہم مساوات(1) کے حل کے تین طریقے سیکھیں گے۔

1. متغیر جداپذیر(Variables Separable)کا طریقہ
2. متجانس تفرقی مساواتیں(Homogeneous differential Equations)
3. غیر متجانس تحویل پذیر مساواتیں (Non-Homogeneousdifferential equations reducible to homogeneous equations)

2.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے کے بعد آپ مختلف قسم کی پہلے رتبے اور پہلے درجے کی تفرقی مساواتوں سے واقف ہو جائیں گے جن کے حل کے تین طریقوں(متغیر جداپذیر، متجانس تفرقی مساواتیں اور غیر متجانس تحویل پذیر مساوات) سے آگاہ ہو کر ان کا استعمال کر سکیں گے۔

2.2 متغیر جداپزیر کا طریقہ(Method of Variables Separable)

اگر تفرقی مساوات(Differential Equation) $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ کو $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$ یا $\frac{dy}{dx} = f(x).g(y)$ سے ظاہر کر سکیں، جہاں $f(x)$ اور $g(x)$ مسلسل تفاعلات(Continuous Functions)ہوں،تو یہ طریقہ متغیر جداپزیر (Variables Separable) کہلاتا ہے۔

طریقہ: دی گئی مساوات $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ کو $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$ میں بدل لیں۔

پھر $f(x)dx = g(y)dy$ کو دونوں جانب تکمل کر کے ہم مساوات کا حل درجہ ذیل شکل میں حاصل کر لیتے ہیں

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy + C$$

جہاں C تکملی مستقل ہے۔

مثال1۔ مساوات $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ کا حل حاصل کرو۔

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$$

متغیر جداپزیر کرنے پر

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$$

دونوں جانب تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1} y = \tan^{-1} x + \mathrm{c}$$

مستقل c کو $\tan^{-1} c$ لینے پر

$$\tan^{-1} y - \tan^{-1} x = \tan^{-1} c$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\left(\frac{y-x}{1+yx}\right) = \tan^{-1} c$$

$$\Rightarrow \quad y - x = c(1+yx)$$

اس طرح $y - x = c(1 + yx)$ دی گئی مساوات کا حل ہو گا۔

مثال2۔ حل کرو: $\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$$

متغیر جدا پزیر کرنے پر

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = c$$

$$\Rightarrow \quad \sin^{-1} y + \sin^{-1} x = \mathrm{c}$$

اس طرح $\sin^{-1} y + \sin^{-1} x = \mathrm{c}$ دی گئی مساوات کا حل ہو گا۔

مثال3۔ مساوات $\frac{dy}{dx} = \frac{x(2\log x+1)}{\sin y+y\cos y}$ کا حل حاصل کرو۔

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(2\log x + 1)}{\sin y + y\cos y}$$

متغیر جدا پزیر کرنے پر حاصل ہے

$$(\sin y + y\cos y)dy = x(2\log x + 1)dx$$

دونوں جانب تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$\int (\sin y + y\cos y)dy = \int (2x\log x + x)dx$$

$$\Rightarrow \quad \int \sin y\, dy + \int y\cos y\, dy = 2\int x\log x\, dx + \int x dx$$

$$\Rightarrow -\cos y + y\sin y - \int \sin y\, dy = 2\left[\log x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \left(\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\right)dx\right] + \frac{x^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow \quad -\cos y + y\sin y + \cos y = 2\left[\frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{2}\int x dx\right] + \frac{x^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow \quad y\sin y = 2\left[\frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)\right] + \frac{x^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow \quad y\sin y = x^2\log x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow \quad y\sin y = x^2\log x + c$$

اس طرح $y\sin y = x^2\log x + c$ دی گئی مساوات کا حل ہو گا۔

مثال4۔ حل کرو: $\frac{dy}{dx} = (4x + y + 1)^2$

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$\frac{dy}{dx} = (4x + y + 1)^2 \qquad \text{.....(1)}$$

فرض کرو کہ $z = 4x + y + 1$ ہے۔اس لیے

$$\frac{dz}{dx} = 4 + \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 4$$

مساوات(1) سے

$$\frac{dz}{dx} - 4 = z^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = z^2 + 4$$

متغیر جدا کرنے پر حاصل ہے

$$\frac{dz}{z^2 + 4} = dx$$

دونوں جانب تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$\int \frac{dz}{z^2 + 4} = \int dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{z}{2} = x + \frac{c}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\frac{z}{2} = 2x + c$$

اس طرح $\tan^{-1}\left(\frac{4x+y+1}{2}\right) = 2x + c$ یا $(4x + y + 1) = 2\tan(2x + c)$ دی گئی مساوات کا حل ہو گا۔

مثال5۔ تفرقی مساوات $(xy^2 + x)dx + (yx^2 + y)dy = 0$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$(xy^2 + x)dx + (yx^2 + y)dy = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(y^2 + 1)dx + y(x^2 + 1)dy = 0 \qquad \text{.....(1)}$$

متغیر جدا کرنے پر حاصل ہو گا

$$\frac{xdx}{x^2+1}+\frac{ydy}{y^2+1}=0$$

دونوں جانب تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا

$$\int\frac{xdx}{x^2+1}+\int\frac{ydy}{y^2+1}=\mathrm{c}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{2ydy}{y^2+1}=\mathrm{c}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\log(x^2+1)+\frac{1}{2}\log(y^2+1)=c$$

$$\Rightarrow \quad \log\{(x^2+1)(y^2+1)\}=2c=\log k \quad (\text{فرض کرو})$$

$$\Rightarrow \quad (x^2+1)(y^2+1)=k$$

اس طرح $(x^2+1)(y^2+1)=k$ دی گئی تفرقی مساوات کا حل ہے۔

مثال6۔ تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx}=e^{x-y}+x^2e^{-y}$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$\frac{dy}{dx}=e^{x-y}+x^2e^{-y} \qquad \text{.....(1)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=(e^x+x^2)e^{-y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{e^{-y}}=(e^x+x^2)dx$$

$$\Rightarrow \quad e^ydy=(e^x+x^2)dx$$

دونوں جانب تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا

$$\int e^ydy=\int(e^x+x^2)dx$$

$$\Rightarrow \quad e^y=e^x+\frac{x^3}{3}+c$$

اس طرح $e^y=e^x+\frac{x^3}{3}+c$ دی گئی مساوات کا حل ہوگا۔

2.3 متجانس تفرقی مساواتیں(Homogeneous Differential Equations)

تعریف: ایک تفاعل $f(x,y)$ درجہ n کا متجانس تفاعل کہلاتا ہے اگر کسی بھی λ کے لیے $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$ ہو۔ مثلاً $f(x,y)=y^2+xy$ دو درجہ والا متجانس تفاعل ہے اس لیے کہ

$$\begin{aligned}f(\lambda x,\lambda y)&=(\lambda y)^2+(\lambda x)(\lambda y)\\&=\lambda^2y^2+\lambda^2xy\\&=\lambda^2(y^2+xy)\\&=\lambda^2f(x,y)\end{aligned}$$

اسی طرح $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{xy}$ درجہ صفر والا متجانس تفاعل ہے چوں کہ

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{(\lambda x)^2+(\lambda y)^2}{(\lambda x)(\lambda y)}$$

$$= \frac{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2}{\lambda^2 xy}$$
$$= \lambda^0 \left(\frac{x^2 + y^2}{xy}\right)$$
$$= \lambda^0 f(x, y)$$

متجانس تفرقی مساواتیں(Homogeneous Differential Equations): تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ متجانس تفرقی مساوات کہلاتی ہے اگر $f(x, y)$ صفر درجہ کا متجانس تفاعل ہو۔ مثلاً $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{xy}$

متجانس تفرقی مساوات کے حل کا طریقہ:

دی گئی مساوات ہے

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{.....(1)}$$

اگر $f(x, y)$ صفر درجہ والا متجانس تفاعل ہو، تب فرض کرو $y = vx$ اور $\frac{dy}{dx} = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$ اس سے ہمیں $\frac{dy}{dx} = \phi(v) = v + x\frac{dv}{dx}$ حاصل ہوگا۔ تب،

$$x\frac{dv}{dx} = \phi(v) - v$$

متغیر جدا کرنے پر

$$\frac{dv}{\phi(v) - v} = \frac{dx}{x}$$
$$\Rightarrow \int \frac{dv}{\phi(v) - v} + C = \int \frac{dx}{x}$$

متجانس مساوات $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ کا حل ہوگا۔

نوٹ: اگر متجانس مساوات $\frac{dx}{dy} = \psi\left(\frac{x}{y}\right)$ کے شکل کی ہو تب $x = vy$ لے کر اس تفرقی مساوات کا حل معلوم کریں۔

مثال 1۔ حل کرو: $x^2 ydx - (x^3 + y^3)dy = 0$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$x^2 ydx - (x^3 + y^3)dy = 0$$
$$x^2 ydx = (x^3 + y^3)dy$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 y}{x^3 + y^3} \quad \text{.....(1)}$$

چوں کہ $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^3 + y^3}$ اور

$$f(kx, ky) = \frac{(kx)^2 (ky)}{(kx)^3 + (ky)^3}$$
$$= \frac{k^3 (x^2 y)}{k^3 (x^3 + y^3)}$$
$$= \frac{x^2 y}{x^3 + y^3}$$

اس لیے دی گئی تفرقی مساوات متجانس ہے اور اس کا حل معلوم کرنے کے لیے فرض کرو $y = vx$ درج کرنا ہوگا اور اس سے ہمیں حاصل ہوگا $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

مساوات(1) سے حاصل ہے

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^2(vx)}{x^3 + (vx)^3}$$

$$= \frac{x^3(v)}{x^3(1+v^3)} = \frac{v}{1+v^3}$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v^3} - v = \frac{-v^4}{1+v^3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1+v^3}{v^4}dv = -\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad v^{-4}dv + \frac{1}{v}dv = -\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \int v^{-4}dv + \int \frac{1}{v}dv = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v^{-3}}{-3} + \log v = -\log x + c$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{3v^3} + \log v + \log x = c$$

$v = \frac{y}{x}$ درج کرنے پر

$$-\frac{1}{3\left(\frac{y}{x}\right)^3} + \log\left(\frac{y}{x}\right) + \log x = c$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{x^3}{3y^3} + \log y - \log x + \log x = c$$

$$\Rightarrow \quad \log y - \frac{x^3}{3y^3} = c$$

جو کہ مساوات(1) کا حل ہے۔

مثال2۔ $x\frac{dy}{dx} = y + xe^{\frac{y}{x}}$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$x\frac{dy}{dx} = y + xe^{\frac{y}{x}} \quad \text{.....(1)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y + xe^{\frac{y}{x}}}{x} = f(x,y)$$

$$\Rightarrow \quad f(kx,ky) = \frac{ky + kxe^{\frac{ky}{kx}}}{kx}$$

$$= f(x,y)$$

اس لیے دی گئی تفرقی مساوات متجانس ہے اور اس کا حل معلوم کرنے کے لیے فرض کرو $y = vx$ درج کرنے پر اور اس سے ہمیں حاصل ہو گا $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

مساوات(1) سے حاصل ہے

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{vx + xe^{\frac{vx}{x}}}{x}$$

$$\Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x(v + e^{v})}{x} = v + e^{v}$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = e^{v}$$

متغیر جدا کرنے پر

$$e^{-v}dv = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int e^{-v}dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-v}}{-1} = \log x + \log c$$

$$\Rightarrow e^{-v} = -\log cx = \log\left(\frac{1}{cx}\right)$$

$v = \frac{y}{x}$ درج کرنے پر

$$e^{\left(-\frac{y}{x}\right)} = \log\left(\frac{1}{cx}\right)$$

جو کہ مساوات(1) کا حل ہے۔

مثال3۔ مساوات $(x + y)dy = (x - y)dx$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(x + y)dy = (x - y)dx$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y} = f(x, y) \quad \text{.....(1)}$$

جو ایک متجانس تفرقی مساوات ہے۔ تب فرض کرو کہ $y = vx$ جس سے ہمیں حاصل ہو گا $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

اب مساوات(1) سے حاصل ہے

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x - vx}{x + vx}$$

$$= \frac{x(1 - v)}{x(1 + v)} = \frac{1 - v}{1 + v}$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1 - v}{1 + v} - v = \frac{1 - v - v - v^2}{1 + v}$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1 - 2v - v^2}{1 + v}$$

$$\Rightarrow \frac{1 + v}{1 - 2v - v^2}dv = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{-2}\left(\frac{-2-2v}{1-2v-v^2}\right)dv = \frac{dx}{x}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{-2}\int\left(\frac{-2-2v}{1-2v-v^2}\right)dv = \int\frac{dx}{x}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{-2}\log(1-2v-v^2) = \log x + \log c$$
$$\Rightarrow \quad \log(1-2v-v^2) = -2\log cx$$
$$\Rightarrow \quad \log(1-2v-v^2) = \log\frac{1}{(cx)^2}$$
$$\Rightarrow \quad 1-2v-v^2 = \frac{1}{(cx)^2}$$

$v = \frac{y}{x}$ درج کرنے پر

$$1-2\left(\frac{y}{x}\right)-\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{1}{(cx)^2}$$
$$\Rightarrow \quad x^2-2xy-y^2 = \frac{1}{c^2} = k$$

اس طرح مساوات(1) کا حل $x^2-2xy-y^2 = k$ ہوگا۔

مثال4۔ مساوات $(x^2+y^2)dx-2xydy = 0$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(x^2+y^2)dx-2xydy = 0$$
$$\Rightarrow \quad (x^2+y^2)dx = 2xydy$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy} \qquad \text{.....(1)}$$

یہ ایک متجانس تفرقی مساوات ہے۔تب فرض کرو کہ $y = vx$ جس سے ہمیں حاصل ہوگا $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

مساوات(1) سے حاصل ہے

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^2+(vx)^2}{2x(vx)}$$
$$= \frac{x^2(1+v^2)}{2x^2v} = \frac{1+v^2}{2v}$$
$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2v} - v = \frac{1-v^2}{2v}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{2v}{1-v^2}dv = \frac{dx}{x}$$
$$\Rightarrow \quad \int\frac{-2v}{1-v^2}dv = -\int\frac{dx}{x}$$
$$\Rightarrow \quad \log(1-v^2) = -\log x + \log c$$
$$\Rightarrow \quad \log(1-v^2) = \log\frac{c}{x}$$
$$\Rightarrow \quad 1-v^2 = \frac{c}{x}$$

$v = \frac{y}{x}$ درج کرنے پر

$$1-\left(\frac{y}{x}\right)^2=\frac{c}{x}$$

$$\Rightarrow \quad x^2-y^2=cx$$

اس طرح مساوات(1)کا حل $x^2-y^2=cx$ ہوگا۔

مثال5۔ مساوات $(x^3-2y^3)dx+3xy^2dy=0$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(x^3-2y^3)dx+3xy^2dy=0$$

$$\Rightarrow \quad (x^3-2y^3)dx=-3xy^2dy$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^3-2y^3}{3xy^2} \qquad \text{.....(1)}$$

یہ ایک متجانس تفرقی مساوات ہے۔اب مان لو کہ $y=vx$ جس سے ہمیں حاصل ہوگا $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$

اب مساوات(1)سے

$$v+x\frac{dv}{dx}=-\frac{x^3-2(vx)^3}{3x(vx)^2}$$

$$=-\frac{x^3(1-2v^3)}{3x^3v^2}=-\left(\frac{1-2v^3}{3v^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx}=\frac{2v^3-1}{3v^2}-v=\frac{2v^3-1-3v^3}{3v^2}$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx}=\frac{-1-v^3}{3v^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3v^2}{1+v^3}dv=-\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \int\frac{3v^2}{1+v^3}dv=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \log(1+v^3)=-\log x+\log c$$

$$\Rightarrow \quad \log(1+v^3)=\log\frac{c}{x}$$

$$\Rightarrow \quad 1+v^3=\frac{c}{x}$$

$v=\frac{y}{x}$ درج کرنے پر

$$1+\left(\frac{y}{x}\right)^3=\frac{c}{x}$$

$$\Rightarrow \quad x^3+y^3=cx^2$$

اس طرح مساوات(1)کا حل $x^3+y^3=cx^2$ ہوگا۔

مثال6۔ مساوات $(x^2+xy+y^2)dx=x^2dy$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(x^2+xy+y^2)dx=x^2dy$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2} \qquad \text{.....(1)}$$

یہ ایک متجانس تفرقی مساوات ہے۔تب فرض کرو کہ $y = vx$ جس سے ہمیں حاصل ہو گا $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

اب مساوات(1) سے حاصل ہے

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^2 + x(vx) + (vx)^2}{x^2}$$

$$= \frac{x^2(1 + v + v^2)}{x^2} = 1 + v + v^2$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = 1 + v + v^2 - v = 1 + v^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{1 + v^2} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dv}{1 + v^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1} v = \log x + \log c = \log cx$$

$v = \frac{y}{x}$ درج کرنے پر

$$\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \log cx$$

اس طرح مساوات(1) کا حل $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \log cx$ ہو گا۔

2.3.1 غیر متجانس مساواتیں جو متجانس مساواتوں میں تحویل پذیر ہوں

(Non-Homogeneous Differential Equations Reducible to Homogeneous Equations)

اگر مساوات $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ذیل شکل کی ہو

$$(a_2x + b_2y + c_2)\frac{dy}{dx} = (a_1x + b_1y + c_1) \qquad \text{.....(1)}$$

جہاں a_1, b_1, c_1 اور a_2, b_2, c_2 مستقلات ہیں، جب کہ $a_2x + b_2y + c_2 \neq 0$ متجانس میں تحویل پزیر ہے اگر $c_1 = c_2 = 0$

مساوات(1) کو ہم درجہ ذیل شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \qquad \text{.....(2)}$$

فرض کرو کہ h, k دو مستقلات اس طرح وجود رکھتے ہیں کہ $x = X + h$، اور $y = Y + k$

$$0a_1h + b_1k + c_1 =$$

$$a_2h + b_2k + c_2 = 0$$

تب $dx = dX$ اور $dy = dY$ ہیں۔

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$$

اور مساوات(2) ہو گی

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a_1(X + h) + b_1(Y + k) + c_1}{a_2(X + h) + b_2(Y + k) + c_2}$$

چوں کہ $a_1h + b_1k + c_1 = a_2h + b_2k + c_2 = 0$ اس لیے

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y} \quad \text{.....(3)}$$

اور مساوات(3)متجانس ہے جس کا ہم حل معلوم کر سکتے ہیں۔آخر میں Xاور Y کی قدر درج کرنے پر ہمیں مساوات(1)کا حل حاصل ہو گا۔

مثال1۔ مساوات $(2x + y - 3)\frac{dy}{dx} = x + 2y - 3$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(2x + y - 3)\frac{dy}{dx} = x + 2y - 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y-3}{2x+y-3} \quad \text{.....(1)}$$

مساوات(1)ایک غیر متجانس تفرقی مساوات ہے۔اب فرض کرو کہ $x = X + h, y = Y + k$ جہاں h, k دو مستقلات اس طرح وجود رکھتے ہیں کہ

$$h + 2k - 3 = 0 \quad \text{.....(2)}$$

$$2h + k - 3 = 0 \quad \text{.....(3)}$$

مساوات(2)اور(3)کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $h = 1, k = 1$

اگر ہم $x = X + 1, y = Y + 1$ لیتے ہیں تب مساوات(1)

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X+2Y}{2X+Y} \quad \text{.....(4)}$$

میں تبدیل ہو جاتی ہے۔

یہ ایک متجانس تفرقی مساوات ہے۔اب اگر $Y = VX$ ہو،تب $\frac{dY}{dX} = V + X\frac{dV}{dX}$

اب مساوات(4)سے

$$V + X\frac{dV}{dX} = \frac{X + 2VX}{2X + VX}$$

$$= \frac{X(1 + 2V)}{X(2 + V)} = \frac{1 + 2V}{2 + V}$$

$$\Rightarrow \quad X\frac{dV}{dX} = \frac{1 + 2V}{2 + V} - V = \frac{1 - V^2}{2 + V}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2 + V}{1 - V^2}dV = \frac{dX}{X}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{2 + V}{1 - V^2}dV = \int \frac{dX}{X}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{2}{1 - V^2}dV + \frac{1}{-2}\int \frac{-2V}{1 - V^2}dV = \int \frac{dX}{X}$$

$$\Rightarrow 2 \times \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + V}{1 - V}\right) - \frac{1}{2}\log(1 - V^2) = \log X + \log C$$

$$\Rightarrow 2\log\left(\frac{1 + V}{1 - V}\right) - \log(1 - V^2) = 2\log CX$$

$$\Rightarrow \log\left\{\frac{(1 + V)^2}{(1 - V)^2} \times \frac{1}{(1 - V^2)}\right\} = \log(CX)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1+V}{(1-V)^3} = (CX)^2$$

$V = \frac{Y}{X}$ درج کرنے پر

$$\frac{1+\frac{Y}{X}}{\left(1-\frac{Y}{X}\right)^3} = (CX)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{X+Y}{(X-Y)^3} \cdot X^2 = (CX)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{X+Y}{(X-Y)^3} = C^2 = k$$

اب ہم $Y = y-1, X = x-1$ درج کرتے ہیں

$$\Rightarrow \quad \frac{x-1+y-1}{(x-1-y+1)^3} = k$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+y-2}{(x-y)^3} = k$$

اس طرح مساوات (1) کا حل $x+y-2 = k(x-y)^3$ ہوگا۔

مثال 2۔ مساوات $(4x+3y+1)dx + (3x+2y+1)dy = 0$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(4x+3y+1)dx + (3x+2y+1)dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x+3y+1}{3x+2y+1} \qquad \text{.....(1)}$$

یہ مساوات غیر متجانس تفرقی مساوات ہے۔اب فرض کرو کہ $x = X+h$، $y = Y+k$ جہاں h, k دو ایسے اعداد ہیں کہ

$$4h+3k+1 = 0 \qquad \text{.....(2)}$$

$$3h+2k+1 = 0 \qquad \text{.....(3)}$$

مساوات (2) اور (3) کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $h = -1, k = 1$

اگر ہم $x = X-1, y = Y+1$ لیتے ہیں تب مساوات (1)

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{4X+3Y}{3X+2Y} \qquad \text{.....(4)}$$

میں تبدیل ہو جاتی ہے۔یہ ایک متجانس تفرقی مساوات ہے۔اب فرض کرو کہ $Y = VX$ ہے، تب $\frac{dY}{dX} = V + X\frac{dV}{dX}$

اب مساوات (4) سے

$$V + X\frac{dV}{dX} = -\frac{4X+3VX}{3X+2VX}$$

$$= -\frac{X(4+3V)}{X(3+2V)} = -\frac{4+3V}{3+2V}$$

$$\Rightarrow \quad X\frac{dV}{dX} = -\frac{4+3V}{3+2V} - V = -\frac{4+6V+2V^2}{3+2V}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3+2V}{-2(2+3V+V^2)}dV = \frac{dX}{X}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{3+2V}{(2+3V+V^2)}dV = \frac{-2}{X}dX$$
$$\Rightarrow \quad \int \frac{3+2V}{(2+3V+V^2)}dV = -2\int \frac{dX}{X}$$
$$\Rightarrow \quad \log(2+3V+V^2) = -2\log X + \log c$$
$$\Rightarrow \quad \log(2+3V+V^2)X^2 = \log c$$
$$\Rightarrow \quad (2+3V+V^2)X^2 = c$$

$V = \frac{Y}{X}$ درج کرنے پر

$$\left(2+\frac{3Y}{X}+\frac{Y^2}{X^2}\right)X^2 = c$$
$$\Rightarrow \quad 2X^2+3XY+Y^2 = c$$

اب ہم $Y = y-1, X = x+1$ درج کرتے ہیں

$$\Rightarrow 2(x+1)^2+3(x+1)(y-1)+(y-1)^2 = c$$

اس طرح مساوات (1) کا حل $2(x+1)^2+3(x+1)(y-1)+(y-1)^2 = c$ ہوگا۔

مثال 3۔ مساوات $(x+2y-1)dx-(2x+4y+2)dy = 0$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(x+2y-1)dx-(2x+4y+2)dy = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y-1}{2(x+2y)+2} \qquad \text{.....(1)}$$

اب فرض کرو کہ $v = x+2y$ ہے، تب

$$\frac{dv}{dx} = 1+2\frac{dy}{dx}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}-1\right)$$

اب مساوات (1) سے

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}-1\right) = \frac{v-1}{2v+2}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx}-1 = \frac{v-1}{v+1}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = \frac{v-1}{v+1}+1 = \frac{2v}{v+1}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{v+1}{2v}dv = dx$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{v}\right)dv = dx$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int\left(1+\frac{1}{v}\right)dv = \int dx$$
$$\Rightarrow \quad \mathrm{v}+\log v = 2x+c$$

$V = x + 2y$ درج کرنے پر

$$x + 2y + \log(x + 2y) = 2x + c$$
$$\Rightarrow \log(x + 2y) + (2y - x) = c$$

اس طرح مساوات(1)کا حل $\log(x + 2y) + (2y - x) = c$ ہوگا۔

2.4 اکتسابی نتائج(Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم یہ دیکھ چکے ہیں کہ اگر مساوات $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ذیل شکل $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ میں ہو تو ہم اس کا حل متغیر جدا پزیر کے طریقہ سے حاصل کرتے ہیں۔ اگر x, y میں کوئی تفاعل $f(x, y)$ متجانس ہو تب ہم $y = vx$ کی مدد سے دی گئی تفرقی مساوات کو متغیر جدا پزیر بنا کر حل کرتے ہیں اور غیر متجانس مساواتوں کو متجانس بنا کر ان کا حل حاصل کر لیتے ہیں۔

2.5 کلیدی الفاظ(Keywords)

متجانس تفاعل، متجانس تفرقی مساوات، غیر متجانس تفرقی مساوات، متغیر جدا پزیر

2.6 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

2.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = xe^{x^2+y^2}y$ کا حل ہے

A. $e^{x^2} + e^{y^2} = C$ B. $e^{-x^2} + e^{y^2} = C$

C. $e^{x^2} + e^{-y^2} = C$ D. ان میں سے کوئی نہیں

2. تفرقی مساوات $\log \frac{dy}{dx} = ax + b$ کا حل.....ہے۔

3. مساوات $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{2x}$ کا حل ہے

A. $x = C(x - y)^2$ B. $(x - y)x = C$

C. $y = C(x - y)^2$ D. ان میں سے کوئی نہیں

2.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

1. متغیر جدا پزیر طریقہ سے مساوات $y^2 \cos\sqrt{x}\, dx - 2\sqrt{x}e^{\frac{1}{y}}dy = 0$ کا حل معلوم کرو۔

2. درجہ ذیل مساواتوں کو حل کرو:

(i) $y^2 + x^2\frac{dy}{dx} = xy\frac{dy}{dx}$

(ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan\left(\frac{y}{x}\right)$

(iii) $(x^2 - 3xy)dy = (xy - 2y^2)dx$

3. ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو:

(i) $(e^y + 1)\cos x\, dx + e^y \sin x\, dy = 0$

$(x+y)^2\frac{dy}{dx} = a^2$ (ii)

$dy = tan^2(x+y)dx$(iii)

$\frac{dy}{dx} = \cos(x+y) + \sin(x+y)$(iv)

$\frac{dy}{dx} = e^{x+y} + x^2e^{x^3+y}$ (v)

$(e^x+1)ydy + (y+1)dx = 0$(vi)

$\frac{dy}{dx} = xy + x + y + 1$ (vii)

2.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات(Long Answer Type Questions)

1. حل کرو:

$(x-y-2)dx + (x-2y-3)dy = 0$ (i)

$(x+2y+3)dx - (3x+2y+1)dy = 0$ (ii)

$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{2x+2y+3}$(iii)

جوابات:

2.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $\sin\sqrt{x} + e^{\frac{1}{y}} = C$

2. $\left(\frac{y}{x}\right) - \log\left(\frac{y}{x}\right) = \log x + C$ (i)

$\sin\left(\frac{y}{x}\right) = Cx$ (ii)

$x^2 = Cy^3e^{\frac{x}{y}}$ (iii)

3.

$(e^y+1)\sin x = C$ (i)

$y = a\tan^{-1}\frac{(x+y)}{a} + C$ (ii)

$\sin(2x+2y) = 2x - 2y + C$(iii)

$\log\left\{1 + \tan\frac{(x+y)}{2}\right\} = x + C$(iv)

$e^x + e^{-y} + \frac{x^3}{3} = C$ (v)

$y - \log(1+e^{-x}) - \log(y+1) = C$(vi)

$C(y+1) = e^{\left(\frac{x^2}{2}+x\right)}$ (vii)

2.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالا تکے جوابات

$x^2 - 2y^2 - 2x4y - 2 = C\left(\frac{x-y\sqrt{2}-\sqrt{2}-1}{x+y\sqrt{2}+\sqrt{2}-1}\right)^{1/\sqrt{2}}$ (i)

$(2y-x+5)^4 = C^3(x+y+1)$ (ii)

$x + y + \frac{4}{3} = Ce^{3(x-2y)}$(iii)

اکائی 3۔ ٹھیک تفرقی مساواتیں

(Exact Differential Equations)

اکائی کے اجزا

3.0		تمہید
3.1		مقاصد
3.2		ٹھیک تفرقی مساواتیں
	3.2.1	ٹھیک تفرقی مساواتوں کے لیے ضروری اور کافی شرط
	3.2.2	متکمل اجزا ضربی
3.3		اکتسابی نتائج
3.4		کلیدی الفاظ
3.5		نمونہ امتحانی سوالات
	3.5.1	معروضی جوابات کے حامل سوالات
	3.5.2	مختصر جوابات کے حامل سوالات
	3.5.3	طویل جوابات کے حامل سوالات

3.0 تمہید(Introduction)

ذیل کی مساواتوں کو غور سے دیکھیے:

$$xdy + ydx = 0 \quad \text{.....(1)}$$

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} = 0 \quad \text{.....(2)}$$

مساوات(1)کا حل ہے

$$xy = c \quad \text{.....(3)}$$

اور مساوات(2)کا حل ہے

$$\frac{x}{y} = c \quad \text{.....(4)}$$

مساوات(3)کے سیدھے تفرق سے تفرقی مساوات(1)حاصل ہوتی ہے۔جیسا کہ

$$d(xy) = d(c)$$

$$\Rightarrow \quad xdy + ydx = 0$$

اور $d\left(\frac{x}{y}\right) = d(c)$ سے $\frac{ydx - xdy}{y^2} = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ایسی مساواتیں جو کسی تفاعل $f(x,y) = c$ کے سیدھے تفرق سے حاصل ہوتی ہیں ٹھیک تفرقی مساواتیں(Exact Differential Equations) کہلاتی ہیں۔

3.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ

- ٹھیک تفرقی مساوات کا حل حاصل کر سکیں۔
- متکمل جز ضربی(Integrating Factor) معلوم کر کے غیر ٹھیک مساوات کو ٹھیک مساوات میں تبدیل کر کے اس کا حل معلوم کرنے کا طریقہ سیکھ سکیں۔

3.2 ٹھیک تفرقی مساواتیں(Exact Differential Equations)

تعریف: اگر M اور N، x, y کے دو تفاعلات ہوں تو مساوات $Mdx + Ndy = 0$ ٹھیک مساوات یا ٹھیک تفرقی مساوات کہلاتی ہے اگر ایک ایسا تفاعل $f(x,y)$ وجود رکھتا ہو کہ

$$d[f(x,y)] = Mdx + Ndy$$

مثلاً مساوات $y^2dx + 2xydy = 0$ ٹھیک مساوات ہے اس لیے کہ $d(xy^2) = y^2dx + 2xydy$ ہے۔ عملاً $f(x,y)$ کو اس قدر معلوم کرنا آسان نہیں ہوتا ہے۔

3.2.1 ٹھیک تفرقی مساواتوں کے لیے ضروری اور کافی شرط

(Necessary and Sufficient Condition for Exact Differential Equations)

پہلے رتبے اور پہلے درجے کی تفرقی مساوات $Mdx + Ndy = 0$ کے ٹھیک ہونے کی ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ہو۔

ثبوت:

ضروری شرط (Necessary Condition): فرض کرو کہ مساوات

$$Mdx + Ndy = 0 \qquad \text{.....(1)}$$

ٹھیک مساوات ہے، ہمیں ثابت کرنا ہے کہ

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \text{.....(2)}$$

ہو گا۔ ٹھیک تفرقی مساوات کی تعریف سے ظاہر ہوتا ہے کہ ایک ایسا تفاعل $f(x, y)$ وجود رکھتا ہو کہ

$$d[f(x, y)] = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}}dy = Mdx + Ndy \qquad \text{.....(3)}$$

جہاں

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \qquad \text{.....(4)}$$

اور

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N \qquad \text{.....(5)}$$

مساوات (4) کو بہ لحاظ y تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{y}\partial x}$$

اور مساوات (5) کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

چوں کہ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{y}\partial x}$ ہوتا ہے، اس لیے

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

اس لیے تفرقی مساوات $Mdx + Ndy = 0$ کے ٹھیک ہونے کی ضروری شرط یہ ہے کہ $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ہو۔

کافی شرط (Sufficient Condition): فرض کرو کہ شرط $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial N}{\partial x}$ صحیح ہے۔

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ تفرقی مساوات $Mdx + Ndy = 0$ ٹھیک ہے۔ اس کے لیے ہمیں ایک ایسا تفاعل $f(x, y)$ تلاش کرنا ہے کہ $d[f(x, y)] = Mdx + Ndy$ ہو۔

فرض کرو کہ $U = \int Mdx$ جس میں دورانِ تکمل مستقل مانا گیا ہے، تب

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int Mdx\right) = \frac{\partial U}{\partial x}$$

چوں کہ $\frac{\partial}{\partial x}(\int Mdx) = M$، اس لیے

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial^2 U}{\partial \mathrm{y}\partial x}$$

چوں کہ $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ اور $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ہے، اس لیے

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

تکمل بہ لحاظ x کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$N = \frac{\partial U}{\partial y} + \phi(y)$$

جہاں $\phi(y)$ مستقل ہے۔ اب

$$\begin{aligned} Mdx + Ndy &= \frac{\partial U}{\partial x}dx + \left\{\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{y}} + \phi(y)\right\}dy \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{y}}dy\right) + \phi(y)dy \\ &= dU + \phi(y)dy \\ &= d\left(U + \int \phi(y)dy\right) \end{aligned}$$

جو ایک کامل تفرق (Total Differentiation) ہے۔ اس طرح $Mdx + Ndy = 0$ ایک ٹھیک تفرقی مساوات ہے۔

ٹھیک تفرقی مساوات کے حل کا عملی قاعدہ:

I. دی گئی مساوات کو $Mdx + Ndy = 0$ کی شکل میں لکھ کر M اور N معلوم کریں۔

II. اگر $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ہو تب تفرقی مساوات ٹھیک ہے۔

III. متغیر y کو مستقل مان کر M کو بہ لحاظ x تکمل کریں۔

IV. متغیر x کو مستقل مان کر N کو بہ لحاظ y تکمل کریں اور ان ارقام کو چھوڑ دو جو M کو بہ لحاظ x تکمل کرنے پر حاصل ہوں۔

تیسرے اور چوتھے مرحلے سے حاصل شدہ ارقام کو جمع کر کے ایک اختیاری مستقل کے برابر کرو۔ یہی ٹھیک مساوات کا حل ہو گا۔

مثال 1۔ حل کرو: $(ax + hy + g)dx + (hx + by + f)dy = 0$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(ax + hy + g)dx + (hx + by + f)dy = 0$$

اس مساوات کا تقابل $Mdx + Ndy = 0$ سے کرنے پر

$$M = ax + hy + g$$

اور

$$N = hx + by + f$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial \mathrm{y}} = h, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = h$$

اس لیے

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

اس لیے دی گئی مساوات ٹھیک ہے۔ ٹھیک مساوات کا حل درجہ ذیل طریقہ سے نکالا جاتا ہے

$$\int Mdx = \int (ax + hy + g)dx = a\frac{x^2}{2} + hyx + gx$$

$$\int Ndy = \int (hx + by + f)dy = hyx + b\frac{y^2}{2} + fy$$

چوں کہ hyx دونوں تکملات میں موجود ہے اس لیے اس کو چھوڑنے پر دی گئی مساوات کا حل ہو گا

$$a\frac{x^2}{2} + hyx + gx + b\frac{y^2}{2} + fy = c$$

$$ax^2 + 2hyx + 2gx + by^2 + 2fy = 2c = k$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $ax^2 + 2hyx + 2gx + by^2 + 2fy = k$ ہو گا۔

مثال2۔ حل کرو: $(e^y + 1)\cos x\,dx + e^y \sin x\,dy = 0$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(e^y + 1)\cos x\,dx + e^y \sin x\,dy = 0$$

اس مساوات کا تقابل $Mdx + Ndy = 0$ سے کرنے پر

$$M = (e^y + 1)\cos x$$

اور

$$N = e^y \sin x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}} = e^y \cos x,\ \ \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} = e^y \cos x$$

اس لیے

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

اس لیے دی گئی مساوات ٹھیک ہے۔ ٹھیک مساوات کا حل درجہ ذیل طریقہ سے نکالا جاتا ہے

$$\int Mdx = \int (e^y + 1)\cos x\,dx = (e^y + 1)\sin x$$

$$\int Ndy = \int e^y \sin x\,dy = e^y \sin x$$

چوں کہ $e^y \sin x$ دونوں تکملات میں موجود ہے اس لیے اس کو چھوڑنے پر دی گئی مساوات کا حل ہو گا

$$e^y \sin x + \sin x = c$$

$$(e^y + 1)\sin x = c$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $(e^y + 1)\sin x = c$ ہو گا۔

مثال3۔ حل کرو: $(x^2 - ay)dx = (ax - y^2)dy$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(x^2 - ay)dx - (ax - y^2)dy = 0$$

اس مساوات کا تقابل $Mdx + Ndy = 0$ سے کرنے پر

$$M = x^2 - ay$$

اور

$$N = -ax + y^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -a, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -a$$

اس لیے

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

اس لیے دی گئی مساوات ٹھیک تفرقی مساوات ہے۔اس کا حل ہو گا

$$\int Mdx = \int (x^2 - ay)dx = \frac{x^3}{3} - axy$$

$$\int Ndy = \int (-ax + y^2)dy = -axy + \frac{y^3}{3}$$

چوں کہ $-axy$ دونوں تکملات میں موجود ہے اس لیے اس کو چھوڑنے پر دی گئی مساوات کا حل ہو گا

$$\frac{x^3}{3} - axy + \frac{y^3}{3} = c$$

$$x^3 - 3axy + y^3 = 3c = k$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $x^3 - 3axy + y^3 = k$ ہو گا۔

مثال4۔ حل کرو: $(xy\cos xy + \sin xy)dx + x^2\cos xy\, dy = 0$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(xy\cos xy + \sin xy)dx + x^2\cos xy\, dy = 0$$

اس مساوات کا تقابل $Mdx + Ndy = 0$ سے کرنے پر

$$M = xy\cos xy + \sin xy$$

اور

$$N = x^2\cos xy$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2x\cos xy - x^2 y\sin xy$$

اور

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x\cos xy - x^2 y\sin xy$$

اس لیے

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

اس لیے دی گئی مساوات ٹھیک ہے۔اس کا حل ہو گا

$$\int Mdx = \int (xy\cos xy + \sin xy)dx$$

$$= xy\frac{\sin xy}{y} - \int 1 \cdot y\frac{\sin xy}{y}dx - \frac{\cos xy}{y}$$
$$= x\sin xy - \int \sin xy\, dx - \frac{\cos xy}{y}$$
$$= x\sin xy + \frac{\cos xy}{y} - \frac{\cos xy}{y}$$
$$= x\sin xy$$

اور

$$\int Ndy = \int x^2 \cos xy\, dy$$
$$= x^2\frac{\sin xy}{x}$$
$$= x\sin xy$$

چوں کہ $x\sin xy$ دونوں تکملات میں موجود ہے۔اس لیے اس کو چھوڑنے پر دی گئی مساوات کا حل ہو گا

$$x\sin xy = c$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $x\sin xy = c$ ہو گا۔

مثال5۔ حل کرو: $(x^4 - 2xy^2 + y^4)dx + (4xy^3 - 2x^2y - \sin y)dy = 0$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(x^4 - 2xy^2 + y^4)dx + (4xy^3 - 2x^2y - \sin y)dy = 0$$

اس مساوات کا تقابل $Mdx + Ndy = 0$ سے کرنے پر

$$M = x^4 - 2xy^2 + y^4$$
$$N = 4xy^3 - 2x^2y - \sin y$$

اور

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial \mathrm{y}} = -4xy + 4y^3,\ \ \frac{\partial N}{\partial x} = -4xy + 4y^3$$

اس لیے

$$\frac{\partial M}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

اس لیے دی گئی مساوات ٹھیک تفرقی مساوات ہے۔اس کا حل ہو گا

$$\int Mdx = \int (x^4 - 2xy^2 + y^4)dx$$
$$= \frac{x^5}{5} - \frac{2x^2y^2}{2} + xy^4$$
$$= \frac{x^5}{5} - x^2y^2 + xy^4$$

اور

$$\int Ndy = \int (4xy^3 - 2x^2y - \sin y)dy$$
$$= \frac{4xy^4}{4} - \frac{2x^2y^2}{2} + \cos y$$

$$= xy^4 - x^2y^2 + \cos y$$

چوں کہ $xy^4 - x^2y^2$ دونوں تکملات میں موجود ہے اس لیے اس کو چھوڑنے پر دی گئی مساوات کا حل ہو گا

$$\frac{x^5}{5} + xy^4 - x^2y^2 + \cos y = c$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $\frac{x^5}{5} + xy^4 - x^2y^2 + \cos y = c$ ہو گا۔

3.2.2 متکمل اجزاضربی(Integrating Factors)

1. مساواتیں جو ٹھیک نہ ہوں لیکن ٹھیک بنائی جاسکتی ہوں

(Non Exact Differential Equations which can be Reduced to Exact)

فرض کرو کہ

$$Mdx + Ndy = 0 \qquad \text{.....(1)}$$

ٹھیک مساوات نہیں ہے اور ایک تفاعل $f(x,y) \neq 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ اگر مساوات(1) کو $f(x,y)$ سے ضرب دیا جائے تو محصلہ مساوات $f(x,y)[Mdx + Ndy] = 0$ ٹھیک ہو جاتی ہے۔ ایسے تفاعل $f(x,y)$ کو دی ہوئی مساوات(1) کا متکمل اجزا ضربی کہتے ہیں۔

2. تنقیدی جائزہ سے معلوم کیے گیے متکمل اجزاضربی(Integrating Factors Determine by Inspection)

ذیل کے ٹھیک مشتقات(Exact Differentials) کو یاد رکھیں:

(i) $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$

(ii) $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2}$

(iii) $d\left(\log\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{xy}$

(iv) $d\left(\log\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{xy}$

(v) $d(xy) = xdy + ydx$

(vi) $d\left(\tan^{-1}\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$

(vii) $d\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$

(viii) $d\left(\frac{1}{xy}\right) = \frac{xdy + ydx}{x^2y^2}$

(ix) $d\left(\frac{x^2}{y^2}\right) = \frac{2xy^2dx - 2yx^2dy}{y^4}$

(x) $d\left(\frac{y^2}{x^2}\right) = \frac{2yx^2dy - 2xy^2dx}{x^4}$

مثال1۔ حل کرو: $xdy - ydx + 2x^3dx = 0$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$xdy - ydx + 2x^3dx = 0$$

یہ مساوات غیر ٹھیک(Non Exact) مساوات ہے، لیکن اس مساوات کو x^2 سے تقسیم دینے پر

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} + 2xdx = 0$$

$$\Rightarrow d\left(\frac{y}{x}\right) + 2xdx = 0$$

$$\Rightarrow \int \left[d\left(\frac{y}{x}\right) + 2xdx\right] = c$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} + 2\frac{x^2}{2} = c$$

$$\Rightarrow y + x^3 = cx$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $y + x^3 = cx$ ہو گا۔

مثال2۔ مساوات $(x^2 + y^2 + x)dx - (2x^2 + 2y^2 - y)dy = 0$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(x^2 + y^2 + x)dx - (2x^2 + 2y^2 - y)dy = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + y^2)dx - (2x^2 + 2y^2)dy + xdx + ydy = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + y^2)(dx - 2dy) + xdx + ydy = 0$$

$$\Rightarrow 2(dx - 2dy) + \frac{2xdx + 2ydy}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2dx - 4dy + d[\log(x^2 + y^2)] = 0$$

$$\Rightarrow \int [2dx - 4dy] + \int d[\log(x^2 + y^2)] = c$$

$$\Rightarrow 2x - 4y + \log(x^2 + y^2) = c$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $2x - 4y + \log(x^2 + y^2) = c$ ہو گا۔

3. غیر ٹھیک مساوات کو ٹھیک بنانے کے لیے چند قوانین اور متکمل اجزاضربی معلوم کرنے کے طریقے

(Some Rules to find Integrating Factors of Non Exact Equations to make it Exact)

پہلا قائدہ: اگر $Mdx + Ndy = 0$ غیر ٹھیک ہے، $Mx + Ny \neq 0$ اور مساوات متجانس (Homogeneous) ہو تب $\frac{1}{Mx+Ny}$ مساوات کا متکمل جزضربی ہو گا۔اس لیے ٹھیک مساوات درجہ ذیل ہو گی جس کا حل حاصل کیا جا سکتا ہے

$$\frac{1}{Mx + Ny}\left[Mdx + Ndy\right] = 0$$

دوسرا قائدہ: اگر مساوات $Mdx + Ndy = 0$ ٹھیک نہ ہو اور اس کی شکل $f(xy)ydx + g(xy)xdy = 0$ کی ہو، تب $\frac{1}{Mx-Ny}$ مساوات $Mdx + Ndy = 0$ کا متکمل جزضربی ہے اور اس طرح ٹھیک مساوات ہو گی

$$\frac{1}{Mx - Ny}\left[Mdx + Ndy\right] = 0, \left(Mx - Ny \neq 0\right)$$

تیسرا قائدہ: اگر مساوات $Mdx + Ndy = 0$ ٹھیک نہ ہو اور $f(x) = \frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right]$ ہو تب $e^{\int f(x)dx}$ مساوات $Mdx + Ndy = 0$ کا متکمل جزضربی ہے اور اس طرح ٹھیک مساوات درجہ ذیل ہو گی جس کا حل حاصل کیا جا سکتا ہے

$$e^{\int f(x)dx}\left[Mdx + Ndy\right] = 0$$

چوتھا قائدہ: اگر $g(y) = \frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}}\right]$ ہوتب $\mathrm{e}^{\int g(y)dy}$ مساوات $Mdx + Ndy = 0$ کا متکمل جز ضربی اور اس طرح ٹھیک مساوات درجہ ذیل ہو گی جس کا حل حاصل کیا جاسکتا ہے

$$\mathrm{e}^{\int g(y)dy}[Mdx + Ndy] = 0$$

پہلے قائدے کے چند مسائل:

مثال 1۔ حل کرو: $(x^2y - 2xy^2)dx - (x^3 - 3x^2y)dy = 0$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(x^2y - 2xy^2)dx - (x^3 - 3x^2y)dy = 0$$

اس مساوات کا تقابل $Mdx + Ndy = 0$ سے کرنے پر

$$M = x^2y - 2xy^2$$

اور

$$N = 3x^2y - x^3$$

یہاں M اور N متجانس ہیں۔اور

$$\begin{aligned} Mx + Ny &= (x^2y - 2xy^2)x + (3x^2y - x^3)y \\ &= x^3y - 2x^2y^2 + 3x^2y^2 - x^3y \\ &= x^2y^2 \neq 0 \end{aligned}$$

$\frac{1}{x^2y^2}$ دی گئی مساوات کا متکمل جز ضربی ہے۔اس لیے ٹھیک مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{1}{x^2y^2}[(x^2y - 2xy^2)dx - (x^3 - 3x^2y)dy] = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{y} - \frac{2}{x}\right)dx - \left(\frac{x}{y^2} - \frac{3}{y}\right)dy = 0$$

اس مساوات کا حل دی گئی مساوات کے حل کے برابر ہو گا۔اب اس مساوات کا تقابل $M'dx + N'dy = 0$ سے کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$M' = \frac{1}{y} - \frac{2}{x}, \qquad N' = \frac{3}{y} - \frac{x}{y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M'}{\partial \mathrm{y}} = -\frac{1}{y^2}, \qquad \frac{\partial N'}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}$$

اس لیے

$$\frac{\partial M'}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial N'}{\partial x}$$

اس لیے دی گئی مساوات ٹھیک تفرقی مساوات ہے۔اس کا حل درجہ ذیل طریقہ سے نکالا جاتا ہے

$$\int \left(\frac{1}{y} - \frac{2}{x}\right)dx + \int \left(\frac{3}{y}\right)dy = c$$

$$\frac{x}{y} - 2\log x + 3\log y = c$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $\frac{x}{y} + \log\left(\frac{y^3}{x^2}\right) = c$ ہو گا۔

مثال2۔ حل کرو: $x^2ydx-(x^3+y^3)dy=0$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$x^2ydx-(x^3+y^3)dy=0$$

اس مساوات کا تقابل $Mdx+Ndy=0$ سے کرنے پر

$$M=x^2y$$

اور $$N=-(x^3+y^3)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial \mathrm{y}}=x^2, \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=-3x^2$$

اس لیے

$$\frac{\partial M}{\partial \mathrm{y}}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

اس لیے دی گئی مساوات ٹھیک مساوات نہیں ہے۔اب

$$\begin{aligned} Mx+Ny &= x^3y-(x^3+y^3)y \\ &= x^3y-x^3y-y^4 \\ &= -y^4\neq 0 \end{aligned}$$

$\frac{1}{-y^4}$ دی گئی مساوات کا متکمل جزضربی ہے۔اس لیے ٹھیک مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{1}{-y^4}[x^2ydx-(x^3+y^3)dy]=0$$

$$\Rightarrow\left[\frac{x^2}{-y^3}dx+\left(\frac{x^3}{y^4}+\frac{1}{y}\right)dy\right]=0$$

اس کا حل درجہ ذیل طریقہ سے نکالا جاتا ہے جو کہ دی گئی مساوات کے حل کے برابر ہو گا

$$\int\left(\frac{x^2}{-y^3}\right)dx+\int\left(\frac{1}{y}\right)dy=c$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^3}{-3y^3}+\log y=c=\log k$$

$$\Rightarrow \quad \log\frac{y}{k}=\frac{x^3}{3y^3}$$

$$\Rightarrow \quad y=ke^{\frac{x^3}{3y^3}}$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $y=ke^{\frac{x^3}{3y^3}}$ ہو گا۔

مثال3۔ حل کرو: $xydx-(x^2+2y^2)dy=0$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$xydx-(x^2+2y^2)dy=0$$

اس مساوات کا تقابل $Mdx+Ndy=0$ سے کرنے پر

$$M=xy$$

$$N = -(x^2 + 2y^2)$$ اور

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = x, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -2x$$

اس لیے

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

اس لیے دی گئی مساوات ٹھیک مساوات نہیں ہے اور M، N متجانس ہیں۔ اس لیے

$$\begin{aligned} Mx + Ny &= x^2y - (x^2 + 2y^2)y \\ &= x^2y - x^2y - 2y^3 \\ &= -2y^3 \neq 0 \end{aligned}$$

$\frac{1}{-2y^3}$ دی گئی مساوات کا متکمل جز ضربی ہے۔ اس لیے ٹھیک مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{1}{-2y^3}[xydx - (x^2 + 2y^2)dy] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x}{2y^2}dx + \left(\frac{x^2}{2y^3} + \frac{1}{y}\right)dy = 0$$

اس مساوات کا حل دی گئی مساوات کے حل کے برابر ہو گا۔ اس لیے اس مساوات کا حل ہے

$$\int \left(\frac{-x}{2y^2}\right)dx + \int \left(\frac{1}{y}\right)dy = c$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2}{4y^2} + \log y = c = \log k$$

$$\Rightarrow \log \frac{y}{k} = \frac{x^2}{4y^2}$$

$$\Rightarrow \qquad y = ke^{\frac{x^2}{4y^2}}$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $y = ke^{\frac{x^2}{4y^2}}$ ہو گا۔

دوسرے قائدے کے چند مسائل:

مثال 1۔ مساوات $y(xy + 2x^2y^2)dx + x(xy - x^2y^2)dy = 0$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$y(xy + 2x^2y^2)dx + x(xy - x^2y^2)dy = 0 \qquad \text{.....(1)}$$

اس مساوات کا تقابل $Mdx + Ndy = 0$ سے کرنے پر

$$M = y(xy + 2x^2y^2)$$

$$N = x(xy - x^2y^2)$$ اور

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2xy + 6x^2y^2, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 3x^2y^2$$

اس لیے

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

اس لیے دی گئی مساوات ٹھیک مساوات نہیں ہے اور اس کی شکل $yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$ کی ہے اور

$$\begin{aligned} Mx - Ny &= y(xy + 2x^2y^2)x - x(xy - x^2y^2)y \\ &= x^2y^2 + 2x^3y^3 - x^2y^2 + x^3y^3 \\ &= 3x^3y^3 \neq 0 \end{aligned}$$

$\frac{1}{3x^3y^3}$ دی گئی مساوات کا متکمل جز ضربی ہے۔ اس لیے ٹھیک مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{1}{3x^3y^3}[y(xy + 2x^2y^2)dx + x(xy - x^2y^2)dy] = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{xy^2 + 2x^2y^3}{3x^3y^3}\right)dx + \left(\frac{x^2y - x^3y^2}{3x^3y^3}\right)dy = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3x^2y} + \frac{2}{3x}\right)dx + \left(\frac{1}{3xy^2} - \frac{1}{3y}\right)dy = 0$$

اس مساوات کا حل دی گئی مساوات کے حل کے برابر ہو گا۔ اس لیے اس مساوات کا حل ہے

$$\int \left(\frac{1}{3x^2y} + \frac{2}{3x}\right)dx - \int \left(\frac{1}{3y}\right)dy = c$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{3xy} + \frac{2}{3}\log x - \frac{1}{3}\log y = c$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{xy} + \log x^2 - \log y = 3c = k$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{x^2}{y}\right) - \frac{1}{xy} = k$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $\log\left(\frac{x^2}{y}\right) - \frac{1}{xy} = k$ ہو گا۔

مثال 2۔ مساوات $y(1 - xy)dx + x(1 + xy)dy = 0$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$y(1 - xy)dx + x(1 + xy)dy = 0 \qquad \text{.....(1)}$$

اس مساوات کا تقابل $Mdx + Ndy = 0$ سے کرنے پر

$$M = y(1 - xy), N = x(1 + xy)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 1 - 2xy, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 + 2xy$$

اس لیے

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

اس لیے دی گئی مساوات ٹھیک مساوات نہیں ہے اور اس کی شکل $yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$ ہے اور

$$\begin{aligned} Mx - Ny &= y(1 - xy)x - x(1 + xy)y \\ &= xy - x^2y^2 - xy - x^2y^2 \\ &= -2x^2y^2 \neq 0 \end{aligned}$$

$\frac{1}{-2x^2y^2}$ دی گئی مساوات کا متکمل جز ضربی ہے۔اس لیے ٹھیک مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\frac{1}{-2x^2y^2}[y(1-xy)dx + x(1+xy)dy] = 0$$
$$\Rightarrow \left(\frac{y-xy^2}{-2x^2y^2}\right)dx + \left(\frac{x+x^2y}{-2x^2y^2}\right)dy = 0$$
$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{2x^2y} + \frac{1}{2x}\right)dx + \left(-\frac{1}{2xy^2} - \frac{1}{2y}\right)dy = 0$$

اس مساوات کا حل دی گئی مساوات کے حل کے برابر ہو گا۔اس لیے اس مساوات کا حل ہے

$$\int \left(-\frac{1}{2x^2y} + \frac{1}{2x}\right)dx - \int \left(\frac{1}{2y}\right)dy = c$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2xy} + \frac{1}{2}\log x - \frac{1}{2}\log y = c$$
$$\Rightarrow \frac{1}{xy} + \log x - \log y = 2c = k$$
$$\Rightarrow \log\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{xy} = k$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $\log\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{xy} = k$ ہو گا۔

تیسرے اور چوتھے قائدے کے چند مسائل:-

مثال 1۔ مساوات $(y+y^2)dx + xydy = 0$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(y+y^2)dx + xydy = 0 \qquad \text{.....(1)}$$

اس مساوات کا تقابل $Mdx + Ndy = 0$ سے کرنے پر

$$M = y + y^2, \qquad N = xy$$
$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2y, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = y$$

اس لیے

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

اس لیے دی گئی مساوات ٹھیک مساوات نہیں ہے اور

$$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] = \frac{1}{y(1+y)}(y - 1 - 2y)$$
$$= -\frac{1}{y(1+y)}(1+y)$$
$$= -\frac{1}{y} = g(y)$$

اس لیے $e^{\int g(y)dy} = e^{\int\left(-\frac{1}{y}\right)dy} = e^{-\log y} = \frac{1}{y}$ دی گئی مساوات کا متکمل جز ضربی ہے۔اب مساوات (1) کو $\frac{1}{y}$ سے ضرب دینے پر

$$\frac{1}{y}[(y+y^2)dx+xydy]=0$$
$$\Rightarrow (1+y)dx+xdy=0$$

ٹھیک مساوات ہے۔

اس مساوات کا حل دی گئی مساوات کے حل کے برابر ہوگا۔اس لیے اس مساوات کا حل ہے

$$dx+ydx+xdy=0$$
$$\Rightarrow \quad dx+d(xy)=0$$
$$\Rightarrow \quad d(x+xy)=0$$
$$\Rightarrow \quad x+xy=c$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $x+xy=C$ ہوگا۔

مثال2۔ مساوات $y(x+y)dx+x(x+3y+2)dy=0$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$y(x+y+1)dx+x(x+3y+2)dy=0 \qquad \text{.....(1)}$$

اس مساوات کا تقابل $Mdx+Ndy=0$ سے کرنے پر

$$M=y(x+y+1), N=x(x+3y+2)$$
$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=x+2y+1, \frac{\partial N}{\partial x}=2x+3y+2$$

اس لیے

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

اس لیے دی گئی مساوات ٹھیک مساوات نہیں ہے اور

$$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right]=\frac{1}{y(x+y+1)}(2x+3y+2-x-2y-1)$$
$$=\frac{1}{y(x+y+1)}(x+y+1)$$
$$=\frac{1}{y}=g(y)$$

اس لیے $e^{\int g(y)dy}=e^{\int\left(\frac{1}{y}\right)dy}=e^{\log y}=y$ دی گئی مساوات کا متکمل جز ضربی ہے۔اب مساوات(1) کو y سے ضرب دینے پر

$$y[y(x+y+1)dx+x(x+3y+2)dy]=0$$
$$\Rightarrow y^2(x+y+1)dx+xy(x+3y+2)dy=0$$

ٹھیک مساوات ہے۔اس مساوات کا تقابل $M'dx+N'dy=0$ سے کرنے پر

$$M'=y^2(x+y+1)=y^2x+y^3+y^2,$$
$$N'=xy(x+3y+2)=x^2y+3xy^2+2xy$$

اس لیے مساوات کا حل ہے

$$\int M'dx+\int\left(N'\text{ کے ارکان، }x\text{ کے بغیر}\right)dy=c$$

$$\Rightarrow \int (y^2x + y^3 + y^2)dx + \int 0dy = c$$
$$\Rightarrow \frac{y^2x^2}{2} + xy^3 + xy^2 = c$$
$$\Rightarrow y^2x^2 + 2xy^3 + 2xy^2 = 2c = k$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $y^2x^2 + 2xy^3 + 2xy^2 = k$ ہو گا۔

مثال 3۔ مساوات $\left(y + \frac{y^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)dx + \frac{1}{4}(x + xy^2)dy = 0$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$\left(y + \frac{y^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)dx + \frac{1}{4}(x + xy^2)dy = 0 \qquad \text{.....(1)}$$

اس مساوات کا تقابل $Mdx + Ndy = 0$ سے کرنے پر

$$M = y + \frac{y^3}{3} + \frac{x^2}{2}, N = \frac{1}{4}(x + xy^2)$$
$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 1 + y^2, \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{4}(1 + y^2)$$

اس لیے

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

اس لیے دی گئی مساوات ٹھیک مساوات نہیں ہے اور

$$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{4}{x + xy^2}\left(1 + y^2 - \frac{1}{4}(1 + y^2)\right)$$
$$= \frac{4}{x(1 + y^2)} \times \frac{3}{4}(1 + y^2)$$
$$= \frac{3}{x} = f(x)$$

اس لیے $e^{\int f(x)dx} = e^{\int \left(\frac{3}{x}\right)dx} = e^{3\log x} = x^3$ دی گئی مساوات کا متکمل جز ضربی ہے۔اب مساوات (1) کو x^3 سے ضرب دینے پر

$$x^3\left[\left(y + \frac{y^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)dx + \frac{1}{4}(x + xy^2)dy\right] = 0$$
$$\Rightarrow \left(x^3y + \frac{x^3y^3}{3} + \frac{x^5}{2}\right)dx + \frac{1}{4}x^4(1 + y^2)dy = 0$$

اب یہ ایک ٹھیک تفرقی مساوات ہے۔اس مساوات کا تقابل $M'dx + N'dy = 0$ سے کرنے پر

$$M' = x^3y + \frac{x^3y^3}{3} + \frac{x^5}{2},$$
$$N' = \frac{1}{4}x^4(1 + y^2)$$

اس لیے مساوات کا حل ہے

$$\int M'dx + \int \left(N' \text{ کے ارکان، } x \text{ کے بغیر}\right)dy = C$$

$$\Rightarrow \int \left(x^3y + \frac{x^3y^3}{3} + \frac{x^5}{2}\right)dx + \int (0)dy = c$$

$$\Rightarrow \frac{yx^4}{4} + \frac{x^4y^3}{4\times 3} + \frac{x^6}{6\times 2} = c$$

$$\Rightarrow \quad 3yx^4 + x^4y^3 + x^6 = 12c = k$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $3yx^4 + x^4y^3 + x^6 = k$ ہے۔

مثال4۔ مساوات $(2y^3 + 2)dx + 3xy^2dy = 0$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(2y^3 + 2)dx + 3xy^2dy = 0 \qquad \text{.....(1)}$$

اس مساوات کا تقابل $Mdx + Ndy = 0$ سے کرنے پر

$$M = 2y^3 + 2, N = 3xy^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial \mathrm{y}} = 6y^2, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 3y^2$$

اس لیے

$$\frac{\partial M}{\partial \mathrm{y}} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

اس لیے دی گئی مساوات ٹھیک مساوات نہیں ہے اور

$$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial \mathrm{y}} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{3xy^2}(6y^2 - 3y^2)$$

$$= \frac{1}{3xy^2} \times 3y^2$$

$$= \frac{1}{x} = f(x)$$

اس لیے $e^{\int f(x)dx} = e^{\int \left(\frac{1}{x}\right)dx} = e^{\log x} = x$ دی گئی مساوات کا متکمل جز ضربی ہے۔اب مساوات(1) کو x سے ضرب دینے پر

$$x[(2y^3 + 2)dx + 3xy^2dy] = 0$$

$$\Rightarrow (2xy^3 + 2x)dx + 3x^2y^2dy = 0$$

اب یہ ایک ٹھیک تفرقی مساوات ہے۔اس مساوات کا تقابل $M'dx + N'dy = 0$ سے کرنے پر

$$M' = 2xy^3 + 2x,$$

$$N' = 3x^2y^2$$

اس لیے مساوات کا حل ہے

$$\int M'dx + \int \left(N' \text{ کے بغیر } x \text{ کے ارکان}\right)dy = c$$

$$\Rightarrow \int (2xy^3 + 2x)dx + \int (0)dy = c$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2y^3}{2} + 2 \times \frac{x^2}{2} = c$$

$$\Rightarrow x^2y^3 + x^2 = c$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $x^2y^3 + x^2 = c$ ہے۔

3.3 اکتسابی نتائج(Learning Outcomes)

1. مساوات $Mdx + Ndy = 0$ ٹھیک مساوات کہلاتی ہے اگر $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ ہو اور اس کا حل درجہ ذیل ہے

$$\int Mdx + \int \left(N - \text{کے ارقام } x\right) dy = C$$

2. اگر مساوات $Mdx + Ndy = 0$ ٹھیک مساوات نہ ہو، تب اس مساوات کو حل کرنے کے لیے چار قائدے دیے گئے ہیں جس کی مدد سے مساوات کو ٹھیک مساوات میں تبدیل کر کے اس کا حل معلوم کر سکتے ہیں۔

3.4 کلیدی الفاظ(Keywords)

ٹھیک مساوات، غیر ٹھیک مساوات، متجانس تفاعل، متکمل جز ضربی

3.5 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

3.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. مساوات $\frac{dy}{dx} + \frac{ax+hy+g}{hx+by+f} = 0$ ہے

A. متجانس B. متغیر جدا پزیر C. ٹھیک D. ان میں سے کوئی نہیں

2. ذیل میں سے کون ٹھیک مساوات ہے

A. $2xydx + (x^2 + y^2)dy = 0$ B. $(y \sin 2x)dx - (cos^2 x + y^2)dy = 0$

C. $(a^2 - 2xy - y^2)dx - (x - y)^2 dy = 0$ D. ان میں سے کوئی نہیں

3. اگر $Mdx + Ndy = 0$ متجانس مساوات ہے اور $Mx + Ny \neq 0$ تب اس مساوات کا I.F. ہے

A. $Mx + Ny$ B. $Mx - Ny$ C. $\frac{1}{Mx+Ny}$ D. $\frac{1}{Mx-Ny}$

3.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

ذیل کی مساواتوں کو حلکریں:

1. $y \sin 2x\, dx - (y^2 + cos^2 x)dy = 0$
2. $\left(1 + e^{x/y}\right)dx + e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$
3. $(x^2 - 2xy - y^2)dx - (x + y)^2 dy = 0$
4. $(r + \sin\theta - \cos\theta)dr + r(\sin\theta + \cos\theta)d\theta = 0$
5. $(xe^{xy} + 2y)\frac{dy}{dx} + ye^{xy} = 0$

3.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

ثابت کرو کہ ذیل کی مساواتیں ٹھیک مساواتیں ہیں۔ اگر ٹھیک ہیں تو ان کا حل دریافت کرو:

1. $(x^2 - 4xy - 2y^2)dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)dy = 0$
2. $(x^2 + y^2)(xdx + ydy) = a^2(xdy - ydx) = 0$
3. $[\cos x \tan y + \cos(x + y)]dx + [\sin x \, sec^2 y + \cos(x + y)]dy = 0$

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:

4. $y - x\frac{dy}{dx} = x + y\frac{dy}{dx}$
5. $(3xy^2 - y^3)dx - (2x^2y - xy^2)dy = 0$
6. $y^2dx + (x^2 - xy - y^2)dy = 0$

ذیل کی مساواتوں کا حل معلوم کرو:

7. $(x^3y^3 + x^2y^2 + xy + 1)ydx + (x^3y^3 - x^2y^2 - xy + 1)xdy = 0$
8. $(x^4y^4 + x^2y^2 + xy)ydx + (x^4y^4 - x^2y^2 + xy)xdy = 0$

ذیل کی مساواتوں کے حل معلوم کرو:

9. $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0$
10. $(x^3 - 2y^2)dx + 2xydy = 0$
11. $(2x^2y - 3y^2)dx + (2x^3 - 12xy + \log y)dy = 0$
12. $(3x^2y^4 + 2xy)dx + (2x^3y^3 - x^2)dy = 0$
13. مساوات $\left(xy^2 - e^{\frac{1}{x^3}}\right)dx - x^2ydy = 0$ کا حل دریافت کرو۔
14. مساوات $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$ کو حل کرو۔

جوابات

3.5.2 مختصر سوالات کے جوابات

1. $3y\cos 2x + 2y^3 = c$
2. $x + ye^{\left(\frac{x}{y}\right)} = c$
3. $x^3 - 3x^2y - 3y^2x - y^3 = c$
4. $r^2 + 2r(\sin\theta - \cos\theta)d\theta = c$
5. $e^{xy} + y^2 = c$

3.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $x^3 - 6x^2y - 6y^2x + y^3 = c$
2. $x^2 + y^2 + 2a^2\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) = 2c$
3. $\sin x\tan y + \sin(x+y) = c$
4. $\log\sqrt{x^2+y^2} - \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) = c$
5. $\log\left(\frac{x^3}{y^2}\right) + \frac{y}{x} = c$
6. $y^2(x-y) = c^2(x+y)$
7. $xy - \frac{1}{xy} - \log y^2 = 2c$
8. $\frac{x^2y^2}{2} - \frac{1}{xy} + \log\left(\frac{x}{y}\right) = c$
9. $(x^2+y^2)e^x = c$
10. $x^3 + y^2 = cx^2$
11. $6x^3y^3 - 27xy^4 + 3y^3\log y = c$
12. $x^3y^3 + x^2 = cy$
13. $2e^{\frac{1}{x^3}} - 3\frac{y^2}{x^2} = c$
14. $x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} = c$

اکائی4۔پہلے رتبےاور پہلے درجے کی خطی تفرقی مساواتیں

(Linear Differential Equations of First Order and First Degree)

اکائی کے اجزا

4.0 تمہید

4.1 مقاصد

4.2 پہلے رتبےاور پہلے درجے کی خطی تفرقی مساواتیں

4.2.1 تحویل پزیر خطی تفرقی مساواتیں

4.3 اکتسابی نتائج

4.4 کلیدی الفاظ

4.5 نمونہ امتحانی سوالات

4.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

4.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

4.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

4.0 تمہید(Introduction)

خطی مساواتیں(Linear Equations)بہت ہی خاص شکل کی مساواتیں ہیں اور متناظر حل کرنے کے طریقے مختلف تکنیکوں پر مشتمل ہیں۔ پہلے رتبے اور پہلے درجے کی خطی تفرقی مساوات کی شکل $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ ہے اور تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx}+Py=Qy^n$ کو برنولی مساوات(Bernoulli's Equation)کہتے ہیں۔ جس کو ہم خطی بنا کر حل کریں گے۔

4.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ مختلف قسم کی پہلے رتبے اور پہلے درجے کی خطی تفرقی مساواتوں سے واقف ہو جایں گے اور ان کا حل حاصل کر سکیں گے نیز برنولی مساوات کے حل کے طریقے سے بھی واقف ہو جایں گے۔ اس اکائی میں ہم خطی تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ کو ٹھیک مساوات کی مدد سے حل کر کے اس کے استعمال سے برنولی کی مساوات $\frac{dy}{dx}+Py=Qy^n$ کے حل کے طریقے کو بیان کریں گے۔

4.2 پہلے رتبے اور پہلے درجے کی خطی تفرقی مساواتیں

(Linear Differential Equations of First Order and First Degree)

پہلے رتبے اور پہلے درجے کی خطی تفرقی مساواتوں کی معیاری شکل

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q \qquad \text{.....(1)}$$

ہے، جہاں P اور Q کوئی دو مستقلات یا x کے مسلسل تفاعل ہیں۔

نظریہ: اگر P اور Q کسی وقفہ I پر x کے تفرق پزیر تفاعلات ہوں، تب مساوات(1) کا عام حل(General Solution)

$$ye^{\int Pdx}=\int\left[Qe^{\int Pdx}\right]dx+C$$

ہو گا۔

ثبوت: دی گئی مساوات ہے

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q \qquad \text{.....(1)}$$

جہاں P اور Q کوئی دو x کے تفاعلات ہیں۔ مساوات(1) کو $Mdx+Ndy=0$ کی شکل میں لکھنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$(Py-Q)dx+dy=0 \qquad \text{.....(2)}$$

یہاں $M=Py-Q$ اور $N=1$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=P, \quad \frac{\partial N}{\partial x}=0$$
$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

اس لیے مساوات(2)ٹھیک مساوات نہیں ہے، لیکن

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=1(P-0)=P=f(x)$$

اس لیے مساوات(2)کا متکمل جزو ضربی $I.F.=e^{\int Pdx}$(Integrating Factor)ہے۔ مساوات(1)کو $e^{\int Pdx}$ سے ضرب دینے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$e^{\int Pdx}\frac{dy}{dx}+Pe^{\int Pdx}\cdot y=Qe^{\int Pdx}$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(ye^{\int Pdx}\right)=Qe^{\int Pdx}$$
$$\Rightarrow \int \frac{d}{dx}\left(ye^{\int Pdx}\right)dx=\int\left[Qe^{\int Pdx}\right]dx$$
$$ye^{\int Pdx}=\int\left[Qe^{\int Pdx}\right]dx+C$$

اس طرح مساوات(1)کا حل $ye^{\int Pdx}=\int\left[Qe^{\int Pdx}\right]dx+C$ ہے، جہاں C ایک مستقل ہے۔

مثال1۔ حل کرو: $(x^2+1)\frac{dy}{dx}+4xy=\frac{1}{x^2+1}$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx}+4xy=\frac{1}{x^2+1}$$

اس مساوات کو $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ کی شکل میں لانے پر

$$\frac{dy}{dx}+\left(\frac{4x}{x^2+1}\right)y=\frac{1}{(x^2+1)^2} \quad \text{.....(1)}$$

یہاں $P=\frac{4x}{x^2+1}$ اور $Q=\frac{1}{(x^2+1)^2}$ ہیں۔

چوں کہ مساوات(1)ایک خطی تفرقی مساوات ہے اس لیے اس کا حل ہے

$$ye^{\int Pdx}=\int\left[Qe^{\int Pdx}\right]dx+c$$

جہاں c ایک مستقل ہے۔اس کے لیے ہم پہلے $e^{\int Pdx}$ حاصل کریں گے۔اس لیے

$$\int Pdx=\int\left(\frac{4x}{x^2+1}\right)dx$$
$$=2\int\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$$
$$=2\log(x^2+1)$$
$$=\log(x^2+1)^2$$

اس لیے

$$e^{\int Pdx}=e^{\log\left(x^2+1\right)^2}=(x^2+1)^2$$

اس طرح مساوات(1)کا حل ہو گا

$$y(x^2+1)^2 = \int \left[\frac{1}{(x^2+1)^2} \times (x^2+1)^2\right] dx + c$$
$$= \int 1\, dx + c$$
$$= x + c$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $y(x^2+1)^2 = x + c$ ہے۔

مثال2۔ حل کرو: $x\frac{dy}{dx} + 2y - x^2 \log x = 0$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$x\frac{dy}{dx} + 2y - x^2 \log x = 0$$

اس مساوات کو $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ کی شکل میں لانے پر

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2}{x}\right) y = x \log x \qquad \text{.....(1)}$$

یہاں $P = \frac{2}{x}$ اور $Q = x \log x$ ہیں۔

چوں کہ مساوات (1) ایک خطی تفرقی مساوات ہے اس لیے اس کا حل ہے

$$ye^{\int P dx} = \int \left[Qe^{\int P dx}\right] dx + c$$

جہاں c ایک مستقل ہے۔ اس کے لیے ہم پہلے $e^{\int P dx}$ حاصل کریں گے۔ اس لیے

$$\int P dx = \int \left(\frac{2}{x}\right) dx$$
$$= 2 \log x$$
$$= \log x^2$$

اس لیے

$$e^{\int P dx} = e^{\log x^2} = x^2$$

اس طرح مساوات (1) کا حل ہو گا

$$yx^2 = \int [x \log x] x^2\, dx + c$$
$$= \int x^3 \log x\, dx + c$$
$$= \log x \int x^3\, dx - \int \left[\frac{d}{dx}(\log x) \int x^3\, dx\right] dx + c$$
$$= \frac{x^4}{4} \log x - \int \left[\frac{1}{x} \times \frac{x^4}{4}\right] dx + c$$
$$= \frac{x^4}{4} \log x - \frac{1}{4} \int x^3\, dx + c$$
$$= \frac{x^4}{4} \log x - \frac{x^4}{16} + c$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $x^2y = \frac{x^4}{4}\log x - \frac{x^4}{16} + c$ ہے۔

تبصرہ(Remark): بعض اوقات خطی تفرقی مساوات کی شکل $\frac{dx}{dy} + P_1x = Q_1$ ہوتی ہے، جہاں P_1 اور Q_1 کوئی دو y کے تفاعلات ہیں۔

اب اس مساوات کا حل ذیل کی طرح ہو گا

$$xe^{\int P_1 dy} = \int \left[Q_1 e^{\int P_1 dy}\right] dy + C$$

مثال3۔ مساوات $(x + 2y^3)\frac{dy}{dx} = y$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(x + 2y^3)\frac{dy}{dx} = y$$

اس مساوات کو خطی تفرقی مساوات کی معیاری شکل میں بدلنے پر

$$\frac{dx}{dy} + \left(-\frac{1}{y}\right)x = 2y^2 \qquad \text{.....(1)}$$

یہاں $P_1 = -\frac{1}{y}$ اور $Q_1 = 2y^2$ ہیں۔

اس کا حل ہے

$$xe^{\int P_1 dy} = \int \left[Q_1 e^{\int P_1 dy}\right] dy + c$$

جہاں c ایک مستقل ہے۔اس کے لیے ہم پہلے $e^{\int P_1 dy}$ حاصل کریں گے۔اس لیے

$$\begin{aligned}\int P_1 dy &= \int \left(-\frac{1}{y}\right) dy \\ &= -\log y \\ &= \log\left(\frac{1}{y}\right)\end{aligned}$$

اس لیے

$$e^{\int P_1 dy} = e^{\log\left(\frac{1}{y}\right)} = \frac{1}{y}$$

اس طرح مساوات(1) کا حل ہو گا

$$\begin{aligned}x\frac{1}{y} &= \int \left[2y^2 \times \frac{1}{y}\right] dy + c \\ &= \int 2y\, dy + c \\ &= y^2 + c\end{aligned}$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $x = y^3 + cy$ ہے۔

مثال4۔ مساوات $(1 + y^2)dx = (\tan^{-1} y - x)dy$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(1+y^2)dx = (\tan^{-1} y - x)dy$$

اس مساوات کو خطی تفرقی مساوات کی معیاری شکل میں بدلنے پر

$$\frac{dx}{dy} + \left(\frac{1}{1+y^2}\right)x = \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2} \quad \text{.....(1)}$$

یہاں $P_1 = \frac{1}{1+y^2}$ اور $Q_1 = \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2}$ ہیں۔

اس کا حل ہے

$$xe^{\int P_1 dy} = \int \left[Q_1 e^{\int P_1 dy}\right] dy + c$$

جہاں c ایک مستقل ہے۔اس کے لیے ہم پہلے $e^{\int P_1 dy}$ حاصل کریں گے۔اس لیے

$$\int P_1 dy = \int \left(\frac{1}{1+y^2}\right) dy$$
$$= \tan^{-1} y$$

اس لیے

$$e^{\int P_1 dy} = e^{\tan^{-1} y}$$

اس طرح مساوات(1) کا حل ہو گا

$$xe^{\tan^{-1} y} = \int \left[\frac{\tan^{-1} y}{1+y^2} \times e^{\tan^{-1} y}\right] dy + c$$

فرض کرو کہ $z = \tan^{-1} y \Rightarrow dz = \frac{1}{1+y^2} dy$

$$xe^{\tan^{-1} y} = \int ze^z \, dz + c$$
$$= (z-1)e^z + C$$
$$= (\tan^{-1} y - 1)e^{\tan^{-1} y} + c$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $x = (\tan^{-1} y - 1) + Ce^{\tan^{-1} y}$ ہے۔

مثال5۔ منحنی کی مساوات معلوم کرو جس کی تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} + 2y \tan x = \sin x$ ہے، جب کہ دیا گیا ہے کہ $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$\frac{dy}{dx} + (2\tan x)y = \sin x \quad \text{.....(1)}$$

یہاں $P = 2\tan x$ اور $Q = \sin x$ ہیں۔

چوں کہ مساوات(1) ایک خطی تفرقی مساوات ہے اس لیے اس کا حل ہے

$$ye^{\int P dx} = \int \left[Qe^{\int P dx}\right] dx + c$$

جہاں c ایک مستقل ہے۔اس کے لیے ہم پہلے $e^{\int P dx}$ حاصل کریں گے۔اس لیے

$$\int P dx = \int (2\tan x) dx$$
$$= 2\log \sec x$$

$$= \log(\sec^2 x)$$

اس لیے

$$e^{\int P dx} = e^{\log(\sec^2 x)} = \sec^2 x$$

اس طرح مساوات(1)کا حل ہو گا

$$y\sec^2 x = \int [\sin x \cdot \sec^2 x]\, dx + c$$
$$= \int [\sec x \cdot \tan x]\, dx + c$$
$$= \sec x + c$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $y\sec^2 x = \sec x + c$ ہے۔

دیا گیا ہے $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ اس لیے

$$(0)\sec^2\frac{\pi}{3} = \sec\frac{\pi}{3} + c$$
$$0 = 2 + c \Rightarrow c = -2$$

اس طرح $y\sec^2 x = \sec x - 2$ اس مخنی کی مساوات ہے جس کی تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} + 2y\tan x = \sin x$ ہے۔

4.2.1 تحویل پزیر خطی تفرقی مساواتیں(Equations Reducible to Linear Differential Equations)

تعریف: وہ مساوات جو درجہ ذیل شکل میں ہو

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n \quad \text{.....(1)}$$

جہاں P اور Q حقیقی اعداد یا x کے تفاعل ہیں برنولی تفرقی مساوات کہلاتی ہے۔

اس کو حل کرنے کے لیے مساوات(1)کو خطی مساوات بنانے کے لیے y^{-n} سے مساوات(1)کو ضرب دیتے ہیں۔اس لیے

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + Py^{1-n} = Q \quad \text{.....(2)}$$

فرض کرو کہ $y^{1-n} = z$ تب

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$
$$y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-n)}\frac{dz}{dx}$$

مساوات(2)سے

$$\frac{1}{(1-n)}\frac{dz}{dx} + Pz = Q$$
$$\frac{dz}{dx} + (1-n)Pz = (1-n)Q$$
$$\frac{dz}{dx} + P'z = Q' \quad \text{.....(3)}$$

جہاں $Q' = (1-n)Q$ اور $P' = (1-n)P$ ہیں۔مساوات(3)خطی ہے جس کا حل حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال1۔ حل کرو: $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x}\right) y = x^2 y^6$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x}\right) y = x^2 y^6 \quad \text{.....(1)}$$

y^{-6} سے مساوات(1) کو ضرب دینے پر

$$y^{-6}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x}\right) y^{-5} = x^2 \quad \text{.....(2)}$$

فرض کرو کہ $z = y^{-5}$ تب

$$-5y^{-6}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$
$$y^{-6}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{-5}\frac{dz}{dx}$$

مساوات(2) سے

$$\frac{1}{-5}\frac{dz}{dx} + \left(\frac{1}{x}\right) z = x^2$$
$$\frac{dz}{dx} - \left(\frac{5}{x}\right) z = -5x^2 \quad \text{.....(3)}$$

یہاں $P = -\frac{5}{x}$ اور $Q = -5x^2$ ہیں۔

چوں کہ مساوات(3) ایک خطی تفرقی مساوات ہے اس لیے اس کا حل ہے

$$ze^{\int P dx} = \int \left[Qe^{\int P dx}\right] dx + c$$

جہاں c ایک مستقل ہے۔ اس لیے

$$\int P dx = -5\int \left(\frac{1}{x}\right) dx$$
$$= -5\log x$$
$$= \log x^{-5}$$

اس لیے

$$e^{\int P dx} = e^{\log x^{-5}} = x^{-5}$$

اس طرح مساوات(1) کا حل ہو گا

$$zx^{-5} = \int [-5x^2 \cdot x^{-5}]\, dx + c$$
$$= -5\int x^{-3}\, dx + c$$
$$= -5\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right) + c$$
$$zx^{-5} = \frac{5}{2x^2} + c$$
$$\Rightarrow \quad z = \frac{5}{2}x^3 + cx^5$$

$$\Rightarrow \qquad y^{-5} = \frac{5}{2}x^3 + cx^5$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $y^{-5} = \frac{5}{2}x^3 + cx^5$ ہے۔

مثال2۔ حل کرو: $x\frac{dy}{dx} + y = y^2 \log x$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$x\frac{dy}{dx} + y = y^2 \log x$$

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x}\right)y = \left(\frac{\log x}{x}\right)y^2 \qquad \text{.....(1)}$$

y^{-2} سے مساوات(1) کو ضرب دینے پر

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x}\right)y^{-1} = \left(\frac{\log x}{x}\right) \qquad \text{.....(2)}$$

فرض کرو کہ $y^{-1} = z$ تب

$$-y^{-2}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} = -\frac{dz}{dx}$$

مساوات(2) سے

$$-\frac{dz}{dx} + \left(\frac{1}{x}\right)z = x^2$$

$$\frac{dz}{dx} - \left(\frac{1}{x}\right)z = \left(-\frac{\log x}{x}\right) \qquad \text{.....(3)}$$

یہاں $P = -\frac{1}{x}$ اور $Q = -\frac{\log x}{x}$ ہیں۔

چوں کہ مساوات(3) ایک خطی تفرقی مساوات ہے اس لیے اس کا حل ہے

$$ze^{\int P dx} = \int \left[Qe^{\int P dx}\right] dx + c$$

جہاں c ایک مستقل ہے۔ اس لیے

$$\int P dx = -\int \left(\frac{1}{x}\right) dx$$
$$= -\log x$$
$$= \log x^{-1}$$

اس لیے

$$e^{\int P dx} = e^{\log x^{-1}} = \frac{1}{x}$$

اس طرح مساوات(1) کا حل ہو گا

$$z\frac{1}{x} = \int \left[-\frac{\log x}{x} \cdot \frac{1}{x}\right] dx + c$$

$$= -\int \frac{\log x}{x^2} dx + c$$

$$= -\log x \int \frac{1}{x^2} dx + \int \left[\frac{d}{dx}(\log x) \int \frac{1}{x^2} dx\right] dx + C$$

$$z\frac{1}{x} = \frac{1}{x}\log x + \int \left[\frac{d}{dx}(\log x) \int \frac{1}{x^2} dx\right] dx + c$$

$$\Rightarrow \frac{z}{x} = \frac{1}{x}\log x + \int \left[\frac{1}{x} \times \frac{-1}{x}\right] dx + c$$

$$\Rightarrow \frac{z}{x} = \frac{1}{x}\log x - \int \frac{1}{x^2} dx + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{xy} = \frac{1}{x}\log x + \frac{1}{x} + C$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $\frac{1}{y} = \log x + cx + 1$ ہے۔

مثال3۔ حل کرو: $\frac{dy}{dx} - xy = -e^{-x^2}y^3$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$\frac{dy}{dx} - xy = -e^{-x^2}y^3 \quad \text{.....(1)}$$

y^3 سے مساوات(1) کو تقسیم دینے پر

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} - xy^{-2} = -e^{-x^2} \quad \text{.....(2)}$$

فرض کرو کہ $z = y^{-2}$ تب

$$-2y^{-3}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{-2}\frac{dz}{dx}$$

مساوات(2) سے

$$-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx} - xz = -e^{-x^2}$$

$$\frac{dz}{dx} + 2xz = 2e^{-x^2} \quad \text{.....(3)}$$

یہاں $P = 2x$ اور $Q = 2e^{-x^2}$ ہیں۔

چوں کہ مساوات(3) ایک خطی تفرقی مساوات ہے اس لیے اس کا حل ہے

$$ze^{\int Pdx} = \int \left[Qe^{\int Pdx}\right] dx + c$$

جہاں c ایک مستقل ہے۔ اس لیے

$$\int Pdx = \int 2xdx$$

$$= x^2$$

اس لیے

$$e^{\int P dx} = e^{x^2}$$

اس طرح مساوات(1)کا حل ہو گا

$$ze^{x^2} = \int \left[2e^{-x^2} \cdot e^{x^2}\right] dx + c$$
$$= 2\int 1\, dx + c$$
$$= 2x + c$$
$$ze^{x^2} = 2x + c$$
$$\Rightarrow \quad z = e^{-x^2}(2x + c)$$
$$\Rightarrow \quad y^{-2} = e^{-x^2}(2x + c)$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $y^{-2} = e^{-x^2}(2x + c)$ ہے۔

مثال4۔ حل کرو: $\frac{dy}{dx} = 2y\tan x + y^2 tan^2 x$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$\frac{dy}{dx} = 2y\tan x + y^2 tan^2 x$$
$$\frac{dy}{dx} - (2\tan x)y = (tan^2 x)y^2 \qquad \text{.....(1)}$$

y^2 سے مساوات(1)کو تقسیم دینے پر

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} - (2\tan x)y^{-1} = tan^2 x \qquad \text{.....(2)}$$

فرض کرو کہ $z = y^{-1}$ –تب

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

مساوات(2)سے

$$\frac{dz}{dx} + (2\tan x)z = tan^2 x$$
$$\frac{dz}{dx} + 2xz = 2e^{-x^2} \qquad \text{.....(3)}$$

یہاں $P = 2\tan x$ اور $Q = tan^2 x$ ہیں۔

چوں کہ مساوات(3)ایک خطی تفرقی مساوات ہے اس لیے اس کا حل ہے

$$ze^{\int P dx} = \int \left[Qe^{\int P dx}\right] dx + c$$

جہاں c ایک مستقل ہے۔اس لیے

$$\int P dx = \int 2\tan x\, dx$$
$$= \log sec^2 x$$

اس لیے

$$e^{\int P dx} = e^{\log sec^2 x} = sec^2 x$$

اس طرح مساوات(1)کا حل ہو گا

$$z\,sec^2x = \int [tan^2x \cdot sec^2x]\,dx + c$$

اگر $\tan x = t$ ہو، تب $dt = sec^2x dx$ اس لیے

$$z\,sec^2x = \int t^2\,dt + c$$

$$= \frac{t^3}{3} + c$$

$$\Rightarrow \quad z\,sec^2x = \frac{tan^3x}{3} + c$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{sec^2x}{y} = \frac{tan^3x}{3} + c$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $\frac{sec^2x}{-y} = \frac{tan^3x}{3} + c$ ہے۔

مثال5۔ حل کرو: $x\frac{dy}{dx} + y\log y = xye^x$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$x\frac{dy}{dx} + y\log y = xye^x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x}\right)\log y = e^x \qquad \text{.....(1)}$$

فرض کرو کہ $u = \log y$ تب

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

مساوات(1)سے

$$\frac{du}{dx} + \left(\frac{1}{x}\right)u = e^x \qquad \text{.....(2)}$$

یہاں $P = \frac{1}{x}$ اور $Q = e^x$ ہیں۔

چوں کہ مساوات(2)ایک خطی تفرقی مساوات ہے اس لیے اس کا حل ہے

$$ue^{\int P dx} = \int \left[Qe^{\int P dx}\right] dx + c$$

جہاں c ایک مستقل ہے۔اس لیے

$$\int P dx = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \log x$$

اس لیے

$$e^{\int P dx} = e^{\log x} = x$$

اس طرح دی گئی مساوات کا حل ہو گا

$$ux = \int [xe^x]\, dx + c$$
$$= (x-1)e^x + c$$
$$\Rightarrow \quad x \log y = (x-1)e^x + c$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $x \log y = (x-1)e^x + c$ ہے۔

مثال6۔ مساوات $\frac{dy}{dx} + y \cot x = y^2 sin^2 x\, cos^2 x$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$\frac{dy}{dx} + y \cot x = y^2 sin^2 x\, cos^2 x$$
$$\Rightarrow \quad y^{-2} \frac{dy}{dx} + y^{-1} \cot x = sin^2 x\, cos^2 x \qquad \text{.....(1)}$$

فرض کرو کہ $u = y^{-1}$ تب

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} = -\frac{du}{dx}$$

مساوات(1) سے

$$-\frac{du}{dx} + u \cot x = sin^2 x\, cos^2 x$$
$$\frac{du}{dx} - u \cot x = -sin^2 x\, cos^2 x \qquad \text{.....(2)}$$

یہاں $P = -\cot x$ اور $Q = -sin^2 x\, cos^2 x$ ہیں۔

چوں کہ مساوات(2) ایک خطی تفرقی مساوات ہے اس لیے اس کا حل ہے

$$ue^{\int P dx} = \int \left[Qe^{\int P dx}\right] dx + c$$

جہاں c ایک مستقل ہے۔اس لیے

$$\int P dx = -\int \cot x\, dx$$
$$= -\log \sin x$$

اس لیے

$$e^{\int P dx} = e^{-\log \sin x} = \frac{1}{\sin x}$$

اس طرح دی گئی مساوات کا حل ہو گا

$$u \frac{1}{\sin x} = \int \left[-sin^2 x\, cos^2 x \left(\frac{1}{\sin x}\right)\right] dx + c$$
$$= \int [cos^2 x(-\sin x)]\, dx + c$$

اگر $\cos x = t$ ہو، تب $dt = -\sin x\, dx$ اس لیے

$$u\frac{1}{\sin x} = \int [t^2]\, dt + c$$

$$\frac{1}{y\sin x} = \frac{t^3}{3} + c$$

$$\frac{1}{y\sin x} = \frac{cos^3 x}{3} + c$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $\frac{1}{y\sin x} = \frac{cos^3 x}{3} + c$ ہے۔

مثال7۔ مساوات $\frac{dy}{dx} + x\sin 2y = x^3 cos^2 y$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$\frac{dy}{dx} + x\sin 2y = x^3 cos^2 y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{cos^2 y}\frac{dy}{dx} + x\left(\frac{2\sin y\cos y}{cos^2 y}\right) = x^3$$

$$\Rightarrow \quad sec^2 y\frac{dy}{dx} + \qquad \text{.....(1)}$$

$$2x(\tan y) = x^3$$

فرض کرو کہ $u = \tan y$ تب

$$sec^2 y\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

مساوات(1)سے

$$\frac{du}{dx} + 2xu = x^3 \qquad \text{.....(2)}$$

یہاں $P = 2x$ اور $Q = x^3$ ہیں۔

چوں کہ مساوات(2)ایک خطی تفرقی مساوات ہے اس لیے اس کا حل ہے

$$ue^{\int P dx} = \int \left[Qe^{\int P dx}\right] dx + c$$

جہاں c ایک مستقل ہے۔اس لیے

$$e^{\int P dx} = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$$

اس طرح دی گئی مساوات کا حل ہو گا

$$ue^{x^2} = \int \left[x^3\left(e^{x^2}\right)\right] dx + c$$

اگر $x^2 = t$ ہو،تب $dt = 2xdx$ اس لیے

$$ue^{x^2} = \frac{1}{2}\int [te^t]\, dt + c$$

$$\Rightarrow \quad e^{x^2}\tan y = \frac{1}{2}(t-1)e^t + c$$

$$\Rightarrow \quad 2e^{x^2}\tan y = (x^2-1)e^{x^2} + c$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $2e^{x^2}\tan y = (x^2-1)e^{x^2} + c$ ہے۔

4.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} + Py = Q$، جہاں P اور Q کوئی دو مستقلات یا x کے مسلسل تفاعلات ہیں، پہلے رتبے اور پہلے درجے کی خطی تفرقی مساوات کہلاتی ہے اور اس کا عام حل (General Solution) $ye^{\int Pdx} = \int\left[Qe^{\int Pdx}\right]dx + C$ ہوگا۔ نیز $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$ برنولی کی مساوات کہلاتی ہے جس کا حل اس مساوات کو خطی بنا کر حاصل کرتے ہیں۔

4.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

خطی تفرقی مساوات، مسلسل تفاعل، برنولی کی مساوات

4.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

4.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. مساوات $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$ کا I.F. ہے

A. x B. $\frac{1}{x}$ C. $\frac{-1}{x}$ D. کوئی نہیں

2. مساوات $x^2\frac{dy}{dx} + y = 1$ کا عام حل ہے

A. $y = 1 + ce^{\frac{1}{x}}$ B. $y = 1 + ce^x$ C. $y = ce^x$ D. کوئی نہیں

3. مساوات $(1-x^2)\frac{dy}{dx} + xy = cx$ کا I.F. ہے

A. $\frac{1}{x^2-1}$ B. $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ C. $\frac{1}{1-x^2}$ D. کوئی نہیں

4.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

حل کرو:

1. $(1+x)\frac{dy}{dx} - xy = 1 - x$
2. $(1-x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = x\sqrt{1-x^2}$
3. $x^2\frac{dy}{dx} + (x-2)y = x^2e^{\frac{-2}{x}}$
4. $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x + \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x^2}$
5. $x\log x\frac{dy}{dx} + y = 2\log x$
6. تفرقی مساوات $(1-x^2)\frac{dy}{dx} + xy = ax$ کو حل کرو۔

4.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. حل کرو: $\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x}y = \frac{1}{x^2}$، جبکہ دیا گیا ہے $x = 1$ کے لیے $y = 2$ ہو گا۔
2. حل کرو: $\frac{dy}{dx} = 1 - x(y-x) - x^3(y-x)^3$
3. مساوات $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x \cos x - \sin y \cos x}{\cos y}$ کا حل معلوم کرو۔
4. حل کرو: $\frac{dy}{dx} + xy = y^2 e^{\frac{x^2}{2}} \log x$
5. حل کرو: $\frac{dy}{dx} + y\cos x = y^n \sin 2x$

جاوابات:

4.5.1 معروضی سوالات کے جوابات

1. B 2. A 3. D

4.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $(1+x)y = x + ce^x$
2. $y = \sqrt{1-x^2} + c(1-x^2)$
3. $xye^{\frac{2}{x}} = \frac{x^2}{2} + c$
4. $\frac{y}{x^2} = \log x + \frac{1}{2}\cos\frac{1}{x^2} + c$
5. $y \log x = (\log x)^2 + c$
6. $y = ax + cx\sqrt{1-x^2}$

4.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالا تکے جوابات

1. $2x^3y = x^2 + 3$
2. $\frac{1}{(y-x)^2} + (1+x^2) = ce^{x^2}$
3. $e^{\sin x}\sin y = e^{\sin x}(\sin x - 1) + c$
4. $e^{\frac{-x^2}{2}} = xy(1 - \log x) + cy$
5. $(1-n)y^{1-n} = 2[(1-n)\sin x - 1] + c(1-n)e^{(n-1)\sin x}$

اکائی 5۔ پہلے رتبے اور اعلیٰ درجے کی تفرقی مساواتیں-I

(First Order and Higher Degree Differential Equations -I)

اکائی کے اجزا

5.0 تمہید

5.1 مقاصد

5.2 p کے لیے حل کی جانے والی مساوات

5.3 اکتسابی نتائج

5.4 کلیدی الفاظ

5.5 نمونہ امتحانی سوالات

5.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

5.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

5.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

5.0 تمہید(Introduction)

پہلے رتبے اور اعلی درجہ کی عام تفرقی مساوات درجہ ذیل شکل میں لکھی جاسکتی ہے

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + f_1(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + f_2(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \cdots + f_{n-1}(x,y)\frac{dy}{dx} + f_n(x,y) = 0$$

ان مساواتوں کا حل آسانی کے ساتھ محسوب ہو جایے، اس کے لیے ہم $\frac{dy}{dx}$ کو p سے ظاہر کریں گے۔

تمام تفرقی مساواتوں کو ان کی عام شکل میں حل کرنا آسان نہیں ہوتا ہے۔ ان میں سے کچھ مساواتوں کو p کے لیے حل کیا جاتا ہے اور پھر دی گئی مساوات کو دو یا زیادہ مساواتوں کی مدد سے تعبیر کرتے ہیں جن میں ہر ایک مساوات کا رتبہ ایک ہوتا ہے۔ ان سبھی مساواتوں کو حل کرنے کے بعد دی ہوئی تفرقی مساوات کا حل معلوم کر لیتے ہیں۔

5.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے کے بعد آپ ان تفرقی مساوات کی معلومات حاصل کریں گے جو p کے لیے آسانی کے ساتھ حل ہو سکتی ہیں اور پھر ان کا حل حاصل کرنا بھی سیکھ جائیں گے۔

5.2 p کے لیے حل کی جانے والی مساوات(Equations Solvable for p)

پہلے رتبے اور 'n' درجہ کی تفرقی مساوات کو درجہ ذیل شکل میں لکھا جاتا ہے۔

$$p^n + f_1(x,y)p^{n-1} + f_2(x,y)p^{n-2} + \cdots + f_{n-1}(x,y)p + f_n(x,y) = 0 \quad \text{.....(1)}$$

ہم اس مساوات کو p کے لیے حل کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ مساوات (1) سے درجہ ذیل طریقے سے اجزا ضربی معلوم کئے گیے ہیں۔

$$\big(p - \varphi_1(x,y)\big)\big(p - \varphi_2(x,y)\big)\cdots\big(p - \varphi_n(x,y)\big) = 0 \quad \text{..... (2)}$$

مساوات (2) کے ہر ایک جز ضربی (Factor) کو صفر کے برابر رکھتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ یہ سبھی مساواتیں پہلے رتبے اور پہلے درجے کی تفرقی مساواتیں ہیں جن کو ہم پہلے بلاک میں دیے گئے طریقوں سے حل کر سکتے ہیں۔ مان لیجیے کہ ان کا حل درجہ ذیل ہے:

$$F_1(x,y,c_1) = 0, F_2(x,y,c_2) = 0, \cdots, F_n(x,y,c_n) = 0 \quad \text{..... (3)}$$

اس لیے مساوات (1) کے حل کو درجہ ذیل طریقے سے لکھا جاسکتا ہے۔

$$F_1(x,y,c_1)\cdot F_2(x,y,c_2)\ \cdots\ F_n(x,y,c_n) = 0 \quad \text{..... (4)}$$

تبصرہ(Remark): چوں کہ مساوات (3) کے ذریعے سے حاصل کیا گیا ہر ایک خاص حل (Particular Solution) مساوات (4) کے ذریعے سے تمام c کی مناسب قیمت رکھ کر بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس لیے $c_1, c_2, \ldots, c_n$ کی جگہ ایک اختیاری مستقل c رکھنے پر حاصل حل پر کوئی فرق نہیں پڑے گا۔

اب ہم کچھ مثالوں کے ذریعے سے پورے طریقے کو سمجھیں گے۔

مثال1۔ مساوات $p^2 - 5p + 6 = 0$ کو حل کیجیے۔

حل۔ دی گئی مساوات کو درج ذیل شکل میں بدلنے پر

$$(p-3)(p-2) = 0$$

یہ اس وقت ممکن ہے جب کہ

$$p - 3 = 0 \text{ یا } p - 2 = 0$$

اب اگر $p - 3 = 0$ ہو تو

$$\frac{dy}{dx} = 3$$
$$dy = 3dx$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y = 3x + c_1$$

اسی طرح دوسرے جز $p - 2 = 0$ سے حاصل ہوتا ہے

$$dy = 2dx$$

اس مساوات کا تکمل کرنے پر

$$y = 2x + c_2$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل ہو گا

$$(y - 3x - c_1)(y - 2x - c_2) = 0$$

مثال2۔ مساوات $p^2 - 9p + 18 = 0$ کو حل کیجیے۔

حل۔ دی گئی مساوات کو درج ذیل شکل میں بدلنے پر

$$(p-6)(p-3) = 0$$

یہ اس وقت ممکن ہے جب کہ

$$p - 3 = 0 \text{ یا } p - 6 = 0$$

اب اگر $p - 3 = 0$ ہو تو

$$\frac{dy}{dx} = 3$$

یا

$$dy = 3dx$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y = 3x + c_1$$

اسی طرح دوسرے جز $p - 6 = 0$ سے ہمیں حاصل ہو گا

$$dy = 6dx$$

اس مساوات کا تکمل کرنے پر

$$y = 6x + c_2$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل ہو گا

$$(y - 3x - c_1)(y - 6x - c_2) = 0$$

مثال3۔ مساوات $xp^2 + (y - 1 - x^2)p - x(y - 1) = 0$ کو حل کیجیے۔

حل۔ دی گئی مساوات کو درج ذیل شکل میں بدلنے پر

$$(xp + y - 1)(p - x) = 0$$

یہ اس وقت ممکن ہے جب کہ

$$xp + y - 1 = 0 \text{ یا } p - x = 0$$

اب اگر $p - x = 0$ ہو تو

$$\frac{dy}{dx} = x$$

یا

$$dy = xdx$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2y - x^2 - c_1 = 0$$

اسی طرح دوسرے جز $xp + y - 1 = 0$ سے

$$\frac{dy}{y - 1} = -\frac{dx}{x}$$

اس مساوات کا تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$\log(y - 1) = -\log x + \log c_2$$
$$\Rightarrow \log(y - 1) + \log x = \log c_2$$
$$\Rightarrow \log\{x(y - 1)\} = \log c_2$$
$$\Rightarrow x(y - 1) = c_2$$
$$\Rightarrow xy - x - c_2 = 0$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل ہو گا

$$(2y - x^2 - c_1)(xy - x - c_2) = 0$$

مثال4۔ مساوات $4y^2p^2 + 2xy(3x + 1)p + 3x^3 = 0$ کو حل کیجیے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$4y^2p^2 + 2xy(3x + 1)p + 3x^3 = 0$$
$$\Rightarrow 4y^2p^2 + 2pxy + 6px^2y + 3x^3 = 0$$
$$\Rightarrow 2py(2py + x) + 3x^2(2py + x) = 0$$
$$\Rightarrow (2py + x)(2py + 3x^2) = 0$$

اب

$$2py + 3x^2 = 0 \text{ یا } 2py + x = 0$$

اب اگر $2py + 3x^2 = 0$ ہو تو

$$2y\frac{dy}{dx} + 3x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2ydy + 3x^2dx = 0$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y^2 + x^3 - c_1 = 0$$

اسی طرح دوسرے جز $2py + x = 0$ سے ہمیں حاصل ہو گا

$$2ydy + xdx = 0$$

اس مساوات کا تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$2y^2 + x^2 - c_2 = 0$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $(y^2 + x^3 - c_1)(2y^2 + x^2 - c_2) = 0$ ہے۔

مثال5۔ مساوات $x^2p^2 - xyp - y^2 = 0$ کو حل کیجیے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$x^2p^2 - xyp - y^2 = 0$$

$$\Rightarrow p = \frac{xy \pm \sqrt{x^2y^2 + 4x^2y^2}}{2x^2}$$

$$\Rightarrow p = \frac{xy \pm xy\sqrt{5}}{2x^2}$$

$$\Rightarrow p = \frac{xy\left(1 \pm \sqrt{5}\right)}{2x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\frac{\left(1 \pm \sqrt{5}\right)}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2\frac{dy}{y} = \left(1 \pm \sqrt{5}\right)\frac{dx}{x}$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2\log y = \left(1 \pm \sqrt{5}\right)\log x + \log c$$

$$\Rightarrow \log y^2 = \log cx^{(1\pm\sqrt{5})}$$

$$\Rightarrow y^2 = cx^{(1\pm\sqrt{5})}$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $y^2 = cx^{(1\pm\sqrt{5})}$ ہو گا۔

مثال6۔ مساوات $x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3xy\frac{dy}{dx} + 2y^2 = 0$ کو حل کیجیے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3xy\frac{dy}{dx} + 2y^2 = 0$$

دی گئی مساوات میں $p = \frac{dy}{dx}$ رکھنے پر درجہ ذیل شکل حاصل ہوتی ہے

$$x^2p^2 + 3xyp + 2y^2 = 0$$

یا

$$(xp + y)(xp + 2y) = 0$$

یہ اس وقت ممکن ہے جب کہ

$$xp + y = 0 \text{ یا } xp + 2y = 0$$

اب اگر $xp + 2y = 0$ ہو، تب

$$x\frac{dy}{dx} = -2y$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{y} + 2\frac{dx}{x} = 0$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\log y + 2\log x = \log c_1$$
$$\Rightarrow x^2y = c_1$$
$$\Rightarrow x^2y - c_1 = 0$$

اسی طرح دوسرے جز $xp + y = 0$ سے

$$x\frac{dy}{dx} = y$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0$$

اس مساوات کا تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$\log y + \log x = \log c_2$$
$$\Rightarrow \log xy = \log c_2$$
$$\Rightarrow xy = c_2$$
$$\Rightarrow xy - c_2 = 0$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $(x^2y - c_1)(xy - c_2) = 0$ ہے۔

مثال 7۔ مساوات $p^2 + xp + py + xy = 0$ کو حل کیجیے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$p^2 + xp + py + xy = 0$$
$$\Rightarrow (p + x)(p + y) = 0$$

یہ تبھی ممکن ہے جب کہ

$$p + x = 0 \text{ یا } p + y = 0$$

اب اگر $p + x = 0$ ہو، تب

$$\frac{dy}{dx} + x = 0$$
$$\Rightarrow dy + xdx = 0$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2y + x^2 - c_1 = 0$$

اسی طرح دوسرے جز $p + y = 0$ سے

$$\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} + dx = 0$$

اس کا تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\log y + x - c_2 = 0$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $(2y + x^2 - c_1)(\log y + x - c_2) = 0$ ہے۔

مثال8۔ مساوات $p^2 + 2xp - 3x^2 = 0$ کو حل کیجیے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$p^2 + 2xp - 3x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (p - x)(p + 3x) = 0$$

اب

$$p - x = 0 \text{ یا } p + 3x = 0$$

اگر $p - x = 0$ ہو، تب

$$\frac{dy}{dx} - x = 0$$

$$\Rightarrow \quad dy - xdx = 0$$

تکمل کرنے پر

$$2y - x^2 - c_1 = 0$$

اسی طرح دوسرے جز $p + 3x = 0$ سے

$$\frac{dy}{dx} + 3x = 0$$

$$\Rightarrow \quad dy + 3xdx = 0$$

اس مساوات کا تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2y + 3x^2 - c_2 = 0$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $(2y - x^2 - c_1)(2y + 3x^2 - c_2) = 0$ ہے۔

مثال9۔ مساوات $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x - y)\frac{dy}{dx} - x = 0$ کو حل کیجیے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x - y)\frac{dy}{dx} - x = 0$$

دی گئی مساوات میں $\frac{dy}{dx} = p$ رکھنے پر درجہ ذیل شکل حاصل ہوتی ہے

$$yp^2 + (x - y)p - x = 0$$

یا

$$(yp + x)(p - 1) = 0$$

یہ اس وقت ممکن ہے جب کہ

$$yp + x = 0 \text{ یا } p - 1 = 0$$

اب اگر $yp + x = 0$ ہو تو

$$y\frac{dy}{dx} + x = 0$$

$$\Rightarrow \quad ydy + xdx = 0$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y^2 + x^2 = c_1$$

اسی طرح دوسرے جز $p - 1 = 0$ سے

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\Rightarrow \quad dy = dx$$

اس کا تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y = x + c_2$$

$$\Rightarrow \quad x - y + c_2 = 0$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $(y^2 + x^2 - c_1)(x - y + c_2) = 0$ ہوگا۔

مثال 10۔ مساوات $xyp^2 + (x + y)p + 1 = 0$ کو حل کیجیے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$xyp^2 + (x + y)p + 1 = 0$$

یا

$$(xp + 1)(yp + 1) = 0$$

یہ اس وقت ممکن ہے جب کہ

$$xp + 1 = 0 \text{ یا } yp + 1 = 0$$

اب اگر

$$xp + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad dy + \frac{dx}{x} = 0$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y + \log x - c_1 = 0$$

اسی طرح دوسرے جز $yp + 1 = 0$ سے

$$y\frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad ydy + dx = 0$$

اس کا تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y^2 + 2x - c_2 = 0$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل ہو گا

$$(y + \log x - c_1)(y^2 + 2x - c_2) = 0$$

مثال 11۔ مساوات $p^2 - 2xp - 8x^2 = 0$ کو حل کیجیے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$p^2 - 2xp - 8x^2 = 0$$

یا

$$(p - 4x)(p + 2x) = 0$$

یہ اس وقت ممکن ہے جب کہ

$$p - 4x = 0 \text{ یا } p + 2x = 0$$

اب اگر $p + 2x = 0$ ہو تو

$$\frac{dy}{dx} + 2x = 0$$

$$\Rightarrow \quad dy + 2xdx = 0$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y + x^2 - c_1 = 0$$

اسی طرح دوسرے جز $p - 4x = 0$ سے

$$\frac{dy}{dx} - 4x = 0$$

$$\Rightarrow \quad dy - 4xdx = 0$$

اس کا تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y - 2x^2 - c_2 = 0$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $(y + x^2 - c_1)(y - 2x^2 - c_2) = 0$ ہو گا

مثال 12۔ مساوات $x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\frac{dy}{dx} - x^2y^2 - x^4 + y^2 = 0$ کو حل کیجیے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\frac{dy}{dx} - x^2y^2 - x^4 + y^2 = 0$$

اس مساوات میں $p = \frac{dy}{dx}$ رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x^2p^2 - 2xyp - x^2y^2 - x^4 + y^2 = 0$$

$$\Rightarrow p = \frac{2xy \pm \sqrt{4x^2y^2 - 4x^2(-x^2y^2 - x^4 + y^2)}}{2x^2}$$

$$= \frac{2xy \pm \sqrt{4x^2\{y^2 - (-x^2y^2 - x^4 + y^2)\}}}{2x^2}$$

$$= \frac{2xy \pm \sqrt{4x^2(x^2y^2 + x^4)}}{2x^2}$$

$$= \frac{2xy \pm 2x^2\sqrt{x^2 + y^2}}{2x^2}$$

$$\Rightarrow p = \frac{y \pm x\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y \pm x\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

یہ ایکمتجانس تفرقی مساوات (Homogenous Differential Equation)ہے۔ اس لیے یہاں $y = vx$اور$\frac{dy}{dx} = v +$ xرکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $\frac{dv}{dx}$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{vx \pm x\sqrt{x^2 + v^2x^2}}{x}$$

$$\Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = v \pm x\sqrt{1 + v^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = \pm\sqrt{1 + v^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = \pm dx$$

اب اگر

$$\frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = dx$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$sinh^{-1} v = x + c_1$$

$v = \frac{y}{x}$رکھنے پر

$$sinh^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = x + c_1$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \sinh(x + c_1)$$

$$\Rightarrow y - x\sinh(x + c_1) = 0$$

اوراسی طرح اگر

$$\frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = -dx$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا

$$sinh^{-1} v + c_2 = -x$$

$v = \frac{y}{x}$ رکھنے پر

$$sinh^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = -(x + c_2)$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \sinh\{-(x + c_2)\} = -\sinh(x + c_2)$$

$$\Rightarrow \quad y + x\sinh(x + c_2) = 0$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل ہے

$$[y - x\sinh(x + c_1)][y + x\sinh(x + c_2)] = 0$$

مثال 13۔ مساوات $p^2 + (2y\cot x)p - y^2 = 0$ کو حل کیجیے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$p^2 + (2y\cot x)p - y^2 = 0$$

$$\Rightarrow p = \frac{-2y\cot x \pm \sqrt{4y^2cot^2x + 4y^2}}{2}$$

$$\Rightarrow p = -y\cot x \pm y\sqrt{cot^2x + 1}$$

$$\Rightarrow p = -y\cot x \pm y\,\mathrm{cosec}\,x$$

یا

$$p + y\cot x = \pm y\,\mathrm{cosec}\,x$$

اس لیے

$$(p + y\cot x - y\,\mathrm{cosec}\,x)(p + y\cot x + y\,\mathrm{cosec}\,x) = 0$$

یہ اس وقت ممکن ہے جب کہ

$$p + y\cot x - y\,\mathrm{cosec}\,x = 0 \text{ یا } p + y\cot x + y\,\mathrm{cosec}\,x = 0$$

اب اگر $p + y\cot x - y\,\mathrm{cosec}\,x = 0$ ہو تو

$$\frac{dy}{dx} + y(\cot x - \mathrm{cosec}\,x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} + (\cot x - \mathrm{cosec}\,x)dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = -(\cot x - \mathrm{cosec}\,x)dx$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \left(\frac{1 - \cos x}{\sin x}\right)dx$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \tan\frac{x}{2}dx$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\log y = 2\log\sec\left(\frac{x}{2}\right) + \log c_1$$

$$\Rightarrow \log y = \log c_1\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y = c_1 \sec^2\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$\Rightarrow y - c_1 \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

اسی طرح دوسرے جز $p + y\cot x + y\,\mathrm{cosec}\,x = 0$ سے

$$\frac{dy}{dx} + y(\cot x + \mathrm{cosec}\,x) = 0$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = -\cot\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\log y = -2\log\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \log c_2$$
$$= \log \mathrm{cosec}^2\left(\frac{x}{2}\right) + \log c_2$$
$$\Rightarrow \log y = \log c_2\,\mathrm{cosec}^2\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$\Rightarrow y = c_2\,\mathrm{cosec}^2\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$\Rightarrow y - c_2\,\mathrm{cosec}^2\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $\left(y - c_1\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(y - c_2\,\mathrm{cosec}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 0$ ہو گا۔

مثال 14۔ مساوات $x^2p^2 - 2xyp + 2y^2 - x^2 = 0$ کو حل کیجیے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$x^2p^2 - 2xyp + 2y^2 - x^2 = 0$$
$$\Rightarrow p = \frac{2xy \pm \sqrt{4x^2y^2 - 4x^2(2y^2 - x^2)}}{2x^2}$$
$$= \frac{2xy \pm 2x\sqrt{y^2 - 2y^2 + x^2}}{2x^2}$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y \pm \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$$

جو کہ ایک متجانس تفرقی مساوات ہے۔ اس طرح کی مساوات کو حل کرنے کے لیے $y = vx$ اور $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ رکھتے ہیں

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{vx \pm \sqrt{x^2 - v^2x^2}}{x}$$
$$\Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = v \pm \sqrt{1 - v^2}$$
$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \pm\sqrt{1 - v^2}$$
$$\Rightarrow \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} = \pm\frac{dx}{x}$$

اب اگر

$$\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{dx}{x}$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$sin^{-1} v = \log x - \log c_1$$
$$\Rightarrow sin^{-1} v = \log \frac{x}{c_1}$$
$$\Rightarrow \qquad x = c_1 e^{sin^{-1} v}$$

$v = \frac{y}{x}$ رکھنے پر

$$x = c_1 e^{sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$$

جو کہ دی گئی مساوات کا حل ہے۔

مثال15۔ مساوات $p^2 + yp - x(x+y) = 0$ کو حل کیجیے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$p^2 + yp - x(x+y) = 0$$
$$\Rightarrow (p^2 - x^2) + y(p-x) = 0$$
$$\Rightarrow (p-x)(p+x) + y(p-x) = 0$$
$$\Rightarrow (p-x)(p+x+y) = 0$$

اب

$$p - x = 0 \text{ یا } p + x + y = 0$$

اگر $p - x = 0$ ہو تو

$$\frac{dy}{dx} - x = 0$$
$$\Rightarrow \qquad dy - xdx = 0$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2y - x^2 - c_1 = 0$$

اسی طرح دوسرے جز $p + x + y = 0$ سے

$$\frac{dy}{dx} + y = -x$$

جو کہ ایک خطی تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ ہے۔اس لیے اب ہم اس مساوات کے لیے متکمل جز ضربی(Integrating Factor) کو درجہ ذیل طریقہ سے حاصل کریں گے

$$I.F. = e^{\int dx} = e^x$$

اب خطی تفرقی مساوات کا حل ہو گا

$$y(I.F.) = \int (I.F.)Q\, dx + c_2$$

اس لیے

$$ye^x = \int e^x(-x)\,dx + c_2$$

$$\Rightarrow \quad ye^x = e^x(1-x) + c_2$$

$$\Rightarrow \quad y - (1-x) - c_2e^{-x} = 0$$

اس لیے دی گئی مساوات کا حل $(2y - x^2 - c_1)(y + x - 1 + c_2e^{-x}) = 0$ ہے۔

5.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے ان تفرقی مساوات کے بارے میں پڑھا جو p کے لیے آسانی سے حل کی جاسکتی ہیں۔ اس کے بعد ہم نے ان مساوات کو حل کرنے کا طریقہ سیکھا۔

5.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

رتبہ، درجہ، متجانس تفرقی مساوات، خطی تفرقی مساوات، جزضربی

5.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

5.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. مساوات $p^2 - 5p + 6 = 0$ کو جزضربی میں تحویل کریے۔
2. مساوات $p^2 - 3p + 2 = 0$ کو جزضربی میں تحویل کریے۔
3. مساوات $p^3 - 6p^2 + 11p - 6 = 0$ کو جزضربی میں تحویل کریے۔
4. مساوات $2p^2 + p - 1 = 0$ کو جزضربی میں تحویل کریے۔

5.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. مساوات $p^2 + (2y\cot x)p - y^2 = 0$ کو حل کریے۔
2. مساوات $x^2p^3 + yp^2 + x^2y^2p^2 + y^3p = 0$ کا حل معلوم کریے۔
3. مساوات $x + yp^2 = p + xyp$ کا حل محسوب کریے۔
4. مساوات $xp^2 + (y - x)p - y = 0$ کا حل معلوم کریے۔
5. مساوات $x^2p^2 + xyp - 6y^2 = 0$ کو حل کریے۔

5.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. مساوات $p^2 + (2\cosh x)p + 1 = 0$ کو حل کریے۔
2. مساوات $xyp^2 - (x^2 - y^2)p - xy = 0$ کو حل کریے۔

3. مساوات $p^3 + 2xp^2 - y^2p^2 - 2xy^2p = 0$ کو حل کریے۔

4. مساوات $p^2 + (x - e^x)p - xe^x = 0$ کو حل کریے۔

5. مساوات $xyp^2 + (x^2 + xy + y^2)p + x^2 + xy = 0$ کو حل کریے۔

جوابات

5.5.1 معروضی سوالا تکے جوابات

1. $(p - 2)(p - 3) = 0$
2. $(p - 1)(p - 2) = 0$
3. $(p - 1)(p - 2)(p - 3) = 0$
4. $(p + 1)\left(p - \frac{1}{2}\right) = 0$

5.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالا تکے جوابات

1. $y(1 \pm \cos x) = C$
2. $(y - c)(xy + cy)\left(y - ce^{\frac{1}{x}}\right) = 0$
3. $(2y - x^2 - c)(2x - y^2 - c) = 0$
4. $(y - x + c)(xy + c) = 0$
5. $(y - cx^2)(yx^3 - c) = 0$

5.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالا تکے جوابات

1. $(y - e^x - c)(y + e^{-x} - c) = 0$
2. $(y^2 - x^2 - c)(xy - c) = 0$
3. $(y - c)(y + x^2 - c)(xy + cy + 1) = 0$
4. $(y - e^x + c)\left(y + \frac{x^2}{2} + c\right) = 0$
5. $(2xy + x^2 - c)(x^2 + y^2 - c) = 0$

اکائی6۔پہلے رتبے اور اعلی درجے کی تفرقی مساواتیں-II

(First Order and Higher Degree Differential Equations-II)

اکائی کے اجزا

6.0 تمہید

6.1 مقاصد

6.2 x کے لیے حل کیجانے والی تفرقی مساوات

6.3 y کے لیے حل کیجانے والی تفرقی مساوات

6.4 مساوات جن میں x موجود نہ ہو

6.5 مساوات جن میں y موجود نہ ہو

6.6 مساوات جو x اور y میں متجانس ہو

6.7 اکتسابی نتائج

6.8 کلیدی الفاظ

6.9 نمونہ امتحانی سوالات

6.9.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

6.9.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

6.9.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

6.0 تمہید(Introduction)

اس اکائی میں ہم پہلے رتبے اور اعلی درجہ کی تفرقی مساوات کے بارے میں پڑھیں گے۔ان مساوات کو درجہ ذیل حصوں میں تقسیم کرتے ہیں:

- x کے لیے حل کیجانے والی تفرقی مساوات
- y کے لیے حل کیجانے والی تفرقی مساوات
- مساوات جن میں x موجود نہ ہو
- مساوات جن میں y موجود نہ ہو
- مساوات جو x اور y میں متجانس ہو

6.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کو پڑھنے کے بعد طالب علم اس قابل ہو جائیں گے کہ :

- x کے لیے حل کیجانے والی تفرقی مساوات کو حل کر سکیں
- y کے لیے حل کیجانے والی تفرقی مساوات کو حل کر سکیں
- ان مساوات کو جن میں x موجود نہ ہو، حل کر سکیں
- ان مساوات کو جن میں y موجود نہ ہو، حل کر سکیں
- مساوات جو x اور y میں متجانس ہو، کو حل کر سکیں

6.2 x کے لیے حل کیجانے والی تفرقی مساوات(Differential Equations Solvable for x)

اگر کوئی مساوات x کے لیے حل ہو سکتی ہو،تب اسے درجہ ذیل شکل میں تبدیل کیا جا سکتا ہے

$$x = f(y,p) \qquad \text{.....(1)}$$

اس مساوات کو بہ لحاظ y تفرق کرنے پر

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy} = \varphi\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right)$$

یہ مساوات دو متغیروں p اور y میں ایک تفرقی مساوات ہے۔فرض کرو کہ اس مساوات کا ممکنہ حل

$$F(y,p,c) = 0 \qquad \text{.....(2)}$$

ہے۔

مساوات(1)اور(2)سے p کو ہٹا کر ضروری حل حاصل کیا جا سکتا ہے۔

نوٹ:

1. یہ طریقہ ان تفرقی مساواتوں کے لیے ہی مفید ہے جن میں y پوری طرح سے موجود نہ ہو۔
2. اگر مساوات (1) اور (2) سے p کو آسانی کے ساتھ ہٹانا ممکن نہ ہو تب ضروری حل x اور y کو p کی رکن میں ظاہر کر کے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

اب کچھ مثالوں کے ذریعہ سے ہم اوپر دیے گیے طریقہ کو سمجھیں گے۔

مثال 1۔ مساوات $x = y + p^2$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$x = y + p^2$$

اس مساوات کو بلحاظ y تفرق کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$\frac{1}{p} = 1 + 2p\frac{dp}{dy}$$

$$\Rightarrow \quad dy = \frac{2p^2}{1-p}dp$$

$$\Rightarrow \quad dy = -2\left(1 + p + \frac{1}{p-1}\right)dp$$

اس مساوات کو دونوں طرف تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y = -2\left[p + \frac{p^2}{2} + \log(p-1)\right] + c \qquad .....(1)$$

جہاں c ایک تکملی مستقل ہے۔

y کی اس قیمت کو دی گئی مساوات میں رکھنے پر

$$x = -2\left[p + \frac{p^2}{2} + \log(p-1)\right] + c + p^2 \qquad .....(2)$$

مساوات (1) اور (2) دونوں سے ضروری حل حاصل ہوتا ہے۔

مثال 2۔ مساوات $x = py + ap^2$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$x = py + ap^2$$

اس مساوات کو بلحاظ y تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{\mathrm{p}} = p + y\frac{dp}{dy} + 2ap\frac{dp}{dy}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\mathrm{p}} - p = (y + 2ap)\frac{dp}{dy}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1-p^2}{\mathrm{p}} = (y + 2ap)\frac{dp}{dy}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{p}{1-p^2} = \left(\frac{1}{y+2ap}\right)\frac{dy}{dp}$$

یا

$$\frac{dy}{dp} = \frac{py+2ap^2}{1-p^2} = \left(\frac{p}{1-p^2}\right)\mathrm{y} + \frac{2ap^2}{1-p^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dp} - \left(\frac{p}{1-p^2}\right)\mathrm{y} = \frac{2ap^2}{1-p^2}$$

جو کہ ایک خطی تفرقی مساوات ہے۔اس لیے

$$I.F. = e^{-\int\left(\frac{p}{1-p^2}\right)dp}$$

اب پہلے ہم $\int\left(\frac{p}{1-p^2}\right)dp$ کی قیمت حاصل کریں گے۔

مان لو کہ $1-p^2 = m$ تب $-2pdp = dm$ اس لیے

$$\int\left(\frac{p}{1-p^2}\right)dp = -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\mathrm{m}}\right)dm$$
$$= -\frac{1}{2}\log m$$

اس لیے

$$\int\left(\frac{p}{1-p^2}\right)dp = -\log(1-p^2)^{\frac{1}{2}}$$

اب

$$I.F. = e^{-\int\left(\frac{p}{1-p^2}\right)dp} = e^{\log(1-p^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow \qquad I.F. = (1-p^2)^{\frac{1}{2}}$$

اس لیے مندرجہ بالا حاصل کردہ خطی تفرقی مساوات کا حل ہو گا

$$y(1-p^2)^{\frac{1}{2}} = \int(1-p^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2ap^2}{1-p^2}\right)dp + c$$

$$\Rightarrow \quad y(1-p^2)^{\frac{1}{2}} = \int\frac{2ap^2}{(1-p^2)^{\frac{1}{2}}}dp + c$$
$$= 2a\int\frac{1-(1-p^2)}{(1-p^2)^{\frac{1}{2}}}dp + c$$
$$= 2a\int\left[\frac{1}{\sqrt{1-p^2}} - \frac{(1-p^2)}{\sqrt{1-p^2}}\right]dp + c$$
$$= 2a\int\left[\frac{1}{\sqrt{1-p^2}} - \sqrt{1-p^2}\right]dp + c$$
$$= 2a\left[\sin^{-1}\mathrm{p} - \left\{\frac{p}{2}\sqrt{1-p^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\mathrm{p}\right\}\right] + c$$

جہاں c ایک تکملی مستقل ہے۔

$$\Rightarrow \quad y\sqrt{1-p^2} = a\sin^{-1} p - ap\sqrt{1-p^2} + c$$

اس لیے

$$y = \frac{a\sin^{-1} p + c}{\sqrt{1-p^2}} - ap \qquad .....(1)$$

دی گئی مساوات میں y کی یہ قیمت رکھنے پر

$$x = p\left[\frac{a\sin^{-1} p + c}{\sqrt{1-p^2}} - ap\right] + ap^2$$

$$\Rightarrow \qquad x = \frac{p}{\sqrt{1-p^2}}(a\sin^{-1} p + c) \qquad .....(2)$$

جہاں c ایک تکملی مستقل ہے۔

مساوات(1)اور(2)سے دی گئی مساوات کا عام حل حاصل ہو گا۔

6.3 y کے لیے حل کی جانے والی تفرقی مساوات(Differential Equations Solvable for y)

اگر کوئی تفرقی مساوات y کے لیے آسانی کے ساتھ حل کی جاسکتی ہو، تب اسے درجہ ذیل شکل میں تبدیل کیا جاسکتا ہے

$$y = f(x,p) \qquad .....(1)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} = \varphi\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right)$$

یہ مساوات دو متغیروں p اور x میں ایک تفرقی مساوات ہے۔ فرض کرو کہ اس کا ممکنہ حل

$$F(x,p,c) = 0 \qquad .....(2)$$

ہے۔

اب مساوات(1)اور(2)سے p کو حزف کر کے ہمیں دی گئی مساوات کا عام حل حاصل ہو جایے گا۔

نوٹ:

1. یہ طریقہ خاص طور پر ان تفرقی مساواتوں کے لیے مفید ہے جن میں x پوری طرح سے موجود نہ ہو۔
2. اگر مساوات(1)اور(2)سے p کو ہٹانا ممکن نہ ہو تو ضروری حل x اور y کو p کی رکن میں ظاہر کر کے حاصل کر سکتے ہیں۔

اب کچھ مثالوں سے ہم اوپر دیے گیے طریقہ کو سمجھتے ہیں۔

مثال1۔ مساوات $y = -px + x^4p^2$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$y = -px + x^4p^2$$

اس مساوات کو بلحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dy}{dx} = p = -p - x\frac{dp}{dx} + 2x^4 p\frac{dp}{dx} + 4x^3p^2$$
$$-2p - x\frac{dp}{dx} + 2x^4 p\frac{dp}{dx} + 4x^3p^2 = 0$$
$$-\left(2p + x\frac{dp}{dx}\right) + 2x^3p\left(2p + x\frac{dp}{dx}\right) = 0$$
$$(2x^3p - 1)\left(2p + x\frac{dp}{dx}\right) = 0$$

اب

$$2p + x\frac{dp}{dx} = 0$$
$$\Rightarrow \quad 2\frac{dx}{x} + \frac{dp}{p} = 0$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2\,log\,x + log\,p = log\,c$$
$$\Rightarrow \quad px^2 = c$$
$$\Rightarrow \quad p = \frac{c}{x^2}$$

p کی یہ قیمت دی گئی مساوات میں رکھنے پر

$$y = -\left(\frac{c}{x^2}\right)x + x^4\left(\frac{c}{x^2}\right)^2$$
$$\Rightarrow \quad y = c^2 - \left(\frac{c}{x}\right)$$

جو کہ دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

مثال2۔ مساوات $y = x + p^2$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$y = x + p^2$$

اس مساوات کو بلحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$p = 1 + 2p\frac{dp}{dx}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{p-1}{2p} = \frac{dp}{dx}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{2p}{p-1}dp = dx$$
$$\Rightarrow \quad \left(2 + \frac{2}{p-1}\right)dp = dx$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2p + 2\,log(p-1) + c = x$$

x کی یہ قیمت دی گئی مساوات میں رکھنے پر

$$y = 2p + 2\,log(p-1) + c + p^2$$
$$\Rightarrow \quad y = p^2 + 2p + 2\,log(p-1) + c$$

اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل $y = p^2 + 2p + 2\,log(p-1) + c,\ x = 2p + 2\,log(p-1) + c$ ہے۔

مثال3۔ مساوات $y = p\sin p + \cos p$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$y = p\sin p + \cos p$$

اس مساوات کو بلحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$p = p\cos p\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx}\sin p - \sin p\frac{dp}{dx}$$
$$\Rightarrow \quad 1 = \cos p\frac{dp}{dx}$$
$$\Rightarrow \quad dx = \cos p\,dp$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x = \sin p + c$$

اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل $x = \sin p + c,\ y = p\sin p + \cos p$ ہے۔

مثال4۔ مساوات $y = A + Bp + Cp^2$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$y = A + Bp + Cp^2$$

اس مساوات کو بلحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$p = B\frac{dp}{dx} + 2Cp\frac{dp}{dx}$$
$$\Rightarrow \quad p = (B + 2Cp)\frac{dp}{dx}$$
$$\Rightarrow \quad dx = \frac{(B + 2Cp)}{p}dp$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x = B\log p + 2Cp + c$$

اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل $x = B\log p + 2Cp + c,\ y = A + Bp + Cp^2$ ہے۔

مثال5۔ مساوات $y = p\tan p + log\cos p$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$y = p\tan p + log\cos p$$

اس مساوات کو بلحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$p = p\,sec^2 p\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx}tan\,p - \frac{\sin p}{\cos p}\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad p = p\,sec^2 p\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad dx = sec^2 p\,dp$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x = tan\,p + c$$

اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل $x = tan\,p + c,\ y = p\tan p + log\cos p$ ہے۔

مثال6۔ مساوات $y = (1+p)x + p^2$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$y = (1+p)x + p^2$$

اس مساوات کو بلحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$p = 1 + p + x\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = 1 + (x+2p)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dp} + x = -2p$$

جو کہ ایک خطی تفرقی مساوات ہے۔اس لیے

$$I.F. = e^{\int dp} = e^p$$

اب اوپر حاصل کردہ خطی تفرقی مساوات کا حل ہوگا

$$x(e^p) = \int e^p(-2p)\,dp + c$$

$$\Rightarrow \quad x(e^p) = 2e^p(1-p) + c$$

$$x = 2(1-p) + ce^{-p} \qquad \text{.....(1)}$$

جہاں c ایک تکملی مستقل ہے۔

x کی اس قیمت کو دی گئی مساوات میں رکھنے پر

$$y = (1+p)(2(1-p) + ce^{-p}) + p^2$$

$$y = c(1+p)e^{-p} + 2 - p^2 \qquad \text{.....(2)}$$

مساوات(1)اور(2)دونوں مل کر ضروری عام حل دیتے ہیں۔

6.4 مساوات جن میں x موجود نہ ہو(Equations not Containing x)

اگر کسی تفرقی مساوات میں x موجود نہ ہو تب فرض کرو کہ وہ درجہ ذیل شکل میں ہو گی

$$\varphi(y,p) = 0$$

اگر یہ مساوات y کے لیے حل کی جاسکتی ہو تب وہ درجہ ذیل شکل میں تبدیل کی جاسکتی ہے

$$y = \phi(p)$$

اس طرح کی مساوات کو پچھلے حصہ میں ذکر کیے گئے طریقہ سے حل کرتے ہیں۔ لیکن اگر اس طرح حل کرنا ممکن نہ ہو تب اس مساوات کو درجہ ذیل شکل میں تبدیل کر کے حل کرتے ہیں

$$p = f(y)$$

اس مساوات کو تکمل کرنے پر ہمیں ضروری عام حل حاصل ہو جاتا ہے۔

اب ہم کچھ مثالوں کے ذریعہ اوپر بتایے گیے طریقہ کو سمجھیں گے۔

مثال 1۔ مساوات $y = 2p + 3p^2$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$y = 2p + 3p^2$$

اس مساوات کو بہلحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$p = 2\frac{dp}{dx} + 6p\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad p = (2 + 6p)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{(2 + 6p)}{p}dp$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x = 2\log p + 6p + c$$

اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل $x = 2\log p + 6p + c,\ y = 2p + 3p^2$ ہے۔

مثال 2۔ مساوات $y = p - \log(p^2 - 1)$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$y = p - \log(p^2 - 1)$$

اس مساوات کو بہلحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$p = \frac{dp}{dx} - \frac{2p\frac{dp}{dx}}{p^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \quad p = \left(1 - \frac{2p}{p^2 - 1}\right)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad dx = \left(\frac{1}{p} - \frac{2}{p^2 - 1}\right)dp$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x = \log p + \log\left(\frac{p + 1}{p - 1}\right) + c$$

اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل $x = \log p + \log\left(\frac{p+1}{p-1}\right) + c,\ y = p - \log(p^2 - 1)$ ہے۔

6.5 مساوات جن میں y موجود نہ ہو (Equations not Containing y)

اگر کسی تفرقی مساوات میں y موجود نہ ہو تب فرض کرو کہ وہ درجہ ذیل شکل کی ہو گی

$$\varphi(x, p) = 0$$

اگر یہ مساوات x کے لیے حل کی جاسکتی ہو تب وہ درجہ ذیل شکل میں تبدیل کی جاسکتی ہے

$$x = \phi(p)$$

اس طرح کی مساوات کو پچھلے حصہ میں ذکر کیے گیے طریقہ سے حل کرتے ہیں۔ لیکن اگر اس طرح حل کرنا ممکن نہ ہو تب اس مساوات کو درجہ ذیل شکل میں تبدیل کر کے حل کرتے ہیں

$$p = f(x)$$

اس مساوات کو تکمل کرنے پر ہمیں ضروری عام حل حاصل ہو جاتا ہے۔

اب ہم ایک مثال سے اوپر بتایے گیے طریقہ کو سمجھیں گے۔

مثال 1۔ مساوات $x(1 + p^2) = 1$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات کو ہم درجہ ذیل شکل میں لکھ سکتے ہیں

$$x = \frac{1}{1 + p^2}$$

اس مساوات کو بلحاظ y تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{p} = -\frac{2p}{(1 + p^2)^2} \times \frac{dp}{dy}$$

$$\Rightarrow \qquad dy = -\frac{2p^2}{(1 + p^2)^2}\, dp$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y = c - \int \frac{2p^2}{(1 + p^2)^2}\, dp$$

مان لو کہ $p = \tan t$، تب $dp = sec^2\, t\, dt$، اس لیے

$$y = c - \int \frac{2tan^2 t}{(1 + tan^2 t)^2} sec^2\, t\, dt$$

$$= c - 2\int \frac{tan^2 t}{(sec^2\, t)^2} sec^2\, t\, dt$$

$$= c - 2\int \frac{tan^2 t}{sec^2\, t}\, dt$$

$$= c - \int 2sin^2 t\, dt$$

$$= c - \int (1 - \cos 2t)\, dt$$

$$\Rightarrow \quad y = c - t + \frac{\sin 2t}{2}$$

اور پھر $t = \tan^{-1} p$ رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y = c - \tan^{-1} p + \frac{p}{1 + p^2}$$

دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل $x = \frac{1}{1+p^2}, y = c - \tan^{-1} p + \frac{p}{1+p^2}$ ہے۔

6.6 مساوات جو x اور y میں متجانس ہو (Equations Homogeneous in x and y)

اگر کسی تفرقی مساوات میں x اور y متجانس ہوں، تب فرض کرو کہ دی گئی مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$\varphi\left(\frac{y}{x}, p\right) = 0$$

اب اگر یہ مساوات p کے لیے حل کی جا سکتی ہو تب اسے درجہ ذیل شکل میں تبدیل کیا جا سکتا ہے

$$p = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

اس طرح کی مساوات کو آسانی کے ساتھ تکمل کر کے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اور اگر یہ مساوات $\frac{y}{x}$ کے لیے حل کی جا سکتی ہو تب اسے درجہ ذیل شکل میں تبدیل کیا جا سکتا ہے

$$y = xf(p)$$

اس مساوات کو حل کرنے کے لیے سب سے پہلے اس کو بہ لحاظ x تفرق کرتے ہیں۔ اس لیے

$$p = xf'(p)\frac{dp}{dx} + f(p)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{p - f(p)}{xf'(p)} = \frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{f'(p)}{p - f(p)}\, dp$$

اب اس مساوات کو تکمل کرنے پر دی گئی مساوات کا حل حاصل ہو جاتا ہے۔

اب ہم ایک مثال سے اوپر بتایے گیے طریقہ کو سمجھیں گے۔

مثال 1۔ مساوات $xyp^2 + p(3x^2 - 2y^2) - 6xy = 0$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$xyp^2 + p(3x^2 - 2y^2) - 6xy = 0$$

$$\Rightarrow \quad xp(yp + 3x) - 2y(yp + 3x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (xp - 2y)(yp + 3x) = 0$$

اب اگر

$$yp + 3x = 0$$
$$p = \frac{dy}{dx} = -3\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$\Rightarrow \quad ydy + 3xdx = 0$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{y^2}{2} + 3\frac{x^2}{2} = \frac{A}{2}$$
$$\Rightarrow \quad y^2 + 3x^2 = A$$

اسی طرح

$$xp - 2y = 0$$
$$\Rightarrow \quad p = \frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = 2\left(\frac{dx}{x}\right)$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\log y = 2\log x + \log B$$
$$\Rightarrow \quad y = Bx^2$$

دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل $(y - Bx^2)(y^2 + 3x^2 - A) = 0$ ہے۔

6.7 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں طالب علم نے درجہ ذیل صورتوں والی تفرقی مساوات کو حل کرنا سیکھا:

- x کے لیے حل کیجانے والی تفرقی مساوات
- y کے لیے حل کیجانے والی تفرقی مساوات
- وہ تفرقی مساوات جن میں x موجود نہ ہو
- وہ تفرقی مساوات جن میں x موجود نہ ہو
- وہ تفرقی مساوات جو x اور y میں ہو متجانس ہوں

6.8 کلیدی الفاظ (Keywords)

رطبہ، درجہ، تکملی مستقل، متجانس تفرقی مساوات

6.9 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

6.9.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. تفرقی مساوات $x = a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{dy}{dx}$ کا رطبہ ہے

3 (d) 2 (c) 1 (b) 0 (a)

.2 تفرقی مساوات $y = x^4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx}$ کا درجہ ہے

3 (d) 2 (c) 1 (b) 0 (a)

.3 تفرقی مساوات $y = p\tan p + \log\cos p$ کا رطبہ اور درجہ ہے

ان میں سے کوئی نہیں (d) 2, 2 (c) 1, 1 (b) 0, 0 (a)

6.9.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

درجہ ذیل تفرقی مساوات کو حل کریے:

.1 $y = \sin p - p\cos p$

.2 $y = \frac{xp^2+9x^2}{3p}$

.3 $y = ap^2 + bp^3$

.4 $p^3 + p = e^y$

.5 $y = 3px + 4p^2$

.6 $y = \frac{x}{p} - Ap$

.7 $y = p\log p$

.8 $y = xp^2 + p$

.9 $p^2 - 1 = e^{p-y}$

.10 $y = p(1 + p\cos p)$

6.9.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

درجہ ذیل تفرقی مساوات کو حل کریے:

.1 $y^2\log y = xyp + p^2, y > 0$

.2 $xp^3 - p^2 - 1 = 0$

.3 $y = 3px + x^2p^2$

.4 $p^3 + x = p(y + 3)$

جوابات:

6.9.1 معروضی سوالات کے جوابات

.1 b

.2 c

b .3

6.9.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $cos\left[\{\sqrt{1-c^2+2cx-x^2}-y\}/(c-x)\right]=(c-x)$
2. $3cy=c^2x^3+9$
3. $x=2ap+\frac{3}{2}bp^2, y=ap^2+bp^3$
4. $x=2tan^{-1}p-\frac{1}{p}, y=\log(p^3+p)$
5. $x=-\frac{8}{5}p+cp^{-3/2}, y=3cp^{-1/2}-\frac{4}{5}p^2$
6. $x=\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}(c+Asin^{-1}p), y=\frac{1}{\sqrt{1-p^2}}(c+Asin^{-1}p)-Ap$
7. $x=\frac{1}{2}(\log p+1)^2+c, y=p\log p$
8. $x=(p-1)^{-1}(\log p-p+c), y=xp^2+p$
9. $x=\log\frac{p+1}{p-1}+\log p+c, y=p-\log(p^2-1)$
10. $x=\log p+\sin p+p\cos p+c, y=p+p^2\cos p$

6.9.3 طویل جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $\log y=cx+c^2$
2. $x=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^3}, y=\frac{2}{3p^2}-\log p+c$
3. $y^3=3cx+c^2$
4. $p^3-p(y+3)+x=0, y(1-p^2)^{1/2}+(1-p^2)^{3/2}=c$

اکائی 7۔ پہلے رتبے اور اعلیٰ درجے کی تفرقی مساواتیں-III

(First Order and Higher Degree Differential Equations-III)

اکائی کے اجزا

7.0	تمہید
7.1	مقاصد
7.2	لگرانجی مساوات
7.3	کلیرو کی مساوات
7.3.1	کلیرو کی شکل میں تبدیل کی جانے والی مساواتیں
7.4	اکتسابی نتائج
7.5	کلیدی الفاظ
7.6	نمونہ امتحانی سوالات
7.6.1	معروضی جوابات کے حامل سوالات
7.6.2	مختصر جوابات کے حامل سوالات
7.6.3	طویل جوابات کے حامل سوالات

7.0 تمہید(Introduction)

پچھلی اکائی کے نصاب میں ہم پہلے رتبے اور اعلی درجہ کی تفرقی مساوات(Differential Equations)میں p کے لیے، x کے لیے اور y کے لیے حل کی جانے والی تفرقی مساواتوں کی جانکاری حاصل کر چکے ہیں۔اس اکائی میں ہم دو خاص شکل کی تفرقی مساواتوں جو کہ لگرانج اور کلیرو کے نام سے متعارف ہیں، کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے اور پھر ان کا حل حاصل کرنے کے طریقوں کو بھی سمجھیں گے۔

7.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ دی گئی لگرانج اور کلیرو کی تفرقی مساوات کو پہچان کر اس کا حل حاصل کر سکیں۔ نیز ایسی مساوات جو کلیرو کی شکل میں تبدیل کی جاسکتی ہیں ان کا حل بھی حاصل کر سکیں گے۔

7.2 لگرانجی مساوات(Lagrange's Equation)

تعریف: وہ تفرقی مساوات جسے درجہ ذیل شکل میں لکھا جاسکتا ہو

$$y = x\varphi(p) + \psi(p) \qquad .....(1)$$

لگرانج مساوات کہلاتی ہے۔

اس مساوات کو حل کرنے کے لیے بہ لحاظ x تفرق کرتے ہیں۔ جس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dy}{dx} = p = x\frac{d}{dp}\varphi(p)\frac{dp}{dx} + \varphi(p) + \frac{d}{dp}\psi(p)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad p - \varphi(p) = \left[x\frac{d}{dp}\varphi(p) + \frac{d}{dp}\psi(p)\right]\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dp}{dx} = \frac{p - \varphi(p)}{x\frac{d}{dp}\varphi(p) + \frac{d}{dp}\psi(p)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dp} = \frac{x\frac{d}{dp}\varphi(p) + \frac{d}{dp}\psi(p)}{p - \varphi(p)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dp} - \frac{x\frac{d}{dp}\varphi(p)}{p - \varphi(p)} = \frac{\frac{d}{dp}\psi(p)}{p - \varphi(p)}$$

یہ ایک خطی تفرقی مساوات ہے۔اس کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x = f(p, c)$$

اس لیے مساوات(1)کا عام حل پیرامٹرک شکل میں درجہ ذیل ہوگا

$$x = f(p, c), y = f(p, c)\varphi(p) + \psi(p)$$

جہاں p ایک پیرامیٹر ہے۔

مثالیں۔ درجہ ذیل مساواتوں کو حل کیجیے:

(a $y = xp^2 - \frac{1}{p}$

(b $y = axp + bp^3$

(c $y = xp^2 + p^4$

(d $y = 2xp + p^n$

حل۔

a) دی گئی مساوات ہے

$$y = xp^2 - \frac{1}{p} \quad \text{.....(1)}$$

یہ لگرانج مساوات ہے۔

اس مساوات کو حل کرنے کے لیے بہ لحاظ x تفرق کرتے ہیں۔ جس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dy}{dx} = p = x\frac{d}{dp}(p^2)\frac{dp}{dx} + p^2 - \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\right)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad p - p^2 = 2px\frac{dp}{dx} - \left(\frac{-1}{p^2}\right)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad p - p^2 = \left(2px + \frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{p - p^2}{2px + \frac{1}{p^2}} = \frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dp} = \frac{2p^3x + 1}{p^3(1-p)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dp} = \frac{2x}{(1-p)} + \frac{1}{p^3(1-p)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dp} - \frac{2x}{(1-p)} = \frac{1}{p^3(1-p)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dp} + \frac{2x}{(p-1)} = \frac{1}{p^3(1-p)}$$

جو کہ ایک خطی تفرقی مساوات ہے۔ اس کا حل حاصل کرنے کے لیے ہم تکملی جزو(Integrating Factor).I.F حاصل کرتے ہیں، تب ہم دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل طریقہ سے حاصل کریں گے

$$x(I.F.) = \int Q(I.F.)\,dp + c$$

جہاں $P = \frac{2}{(p-1)}$ اور $Q = \frac{1}{p^3(1-p)}$ ہے۔

اس لیے

$$I.F. = e^{\int P dp} = e^{\int \left(\frac{2}{(p-1)}\right)dp} = e^{\log(p-1)^2} = (p-1)^2$$

اب دی گئی مساوات کا حل ہو گا

$$x(p-1)^2 = \int \left\{\frac{1}{p^3(1-p)} \times (p-1)^2\right\} dp + c$$

$$\Rightarrow \quad x(p-1)^2 = \int \left\{\frac{p-1}{-p^3}\right\} dp + c$$

$$\Rightarrow \quad x(p-1)^2 = \int \left\{\frac{1}{-p^2} + \frac{1}{p^3}\right\} dp + c$$

$$\Rightarrow \quad x(p-1)^2 = \frac{1}{p} - \frac{1}{2p^2} + c$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{(p-1)^2}\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{2p^2} + c\right\}$$

مساوات(1) سے

$$y = \frac{p^2}{(p-1)^2}\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{2p^2} + c\right\} - \frac{1}{p}$$

اس لیے دی گئی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$x = \frac{1}{(p-1)^2}\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{2p^2} + c\right\}, \; y = \frac{p^2}{(p-1)^2}\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{2p^2} + c\right\} - \frac{1}{p}$$

b) دی گئی مساوات ہے

$$y = axp + bp^3 \qquad \text{.....(1)}$$

یہ لگرانج مساوات ہے۔

مساوات(1) کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dy}{dx} = p = a\left(x\frac{dp}{dx}\right) + ap + b(3p^2)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad p - ap = (ax + 3bp^2)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dp}{dx} = \frac{p-ap}{ax+3bp^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dp} = \frac{ax+3bp^2}{p-ap}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dp} = \frac{ax}{p(1-a)} + \frac{3bp}{(1-a)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dp} - \frac{ax}{p(1-a)} = \frac{3bp}{(1-a)}$$

جو کہ ایک خطی تفرقی مساوات ہے، جہاں $P = -\frac{a}{p(1-a)}$ اور $Q = \frac{3bp}{(1-a)}$ ہے۔ اب ہم دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل طریقہ سے حاصل کریں گے

$$x(I.F.) = \int Q(I.F.)\, dp + c$$

اس کے لیے سب سے پہلے ہم $I.F.$ معلوم کریں گے جو اس طرح ہو گا

$$I.F. = e^{\int P dp} = e^{\int \left(\frac{-a}{p(1-a)}\right) dp} = e^{\log(p)^{\frac{-a}{(1-a)}}} = (p)^{\frac{a}{(a-1)}}$$

اب دی گئی مساوات کا حل ہو گا

$$x(p)^{\frac{a}{a-1}} = \int \left\{ \frac{3bp}{1-a} \times (p)^{\frac{a}{a-1}} \right\} dp + c$$

$$\Rightarrow \quad x(p)^{\frac{a}{a-1}} = \frac{3b}{1-a} \int (p)^{\left(\frac{a}{a-1}+1\right)} dp + c$$

$$\Rightarrow \quad x(p)^{\frac{a}{a-1}} = \frac{3b}{1-a} \left[\frac{(p)^{\left(\frac{a}{a-1}+2\right)}}{\frac{a}{a-1}+2} \right] + c$$

$$\Rightarrow \quad x(p)^{\frac{a}{a-1}} = \left(\frac{3b}{2-3a} \right) (p)^{\left(\frac{a}{a-1}+2\right)} + c$$

$$\Rightarrow \quad x = \left(\frac{3b}{2-3a} \right) (p)^{\left(\frac{a}{a-1}-\frac{a}{a-1}+2\right)} + c(p)^{\left(\frac{-a}{a-1}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad x = \left(\frac{3b}{2-3a} \right) p^2 + c(p)^{\frac{a}{1-a}}$$

مساوات(1) سے

$$y = ap \left\{ \frac{3bp^2}{2-3a} + c(p)^{\frac{a}{1-a}} \right\} + bp^3$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{3abp^3}{2-3a} + ac(p)^{\frac{1}{1-a}} + bp^3$$

اس لیے دی گئی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$x = \frac{3bp^2}{2-3a} + c(p)^{\frac{a}{1-a}}, y = \frac{3abp^3}{2-3a} + ac(p)^{\frac{1}{1-a}} + bp^3$$

c) دی گئی مساوات ہے

$$y = xp^2 + p^4 \qquad \text{.....(1)}$$

یہ لگرانج مساوات ہے۔

اس مساوات کو حل کرنے کے لیے بہ لحاظ x تفرق کرتے ہیں۔ جس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dy}{dx} = p = 2px\frac{dp}{dx} + p^2 + 4p^3\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad p - p^2 = (2px + 4p^3)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{p-p^2}{2px+4p^3} = \frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dp} = \frac{p(2x+4p^2)}{p(1-p)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dp} = \frac{2x}{(1-p)} + \frac{4p^2}{(1-p)}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{dp} + \frac{2x}{(p-1)} = \frac{4p^2}{(1-p)}$$

جو کہ ایک خطی تفرقی مساوات ہے، جہاں $P = \frac{2}{(p-1)}$ اور $Q = \frac{4p^2}{(1-p)}$ ہے۔ اب ہم دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل طریقہ سے حاصل کریں گے

$$x(I.F.) = \int Q(I.F.)\, dp + c$$

اس کے لیے سب سے پہلے ہم $I.F.$ معلوم کریں گے جو درجہ ذیل طریقہ سے حاصل ہو گا

$$I.F. = e^{\int P dp} = e^{\int \left(\frac{2}{p-1}\right) dp} = e^{\log(p-1)^2} = (p-1)^2$$

اب دی گئی مساوات کا حل ہو گا

$$x(p-1)^2 = \int \frac{4p^2}{1-p} \times (p-1)^2\, dp + c$$

$$\Rightarrow \qquad x(p-1)^2 = -\int 4p^2(p-1)\, dp + c$$

$$\Rightarrow \qquad x(p-1)^2 = \int 4(p^2 - p^3)\, dp + c$$

$$\Rightarrow \qquad x(p-1)^2 = 4\left(\frac{p^3}{3} - \frac{p^4}{4}\right) + c$$

$$\Rightarrow \qquad x = \frac{1}{(p-1)^2}\left\{4\left(\frac{p^3}{3} - \frac{p^4}{4}\right) + c\right\}$$

مساوات(1) سے

$$y = \left[\frac{1}{(p-1)^2}\left\{4\left(\frac{p^3}{3} - \frac{p^4}{4}\right) + c\right\}\right] p^2 + p^4$$

اس لیے دی گئی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$x = \frac{1}{(p-1)^2}\left\{4\left(\frac{p^3}{3} - \frac{p^4}{4}\right) + c\right\},$$

اور $y = \left[\frac{1}{(p-1)^2}\left\{4\left(\frac{p^3}{3} - \frac{p^4}{4}\right) + c\right\}\right] p^2 + p^4$

d) دی گئی مساوات ہے

$$y = 2xp + p^n \qquad \text{.....(1)}$$

یہ لگرانج مساوات ہے۔

اس مساوات کو حل کرنے کے لیے اس کو بہ لحاظ x تفرق کرتے ہیں۔ جس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dy}{dx} = p = 2x\frac{dp}{dx} + 2p + np^{n-1}\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad -p = (2x + np^{n-1})\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dp}{dx} = \frac{-p}{2x + np^{n-1}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dp} = \frac{2x + np^{n-1}}{-p}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dp} = -\frac{2x}{p} - np^{n-2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p} = -np^{n-2}$$

جو کہ ایک خطی تفرقی مساوات ہے، جہاں $P = \frac{2}{p}$ اور $Q = -np^{n-2}$ ہے۔ اب ہم دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل طریقہ سے حاصل کریں گے

$$x(I.F.) = \int Q(I.F.)\, dp + c$$

اس کے لیے سب سے پہلے ہم $I.F.$ معلوم کریں گے جو درجہ ذیل طریقہ سے حاصل ہو گا

$$I.F. = e^{\int P dp} = e^{\int \left(\frac{2}{p}\right) dp} = e^{\log p^2} = p^2$$

اب دی گئی مساوات کا حل ہو گا

$$xp^2 = \int (-np^{n-2}) \times p^2\, dp + c$$

$$\Rightarrow \quad xp^2 = -\int (np^n)\, dp + c$$

$$\Rightarrow \quad xp^2 = -\frac{np^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\Rightarrow \quad x = -\frac{np^{n-1}}{n+1} + cp^{-2}$$

مساوات(1) سے

$$y = 2p\left(-\frac{np^{n-1}}{n+1} + cp^{-2}\right) + p^n$$

$$\Rightarrow \quad y = \left(-\frac{2np^n}{n+1} + 2cp^{-1}\right) + p^n$$

اس لیے دی گئی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$x = -\frac{np^{n-1}}{n+1} + cp^{-2}, y = \left(-\frac{2np^n}{n+1} + 2cp^{-1}\right) + p^n$$

7.3 کلیرو کی مساوات(Clairaut's Equation)

وہ تفرقی مساوات جسے درجہ ذیل شکل میں لکھا جا سکتا ہو

$$y = xp + \varphi(p) \qquad \text{.....(1)}$$

کلیرو کی مساوات کہلاتی ہے۔

اس مساوات کو حل کرنے کے لیے بہ لحاظ x تفرق کرتے ہیں۔ جس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dy}{dx} = p = x\frac{dp}{dx} + p + \frac{d}{dp}\varphi(p)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad \left[x + \frac{d}{dp}\varphi(p)\right]\frac{dp}{dx} = 0$$

اب

$$\frac{dp}{dx} = 0, \quad \left[x + \frac{d}{dp}\varphi(p)\right] = 0$$

یہاں جز $x + \frac{d}{dp}\varphi(p)$ میں $\frac{dp}{dx}$ نہیں ہے اس لیے

$$\frac{dp}{dx} = 0$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$p = c$$

جہاں c ایک اختیاری مستقل ہے۔

p کی یہ قیمت مساوات (1) میں رکھنے پر

$$y = xc + \varphi(c)$$

جو کہ کلیرو کی مساوات کا عام حل ہے۔

اس سے یہ بات پتہ چلتی ہے کہ کلیرو کی مساوات کا حل حاصل کرنے کے لیے دی گئی مسات میں p کی جگہ c رکھنے پر مطلوبہ عام حل حاصل ہو جاتا ہے۔

مثالیں۔ درجہ ذیل مساواتوں کو حل کریے:

(a $y = xp + \log p$

(b $y = xp + \frac{a}{2p}$

(c $y = xp + (1 + p^2)^{3/2}$

(d $y = xp + p^2$

(e $y = xp + \sin^{-1} p$

(f $yp = 1 - p + xp^2$

(g $p = \cos px \cos y + \sin px \sin y$

(h $yp = a + xp^2$

(i $(y - px)(p - 1) = p$

حل۔

a) دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$y = xp + \log p \quad \text{.....(1)}$$

یہ مساوات کلیرو کی مساوات ہے۔اس کا عام حل حاصل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں p کی جگہ c رکھتے ہیں،اس لیے

$$y = xc + \log c$$

دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

b) دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$y = xp + \frac{a}{2p} \quad \text{.....(1)}$$

یہ مساوات کلیرو کی مساوات ہے۔اس کا عام حل حاصل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں p کی جگہ c رکھتے ہیں،اس لیے

$$y = xc + \frac{a}{2c}$$

دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

c) دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$y = xp + (1 + p^2)^{3/2} \quad \text{.....(1)}$$

یہ مساوات کلیرو کی مساوات ہے۔اس کا عام حل حاصل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں p کی جگہ c رکھتے ہیں،اس لیے

$$y = xc + (1 + c^2)^{3/2}$$

دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

d) دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$y = xp + p^2 \quad \text{.....(1)}$$

یہ مساوات کلیرو کی مساوات ہے۔اس کا عام حل حاصل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں p کی جگہ c رکھتے ہیں،اس لیے

$$y = xc + c^2$$

دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

e) دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$y = xp + \sin^{-1} p \qquad \text{.....(1)}$$

یہ مساوات کلیرو کی مساوات ہے۔اس کا عام حل حاصل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں p کی جگہ c رکھتے ہیں،اس لیے

$$y = xc + \sin^{-1} c$$

دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

f) دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$yp = 1 - p + xp^2$$

$$y = xp + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \qquad \text{.....(1)}$$

یہ مساوات کلیرو کی مساوات ہے۔اس کا عام حل حاصل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں p کی جگہ c رکھتے ہیں،اس لیے

$$y = xc + \left(1 - \frac{1}{c}\right)$$

دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

g) دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$p = \cos px \cos y + \sin px \sin y$$

$$\Rightarrow \quad p = \cos(px - y)$$

$$\Rightarrow \quad xp - y = \cos^{-1} p$$

اس لیے

$$y = xp - \cos^{-1} p \qquad \text{.....(1)}$$

یہ مساوات کلیرو کی مساوات ہے۔اس کا عام حل حاصل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں p کی جگہ c رکھتے ہیں،اس لیے

$$y = xc - \cos^{-1} c$$

دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

h) دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$yp = a + xp^2$$

$$\Rightarrow \quad y = xp + \frac{a}{p} \qquad \text{.....(1)}$$

یہ مساوات کلیرو کی مساوات ہے۔اس کا عام حل حاصل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں p کی جگہ c رکھتے ہیں،اس لیے

$$y = xc + \frac{a}{c}$$

دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

i) دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$(y - px)(p - 1) = p$$

$$\Rightarrow \quad y - px = \frac{p}{p-1}$$

$$\Rightarrow \quad y = xp + \frac{p}{p-1} \qquad \text{.....(1)}$$

یہ مساوات کلیرو کی مساوات ہے۔اس کا عام حل حاصل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں p کی جگہ c رکھتے ہیں،اس لیے

$$y = xc + \frac{c}{c-1}$$

دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

7.3.1 کلیرو کی شکل میں تبدیل کی جانے والی مساواتیں(Equations Reducible to Clairaut's form)

اب ہم ان مساوات کے بارے میں جانکاری حاصل کریں گے جو کلیرو کی مساوات کی شکل میں نہیں ہوتی ہیں لیکن کچھ مناسب متبادل کا استعمال کر کے ان مساوات کو کلیرو کی مساوات میں تبدیل کر سکتے ہیں۔کس تفرقی مساوات میں کیا متبادل رکھا جایے اور کونسا نہیں اس کے لیے کوئی عام طریقہ موجود نہیں ہے۔پھر بھی کچھ متبادل ایسے ہیں جن کو زیادہ تر مساوات میں استعمال کر کے ہم دی گئی تفرقی مساوات کو کلیرو کی مساوات میں بدل سکتے ہیں اور پھر پہلے بتایے طریقہ سے عام حل حاصل کر سکتے ہیں۔ان متبادل کو ہم مثالوں کی مدد سے سمجھیں گے۔

مثالیں۔ درجہ ذیل مساوات کو حل کریے:

(a $(py + x)(xp - y) = h^2 p$

(b $xy(y - xp) = x + yp$

(c $y = 2xp + ayp^2$

(d $y - 2xp + yp^2 = 0$

(e $e^{4x}p + e^{2y}p^2 - e^{4x} = 0$

(f $p^2 \cos^2 y + p \sin x \cos x \cos y - \sin y \cos^2 x = 0$

حل۔

a) دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$(py + x)(xp - y) = h^2 p \qquad \text{.....(1)}$$

فرض کرو کہ

$$y^2 = v \Rightarrow 2ydy = dv$$

اور

$$x^2 = u \Rightarrow 2xdx = du$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2ydy}{2xdx} = \frac{dv}{du}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{x}p = \frac{dv}{du}$$

$$\Rightarrow \qquad p = \sqrt{\frac{u}{v}} \times \frac{dv}{du}$$

اب مساوات(1) سے

$$\left(\sqrt{\frac{u}{v}} \times \frac{dv}{du}\sqrt{v} + \sqrt{u}\right)\left(\sqrt{u}\sqrt{\frac{u}{v}} \times \frac{dv}{du} - \sqrt{v}\right) = h^2\sqrt{\frac{u}{v}} \times \frac{dv}{du}$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{u}\left(\frac{dv}{du} + 1\right)\frac{1}{\sqrt{v}}\left(u \times \frac{dv}{du} - v\right) = h^2\sqrt{\frac{u}{v}} \times \frac{dv}{du}$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\frac{dv}{du} + 1\right)\left(u\frac{dv}{du} - v\right) = h^2\frac{dv}{du}$$

$$\Rightarrow \qquad u\frac{dv}{du} - v = \frac{h^2\frac{dv}{du}}{\left(\frac{dv}{du} + 1\right)}$$

$$\Rightarrow \qquad v = u\frac{dv}{du} - \frac{h^2\frac{dv}{du}}{\left(\frac{dv}{du} + 1\right)}$$

جو کہ کلیرو کی مساوات ہے۔اس کا عام حل حاصل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں $\frac{dv}{du}$ کی جگہ c رکھتے ہیں،اس لیے

$$v = uc - \frac{h^2c}{(c+1)}$$

$x^2 = u$ اور $y^2 = v$ رکھنے پر

$$y^2 = x^2c - \frac{h^2c}{(c+1)}$$

جو کہ دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

b) دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$xy(y - xp) = x + yp \qquad .....(1)$$

فرض کرو کہ

$$y^2 = v \Rightarrow 2ydy = dv$$

اور

$$x^2 = u \Rightarrow 2xdx = du$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{2ydy}{2xdx} = \frac{dv}{du}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{y}{x}p = \frac{dv}{du}$$

$$\Rightarrow \qquad p = \sqrt{\frac{u}{v}} \times \frac{dv}{du}$$

اب مساوات(1) میں یہ متبادل رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\sqrt{uv}\left(\sqrt{v} - \sqrt{\frac{u}{v}} \times \frac{dv}{du} \times \sqrt{u}\right) = \left(\sqrt{u} + \sqrt{v} \times \sqrt{\frac{u}{v}} \times \frac{dv}{du}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{uv}}{\sqrt{v}}\left(v - u\frac{dv}{du}\right) = \sqrt{u}\left(1 + \frac{dv}{du}\right)$$

$$\Rightarrow \quad v - u\frac{dv}{du} = 1 + \frac{dv}{du}$$

$$\Rightarrow \quad v = u\frac{dv}{du} + \left(1 + \frac{dv}{du}\right)$$

جو کہ کلیرو کی مساوات ہے۔اس کا عام حل حاصل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں $\frac{dv}{du}$ کی جگہ c رکھتے ہیں،اس لیے

$$v = uc + (1 + c)$$

$u = x^2$ اور $v = y^2$ رکھنے پر

$$y^2 = x^2c + (1 + c)$$

جو کہ دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

c) دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$y = 2xp + ayp^2 \qquad \text{.....(1)}$$

فرض کرو کہ

$$y^2 = v$$

$$\Rightarrow \quad 2y\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad 2p = \frac{1}{\sqrt{v}} \times \frac{dv}{dx}$$

مساوات(1)میں یہ متبادل رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\sqrt{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{v}} \times \frac{dv}{dx}\right)x + a\sqrt{v} \times \frac{1}{4v} \times \left(\frac{dv}{dx}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{v} = \frac{1}{\sqrt{v}}\left[\left(\frac{dv}{dx}\right)x + \frac{a}{4} \times \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad v = \left(\frac{dv}{dx}\right)x + \frac{a}{4} \times \left(\frac{dv}{dx}\right)^2$$

جو کہ کلیرو کی مساوات ہے۔اس کا عام حل حاصل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں $\frac{dv}{dx}$ کی جگہ c رکھتے ہیں،اس لیے

$$v = xc + \frac{a}{4}c^2$$

$v = y^2$ رکھنے پر

$$y^2 = xc + \frac{a}{4}c^2$$

جو کہ دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

d) دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$y - 2xp + yp^2 = 0 \qquad \text{.....(1)}$$

فرض کرو کہ

$$y^2 = v$$

$$\Rightarrow \quad 2y\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad 2p = \frac{1}{\sqrt{v}} \times \frac{dv}{dx}$$

مساوات(1)میں یہ متبادل رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\sqrt{v} - \left(\frac{1}{\sqrt{v}} \times \frac{dv}{dx}\right)x + \sqrt{v} \times \frac{1}{4v} \times \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{v} = \frac{1}{\sqrt{v}}\left[\left(\frac{dv}{dx}\right)x - \frac{1}{4}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad v = \left(\frac{dv}{dx}\right)x - \frac{1}{4}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2$$

جو کہ کلیرو کی مساوات ہے۔اس کا عام حل حاصل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں $\frac{dv}{dx}$ کی جگہ c رکھتے ہیں،اس لیے

$$v = xc - \frac{1}{4}c^2$$

$y^2 = v$ رکھنے پر

$$y^2 = xc - \frac{1}{4}c^2$$

جو کہ دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

e) دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$e^{4x}p + e^{2y}p^2 - e^{4x} = 0 \qquad \text{.....(1)}$$

فرض کرو کہ

$$e^{2y} = v \Rightarrow 2e^{2y}dy = dv$$

اور

$$e^{2x} = u \Rightarrow 2e^{2x}dx = du$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2e^{2y}dy}{2e^{2x}dx} = \frac{dv}{du}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{e^{2y}}{e^{2x}}p = \frac{dv}{du}$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{e^{2x}}{e^{2y}} \times \frac{dv}{du}$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{u}{v} \times \frac{dv}{du}$$

مساوات(1)میں یہ متبادل رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$u^2\left(\frac{u}{v} \times \frac{dv}{du}\right) + v\left(\frac{u}{v} \times \frac{dv}{du}\right)^2 - u^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad u^2\left(\frac{u}{v}\times\frac{dv}{du}-1\right)+v\left(\frac{u}{v}\times\frac{dv}{du}\right)^2=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u^2}{v}\left\{u\frac{dv}{du}-v+\left(\frac{dv}{du}\right)^2\right\}=0$$

$$\Rightarrow \quad v=u\frac{dv}{du}+\left(\frac{dv}{du}\right)^2$$

جو کہ کلیرو کی مساوات ہے۔اس کا عام حل حاصل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں $\frac{dv}{du}$ کی جگہ c رکھتے ہیں،اس لیے

$$v=uc+c^2$$

$e^{2y}=v, e^{2x}=u$ رکھنے پر

$$e^{2y}=e^{2x}c+c^2$$

جو کہ دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

f) دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$p^2\cos^2 y+p\sin x\cos x\cos y-\sin y\cos^2 x=0 \qquad .....(1)$$

فرض کرو کہ

$$\sin y=v\Rightarrow\cos y\,dy=dv$$

اور

$$\sin x=u\Rightarrow\cos x\,dx=du$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cos y\,dy}{\cos x\,dx}=\frac{dv}{du}$$

$$\Rightarrow \quad p=\frac{\cos x}{\cos y}\frac{dv}{du}$$

$$\Rightarrow \quad p=\sqrt{\frac{1-\sin^2 x}{1-\sin^2 y}}\times\frac{dv}{du}$$

$$\Rightarrow \quad p=\sqrt{\frac{1-\mathrm{u}^2}{1-\mathrm{v}^2}}\times\frac{dv}{du}$$

مساوات(1)میں یہ متبادل رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1-u^2}{1-v^2}\times\left(\frac{dv}{du}\right)^2(1-v^2)+\sqrt{\frac{1-u^2}{1-v^2}}\times\frac{dv}{du}u\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}-v(1-u^2)=0$$

$$\Rightarrow \quad (1-u^2)\left(\frac{dv}{du}\right)^2+u(1-u^2)\frac{dv}{du}-v(1-u^2)=0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{dv}{du}\right)^2+u\frac{dv}{du}-v=0$$

$$\Rightarrow \quad v=u\frac{dv}{du}+\left(\frac{dv}{du}\right)^2$$

جو کہ کلیرو کی مساوات ہے۔اس کا عام حل حاصل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں $\frac{dv}{du}$ کی جگہ c رکھتے ہیں،اس لیے

$$v = uc + c^2$$

$\sin y = v, \sin x = u$ رکھنے پر

$$\sin y = c \sin x + c^2$$

جو کہ دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

7.4 اکتسابی نتائج(Learning Outcomes)

- اس اکائی میں ہم نے دیکھا کہ لگرانج تفرقی مساوات

$$y = x\varphi(p) + \psi(p)$$

کو حل کرنے کے لیے سب سے پہلے اس کو بہ لحاظ x تفرق کرتے ہیں۔جس سے ہمیں ایک خطی تفرقی مساوا تحاصل ہوتی ہے۔جس کو حل کرنے پر ہمیں درجہ ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے

$$x = f(p, c)$$

اب x کی یہ قیمت لگرانج کی مساوات میں رکھنے پر ہمیں لگرانج مساوات کا عام حل درجہ ذیل شکل میں حاصل ہوتا ہے

$$x = f(p, c)، y = f(p, c)\varphi(p) + \psi(p)$$

- کلیرو کی مساوات کو درجہ ذیل شکل میں لکھا جاتا ہے۔

$$y = xp + \varphi(p)$$

اس مساوات کا عام حل حاصل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں p کی جگہ c رکھتے ہیں۔اس لیے دی گئی مساوات کا عام حل درجہ ذیل شکل کا ہو گا

$$y = xc + \varphi(c)$$

- کچھ تفرقی مساواتوں کو جو کلیرو کی شکل میں نہیں ہیں، کسی مناسب متبادل کی مدد سے کلیرو کی مساوات میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔

7.5 کلیدی الفاظ(Keywords)

کلیرو کی مساوات، خطی تفرقی مساوات، لگرانج مساوات، تکملی جزو

7.6 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

7.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

درجہ ذیل مساوات کا عام حل حاصل کیجیے:

1. $e^p = px - y$

2. $y = px + a(1-p)$

3. $xp - y + p^3 = 0$

4. $y = xp + \frac{1}{p}$

5. $p = \tan(px - y)$

6. $y = xp + \log p$

7. $y = xp + \cos^{-1} p$

8. $\frac{y}{x} = p + \frac{\sin^{-1} p}{x}$

9. $y = xp + \varphi(p)$ کو لگرانج مساوات کہتے ہیں (صحیح/غلط)

10. $y = xp + \varphi(p)$ کا عام حل حاصل کرنے کے لیے ہم اس مساوات میں p کی جگہ c رکھتے ہیں۔ (صحیح/غلط)

7.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

درجہ ذیل تفرقی مساوات کو مناسب متبادل کا استعمال کر کے کلیرو کی مساوات میں تبدیل کریے اور پھر اس کا عام حل حاصل کریے:

1. $xy(y - px) = x + py$

2. $x^3 p + yp^2 - x^2 y = 0$

3. $(px^2 + y^2)(px + y) = (p+1)^2$

7.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

درجہ ذیل لگرانج کی مساوات کا عام حل حاصل کریے:

1. $y = 2px - p^2$

2. $y = xp^2 + p$

3. $y = 2px + \log p$

4. $y = 3px + 4p^2$

جوابات:

7.6.1 معروضی سوالات کے جوابات

1. $y = cx - e^c$

2. $y = cx + ac(1-c)$

3. $y = xc + c^3$

4. $y = xc + \frac{1}{c}$

5. $y = cx - \tan^{-1} c$

6. $y = xc + \log c$

7. $y = xc + \cos^{-1} c$

8. $y = xc + \sin^{-1} c$

9. غلط

10. صحیح

7.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $y^2 = cx^2 + (1 + c)$

2. $y^2 = cx^2 + c^2$

3. $c^2(x + y) = 1 + c(xy + 1)$

7.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $x = \frac{2}{3}p + \frac{c}{p^2}, y = \frac{p^2}{3} + \frac{2c}{p}$

2. $x = \frac{\log p - p + c}{(p-1)^2} + \frac{c}{p^2}, y = xp^2 + p$

3. $x = \frac{c}{p^2} - \frac{1}{p}, y = \log p + \frac{2c}{p} - 2$

4. $x = -\frac{8}{5}p + \frac{c}{p^{3/2}}, y = \frac{3c}{p^{1/2}} - \frac{4p^2}{5}$

اکائی 8۔پہلے رتبے کی تفرقی مساواتوں کے اطلاقات: عمودی ٹراجکٹری

(Applications of First Order Differential Equations: Orthogonal Trajectory)

اکائی کے اجزا

8.0		تمہید
8.1		مقاصد
8.2		اطلاقات
8.3		عمودی ٹراجکٹری
	8.3.1	جب مساوات کارتیزی شکل میں ہو
	8.3.2	جب مساوات قطبی شکل میں ہو
8.4		اوبلک ٹراجکٹری
8.5		اکتسابی نتائج
8.6		کلیدی الفاظ
8.7		نمونہ امتحانی سوالات
	8.7.1	معروضی جوابات کے حامل سوالات
	8.7.2	مختصر جوابات کے حامل سوالات
	8.7.3	طویل جوابات کے حامل سوالات

8.0 تمہید(Introduction)

گزشتہ اکائیوں میں ہم تفرقی مساوات کی تشکیل اور ان کے حل حاصل کرنے کے تریقوں کے بارے میں تفصیلی معلومات حاصل کر چکے ہیں۔اس اکائی میں ہم کچھ مسائل کے بارے میں گفتگو کریں گے جن کا تعلق پہلے رتبے اور پہلے درجے کی تفرقی مساوات سے ہے۔کسی مسلہ کے دیے ہوے اعداد سے پہلے ہم تفرقی مساوات کی تشکیل کریں گے اور پھر کسی مناسب طریقہ سے اس کا حل حاصل کریں گے۔آخر میں عمودی ٹراجکٹری(Orthogonal Trajectory)اور اوبلک ٹراجکٹریکے بارے میں بحث کریں گے۔

8.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مطالعے کے بعد آپ پہلے رتبے کی تفرقی مساوات کے اطلاقات سے واقف ہو جائیں گے نیز عمودی ٹراجکٹری(Orthogonal Trajectory)اور اوبلک ٹراجکٹری کی تفصیلی جانکاری اور کسی منحنی کے لیے ان کو حاصل کرنا بھی سیکھیں گے۔

8.2 اطلاقات(Applications)

طبعی اطلاقات:

فرض کرو کہ ایک ذرہ کسی سیدھی لکیر OX کے ایک نقطہ O سے X کی طرف چل رہا ہے،تب اس ذرہ کی کسی وقت t پر رفتار(Speed)درجہ ذیل ہو گی

$$v = \frac{dx}{dt}$$

اور اس ذرہ کا اسراع(Acceleration)

$$a = \frac{dv}{dt}$$

ہو گا۔

اب اگر یہ ذرہ کسی منحنی پر گردش کر رہا ہو،تب ذرہ کی رفتار

$$v = \frac{ds}{dt}$$

اور اس ذرہ کا اسراع(Acceleration)

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

ہو گا۔

یہاں پر یہ بات ذہن میں رکھنی ہے کہ رفتار اور اسراع کو منفی(-)یا مثبت(+)نشان کے ساتھ دکھایا جاتا ہے جب کہ اس ذرہ کی رفتار گھٹ رہی ہے یا بڑھ رہی ہے اور اسراع گھٹ رہا ہے یا بڑھ رہا ہے۔

کسی آبادی کے اضافہ کی شرح آبادی کے متناسب ہوتی ہے۔ کسی بیکٹریا(Bacteria) کی آبادی کے اضافہ کی شرح $\frac{dx}{dt}$ بیکٹریا کی آبادی x کے متناسب ہوگی، جہاں $x = x(t)$ بیکٹریا کی وقت 't' پر تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔ اس لیے

$$\frac{dx}{dt} \propto x$$

یا

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

جہاں k تناسب کا مثبت $(+)$ مستقل ہے۔

کسی خاص ریڈیوایکٹو(Radioactive) مادہ کی کشی کی شرح موجودہ مقدار کے متناسب ہوتی ہے۔ اگر کسی ریڈیوایکٹو مادہ کی مقدار 'm' ہو کسی وقت 't' پر تب اس مادہ کی شرح درجہ ذیل ہوگی

$$\frac{dm}{dt} \propto m$$

یا

$$\frac{dm}{dt} = km$$

جہاں k تناسب کا منفی $(-)$ مستقل ہے۔

ٹھنڈک کے لیے نیوٹن کا قانون:

اس قانون کے مطابق، ٹھنڈی ہو رہی کسی جسم(Body) میں درجہ حرارت میں بدلاؤ کی شرح جسم کے درجہ حرارت T اور اس کے چاروں طرف کے ماحول کے درجہ حرارت T_0 کے درمیانی فرق کے متناسب ہوتا ہے۔ اس لیے

$$\frac{dT}{dt} \propto (T - T_0), \qquad T - T_0 > 0$$

یا

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0)$$

جہاں k تناسب کا مثبت $(+)$ مستقل ہے۔ یہاں جسم(Body) میں درجہ حرارت میں بدلاؤ کی شرح $\frac{dT}{dt}$ کو منفی اس لیے لیا گیا ہے کہ ٹھنڈی ہو رہی بوڈی کے درجہ حرارت میں لگاتار کمی ہو رہی ہے۔

مثال 1۔ کسی ملک کی آبادی 50 سال میں دوگنی ہو جاتی ہے۔ کتنے سال میں اس ملک کی آبادی تین گنا ہو جائیگی؟

حل۔ فرض کرو کہ ملک کی آبادی 't' سال میں x ہے۔ جب $t = 0$، تب ملک کی آبادی x_0 ہے۔ تب ہم جانتے ہیں کہ

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

جہاں k تناسب کا مستقل ہے۔ اب

$$\frac{dx}{x} = kdt$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\log x = kt + \log c$$

$$\Rightarrow \quad \log \frac{x}{c} = kt$$

$$\Rightarrow \quad x = ce^{kt}$$

$t = 0$ پر $x = x_0$، تب

$$x_0 = c$$

اس لیے

$$x = x_0 e^{kt}$$

اور $t = 50$ پر $x = 2x_0$، تب

$$2x_0 = x_0 e^{50k}$$

$$\Rightarrow \quad \log 2 = 50k$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{1}{50}\log 2$$

فرض کرو کہ T سال میں آبادی تین گنا ہو جائیگی، تب

$$3x_0 = x_0 e^{\left(\frac{1}{50}\log 2\right)T}$$

$$\Rightarrow \quad \log 3 = \left(\frac{1}{50}\log 2\right)T$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{50 \log 3}{\log 2}$$

8.3 عمودی ٹراجکٹری (Orthogonal Trajectory)

وہ منحنی جو کسی منحنیات کے خاندان کے کسی رکن کو کسی دیے گیے قانون کے مطابق کاٹتا ہے، اس منحنیات کے خاندان کی ٹراجکٹری کہلاتی ہے۔ کوئی ٹراجکٹری عمودی ہوگی اگر یہ منحنیات کے خاندان کے ہر ایک رکن کو 90° پر کاٹے۔

ایک خط جو کسی ہم مرکزی (Concentric) دائرے کے مشترکہ مرکز سے ہو کر گزرتی ہے، وہ دائروں کے خاندان کے ہر ایک رکن کو 90° پر کاٹتی ہے۔ اس لیے اس خط کو ہم مرکزی حلقوں کے خاندان کی ٹراجکٹری کہتے ہیں۔ اس طرح کے لامحدود خطوط ہوتے ہیں۔ کسی منحنیات کے خاندان کی عمودی ٹراجکٹری خود ایک خاندان کو تشکیل دیتی ہے۔ اب ہم عمودی ٹراجکٹری کی تفرقی مساوات حاصل کریں گے جس کو حل کرکے عمودی ٹراجکٹری حاصل ہو جائیگی۔

8.3.1 جب مساوات کارتیزی شکل میں ہو (When Equations in Cartesian Form)

فرض کیجیے کہ منحنیات کے خاندان کی مساوات درجہ ذیل ہے

$$\varphi(x, y, a) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

جہاں a ایک پیرامیٹر ہے اور فرض کرو کہ اس خاندان کی تفرقی مساوات درجہ ذیل ہے

$$\psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad \text{.....(2)}$$

فرض کرو کہ خاندان کے کسی منحنی C کے کسی نقطہ $P(x, y)$ پر ایک عمودی ٹراجکٹری T کاٹتی ہے۔ نقطہ $P(x, y)$ ٹراجکٹری پر ہے۔ نقطہ $P(x, y)$ پر C کا جھکاؤ $\frac{dy}{dx}$ اور $P(x, y)$ پر ٹراجکٹری T کا جھکاؤ $\frac{dY}{dX}$ ہوگا۔ چوں کہ C اور T ایک دوسرے کو 90° پر کاٹتے ہیں، اس لیے

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{dX}{dY}$$

اب x کی جگہ X، y کی جگہ Y اور $\frac{dy}{dx}$ کی جگہ $\frac{dX}{dY}$ – مساوات (2) میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوگا

$$\psi\left(X, Y, -\frac{dX}{dY}\right) = 0$$

(x, y) کو (X, Y) کی جگہ رکھنے پر دی گئی منحنی کے خاندان کے لیے عمودی ٹراجکٹری حاصل ہوگی جو کہ درجہ ذیل ہے

$$\psi\left(x, y, -\frac{dx}{dy}\right) = 0$$

ذہن نشین رکھیں کہ کسی منحنیات کے خاندان کی عمودی ٹراجکٹری حاصل کرنے کے لیے اس خاندان کی دی گئی تفرقی مساوات میں $\frac{dy}{dx}$ کی جگہ $\frac{dx}{dy}$ – رکھتے ہیں۔

مثال 1۔ دائروں کے خاندان $x^2 + y^2 = r^2$ کے لیے عمودی ٹراجکٹری حاصل کریے۔

حل۔ دی گئی ہم مرکزی دائرے کی مساوات ہے

$$x^2 + y^2 = r^2$$

جہاں r ایک پیرامیٹر ہے۔

اوپر دی گئی مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کے لیے تفرقی مساوات ہے۔ عمودی ٹراجکٹری حاصل کرنے کے لیے اس مساوات میں $\frac{dy}{dx}$ کی جگہ $\frac{dx}{dy}$ – رکھتے ہیں

$$-\frac{dx}{dy} = \frac{-x}{y}$$

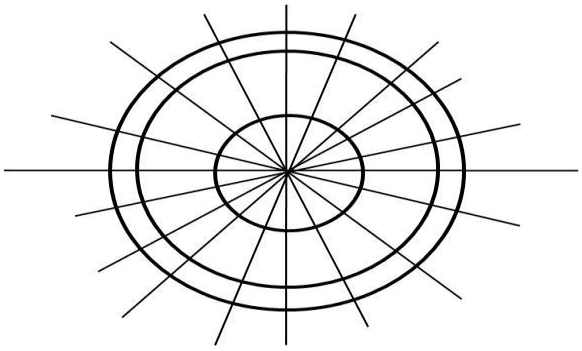
$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\log y = \log x + \log c$$

$$\Rightarrow y = cx$$

جو کہ ان خطوط کے خاندان کی نمائندگی کرتی ہے جو مبدا $(0, 0)$ سے ہو کر گزرتی ہیں۔



شکل 8.3.1.1

مثال 2۔ منحنیات کے خاندان $xy = c^2$، جہاں c ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری حاصل کریے۔

حل۔ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات ہے

$$xy = c^2$$

اوپر دی گئی مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y + x\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کے لیے تفرقی مساوات ہے۔ اس مساوات میں $\frac{dy}{dx}$ کی جگہ $-\frac{dx}{dy}$ رکھنے پر

$$-\frac{dx}{dy} = \frac{-y}{x}$$

$$\Rightarrow ydy - xdx = 0$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow y^2 - x^2 = a^2$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات کے لیے عمودی ٹراجکٹری ہے۔

مثال 3۔ ثابت کرو کہ مکافی (پیرابولہ) کا نظام $y^2 = 4a(x + a)$ خود عمودی ہے، جہاں a ایک پیرامیٹر ہے۔

حل۔ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات ہے

$$y^2 = 4a(x + a) \quad \text{.....(1)}$$

مساوات (1) کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2y\frac{dy}{dx} = 4a$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y} \quad \text{.....(2)}$$

مساوات(1)اور(2)سے aکا اخراج کرنے پر

$$y^2 = 2y\frac{dy}{dx}\left(x + \frac{y}{2}\frac{dy}{dx}\right)$$
$$y = 2x\frac{dy}{dx} + y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \quad \text{.....(3)}$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کے لیے تفرقی مساوات ہے۔اس مساوات میں $\frac{dy}{dx}$کی جگہ $\frac{dx}{dy}$ رکھنے پر

$$y = 2x\left(-\frac{dx}{dy}\right) + y\left(-\frac{dx}{dy}\right)^2$$
$$\Rightarrow y = -\frac{2x}{\frac{dy}{dx}} + \frac{y}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$
$$\Rightarrow y = 2x\frac{dy}{dx} + y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کی تفرقی مساوات کی طرح ہی ہے۔اس لیے دیے گیے مکافی کا نظام خود عمودی ہے۔

مثال4۔ منحنیات کے خاندان $ax^2 + y^2 = 1$کے لیے عمودی ٹراجکٹری حاصل کریے۔

حل۔ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات ہے

$$ax^2 + y^2 = 1$$

جہاں aایک پیرامیٹر ہے۔

اس مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2ax + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$a = \frac{-y}{x}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

aکی یہ قیمت دی گئی مساوات میں رکھنے پر

$$\left\{\frac{-y}{x}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}x^2 + y^2 = 1$$
$$\Rightarrow y^2 = 1 + xy\frac{dy}{dx}$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کے لیے تفرقی مساوات ہے۔اس مساوات میں $\frac{dy}{dx}$کی جگہ $\frac{dx}{dy}$ رکھنے پر

$$y^2 = 1 + xy\left(-\frac{dx}{dy}\right)$$
$$\Rightarrow xy\left(\frac{dx}{dy}\right) = 1 - y^2$$

$$\Rightarrow xdx = \left(\frac{1}{y} - y\right) dy$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \log c = \log y$$

$$\Rightarrow \log \frac{y}{c} = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

$$\Rightarrow y = ce^{\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)}$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات کے لیے عمودی ٹراجکٹری ہے۔

مثال5۔ ثابت کرو کہ $x^2 + y^2 + 2fy - 1 = 0$ کی عمودی ٹراجکٹری $x^2 + y^2 + 2gx + 1 = 0$ ہے۔

حل۔ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات ہے

$$x^2 + y^2 + 2gx + 1 = 0$$

جہاں g ایک پیرامیٹر ہے۔

اس مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} + 2g = 0$$

$$\Rightarrow g = -\left(x + y\frac{dy}{dx}\right)$$

g کی یہ قیمت دی گئی مساوات میں رکھنے پر

$$x^2 + y^2 - 2\left(x + y\frac{dy}{dx}\right)x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow -x^2 + y^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کے لیے تفرقی مساوات ہے۔اس مساوات میں $\frac{dy}{dx}$ کی جگہ $-\frac{dx}{dy}$ رکھنے پر

$$-x^2 + y^2 - 2xy\left(-\frac{dx}{dy}\right) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2}{y} + y - 2x\left(-\frac{dx}{dy}\right) + \frac{1}{y} = 0$$

$$\Rightarrow 2x\frac{dx}{dy} = \frac{x^2}{y} - \left(y + \frac{1}{y}\right)$$

فرض کرو کہ $x^2 = m$، تب $2x\frac{dx}{dy} = \frac{dm}{dy}$ اس لیے

$$\frac{dm}{dy} - \frac{m}{y} = -\left(y + \frac{1}{y}\right)$$

جو کہ ایک خطی تفرقی مساوات ہے۔اس لیے

$$I.F. = e^{-\int \frac{1}{y} dy} = e^{-\log y} = \frac{1}{y}$$

اس لیے خطی تفرقی مساوات کا حل ہو گا

$$m\frac{1}{\mathrm{y}} = -\int \frac{1}{\mathrm{y}}\left(\mathrm{y}+\frac{1}{\mathrm{y}}\right)+c$$
$$= -\int \left(1+\frac{1}{\mathrm{y}^2}\right)+c$$
$$= -\mathrm{y}+\frac{1}{\mathrm{y}}+c$$

اب $m = x^2$ رکھنے پر

$$\frac{x^2}{\mathrm{y}} = -\mathrm{y}+\frac{1}{\mathrm{y}}+c$$

یہاں $2f = -c$ رکھنے پر حاصل ہوتا ہے

$$x^2+\mathrm{y}^2+2fy-1=0$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات کے لیے عمودی ٹراجکٹری ہے۔اس سے ثابت ہوتا ہے کہ $x^2+\mathrm{y}^2+2gx+1=0$ کی عمودی ٹراجکٹری $x^2+\mathrm{y}^2+2fy-1=0$ ہے۔

مثال6۔ منحنیات کے خاندان $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2+\lambda}=1$ جہاں λ ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری حاصل کریے۔

حل۔ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات ہے

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2+\lambda}=1$$

من درجہ بالا مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y\frac{dy}{dx}}{a^2+\lambda}=0$$
$$\Rightarrow a^2+\lambda = \frac{-a^2y}{x}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$a^2+\lambda$ کی یہ قیمت دی گئی مساوات میں رکھنے پر

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{\mathrm{y}^2}{\frac{-a^2y}{x}\left(\frac{dy}{dx}\right)}=1$$
$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{xy}{a^2}\left(\frac{dx}{dy}\right)=1$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کے لیے تفرقی مساوات ہے۔

اس مساوات میں $\frac{dy}{dx}$ کی جگہ $-\frac{dx}{dy}$ رکھنے پر ضروری عمودی ٹراجکٹری حاصل ہو جاتی ہے۔

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{xy}{a^2}\left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\right)=1$$
$$\Rightarrow xy\left(\frac{dy}{dx}\right)=a^2-x^2$$

$$\Rightarrow ydy = \left(\frac{a^2}{x} - x\right)dx$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = a^2 \log x + \frac{c}{2}$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2a^2 \log x = c$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات کے لیے عمودی ٹراجکٹری ہے۔

مثال7۔ منحنیات کے خاندان $y = ax^3$ جہاں a ایک اختیاری مستقل ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری حاصل کریے۔

حل۔ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات ہے

$$y = ax^3$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر

$$\frac{dy}{dx} = 3ax^2$$
$$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{3x^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

a کی یہ قیمت دی گئی مساوات میں رکھنے پر

$$y = \frac{1}{3x^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)x^3$$
$$\Rightarrow 3y = x\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کے لیے تفرقی مساوات ہے۔ عمودی ٹراجکٹری حاصل کرنے کے لیے اس مساوات میں $\frac{dy}{dx}$ کی جگہ $-\frac{dx}{dy}$ رکھتے ہیں، اس لیے

$$3y = x\left(-\frac{dx}{dy}\right)$$
$$\Rightarrow \quad 3ydy + xdx = 0$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{3y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = \frac{c}{2}$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + 3y^2 = c$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات کے لیے عمودی ٹراجکٹری ہے۔

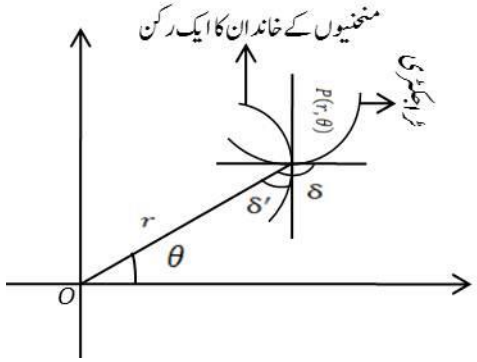
8.3.2 جب مساوات قطبی شکل میں ہو(When Equations in Polar Form)

فرض کرو کہ منحنیات کے خاندان کی مساوات درجہ ذیل ہے

$$\varphi(r, \theta, a) = 0 \qquad \text{.....(1)}$$

جہاں a ایک پیرامیٹر ہے اور فرض کرو کہ اس خاندان کی تفرقی مساوات درجہ ذیل ہے

$$\psi\left(r, \theta, \frac{dr}{d\theta}\right) = 0 \qquad \text{.....(2)}$$



شکل8.3.2.1

فرض کرو کہ خاندان کے کسی منحنی C کے کسی نقطہ $P(r, \theta)$ پر اسی خاندان کی ایک عمودی ٹراجکٹری T کاٹتی ہے۔ اگر P ٹراجکٹری پر مان لیا جایے، تب اس نقطہ کو $P(\rho, \alpha)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ مان لو کہ δ اور δ' منحنی C اور ٹراجکٹری T کے نقطہ P پر مماس (Tangents) کے ذاویے (Angles) ہیں جو کہ برداری نصف قطر (Radius Vector) OP سے بنایے گیے ہیں۔ تب

$$\tan\delta' = \rho\frac{d\alpha}{d\rho} \text{ اور } \tan\delta = r\frac{d\theta}{dr}$$

اب چوں کہ C اور T ایک دوسرے کو 90° پر کاٹتے ہیں، اس لیے

$$|\delta - \delta'| = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \delta = \delta' + \frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow \tan\delta = \tan\left(\delta' + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\Rightarrow \tan\delta = -\cot\delta'$$
$$\Rightarrow \tan\delta\tan\delta' = -1$$
$$\Rightarrow \left(r\frac{d\theta}{dr}\right)\left(\rho\frac{d\alpha}{d\rho}\right) = -1$$
$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dr} = \frac{-1}{r\rho\frac{d\alpha}{d\rho}}$$
$$\Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = -r\rho\frac{d\alpha}{d\rho}$$

نقطہ P پر $r = \rho$ اور $\theta = \alpha$، اس لیے

$$\frac{dr}{d\theta} = -\rho^2\frac{d\alpha}{d\rho}$$

اب مساوات (2) سے

$$\psi\left(\rho, \alpha, -\rho^2\frac{d\alpha}{d\rho}\right) = 0$$

(ρ, α) کو (r, θ) سے بدل کر ہمیں ضروری عمودی ٹراجکٹری کی تفرقی مساوات حاصل ہو جاتی ہے، جو کہ درجہ ذیل ہو گی

$$\psi\left(r, \theta, -r^2 \frac{d\theta}{dr}\right) = 0$$

زہن نشین رکھیں کہ کسی منحنیات کے خاندان کی تفرقی مساوات میں $\frac{dr}{d\theta}$ کی جگہ $-r^2 \frac{d\theta}{dr}$ رکھ کر اس منحنیات کے خاندان کی عمودی ٹراجکٹری حاصل ہو جاتی ہے۔ اس طرح حاصل تفرقی مساوات کو حل کرنے پر عمودی ٹراجکٹری کے خاندان کی مساوات حاصل ہو جاتی ہے۔

مثال1۔ منحنیات کے خاندان $r = a\theta$، جہاں a ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری حاصل کریے۔

حل۔ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات ہے

$$r = a\theta$$

اس مساوات کو بہ لحاظ θ تفرق کرنے پر

$$\frac{dr}{d\theta} = a$$

a کی یہ قیمت دی گئی مساوات میں رکھنے پر

$$r = \theta \frac{dr}{d\theta}$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کے لیے تفرقی مساوات ہے۔ عمودی ٹراجکٹری کی تفرقی مساوات حاصل کرنے کے لیے اس مساوات میں $\frac{dr}{d\theta}$ کی جگہ $-r^2 \frac{d\theta}{dr}$ رکھتے ہیں، اس لیے

$$r = \theta\left(-r^2 \frac{d\theta}{dr}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{r} = -\theta d\theta$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\log r = -\frac{\theta^2}{2} + \log c$$

$$\Rightarrow \quad \log \frac{r}{c} = -\frac{\theta^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad r = ce^{-\frac{\theta^2}{2}}$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات کے لیے عمودی ٹراجکٹری ہے۔

مثال2۔ منحنیات کے خاندان $r = a(1 + \cos\theta)$ جہاں a ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری حاصل کریے۔

حل۔ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات ہے

$$r = a(1 + \cos\theta)$$

اس مساوات کو بہ لحاظ θ تفرق کرنے پر

$$\frac{dr}{d\theta} = -a \sin\theta$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)$$

a کی یہ قیمت دی گئی مساوات میں رکھنے پر

$$\Rightarrow r = -\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)(1+\cos\theta)$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کے لیے تفرقی مساوات ہے۔ عمودی ٹراجکٹری کی تفرقی مساوات حاصل کرنے کے لیے اس مساوات میں $\frac{dr}{d\theta}$ کی جگہ $-r^2\frac{d\theta}{dr}$ رکھتے ہیں، اس لیے

$$r = -\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\left(-r^2\frac{d\theta}{dr}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{r} = (\text{cosec}\,\theta + \cot\theta)d\theta$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\log|r| = \log|\text{cosec}\,\theta - \cot\theta| + \log|\sin\theta| + \log c$$
$$\Rightarrow \log|r| = \log|c\sin\theta\,(\text{cosec}\,\theta - \cot\theta)|$$
$$\Rightarrow r = c\sin\theta\,(\text{cosec}\,\theta - \cot\theta)$$
$$\Rightarrow r = c(1-\cos\theta)$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات کے لیے عمودی ٹراجکٹری ہے۔

مثال 3۔ منحنیات کے خاندان $r^n\sin n\theta = a^n$ جہاں a ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری حاصل کریے۔

حل۔ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات ہے

$$r^n\sin n\theta = a^n$$
$$n\log r + \log\sin n\theta = n\log a$$

اس مساوات کو بہ لحاظ θ تفرق کرنے پر

$$\frac{n}{r}\frac{dr}{d\theta} + \frac{1}{\sin n\theta}\times n\cos n\theta = 0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} + \cot n\theta = 0$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کے لیے تفرقی مساوات ہے۔ عمودی ٹراجکٹری کی تفرقی مساوات حاصل کرنے کے لیے اس مساوات میں $\frac{dr}{d\theta}$ کی جگہ $-r^2\frac{d\theta}{dr}$ رکھتے ہیں، اس لیے

$$\frac{1}{r}\left(-r^2\frac{d\theta}{dr}\right) + \cot n\theta = 0$$
$$\Rightarrow \frac{dr}{r} + \tan n\theta\, d\theta = 0$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\log|r| = \frac{1}{n}\log|sec\, n\theta| + \log c$$
$$\Rightarrow n\log|r| = \log|sec\, n\theta| + n\log c$$
$$\Rightarrow r^n = c^n\, sec\, n\theta$$

$$\Rightarrow \qquad r^n \cos n\theta = c^n$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات کے لیے عمودی ٹراجکٹری ہے۔

مثال 4۔ منحنیات کے خاندان $r\theta = a$ جہاں a ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری حاصل کریے۔

حل۔ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات ہے

$$r\theta = a$$

اس مساوات کو بہ لحاظ θ تفرق کرنے پر

$$\theta \frac{dr}{d\theta} + r = 0$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کے لیے تفرقی مساوات ہے۔ عمودی ٹراجکٹری کی تفرقی مساوات حاصل کرنے کے لیے اس مساوات میں $\frac{dr}{d\theta}$ کی جگہ $-r^2 \frac{d\theta}{dr}$ رکھتے ہیں، اس لیے

$$\theta \left(-r^2 \frac{d\theta}{dr}\right) + r = 0$$

$$\Rightarrow \qquad 1 - r\theta \frac{d\theta}{dr} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dr}{r} = \theta d\theta$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\log|r| = \frac{\theta^2}{2} + \log c$$

$$\Rightarrow \log\frac{r}{c} = \frac{\theta^2}{2}$$

$$\Rightarrow r = ce^{\frac{\theta^2}{2}}$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کی مساوات کے لیے عمودی ٹراجکٹری ہے۔

8.4 اوبلک ٹراجکٹری (Oblique Trajectory)

تعریف: اگر کوئی منحنی کسی دیے گیے منحنیات کے خاندان کے ہر ایک رکن کو جھکاؤ $\alpha \neq 90^\circ$ پر کاٹتا ہے، تب اس کو اوبلک ٹراجکٹری کہتے ہیں۔

نوٹ: کسی منحنیات کے خاندان کی تفرقی مساوات میں $\frac{dy}{dx}$ کی جگہ $\frac{p+\tan\alpha}{1-p\tan\alpha}$ رکھنے پر اس خاندان کی اوبلک ٹراجکٹری حاصل ہو جاتی ہے، جہاں $p = \frac{dy}{dx}$ اور α وہ جھکاؤ ہے جو اوبلک ٹراجکٹری، منحنیات کے خاندان کے ہر ایک رکن کو کاٹ کر بناتی ہے۔

مثال 1۔ دائروں کے خاندان $x^2 + y^2 = r^2$ کو 30° کے جھکاؤ پر کاٹنے والی اوبلک ٹراجکٹری کی مساوات حاصل کریے۔

حل۔ دی گئی دائروں کے خاندان کی مساوات ہے

$$x^2 + y^2 = r^2$$

جہاں r ایک پیرامیٹر ہے۔

من درجہ بالا مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

جو کہ دی گئی منحنیات کے خاندان کے لیے تفرقی مساوات ہے۔ اوبلک ٹراجکٹری حاصل کرنے کے لیے اس مساوات میں $\frac{dy}{dx}$ کی جگہ $\frac{p+\tan\alpha}{1-p\tan\alpha}$ رکھتے ہیں، یہاں $\alpha = 30^\circ$ ہے۔ اس لیے

$$\frac{p + \tan 30^\circ}{1 - p\tan 30^\circ} = \frac{-x}{y}$$
$$\Rightarrow \frac{p + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{p}{\sqrt{3}}} = \frac{-x}{y}$$
$$\Rightarrow y\left(\sqrt{3}p + 1\right) + x\left(\sqrt{3} - p\right) = 0$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt{3}y - x\right)p + \sqrt{3}x + y = 0$$
$$\Rightarrow p = -\frac{\sqrt{3}x + y}{\sqrt{3}y - x}$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{3} + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}\sqrt{3}}$$

جو ایک متجانس خطی تفرقی مساوات ہے۔ اب فرض کرو کہ $y = xv$، تب $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ اس لیے

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{\sqrt{3} + \frac{xv}{x}}{1 - \frac{xv}{x}\sqrt{3}}$$
$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{\sqrt{3} + v}{1 - \sqrt{3}v} - v$$
$$= \frac{\sqrt{3} + v - v + \sqrt{3}v^2}{1 - \sqrt{3}v}$$
$$= \frac{\sqrt{3}(1 + v^2)}{1 - \sqrt{3}v}$$
$$\Rightarrow \sqrt{3}\frac{dx}{x} = \frac{1 - \sqrt{3}v}{1 + v^2}dv$$
$$= \frac{1}{1 + v^2}dv - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2v}{1 + v^2}\right)dv$$
$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{1 + v^2}\right)dv - \frac{1}{2}\left(\frac{2v}{1 + v^2}\right)dv$$
$$\Rightarrow \quad 2\frac{dx}{x} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{1 + v^2}\right)dv - \left(\frac{2v}{1 + v^2}\right)dv$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2\log x = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1} v - \log(1+v^2) + \log c$$

$$\Rightarrow \log\frac{x^2(1+v^2)}{c} = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1} v$$

$$\Rightarrow x^2(1+v^2) = ce^{\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1} v}$$

v کی جگہ $\frac{y}{x}$ رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x^2\left\{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right\} = ce^{\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = ce^{\frac{2}{\sqrt{3}}tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$$

جو کہ دیے گیے دائروں کے خاندان کی ضروری اوبلک ٹراجکٹری ہے۔

8.5 اکتسابی نتائج(Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے پڑھا:

- فرض کرو کہ ایک ذرہ کسی سیدھی لکیر OX کے ایک نقطہ O سے X کی طرف چل رہا ہے، تب اس ذرہ کی کسی وقت t پر رفتار(Speed)اور اس ذرہ کا اسراع(Acceleration) بالترتیب $v = \frac{dx}{dt}$ اور $a = \frac{dv}{dt}$ ہوگا۔اور اگر یہ ذرہ کسی منحنی پر گردش کر رہا ہو، تب ذرہ کی رفتار $v = \frac{ds}{dt}$ اور اس ذرہ کا اسراع(Acceleration) $a = \frac{d^2s}{dt^2}$ ہوگا۔
- کسی آبادی کے اضافہ کی شرح آبادی کے متناسب ہوتی ہے۔
- کسی خاص تابکار(Radioactive)مادہ کی کشی کی شرح موجودہ مقدار کے متناسب ہوتی ہے۔
- ٹھنڈی ہو رہی کسی بوڈی میں درجہ حرارت میں بدلاؤ کی شرح بوڈی کے درجہ حرارت T اور اس کے چاروں طرف کے ماحول کے درجہ حرارت T_0 کے درمیانی فرق کے متناسب ہوتا ہے۔اس لیے

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0)$$

جہاں k تناسب کا مثبت(+) مستقل ہے۔

- وہ منحنی جو کسی منحنیات کے خاندان کے کسی رکن کو کسی دیے گیے قانون کے مطابق کاٹتا ہے، اس منحنیات کے خاندان کی ٹراجکٹری کہلاتی ہے۔
- کوئی ٹراجکٹری عمودی ہوگی اگر یہ منحنیات کے خاندان کے ہر ایک رکن کو 90° پر کاٹے۔کسی منحنیات کے خاندان کی عمودی ٹراجکٹری حاصل کرنے کے لیے اس خاندان کی دی گئی تفرقی مساوات میں $\frac{dy}{dx}$ کی جگہ $-\frac{dx}{dy}$ رکھتے ہیں۔
- اگر منحنی پولر شکل میں ہو تب اس منحنیات کے خاندان کی تفرقی مساوات میں $\frac{dr}{d\theta}$ کی جگہ $-r^2\frac{d\theta}{dr}$ رکھ کر اس منحنی کی قطبی شکل میں

عمودی ٹراجکٹری حاصل ہو جاتی ہے۔

- اگر کوئی منحنی کسی دیے گیے منحنیات کے خاندان کے ہر ایک رکن کو جھکاؤ $\alpha \neq 90^\circ$ پر خاٹتا ہے، تب اس کو اوبلک ٹراجکٹری کہتے ہیں۔ کسی منحنیات کے خاندان کی تفرقی مساوات میں $\frac{dy}{dx}$ کی جگہ $\frac{p+\tan\alpha}{1-p\tan\alpha}$ رکھنے پر اس خاندان کی اوبلک ٹراجکٹری حاصل ہو جاتی ہے۔

8.6 کلیدی الفاظ (Keywords)

منحنیات کے خاندان، عمودی ٹراجکٹری، اوبلک ٹراجکٹری، قطبی شکل، متجانس

8.7 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

8.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. کسی خاص ریڈیوایکٹو (Radioactive) مادہ کی کشی کی شرح موجودہ مقدار کے متناسب ہوتی ہے۔ (T/F)
2. کسی بیکٹریا (Bacteria) کی آبادی کے اضافہ کی شرح $\frac{dx}{dt}$ بیکٹریا کی آبادی x کے غیر متناسب ہو گی، جہاں $x = x(t)$ بیکٹریا کی وقت 't' پر تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔ (T/F)
3. کسی منحنیات کے خاندان کی عمودی ٹراجکٹری حاصل کرنے کے لیے اس خاندان کی دی گئی تفرقی مساوات میں $\frac{dy}{dx}$ کی جگہ $\frac{dx}{dy}$ رکھتے ہیں۔ (T/F)
4. فرض کرو کہ کوئی منحنی پولر شکل میں ہے، تباس منحنیات کے خاندان کی تفرقی مساوات میں $\frac{dr}{d\theta}$ کی جگہ $-r^2\frac{d\theta}{dr}$ رکھ کر اس منحنی کی پولر شکل میں عمودی ٹراجکٹری حاصل ہو جاتی ہے۔ (T/F)
5. کسی منحنیات کے خاندان کی تفرقی مساوات میں $\frac{dy}{dx}$ کی جگہ $\frac{p+\tan\alpha}{1-p\tan\alpha}$ رکھنے پر اس خاندان کی اوبلک ٹراجکٹری حاصل ہو جاتی ہے۔ (T/F)
6. ٹھنڈک کا نیوٹن کا قانون کیا ہے؟
7. اوبلک ٹراجکٹری کیا ہے؟
8. ٹراجکٹری کی تعریف کریے۔
9. عمودی ٹراجکٹری کی تعریف کریے۔

8.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. منحنیات کے خاندان $r = a(1-\cos\theta)$ جہاں a ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری محسوب کریے۔
2. منحنیات کے خاندان $r = e^{a\theta}$ جہاں a ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری معلوم کرو۔

3. منحنیات کے خاندان $r = a + \sin 5\theta$ جہاں a ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری حاصل کرو۔
4. منحنیات کے خاندان $r = a(\sec\theta + \tan\theta)$ جہاں a ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری معلوم کرو۔
5. منحنیات کے خاندان $r = 2a/(1 + \cos\theta)$ جہاں a ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری محسوب کریے۔
6. منحنیات کے خاندان $r^n = a^n \sin n\theta$ جہاں a ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری حاصل کرو۔

8.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. منحنیات کے خاندان $x^2 + y^2 + 2gx + a = 0$ جہاں g ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری حاصل کریے۔
2. منحنیات کے خاندان $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ جہاں a ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹر یمحسوب کریے۔
3. منحنیات کے خاندان $x^2 = cy$ جہاں c ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری معلوم کریے۔
4. منحنیات کے خاندان $\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1$ جہاں λ ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری معلوم کریے۔
5. منحنیات کے خاندان $x^3 = cy^2$ جہاں c ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری حاصل کریے۔

جوابات:

8.7.1 معروضی سوالات کے جوابات

1. (T)
2. (F)
3. (F)
4. (T)
5. (T)

8.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $r = c(1 + \cos\theta)$
2. $(\log r)^2 + \theta^2 = b^2$
3. $ce^{\frac{25}{r}} = \sec 5\theta + \tan 5\theta$
4. $r = ce^{-\sin\theta}$
5. $r = \frac{2c}{(1-\cos\theta)}$
6. $r^n = b^n \cos n\theta$

8.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالا تکے جوابات

1. $x^2 + y^2 + 2\mu y - \mathrm{c} = 0$
2. $y^{4/3} - x^{4/3} = b^{4/3}$
3. $x^2 + 2\mathrm{y}^2 = b^2$
4. $\left(x + y\frac{dy}{dx}\right)\left(x - y\frac{dx}{dy}\right) = a^2 - b^2$
5. $x^2 + 2\mathrm{y}^2 = b^2$

اکائی 9۔ مستقل ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساواتیں

Homogeneous Linear Differential Equations with) (Constant Coefficients

اکائی کے اجزا

9.0		تمہید
9.1		مقاصد
9.2		مستقل ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساواتیں
	9.2.1	کچھ بنیادی قضیے
	9.2.2	اتمامی تفاعلات
9.3		اکتسابی نتائج
9.4		کلیدی الفاظ
9.5		نمونہ امتحانی سوالات
	9.5.1	معروضی جوابات کے حامل سوالات
	9.5.2	مختصر جوابات کے حامل سوالات
	9.5.3	طویل جوابات کے حامل سوالات

9.0 تمہید(Introduction)

گزشتہ اکائی میں ہم نے پہلے رتبے اور پہلے درجے کی مساواتوں کے اطلاقات کے بارے میں پڑھا خاصطور پر عمودی ٹراجیکٹری کو حاصل کرنا سیکھا۔اس اکائی میں ہم مستقل ضریب کی اعلی رتبہ کی متجانس تفرقی مساوات اور اس کی معاون(Auxiliary)مساوات کی مدد سے اتمامی تفاعل کو حاصل کرنے کے مختلف طریقوں پر بحث کریں گے۔

9.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ متجانس تفرقی مساوات کی بنیادی معلومات حاصل کریں گے اور پھر معاون مساوات کی مدد سے اتمامی تفاعلات کو حاصل کر کے دی گئی متجانس تفرقی مساوات کا حل معلوم کریں گے۔

9.2 مستقل ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساواتیں

(Homogeneous Linear Differential Equations with Constant Coefficients)

nرتبہ کی خطی تفرقی مساوات درجہ ذیل شکل کی ہوتی ہے

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + P_{n-1}\frac{dy}{dx} + P_n y = Q \quad \text{.....(1)}$$

جہاں $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}, P_n$ یا تو x کے تفاعلات ہیں یا مستقلات(Constants)ہیں اور ان میں y اور اس کے مشتقات موجود نہیں ہوتے ہیں۔اگر $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}, P_n$ مستقلات ہوں اور x کا تفاعل Q ہو تب، مساوات(1) کو مستقل ضریب کے ساتھ خطی تفرقی مساوات کہتے ہیں۔

اب اگر $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ مستقلات ہوں اور Q یا تو مستقل ہو یا x کا تفاعل ہو تب، مساوات(1)سے

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = Q$$

اگر $\frac{d}{dx} = D, \frac{d^2}{dx^2} = D^2, \frac{d^3}{dx^3} = D^3, \cdots, \frac{d^n}{dx^n} = D^n$، تب

$$D^n y + a_1 D^{n-1} y + a_2 D^{n-2} y + \cdots + a_{n-1} D y + a_n y = Q$$
$$(D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \cdots + a_{n-1} D + a_n) y = Q$$

اس مساوات کو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں

$$f(D)y = Q \quad \text{.....(2)}$$

جہاں $f(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \cdots + a_{n-1} D + a_n$ ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر کسی تفرقی مساوات کا رتبہ n ہے، تب اس کے عام حل(General Solution)میں n اختیاری مستقلات ہوں گے۔ اگر کسی حل میں اختیاری مستقلات موجود نہ ہوں تب اس حل کو خاص تکملہ (Particular Integral) کہتے ہیں۔اگر مساوات (2) میں $Q = 0$، تب مساوات

$$f(D)y = 0 \qquad \text{.....(3)}$$

متجانس تفرقی مساوات کہلاتی ہے۔

9.2.1 کچھ بنیادی قضیے (Some Basic Theorems)

I. اگر $y = v$ مساوات $f(D)y = Q$ کا خاص تکملہ ہو اور $y = u$ جس میں n غیر تابع اختیاری مستقلات ہیں، مساوات $f(D)y = 0$ کا عام حل ہو، تب $y = u + v$ مساوات $f(D)y = Q$ کا عام حلہو گا۔

ثبوت: چوں کہ $y = v$ مساوات (2) کا خاص تکملہ (Particular Integral) ہے اور $y = u$ مساوات (3) کا عام حل ہے، اس لیے

$$f(D)v = Q$$

اور

$$f(D)u = 0$$

اس لیے

$$f(D)(u + v) = f(D)u + f(D)v = 0 + Q = Q$$

اس لیے مساوات $f(D)y = Q$ کا حل $y = u + v$ ہے۔ لیکن اس حل میں n غیر تابع اختیاری مستقل ہیں۔ اس لیے یہ مساوات $f(D)y = Q$ کا عام حل $y = u + v$ ہو گا۔ مساوات $f(D)y = 0$ کے عام حل کو مساوات $f(D)y = Q$ کا اتمامی تفاعل (Complementary Function) کہتے ہیں۔ اس طرح کسی خطی تفرقی مساوات کے لیے عام حل درجہ ذیل طریقے سے حاصل کرتے ہیں

$$y = C.F. + P.I.$$

II. اگر $f(D)y = 0$ کا ایک حل $y = y_1$ ہے، تب $y = cy_1$ بھی اس کا ایک حل ہو گا، جہاں c ایک اختیاری مستقل ہے۔

ثبوت: فرض کرو $f(D)y = 0$ کا ایک حل $y = y_1$ ہے، تب

$$f(D)y_1 = 0$$

اب

$$f(D)cy_1 = cf(D)y_1 = 0$$

اس لیے $y = cy_1$ مساوات $f(D)y = 0$ کا بھی حل ہو گا۔

III. اگر $y = y_1, y = y_2, \cdots, y = y_n$ مساوات $f(D)y = 0$ کے n غیر تابع حل ہیں، تب

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$$

بھی اس کا ایک حل ہو گا، جہاں $c_1, c_2, \cdots, c_n$ اختیاری مستقلات ہیں۔

ثبوت: فرض کرو $y = y_1, y = y_2, \cdots, y = y_n$ مساوات $f(D)y = 0$ کے n غیر تابع حل ہیں، تب

$$f(D)y_1 = 0, f(D)y_2 = 0, \cdots, f(D)y_n = 0 \qquad \text{.....(1)}$$

اب

$$f(D)(c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n) = f(D)c_1y_1 + f(D)c_2y_2 + \cdots + f(D)c_ny_n$$

$$= c_1 f(D)y_1 + c_2 f(D)y_2 + \cdots + c_n f(D)y_n$$

مساوات(1)کااستعمال کرنے پر

$$f(D)(c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n) = 0$$

اس لیے $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$ مساوات $f(D)y = 0$ کاایک حل ہے۔

9.2.2 اتمامی تفاعلات(Complementary Functions)

فرض کرو کہ

$$f(D)y = 0 \qquad \text{.....(1)}$$

ہےاور فرض کرو کہ $m_1, m_2, \cdots, m_n$ درجہ ذیل مساوات جسے معاون(Auxiliary)مساوات کہتے ہیں، کے روٹس(Roots)ہیں

$$f(m) = 0 \qquad \text{.....(2)}$$

تب، مساوات(1)کو درجہ ذیل شکل میں لکھ سکتے ہیں

$$(D - m_1)(D - m_2)\cdots(D - m_n)y = 0 \qquad \text{.....(3)}$$

اس مساوات کی خطی مساوات درجہ ذیل ہیں

$$(D - m_1)\mathrm{y} = 0, (D - m_2)\mathrm{y} = 0, \cdots, (D - m_n)\mathrm{y} = 0 \qquad \text{.....(4)}$$

جن کے حل مساوات(3)کے حل ہوں گےاور پھر مساوات(1)کے بھی حل ہوں گے۔اب مان لو کہ مساوات

$$(D - m_k)\mathrm{y} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{d}{dx} - m_k\right)\mathrm{y} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} - m_k y = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = m_k dx$$

تکمل کرنے پر ہمیں خاص حل حاصل ہوتا ہے

$$y = e^{m_k x}$$

اس لیے مساوات(4)کے خاص حل $y_1 = e^{m_1 x}, y_2 = e^{m_2 x}, \cdots, y_n = e^{m_n x}$ جو کہ مساوات(1)کے بھی ہوں گے۔اس سے درجہ ذیل تین صورتیں ضاہر ہوتی ہیں:

1. جب معاون مساوات کے سبھی روٹس مختلف ہوں:

اس صورت میں فرض کرو کہ $m_1 \neq m_2, \neq \cdots \neq m_n$ حاصل کردہ معاون مساوات کے روٹس ہیں، تب $e^{m_1 x}, e^{m_2 x}, \ldots, e^{m_n x}$ خطی طور پر غیر تابع ہیں۔اس لیے مساوات(1)کاعام حل ہوگا

$$y = C.F. = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \cdots + c_n e^{m_n x} \qquad \text{.....(5)}$$

2. جب معاون مساوات کے کچھ روٹس مساوی ہوں:

اس صورت میں فرض کرو کہ معاون مساوات کے n روٹس میں سے k روٹس مساوی ہیں $m = m_1 = m_2 = \cdots = m_k$ تب مساوات (1) کا عام حل ہو گا

$$y = C.F. = c_1e^{mx} + c_2e^{mx} + \cdots + c_ke^{mx} + c_{k+1}e^{m_{k+1}x} + \cdots + c_ne^{m_nx}$$
$$= (c_1 + c_2 + \cdots + c_k)e^{mx} + c_{k+1}e^{m_{k+1}x} + \cdots + c_ne^{m_nx}$$
$$= Ce^{mx} + c_{k+1}e^{m_{k+1}x} + \cdots + c_ne^{m_nx}$$

,

جہاں $c_1 + c_2 + \cdots + c_k = C$

اس طرح اس حل میں $n - k + 1$ اختیاری مستقلات ہیں۔

چوں کہ معاون مساوات کے پہلے k روٹس مساوی ہیں اس لیے مساوات (1) کو درجہ ذیل طریقہ سے لکھ سکتے ہیں

$$(D - m)^r(D - m_{k+1}) \cdots (D - m_n)y = 0$$

اس لیے اب ہم درجہ ذیل مساوات کا عام حل حاصل کرتے ہیں

$$(D - m)^r y = 0 \qquad \text{.....(6)}$$

اب فرض کرو کہ $y = ve^{mx}$، تب

$$(D - m)y = (D - m)ve^{mx}$$
$$= D(ve^{mx}) - mve^{mx}$$
$$= vme^{mx} + e^{mx}D(v) - mve^{mx}$$
$$= e^{mx}D(v)$$

$(D - m)$ کی مدد سے دونوں طرف آپریٹ کرنے پر

$$(D - m)^2y = (D - m)e^{mx}D(v)$$
$$= D\{e^{mx}D(v)\} - me^{mx}D(v)$$
$$= me^{mx}D(v) + e^{mx}D^2(v) - me^{mx}D(v)$$
$$= e^{mx}D^2(v)$$

یہ طریقہ k مرتبہ دہرانے پر

$$(D - m)^k y = e^{mx}D^k(v)$$

اس لیے مساوات (6) سے

$$e^{mx}D^k(v) = 0$$
$$\Rightarrow \qquad D^k(v) = 0$$

اس مساوات کے خطی طور پر غیر تابع خاص حل درجہ ذیل ہوں گے

$$v = 1, v = x, v = x^2, \cdots, v = x^{k-1}$$

اس لیے عام حل ہو گا $v = c_1 + c_2x + c_3x^2 + \cdots + c_kx^{k-1}$ اور پھر مساوات (6) کا حل ہو گا

$$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2 + \cdots + c_kx^{k-1})e^{mx}$$

اس لیے جب معاون مساوات کے n روٹس میں سے k روٹس $m = m_1 = m_2 = \cdots = m_k$ ہوں، تب

$$C.F. = (c_1 + c_2x + c_3x^2 + \cdots + c_kx^{k-1})e^{mx} + c_{k+1}e^{m_{k+1}x} + \cdots + c_ne^{m_nx}$$

3. جب معاون مساوات کے روٹس ملتف اعداد (Complex Numbers) ہوں:

اس صورت میں فرض کرو کہ $m_1 = \alpha + i\beta$ اور $m_2 = \alpha - i\beta$ حاصل کردہ معاون مساوات کے روٹس ہیں، تب

$$C.F. = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$$

$$= c_1 e^{(\alpha x+i\beta x)} + c_2 e^{(\alpha x-i\beta x)}$$

$$= c_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + c_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x}$$

$$= e^{\alpha x}\left(c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x}\right)$$

$$= e^{\alpha x}\{(c_1 \cos\beta x + c_1 i \sin\beta x) + (c_2 \cos\beta x - c_2 i \sin\beta x)\}$$

$$= e^{\alpha x}\{(c_1 + c_2)\cos\beta x + (c_1 - c_2) i \sin\beta x\}$$

$$= e^{\alpha x}\{A \cos\beta x + B \sin\beta x\}$$

جہاں A اور B نئے اختیاری مستقل ہیں۔

<u>اتمامی تفاعل (C. F.) حاصل کرنے کا طریقہ:</u>

(i) سب سے پہلے دی گئی مساوات کو درجہ ذیل شکل میں لکھیں

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \cdots + a_{n-1} D + a_n) y = 0$$

(ii) اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل طریقہ سے لکھیں

$$m^n + a_1 m^{n-1} + a_2 m^{n-2} + \cdots + a_{n-1} m + a_n = 0$$

(iii) اس مساوات کو m کے لیے حل کریں

(iv) اب اوپر بتایے طریقوں میں سے مناسب طریقہ سے $C.F.$ حاصل کریں۔

مثال 1۔ مساوات $(D^2 + 2D - 15)y = 0$ کو حل کریں۔

حل۔ دی گئی مساوات مستقل ضریب کے ساتھ دوسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات ہے۔ اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$m^2 + 2m - 15 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m-3)(m+5) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = 3, -5$$

چوں کہ روٹس الگ الگ ہیں اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$y = C.F. = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-5x}$$

مثال 2۔ مساوات $(D^3 - 6D^2 + 11D - 6)y = 0$ کو حل کریں۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(D^3 - 6D^2 + 11D - 6)y = 0$$

یہ مساوات مستقل ضریب کے ساتھ تیسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات ہے۔اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$m^3 - 6m^2 + 11m - 6 = 0$$
$$\Rightarrow \quad m^2(m-1) - 5m(m-1) + 6(m-1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m-1)(m^2 - 5m + 6) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m-1)(m-2)(m-3) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = 1, 2, 3$$

چوں کہ روٹس الگ الگ ہیں اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$y = C.F. = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

مثال3۔ مساوات $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 12x = 0$ کا حل معلوم کریں، دیا گیا ہے کہ $t = 0$ پر $x = 3$ اور $\frac{dx}{dt} = 5$ ہے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 12x = 0$$

سب سے پہلے دی گئی مساوات کو درجہ ذیل شکل میں لکھتے ہیں

$$(D^2 - D - 12)x = 0$$

یہ مساوات مستقل ضریب کے ساتھ دوسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات ہے۔اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$m^2 - m - 12 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m-4)(m+3) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = 4, -3$$

چوں کہ روٹس الگ الگ ہیں اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$x = C.F. = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-3t} \qquad \text{.....(1)}$$

$t = 0$ پر $x = 3$ اور $\frac{dx}{dt} = 5$ ہیں، تب

$$3 = c_1 e^0 + c_2 e^0$$
$$c_1 + c_2 = 3 \qquad \text{.....(2)}$$

مساوات(1) کو بہ لحاظ t تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dx}{dt} = 4c_1 e^{4t} - 3c_2 e^{-3t}$$

اور جب $t = 0$ تب $\frac{dx}{dt} = 5$ اس لیے

$$4c_1 - 3c_2 = 5 \qquad \text{.....(3)}$$

مساوات(2) اور (3) کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$c_1 = 2, c_2 = 1$$

اس لیے ضروری خاص حل ہو گا

$$x = 2e^{4t} + e^{-3t}$$

مثال4۔ مساوات $\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$ کو حل کریں، دیا گیا ہے کہ $t = 0$ پر $x = 0$ اور $\frac{dx}{dt} = 0$ ہو گا۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

سب سے پہلے دی گئی مساوات کو درجہ ذیل شکل میں لکھتے ہیں

$$(D^2 - 3D + 2)x = 0$$

یہ مساوات مستقل ضریب کے ساتھ دوسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات ہے۔اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل کی ہو گی

$$m^2 - 3m + 2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m-2)(m-1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = 1, 2$$

چوں کہ روٹس الگ الگ ہیں اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$x = C.F. = c_1e^t + c_2e^{2t} \qquad \text{.....(1)}$$

$t = 0$ کے لیے $x = 0$ اور $\frac{dx}{dt} = 0$ ہیں، اس لیے

$$0 = c_1e^0 + c_2e^0$$
$$c_1 + c_2 = 0 \qquad \text{.....(2)}$$

اب مساوات (1) کو بہ لحاظ t تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dx}{dt} = c_1e^t + 2c_2e^{2t}$$

اور جب $t = 0$ تب $\frac{dx}{dt} = 0$ اس لیے

$$c_1 + 2c_2 = 0 \qquad \text{.....(3)}$$

مساوات (2) اور (3) کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$c_1 = 0, c_2 = 0$$

اس لیے ضروری خاص حل ہو گا

$$x = 0$$

مثال 5۔ مساوات $(D^2 - 2D + 5)y = 0$ کا حل معلوم کریں۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(D^2 - 2D + 5)y = 0$$

یہ مساوات مستقل ضریب کے ساتھ دوسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات ہے۔اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$m^2 - 2m + 5 = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2}$$
$$\Rightarrow \quad m = 1 \pm 2i$$

چوں کہ روٹس ملتف اعداد (Complex Numbers) ہیں اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$y = C.F. = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

مثال6۔ مساوات $(D^3 - 2D^2 + 4D - 8)y = 0$ کو حل کریے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(D^3 - 2D^2 + 4D - 8)y = 0$$

یہ مساوات مستقل ضریب کے ساتھ تیسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات ہے۔اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل کی ہو گی

$$m^3 - 2m^2 + 4m - 8 = 0$$
$$\Rightarrow \quad m^2(m-2) + 4(m-2) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m-2)(m^2+4) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = 2, \pm 2i$$

چوں کہ روٹس الگ الگ اور ملتف اعداد ہیں اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$y = C.F. = c_1 e^{2x} + e^{0 \cdot x}(c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x)$$
$$y = c_1 e^{2x} + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x$$

مثال7۔ مساوات $(D^3 - 5D^2 + 7D - 3)y = 0$ کو حل کریے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(D^3 - 5D^2 + 7D - 3)y = 0$$

یہ مساوات مستقل ضریب کے ساتھ تیسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات ہے۔اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل کی ہو گی

$$m^3 - 5m^2 + 7m - 3 = 0$$
$$\Rightarrow \quad m^2(m-1) - 4m(m-1) + 3(m-1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m-1)(m^2 - 4m + 3) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m-1)(m-1)(m-3) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = 1, 1, 3$$

چوں کہ روٹس الگ الگ ہیں اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$y = C.F. = (c_1 + c_2 x)e^x + c_3 e^{3x}$$

مثال8۔ مساوات $(D^3 + 3D^2 + 3D + 1)y = 0$ کو حل کریں۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(D^3 + 3D^2 + 3D + 1)y = 0$$

یہ مساوات مستقل ضریب کے ساتھ تیسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات ہے۔اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل کی ہو گی

$$m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad m^2(m+1) + 2m(m+1) + (m+1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m+1)(m^2 + 2m + 1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m+1)(m+1)(m+1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = -1, -1, -1$$

اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$y = C.F. = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^{-x}$$

مثال9۔ مساوات $(D^4 + 8D^2 + 16)y = 0$ کو حل کریں۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(D^4 + 8D^2 + 16)y = 0$$

یہ مساوات مستقل ضریب کے ساتھ چوتھے رتبے کی خطی تفرقی مساوات ہے۔اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل کی ہو گی

$$m^4 + 8m^2 + 16 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m^2 + 4)^2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = \pm 2i, \pm 2i$$

چوں کہ روٹس ملتف اعداد ہیں اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$y = C.F. = (c_1 + c_2 x)\cos 2x + (c_3 + c_4 x)\sin 2x$$

مثال10۔ مساوات $(D^3 - 3D - 2)y = 0$ کا حل معلوم کریں۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(D^3 - 3D - 2)y = 0$$

یہ مساوات مستقل ضریب کے ساتھ تیسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات ہے۔اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل کی ہو گی

$$m^3 - 3m - 2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad m^2(m+1) - m(m+1) - 2(m+1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m+1)(m^2 - m - 2) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m+1)(m+1)(m-2) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = -1, -1, 2$$

اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$y = C.F. = (c_1 + c_2 x)e^{-x} + c_3 e^{2x}$$

مثال 11۔ مساوات $(D^3 + D^2 + 4D + 4)y = 0$ کا حل معلوم کرو، جب کہ دیا گیا ہے کہ $x = 0$ پر $y = 0$، $\frac{dy}{dx} = 1-$اور $\frac{d^2y}{dx^2} = 5$ ہے۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(D^3 + D^2 + 4D + 4)y = 0$$

یہ مساوات مستقل ضریب کے ساتھ تیسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات ہے۔اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل کی ہو گی

$$m^3 + m^2 + 4m + 4 = 0$$
$$\Rightarrow \quad m^2(m+1) + 4(m+1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m+1)(m^2 + 4) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = -1, \pm 2i$$

چوں کہ روٹس مختلف اور ملتف اعداد ہیں اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$y = C.F. = c_1 e^{-x} + e^{0\cdot x}(c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x)$$
$$y = c_1 e^{-x} + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x \qquad \text{.....(1)}$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر

$$\frac{dy}{dx} = -c_1 e^{-x} - 2c_2 \sin 2x + 2c_3 \cos 2x \qquad \text{.....(2)}$$

دوسری مرتبہ تفرق کرنے پر

$$\frac{d^2y}{dx^2} = c_1e^{-x} - 4c_2\cos 2x - 4c_3\sin 2x \qquad \text{.....(3)}$$

اب دیا ہے $y = 0$ پر $x = 0$ اس لیے

$$c_1 + c_2 = 0 \qquad \text{.....(4)}$$

$\frac{dy}{dx} = -1$ پر $x = 0$

$$-c_1 + 2c_3 = -1 \qquad \text{.....(5)}$$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 5$ پر $x = 0$

$$c_1 - 4c_2 = 5 \qquad \text{.....(6)}$$

مساوات (4)، (5) اور (6) کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہے

$$c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 0$$

اس لیے دی گئی مساوات کا خاص حل ہو گا

$$y = e^{-x} - \cos 2x$$

مثال 12۔ مساوات $\frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} - 6x = 0$ کو حل کریں۔

حل۔ دی گئی مساوات کو درجہ ذیل شکل میں لکھنے پر

$$(D^3 + 2D^2 - 5D - 6)x = 0$$

یہ مساوات مستقل ضریب کے ساتھ تیسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات ہے۔ اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل کی ہو گی

$$\begin{aligned} & m^3 + 2m^2 - 5m - 6 = 0 \\ \Rightarrow \quad & m^2(m+1) + m(m+1) - 6(m+1) = 0 \\ \Rightarrow \quad & (m+1)(m^2 + m - 6) = 0 \\ \Rightarrow \quad & (m+1)(m+3)(m-2) = 0 \\ \Rightarrow \quad & m = -3, -1, 2 \end{aligned}$$

چوں کہ روٹس الگ الگ ہیں اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$x = c_1e^{-3t} + c_2e^{-t} + c_3e^{2t}$$

مثال 13۔ مساوات $\frac{d^3x}{dt^3} - 3\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + 3x = 0$ کو حل کریے۔

حل۔ دی گئی مساوات کو درجہ ذیل شکل میں لکھنے پر

$$(D^3 - 3D^2 - D + 3)x = 0$$

یہ مساوات مستقل ضریب کے ساتھ تیسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات ہے۔ اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل کی ہو گی

$$\begin{aligned} & m^3 - 3m^2 - m + 3 = 0 \\ \Rightarrow \quad & m^2(m+1) - 4m(m+1) + 3(m+1) = 0 \\ \Rightarrow \quad & (m+1)(m^2 - 4m + 3) = 0 \\ \Rightarrow \quad & (m+1)(m-3)(m-1) = 0 \\ \Rightarrow \quad & m = 1, -1, 3 \end{aligned}$$

چوں کہ روٹس الگ الگ ہیں اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$x = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3e^{3t}$$

مثال 14۔ حل کرو: $\frac{d^4x}{dt^4} + 2\frac{d^3x}{dt^3} - 3\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0$

حل۔ دی گئی مساوات کو درجہ ذیل شکل میں لکھنے پر

$$(D^4 + 2D^3 - 3D^2 - 4D + 4)x = 0$$

یہ مساوات مستقل ضریب کے ساتھ چوتھے رتبے کی خطی تفرقی مساوات ہے۔اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل کی ہو گی

$$m^4 + 2m^3 - 3m^2 - 4m + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m^3(m-1) + 3m^2(m-1) - 4(m-1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m-1)(m^3 + 3m^2 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m-1)\{m^2(m-1) + 4m(m-1) + 4(m-1)\} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m-1)(m-1)\{m^2 + 4m + 4\} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m-1)^2(m+2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = 1, 1, -2, -2$$

اب دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہو گا

$$x = (c_1 + c_2x)e^t + (c_3 + c_4x)e^{-2t}$$

مثال 15۔ مساوات $\frac{d^4x}{dt^4} + a^4x = 0$ کو حل کریں۔

حل۔ دی گئی مساوات کو درجہ ذیل شکل میں لکھنے پر

$$(D^4 + a^4)x = 0$$

یہ مساوات مستقل ضریب کے ساتھ چوتھے رتبے کی خطی تفرقی مساوات ہے۔اس کے لیے معاون مساوات درجہ ذیل کی ہو گی

$$m^4 + a^4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m^2 + a^2)^2 - 2m^2a^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m^2 + a^2)^2 - \left(\sqrt{2}ma\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(m^2 + a^2 - \sqrt{2}ma\right)\left(m^2 + a^2 + \sqrt{2}ma\right) = 0$$

اس لیے

$$m^2 + a^2 - \sqrt{2}ma = 0, m^2 + a^2 + \sqrt{2}ma = 0$$

اب

$$m^2 + a^2 - \sqrt{2}ma = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{\sqrt{2}a \pm \sqrt{2a^2 - 4a^2}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{a}{\sqrt{2}} \pm \frac{ai}{\sqrt{2}}$$

اسی طرح

$$m^2 + a^2 + \sqrt{2}ma = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{-\sqrt{2}a \pm \sqrt{2a^2 - 4a^2}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{-a}{\sqrt{2}} \pm \frac{ai}{\sqrt{2}}$$

اب دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل ہوگا

$$x = e^{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)t}\left\{c_1 \cos\left(\frac{a}{\sqrt{2}}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{a}{\sqrt{2}}t\right)\right\} + e^{\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)t}\left\{c_3 \cos\left(\frac{a}{\sqrt{2}}t\right) + c_4 \sin\left(\frac{a}{\sqrt{2}}t\right)\right\}$$

9.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے متجانس تفرقی مساوات کی بنیادی جانکاری حاصل کی اور اس کا عام حل حاصل کرنا سیکھا نیز اس سے خاص حل کس طرح نکالا جاتا ہے یہ بھی سیکھا۔

9.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

متجانس تفرقی مساوات، خطی تفرقی مساوات، اتمامی تفاعل، معاون مساوات

9.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

9.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. فرض کرو کہ $f(D)y = 0$ مستقل ضریب کے ساتھ متجانس تفرقی مساوات ہے۔ اگر $m_1 \neq m_2$ حاصل کردہ معاون مساوات کے دو روٹس ہوں، تب مساوات کا عام حل ہوگا $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$ (T/F)
2. فرض کرو کہ $f(D)y = 0$ مستقل ضریب کے ساتھ متجانس تفرقی مساوات ہے۔ فرض کرو کہ $m_1 = \alpha + i\beta$ اور $m_2 = \alpha - i\beta$ حاصل کردہ معاون مساوات کے روٹس ہیں، تب $C.F. = e^{-\alpha x}\{A \cos \beta x + B \sin \beta x\}$ ہوگا۔ (T/F)
3. مساوات $\frac{d^3x}{dt^3} + 3\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + x = 0$ کی معاون مساوات لکھو۔
4. مساوات $\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 6x = 0$ کی اتمامی تفاعل معلوم کریں۔

9.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. حل کرو: $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$
2. مساوات $\frac{d^3x}{dt^3} - 3\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} = 0$ کو حل کریں۔
3. مساوات $\frac{d^3x}{dt^3} + 6\frac{d^2x}{dt^2} + 11\frac{dx}{dt} + 6x = 0$ کا حل معلوم کریں۔

4. مساوات $\frac{d^3x}{dt^3} - 3\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + 3x = 0$ کا حل حاصل کریں۔
5. مساوات $\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} = 0$ کو حل کریں۔
6. مساوات $\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 9x = 0$ کو حل کریں۔
7. مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 10y = 0$ کو حل کریں۔

9.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. مساوات $3\frac{d^3x}{dt^3} + 5\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} = 0$ کو حل کریں۔
2. مساوات $\frac{d^3x}{dt^3} + 3\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + x = 0$ کا حل محسوب کریں۔
3. مساوات $\frac{d^4x}{dt^4} + 8\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0$ کا حل معلوم کریں۔
4. مساوات $\frac{d^4y}{dx^4} - 6\frac{d^3y}{dx^3} + 12\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} = 0$ کو حل کریں۔
5. مساوات $\left(\frac{d^2y}{dx^2} + 1\right)^3 \left(\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 1\right) = 0$ کو حل کریں۔
6. حل کرو: $\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 9\frac{dy}{dx} + 13y = 0$
7. مساوات $\left(\frac{d^2y}{dx^2} + 1\right)^2 = 0$ کا حل حاصل کریں۔
8. مساوات $\frac{d^3y}{dx^3} + 16\frac{dy}{dx} = 0$ کا حل معلوم کریں۔
9. رتبہ n کی متجانس تفرقی مساوات $f(D)y = 0$ کا حل حاصل کرنے کی سبھی صورتوں پر بحث کریں۔
10. اگر $y = y_1, y = y_2, \cdots, y = y_n$ مساوات $f(D)y = 0$ کے n غیر تابع حل ہیں، تب ثابت کرو کہ

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$$

بھی اس کا ایک حل ہوگا، جہاں $c_1, c_2, \cdots, c_n$ اختیاری مستقل ہیں۔

11. اگر متجانس تفرقی مساوات کے r روٹس برابر ہوں، تب اس کا حل کس طرح حاصل کیا جاتا ہے؟

جوابات:

9.5.1 معروضی سوالات کے جوابات

1. (T)
2. (F)
3. $m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = 0$
4. $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x}$

9.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$
2. $x = c_1 + c_2 e^{t} + c_3 e^{2t}$
3. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{-3x}$
4. $x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} + c_3 e^{3t}$
5. $y = c_1 e^{-x} + c_2 + c_3 e^{3x}$
6. $y = (c_1 + c_2 x) e^{3x}$
7. $y = e^{x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$

9.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $x = c_1 + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{\frac{1}{3}t}$
2. $x = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2) e^{-t}$
3. $x = (c_1 + c_2 t) \cos 2t + (c_3 + c_4 t) \sin 2t$
4. $y = c_1 + (c_2 + c_3 t + c_4 t^2) e^{2x}$
5. $y = e^{-\frac{x}{2}} \left[(c_1 + c_2 x) \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + (c_3 + c_4 x) \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \right]$

$$+(c_5 + c_6 x + c_7 x^2) \cos x + (c_8 + c_9 x + c_{10} x^2) \sin x$$

6. $y = c_1 e^{-x} + e^{2x}(c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x)$
7. $y = (c_1 + c_2 x) \cos x + (c_3 + c_4 x) \sin x$
8. $y = c_1 + c_2 \cos 4x + c_3 \sin 4x$

اکائی10۔ مستقل ضریب کی غیر متجانس خطی تفرقی مساواتوں کے خاص تکملے

(Particular Integrals of Non − Homogeneous Linear Differential Equations with Constant Coefficients)

اکائی کے اجزا

10.0 تمہید

10.1 مقاصد

10.2 مستقل ضریب کی غیر متجانستفرقی مساواتوں کے خاص تکملے

10.2.1 خاص تکملہ $\left(\frac{1}{D-m}Q\right)$ حاصل کرنا

10.2.2 $f(D)y = Q$ کا خاص تکملہ

10.2.2.1 $f(D)y = e^{ax}$ کا خاص تکملہ

10.2.2.2 $f(D)y = \sin ax$ (یا $\cos ax$) کا خاص تکملہ

10.2.2.3 $f(D)y = x^m$ کا خاص تکملہ

10.2.2.4 $f(D)y = e^{ax} \cdot V$ کا خاص تکملہ

10.3 اکتسابی نتائج

10.4 کلیدی الفاظ

10.5 نمونہ امتحانی سوالات

10.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

10.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

10.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

10.0 تمہید(Introduction)

فرض کرو کہ x کا ایک تفاعل Q ہے۔اس پر جب $f(D)$ کی مدد سے عمل کرایا جاتا ہے تو نتیجہ Q حاصل ہوتا ہے۔ چوں کہ $y = \frac{1}{f(D)}Q$ غیر متجانس تفرقی مساوات $f(D)y = Q$(Non Homogeneous Differential Equation) کو مطمئن کرتی ہے،اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\frac{1}{f(D)}Q$ غیر متجانس تفرقی مساوات $f(D)y = Q$ کا ایک خاص حل ہے۔اب ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$f(D)\left(\frac{1}{f(D)}Q\right) = Q$$

جس سے ظاہر ہوتا ہے کہ عامل $\frac{1}{f(D)}$ عامل $f(D)$ کا معکوس(Inverse) ہے۔

نوٹ:

$\frac{1}{D}Q = \int Q\,dx$ اس لیے $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{D}Q\right) = Q$ یا $D\left(\frac{1}{D}Q\right) = Q$

10.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپکو خاص تکملے کی بنیادی جانکاری حاصل ہو جائیگی نیز اس کو حاصل کرنے کی مختلف صورتوں کو سمجھتے ہوئے دی گئی غیر متجانس تفرقی مساوات کا حل حاصل کر سکیں گے۔

10.2 مستقل ضریب کی غیر متجانستفرقی مساواتوں کے خاص تکملے

(Particular Integrals of Non Homogeneous Differential Equations with Constant Coefficients)

خاص تکملے کی درجہ ذیل دو صورتیں ہیں جن پر ہم بحث کریں گے۔

1. خاص تکملہ $\left(\frac{1}{D-m}Q\right)$ حاصل کرنا
2. $f(D)y = Q$ کا خاص تکملہ $\frac{1}{f(D)}Q$ حاصل کرنا

10.2.1 خاص تکملہ $\left(\frac{1}{D-m}Q\right)$ حاصل کرنا(Determining the Particular Integral $\frac{1}{D-m}Q$)

فرض کرو کہ $\frac{1}{D-m}Q = u$، تب

$$(D-m)u = (D-m)\left(\frac{1}{D-m}Q\right) = Q$$

$$\Rightarrow \quad \frac{du}{dx} - mu = Q$$

جو کہ پہلے رتبے کی خطی تفرقی مساوات ہے جس کا حل درجہ ذیل ہے

$$ue^{-mx} = \int Q\,e^{-mx}dx$$

$$\Rightarrow \quad u = e^{mx} \int Q\, e^{-mx} dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{D-m} Q = e^{mx} \int Q\, e^{-mx} dx$$

10.2.2 $f(D)y = Q$ کا خاص تکملہ (Particular Integral of $f(D)y = Q$)

اس کو حاصل کرنے کے دو طریقے ہیں۔

پہلا طریقہ:

فرض کرو کہ $f(D) = (D - m_1)(D - m_2) \cdots (D - m_n)$

تب

$$\frac{1}{f(D)} Q = \frac{1}{(D - m_1)(D - m_2) \cdots (D - m_n)} Q$$
$$= \frac{1}{(D - m_1)(D - m_2) \cdots (D - m_{n-1})} \left(e^{m_n x} \int Q e^{-m_n x}\, dx \right)$$

اسی طرز پر آگے بڑھنے پر ضروری خاص تکملہ حاصل ہو جاتا ہے۔

دوسرا طریقہ:

$$\frac{1}{f(D)} Q = \frac{1}{(D - m_1)(D - m_2) \cdots (D - m_n)} Q$$

جزوی کسروں (Partial Fractions) کی مدد سے

$$\frac{1}{f(D)} Q = \left\{ \frac{A_1}{(D - m_1)} + \frac{A_2}{(D - m_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(D - m_n)} \right\} Q$$
$$= A_1 e^{m_1 x} \int Q e^{-m_1 x}\, dx + A_2 e^{m_2 x} \int Q e^{-m_2 x}\, dx + \cdots + A_n e^{m_n x} \int Q e^{-m_n x}\, dx$$

جو کہ ضروری خاص تکملہ ہے۔

مثال 1۔ مساوات $\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} + 6x = e^{4t}$ کو حل کرو۔

حل۔ اس مساوات کو ہم درجہ ذیل طریقہ سے بھی لکھ سکتے ہیں

$$(\mathrm{D}^2 - 5\mathrm{D} + 6)x = e^{4t}$$

یہاں $f(D) = \mathrm{D}^2 - 5\mathrm{D} + 6$ اور $Q = e^{4t}$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات (Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہے

$$m^2 - 5m + 6 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m - 2)(m - 3) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = 2, 3$$

اس لیے دی گئی مساوات $(\mathrm{D}^2 - 5\mathrm{D} + 6)x = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل (Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$$

اب ہم خاص تکملہ حاصل کریں گے۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$P.I. = \frac{1}{f(D)}Q$$
$$= \frac{1}{\mathrm{D}^2 - 5\mathrm{D} + 6}e^{4t}$$
$$= \frac{1}{(D-2)(D-3)}e^{4t}$$

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{1}{D-m}Q = e^{mt}\int Q\, e^{-mt}dt$ اس لیے

$$P.I. = \frac{1}{(D-2)}\left\{e^{3t}\int e^{4t}\, e^{-3t}dt\right\}$$
$$= \frac{1}{(D-2)}\left\{e^{3t}\int e^{t}\, dt\right\}$$
$$= \frac{1}{(D-2)}\{e^{3t}e^{t}\}$$
$$= \frac{1}{(D-2)}e^{4t}$$
$$= e^{2t}\int e^{4t}\, e^{-2t}dt$$
$$= e^{2t}\int e^{2t}\, dt$$
$$\Rightarrow \quad P.I. = \frac{1}{2}e^{4t}$$

اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ طریقہ سے حاصل ہو گا

$$x = C.F. + P.I.$$
$$= c_1e^{2t} + c_2e^{3t} + \frac{1}{2}e^{4t}$$

مثال2۔ مساوات $2t = 2x - \frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2}$ کو حل کریں۔

حل۔ اس مساوات کو ہم درجہ ذیل طریقہ سے بھی لکھ سکتے ہیں

$$(\mathrm{D}^2 + \mathrm{D} - 2)x = 2t$$

یہاں $f(D) = \mathrm{D}^2 + \mathrm{D} - 2$ اور $Q = 2t$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات (Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$m^2 + m - 2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m+2)(m-1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = 1, -2$$

اس لیے دی گئی مساوات $(\mathrm{D}^2 + \mathrm{D} - 2)x = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل (Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = c_1e^{t} + c_2e^{-2t}$$

اب ہم خاص تکملہ حاصل کریں گے۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$P.I. = \frac{1}{f(D)}Q$$

$$= \frac{1}{\mathrm{D}^2 + \mathrm{D} - 2} e^{4t}$$
$$= \frac{1}{(D+2)(D-1)} e^{4t}$$

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{1}{D-m} Q = e^{mt} \int Q\, e^{-mt} dt$ اس لیے

$$P.I. = \frac{1}{(D+2)} \left\{ e^t \int 2te^{-t}\, dt \right\}$$
$$= \frac{1}{(D+2)} 2e^t \left\{ -te^{-t} - \int (-1.e^{-t})\, dt \right\}$$
$$= \frac{1}{(D+2)} 2e^t (-te^{-t} - e^{-t})$$
$$= -\frac{1}{(D+2)} 2(t+1)$$
$$= -2e^{-2t} \int (t+1)\, e^{2t} dt$$
$$= -2e^{-2t} \left\{ (t+1) \frac{e^{2t}}{2} - \int \frac{e^{2t}}{2} dt \right\}$$
$$= -2e^{-2t} \left\{ (t+1) \frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{2t}}{4} \right\}$$
$$= -2e^{-2t} \frac{e^{2t}}{2} \left\{ (t+1) - \frac{1}{2} \right\}$$
$$\Rightarrow \quad P.I. = -\left(t + \frac{1}{2} \right)$$

اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل ہو گا

$$x = C.F. + P.I.$$
$$= c_1 e^t + c_2 e^{-2t} - \left(t + \frac{1}{2} \right)$$

مثال 3۔ مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sec x$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ اس مساوات کو ہم درجہ ذیل طریقہ سے بھی لکھ سکتے ہیں

$$(\mathrm{D}^2 + 1)y = \sec x$$

یہاں $f(D) = \mathrm{D}^2 + 1$ اور $Q = \sec x$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات (Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$m^2 + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = \pm i$$

اس لیے دی گئی مساوات $(\mathrm{D}^2 + 1)y = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل (Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

اب ہم خاص تکملہ حاصل کریں گے۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$P.I. = \frac{1}{f(D)}Q$$
$$= \frac{1}{\mathrm{D}^2+1}\sec x$$
$$= \frac{1}{(D+i)(D-i)}\sec x$$
$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(D-i)} - \frac{1}{(D+i)}\right]\sec x$$
$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(D-i)}\sec x - \frac{1}{(D+i)}\sec x\right]$$

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{1}{D-m}Q = e^{mt}\int Q\, e^{-mt}dt$ اس لیے

$$P.I. = \frac{1}{2i}\left[e^{ix}\int \sec x\left(e^{-ix}\right)dx - e^{-ix}\int \sec x\left(e^{ix}\right)dx\right]$$
$$= \frac{1}{2i}\left[e^{ix}\int \frac{(\cos x - i\sin x)}{\cos x}dx - e^{-ix}\int \frac{(\cos x + i\sin x)}{\cos x}dx\right]$$
$$= \frac{1}{2i}\left[e^{ix}\int (1 - i\tan x)\,dx - e^{-ix}\int (1 + i\tan x)\,dx\right]$$
$$= \frac{1}{2i}\left[e^{ix}(x + i\log\cos x) - e^{-ix}(x - i\log\cos x)\right]$$
$$= \frac{1}{2i}\left[x\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) + i\log\cos x\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right]$$
$$= x\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) + \log\cos x\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)$$
$$\Rightarrow P.I. = x\sin x + \cos x\log\cos x$$

اس لیے عام حل ہوگا

$$y = C.F. + P.I.$$
$$= c_1\cos x + c_2\sin x + x\sin x + \cos x\log\cos x$$

مثال4۔ مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ اس مساوات کو درجہ ذیل طریقہ سے لکھتے ہیں

$$(\mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D} + 1)y = e^x$$

یہاں $f(D) = \mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D} + 1$ اور $Q = e^x$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات (Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہوگی

$$m^2 - 2m + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m-1)(m-1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = 1, 1$$

اس لیے دی گئی مساوات $(\mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D} + 1)y = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل (Complementary Function) درجہ ذیل ہوگا

$$C.F. = (c_1 + c_2x)e^x$$

اب ہم خاص تکملہ حاصل کریں گے۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$P.I. = \frac{1}{f(D)}Q$$
$$= \frac{1}{\mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D} + 1}e^x$$
$$= \frac{1}{(D-1)(D-1)}e^x$$

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{1}{D-m}Q = e^{mx}\int Q\, e^{-mx}dx$ اس لیے

$$P.I. = \frac{1}{(D-1)}\left\{e^x \int e^x\, e^{-x}dx\right\}$$
$$= \frac{1}{(D-1)}\left\{e^x \int 1\, dx\right\}$$
$$= \frac{1}{(D-1)}xe^x$$
$$= e^x \int xe^x\, e^{-x}dx$$
$$= e^x \int x\, dx$$
$$\Rightarrow \quad P.I. = \frac{x^2}{2}e^x$$

اس لیے عام حل ہو گا

$$y = C.F. + P.I.$$
$$= (c_1 + c_2 x)e^x + \frac{x^2}{2}e^x$$

10.2.2.1 $f(D)y = e^{ax}$ کا خاص تکملہ (Particular Integral of $f(D)y = e^{ax}$)

1. جب $f(a) \neq 0$

متواتر تفرق (Successive Differentiation) کی مدد سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$De^{ax} = ae^{ax}$$
$$D^2e^{ax} = D(De^{ax}) = D(ae^{ax}) = a^2e^{ax}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$D^ne^{ax} = a^ne^{ax}$$

اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ

$$f(D)e^{ax} = f(a)e^{ax}$$

عامل $\frac{1}{f(D)}$ کی مدد سے دونوں طرف عمل کرنے پر

$$\frac{1}{f(D)}\{f(D)e^{ax}\} = \frac{1}{f(D)}\{f(a)e^{ax}\}$$
$$\Rightarrow \quad e^{ax} = \frac{1}{f(D)}\{f(a)e^{ax}\}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{f(D)}e^{ax} = \frac{1}{f(a)}e^{ax}$$

2. جب $f(a) = 0$

اگر $f(a) = 0$، تب $f(D)$ کا ایک جزضربی $(D - a)$ ہوگا۔ فرض کرو کہ

$$f(D) = (D - a)^r \varphi(D)$$

جب کہ $\varphi(a) \neq 0$، تب

$$\frac{1}{f(D)}e^{ax} = \frac{1}{(D-a)^r \varphi(D)}e^{ax}$$
$$= \frac{1}{(D-a)^r} \cdot \frac{1}{\varphi(a)}e^{ax}$$
$$= \frac{1}{\varphi(a)} \cdot \frac{x^r}{r!}e^{ax}$$

اس لیے جب $f(a) = 0$، تب $\frac{1}{f(D)}e^{ax} = \frac{1}{\varphi(a)} \cdot \frac{x^r}{r!}e^{ax}$ ہوگا۔

اب ہم کچھ مثالوں کی مدد سے اوپر دیے گیے طریقہ کو سمجھتے ہیں۔

مثال 1۔ مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 2e^{4x}$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ اس مساوات کو ہم درجہ ذیل طریقہ سے بھی لکھ سکتے ہیں

$$(\mathrm{D}^2 - 6\mathrm{D} + 9)y = 2e^{4x}$$
$$\Rightarrow \quad (\mathrm{D} - 3)^2 y = 2e^{4x}$$

یہاں $f(D) = (\mathrm{D} - 3)^2$ اور $Q = 2e^{4x}$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات (Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$(m - 3)^2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = 3, 3$$

اس لیے دی گئی مساوات $(\mathrm{D} - 3)^2 y = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل (Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = (c_1 + c_2 x)e^{3x}$$

اب ہم خاص تکملہ حاصل کریں گے۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$P.I. = \frac{1}{f(D)}Q$$
$$= \frac{1}{(\mathrm{D}-3)^2}2e^{4x}$$

ہم جانتے ہیں کہ جب $f(a) \neq 0$، تب $\frac{1}{f(D)}e^{ax} = \frac{1}{f(a)}e^{ax}$، اس لیے

$$P.I. = \frac{1}{(4-3)^2}2e^{4x}$$
$$\Rightarrow \quad P.I. = 2e^{4x}$$

اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ طریقہ سے حاصل ہو گا

$$x = C.F. + P.I.$$
$$= (c_1 + c_2 x)e^{3x} + 2e^{4x}$$

مثال2۔ مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{5x}$ کو حل کرو۔

حل۔ اس مساوات کو ہم درجہ ذیل طریقے سے بھی لکھ سکتے ہیں

$$(\mathrm{D}^2 - 3\mathrm{D} + 2)y = e^{5x}$$
$$\Rightarrow \quad (\mathrm{D} - 1)(\mathrm{D} - 2)y = e^{5x}$$

یہاں $f(D) = \mathrm{D}^2 - 3\mathrm{D} + 2$ اور $Q = e^{5x}$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات (Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$\Rightarrow \quad (m - 1)(m - 2) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = 1, 2$$

اس لیے دی گئی مساوات $(\mathrm{D}^2 - 3\mathrm{D} + 2)y = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل (Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

اب ہم خاص تکملہ حاصل کریں گے۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$P.I. = \frac{1}{f(D)} Q$$
$$= \frac{1}{(\mathrm{D} - 1)(\mathrm{D} - 2)} e^{5x}$$

ہم جانتے ہیں کہ جب $f(a) \neq 0$، تب $\frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{1}{f(a)} e^{ax}$، اس لیے

$$P.I. = \frac{1}{(5 - 1)(5 - 2)} e^{5x}$$
$$\Rightarrow \quad P.I. = \frac{1}{12} e^{5x}$$

اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ طریقہ سے حاصل ہو گا

$$y = C.F. + P.I.$$
$$= c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{12} e^{5x}$$

مثال3۔ مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + a^2 y = e^{ax}$ کو حل کریں۔

حل۔ اس مساوات کو ہم درجہ ذیل طریقہ سے بھی لکھ سکتے ہیں

$$(D^2 - 2aD + a^2)y = e^{ax}$$
$$\Rightarrow \quad (D - a)^2 y = e^{ax}$$

یہاں $f(D) = (D - a)^2$ اور $Q = e^{ax}$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات (Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$\Rightarrow \quad (m - a)^2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = a, a$$

اس لیے دی گئی مساوات $(D - a)^2 y = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل (Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = (c_1 + c_2x)e^{ax}$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$P.I. = \frac{1}{f(D)}Q$$
$$= \frac{1}{(D-a)^2}e^{ax}$$

ہم جانتے ہیں کہ جب $f(a) = 0$، تب $\frac{1}{f(D)}e^{ax} = \frac{1}{\varphi(a)} \cdot \frac{x^r}{r!}e^{ax}$، جبکہ $\varphi(a) \neq 0$ اس لیے

$$P.I. = \frac{x^2}{2!}e^{ax}$$
$$\Rightarrow \quad P.I. = \frac{x^2}{2}e^{ax}$$

اس لیے عام حل ہو گا

$$y = C.F. + P.I.$$
$$= (c_1 + c_2x)e^{ax} + \frac{x^2}{2}e^{ax}$$

مثال4۔ مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = 2e^{3x}$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ اس مساوات کو ہم درجہ ذیل طریقہ سے بھی لکھ سکتے ہیں

$$(\mathrm{D}^2 - 4\mathrm{D} + 3)y = 2e^{3x}$$
$$\Rightarrow \quad (\mathrm{D}-1)(\mathrm{D}-3)y = 2e^{3x}$$

یہاں $f(D) = \mathrm{D}^2 - 4\mathrm{D} + 3$ اور $Q = 2e^{3x}$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات (Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$(m-1)(m-3) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = 1, 3$$

اس لیے دی گئی مساوات $(\mathrm{D}^2 - 4\mathrm{D} + 3)y = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل (Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = c_1e^x + c_2e^{3x}$$

اب ہم خاص تکملہ حاصل کریں گے۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$P.I. = \frac{1}{f(D)}Q$$
$$= \frac{1}{(\mathrm{D}-1)(\mathrm{D}-3)}2e^{3x}$$

چوں کہ $f(3) = 0$، اس لیے

$$P.I. = \frac{1}{(3-1)(\mathrm{D}-3)}2e^{3x}$$
$$= \frac{1}{(\mathrm{D}-3)^1}e^{3x}$$
$$= \frac{x^1}{1!}e^{3x} = xe^{3x}$$

اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل طریقہ سے حاصل ہو گا

$$y = C.F. + P.I.$$
$$= c_1 e^x + c_2 e^{3x} + x e^{3x}$$

مثال 5۔ مساوات $\frac{d^4y}{dx^4} - 18\frac{d^2y}{dx^2} + 81y = 36e^{3x}$ کو حل کرو۔

حل۔ اس مساوات کو ہم درجہ ذیل طریقہ سے بھی لکھ سکتے ہیں

$$(\mathrm{D}^4 - 18\mathrm{D}^2 + 81)y = 36e^{3x}$$
$$\Rightarrow \quad (\mathrm{D}^2 - 9)(\mathrm{D}^2 - 9)y = 36e^{3x}$$

یہاں $Q = 36e^{3x}$ اور $f(D) = \mathrm{D}^4 - 18\mathrm{D}^2 + 81$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات (Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$(m^2 - 9)(m^2 - 9) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m^2 = 9, 9$$
$$\Rightarrow \quad m = \pm 3, \pm 3$$

اس لیے دی گئی مساوات $(\mathrm{D}^4 - 18\mathrm{D}^2 + 81)y = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل (Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = (c_1 + c_2 x)e^{3x} + (c_3 + c_4 x)e^{-3x}$$

اب ہم خاص تکملہ حاصل کریں گے۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$P.I. = \frac{1}{f(D)} Q$$
$$= \frac{1}{(\mathrm{D}^2 - 9)(\mathrm{D}^2 - 9)} 36e^{3x}$$
$$= \frac{1}{(\mathrm{D} - 3)^2(\mathrm{D} + 3)^2} 36e^{3x}$$

چوں کہ $f(3) = 0$، اس لیے

$$P.I. = \frac{1}{(\mathrm{D} - 3)^2(3 + 3)^2} 36e^{3x}$$
$$= \frac{1}{(\mathrm{D} - 3)^2} e^{3x}$$
$$= \frac{x^2}{2!} e^{3x}$$

اس لیے دی گئی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل طریقے سے حاصل ہو گا

$$y = C.F. + P.I.$$
$$= (c_1 + c_2 x)e^{3x} + (c_3 + c_4 x)e^{-3x} + \frac{x^2}{2!} e^{3x}$$

10.2.2.2 $f(D)y = \sin ax$(یا$\cos ax$)کا خاص تکملہ

$\left(\text{Particular Integral of } f(D)y = \sin ax \left(\text{یا } \cos ax\right)\right)$

متواتر تفرق(Successive Differentiation)کی مدد سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$D \sin ax = a \cos ax$$
$$D^2 \sin ax = D(D \sin ax) = D(a \cos ax) = -a^2 \sin ax$$
$$D^3 \sin ax = D(D^2 \sin ax) = D(-a^2 \sin ax) = -a^3 \cos ax$$
$$D^4 \sin ax = D(D^3 \sin ax) = D(-a^3 \cos ax) = a^4 \sin ax$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$D^n \sin ax = (-a^2)^n \sin ax$$

اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ اگر D کی صرف جفت قوت میں موجود ہوں تب اسے $\varphi(D^2)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔تب

$$\varphi(D^2) \sin ax = \varphi(-a^2) \sin ax$$

عامل $\frac{1}{\varphi(D^2)}$ کی مدد سے دونوں طرف عمل کرنے پر

$$\frac{1}{\varphi(D^2)}\{\varphi(D^2) \sin ax\} = \frac{1}{\varphi(D^2)}\{\varphi(-a^2) \sin ax\}$$
$$\Rightarrow \quad \sin ax = \varphi(-a^2)\left\{\frac{1}{\varphi(D^2)} \sin ax\right\}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\varphi(D^2)} \sin ax = \frac{1}{\varphi(-a^2)} \sin ax$$

اسی طرح

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\varphi(D^2)} cos\ ax = \frac{1}{\varphi(-a^2)} \cos ax$$

نوٹ:اگر $\varphi(-a^2) = 0$ اوپر دیا گیا طریقہ ناکام ہو جاتا ہے۔

اب ہم کچھ مثالوں کی مدد سے اوپر دیے گیے طریقہ کو سمجھتے ہیں۔

مثال 1۔ مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = cos\ 3x$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ اس مساوات کو ہم درجہ ذیل طریقے سے بھی لکھ سکتے ہیں

$$(\mathrm{D}^2 + 4)y = cos\ 3x$$

یہاں $f(D) = \mathrm{D}^2 + 4$ اور $Q = cos\ 3x$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات(Auxiliary Equation)درجہ ذیل ہو گی

$$m^2 + 4 = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = \pm 2i$$

اس لیے دی گئی مساوات $(\mathrm{D}^2 + 4)y = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل(Complementary Function)درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$P.I. = \frac{1}{f(D)}Q$$
$$= \frac{1}{\mathrm{D}^2 + 4}cos\ 3x$$

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{1}{\varphi(D^2)}cos\ ax = \frac{1}{\varphi(-a^2)}\cos ax$ اس لیے

$$P.I. = \frac{1}{-9 + 4}cos\ 3x$$
$$= \frac{1}{-5}cos\ 3x$$

اس لیے عام حل ہو گا

$$y = C.F. + P.I.$$
$$= c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{5}cos\ 3x$$

مثال2۔ مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sin 2x$ کو حل کرو۔

حل۔ اس مساوات کو ہم درجہ ذیل طریقے سے بھی لکھ سکتے ہیں

$$(\mathrm{D}^2 + 1)y = \sin 2x$$

یہاں $f(D) = \mathrm{D}^2 + 1$ اور $Q = \sin 2x$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات(Auxiliary Equation)درجہ ذیل ہو گی

$$m^2 + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = \pm i$$

اس لیے دی گئی مساوات $(\mathrm{D}^2 + 1)y = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل(Complementary Function)درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$P.I. = \frac{1}{f(D)}Q$$
$$= \frac{1}{\mathrm{D}^2 + 1}\sin 2x$$

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{1}{\varphi(D^2)}\sin ax = \frac{1}{\varphi(-a^2)}\sin ax$ اس لیے

$$P.I. = \frac{1}{-4 + 1}\sin 2x$$
$$= \frac{1}{-3}\sin 2x$$

اس لیے عام حل ہو گا

$$y = C.F. + P.I.$$
$$= c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{3}\sin 2x$$

مثال3۔ مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^{2x} + 3\sin x$ کو حل کریں۔

حل۔ اس مساوات کو ہم درجہ ذیل طریقے سے بھی لکھ سکتے ہیں

$$(\mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D} - 3)y = 2e^{2x} + 3\sin x$$
$$\Rightarrow \quad (\mathrm{D}+1)(\mathrm{D}-3)y = 2e^{2x} + 3\sin x$$

یہاں $f(D) = \mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D} - 3$ اور $Q = 2e^{2x} + 3\sin x$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات(Auxiliary Equation)درجہ ذیل ہو گی

$$(m+1)(m-3) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = -1, 3$$

اس لیے دی گئی مساوات $(\mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D} - 3)y = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل(Complementary Function)درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$$

اب ہم خاص تکملہ حاصل کریں گے۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$\begin{aligned}
P.I. &= \frac{1}{f(D)} Q \\
&= \frac{1}{\mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D} - 3}(2e^{2x} + 3\sin x) \\
&= \left(\frac{1}{\mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D} - 3} 2e^{2x} + \frac{1}{\mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D} - 3} 3\sin x\right) \\
&= \left(\frac{1}{2^2 - 2\times 2 - 3} 2e^{2x} + \frac{1}{-(1)^2 - 2\mathrm{D} - 3} 3\sin x\right) \\
&= \left(-\frac{2}{3}e^{2x} + \frac{1}{-2(\mathrm{D}+2)} 3\sin x\right) \\
&= \left(-\frac{2}{3}e^{2x} - \frac{3}{2}\frac{(\mathrm{D}-2)}{(\mathrm{D}+2)(\mathrm{D}-2)}\sin x\right) \\
&= \left(-\frac{2}{3}e^{2x} - \frac{3}{2}\frac{(\mathrm{D}-2)}{(\mathrm{D}^2-4)}\sin x\right) \\
&= \left(-\frac{2}{3}e^{2x} - \frac{3}{2}\frac{(\mathrm{D}-2)}{(-(1)^2-4)}\sin x\right) \\
&= \left(-\frac{2}{3}e^{2x} + \frac{3}{10}(\mathrm{D}-2)\sin x\right) \\
&= -\frac{2}{3}e^{2x} + \frac{3}{10}\left(\frac{d}{dx}\sin x - 2\sin x\right) \\
&= -\frac{2}{3}e^{2x} + \frac{3}{10}(\cos x - 2\sin x)
\end{aligned}$$

اس لیے دی تفرقی مساوات کا عام حل درجہ ذیل طریقے سے حاصل ہو گا

$$\begin{aligned}
y &= C.F. + P.I. \\
&= c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - \frac{2}{3}e^{2x} + \frac{3}{10}(\cos x - 2\sin x)
\end{aligned}$$

10.2.2.3 $f(D)y = x^m$ کا خاص تکملہ (Particular Integral of $f(D)y = x^m$)

x^m کو حاصل کرنے کے لیے درجہ ذیل طریقہ استعمال کرتے ہیں $\frac{1}{f(D)}$

I. ہم $f(D)$ میں سے سب سے کم درجہ کی رکن کو باہر لیتے ہیں تاکہ ڈنومنیٹر (Denominator) میں ذیل صورت بن جایے

$[1 + \varphi(D)]^n$ یا $[1 - \varphi(D)]^n$، جہاں n ایک مثبت صحیح اعداد (Positive Integer) ہے۔

II. اب اس جز ضربی کو نیومریٹر (Numerator) میں لے جاتے ہیں جو کہ ذیل صورت میں ہوگا $[1 + \varphi(D)]^{-n}$ یا
$[1 - \varphi(D)]^{-n}$

III. اب دورکنی قضیہ (Binomial Theorem) کی مدد سے $[1 \pm \varphi(D)]^{-n}$ کی توسیع کرتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

سوالوں کو آسانی کے ساتھ حل کرنے کے لیے کچھ ضابطے ذیل ہیں:

1. $(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$
2. $(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$
3. $(1 + x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots$
4. $(1 - x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$

چوں کہ x^m کے سبھی m سے زیادہ رتبہ کے مشتق صفر ہو جاتے ہیں، اس لیے $[1 + \varphi(D)]^{-n}$ کو D^m تک ہی توسیع کرتے ہیں۔ کبھی کبھی $\frac{1}{f(D)}$ کو جزوی کسروں میں تبدیل کر خاص تکملہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس کے ہر ایک جز کو D کی گھٹتی ہوئی قوت میں توسیع کرنے کے بعد اوپر دیے گیے طریقہ کے مطابق خاص تکملہ حاصل کر لیتے ہیں۔

مثال 1۔ مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = x^2$ کو حل کرو۔

حل۔ اس مساوات کو ہم درجہ ذیل طریقے سے بھی لکھ سکتے ہیں

$$(\mathrm{D}^2 - 4)y = x^2$$

یہاں $f(D) = \mathrm{D}^2 - 4$ اور $Q = x^2$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات (Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$m^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = \pm 2$$

اس لیے دی گئی مساوات $(\mathrm{D}^2 - 4)y = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل (Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$P.I. = \frac{1}{f(D)}Q$$
$$= \frac{1}{\mathrm{D}^2 - 4}x^2$$
$$= -\frac{1}{4}\frac{1}{\left(1 - \frac{\mathrm{D}^2}{4}\right)}x^2$$
$$= -\frac{1}{4}\left(1 - \frac{\mathrm{D}^2}{4}\right)^{-1}x^2$$

دور کنی قضیہ(Binomial Theorem)کی مدد سے ہمیں حاصل ہوگا

$$= -\frac{1}{4}\left\{1 + \frac{\mathrm{D}^2}{4} + \left(\frac{\mathrm{D}^2}{4}\right)^2 + \cdots\right\}x^2$$
$$= -\frac{1}{4}\left\{x^2 + \frac{\mathrm{D}^2x^2}{4} + \frac{\mathrm{D}^4x^2}{16} + \cdots\right\}$$
$$= -\frac{1}{4}\left\{x^2 + \frac{2}{4} + 0 + \cdots\right\}$$
$$= -\frac{1}{8}(2x^2 + 1)$$

اس لیے دی گئی مساوات کا عام حل ہوگا

$$y = C.F. + P.I.$$
$$= c_1e^{-2x} + c_2e^{2x} - \frac{1}{8}(2x^2 + 1)$$

مثال2۔ مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = x + \sin x$ کا حل معلوم کریں۔

حل۔ اس مساوات کو ہم درجہ ذیل طریقے سے بھی لکھ سکتے ہیں

$$(\mathrm{D}^2 + \mathrm{D} - 2)y = x + \sin x$$

یہاں $f(D) = \mathrm{D}^2 + \mathrm{D} - 2$ اور $Q = x + \sin x$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات(Auxiliary Equation)درجہ ذیل ہوگی

$$m^2 + m - 2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m + 2)(m - 1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = 1, -2$$

اس لیے دی گئی مساوات $(\mathrm{D}^2 + \mathrm{D} - 2)y = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل(Complementary Function)درجہ ذیل ہوگا

$$C.F. = c_1e^x + c_2e^{-2x}$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$P.I. = \frac{1}{f(D)}Q$$
$$= \frac{1}{\mathrm{D}^2 + \mathrm{D} - 2}(x + \sin x)$$

$$= \frac{1}{D^2 + D - 2} x + \frac{1}{D^2 + D - 2} \sin x$$
$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{D^2 + D}{2}\right)} x + \frac{1}{-(1)^2 + D - 2} \sin x$$
$$= -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{D^2 + D}{2}\right)^{-1} x + \frac{1}{D - 3} \sin x$$
$$= -\frac{1}{2} \left\{1 + \frac{D^2 + D}{2} + \left(\frac{D^2 + D}{2}\right)^2 + \cdots\right\} x + \frac{D + 3}{(D - 3)(D + 3)} \sin x$$
$$= -\frac{1}{2} \left\{x + \frac{D^2 + D}{2} x + \left(\frac{D^2 + D}{2}\right)^2 x + \cdots\right\} + \frac{D + 3}{D^2 - 9} \sin x$$
$$= -\frac{1}{2} \left(x + \frac{0 + 1}{2} + 0 + \cdots\right) + \frac{D + 3}{-(1)^2 - 9} \sin x$$
$$= -\frac{1}{4} (2x + 1) - \frac{1}{10} (D \sin x + 3 \sin x)$$
$$= -\frac{1}{4} (2x + 1) - \frac{1}{10} (\cos x + 3 \sin x)$$

اس لیے دی گئی مساوات کا عام حل ہو گا

$$y = C.F. + P.I.$$
$$= c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{4} (2x + 1) - \frac{1}{10} (\cos x + 3 \sin x)$$

مثال3۔ مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = x^3 + 2x^2$ کو حل کرو۔

حل۔ اس مساوات کو ہم درجہ ذیل طریقے سے بھی لکھ سکتے ہیں

$$(D^2 + D + 1)y = x^3 + 2x^2$$

یہاں $f(D) = D^2 + D + 1$ اور $Q = x^3 + 2x^2$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات (Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$m^2 + m + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}$$
$$= -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

اس لیے دی گئی مساوات $(D^2 + D + 1)y = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل (Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = e^{-\frac{1}{2}x} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right)$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$P.I. = \frac{1}{f(D)} Q$$

$$= \frac{1}{\mathrm{D}^2 + \mathrm{D} + 1}(x^3 + 2x^2)$$
$$= \frac{1}{(1 + \mathrm{D}^2 + \mathrm{D})}(x^3 + 2x^2)$$
$$= \{1 + (\mathrm{D}^2 + \mathrm{D})\}^{-1}(x^3 + 2x^2)$$
$$= [1 - (\mathrm{D}^2 + \mathrm{D}) + \{(\mathrm{D}^2 + \mathrm{D})\}^2 - \{(\mathrm{D}^2 + \mathrm{D})\}^3 + \cdots](x^3 + 2x^2)$$
$$= (1 - \mathrm{D}^2 - \mathrm{D} + \mathrm{D}^4 + 2\mathrm{D}^3 + \mathrm{D}^2 - \mathrm{D}^6 - \mathrm{D}^3 - 3\mathrm{D}^4 - 3\mathrm{D}^5 + \cdots)(x^3 + 2x^2)$$
$$= \{x^3 + 2x^2 - \mathrm{D}(x^3 + 2x^2) + \mathrm{D}^3(x^3 + 2x^2)\}$$
$$= \{x^3 + 2x^2 - 3x^2 - 4x + (6 + 0)\}$$
$$= x^3 - x^2 - 4x + 6$$

اس لیے دی گئی مساوات کا عام حل ہو گا

$$y = C.F. + P.I.$$
$$= e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + x^3 - x^2 - 4x + 6$$

مثال4۔ مساوات $\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{d^2y}{dx^2} = 6$ کو حل کریں۔

حل۔ اس مساوات کو ہم درجہ ذیل طریقے سے بھی لکھ سکتے ہیں

$$(\mathrm{D}^4 - \mathrm{D}^2)y = 6$$

یہاں $f(D) = \mathrm{D}^4 - \mathrm{D}^2$ اور $Q = 6$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات (Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$m^4 - m^2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad m^2(m^2 - 1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = 0, 0, 1, -1$$

اس لیے دی گئی مساوات $(\mathrm{D}^4 - \mathrm{D}^2)y = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل (Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = (c_1 + c_2x)e^0 + (c_3e^x + c_4e^{-x})$$
$$= c_1 + c_2x + (c_3e^x + c_4e^{-x})$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$P.I. = \frac{1}{f(D)}Q$$
$$= \frac{1}{\mathrm{D}^4 - \mathrm{D}^2}6x^0$$
$$= \frac{6}{-\mathrm{D}^2}\left(\frac{1}{1 - \mathrm{D}^2}\right)x^0$$
$$= -\frac{6}{\mathrm{D}^2}[1 - \mathrm{D}^2]^{-1}x^0$$
$$= -\frac{6}{\mathrm{D}^2}[1 + (\mathrm{D}^2) + \cdots]x^0$$
$$= -\frac{6}{\mathrm{D}^2}(x^0 - \mathrm{D}^2x^0 + \cdots)$$
$$= -\frac{6}{\mathrm{D}^2}(1 - 0 + \cdots)$$

$$= -\frac{6}{\mathrm{D}}\int 1dx$$
$$= -6\int xdx$$
$$= -6\frac{x^2}{2}$$
$$= -3x^2$$

اس لیے دی گئی مساوات کا عام حل ہو گا

$$y = C.F. + P.I.$$
$$= c_1 + c_2x + (c_3e^x + c_4e^{-x}) - 3x^2$$

10.2.2.4 $f(D)y = e^{ax} \cdot V$ کا خاص تکملہ (Particular Integral of $f(D)y = e^{ax} \cdot V$)

فرض کرو کہ x کا کوئی تفاعل v ہے۔ متواتر تفرق (Successive Differentiation) کی مدد سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$D(e^{ax} \cdot v) = e^{ax} \cdot Dv + ae^{ax} \cdot v$$
$$= e^{ax}(D + a)v$$
$$D^2(e^{ax} \cdot v) = D\{e^{ax}(D + a)v\}$$
$$= e^{ax} \cdot D(D + a)v + ae^{ax}(D + a)v$$
$$= e^{ax}(D + a)^2v$$
$$D^3(e^{ax} \cdot v) = D\{e^{ax}(D + a)^2v\}$$
$$= e^{ax} \cdot D(D + a)^2v + ae^{ax}(D + a)^2v$$
$$= e^{ax}(D + a)^3v$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$D^n(e^{ax} \cdot v) = e^{ax}(D + a)^nv$$

اس سے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ

$$f(D)e^{ax} \cdot v = e^{ax} \cdot f(D + a)v \qquad \text{.....(1)}$$

فرض کرو کہ $f(D + a)v = V$ تب چوں کہ x کا تفاعل v ہے، تب V بھی x کا ایک تفاعل ہو گا۔ اس لیے

$$v = \frac{1}{f(D + a)}V$$

اس لیے، مساوات (1) سے

$$f(D)e^{ax}\frac{1}{f(D + a)}V = e^{ax} \cdot f(D + a)\frac{1}{f(D + a)}V = e^{ax} \cdot V$$

عامل $\frac{1}{f(D)}$ کی مدد سے دونوں طرف عمل کرنے پر

$$\frac{1}{f(D)}e^{ax} \cdot V = \frac{1}{f(D)}\left\{f(D)e^{ax}\frac{1}{f(D + a)}V\right\}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{f(D)}e^{ax} \cdot V = e^{ax}\frac{1}{f(D + a)}V$$

مثال1۔ مساوات $(D-2)^3 y = x^2 e^{2x}$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(D-2)^3 y = x^2 e^{2x}$$

یہاں $f(D) = (D-2)^3$ اور $Q = x^2 e^{2x}$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات(Auxiliary Equation)درجہ ذیل ہو گی

$$(m-2)^3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = 2, 2, 2$$

اس لیے دی گئی مساوات $(\mathrm{D}^2 + 4)y = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل(Complementary Function)درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{2x}$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$\begin{aligned} P.I. &= \frac{1}{f(D)} Q \\ &= \frac{1}{(D-2)^3} x^2 e^{2x} \end{aligned}$$

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{1}{f(D)} e^{ax} \cdot V = e^{ax} \frac{1}{f(D+a)} V$ اس لیے

$$\begin{aligned} &= e^{2x} \frac{1}{(D+2-2)^3} x^2 \\ &= e^{2x} \frac{1}{D^3} x^2 \\ &= e^{2x} \int\int\int x^2 \, dx \\ &= e^{2x} \int\int \frac{x^3}{3} dx \\ &= e^{2x} \int \frac{x^4}{12} dx \\ &= e^{2x} \frac{x^5}{60} \end{aligned}$$

اس لیے دی گئی مساوات کا عام حل ہو گا

$$\begin{aligned} y &= C.F. + P.I. \\ &= (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{2x} + \frac{1}{60} x^5 e^{2x} \end{aligned}$$

مثال2۔ مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 5y = e^{2x} \sin x$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(\mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D} + 5)y = e^{2x} \sin x$$

یہاں $f(D) = \mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D} + 5$ اور $Q = e^{2x} \sin x$ اور $a = 2$ ہے۔

اس مساوات کے لیے معاون مساوات(Auxiliary Equation)درجہ ذیل ہو گی

$$(\mathrm{m}^2 - 2\mathrm{m} + 5) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad m = 1 \pm 2i$$

اس لیے دی گئی مساوات $(\mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D} + 5)y = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل(Complementary Function)درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$P.I. = \frac{1}{f(D)} Q$$

$$= \frac{1}{\mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D} + 5} e^{2x} \sin x$$

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{1}{f(D)} e^{ax} \cdot V = e^{ax} \frac{1}{f(D+a)} V$ اس لیے

$$P.I. = e^{2x} \frac{1}{(D+2)^2 - 2(D+2) + 5} \sin x$$

$$= e^{2x} \frac{1}{\mathrm{D}^2 + 2\mathrm{D} + 5} \sin x$$

D^2 کی جگہ $(1)^2-$ درج کرنے پر

$$= e^{2x} \frac{1}{-(1)^2 + 2\mathrm{D} + 5} \sin x$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} \frac{\mathrm{D} - 2}{(\mathrm{D}+2)(\mathrm{D}-2)} \sin x$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} \frac{\mathrm{D} - 2}{(\mathrm{D}^2 - 4)} \sin x$$

D^2 کی جگہ $(1)^2-$ درج کرنے پر

$$= \frac{1}{2} e^{2x} \frac{\mathrm{D} - 2}{-(1)^2 - 4} \sin x$$

$$= -\frac{1}{10} e^{2x} (\mathrm{D} \sin x - 2 \sin x)$$

$$= -\frac{1}{10} e^{2x} (\cos x - 2 \sin x)$$

اس لیے دی گئی مساوات کا عام حل ہو گا

$$y = C.F. + P.I.$$

$$= e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) - \frac{1}{10} e^{2x} (\cos x - 2 \sin x)$$

مثال3۔ مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = x \sin x$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$(\mathrm{D}^2 + 2\mathrm{D} + 1)y = x \sin x$$

یہاں $f(D) = \mathrm{D}^2 + 2\mathrm{D} + 1$ اور $Q = x \sin x$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات (Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$(\mathrm{m}^2 + 2\mathrm{m} + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = -1, -1$$

اس لیے دی گئی مساوات $(\mathrm{D}^2 + 2\mathrm{D} + 1)y = 0$ کے لیے اتمامی تفاعل (Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = (c_1 + c_2 x)e^{-x}$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$\begin{aligned}
P.I. &= \frac{1}{f(D)} Q \\
&= \frac{1}{\mathrm{D}^2 + 2\mathrm{D} + 1} x \sin x \\
&= \text{کا خیالی حصہ } \frac{1}{(\mathrm{D}+1)^2} x e^{ix} \\
&= \text{کا خیالی حصہ } e^{ix} \frac{1}{(\mathrm{D}+i+1)^2} x \\
&= \text{کا خیالی حصہ } e^{ix} \left(\frac{1}{1+i}\right)^2 \left\{\frac{1}{\left(1+\frac{\mathrm{D}}{i+1}\right)^2}\right\} x \\
&= \text{کا خیالی حصہ } e^{ix} \frac{1}{2i} \left(1 + \frac{\mathrm{D}}{i+1}\right)^{-2} x \\
&= \text{کا خیالی حصہ } e^{ix} \frac{i}{2i^2} \left(1 - \frac{2\mathrm{D}}{i+1} + \frac{3\mathrm{D}^2}{(i+1)^2} - \cdots\right) x \\
&= \text{کا خیالی حصہ } e^{ix} \frac{-1}{2} i \left(x - \frac{2Dx}{i+1} + \frac{3D^2 x}{(i+1)^2} - \cdots\right) \qquad [\because i^2 = -1] \\
&= \text{کا خیالی حصہ } e^{ix} \frac{-1}{2} i \left(x - \frac{2}{i+1} + 0\right) \\
&= \text{کا خیالی حصہ } e^{ix} \frac{-1}{2} i \left(x - \frac{2(1-i)}{1-i^2}\right) \\
&= \text{کا خیالی حصہ } e^{ix} \frac{-1}{2} \{i(x-1) - 1\} \qquad [\because i^2 = -1] \\
&= \text{کا خیالی حصہ } \frac{-1}{2} (\cos x + i \sin x)\{i(x-1) - 1\} \\
&= \text{کا خیالی حصہ } \frac{-1}{2} [\{-\cos x - (x-1)\sin x\} + i\{(x-1)\cos x - \sin x\}] \\
&= \frac{-1}{2} \{(x-1)\cos x - \sin x\} \\
&= \frac{1}{2} \{(1-x)\cos x + \sin x\}
\end{aligned}$$

اس لیے دی گئی مساوات کا عام حل ہو گا

$$y = C.F. + P.I.$$
$$= (c_1 + c_2x)e^{-x} + \frac{1}{2}\{(1-x)\cos x + \sin x\}$$

10.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

کسی تفرقی مساوات $f(D)y = Q$ کا خاص تکملہ دو طریقوں سے حاصل کیا جا سکتا ہے:

1. فرض کرو کہ $f(D) = D - m$ تب خاص تکملہ $\frac{1}{D-m}Q = e^{mx}\int Qe^{-mx}\,dx$
2. فرض کرو کہ $f(D) = (D-m_1)(D-m_2)\cdots(D-m_n)$ تب خاص حل

$$\frac{1}{(D-m_1)(D-m_2)\cdots(D-m_n)}Q = \frac{1}{(D-m_1)(D-m_2)\cdots(D-m_{n-1})}e^{m_nx}\int Qe^{-m_nx}\,dx$$

اسی انداز میں آگے بڑھنے پر ضروری خاص تکملہ حاصل ہو جتا ہے۔

اوپر دی گئی صورت میں ہم درجہ ذیل طریقہ سے بھی دی تفرقی مساوات کا خاص تکملہ حاصل کر سکتے ہیں

$$\frac{1}{(D-m_1)(D-m_2)\cdots(D-m_n)}Q = \left\{\frac{A_1}{D-m_1} + \frac{A_2}{D-m_2} + \cdots + \frac{A_n}{D-m_n}\right\}Q$$
$$= \left\{A_1e^{m_1x}\int Qe^{-m_1x}\,dx + A_2e^{m_2x}\int Qe^{-m_2x}\,dx + \cdots + A_ne^{m_nx}\int Qe^{-m_nx}\,dx\right\}$$

3. جب $Q = e^{ax}$ اور $f(a) \neq 0$، تب خاص حل

$$\frac{1}{f(D)}e^{ax} = \frac{1}{f(a)}e^{ax}$$

اگر $Q = e^{ax}$ اور $f(a) = 0$ ہے، تب $f(D)$ کا ایک جزو ضربی $D - a$ ہو گا، تب ہم مان لیتے ہیں کہ

$$f(D) = (D-a)^k\varphi(D)$$

جہاں $\varphi(a) \neq 0$، تب خاص حل

$$\frac{1}{f(D)}e^{ax} = \frac{1}{\varphi(a)}\cdot\frac{x^k}{k!}e^{ax}$$

4. جب $Q = \sin ax$، تب خاص حل

اگر D کی صرف جفت قوت $f(D)$ میں موجود ہوں تو اسے $\varphi(D^2)$ سے ظاہر کرتے ہیں تب

$$\frac{1}{\varphi(D^2)}\sin ax = \frac{1}{\varphi(-a^2)}\sin ax$$

اور اسی طرح

$$\frac{1}{\varphi(D^2)}\cos ax = \frac{1}{\varphi(-a^2)}\cos ax$$

5. جب $Q = e^{ax}\cdot V$، جبکہ x کا تفاعل V ہو

$$\frac{1}{f(D)}e^{ax}\cdot V = e^{ax}\frac{1}{f(D+a)}V$$

10.4 کلیدی الفاظ(Keywords)

خاص حل، اتمامی تفاعل، معاون مساوات، عامل، عمل

10.5 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

10.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. مساوات $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=x\sin x$ کا معاون مساوات لکھو۔
2. مساوات $\frac{d^2y}{dx^2}+y=\cos 2x$ کے لیے اتمامی تفاعل لکھو۔
3. اگر کسی تفرقی مساوات کے سبھی روٹس الگ الگ ہوں تو ان کے لیے اتمامی تفاعل کا عام ضابطہ لکھو۔
4. اگر رتبہ تین کی تفرقی مساوات کے سبھی روٹس برابر ہوں تو ان کے لیے اتمامی تفاعل کا عام ضابطہ لکھو۔
5. اگر رتبہ دو کی تفرقی مساوات کے روٹس $\alpha\pm i\beta$ ہوں تو ان کے لیے اتمامی تفاعل کا عام ضابطہ لکھو۔

10.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

کسی مناسب طریقہ سے درجہ ذیل تفرقی مساوات کا حل معلوم کرو:

1. $\frac{d^2y}{dx^2}+y=\cos 2x$
2. $\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y=\sec ax$
3. $\frac{d^2y}{dx^2}+4y=\tan 2x$
4. $\frac{d^2y}{dx^2}-y=e^x$
5. $\frac{d^2y}{dx^2}+9y=\sec 3x$
6. $\frac{d^2y}{dx^2}+y=\sec^2 x$
7. $\frac{d^2y}{dx^2}+y=\sin 2x$
8. $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}-4y=6e^x$
9. $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=e^{2x}$
10. $\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}+1\right)\left(\frac{dy}{dx}-1\right)^3 y=12e^x$
11. $3\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-14y=e^{2x}$
12. $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}$

13. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 4y = 5e^x$

14. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 3e^x + \sin 2x$

15. $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - y = 25\cos 2x$

16. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = \sin 2x$

17. $\frac{d^4y}{dx^4} - y = 15\sin 2x$

18. $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = \cos 3x$

19. $\frac{d^2y}{dx^2} + 16y = 24\sin 4x$

10.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^x - 10\sin x$ کو حل کرو جبکہ دیا ہے $y(0) = 2$ اور $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 4$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 13y = 5\sin 2x$ کو حل کرو جبکہ دیا ہے $y(0) = 1$ اور $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = -2$

3. $\frac{d^3y}{dx^3} + 8y = x^4 + 2x + 1$ کو حل کرو۔

4. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 6x$ کو حل کرو۔

5. $\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 2x^2$ کو حل کرو۔

6. $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = x$ کو حل کرو۔

7. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 2x$ کو حل کرو۔

8. $\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} = 1 + x^2$ کو حل کرو۔

9. $\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = e^{2x} + x^2 + x$ کو حل کرو۔

10. $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 2x^2 + 1$ کو حل کرو۔

11. $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 5x = 10$ کو حل کرو جبکہ دیا ہے $x(0) = 0$ اور $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = 0$

12. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{2x}\sin x$ کو حل کرو۔

13. $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$ کو حل کرو۔

14. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = x^3e^{2x}$ کو حل کرو۔

15. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = e^x$ کو حل کرو۔

16. $\frac{d^2y}{dx^2} - y = e^x\sin 3x$ کو حل کرو۔

17. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = x^2e^{3x}$ کو حل کرو۔

18. $\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + y = x^2e^{-x}$ کو حل کرو۔

19. $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 8xe^x$ کو حل کرو۔

20. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 4y = e^x \sin 2x$ کو حل کرو۔

21. $\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = xe^{-2x}$ کو حل کرو۔

22. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = e^x \cos 2x + \cos 3x$ کو حل کرو۔

23. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 4y = e^x \cos x$ کو حل کرو۔

24. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = x \sin x$ کو حل کرو۔

25. $\frac{d^3y}{dx^3} - 7\frac{dy}{dx} - 6y = e^{2x}(1 + x)$ کو حل کرو۔

26. $\frac{d^4y}{dx^4} - y = x^2 \sin x$ کو حل کرو۔

27. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 12y = e^{2x}(x - 1)$ کو حل کرو۔

28. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = x \cos 2x$ کو حل کرو۔

29. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 4y = e^x \sin x$ کو حل کرو۔

30. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = xe^x \sin x$ کو حل کرو۔

جوابات:

10.5.1 معروضی سوالا تکے جوابات

1. $D^2 + 2D + 1 = 0$
2. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$
3. $y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x} + \cdots + c_ne^{m_nx}$
4. $y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{mx}$
5. $y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

10.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالا تکے جوابات

1. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{3}\cos 2x$
2. $y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax + \frac{x}{a}\sin ax + \frac{1}{a^2}\cos ax \log(\cos ax)$
3. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x \log\left|\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|$
4. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x$
5. $y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{x}{3}\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x \log(\cos 3x)$

6. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \sin x \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - 1$

7. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{3}\sin 2x$

8. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x} - e^{x}$

9. $y = \left(c_1 + c_2 x + \frac{x^2}{2}\right) e^{2x}$

10. $y = (c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 x)e^{2x} + (c_4 + c_5 x + c_6 x^2)e^{-x} + x^3 e^{x}$

11. $y = c_1 e^{-\frac{7}{3}x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{13} x e^{2x}$

12. $y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_1 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + e^{-x}$

13. $y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{x} + x e^{x}$

14. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - e^{x}$

15. $y = c_1 e^{3x} + (c_2 + c_3 x)e^{-x} - (2\sin 2x + \cos 2x)$

16. $y = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + \frac{1}{8}\cos 2x$

17. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x + \sin 2x$

18. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{130}(7\cos 3x + 9\sin 3x)$

19. $y = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x - 3x \cos 4x$

10.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $y = \frac{3}{2}e^{3x} + 2e^{-x} - \frac{1}{2}e^{x} + 2\sin x - \cos x$

2. $y = \frac{1}{29}\left[e^{-2x}\left(37\cos 3x - \frac{2}{3}\sin 3x\right) + (9\sin 2x - 8\cos 2x)\right]$

3. $y = c_1 e^{-2x} + e^{x}\left(c_2 \cos\sqrt{3}x + c_3 \sin\sqrt{3}x\right) + \frac{1}{8}(x^4 - x + 1)$

4. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} - \left(x + \frac{1}{6}\right)$

5. $y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x} + \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{7x}{2}$

6. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{6}\left(x + \frac{5}{6}\right)$

7. $y = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + x - 1$

8. $y = c_1 + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-2x} - \frac{1}{6}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{6} + \frac{25x}{18}\right)$

9. $y = c_1 + (c_2 + c_3 x)e^{-x} + \frac{1}{18}e^{2x} + \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x$

10. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 4$

11. $x = 1 + 2t - 3t^2 - e^{-3t}$

12. $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{170}e^{2x}(7\cos x - 11\sin x)$

13. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} - x e^{x}$

14. $y = (c_1 + c_2 x) e^{2x} + \frac{1}{20} x^5 e^{2x}$

15. $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} + \frac{1}{3} x e^{x}$

16. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} - \frac{1}{39} e^{x}(2\cos 3x + 3\sin 3x)$

17. $y = (c_1 + c_2 x) e^{x} + \frac{1}{8} e^{3x}(2x^2 - 4x + 3)$

18. $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{-x} + \frac{1}{8} x^5 e^{-x}$

19. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + 2e^{x}(x^2 - x)$

20. $y = e^{-x}\left(c_1 \cos\sqrt{3}x + c_2 \sin\sqrt{3}x\right) + \frac{1}{73} e^{x}(3\sin 2x - 8\cos 2x)$

21. $y = c_1 e^{x} + (c_2 + c_3 x) e^{-2x} - \frac{1}{18}(x^3 + x^2) e^{-2x}$

22. $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{x} - \frac{1}{8} e^{x}(\cos 2x + \sin 2x) - \frac{1}{30}(\cos 3x + 2\sin 3x)$

23. $y = e^{x}\left(c_1 \cos\sqrt{3}x + c_2 \sin\sqrt{3}x\right) + \frac{1}{2} e^{x} \cos x$

24. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{9}(3x \sin 2x - 2\cos x)$

25. $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} - \left(\frac{x}{12} + \frac{17}{144}\right) e^{2x}$

26. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x + \frac{1}{6}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{5x}{2}\right)\cos x - \frac{3}{8} x^2 \sin x$

27. $y = c_1 e^{-6x} + c_2 e^{2x} + \frac{e^{2x}}{32}(2x^2 - 3)$

28. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + \frac{x}{20}(3\sin 2x - \cos x) + \frac{1}{25}\left(3\cos 2x - \frac{7}{8}\sin 2x\right)$

29. $y = e^{x}\left(c_1 \cos\sqrt{3}x + c_2 \sin\sqrt{3}x\right) + \frac{1}{2} e^{x} \sin x$

30. $y = (c_1 + c_2 x) e^{2x} - e^{x}(2\cos x + x \sin 2x)$

اکائی 11۔ متغیر ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساواتیں

Homogeneous Linear Differential Equations with Variable)

(Coefficients

اکائی کے اجزا

11.0 تمہید

11.1 مقاصد

11.2 متغیر ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساواتیں

11.2.1 متغیر ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساوات کے حل کے عملی قاعدے

11.2.2 متغیر ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساوات میں تحویل پزیر مساواتیں

11.3 اکتسابی نتائج

11.4 کلیدی الفاظ

11.5 نمونہ امتحانی سوالات

11.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

11.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

11.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

11.0 تمہید(Introduction)

اس اکائی میں ہم متغیر ضریب کی متجانس تفرقی مساوات کو حل کرنے کے کچھ طریقوں کو سمجھیں گے۔اس کے لیے ہم غیر تابع متغیر x کو دوسرے متغیر z کی رکن میں تبدیل کرتے ہیں۔اس کے لیے مان لیتے ہیں کہ $x = e^z$،اور $\frac{d}{dz}$ کی جگہ D رکھیں،تب

$$\frac{dx}{dz} = e^z = x$$

$$Dy = \frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dz} = x\frac{dy}{dx}$$

اسی طرح

$$\begin{aligned} D^2y = \frac{d^2y}{dz^2} &= \frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)\frac{dx}{dz} \\ &= \left\{x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\right\}x \\ &= \left\{x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^2\frac{d^2y}{dx^2} &= D^2y - x\frac{dy}{dx} \\ &= D^2y - Dy \\ &= D(D-1)y \end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned} D^3y = \frac{d^3y}{dz^3} &= \frac{d}{dz}\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx}\right)\frac{dx}{dz} \\ &= \left\{x^2\frac{d^3y}{dx^3} + 2x\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\right\}x \\ &= \left\{x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 3x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^3\frac{d^3y}{dx^3} &= D^3y - 3x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} \\ &= D^3y - 3D(D-1)y - Dy \\ &= D^3y - 3D^2y + 2Dy \\ &= D(D^2 - 3D + 2)y \\ &= D(D-1)(D-2)y \end{aligned}$$

اسی طرز پر آگے بڑھتے ہوئے، ہمیں درجہ ذیل مساوات حاصل ہو جاتی ہے

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n} = D(D-1)(D-2)\cdots(D-n+1)y$$

11.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ متغیر ضریب کیمتجانس خطی تفرقی مساوات کی معیاری شکل سے واقفیت کے ساتھان کا حل بھی حاصل کر سکیں۔

11.2 متغیر ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساواتیں

(Homogeneous Linear Differential Equations with Variable Coefficients)

تفرقی مساوات کی درجہ ذیل شکل

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + A_2 x^{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + A_{n-1} x \frac{dy}{dx} + A_n y = Q$$

متغیر ضریب کیمتجانس خطی تفرقی مساوات کہلاتی ہے، جہاں A_n، $\cdots$، A_2، A_1 مستقلات ہیں اور x کا کوئی تفاعل Q ہے۔اس مساوات کا حل حاصل کرنے کے لیے $x = e^z$ رکھتے ہیں اور $x\frac{dy}{dx} = Dy, x^2\frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y, x^3\frac{d^3y}{dx^3} = D(D-1)(D-2)y$ اور اسی طرح $x^n\frac{d^ny}{dx^n} = D(D-1)(D-2)\cdots(D-n+1)y$ کرنے پر مساوات مستقل ضریب کی خطی تفرقی مساوات میں بدل جاتی ہے جس کا حل گزشتہ اکائی میں بتایے گیے طریقوں سے حاصل کر سکتے ہیں۔

11.2.1 متغیر ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساوات کے حل کے عملی قاعدے

(Working Rules to Solve Homogeneous Linear Differential Equations with Variable Coefficients)

پہلی صورت: فرض کرو کہ

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + A_2 x^{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + A_{n-1} x \frac{dy}{dx} + A_n y = Q \quad \ldots..(1)$$

متغیر ضریب کیمتجانس خطی تفرقی مساوات ہے۔اس کا حل حاصل کرنے کے لیے درجہ ذیل اقدامات پر عمل کریں:

I. x کی جگہ e^z یا $z = \log x$ لیں اور $D = \frac{d}{dz}$

II. $x\frac{dy}{dx}$ کی جگہ Dy، $x^2\frac{d^2y}{dx^2}$ کی جگہ $D(D-1)y$ اور $x^3\frac{d^3y}{dx^3} = D(D-1)(D-2)y$ درج کریں اور اسی طرح آگے کے ارکان میں بھی بدلاؤ کریں۔فرض کرو کہ اب مساوات درجہ ذیل شکل میں ہے

$$f(D)y = R \quad \ldots..(2)$$

جہاں R کسی متغیر z کا تفاعل ہے۔

III. گزشتہ اکائی کے طریقوں کی مدد سے اس مساوات کا حل حاصل کریں۔فرض کرو کہ اس کا حل ہے

$$y = f(z) \quad \ldots..(3)$$

IV. مساوات(3) میں z کی جگہ $\log x$ درج کریں۔اب ہمیں حاصل ہو گا

$$y = F(\log x)$$

جو کہ دی گئی متجانس خطی تفرقی مساوات کا حل ہو گا۔

اب ہم کچھ مثالوں کی مدد سے اس طریقہ کو سمجھیں گے۔

مثال1۔ مساوات $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = \log x^2$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = \log x^2 \quad \text{.....(1)}$$

سب سے پہلے ہم مساوات(1) کو مستقل ضریب کے ساتھ خطی تفرقی مساوات میں تبدیل کرتے ہیں۔اس کے لیے دی گئی مساوات میں x کی جگہ e^z یا $\log x = z$ لیں اور $x\frac{dy}{dx}$ کی جگہ Dy اور $x^2\frac{d^2y}{dx^2}$ کی جگہ $D(D-1)y$ رکھتے ہیں۔اس لیے

$$D(D-1)y - Dy + y = 2z$$
$$(D^2 - 2D + 1)y = 2z \quad \text{.....(2)}$$

اس مساوات کو حل کرتے ہیں۔اس کے لیے معاون مساوات(Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$m^2 - 2m + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m-1)(m-1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = 1, 1$$

اس لیے اتمامی تفاعل(Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = (c_1 + c_2 z)e^z$$

اور خاص تکملہ(Particular Integral) ہو گا

$$\begin{aligned} P.I. &= \frac{1}{f(D)}R \\ &= \frac{1}{(D^2 - 2D + 1)}(2z) \\ &= [1 + (D^2 - 2D)]^{-1}(2z) \\ &= [1 - (D^2 - 2D) + (D^2 - 2D)^2 - \cdots](2z) \\ &= 2[z - (D^2 - 2D)z + (D^2 - 2D)^2 z - \cdots] \\ &= 2[z - (D^2 z - 2Dz) + 0 - \cdots] \\ &= 2[z - (0 - 2 \times 1)] \\ &= 2(z + 2) \end{aligned}$$

اس لیے مساوات(2) کا عام حل ہو گا

$$\begin{aligned} y &= C.F. + P.I. \\ &= (c_1 + c_2 z)e^z + 2(z + 2) \end{aligned}$$

اس طرح مساوات(1) کا عام حل حاصل کرنے کے لیے z کی جگہ $\log x$ رکھتے ہیں، تب ضروری حل ہو گا

$$\begin{aligned} y &= (c_1 + c_2 \log x)e^{\log x} + 2(\log x + 2) \\ &= (c_1 + c_2 \log x)x + 2(\log x + 2) \end{aligned}$$

مثال2۔ حل کرو: $x^4\frac{d^3y}{dx^3} + 2x^3\frac{d^2y}{dx^2} - x^2\frac{dy}{dx} + xy = 1$

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$x^4\frac{d^3y}{dx^3}+2x^3\frac{d^2y}{dx^2}-x^2\frac{dy}{dx}+xy=1$$

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}+2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{x} \qquad \text{.....(1)}$$

سب سے پہلے ہم مساوات (1) میں x کی جگہ e^z یا $(\log x = z)$ لیں اور $x\frac{dy}{dx}$ کی جگہ Dy، $x^2\frac{d^2y}{dx^2}$ کی جگہ $D(D-1)y$ اور $x^3\frac{d^3y}{dx^3}=D(D-1)(D-2)y$ رکھیں۔اس طرح ہمیں حاصل ہوگا

$$D(D-1)(D-2)y+2D(D-1)y-Dy+y=e^{-z}$$

$$(D^3-D^2-D+1)y=e^{-z} \qquad \text{.....(2)}$$

اس مساوات کا حل حاصل کرتے ہیں۔اس کے لیے معاون مساوات(Auxiliary Equation)درجہ ذیل ہوگی

$$m^3-m^2-m+1=0$$

$$\Rightarrow \quad (m-1)^2(m+1)=0$$

$$\Rightarrow \quad m=1,1,-1$$

اس لیے اتمامی تفاعل(Complementary Function)درجہ ذیل ہوگا

$$C.F.=(c_1+c_2z)e^z+c_3e^{-z}$$

اور خاص تکملہ(Particular Integral)ہوگا

$$\begin{aligned}P.I.&=\frac{1}{f(D)}R\\&=\frac{1}{(D-1)^2(D+1)}(e^{-z})\\&=\frac{1}{(-1-1)^2(D+1)}(e^{-z})\\&=\frac{1}{4(D+1)}(e^{-z})\\&=\frac{1}{4}e^{-z}\int e^ze^{-z}dz\\&=\frac{1}{4}e^{-z}\int(1)dz\\&=\frac{1}{4}ze^{-z}\end{aligned}$$

اس لیے مساوات(2)کا عام حل ہوگا

$$\begin{aligned}y&=C.F.+P.I.\\&=(c_1+c_2z)e^z+c_3e^{-z}+\frac{1}{4}ze^{-z}\\&=(c_1+c_2z)e^z+\left(c_3+\frac{1}{4}z\right)e^{-z}\end{aligned}$$

اب مساوات(1)کا عام حل حاصل کرنے کے لیے z کی جگہ $\log x$ درج کریں،اس طرح دی گئی مساوات کا حل ہوگا

$$\begin{aligned}y&=(c_1+c_2\log x)e^{\log x}+\left(c_3+\frac{1}{4}\log x\right)e^{-\log x}\\&=(c_1+c_2\log x)x+\left(c_3+\frac{1}{4}\log x\right)\frac{1}{x}\end{aligned}$$

مثال3۔ مساوات $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2y = x^2 + \frac{1}{x}$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2y = x^2 + \frac{1}{x} \quad \text{.....(1)}$$

مساوات(1) کو مستقل ضریب کے ساتھ خطی تفرقی مساوات میں تبدیل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں x کی جگہ e^z یا $\log x = z$ رکھیں اور $x\frac{dy}{dx}$ کی جگہ Dy اور $x^2\frac{d^2y}{dx^2}$ کی جگہ $D(D-1)y$ رکھتے ہیں۔اس لیے

$$D(D-1)y - 2y = e^{2z} + e^{-z}$$

یا

$$(D^2 - D - 2)y = e^{2z} + e^{-z} \quad \text{.....(2)}$$

اب مساوات(2) کو حل کرتے ہیں۔اس کے لیے معاون مساوات(Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$m^2 - m - 2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m-2)(m+1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = 2, -1$$

اس لیے اتمامی تفاعل(Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = c_1e^{2z} + c_2e^{-z}$$

اور خاص تکملہ(Particular Integral) ہو گا

$$\begin{aligned}
P.I. &= \frac{1}{f(D)}R \\
&= \frac{1}{(D-2)(D+1)}(e^{2z} + e^{-z}) \\
&= \frac{1}{(D-2)(2+1)}e^{2z} + \frac{1}{(-1-2)(D+1)}e^{-z} \\
&= \frac{1}{3(D-2)}e^{2z} - \frac{1}{3(D+1)}e^{-z} \\
&= \frac{1}{3}\left[e^{2z}\int e^{-2z}e^{2z}dz - e^{-z}\int e^{z}e^{-z}dz\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[e^{2z}\int dz - e^{-z}\int dz\right] \\
&= \frac{1}{3}[e^{2z}z - e^{-z}z] \\
&= \frac{1}{3}z(e^{2z} - e^{-z})
\end{aligned}$$

اس لیے مساوات(2) کا عام حل ہو گا

$$\begin{aligned}
y &= C.F. + P.I. \\
&= c_1e^{2z} + c_2e^{-z} + \frac{1}{3}z(e^{2z} - e^{-z})
\end{aligned}$$

اب مساوات(1) کا عام حل حاصل کرنے کے لیے z کی جگہ $\log x$ رکھتے ہیں،اس لیے ضروری حل ہو گا

$$y = c_1 x^2 + c_2\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{3}\log x\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)$$

مثال4۔ مساوات $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 5y = x^2\sin(\log x)$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 5y = x^2\sin(\log x) \quad \text{.....(1)}$$

مساوات(1) کو مستقل ضریب کے ساتھ خطی تفرقی مساوات میں تبدیل کرنے کے لیے دی گئی مساوات میں x کی جگہ e^z یا $(\log x = z)$ رکھیں اور $x^2\frac{d^2y}{dx^2}$ کی جگہ $D(D-1)y$ رکھتے ہیں۔اس لیے

$$D(D-1)y - 3Dy + 5y = e^{2z}\sin z$$

یا

$$(D^2 - 4D + 5)y = e^{2z}\sin z \quad \text{.....(2)}$$

اب مساوات(2) کو حل کرتے ہیں۔اس کے لیے معاون مساوات(Auxiliary Equation)درجہ ذیل ہو گی

$$m^2 - 4m + 5 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m-5)(m+1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = 5, -1$$

اس لیے اتمامی تفاعل(Complementary Function)درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = c_1 e^{5z} + c_2 e^{-z}$$

اور خاص تکملہ(Particular Integral)ہو گا

$$\begin{aligned} P.I. &= \frac{1}{f(D)}R \\ &= \frac{1}{(D-5)(D+1)}(e^{2z}\sin z) \\ &= e^{2z}\frac{1}{(D+2-5)(D+2+1)}(\sin z) \\ &= e^{2z}\frac{1}{(D-3)(D+3)}(\sin z) \\ &= e^{2z}\frac{1}{D^2-9}(\sin z) \\ &= e^{2z}\frac{1}{-(1)^2-9}(\sin z) \\ &= -\frac{1}{10}e^{2z}\sin z \end{aligned}$$

اس لیے مساوات(2)کا عام حل ہو گا

$$\begin{aligned} y &= C.F. + P.I. \\ &= c_1 e^{5z} + c_2 e^{-z} - \frac{1}{10}e^{2z}\sin z \end{aligned}$$

اب مساوات(1)کا عام حل حاصل کرنے کے لیے z کی جگہ $\log x$ رکھتے ہیں،اس لیے ضروری حل ہو گا

$$y = c_1 x^5 + c_2 \left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{10} x^2 \sin(\log x)$$

دوسری صورت: فرض کرو کہ متجانس خطی تفرقی مساوات درجہ ذیل ہے

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + A_2 x^{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + A_{n-1} x \frac{dy}{dx} + A_n y = Q \quad \text{.....(1)}$$

جہاں $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}, A_n$ مستقلات ہیں اور x کا کوئی تفاعل Q ہے۔ یہاں ہم عامل (Operator) $\frac{d}{dx}$ کو $\boldsymbol{D}$ سے ظاہر کرتے ہیں اور اس لیے $x\frac{dy}{dx} = \boldsymbol{D}y$، $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{D}-1)y$، $x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{D}-1)(\boldsymbol{D}-2)y$ اور اسی طرح $x^n \frac{d^n y}{dx^n} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{D}-1)(\boldsymbol{D}-2)\cdots(\boldsymbol{D}-n+1)y$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ اب مساوات (1) درجہ ذیل شکل میں ہو گی۔

$$f(\boldsymbol{D})y = Q \quad \text{.....(2)}$$

اب مان لیتے ہیں کہ $y = Ax^m$ مساوات $f(\boldsymbol{D})y = 0$ کا ایک حل ہے۔ اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ

$$Ax^m f(m) = 0$$

اس لیے $y = Ax^m$ مساوات $f(\boldsymbol{D})y = 0$ کا حل تبھی ہو گا جب معاون مساوات

$$f(m) = 0 \quad \text{.....(3)}$$

کا ایک روٹ m ہو۔

4. جب معاون مساوات کے سبھی روٹس الگ الگ ہوں:

اس صورت میں مان لیجیے کہ $m_1, m_2, \cdots, m_n$ معاون مساوات کے الگ الگ روٹس ہیں، تب

$$C.F. = A_1 x^{m_1} + A_2 x^{m_2} + \cdots + A_n x^{m_n}$$

5. جب معاون مساوات کے k روٹس تکراری (Repeated) ہوں:

مان لیجیے کہ معاون مساوات کے n روٹس میں سے k روٹس مساوی ہیں $m = m_1 = m_2 = \cdots = m_k$، تب

$$C.F. = (c_1 + c_2 \log x + c_3 (\log x)^2 + \cdots + c_k (\log x)^{k-1}) x^m + c_{k+1} e^{m_{k+1} x} + \cdots + c_n e^{m_n x}$$
$$= (c_1 + c_2 + \cdots + c_k) e^{mx} + c_{k+1} e^{m_{k+1} x} + \cdots + c_n e^{m_n x}$$

6. جب معاون مساوات کے روٹس ملتف اعداد ہوں:

اس صورت میں مان لیجیے کہ $m_1 = \alpha + i\beta$ اور $m_2 = \alpha - i\beta$ حاصل کردہ معاون مساوات کے روٹس ہیں، تب

$$C.F. = x^\alpha \{c_1 \cos(\beta \log x) + c_2 \sin(\beta \log x)\}$$

خاص تکملہ (Particular Integral):

مساوات (2) کے لیے خاص تکملہ ہے

$$P.I. = \frac{1}{f(\boldsymbol{D})} Q \quad \text{.....(4)}$$

فرض کرو کہ

$$\frac{1}{\boldsymbol{D}-m} Q = v \quad \text{.....(5)}$$

$$\Rightarrow \quad (\boldsymbol{D} - m)v = Q$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} - mv = Q$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} - \frac{m}{x}v = \frac{Q}{x}$$

یہ پہلے رتبہ کی خطی تفرقی مساوات ہے جس کا حل ہے

$$vx^{-m} = \int \left(x^{-m} \cdot \frac{Q}{x}\right) dx$$

$$\Rightarrow v = x^m \int \left(x^{-m} \cdot \frac{Q}{x}\right) dx$$

$$\frac{1}{\mathcal{D}-m} Q = x^m \int (x^{-m-1}Q)dx$$ مساوات(5) سے کی قیمت رکھنے پر

اب اگر مان لیا جایے کہ $f(\mathcal{D}) = (\mathcal{D} - m_1)(\mathcal{D} - m_2) \cdots (\mathcal{D} - m_n)$، تب

$$\frac{1}{f(\mathcal{D})} Q = \frac{1}{(\mathcal{D} - m_1)(\mathcal{D} - m_2) \cdots (\mathcal{D} - m_n)} Q$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(\mathcal{D})} Q = \left[\frac{C_1}{(\mathcal{D} - m_1)} + \frac{C_2}{(\mathcal{D} - m_2)} + \cdots + \frac{C_n}{(\mathcal{D} - m_n)}\right] Q$$

$$= \frac{C_1}{(\mathcal{D} - m_1)} Q + \frac{C_2}{(\mathcal{D} - m_2)} Q + \cdots \frac{C_n}{(\mathcal{D} - m_n)} Q$$

$$= C_1 x^{m_1} \int (x^{-m_1-1} \cdot Q)dx + C_2 x^{m_2} \int (x^{-m_2-1} \cdot Q)dx + \cdots$$

$$+ C_n x^{m_n} \int (x^{-m_n-1} \cdot Q)dx$$

تبصرہ: اگر $Q = x^m$ ہو اور $f(m) \neq 0$، تب خاص تکملہ ہو گا

$$P.I. = \frac{1}{f(\mathcal{D})} x^m = \frac{1}{f(m)} x^m$$

اس مسئلہ میں اگر $f(m) = 0$، تب

$$P.I. = \frac{1}{(\mathcal{D} - m)^n} x^m = \frac{(\log x)^n}{n!} x^m$$

آیے اب ہم کچھ مثالوں کو حل کریں۔

مثال 1۔ مساوات $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + y = (1 - x)^2$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + y = (1 - x)^2 \quad \text{.....(1)}$$

مساوات(1) میں $\frac{dy}{dx}$ کی جگہ $x\mathcal{D}y$ رکھیں اور $\frac{d^2y}{dx^2}$ کی جگہ $x^2\mathcal{D}(\mathcal{D} - 1)y$ رکھتے ہیں۔ اس لیے

$$\mathcal{D}(\mathcal{D} - 1)y + 3\mathcal{D}y + y = x^2 - 2x + 1$$

یا

$$(\mathcal{D}^2 + 2\mathcal{D} + 1)y = x^2 - 2x + 1 \quad \text{.....(2)}$$

اب مساوات(2) کو حل کرتے ہیں۔ اس کے لیے معاون مساوات (Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$m^2 + 2m + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m+1)(m+1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = -1, -1$$

اس لیے اتمامی تفاعل (Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = (c_1 + c_2 \log x)x^{-1}$$

اور خاص تکملہ (Particular Integral) ہو گا

$$P.I. = \frac{1}{f(\boldsymbol{D})} Q$$
$$= \frac{1}{\boldsymbol{D}^2 + 2\boldsymbol{D} + 1}(x^2 - 2x + 1)$$
$$= \frac{x^2}{2^2 + 2 \times 2 + 1} - 2\frac{x}{1^2 + 2 \times 1 + 1} + \frac{x^0}{0^2 + 2 \times 0 + 1}$$
$$= \frac{x^2}{9} - \frac{2x}{4} + 1$$
$$= \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$$

اس لیے مساوات (2) کا عام حل ہو گا

$$y = C.F. + P.I.$$
$$= (c_1 + c_2 \log x)x^{-1} + \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$$

مثال2۔ مساوات $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 4y = x^m$ کو حل کریں۔

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 4y = x^m \qquad \text{.....(1)}$$

مساوات (1) میں $x\frac{dy}{dx}$ کی جگہ $\boldsymbol{D}y$ رکھیں اور $x^2\frac{d^2y}{dx^2}$ کی جگہ $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{D}-1)y$ رکھتے ہیں۔ اس لیے

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{D}-1)y - 3\boldsymbol{D}y + 4y = x^m$$

یا

$$(\boldsymbol{D}^2 - 4\boldsymbol{D} + 4)y = x^m \qquad \text{.....(2)}$$

اب مساوات (2) کو حل کرتے ہیں۔ اس کے لیے معاون مساوات (Auxiliary Equation) درجہ ذیل ہو گی

$$m^2 - 4m + 4 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m-2)(m-2) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = 2, 2$$

اس لیے اتمامی تفاعل (Complementary Function) درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = (c_1 + c_2 \log x)x^2$$

اور خاص تکملہ (Particular Integral) ہو گا

$$P.I. = \frac{1}{f(\boldsymbol{D})} Q$$

$$= \frac{1}{(\boldsymbol{D}-2)^2} x^m$$
$$= \frac{1}{(m-2)^2} x^m \left[\because \frac{1}{f(\boldsymbol{D})} x^m = \frac{1}{f(m)} x^m\right]$$

اس لیے مساوات(2)کا عام حل ہو گا

$$y = C.F. + P.I.$$
$$= (c_1 + c_2 \log x)x^{-1} + \frac{1}{(m-2)^2} x^m$$

مثال3۔ مساوات $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y = e^x$ کا حل معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y = e^x \quad \text{.....(1)}$$

مساوات(1)میں $x \frac{dy}{dx}$ کی جگہ $\boldsymbol{D}y$ رکھیں اور $x^2 \frac{d^2y}{dx^2}$ کی جگہ $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{D}-1)y$ رکھتے ہیں۔اس لیے

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{D}-1)y + 4\boldsymbol{D}y + 2y = e^x$$

یا

$$(\boldsymbol{D}^2 + 3\boldsymbol{D} + 2)y = e^x \quad \text{.....(2)}$$

اب مساوات(2)کو حل کرتے ہیں۔اس کے لیے معاون مساوات(Auxiliary Equation)درجہ ذیل ہو گی

$$m^2 + 3m + 2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m+1)(m+2) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = -1, -2$$

اس لیے اتمامی تفاعل(Complementary Function)درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2}$$

اور خاص تکملہ(Particular Integral)ہو گا

$$P.I. = \frac{1}{f(\boldsymbol{D})} Q$$
$$= \frac{1}{(\boldsymbol{D}+1)(\boldsymbol{D}+2)} e^x$$
$$= \left(\frac{1}{\boldsymbol{D}+1} - \frac{1}{\boldsymbol{D}+2}\right) e^x$$
$$= \frac{1}{\boldsymbol{D}+1} e^x - \frac{1}{\boldsymbol{D}+2} e^x$$
$$= x^{-1} \int x^{1-1} e^x \, dx - x^{-2} \int x^{2-1} e^x \, dx$$
$$= x^{-1} \int e^x \, dx - x^{-2} \int x e^x \, dx$$
$$= x^{-1} e^x - x^{-2}(x-1)e^x$$
$$= (x^{-1} - x^{-1} + x^{-2})e^x$$
$$= x^{-2} e^x$$

اس لیے مساوات(2)کا عام حل ہو گا

$$y = C.F. + P.I.$$
$$= c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2} + x^{-2} e^x$$

مثال4۔ مساوات $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + y = (1-x)^{-2}$ کو حل کرو۔

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + y = (1-x)^{-2} \quad \text{.....(1)}$$

مساوات(1)میں $\frac{dy}{dx}$ کی جگہ $x\boldsymbol{D}y$ رکھیں اور $x^2 \frac{d^2y}{dx^2}$ کی جگہ $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{D}-1)y$ رکھتے ہیں۔اس لیے

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{D}-1)y + 3\boldsymbol{D}y + y = (1-x)^{-2}$$

یا

$$(\boldsymbol{D}^2 + 2\boldsymbol{D} + 1)y = (1-x)^{-2} \quad \text{.....(2)}$$

اب مساوات(2)کو حل کرتے ہیں۔اس کے لیے معاون مساوات(Auxiliary Equation)درجہ ذیل ہو گی

$$m^2 + 2m + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (m+1)(m+1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m = -1, -1$$

اس لیے اتمامی تفاعل(Complementary Function)درجہ ذیل ہو گا

$$C.F. = (c_1 + c_2 \log x) x^{-1}$$

اور خاص تکملہ(Particular Integral)ہو گا

$$P.I. = \frac{1}{f(\boldsymbol{D})} Q$$
$$= \frac{1}{(\boldsymbol{D}+1)(\boldsymbol{D}+1)} (1-x)^{-2}$$
$$= \frac{1}{(\boldsymbol{D}+1)} x^{-1} \int x^{1-1} (1-x)^{-2}\, dx$$
$$= \frac{1}{(\boldsymbol{D}+1)} \{x^{-1}(1-x)^{-1}\}$$
$$= x^{-1} \int x^{1-1} \{x^{-1}(1-x)^{-1}\} dx$$
$$= x^{-1} \int \{x^{-1}(1-x)^{-1}\} dx$$
$$= x^{-1} \int \frac{1}{x(1-x)}\, dx$$
$$= x^{-1} \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) dx$$
$$= x^{-1} (\log|x| - \log|1-x|)$$
$$= x^{-1} \log\left|\frac{x}{1-x}\right|$$

اس لیے مساوات(2)کا عام حل ہو گا

$$y = C.F. + P.I.$$
$$= (c_1 + c_2 \log x)x^{-1} + x^{-1} \log \left|\frac{x}{1-x}\right|$$

11.2.2 متغیر ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساوات میں تحویل پزیر مساواتیں

(Equations Reducible to Homogeneous Linear Differential Equations with Variable Coefficients)

فرض کرو کہ کوئی مساوات درجہ ذیل شکل میں ہے

$$(a+bx)^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1(a+bx)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + A_2(a+bx)^{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + A_{n-1}(a+bx)\frac{dy}{dx} + A_n y = Q \quad \ldots..(1)$$

جہاں $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}, A_n$ مستقلات ہیں اور x کا کوئی تفاعل Q ہے۔

اس مساوات میں $a+bx$ کی جگہ z رکھنے پر اور اس سے $\frac{dz}{dx} = b$ اس لیے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = b\frac{dy}{dz}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dz}\left(b\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dz}\left(b^2\frac{dy}{dz}\right) = b^2\frac{d^2y}{dz^2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

اور اسی طرح

$$\frac{d^n y}{dx^n} = b^n \frac{d^n y}{dz^n}$$

یہ سبھی قیمتیں مساوات (1) میں رکھنے پر

$$z^n b^n \frac{d^n y}{dz^n} + A_1 z^{n-1} b^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}} + A_2 z^{n-2}b^{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dz^{n-2}} + \cdots + A_{n-1} z b\frac{dy}{dz} + A_n y = \varphi(z)$$
$$\Rightarrow z^n \frac{d^n y}{dz^n} + A_1 z^{n-1}\frac{b^{n-1}}{b^n}\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}} + A_2 z^{n-2}\frac{b^{n-2}}{b^n}\frac{d^{n-2}y}{dz^{n-2}} + \cdots + A_{n-1} z\frac{b}{b^n}\frac{dy}{dz} + \frac{A_n}{b^n}y = F(z)$$
$$\Rightarrow \quad z^n \frac{d^n y}{dz^n} + \frac{A_1}{b}z^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}} + \frac{A_2}{b^2}z^{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dz^{n-2}} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{b^{n-1}}z\frac{dy}{dz} + \frac{A_n}{b^n}y = F(z)$$

اس مساوات کا حل گزشتہ طریقوں سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 1۔ مساوات $(3x+2)^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3(3x+2)\frac{dy}{dx} - 36y = 3x^2 + 4x + 1$ کو حل کریں۔

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$(3x+2)^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3(3x+2)\frac{dy}{dx} - 36y = 3x^2 + 4x + 1 \quad \ldots..(1)$$

اس مساوات میں $3x+2$ کی جگہ z رکھنے پر اور اس سے $\frac{dz}{dx} = 3$ اس لیے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = 3\frac{dy}{dz}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dz}\left(b\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx} = 9\frac{d^2y}{dz^2}$$

مساوات (1) میں یہ قیمتیں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$9z^2\frac{d^2y}{dz^2}+3z\left(3\frac{dy}{dz}\right)-36y=3\left(\frac{z-2}{3}\right)^2+4\left(\frac{z-2}{3}\right)+1$$

$$\Rightarrow \quad z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}-4y=\frac{1}{9}\left[\frac{3z^2-12z+12+12z-24+9}{9}\right]$$

$$\Rightarrow \quad z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}-4y=\frac{1}{9}\left[\frac{3(z^2-1)}{9}\right]$$

$$\Rightarrow \quad z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}-4y=\frac{1}{27}(z^2-1)$$

مساوات(1)میں $z\frac{dy}{dz}$ کی جگہ $\boldsymbol{D}y$ رکھیں اور $z^2\frac{d^2y}{dz^2}$ کی جگہ $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{D}-1)y$ رکھتے ہیں۔اس لیے

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{D}-1)y+\boldsymbol{D}y-4y=\frac{1}{27}(z^2-1)$$

یا

$$(\boldsymbol{D}^2-4)y=\tfrac{1}{27}(z^2-1) \qquad \text{.....(2)}$$

اب مساوات(2)کو حل کرتے ہیں۔اس کے لیے معاون مساوات(Auxiliary Equation)درجہ ذیل ہو گی

$$m^2-4=0$$

$$\Rightarrow \quad m=-2,2$$

اس لیے اتمامی تفاعل(Complementary Function)درجہ ذیل ہو گا

$$C.F.=c_1z^{-2}+c_2z^2$$

اور خاص تکملہ(Particular Integral)ہو گا

$$P.I.=\frac{1}{f(\boldsymbol{D})}Q$$

$$=\frac{1}{27}\left[\frac{1}{\boldsymbol{D}^2-4}(z^2-1)\right]$$

$$=\frac{1}{27}\left[\left(\frac{1}{\boldsymbol{D}^2-4}z^2-\frac{1}{\boldsymbol{D}^2-4}z^0\right)\right]$$

$$=\frac{1}{27}\left[\left(\frac{1}{(\boldsymbol{D}-2)(\boldsymbol{D}+2)}z^2-\frac{1}{(0)^2-4}z^0\right)\right]$$

$$=\frac{1}{27}\left[\left(\frac{1}{(\boldsymbol{D}-2)}z^{-2}\int z^{2-1}z^2\,dz-\frac{1}{(0)^2-4}z^0\right)\right]$$

$$=\frac{1}{27}\left[\left(\frac{1}{(\boldsymbol{D}-2)}\frac{z^4}{4}+\frac{1}{4}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{108}\left(z^2\int z^{-2-1}z^2\,dz+1\right)$$

$$=\frac{1}{108}\left(z^2\int z^{-1}\,dz+1\right)$$

$$P.I.=\frac{1}{108}(z^2\log z+1)$$

اس لیے مساوات(2)کا عام حل ہو گا

$$y=C.F.+P.I.$$

$$= c_1 z^{-2} + c_2 z^2 + \frac{1}{108}(z^2 \log z + 1)$$

اس مساوات میں $z = 3x + 2$ رکھنے پر ہمیں حاصل ہوگا

$$y = c_1(3x+2)^{-2} + c_2(3x+2)^2 + \frac{1}{108}((3x+2)^2 \log|3x+2| + 1)$$

11.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر ہم نے متغیر ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساوات کی بنیادی جانکاری حاصل کی اور اس کو حل کرنے کے مختلف طریقوں کو باریکی سے سیکھا۔ اس علاوہ متغیر ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساوات میں تحویل پزیر مساواتوں کو پہچان کر ان کو متغیر ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساوات میں تبدیل کر کے ان کا حل حاصل کرنے پر مہارت حاصل کی۔

11.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

متجانس تفرقی مساوات، اتمامی تفاعل، معاون مساوات، مستقل ضریب، غیر متجانس تفرقی مساوات

11.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

11.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. متغیر ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساوات کی عام شکل لکھیے۔
2. مساوات $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{2}{x}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{3}{x^2}\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x^3}y = 0$ کو متجانس خطی تفرقی مساوات میں تبدیل کریے۔
3. مساوات $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - 4y = 0$ کو مستقل ضریب کی تفرقی مساوات میں تبدیل کرو۔
4. مساوات $x^3\frac{d^2y}{dx^2} + 3x^2\frac{dy}{dx} + xy = 0$ کے لیے معاون مساوات لکھیے۔

11.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. مساوات $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + 6y = 0$ کو حل کریے۔
2. مساوات $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - 4y = 0$ کو حل کریے۔
3. مساوات $x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ کو حل کریے۔
4. حل کریے: $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

11.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. مساوات $x^3\frac{d^3y}{dx^3} - x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - 2y = x^3 + 3x$ کا حل معلوم کرو۔
2. مساوات $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 3y = x^2\log x$ کو حل کرو۔

3. مساوات $x^3\frac{d^3y}{dx^3}+2x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}-3y=x^2+x$ کو حل کرو۔

4. مساوات $\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{4}{x}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{5}{x^2}\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x^3}y=1$ کو حل کریں۔

5. مساوات $(1+x)^2\frac{d^2y}{dx^2}+(1+x)\frac{dy}{dx}+y=4\cos\{\log(1+x)\}$ کو حل کرو۔

6. مساوات $(5+2x)^2\frac{d^2y}{dx^2}-6(5+2x)\frac{dy}{dx}+8y=0$ کا حل معلوم کریں۔

7. مساوات $(2x-1)^3\frac{d^3y}{dx^3}+(2x-1)\frac{dy}{dx}-2y=0$ کو حل کرو۔

جوابات:

11.5.1 معروضی سوالات کے جوابات

1. $x^n\frac{d^ny}{dx^n}+A_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+A_2x^{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+A_{n-1}x\frac{dy}{dx}+A_ny=0$

2. $x^3\frac{d^3y}{dx^3}+2x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}-3y=0$

3. $(\boldsymbol{D^2}-4)y=0$

4. $m^2+2m+1=0$

11.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالا تکے جوابات

1. $y=c_1x^2+c_2x^3$

2. $y=c_1x^2+c_2x^{-2}$

3. $y=c_1x+c_2\sin\left(\sqrt{3}\log x\right)+c_3\cos\left(\sqrt{3}\log x\right)$

4. $y=\sqrt{x}\left\{c_1\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right)+c_2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right)\right\}$

11.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $y=(c_1+c_2\log x)+c_3x^2+\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x(\log x)^2$

2. $y=c_1x^{-1}+c_2x^3-\frac{x^2}{9}(3\log x+2)$

3. $y=c_1x+c_2\cos\left(\sqrt{3}\log x\right)+c_3\sin\left(\sqrt{3}\log x\right)+\frac{x^2}{7}+\frac{x\log x}{4}$

4. $y=c_1x^2+x^{5/2}\left(c_2x^{\sqrt{21}/2}+c_3x^{-\sqrt{21}/2}\right)-\frac{x^3}{5}(3\log x+2)$

5. $y=c_1\cos\{\log(1+x)\}+c_2\sin\{\log(1+x)\}+2\log(1+x)\sin\{\log(1+x)\}$

6. $y=(5+2x)^2\left\{c_1(5+2x)^{\sqrt{2}}+c_2(5+2x)^{-\sqrt{2}}\right\}$

7. $y=(2x-1)\left\{c_1+c_2(2x-1)^{\frac{\sqrt{3}}{2}}+c_3(2x-1)^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right\}$

اکائی 12۔ متغیر ضریب کی اعلیٰ رتبے کی خطی تفرقی مساواتیں

(پیرامیٹرس کے تغیر کا طریقہ)

(Higher Order Linear Differential Equations with Variable Coefficients: Method of Variation of Parameters)

اکائی کے اجزا

12.0 تمہید

12.1 مقاصد

12.2 پیرامیٹرس کا تغیر

12.3 اکتسابی نتائج

12.4 کلیدی الفاظ

12.5 نمونہ امتحانی سوالات

12.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

12.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

12.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

12.0 تمہید(Introduction)

اس اکائی میں ہم خطی تفرقی مساوات کی درجہ ذیل شکل پر غور کریں گے

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R$$

جہاں x کے تفاعلات P، Q اور R ہیں۔ کسی خطی تفرقی مساوات کا مکمل حل حاصل کرنے کے طریقہ کو سمجھیں گے جب کہ اس مساوات کا اتمامی تفاعل معلوم ہو۔ یہاں ہم پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقہ سے پہلے اور دوسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات کو حل کرنا سیکھیں گے۔

12.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے عبور پر آپ ذیل کی مساواتوں کو پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے کی مدد سے حل کر سکیں گے:

1. خطی تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ اور
2. دوسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R$

12.2 پیرامیٹرس کا تغیر(Variation of Parameters)

اب ہم کسی خطی تفرقی مساوات کے مکمل حل حاصل کرنے کے پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے کو سیکھیں گے جب کہ اس مساوات کا اتمامی تفاعل معلوم ہے۔

1. خطی تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ کا حل:

مان لو کہ پہلے رتبے کی خطی تفرقی مساوات

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \qquad \text{.....(1)}$$

جہاں P اور Q مستقلات ہیں یا x کے تفاعلات ہیں۔ مان لو کہ $y = au$ مساوات

$$\frac{dy}{dx} + Py = 0 \qquad \text{.....(2)}$$

کا عام حل ہے، جہاں a ایک اختیاری مستقل ہے اور u تفاعل ہے x کا۔ مساوات (2) سے

$$\frac{du}{dx} + Pu = 0 \qquad \text{.....(3)}$$

مساوات (1) کا عام حل حاصل کرنے کے لیے مان لو کہ $y = bu$ اس کا عام حل ہے، یہاں b مستقل نہیں بلکہ یہ x کا ایک تفاعل ہے جسے اس طرح مانا جاتا ہے کہ مساوات (1) مطمئن ہو جایے۔ اب

$$y = bu \qquad \text{.....(4)}$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dy}{dx} = b\frac{du}{dx} + \frac{db}{dx}u \qquad \text{.....(5)}$$

مساوات(1)میں مساوات(5)کی قدر درج کرنے پر حاصل ہو گا

$$b\frac{du}{dx}+\frac{db}{dx}u+Pbu=Q$$
$$\frac{db}{dx}u+b\left(\frac{du}{dx}+Pu\right)=Q \qquad \text{.....(6)}$$

مساوات(3)اور(6)سے

$$\frac{db}{dx}u+b(0)=Q$$
$$db=\left(\frac{Q}{u}\right)dx$$
$$b=\int\left(\frac{Q}{u}\right)dx+c$$

جہاںcایک اختیای مستقل ہے۔مساوات(4)میں یہ قیمت رکھنے پر

$$y=\left(\int\left(\frac{Q}{u}\right)dx+c\right)u$$
$$=u\int\left(\frac{Q}{u}\right)dx+cu$$

جیسا کہ ہم نے مانا تھا کہ مساوات(4)مساوات(1)کا عام حل ہے،اس لیے$y=u\int\left(\frac{Q}{u}\right)dx+cu$مساوات$\frac{dy}{dx}+Py=Q$کے لیے عام حل ہے۔اب ہم کچھ مثالوں کی مدد سے پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے کو سمجھتے ہیں۔

مثال1۔ مساوات$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=-\frac{1}{x(1+x^2)}$کو پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے سے حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=-\frac{1}{x(1+x^2)} \qquad \text{.....(1)}$$

یہاں$P=\frac{1}{x}$اور$Q=-\frac{1}{x(1+x^2)}$ہیں۔سب سے پہلے ہم مساوات

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=0 \qquad \text{.....(2)}$$

کا عام حل حاصل کرتے ہیں۔مساوات(2)سے

$$\frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=0$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$\log y+\log x=\log c$$
$$y=cx^{-1}$$

جہاںcایک اختیاری مستقل ہے۔اس لیے مان لو کہ

$$u=x^{-1}$$

اب دی گئی مساوات کا عام حل ہو گا

$$y=u\int\left(\frac{Q}{u}\right)dx+Bu$$

$$= x^{-1}\int\left(\frac{-\frac{1}{x(1+x^2)}}{x^{-1}}\right)dx + Bx^{-1}$$

$$= x^{-1}\left[B - \int\left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx\right]$$

$$= x^{-1}[B - \tan^{-1}x]$$

جہاں B ایک اختیاری مستقل ہے۔اس لیے دی گئی مساوات کا عام حل $xy = B - \tan^{-1}x$ ہے۔

مثال2۔ مساوات $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \sin x$ کو پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے سے حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \sin x \qquad .....(1)$$

یہاں $P = \frac{2}{x}$ اور $Q = \sin x$ ہیں۔سب سے پہلے ہم مساوات

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 0 \qquad .....(2)$$

کا عام حل حاصل کرتے ہیں۔مساوات(2) ظاہر کرتا ہے

$$\frac{dy}{y} + 2\frac{dx}{x} = 0$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$log\, y + 2\, log\, x = log\, c$$

$$y = cx^{-2}$$

جہاں c ایک اختیاری مستقل ہے۔اس لیے مان لو کہ

$$u = x^{-2}$$

اب دی گئی مساوات کا عام حل ہو گا

$$y = u\int\left(\frac{Q}{u}\right)dx + Bu$$

$$= x^{-2}\int\left(\frac{\sin x}{x^{-2}}\right)dx + Bx^{-2}$$

$$= x^{-2}\left[B + \int x^2 \sin x\, dx\right]$$

$$\Rightarrow \quad x^2y = B + x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x)dx$$

$$= B - x^2\cos x + 2\int x\cos x\, dx$$

$$= B - x^2\cos x + 2\left\{x\sin x - \int \sin x\, dx\right\}$$

$$= B - x^2\cos x + 2\{x\sin x + \cos x\}$$

جہاں B ایک اختیاری مستقل ہے۔اس لیے دی گئی مساوات کا عام حل $x^2y = B - x^2\cos x + 2\{x\sin x + \cos x\}$ ہے۔

مثال3۔ مساوات $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{4x}{1+x^2}\right)y = \frac{1}{(1+x^2)^2}$ کو پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے سے حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{4x}{1+x^2}\right) y = \frac{1}{(1+x^2)^2} \quad \text{.....(1)}$$

یہاں $P = \frac{4x}{1+x^2}$ اور $Q = \frac{1}{(1+x^2)^2}$ ہیں۔ سب سے پہلے ہم مساوات

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{4x}{1+x^2}\right) y = 0 \quad \text{.....(2)}$$

کا عام حل حاصل کرتے ہیں۔ مساوات (2) سے حاصل ہے

$$\frac{dy}{y} + 2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx = 0$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$log\, y + 2\, log(1+x^2) = log\, c$$

$$\Rightarrow \quad log\, y = log\, c - log(1+x^2)^2$$

$$\Rightarrow \quad y = c(1+x^2)^{-2}$$

جہاں c ایک اختیاری مستقل ہے۔ اس لیے مان لو کہ

$$u = (1+x^2)^{-2}$$

اب دی گئی مساوات کا عام حل ہو گا

$$y = u \int \left(\frac{Q}{u}\right) dx + Bu$$

$$= (1+x^2)^{-2} \int \left(\frac{\frac{1}{(1+x^2)^2}}{(1+x^2)^{-2}} \right) dx$$

$$+B(1+x^2)^{-2}$$

$$= (1+x^2)^{-2} \left[B + \int (1)dx\right]$$

$$\Rightarrow \quad (1+x^2)^2 y = B + x$$

جہاں B ایک اختیاری مستقل ہے۔ اس لیے دی گئی مساوات کا عام حل $(1+x^2)^2 y = B + x$ ہے۔

2. دوسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات کا حل:

مان لو کہ دوسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R \quad \text{.....(1)}$$

جہاں P، Q اور Rx ، کے تفاعلات ہیں۔ مان لو کہ $y = au + bv$ مساوات

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0 \quad \text{.....(2)}$$

کا عام حل ہے، جہاں a اور b اختیاری مستقلات ہیں اور u، v تفاعلات ہیں x کے۔ اس کے علاوہ ہم مان لیتے ہیں کہ مساوات (1) کا مکمل حل

$$y = au + bv \quad \text{.....(3)}$$

اس طرح سے ہے کہ اب a اور b مستقلات نہیں ہیں بلکہ ان کو x کے تفاعلاتت کے طور پر اس طرح سے منتخب کیا جاتا ہے کہ وہ مساوات(1) کو مطمئن کر سکیں۔

مساوات(3) کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{du}{dx} + \frac{da}{dx}u + b\frac{dv}{dx} + \frac{db}{dx}v$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = a\frac{du}{dx} + b\frac{dv}{dx} + \frac{da}{dx}u + \frac{db}{dx}v \qquad \text{.....(4)}$$

اب a اور b کو اس طرح سے منتخب کرتے ہیں کہ

$$\frac{da}{dx}u + \frac{db}{dx}v = 0 \qquad \text{.....(5)}$$

اب مساوات(4) ہو گی

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{du}{dx} + b\frac{dv}{dx}$$

اس مساوا تکو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{da}{dx}\frac{du}{dx} + b\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{db}{dx}\frac{dv}{dx}$$

اب مساوات(1) میں y، $\frac{dy}{dx}$، $\frac{d^2y}{dx^2}$ کی قیمتیں درج کرنے پر

$$\left(a\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{da}{dx}\frac{du}{dx} + b\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{db}{dx}\frac{dv}{dx}\right) + P\left(a\frac{du}{dx} + b\frac{dv}{dx}\right) + Q(au + bv) = R$$

$$\Rightarrow \quad a\left(\frac{d^2u}{dx^2} + P\frac{du}{dx} + Qu\right) + b\left(\frac{d^2v}{dx^2} + P\frac{dv}{dx} + Qv\right) + \left(\frac{da}{dx}\frac{du}{dx} + \frac{db}{dx}\frac{dv}{dx}\right) = R$$

چوں کہ u اور v مساوات(1) کے حل ہیں۔اس لیے یہ اس کو مطمئن بھی کریں گے

$$\frac{d^2u}{dx^2} + P\frac{du}{dx} + Qu = 0$$

اور

$$\frac{d^2v}{dx^2} + P\frac{dv}{dx} + Qv = 0$$

اس لیے

$$\frac{da}{dx}\frac{du}{dx} + \frac{db}{dx}\frac{dv}{dx} = R \qquad \text{.....(6)}$$

مساوات(5) اور(6) سے

$$\frac{\frac{da}{dx}}{-v} = \frac{\frac{db}{dx}}{u} = \frac{R}{u\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dx}v}$$

اب

$$\frac{da}{dx} = \frac{-vR}{u\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dx}v} \qquad \text{.....(7)}$$

$$\frac{db}{dx} = \frac{uR}{u\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dx}v} \quad \text{.....(8)}$$

مساوات(7)اور(8)کو تکمل کرنے پر ہمaاورbکی قیمتیں حاصل کر لیتے ہیں۔مان لو کہ $a = f(x) + A$اور $b = g(x) + B$

اب مساوات(1)کا عام حل ہو گا

$$y = uf(x) + Au + vg(x) + Bv$$

اب ہم کچھ مثالوں کی مدد سے پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے کو سمجھتے ہیں۔

مثال1۔ مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} + y = x$کو پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے سے حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = x \quad \text{.....(1)}$$

سب سے پہلے ہم $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$کا حل حاصل کرتے ہیں۔اس کے لیے معاون مساوات ہو گی

$$m^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow m = \pm i$$

اس لیے $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$کا حل ہے

$$C.F. = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

اب مان لو کہ دی گئی مساوات کا مکمل حل $y = F\cos x + G\sin x$ہے۔،جہاں Fاور Gدو xکے تفاعلات ہیں۔اس لیے

$$y = F\cos x + G\sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = -F\sin x + \frac{dF}{dx}\cos x + G\cos x + \frac{dG}{dx}\sin x$$

Fاور Gکو اس طرح منتخب کیا جاتا ہے کہ

$$\frac{dF}{dx}\cos x + \frac{dG}{dx}\sin x = 0 \quad \text{.....(2)}$$

اس لیے

$$\frac{dy}{dx} = -F\sin x + G\cos x$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -F\cos x - \frac{dF}{dx}\sin x - G\sin x + \frac{dG}{dx}\cos x$$

مساوات(1)سے

$$-F\cos x - \frac{dF}{dx}\sin x - G\sin x + \frac{dG}{dx}\cos x + F\cos x + G\sin x = x$$

$$\Rightarrow -\frac{dF}{dx}\sin x + \frac{dG}{dx}\cos x = x \quad \text{.....(3)}$$

مساوات(2)اور(3)سے

$$\frac{dF}{dx} = -x\sin x, \frac{dG}{dx} = x\cos x$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$F = -\int x \sin x \, dx + C \text{ اور } G = \int x \cos x \, dx + D$$

$$\Rightarrow \quad F = -[-x \cos x + \sin x] + C \text{ اور } G = [x \sin x + \cos x] + D$$

$$\Rightarrow \quad F = x \cos x - \sin x + C \text{ اور } G = x \sin x + \cos x + D$$

اب مساوات $y = F \cos x + G \sin x$ میں F اور G کی قیمتیں درج کرنے پر

$$\begin{aligned} y &= (x \cos x - \sin x + C) \cos x + (x \sin x + \cos x + D) \sin x \\ &= (x \cos^2 x - \sin x \cos x + C \cos x) + (x \sin^2 x + \sin x \cos x + D \sin x) \\ &= x(\cos^2 x + \sin^2 x) + C \cos x + D \sin x \\ &= x + C \cos x + D \sin x \end{aligned}$$

اس لیے دی گئی مساوات کا مکمل حل $y = x + C \cos x + D \sin x$ ہے۔

مثال2۔ مساوات $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = x^2 e^x$ کو پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے سے حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = x^2 e^x \qquad \text{.....(1)}$$

سب سے پہلے ہم دی گئی مساوات میں سے متجانس تفرقی مساوات $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = 0$ کا حل حاصل کرتے ہیں۔

اس کے لیے $x = e^z$ اور $D = \frac{d}{dz}$ رکھتے ہیں، تب

$$\log x = z$$

تفرق کرنے پر

$$\frac{1}{x} = \frac{dz}{dx}$$

اب

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz}\left(\frac{1}{x}\right)$$

یا

$$x \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} = Dy$$

اس طرح

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= -\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right) \\ &= -\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x}\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx} \end{aligned}$$

$$= -\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{dy}{dz} + \left(\frac{1}{x}\frac{d^2y}{dz^2}\right)\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{x^2}\left[\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right]$$

$$\Rightarrow \quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} = [D^2y - Dy]$$
$$= D(D-1)y$$

اب دی گئی مساوات میں $x\frac{dy}{dx} = Dy$ اور $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y$ رکھتے ہیں۔ تب

$$D(D-1)y + Dy - y = 0$$
$$(D^2 - 1)y = 0$$

اس مساوات کے لیے معاون مساوات ہے

$$m^2 - 1 = 0$$
$$\Rightarrow m = \pm 1$$

اس لیے اتمامی تفاعل ہے

$$C.F. = C_1x + C_2\frac{1}{x}$$

اب مان لو کہ دی گئی مساوات کا مکمل حل $y = Fx + G\frac{1}{x}$ ہے، جہاں F اور G دو، x کے تفاعلات ہیں۔ اس لیے

$$y = Fx + G\frac{1}{x}$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = F + x\frac{dF}{dx} - G\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\frac{dG}{dx}$$

F اور G کو اس طرح منتخب کیا جاتا ہے کہ

$$x\frac{dF}{dx} + \frac{1}{x}\frac{dG}{dx} = 0 \qquad \text{.....(2)}$$

اس لیے

$$\frac{dy}{dx} = F - G\frac{1}{x^2}$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dF}{dx} + 2G\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}\frac{dG}{dx}$$

مساوات (1) سے

$$\left(\frac{dF}{dx} + 2G\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}\frac{dG}{dx}\right) + \frac{1}{x}\left(F - G\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x^2}\left(Fx + G\frac{1}{x}\right) = e^x$$
$$\Rightarrow \frac{dF}{dx} - \frac{1}{x^2}\frac{dG}{dx} = e^x \qquad \text{.....(3)}$$

مساوات (2) اور (3) سے

$$\frac{dF}{dx} = \frac{1}{2}e^x, \quad \frac{dG}{dx} = -\frac{1}{2}x^2e^x$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$F = \frac{1}{2}e^x + C \text{ اور } G = -\frac{1}{2}e^x(x^2 - 2x + 2) + D$$

اب مساوات $y = Fx + G\frac{1}{x}$ میں F اور G کی قیمتیں رکھنے پر حاصل ہے

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{1}{2}e^x + C\right)x + \left(-\frac{1}{2}e^x(x^2 - 2x + 2) + D\right)\frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{2}xe^x + Cx - \frac{1}{2}e^x\left(x - 2 + \frac{2}{x}\right) + \frac{D}{x} \\ &= Cx + \frac{D}{x} + e^x - \frac{e^x}{x} \end{aligned}$$

اس لیے دی گئی مساوات کا مکمل حل $y = Cx + \frac{D}{x} + e^x - \frac{e^x}{x}$ ہے۔

مثال3۔ مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = e^x \sin x$ کو پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے سے حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = e^x \sin x \qquad \text{.....(1)}$$

سب سے پہلے ہم دی گئی مساوات میں سے مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = 0$ کا حل حاصل کرتے ہیں۔

اس مساوات کے لیے معاون مساوات ہے

$$m^2 - 2m = 0$$
$$m(m-2) = 0$$
$$\Rightarrow m = 0, 2$$

اس لیے اتمامی تفاعل ہے

$$C.F. = C_1 + C_2e^{2x}$$

اب مان لو کہ دی گئی مساوات کا مکمل حل $y = F + Ge^{2x}$ ہے۔، جہاں F اور G دو x کے تفاعلات ہیں۔اس لیے

$$y = F + Ge^{2x}$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dF}{dx} + 2Ge^{2x} + e^{2x}\frac{dG}{dx}$$

F اور G کو اس طرح منتخب کیا جاتا ہے کہ

$$\frac{dF}{dx} + e^{2x}\frac{dG}{dx} = 0 \qquad \text{.....(2)}$$

اس لیے

$$\frac{dy}{dx} = 2Ge^{2x}$$

اس مساوا تکو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4Ge^{2x} + 2e^{2x}\frac{dG}{dx}$$

مساوات(1)سے

$$\left(4Ge^{2x} + 2e^{2x}\frac{dG}{dx}\right) - 2(2Ge^{2x}) = e^x \sin x$$

$$\Rightarrow 2e^{2x}\frac{dG}{dx} = e^x \sin x$$

$$\Rightarrow \frac{dG}{dx} = \frac{1}{2}e^{-x}\sin x$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا

$$G = \frac{1}{2}\int e^{-x}\sin x\, dx + C$$

ہم جانتے ہیں $\int e^{ax}\sin bx\, dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{(a)^2+(b)^2}$ اس لیے

$$G = \frac{1}{2}\frac{e^{-x}}{(-1)^2+(1)^2}(-\sin x - \cos x) + C$$

$$= -\frac{1}{4}e^{-x}(\sin x + \cos x) + C$$

$\frac{dG}{dx}$ کی قیمت مساوات $\frac{dF}{dx} + e^{2x}\frac{dG}{dx} = 0$ میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوگا

$$\frac{dF}{dx} + e^{2x}\left(\frac{1}{2}e^{-x}\sin x\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dF}{dx} = -\frac{1}{2}e^x \sin x$$

تکمل کرنے پر

$$F = -\int \frac{1}{2}e^x \sin x\, dx + D$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{e^x}{(1)^2+(1)^2}(\sin x - \cos x) + D$$

$$\Rightarrow F = -\frac{1}{4}e^x(\sin x - \cos x) + D$$

اب مساوات $y = F + Ge^{2x}$ میں F اور G کیا وپر حاصل کی گئی قیمتیں رکھنے پر

$$y = -\frac{1}{4}e^x(\sin x - \cos x) + D + \left(-\frac{1}{4}e^{-x}(\sin x + \cos x) + C\right)e^{2x}$$

$$= -\frac{1}{4}e^x(\sin x - \cos x) + D - \frac{1}{4}e^x(\sin x + \cos x) + Ce^{2x}$$

$$= -\frac{1}{4}e^x\{2\sin x\} + D + Ce^{2x}$$

$$= -\frac{1}{2}e^x \sin x + Ce^{2x} + D$$

اس لیے دی گئی مساوات کا مکمل حل $y = -\frac{1}{2}e^x \sin x + Ce^{2x} + D$ ہے۔

مثال4۔ مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 1$ کو پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے سے حل کرو۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 1 \qquad \ldots\ldots(1)$$

سب سے پہلے ہم دی گئی مساوات میں سے مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ کا حل حاصل کرتے ہیں۔

اس مساوات کے لیے معاون مساوات ہے

$$m^2 - 3m + 2 = 0$$
$$\Rightarrow (m-1)(m-2) = 0$$
$$\Rightarrow m = 1, 2$$

اس لیے اتمامی تفاعل ہے

$$C.F. = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

اب مان لو کہ دی گئی مساوات کا مکمل حل $y = Fe^x + Ge^{2x}$ ہے، جہاں F اور G دو x کے تفاعلات ہیں۔ اس لیے

$$y = Fe^x + Ge^{2x}$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = Fe^x + e^x\frac{dF}{dx} + 2Ge^{2x} + e^{2x}\frac{dG}{dx}$$

F اور G کو اس طرح منتخب کیا جاتا ہے کہ

$$e^x\frac{dF}{dx} + e^{2x}\frac{dG}{dx} = 0 \qquad \text{.....(2)}$$

اس لیے

$$\frac{dy}{dx} = Fe^x + 2Ge^{2x}$$

اس مساوات کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Fe^x + e^x\frac{dF}{dx} + 4Ge^{2x} + 2e^{2x}\frac{dG}{dx}$$

مساوات (1) سے

$$\left(Fe^x + e^x\frac{dF}{dx} + 4Ge^{2x} + 2e^{2x}\frac{dG}{dx}\right) - 3(Fe^x + 2Ge^{2x}) + 2(Fe^x + Ge^{2x}) = 1$$
$$\Rightarrow e^x\frac{dF}{dx} + 2e^{2x}\frac{dG}{dx} = 1 \qquad \text{.....(3)}$$

مساوات (2) اور (3) سے

$$\frac{dF}{dx} = -\frac{1}{e^x} = -e^{-x}, \quad \frac{dG}{dx} = \frac{1}{e^{2x}} = e^{-2x}$$

تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا

$$F = e^{-x} + C \text{ اور } G = -\frac{1}{2}e^{-2x} + D$$

اب مساوات $y = Fe^x + Ge^{2x}$ میں F اور G کی مندرجہ بالا حاصل کردہ قیمتیں درج کرنے پر

$$y = e^x(e^{-x} + C) + \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + D\right)e^{2x}$$
$$= (1 + Ce^x) + \left(-\frac{1}{2} + De^{2x}\right)$$
$$= \frac{1}{2} + Ce^x + De^{2x}$$

اس لیے دی گئی مساوات کا مکمل حل $y = \frac{1}{2} + Ce^{x} + De^{2x}$ ہے۔

12.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے سے پہلے اور دوسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات کو حل کرنا سیکھا۔

12.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

پیرامیٹرس کا تغیر، متجانس تفرقی مساوات، اتمامی تفاعل، معاون مساوات

12.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

12.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. پیرامیٹرس کے تغیر کا طریقہ کیا ہے؟
2. اتمامی تفاعل لکھو جب کہ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{cosec} x$

12.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

درجہ ذیل مساوات کا حل پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے کی مدد سے حاصل کریے:

1. $\frac{d^2y}{dx^2} - y = \frac{2}{1+e^x}$
2. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x(1+x)\frac{dy}{dx} + 2(1+x)y = x^3$
3. $(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = (1-x)^2$
4. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = \frac{e^x}{x^2}$
5. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = x$
6. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x$

12.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = \frac{e^x}{1+e^x}$ کو پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے کی مدد سے حل کریے جب کہ اس کے لیے اتمامیتفاعل $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$ ہے۔

2. مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 4\tan 2x$ کو پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے کی مدد سے حل کریں۔

جوابات:

12.5.1 معروضی سوالات کے جوابات

$2. C.F. = A\cos x + B\sin x$

12.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $y = Ae^x + Be^{-x} - 1 + e^x \log\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) - e^{-x}\log(1+e^x)$
2. $y = -\frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} + Ax + Bxe^{2x}$
3. $y = Ax + Be^x + (1 + x + x^2)$
4. $y = e^x(A + Bx) - e^x(1 + \log x)$
5. $y == A\cos x + B\sin x + x$
6. $y = e^x(A + Bx) + \frac{x^2e^x}{2}$

12.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات کے جوابات

1. $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + (e^x + e^{2x})\log(e^{-x} + 1) - 1$
2. $y = A\cos 2x + B\sin 2x - \cos 2x \log|\sec 2x + \tan 2x|$

تجویز کردہ اکتسابی مواد

(Suggested Learning Resources)

1. Scope as in "Differential Equations and Their Applications"Zafar Ahsan, Prentice hall of India Private Limited, New Delhi
2. Text Book of Differential Equations, Khalil Ahmad, Real World Education Publishers, New Delhi
3. Ordinary and Partial Differential Equations- Rai Singhania, S.Chand & Co., New Delhi
4. A Text Book of B.Sc. (Mathematics), Volume –I , V. Venkateshwara Rao and others, S. Chand & Company New Delhi

نظامت فاصلاتی تعلیم (بیچلر آف سائنس) Distance Mode, Bachelor of Science

دوسرا سمسٹر 2025 2^{nd} Semester Examination, 2025

Paper : BNMM201DCT,(Mathematics) Differential Equations

وقت: 3Hrs :Time جملہ نشانات: 50 Maximum Marks

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم اور حصہ سوم۔ ہر جواب کے لیے لفظوں کی تعداد اشارتاً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1۔ حصہ اول میں 10 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/خالی جگہ پر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **(10 × 1 = 10 Marks)**

2۔ حصہ دوم میں 6 سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی چار سوالات کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کے لیے 5 نمبرات مختص ہیں۔ **(4 × 5 = 20Marks)**

3۔ حصہ سوم میں 3 سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی 2 سوالات کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کے لیے 10 نمبرات مختص ہیں۔ **(2 × 10 = 20 Marks)**

حصہ اول

سوال 1.

i) مساوات $y = x\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ کا رتبہ.....ہے۔

A. 2 B. 3 C. 1 D. 4

ii) تفرقی مساوات $log\frac{dy}{dx} = ax + b$ کا حل.....ہے۔

iii) ذیل میں سے کون ٹھیک مساوات ہے

A. $2xydx + (x^2 + y^2)dy = 0$ B. $(y\sin 2x)dx - (cos^2x + y^2)dy = 0$

C. $(a^2 - 2xy - y^2)dx - (x - y)^2dy = 0$ D. ان میں سے کوئی نہیں

iv) مساوات $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$ کا I.F. ہے

A. x B. $\frac{1}{x}$ C. $\frac{-1}{x}$ D. ان میں سے کوئی نہیں

v) مساوات $p^2 - 5p + 6 = 0$ کو جزو ضربی میں تحویل کریے۔

vi) مساوات $y = \sin p - p\cos p$ ایک کلیرو کی مساوات ہے۔ (صحیح/غلط)

vii) فرض کرو کہ $f(D)y = 0$ مستقل ضریب کے ساتھ متجانس تفرقی مساوات ہے۔ اگر $m_1 \neq m_2$ حاصل کردہ معاون مساوات کے دو روٹس ہوں، تب مساوات کا عام حل ہوگا $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$ (صحیح/غلط)

viii) مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cos 2x$ کے لیے اتمامی تفاعل لکھو۔

ix) لگرانج کی خطی جزوی تفرقی مساوات کے لیے معاون مساوات کی تعریف کرو۔

x) پہلے رتبے کی غیر خطیجزوی تفرقی مساواتیں $\phi(x, y, z, p, q) = 0$ اور $\psi(x, y, z, p, q) = 0$ کے ہم آہنگ ہونے کی کیا شرط ہے؟

حصہ دوم

2. حل کرو: $y^2 \log y = xyp + p^2, y > 0$

3. متغیر جدا پزیر طریقہ سے مساوات $y^2 \cos\sqrt{x}\, dx - 2\sqrt{x}e^{\frac{1}{y}}dy = 0$ کا حل معلوم کرو۔

4. مساوات $x^2p^3 + yp^2 + x^2y^2p^2 + y^3p = 0$ کو حل کریے۔

5. حل کرو: $(3xy^2 - y^3)dx - (2x^2y - xy^2)dy = 0$

6. حل کرو: $x\, log\, x\frac{dy}{dx} + y = 2\, log\, x$

7. حل کرو: $\frac{d^4y}{dx^4} - y = 15\sin 2x$

حصہ سوم

8. ثابت کرو $Ax^2 + By^2 = 1$، جہاں A اور B اختیاری مستقلات ہیں، کی تفرقی مساوات $x[yy'' + (y')^2] = yy'$ ہوگی۔

9. مساوات $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$ کو حل کرو۔

10. اگر $y = y_1, y = y_2, \cdots, y = y_n$ مساوات $f(D)y = 0$ کے n غیر تابع حل ہیں، تب ثابت کرو کہ

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$$

بھی اس کا ایک حل ہوگا، جہاں $c_1, c_2, \cdots, c_n$ اختیاری مستقل ہیں۔

BNMM201DCP

لیب مینول

تفرقی مساوات

(Differential Equations)

بی۔ایس سی۔(آنرس)

چار سالہ پروگرام

دوسرا سمسٹر (ریاضی)

اکائی 1۔ تفرقی مساواتوں کی تشکیل، پہلے رتبے اور پہلے درجے کے تفرقی مساواتوں کے مسائل

نمونہ تجرباتی سوال

1.1 مساوات $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ کا حل حاصل کرو۔

مقصد(Aim)

دی گئی تفرقی مساوات کا حل معلوم کرنا۔

طرز عمل(Procedure)

Step I

دی گئی مساوات کی پہچان کرنا۔اس مساوات کے متغیرات کو جدا کرتے ہیں۔

Step II

اس کے بعد حاصل کردہ مساوات کو تکمل کریں۔

Step III

اس طرح دی گئی مساوات کا حل حاصل ہوگا۔

حل / تجویز(Solution/Calculation)

دی گئی مساوات درجہ ذیل ہے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$$

اس مساوات کے متغیر جدا کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$$

دونوں جانب تکمل کرنے پر حاصل ہے

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1} y = \tan^{-1} x + \mathrm{C}$$

مستقل C کو $\tan^{-1} C$ لینے پر

$$\tan^{-1} y - \tan^{-1} x = \tan^{-1} C$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\left(\frac{y-x}{1+yx}\right) = \tan^{-1} C$$

$$\Rightarrow \quad y - x = C(1+yx)$$

اس طرح $y - x = C(1 + yx)$ دی گئی مساوات کا حل ہو گا۔

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

حاصل کردہ حل $y - x = C(1 + yx)$ ہے۔

☆☆☆☆☆

1.2 مساوات $y = ax + bx^2$ سے اختیاری مستقلات a اور b کو ساقط کر کے تفرقی مساوات کی تشکیل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ /اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

1.3 مساوات $y = ae^x + be^{2x} + ce^{3x}$ کے استعمال سے تفرقی مساوات حاصل کرو، جہاں a, b, c اختیاری مستقلات ہیں۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

1.4 تفرقی مساوات $\left(\frac{x+y-a}{x+y-b}\right)\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+a}{x+y+b}$ کو حل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

1.5 تفرقی مساوات $(x-y)^2\,dx+2xy\,dy=0$ کا حل معلوم کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

1.6 تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx}+\frac{x^2+3y^2}{3x^2+y^2}=0$ کو حل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

1.7 تفرقی مساوات $(2x+y-3)dy=(x+2y-3)dx$ کو حل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

1.8 تفرقی مساوات $(x-y-2)dx=(2x-2y-3)dy$ کو حل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

1.9 مساوات $(1+x)\frac{dy}{dx}-xy=1-x$ کا حل معلوم کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

اکائی2۔ ٹھیک مساواتیں، خطی تفرقی مساوات اوران کے مسائل

2.1 تفرقی مساوات $(1+x)\frac{dy}{dx}-xy=1-x$ کا حل معلوم کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

2.2 مساوات $\left(1+y^2\right)dx=\left(\tan^{-1}y-x\right)dy$ کا حل معلوم کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

2.3 تفرقی مساوات $x\frac{dy}{dx}+2y=x^2\log x$ کو حل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

2.4 تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2 x}{1+x^3} - \frac{3x^2}{1+x^3} y$ کو حل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

2.5 تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=y^2\sin x$ کو حل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

2.6 تفرقی مساوات $xy-\frac{dy}{dx}=y^3e^{-x^2}$ کو حل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

2.7 تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2+1}{2xy}$ کو حل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

2.8 مساوات $\left(1+e^{x/y}\right)dx+e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$ کا حل معلوم کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

2.9 تفرقی مساوات $x\,dx + y\,dy = m(x\,dy - y\,dx)$ کو حل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ /اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

2.10 مساوات $\left(xy+2x^2y^2\right)y\,dx+\left(xy-x^2y^2\right)xdy=0$ کا حل معلوم کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

2.11 تفرقی مساوات $xy-\frac{dy}{dx}=y^3e^{-x^2}$ کو حل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

اکائی 3۔ پہلے رتبے اور اعلیٰ درجے کی تفرقی مساواتوں کے مسائل

3.1 مساوات $x^2p^2 - 2xyp + 2y^2 - x^2 = 0$ کا حل معلوم کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

3.2 مساوات $p^3(x+2y)+3p^2(x+y)+p(2x+y)=0$ کو حل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

3.3 مساوات $xp^2 - 2yp + ax = 0$ کو حل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

3.4 مساوات $y + px = x^4p^2$ کو حل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

3.5 مساوات $x^2 = a^2(1 + p^2)$ کا حل معلوم کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

3.6 مساوات $ap^2 + p - xy = 0$ کو حل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

3.7 مساوات $2px = 2\tan y + p^3 cos^2 y$ کو حل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

اکائی4۔کلیرو کی مساوات، تفرقی مساوات کے اطلاقات اور عمودی ٹراجکٹری کے مسائل

4.1 مساوات $(x-a)p^2+(x-y)p-y=0$ کا حل حاصل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

4.2 مساوات $(py+x)(py-x)=2p$ کا حل حاصل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

4.3 مساوات $x^2(y-px)=p^2y$ کو حل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

4.4 اگر ریڈیم کی نصف دوران حیات 1600 سال ہو تو کتنے وقت میں 100mg سے گھٹ کر 90 mg ہو جائے گی۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

4.5 منحنیات کے خاندان $x^2 + y^2 = cx$ ، کی عمودی ٹراجکٹری(Orthogonal Trajectory) حاصل کرو(جہاں c ایک پیرامیٹر ہے)۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

4.6 دائروں کے خاندان $x^2 + y^2 = r^2$ کو 30° کے جھکاؤ پر کاٹنے والی اوبلک(Oblique) ٹراجکٹری کی مساوات حاصل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

4.7 منحنیات کے خاندان $r = a(\sec\theta + \tan\theta)$، کی عمودی ٹراجکٹری حاصل کرو(جہاں a ایک پیرامیٹر ہے)۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

4.8 منحنیات کے خاندان $\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1$، کی عمودی ٹراجکٹری حاصل کرو (جہاں λ ایک پیرامیٹر ہے)۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

4.9 منحنیات کے خاندان $x^{2/3} + y^{2/3} = c$، جہاں c ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری حاصل کریے۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

4.10 ثابت کرو کہ منحنیوں کے خاندان $r = a(1 - \cos\theta)$ کی عمودی ٹراجکٹری معلوم کرو (جہاں a ایک پیرامیٹر ہے)۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

اکائی 5۔ مستقل ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساواتوں کے مسائل

5.1 مساوات $\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$ کو حل کرو۔

مقصد (Aim)

طرز عمل (Procedure)

حل / تجویز (Solution/Calculation)

نتیجہ / اختتام (Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

5.2 اگر متجانس تفرقی مساوات کے r روٹس برابر ہوں، تب اس کا حل کس طرح حاصل کیا جاتا ہے؟

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

5.3 مساوات $\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 9\frac{dy}{dx} + 13y = 0$ کا حل معلوم کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

5.4 مساوات $\frac{d^3x}{dt^3} + 3\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + x = 0$ کا حل محسوب کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

5.5 اگر $y = y_1, y = y_2, \cdots, y = y_n$ مساوات $f(D)y = 0$ کے n غیر تابع حل ہیں، تب ثابت کرو کہ

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

بھی مساوات کا حل ہو گا، جہاں $c_1, c_2, \cdots, c_n$ اختیاری مستقلات ہیں۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ /اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

5.6 مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = xe^x \sin x$ کا حل معلوم کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

5.7 مساوات $\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = e^{2x} + x^2 + x$ کو حل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

5.8 مساوات $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 5x = 10$ کو حل کرو جب کہ دیا گیا ہے $x(0) = 0$ اور $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = 0$

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

اکائی6۔ متغیر ضریب کی متجانس خطی تفرقی مساوات اور پیرامیٹرس کے تغیر کے مسائل

6.1 حل کرو: $x^4\frac{d^3y}{dx^3} + x^3\frac{d^2y}{dx^2} - x^2\frac{dy}{dx} + xy = 1$

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

6.2 مساوات $(5+2x)^2\frac{d^2y}{dx^2}-6(5+2x)\frac{dy}{dx}+8y=0$ کا حل معلوم کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

6.3 مساوات $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 3y = x^2 \log x$ کو حل کیجیے۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ /اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

6.4 مساوات $(1+x)^2\frac{d^2y}{dx^2}+(1+x)\frac{dy}{dx}+y=4\cos\{\log(1+x)\}$ کا حل معلوم کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

6.5 مساوات $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x(1+x^2)}$ کو پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے سے حل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ /اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

6.6 مساوات $(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=(1-x)^2$ کو پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے سے حل کرو۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل/ تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ/اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

6.7 مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = \frac{e^x}{1+e^x}$ کو پیرامیٹرس کے تغیر کے طریقے سے حل کرو، جب کہ اس کے لیے اتمامی تفاعل $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$ ہے۔

مقصد(Aim)

طرز عمل(Procedure)

حل / تجویز(Solution/Calculation)

نتیجہ /اختتام(Conclusion/Result)

☆☆☆☆☆

نمونہ امتحانی پرچہ

ریاضیات(لیب مینول)

BNMM201DCP

بی۔ایس سی-(آنرس)(دوسرا سمسٹر)

وقت:Hrs 2 کل نمبر:20

نوٹ: درج ذیل میں سے کوئی چار سوالات کے جواب دیجیے $(4 \times 5 = 20)$

1۔ حل معلوم کیجیے: $(x - y - 2)dx + (x - 2y - 3)dy = 0$

2۔ حل کرو: $(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} + 4xy = \frac{1}{x^2+1}$

3۔ مساوات $xyp^2 - (x^2 - y^2)p - xy = 0$ کو حل کریے۔

4۔ منحنیات کے خاندان $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ جہاں a ایک پیرامیٹر ہے، کے لیے عمودی ٹراجکٹری محسوب کریے۔

5۔ کسی مناسب طریقے سے مساوات $\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx} + 1\right)\left(\frac{dy}{dx} - 1\right)^3 y = 12e^x$ کا حل معلوم کرو۔

6۔ مساوات $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 3y = x^2 \log x$ کو حل کرو۔

تصدیق نامہ

تصدیق کی جاتی ہے کہ بی۔ایس سی۔(آنرس)(دوسرا سمسٹر) تفرقی مساوات کے تجرباتی حصہ کے کام کا یہ اصلی ریکارڈ ہے جسے _____ نے مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کے اسٹڈی سینٹر _____ میں تعلیمی سال _____ کے دوران تیار کیا۔

دستخط کونسلر