BNMM201DET

برداری علم احصا

(Vector Calculus)

بی۔ایس سی۔(آنرس)

چار سالہ پروگرام

دوسرا سمسٹر (ریاضی)

مرکز برائے فاصلاتی و آن لائن تعلیم

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

حیدرآباد۔32، تلنگانہ، بھارت

Copyright © 2025, Maulana Azad National Urdu University, Hyderabad

All right reserved. No part of this publication may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronically or mechanically, including photocopying, recording or any information storage or retrieval system, without prior permission in writing form the publisher (registrar@manuu.edu.in)

ISBN	:	978-81-994264-5-0
Course	:	Vector Calculus
First Edition	:	October 2025
Copies	:	600
Price	:	115/-(The price of the book is included in admission fee of distance mode students)

Course Coordinator

Dr. Khaja Moinuddin, Professor, Dept. of Mathematics, School of Sciences, MANUU

Editorial Board/Editors

Dr. Khaja Moinuddin,Professor, Dept. of Mathematics, School of Sciences, MANUU

Dr. Kashif Khan, (Mathematics), Centre for Distance and Online Education, MANUU

Production

Prof. Nikhath Jahan Professor (Urdu), CDOE MANUU

Mr. P Habibulla, Assistant Registrar, Purchase & Stores Section, MANUU

Dr. Mohd Akmal Khan, Assistant Professor (C), CDOE MANUU

Mohd Abdul Naseer, Section Officer, CDOE MANUU

Shaik Ismail, UDC, CDOE, MANUU

SyedFaheemuddin, LDC,Purchase & Stores Section, MANUU

On behalf of the Registrar, Published by:

Centre for Distance and Online Education

Maulana Azad National Urdu University

Gachibowli, Hyderabad-500032 (TG), India

*Director:*dir.dde@manuu.edu.in*Publication:*ddepublication@manuu.edu.in

Phone number: 040-23008314 Website: manuu.edu.in

CRC Prepared by Dr.Kashif Khan, Faculty of Mathematics, CDOE, MANUU

Printedat:Print Time & Business Enterprises, Gachibowli, Hyderabad

فہرست

پیغام		وائس چانسلر، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی	5
پیغام		ڈائرکٹر، مرکز برائے فاصلاتی و آن لائن تعلیم	6
کورس کا تعارف		کورس کوآرڈی نیٹر (ریاضی)	7
اکائی نمبر	**اکائی کا نام**	**مصنف**	**صفحہ نمبر**
1۔	برداری تفاعل کا مشتق	ڈاکٹر کاشف خان	9
2۔	تفرقی عامل، گریڈینٹ	ڈاکٹر کاشف خان	22
3۔	بردار کا ڈائور جینس اور کرل	ڈاکٹر کاشف خان	37
4۔	برداری تکمل	ڈاکٹر کاشف خان	50
	نمونہ امتحانی پرچہ		65
	لیب مینول		67
1۔	برداری تفاعل کے مشتق، تفرقی عامل اور گریڈینٹ سے متعلق مسائل	ڈاکٹر کاشف خان	68
2۔	ڈائور جینس، کرل اور برداری تکمل سے متعلق مسائل	ڈاکٹر کاشف خان	88
	نمونہ امتحانی پرچہ		107
	تصدیق نامہ		108

مصنفین کی تفصیلات

Writer's Details

Dr. Kashif Khan, (Mathematics), Centre for Distance and Online Education, MANUU	ڈاکٹر کاشف خان، ریاضی، مرکز برائے فاصلاتی و آن لائن تعلیم، مانو، حیدر آباد

پروف ریڈرس: 1. ڈاکٹر کاشف خان 2. ڈاکٹر خواجہ معین الدین

ٹائٹل پیج: ابراہیم اکرم صدیقی

پیغام

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی (MANUU) 1998 میں پارلیمنٹ کے ایک ایکٹ کے ذریعے قائم کی گئی۔ یہ ایک مرکزی جامعہ ہے جس نے این اے اے سی کی جانب سے گریڈ +A حاصل کیا ہے۔ اس جامعہ کے قیام کے مقاصد ہیں: (1) اردو زبان کا فروغ، (2) پیشہ ورانہ اور تکنیکی تعلیم کو اردو میڈیم میں قابل رسائی اور دستیاب بنانا، (3) روایتی اور فاصلاتی طریقۂ تعلیم کے ذریعے تعلیم فراہم کرنا، اور (4) خواتین کی تعلیم پر خصوصی توجہ دینا۔ یہ وہ نکات ہیں جو اس مرکزی جامعہ کو دیگر تمام مرکزی جامعات سے ممتاز کرتے ہیں اور اسے ایک انفرادیت بخشتے ہیں۔ قومی تعلیمی پالیسی 2020 میں بھی مادری زبانوں اور علاقائی زبانوں میں تعلیم حاصل کرنے پر زور دیا گیا ہے۔

اردو کے ذریعے علم کے فروغ کا مقصد یہی ہے کہ اردو جاننے والے طبقے کے لیے عصری علوم اور مضامین تک رسائی آسان بنائی جائے۔ ایک طویل عرصے تک اردو میں درسی مواد کی کمی رہی ہے۔ اردو یونیورسٹی کے پاس اب اردو میں 350 سے زیادہ کتابوں کا ذخیرہ موجود ہے اور ہر سمسٹر کے ساتھ اس تعداد میں اضافہ ہو رہا ہے۔ اردو یونیورسٹی این ای پی 2020 کے وژن کے مطابق مادری/گھریلو زبان میں تعلیمی مواد فراہم کرنے کے قومی مشن کا حصہ بننے کو اپنے لیے ایک اعزاز سمجھتی ہے۔ مزید یہ کہ اردو بولنے والا طبقہ اردو میں مطالعہ کے مواد کی عدم دستیابی کے سبب نئے اُبھرتے شعبوں اور جدید تر معلومات کے موجودہ میدانوں میں تازہ ترین معلومات واطلاعات کے حصول سے محروم نہیں رہے گا۔ مذکورہ بالا میدانوں میں مواد کی دستیابی کی بدولت حصولِ معلومات کا نیا شعور بیدار ہوا ہے جو یقیناً اردو داں طبقے کی دانشورانہ ترقی پر اثرانداز ہوگا۔
فاصلاتی اور آن لائن طلبہ کے لیے تعلیم وتدریس کے عمل کو سہل بنانے کے لیے یونیورسٹی کا سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن (CDOE) اردو اور متعلقہ مضامین میں خود اکتسابی مواد (SLM) کی تیاری کو یقینی بناتا ہے۔

MANUU فاصلاتی اور آن لائن لرننگ کے طلبہ کے لیے SLM بلامعاوضہ فراہم کرتا ہے۔ یہ مواد اُردو کے ذریعے علم حاصل کرنے میں دلچسپی رکھنے والے ہر شخص کے لیے برائے نام قیمت پر دستیاب ہے۔ تعلیم تک رسائی کے دائرے کو مزید پھیلانے کے مقصد سے، اردو/ہندی/انگریزی/عربی میں eSLM یونیورسٹی کی ویب سائٹ پر مفت ڈاؤن لوڈ کے لیے دستیاب رکھا گیا ہے۔

مجھے بے حد خوشی ہے کہ متعلقہ فیکلٹی کی محنت اور مصنفین کے مکمل تعاون کی بدولت FYUG بی۔اے، بی۔ایس سی اور بی۔کام کی کتابوں کی اشاعت کا عمل بڑے پیمانے پر شروع ہو گیا ہے۔ فاصلاتی اور آن لائن لرننگ کے طلبہ کی سہولت کے لیے خود اکتسابی مواد (SLM) کی تیاری اور اشاعت کا عمل یونیورسٹی کے لیے اہمیت رکھتا ہے۔ مجھے یقین ہے کہ ہم اپنے خود تعلیمی مواد کے ذریعے اردو جاننے والے ایک بڑے طبقے کی ضروریات کو پورا کرنے کے قابل ہوں گے اور اس یونیورسٹی کے مقصدِ قیام کو پورا کریں گے اور اپنے ملک میں اپنی موجودگی کو جائز ٹھہرا سکیں گے۔

نیک تمناؤں کے ساتھ!

پروفیسر سید عین الحسن
شیخ الجامعہ، مانو

پیغام

موجودہ دور میں فاصلاتی تعلیم کو دنیا بھر میں ایک نہایت مؤثر اور مفید طریقۂ تعلیم کے طور پر تسلیم کیا جاتا ہے اور بڑی تعداد میں لوگ اس طریقۂ تعلیم سے فائدہ اٹھا رہے ہیں۔ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی نے بھی اردو زبان بولنے والے عوام کی تعلیمی ضروریات کو مد نظر رکھتے ہوئے اپنے قیام کے وقت سے ہی فاصلاتی تعلیم کا طریقہ متعارف کرایا۔ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی نے 1998 میں ڈائریکٹوریٹ آف ڈسٹنس ایجوکیشن (نظامتِ فاصلاتی تعلیم) کے ساتھ کام کا آغاز کیا اور 2004 سے باقاعدہ پروگرام شروع ہوئے، اس کے بعد مختلف شعبہ جات قائم کیے گئے۔

یو جی سی نے ملک میں نظام تعلیم کو مؤثر طور پر منظم کرنے میں ایک اہم کردار ادا کیا ہے۔ اوپن اینڈ ڈسٹنس لرننگ (ODL) موڈ کے تحت چلنے والے مختلف پروگرام، جو سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن (CDOE) میں چل رہے ہیں، یو جی سی-ڈی ای بی کے منظور شدہ ہیں۔ یو جی سی-ڈی ای بی نے فاصلاتی اور باقاعدہ تعلیم کے نصاب کو ہم آہنگ کرنے پر زور دیا ہے تاکہ فاصلاتی تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ کے معیار کو بہتر بنایا جاسکے۔ چونکہ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی ایک دُہرے طرز (ڈوئل موڈ) کی یونیورسٹی ہے جو فاصلاتی اور روایتی دونوں طریقۂ تعلیم کی خدمات فراہم کرتی ہے، اس لیے اپنے مقاصد کو یو جی سی-ڈی ای بی کے رہنما خطوط کے مطابق حاصل کرنے کے لیے اس نے چوائس بیسڈ کریڈٹ سسٹم (CBCS) متعارف کرایا گیا جس کا خود اکتسابی مواد (Self Learning Materials) یو جی سی کے قوانین اور کریڈٹ فریم کے مطابق نئے سرے سے تیار کیے جاچکا ہے۔

سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن (CDOE) کل انیس (19) پروگرام پیش کرتا ہے جن میں یو جی، پی جی، بی ایڈ، ڈپلومہ اور سرٹیفکیٹ پروگرام شامل ہیں۔ اس کے ساتھ ساتھ تکنیکی مہارتوں پر مبنی پروگرام بھی شروع کیے جارہے ہیں۔ سی ڈی او ای نے جولائی 2025 سے این ای پی-2020 کے مطابق چار سالہ یو جی پروگرام کا آغاز کیا ہے۔ بی اے، بی ایس سی اور بی کام کے آنرز پروگراموں کو این سی ایف کے مطابق ڈیزائن کیا گیا ہے جس سے طلبہ کو آنرز ڈگری حاصل کرنے میں مدد ملے گی۔ سال 2025-2026 سے ایم بی اے پروگرام اوڈی ایل موڈ میں متعارف کرایا گیا ہے۔

مانو نے طلبہ کی سہولت کے لیے نو ریجنل سنٹرز (بنگلورو، بھوپال، دربھنگہ، دہلی، کولکاتا، ممبئی، پٹنہ، رانچی اور سری نگر) اور چھ سب ریجنل سنٹرز (حیدرآباد، لکھنؤ، جموں، نوح، وارانسی اور امراؤتی) کا ایک وسیع نیٹ ورک قائم کیا ہے۔ اس کے علاوہ وجے واڑا میں ایک ایکسٹینشن سنٹر بھی قائم کیا گیا ہے۔ ان ریجنل اور سب ریجنل سنٹروں کے تحت ایک سو پچاس سے زیادہ لرنر سپورٹ سنٹر (LSCs) اور بیس پروگرام سنٹر بیک وقت چلائے جارہے ہیں تاکہ طلبہ کو تعلیمی اور انتظامی سہولیات فراہم کی جاسکیں۔ سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن اپنی تعلیمی اور انتظامی سرگرمیوں میں آئی سی ٹی کا بھرپور استعمال کرتا ہے اور اپنے تمام پروگراموں میں صرف آن لائن موڈ کے ذریعے ہی داخلے فراہم کرتا ہے۔

طلبہ کے لیے سیلف لرننگ میٹیریل (SLM) کی سوفٹ کاپی سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن کی ویب سائٹ پر دستیاب کرائی جاتی ہیں اور آڈیو و ویڈیو ریکارڈنگ کے لنک بھی ویب سائٹ پر فراہم کیے جاتے ہیں۔ اس کے علاوہ طلبہ کو ای۔ میل اور واٹس ایپ گروپ کی سہولت بھی فراہم کی جارہی ہے جن کے ذریعے انہیں پروگرام کے مختلف پہلوؤں جیسے کورس رجسٹریشن، اسائنمنٹ، کاؤنسلنگ، امتحانات وغیرہ کے بارے میں مطلع کیا جاتا ہے۔ باقاعدہ کاؤنسلنگ کے علاوہ گزشتہ دو برسوں سے طلبہ کے تعلیمی معیار کو بہتر بنانے کے لیے زائد تدارکی (Remedial) آن لائن کاؤنسلنگ بھی فراہم کی جارہی ہے۔

امید کی جاتی ہے کہ سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن تعلیمی اور معاشی طور پر پسماندہ آبادی کو عصری تعلیم کے دھارے میں شامل کرنے میں ایک اہم کردار ادا کرے گا۔ تعلیمی ضروریات کو مد نظر رکھتے ہوئے نئی تعلیمی پالیسی (NEP-2020) کے مطابق مختلف پروگرامز میں تبدیلیاں کی گئی ہیں اور توقع ہے کہ اس سے اوپن اینڈ ڈسٹنس لرننگ کے نظام کو مزید مؤثر اور کارآمد بنانے میں مدد ملے گی۔

پروفیسر محمد رضا اللہ خان

ڈائرکٹر، سی ڈی او ای، مانو

کورس کا تعارف

زیر نظر کتاب، برداری علم احصا(Vector Calculus) کے موضوعات سے متعلق ہے اور یہ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کے بی ایس سی کورس کے دوسرے سمسٹر کے نصاب پر مشتمل ہے۔ برداری علم احصا ریاضی کا ایک ایسا حصہ ہے جس میں تین سمتی برداری تفرق اور تکمل کے بنیادی اصولوں کو بیان کیا جاتا ہے۔ یہ سیال کے بہاؤ برقی مقناطیسیت اور کشش ثقل کے شعبوں کی ماڈلنگ کے لیے اہم ہے۔ اس کتاب کی نمایاں خصوصیت یہ ہے کہ اس میں مواد کو سہل طریقے سے آسان زبان میں مثالوں کے ذریعہ سمجھایا گیا ہے، تاکہ طلبا اپنے مضمون کو از خود سمجھ سکیں۔

کتاب کو دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ جس میں پہلا حصہ نظریات (تھیوری) پر مبنی ہے اور دوسرا حصہ پریکٹکل (تجربوں) پر منحصر ہے۔ پہلا حصہ چار (4) اکائیوں پر مشتمل ہے۔ اکائی 1 میں برداری تفرق کے بارے میں جانکاری دی گئی ہے۔ اکائی 2 میں تفرقی عامل گریڈینٹ سے متعلق معلومات درج ہے۔ اکائی 3 میں کرل(Curl) اور ڈائور جینس (Divergence) کی تعریفات، ان کے اطلاق پر تفصیلی جانکاری دی گئی ہے۔ چوتھی اکائی میں برداری تکمل کی تفصیل کے ساتھ وضاحت کی گئی ہے اور چند مثالوں کی مدد سے مسئلوں کو حل کرنا سمجھایا گیا ہے۔

طلبا سے توقع کی جاتی ہے کہ وہ عملی کلاسوں میں شرکت کریں اور کونسلر کی رہنمائی میں تجرباتی مینول میں دیے گئے مسائل کو حل کرنے کی مہارت حاصل کریں۔

طلبا کی مسئلہ حل صلاحیت کو بہتر بنانے کے لیے اس مینول میں دو اکائیوں کا تجرباتی حصہ دیا گیا ہے۔ طلبا کی طرف سے کیے گئے کام کا ریکارڈ وہ عملی امتحان کے وقت جمع کریں۔

اس کتاب کی تدوین میں مصنف، تدریسی و غیرہ تدریسی وانتظامی عملے کے تعاون کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ کتاب کو معیاری اور قابل عمل و فہم بنانے کی ممکن کوشش کی گئی ہے، تاہم کوئی بھی کوشش اپنے آپ میں مکمل نہیں ہوتی۔ اس ضمن میں اساتذہ اکرام، ماہرین طلبا کی آرا و مشوروں کا خیر مقدم کیا جائے گا۔

ڈاکٹر خواجہ معین الدین

کورس کوآرڈی نیٹر

اکائی 1۔ برداری تفاعل کا مشتق

(Derivative of Vector Function)

اکائی کے اجزا

1.0 تمہید

1.1 مقاصد

1.2 بنیادی تعریفات

1.3 برداری تفاعل کا مشتق

1.4 مشتقات کا الجبرا

1.5 اکتسابی نتائج

1.6 کلیدی الفاظ

1.7 نمونہ امتحانی سوالات

1.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

1.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

1.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

1.0 تمہید(Introduction)

برداری علم احصا(Vector Calculus) ریاضی کی ایک شاخ ہے جس کی تشکیل علم احصااور بردار مل کر کرتے ہیں۔وہ تفاعل جس کی قدر کوئیبر دار ہو برداری تفاعلکہلاتا ہے۔ان تفاعلات کی مدد سے ہم دواور سہ البعدی فضا(Two and Three Dimensional Space) میں پیرامتریائی تفاعل کو آسانی سے سمجھ سکتے ہیں اور کسی ذرہ کا کسی منحنی راستے(Curved Path) پر گردش کو بھی معلوم کیا جاسکتا ہے۔ہم اس اکائی میں برداری تفاعل،اس کی انتہااور تسلسل کی تعریف کریں گے۔ نیز برداری اور میزانی تفاعلات کے مشتقات اور مشتق کے الجبراپر روشنی ڈالیں گے۔ساتھ ہی چند قضیوں کو ثابت کریں گے۔

1.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے اختتام پر آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ برداری تفاعل اس کی انتہااور کسی تفاعل کے تسلسل کی تعریف کے ساتھ برداری اور میزانی تفاعلات کے مشتقات اور مشتق کے الجبراپر روشنی ڈالیں گے۔ساتھ ہی چند قضیوں کو ثابت کریں گے۔

1.2 بنیادی تعریفات(Basic Definitions)

میزانی متغیر کا برداری تفاعل(Vector Function of Scalar Variable): فرض کیجیے کہ S حقیقی نمبرات کے سٹ $\mathbb{R}$ کا تحت سٹ ہے اور $t \in S$ ایک میزانیہ (Scalar) ہے، تب ہر ایک $t \in S$ کے لیے ایک یکتا بردار $\vec{r}$ ہو گا، تب $\vec{r}$ کو میزانی متغیر کا برداری تفاعل کہتے ہیں، یہاں برداری تفاعل $\vec{r}$ کا دامنہ S ہے اور اس کو $\vec{r} = \vec{f}(t)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔اگر f_1, f_2, f_3 حقیقی قدری تفاعل $\vec{r}$ کے اجزا ہوں، تو $\mathbb{R}^2$ اور $\mathbb{R}^3$ میں $\vec{r}$ کو درجہ ذیل شکل میں لکھ سکتے ہیں

$$\vec{r}(t) = f_1(t)\hat{\imath} + f_2(t)\hat{\jmath} \quad \text{... (1)}$$

$$\vec{r}(t) = f_1(t)\hat{\imath} + f_2(t)\hat{\jmath} + f_3(t)\hat{k} \quad \text{... (2)}$$

مثال:

(a $\vec{r}(t) = \hat{\imath} - \hat{\jmath} + \sin t\,\hat{k}$

(b $\vec{r}(t) = \hat{\imath} + \frac{1}{t}\hat{\jmath} + \hat{k}$

(c $\vec{r}(t) = (t^2 - 1)\hat{\imath} - \hat{\jmath}$

عام تفاعل کی طرح ہی ہم برداری تفاعل پر تمام عاملات کو لاگو کر سکتے ہیں۔

فرض کیجیے کہ $\vec{F}$ اور $\vec{G}$ کسی حقیقی متغیر t کے برداری تفاعل ہیں اور $\lambda(t)$ کوئی میزانی تفاعل ہے، تب $\vec{F} + \vec{G}$، $\vec{F} - \vec{G}$، $\vec{F} \times \vec{G}$ اور $\lambda\vec{F}$ سبھی برداری تفاعلات ہیں جب کہ $\vec{F} \cdot \vec{G}$ ایک میزانی تفاعل ہے۔اوپر بیان کردہ عاملات کو ہم کچھ اس طرح سے لکھ سکتے ہیں:

(i) $(\vec{F} + \vec{G})(t) = \vec{F}(t) + \vec{G}(t)$

(ii) $(\vec{F} - \vec{G})(t) = \vec{F}(t) - \vec{G}(t)$

(iii) $(\vec{F} \times \vec{G})(t) = \vec{F}(t) \times \vec{G}(t)$

(iv) $(\lambda\vec{F})(t) = \lambda(t)\vec{F}(t)$

$(\vec{F}\cdot\vec{G})(t) = \vec{F}(t)\cdot\vec{G}(t)$ (v)

علامتی اظہار: ہم مختلف قسم کے وقفوں، جنہیں $\mathbb{R}$ کا تحت سٹ کہتے ہیں، کی پہچان کے لیے دو مختلف طرح کی قوسوں(Brackets) کا استعمال کریں گے۔ فرض کرو کہ $a, b \in \mathbb{R},$ جہاں، ہے $a < b$

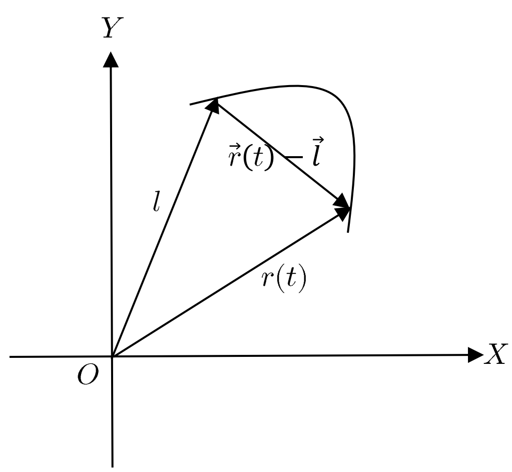
1. **کھلا وقفہ**$(open\ Interval)$: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$
2. **بند وقفہ**$(Closed\ Interval)$: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}: a \le x \le b\}$
3. **نصف دایاں کھلا وقفہ**$(Right\ Half\ Open\ Interval)$: $[a,b) = \{x \in \mathbb{R}: a \le x < b\}$
4. **نصف بایاں کھلا وقفہ**$(Left\ Half\ Open\ Interval)$: $(a,b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \le b\}$
5. **دایاں نصف لامتناہی کھلا وقفہ**(Right Half Infinite Open Interval): $[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R}: x \ge a\}$
6. **بیایاں نصف لامتناہی کھلا وقفہ**$(Left\ Half\ Infinite\ Open\ Interval)$: $(\infty,b] = \{x \in \mathbb{R}: x \le b\}$
7. **دایاں لامتناہی کھلا وقفہ**$(Right\ Infinite\ open\ Interval)$: $(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R}: a < x\}$
8. **دایاں لامتناہی کھلا وقفہ**$(Left\ Infinite\ open\ Interval)$: $(\infty,b) = \{x \in \mathbb{R}: x < b\}$

برداری تفاعل کی انتہا(Limit of a Vector Function): مان لیجیے کہ $\vec{r}$ کوئی برداری تفاعل ہے جو ان تمام t کے لئے متعرف ہے جس کا دامنہ S ہے اور $a \in S$ ہے، تب اگر ایک بردار l کو $\vec{r}$ کی انتہا کہتے ہیں، جب کہ $t \to a$، اگر ہر ایک **مثبت عدد** $\epsilon > 0$ کے لیے اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$\left|\vec{r}(t) - \vec{l}\right| < \epsilon \text{ جب کہ } 0 < |t-a| < \delta$$

یا اس کو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں

$$\lim_{t\to a}\vec{r}(t) = \vec{l}$$



شکل 1.1

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ برداری تفاعل $\vec{r}(t)$ کسیبر دار l کی طرف گامزن ہوگا جب کہ t کسی عدد a کی طرف گامزن ہو اور ایسا صرف اور صرف تبھی ممکن ہے جب کہ $\vec{r}(t)$ کے اجزا l کے متناظر (Corresponding) اجزا کی طرف گامزن ہوں۔ اس کو سمجھنے کے لیے مان لیجیے کہ

$$\vec{r}(t) = \langle f_1(t), f_2(t) \rangle = f_1(t)\hat{\imath} + f_2(t)\hat{\jmath}$$

تب

$$\lim_{t\to a} \vec{r}(t) = \langle \lim_{t\to a} f_1(t), \lim_{t\to a} f_2(t) \rangle = \left\{\lim_{t\to a} f_1(t)\right\}\hat{\imath} + \left\{\lim_{t\to a} f_2(t)\right\}\hat{\jmath}$$

وجود رکھتی ہے اگر چہ کہ تمام اجزا تفاعلات کی انتہا وجود رکھتی ہوں۔ اس کے بر عکس اجزا تفاعلات کی انتہا وجود رکھتی ہیں اگر $\vec{r}(t)$ انتہائی بردار (Limiting Vector) کی طرف گامزن ہو جب $t \to a$ ہو۔

اس کو ہم سہ البعدی فضا کے لیے اسی طرح سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ مان لیجیے کہ برداری تفاعل $\vec{r}(t)$ کے اجزا تفاعلات f_1, f_2, f_3 تب

$$\vec{r}(t) = \langle f_1(t), f_2(t), f_3(t) \rangle$$

کی انتہا جب کہ $t \to b$ ہو، درجہ ذیل ہوگی

$$\lim_{t\to a} \vec{r}(t) = \left\{\lim_{t\to a} f_1(t)\right\}\hat{\imath} + \left\{\lim_{t\to a} f_2(t)\right\}\hat{\jmath} + \left\{\lim_{t\to a} f_3(t)\right\}\hat{k}$$

انتہا کی الجبرا (Algebra of Limit)

مان لیجیے کہ $\vec{r}_1(t)$ اور $\vec{r}_2(t)$ کسی حقیقی متغیر t کے تفاعلات ہیں اور $\lambda(t)$ کوئی میزانی تفاعل ہے۔ جب $t \to a$ تب $\vec{r}_1(t)$، $\vec{r}_2(t)$ اور $\lambda(t)$ کی انتہا متناہی (Finite) ہو، تب

$$\lim_{t\to a}[\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t)] = \lim_{t\to a}\vec{r}_1(t) \pm \lim_{t\to a}\vec{r}_2(t)$$
$$\lim_{t\to a}[\lambda(t)\vec{r}_1(t)] = \left(\lim_{t\to a}\lambda(t)\right)\left(\lim_{t\to a}\vec{r}_1(t)\right)$$
$$\lim_{t\to a}[\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)] = \left(\lim_{t\to a}\vec{r}_1(t)\right) \cdot \left(\lim_{t\to a}\vec{r}_2(t)\right)$$
$$\lim_{t\to a}[\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)] = \left(\lim_{t\to a}\vec{r}_1(t)\right) \times \left(\lim_{t\to a}\vec{r}_2(t)\right)$$

تمام ضابطے $t \to \infty$ یا $t \to -\infty$ کے لیے بھی درست ہیں جب کہ تمام عبارتوں (Expressions) میں انتہا متناہی ہو۔

اب ہم کچھ مثالوں کی مدد سے ذہن نشیں کرتے ہیں۔

مثال-1 مان لیے کہ $\vec{r}(t) = t^2\hat{\imath} + 5e^t\hat{\jmath} + 7\ \sin(\pi t)\ \hat{k}$، تب $\lim_{t\to 0}\vec{r}(t)$ کی قدر معلوم کریں۔

حل۔

$$\lim_{t\to 0} r\ \ t\ \ = \left(\lim_{t\to 0} t^2\right)\imath + \left(\lim_{t\to 0} 5e^t\right)\jmath + \left(\lim_{t\to 0} 7\ \ \sin\ \ \pi t\ \ \right)k$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{t\to 0} r\ \ t\ \ = 5\ \jmath$$

دوسرا طریقہ

$$\lim_{t\to 0} r\ \ t\ \ = \lim_{t\to 0}\langle t^2, 5e^t, 7\ \ \sin\ \ \pi t\ \ \rangle$$
$$= \left\langle \lim_{t\to 0} t^2, \lim_{t\to 0} 5e^t, \lim_{t\to 0}\ 7\ \ \sin\ \ \pi t\ \ \right\rangle$$

$$= \langle 0,5,0 \rangle$$

مثال2۔ $\lim\limits_{t\to 3}\vec{r}(t)$ کی قدر معلوم کریں جب کہ $\vec{r}(t) = (t^5-6)\hat{\imath} + e^{2t}\hat{\jmath} + \cos(\pi t)\,\hat{k}$

حل-

$$\lim_{t\to 3}\vec{r}(t) = \left[\lim_{t\to 3}(t^5-6)\right]\hat{\imath} + \left[\lim_{t\to 3}(e^{2t})\right]\hat{\jmath} + \left[\lim_{t\to 3}(\cos(\pi t))\right]\hat{k}$$
$$= (243-6)\hat{\imath} + (e^6)\hat{\jmath} + (\cos(3\pi))\hat{k}$$
$$= 237\hat{\imath} + e^6\hat{\jmath} + \hat{k}$$

مثال3- $\lim\limits_{t\to 0}\vec{r}(t)$ کی قدر معلوم کریں جب کہ $\vec{r}(t) = t^3\hat{\imath} + e^{2t}\hat{\jmath} + (1+3\sin(3\pi t))\hat{k}$

حل-

$$\vec{r}(t) = t^3\hat{\imath} + e^{2t}\hat{\jmath} + (1+3\sin(3\pi t))\hat{k}$$

$$\lim_{t\to 0}\vec{r}(t) = \left[\lim_{t\to 0}(t^3)\right]\hat{\imath} + \left[\lim_{t\to 0}(e^{2t})\right]\hat{\jmath} + \left[\lim_{t\to 0}(1+3\sin(3\pi t))\right]\hat{k}$$
$$= (0)\hat{\imath} + (e^0)\hat{\jmath} + (1+3\cdot 0)\hat{k}$$
$$= \hat{\jmath} + \hat{k}$$

مثال4- مان لیجیے کہ $\vec{g}(t) = 2t\hat{\imath} + 3t^2\hat{k}$ اور $\vec{f}(t) = e^t\hat{\imath} + (1-t)\hat{\jmath} - (5+e^t)\hat{k}$ تب دکھایے کہ

.i $$\lim_{t\to 1}\left[\vec{f}(t)\times\vec{g}(t)\right] = \left(\lim_{t\to 1}\vec{f}(t)\right)\times\left(\lim_{t\to 1}\vec{g}(t)\right)$$

.ii $$\lim_{t\to 1}\left[\vec{f}(t)\cdot\vec{g}(t)\right] = \left(\lim_{t\to 1}\vec{f}(t)\right)\cdot\left(\lim_{t\to 1}\vec{g}(t)\right)$$

.iii $$\lim_{t\to 1}\left[\vec{f}(t)+\vec{g}(t)\right] = \left(\lim_{t\to 1}\vec{f}(t)\right)+\left(\lim_{t\to 1}\vec{g}(t)\right)$$

حل-

.i ہمیں دیا گیا ہے

$$\vec{f}(t) = 2t\hat{\imath} + 3t^2\hat{k}$$

اور

$$\vec{g}(t) = e^t\hat{\imath} + (1-t)\hat{\jmath} - (5+e^t)\hat{k}$$

$$\vec{f}(t)\times\vec{g}(t) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2t & 0 & 3t^2 \\ e^t & (1-t) & -(5+e^t) \end{vmatrix}$$
$$= \left(0-3t^2(1-t)\right)\hat{\imath} - \left(-2t(5+e^t)-3t^2e^t\right)\hat{\jmath} + (2t-2t^2)\hat{k}$$
$$= (3t^3-3t^2)\hat{\imath} + (10t+2te^t+3t^2e^t)\hat{\jmath} + (2t-2t^2)\hat{k}$$

اس لیے اس کی لمٹ ہم کچھ اس طرح سے حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\lim_{t\to 1}\left[\vec{f}(t)\times\vec{g}(t)\right] = \lim_{t\to 1}(3t^3-3t^2)\hat{\imath} + \lim_{t\to 1}(10t+2te^t+3t^2e^t)\hat{\jmath} + \lim_{t\to 1}(2t-2t^2)\hat{k}$$
$$= (-3+3)\hat{\imath} + (10+2e+3e)\hat{\jmath} + (2-2)\hat{k}$$
$$= (10+5e)\hat{\jmath} \qquad \cdots(1)$$

اب ہم لمٹس کا کراس پروڈکٹ (Cross Product) نکالتے ہیں۔

$$\lim_{t\to 1}\vec{f}(t) = \lim_{t\to 1}\left(2t\hat{\imath} + 3t^2\hat{k}\right)$$
$$= \lim_{t\to 1}(2t)\hat{\imath} + \lim_{t\to 1}(3t^2)\hat{k}$$
$$= 2\hat{\imath} + 3\hat{k}$$

اور

$$\begin{aligned}\lim_{t\to1}\vec{g}(t) &= \lim_{t\to1}\left[e^t\hat{\imath} + (1-t)\hat{\jmath} - (5+e^t)\hat{k}\right]\\ &= \lim_{t\to1}(e^t)\hat{\imath} + \lim_{t\to1}(1-t)\hat{\jmath} - \lim_{t\to1}(5+e^t)\hat{k}\\ &= e\hat{\imath} - (5+e)\hat{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \left(\lim_{t\to1}\vec{f}(t)\right)\times\left(\lim_{t\to1}\vec{g}(t)\right) &= \begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 2 & 0 & 3\\ e & 0 & -(5+e)\end{vmatrix}\\ &= (0-0)\hat{\imath} - (-2(5+e)-3e)\hat{\jmath} + (0-0)\hat{k}\\ &= -(-10-2e-3e)\hat{\jmath}\\ &= (10+5e)\hat{\jmath} \qquad \cdots (2)\end{aligned}$$

اس لیے(1)اور(2)سے ہمیں ملتا ہے کہ

$$\lim_{t\to1}\left[\vec{f}(t)\times\vec{g}(t)\right] = \left(\lim_{t\to1}\vec{f}(t)\right)\times\left(\lim_{t\to1}\vec{g}(t)\right)$$

.ii ہم نے اوپر دیکھا کہ

$$\lim_{t\to1}\vec{f}(t) = 2\hat{\imath} + 3\hat{k}$$

اور

$$\lim_{t\to1}\vec{g}(t) = e\hat{\imath} - (5+e)\hat{k}$$

اس لیے

$$\begin{aligned}\left(\lim_{t\to1}\vec{f}(t)\right)\cdot\left(\lim_{t\to1}\vec{g}(t)\right) &= \left(2\hat{\imath} + 3\hat{k}\right)\cdot\left(e\hat{\imath} - (5+e)\hat{k}\right)\\ &= 2e - 3(5+e)\\ &= -15 - e \qquad \cdots (3)\end{aligned}$$

اسی طرح سے

$$\begin{aligned}\vec{f}(t)\cdot\vec{g}(t) &= \left(2t\hat{\imath} + 3t^2\hat{k}\right)\cdot\left(e^t\hat{\imath} + (1-t)\hat{\jmath} - (5+e^t)\hat{k}\right)\\ &= 2te^t - 3t^2(5+e^t)\\ &= 2te^t - 15t^2 - 3t^2e^t\\ \Rightarrow \lim_{t\to1}\left[\vec{f}(t)\cdot\vec{g}(t)\right] &= \lim_{t\to1}(2te^t - 15t^2 - 3t^2e^t)\\ &= 2e - 15 - 3e\\ &= -15 - e \qquad \cdots (4)\end{aligned}$$

,9

(3)اور(4)سے ہمیں ملتا ہے

$$\lim_{t\to1}\left[\vec{f}(t)\cdot\vec{g}(t)\right] = \left(\lim_{t\to1}\vec{f}(t)\right)\cdot\left(\lim_{t\to1}\vec{g}(t)\right)$$

.iii ہمارے پاس دیا گیا ہے کہ

$$\vec{f}(t) = 2t\hat{\imath} + 3t^2\hat{k}$$

اور
$$\vec{g}(t) = e^t\hat{\imath} + (1-t)\hat{\jmath} - (5+e^t)\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{f}(t) + \vec{g}(t) = (2t+e^t)\hat{\imath} + (1-t)\hat{\jmath} + \left(3t^2 - (5+e^t)\right)\hat{k}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to1}\left[\vec{f}(t) + \vec{g}(t)\right] = \left[\lim_{t\to1}(2t+e^t)\right]\hat{\imath} + \left[\lim_{t\to1}(1-t)\right]\hat{\jmath} + \left[\lim_{t\to1}\left(3t^2-(5+e^t)\right)\right]\hat{k}$$

$$= (2+e)\hat{\imath} + (1-1)\hat{\jmath} + \left(3-(5+e)\right)\hat{k}$$

$$= (2+e)\hat{\imath} - (2+e)\hat{k}$$

اسی طرح سے

$$\left(\lim_{t\to1}\vec{f}(t)\right) + \left(\lim_{t\to1}\vec{g}(t)\right) = \left(2\hat{\imath} + 3\hat{k}\right) + \{e\hat{\imath} - (5+e)\hat{k}\}$$

$$= (2+e)\hat{\imath} + \{3-(5+e)\}\hat{k}$$

$$= (2+e)\hat{\imath} - (2+e)\hat{k}$$

برداری تفاعل کا تسلسل (Continuity of Vector Function)

فرض کیجیے کہ $\vec{r}(t)$ وقفہ I پر ایک برداری تفاعل ہے اور $a \in I$ ہے۔ تب a پر تفاعل $\vec{r}(t)$ مسلسل کہلاتا ہے اگر

$$\lim_{t\to a}\vec{r}(t) = \vec{r}(a)$$

اور اگر تفاعل $\vec{r}(t)$ وقفہ I کے ہر ایک نقطے پر مسلسل ہو تو تفاعل $\vec{r}(t)$ وقفہ I پر مسلسل کہلائے گا۔

اگر $\vec{f}$ اور $\vec{g}$ مسلسل تفاعلات ہیں، تب $\vec{f}.\vec{g}$، $\vec{f} \pm \vec{g}$ اور $\vec{f} \times \vec{g}$ بھی مسلسل ہوں گے۔

1.3 برداری تفاعل کا مشتق (Derivative of Vector Function)

فرض کیجیے کہ $\vec{r}(t)$ وقفہ I پر ایک برداری تفاعل ہے اور $a \in I$ ہے۔ تب اگر انتہا

$$\lim_{t\to a}\frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(a)}{t-a}$$

وجود رکھتی ہو تو اس انتہا کو تفاعل $\vec{r}(t)$ کا نقطہ a پر مشتق کہتے ہیں اور یہ کہا جاتا ہے کہ برداری تفاعل $\vec{r}(t)$ نقطہ $t = a$ پر تفرق پذیر ہے۔ اس کو $\vec{r}'(t)$ یا $\left(\frac{dr\ t}{dt}\right)_{t=a}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

نوٹ: 1) کسی نقطہ $t = a$ پر کوئی بردار تفاعل $\vec{r}(t)$ کو تفرق پذیر ہے تو یہ مسلسل بھی ہوگا لیکن اس کے برعکس اگر کوئی تفاعل مسلسل ہے تو ضروری نہیں کہ وہ تفرق پذیر بھی ہو۔

2) چوں کہ $\vec{r}'(t)$ ایک بردار تفاعل ہے اس کا مطلب یہ ہوا کہ t کی تمام قیمتوں کے لیے $\vec{r}'(t)$ کا میزانیہ (Magnitude) بھی وجود رکھے گا اور سمت (Direction) بھی سوائے $\vec{r}'(t) = 0$ کے لیے جہاں پر $\vec{r}'(t)$ کا میزانیہ صفر ہوگا اور اس کا سمت بھی نہیں ہوگی۔

1.4 مشتقات کا الجبرا(Algebra of Derivatives)

اگر $\vec{r}_1(t)$ اور $\vec{r}_2(t)$ کسی وقفہ I میں دو تفرق پذیر برداری تفاعل ہوں اور f ایک تفرق پذیر میزانیتفاعل ہو اور مان لیجیے کہ a اور b مستقلات(Constants) ہیں تب درجہ ذیل درست ہیں:

(a $\frac{d}{dt}[a] = 0$

(b $\frac{d}{dt}[a\vec{r}_1(t)] = a\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)]$

(c $\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t)] = \frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)] \pm \frac{d}{dt}[\vec{r}_2(t)]$

(d $\frac{d}{dt}[a\vec{r}_1(t) + b\vec{r}_2(t)] = a\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)] + b\frac{d}{dt}[\vec{r}_2(t)]$

(e $\frac{d}{dt}[f(t)\vec{r}_1(t)] = f(t)\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)] + \frac{d}{dt}[f(t)]\vec{r}_1(t)$

(f $\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t).\vec{r}_2(t)] = \frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)].\vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t).\frac{d}{dt}[\vec{r}_2(t)]$

(g $\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)] = \frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)] \times \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \times \frac{d}{dt}[\vec{r}_2(t)]$

ثبوت:(a) فرض کیجیے کہ $r_1\ t\ = a$ کسی وقفہ I میں ایک مستقلتفاعل ہے اور $c \in I$، تب

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)] = \lim_{t\to c}\frac{\vec{r}_1(t) - \vec{r}_1(c)}{t - c} = \lim_{t\to c}\frac{a - a}{t - c} = 0$$

اس لیے

$$\frac{d}{dt}[a] = 0$$

ثبوت:(b) فرض کیجیے کہ $r_1\ t$ کسی وقفہ I میں ایک برداری تفاعل ہے اور $c \in I$، تب

$$\frac{d}{dt}[a\vec{r}_1(t)] = \lim_{t\to c}\frac{a\vec{r}_1(t) - a\vec{r}_1(c)}{t - c} = a\lim_{t\to c}\frac{\vec{r}_1(t) - \vec{r}_1(c)}{t - c} = a\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)]$$

اس لیے

$$\frac{d}{dt}[a\vec{r}_1(t)] = a\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)]$$

ثبوت:(c) فرض کیجیے کہ $r_1\ t$ اور $\vec{r}_2(t)$ دو تفرق پذیر برداری تفاعل ہیں اور $c \in I$، تب

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t)] &= \lim_{t\to c}\frac{\{\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t)\} - \{\vec{r}_1(c) \pm \vec{r}_2(c)\}}{t - c} \\ &= \lim_{t\to c}\frac{\vec{r}_1(t) - \vec{r}_1(c)}{t - c} \pm \lim_{t\to c}\frac{\vec{r}_2(t) - \vec{r}_2(c)}{t - c} \\ &= \frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)] \pm \frac{d}{dt}[\vec{r}_2(t)]\end{aligned}$$

اس لیے

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t)] = \frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)] \pm \frac{d}{dt}[\vec{r}_2(t)]$$

ثبوت:(d) فرض کیجیے کہ t $\vec{r}_1$ اور $\vec{r}_2(t)$ دو تفرق پذیر برداری تفاعل ہیں اور مان لیجیے کہ a اور b مستقلات (Constants) ہیں اور $c \in I$، تب

$$\frac{d}{dt}[a\vec{r}_1(t) + b\vec{r}_2(t)] = \lim_{t\to c}\frac{\{a\vec{r}_1(t) + b\vec{r}_2(t)\} - \{a\vec{r}_1(c) + b\vec{r}_2(c)\}}{t-c}$$
$$= \lim_{t\to c}\frac{a\vec{r}_1(t) - a\vec{r}_1(c)}{t-c} + \lim_{t\to c}\frac{b\vec{r}_2(t) - b\vec{r}_2(c)}{t-c}$$
$$= a\lim_{t\to c}\frac{\vec{r}_1(t) - \vec{r}_1(c)}{t-c} + b\lim_{t\to c}\frac{\vec{r}_2(t) - \vec{r}_2(c)}{t-c}$$
$$= a\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)] + b\frac{d}{dt}[\vec{r}_2(t)]$$

اس لیے

$$\frac{d}{dt}[a\vec{r}_1(t) + b\vec{r}_2(t)] = a\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)] + b\frac{d}{dt}[\vec{r}_2(t)]$$

ثبوت:(e) فرض کیجیے کہ $\vec{r}_1(t)$ ایک تفرق پذیر برداری تفاعل ہے اور f کوئی تفرق پذیر میزانیتفاعل ہے اور $c \in I$، تب

$$\frac{d}{dt}[f(t)\vec{r}_1(t)] = \lim_{t\to c}\frac{f(t)\vec{r}_1(t) - f(c)\vec{r}_1(c)}{t-c}$$
$$= \lim_{t\to c}\frac{f(t)\vec{r}_1(t) - f(t)\vec{r}_1(c) + f(t)\vec{r}_1(c) - f(c)\vec{r}_1(c)}{t-c}$$
$$= \lim_{t\to c} f(t)\frac{\vec{r}_1(t) - \vec{r}_1(c)}{t-c} + \lim_{t\to c}\frac{f(t) - f(c)}{t-c}\vec{r}_1(c)$$
$$= f(t)\left(\lim_{t\to c}\frac{\vec{r}_1(t) - \vec{r}_1(c)}{t-c}\right) + \left(\lim_{t\to c}\frac{f(t) - f(c)}{t-c}\right)\vec{r}_1(c)$$
$$= f(t)\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)] + \frac{d}{dt}[f(t)]\vec{r}_1(t)$$

اس لیے

$$\frac{d}{dt}[f(t)\vec{r}_1(t)] = f(t)\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)] + \frac{d}{dt}[f(t)]\vec{r}_1(t)$$

ثبوت:(f) فرض کیجیے کہ t $\vec{r}_1$ اور $\vec{r}_2(t)$ دو تفرق پذیر برداری تفاعل ہیں اور I $c \in$ ہے۔اب

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)] = \lim_{t\to c}\frac{\vec{r}_1(t) - \vec{r}_1(c)}{t-c}$$

اور

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}_2(t)] = \lim_{t\to c}\frac{\vec{r}_2(t) - \vec{r}_2(c)}{t-c}$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t).\vec{r}_2(t)] = \lim_{t\to c}\frac{\vec{r}_1(t).\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(c).\vec{r}_2(c)}{t-c}$$
$$= \lim_{t\to c}\frac{\vec{r}_1(t).\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t).\vec{r}_2(c) + \vec{r}_1(t).\vec{r}_2(c) - \vec{r}_1(c).\vec{r}_2(c)}{t-c}$$
$$= \lim_{t\to c}\vec{r}_1(t).\frac{\vec{r}_2(t) - \vec{r}_2(c)}{t-c} + \lim_{t\to c}\frac{\vec{r}_1(t) - \vec{r}_1(c)}{t-c}.\vec{r}_2(c)$$

$$= \vec{r}_1(t).\left(\lim_{t\to c}\frac{\vec{r}_2(t)-\vec{r}_2(c)}{t-c}\right)+\left(\lim_{t\to c}\frac{\vec{r}_1(t)-\vec{r}_1(c)}{t-c}\right).\vec{r}_2(c)$$
$$= \vec{r}_1(t).\frac{d}{dt}[\vec{r}_2(t)]+\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)].\vec{r}_2(t)$$

اس لیے

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t).\vec{r}_2(t)] = \frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)].\vec{r}_2(t)+\vec{r}_1(t).\frac{d}{dt}[\vec{r}_2(t)]$$

ثبوت:(g) فرض کیجیے کہ t $\vec{r}_1$ اور $\vec{r}_2(t)$ دو تفرق پذیر برداری تفاعل ہیں اور $c \in I$ ہے۔اب

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)] = \lim_{t\to c}\frac{\vec{r}_1(t)-\vec{r}_1(c)}{t-c}$$

اور

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}_2(t)] = \lim_{t\to c}\frac{\vec{r}_2(t)-\vec{r}_2(c)}{t-c}$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(t)] = \lim_{t\to c}\frac{\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(t)-\vec{r}_1(c)\times\vec{r}_2(c)}{t-c}$$
$$= \lim_{t\to c}\frac{\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(t)-\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(c)+\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(c)-\vec{r}_1(c)\times\vec{r}_2(c)}{t-c}$$
$$= \lim_{t\to c}\vec{r}_1(t)\times\frac{\vec{r}_2(t)-\vec{r}_2(c)}{t-c}+\lim_{t\to c}\frac{\vec{r}_1(t)-\vec{r}_1(c)}{t-c}\times\vec{r}_2(c)$$
$$= \vec{r}_1(t)\times\left(\lim_{t\to c}\frac{\vec{r}_2(t)-\vec{r}_2(c)}{t-c}\right)+\left(\lim_{t\to c}\frac{\vec{r}_1(t)-\vec{r}_1(c)}{t-c}\right)\times\vec{r}_2(c)$$
$$= \vec{r}_1(t)\times\frac{d}{dt}[\vec{r}_2(t)]+\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)]\times\vec{r}_2(t)$$

اس لیے

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(t)] = \frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)]\times\vec{r}_2(t)+\vec{r}_1(t)\times\frac{d}{dt}[\vec{r}_2(t)]$$

نوٹ: کسی برداری تفاعل کی مستقل سمت ہونے کے ضروری اور کافی شرط $\vec{r}_1(t)\times\frac{d}{dt}\vec{r}_1(t) = 0$ ہے۔

کسی ذرہ کی رفتار(Velocity)اور اسراع(Acceleration): اگر کسی فضا میں کسی نقطہ P کا مقام بردار $\vec{r}$ ہے اور اگر $\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\hat{k}$ ایک برداری تفاعل ہو، تب نقطہ P پر وقت t میں رفتار $\frac{d\vec{r}}{dt}$ ہو گی اور اس کو ہم $\vec{v}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔اسی طرح ایک ذرہ کا کسی نقطہ P پر اسراع

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

اسراع کو $\vec{a}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال1۔ اگر $\vec{r}_1(t) = 5t^2\hat{\imath}+t\hat{\jmath}-t^3\hat{k}$ اور $\vec{r}_2(t) = \sin t\,\hat{\imath}-\cos t\,\hat{\jmath}$، تب حاصل کیجیے

(a $\frac{d(\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(t))}{\mathrm{dt}}$ (b $\frac{d(\vec{r}_1(t).\vec{r}_2(t))}{\mathrm{dt}}$

حل۔ دیا ہے $\vec{r}_1(t) = 5t^2\hat{\imath}+t\hat{\jmath}-t^3\hat{k}$ اور $\vec{r}_2(t) = \sin t\,\hat{\imath}-\cos t\,\hat{\jmath}$، تب

a) سب سے پہلے ہم $\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)$ حاصل کرتے ہیں

$$\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 5t^2 & t & -t^3 \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (-t^3 \cos t)\hat{\imath} - (t^3 \sin t)\hat{\jmath} - (5t^2 \cos t + t \sin t)\hat{k}$$

اس لیے

$$\frac{d\big(\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)\big)}{\mathrm{dt}} = \frac{d}{dt}\{(-t^3 \cos t)\hat{\imath} - (t^3 \sin t)\hat{\jmath} - (5t^2 \cos t + t \sin t)\hat{k}\}$$
$$= (t^3 \sin t - 3t^2 \cos t)\hat{\imath} - (t^3 \cos t + 3t^2 \sin t)\hat{\jmath}$$
$$-(-5t^2 \sin t + 10t \cos t + t \cos t$$
$$+ \sin t)\hat{k}$$
$$= (t^3 \sin t - 3t^2 \cos t)\hat{\imath} - (t^3 \cos t + 3t^2 \sin t)\hat{\jmath}$$
$$+(5t^2 \sin t - 11t \cos t$$
$$- \sin t)\hat{k}$$

b) سب سے پہلے ہم $\vec{r}_1(t).\vec{r}_2(t)$ حاصل کرتے ہیں

$$\vec{r}_1(t).\vec{r}_2(t) = 5t^2 \sin t - t \cos t$$

اب

$$\frac{d\big(\vec{r}_1(t).\vec{r}_2(t)\big)}{\mathrm{dt}} = \frac{d}{dt}(5t^2 \sin t - t \cos t)$$
$$= 5\frac{d}{dt}(t^2 \sin t) - \frac{d}{dt}(t \cos t)$$
$$= (5t^2 \cos t + 10t \sin t) - (-t \sin t + \cos t)$$
$$= 5t^2 \cos t + 11t \sin t - \cos t$$
$$= (5t^2 - 1)\cos t + 11t \sin t$$

مثال2- برداری تفاعل $\vec{r}(t) = t^3\hat{\imath} + e^t\hat{\jmath} - 7\cos(\pi t)\,\hat{k}$ کے لیے پہلا **مشتق** حاصل کیجیے۔

حل- دیا گیا برداری تفاعل ہے

$$\vec{r}(t) = t^3\hat{\imath} + e^t\hat{\jmath} - 7\cos(\pi t)\,\hat{k}$$

بالحاظ t تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}(t)] = \vec{r}'(t) = \frac{d}{dt}(t^3)\hat{\imath} + \frac{d}{dt}(e^t)\hat{\jmath} - \frac{d}{dt}\{7\cos(\pi t)\}\hat{k}$$
$$= 3t^2\hat{\imath} + e^t\hat{\jmath} + 7\pi \sin(\pi t)\,\hat{k}$$

مثال3۔ اگر $\vec{r}(t) = 3t\hat{\imath} - 15\sin(\pi t)\,\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ ہو تب $\vec{r}''(1)$ کی **قیمت معلوم** کیجیے۔

حل- دیا گیا ہے

$$\vec{r}(t) = 3t\hat{\imath} - 15\sin(\pi t)\,\hat{\jmath} + 3\hat{k}$$
$$\Rightarrow \quad \vec{r}'(t) = 3\hat{\imath} - 15\pi\, cos(\pi t)\,\hat{\jmath}$$
$$\Rightarrow \quad \vec{r}''(t) = 15\pi^2 \sin(\pi t)\,\hat{\jmath}$$
$$\Rightarrow \quad \vec{r}''(1) = 15\pi^2(0)\hat{\jmath} = 0$$

مثال4- اگر $\vec{r}(t) = 2|t|\hat{\imath} + \sin(t)\,\hat{\jmath} + (3-t)\hat{k}$ ہے تو بتائیے کہ t کی کن قیمتوں کے لیے $\vec{r}(t)$ تفرق پذیر ہے؟

حل- ہم جانتے ہیں کہ کوئی برداری تفاعل کسی نقطہ پر تفرق پذیر ہوتا ہے اگر اس کے اجزا تفاعل بھی اسی نقطہ پر تفرق پذیر ہوں۔اب دیے گئے برداری تفاعل $\vec{r}(t) = 2|t|\hat{\imath} + \sin(t)\,\hat{\jmath} + (3-t)\hat{k}$ سے ظاہر ہے کہ یہ t کیتمام قیمتوں کے لیے تفرق پذیر ہوتا، لیکن اس کا ایک جزو $|t|$ نقطہ $t = 0$ کے علاوہ تمام t کی قیمتوں کے لیے تفرق پذیر ہے۔اس لیے $\vec{r}(t)$ تمام t کی قیمتوں کے لیے تفرق پذیر ہے سوائے $t = 0$ کے۔

مثال5۔ برداری تفاعل $\vec{r}(t) = t^2\hat{\imath} + e^t\hat{\jmath} + (t^3+2)\hat{k}$ کے لیے $\vec{r}\,'(1)$ کی قیمت بتائیے۔

حل- دیا ہے

$$\vec{r}(t) = t^2\hat{\imath} + e^t\hat{\jmath} + (t^3+2)\hat{k}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}\,'(t) = 2t\hat{\imath} + e^t\hat{\jmath} + (3t^2+0)\hat{k}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}\,'(t) = 2t\hat{\imath} + e^t\hat{\jmath} + 3t^2\hat{k}$$

اب

$$\vec{r}\,'(1) = 2\hat{\imath} + e\hat{\jmath} + 3\hat{k}$$

مثال6۔ اگر $\vec{r}(t) = \vec{a}e^{kt}\hat{\imath} + \vec{b}e^{-kt}\hat{\jmath}$ ایک برداری تفاعل ہے، جہاں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ مستقل بردار ہیں۔ دکھائیے کہ

$$\vec{r}\,'' = k^2\vec{r}$$

حل۔ دیا ہے

$$\vec{r}(t) = \vec{a}e^{kt}\hat{\imath} + \vec{b}e^{-kt}\hat{\jmath}$$

بالحاظ t تفرق کرنے پر

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}\,'(t) = \vec{a}ke^{kt}\hat{\imath} - \vec{b}ke^{-kt}\hat{\jmath} \qquad \dots(1)$$

دوبارہ بالحاظ t تفرق کرنے پر

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{r}\,''(t) = \vec{a}k^2e^{kt}\hat{\imath} + \vec{b}k^2e^{-kt}\hat{\jmath} \qquad \dots(2)$$

اس سے ظاہر ہوتا ہے

$$\vec{r}\,'' = k^2\vec{r}$$

ثابت ہوا۔

1.5 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی کو مکمل کرنے کے بعد طالب علم نے بردار قدری تفاعل کی تعریف اور اس کی مختلف مثال سیکھ گئے ہوں گے اور وہ اس قابل ہو گئے ہوں گے کہ کسی دیے گیے برداری تفاعل کی انتہا اور تسلسل معلوم کر سکیں۔ نیز برداری تفاعل کی تفرق پذیری کی جانچ کرنا سیکھ گئے ہوں گے۔

1.6 کلیدی الفاظ(Keywords)

برداری تفاعل، تسلسل، مشتق، تفرق، انتہا، رفتار، اسراع

1.7 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

1.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. اگر $\vec{r}(t) = \vec{a}e^{kt}\hat{\imath} + \vec{b}e^{-kt}\hat{\jmath}$ ایک برداری تفاعل ہے، جہاں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ مستقل بردار ہیں، تب درجہ ذیل میں سے کون درست ہے

A. $\vec{r}'' = k^2\vec{r}$ B. $\vec{r}'' - \vec{r} = 0$ C. $\vec{r}' = k^2\vec{r}$ D. $\vec{r}'' = k\vec{r}$

2. برداری تفاعل $\vec{r}(t) = t^2\hat{\imath} + e^t\hat{\jmath} + (t^3+2)\hat{k}$ کے لیے $\vec{r}'$ کی قیمت بتائیے

A. $2t\hat{\imath} - e^t\hat{\jmath} + 3t^2\hat{k}$ B. $2t\hat{\imath} + e^t\hat{\jmath} + 3t^2\hat{k}$

C. $2t\hat{\imath} + e^t\hat{\jmath} - 3t^2\hat{k}$ D. $t\hat{\imath} + e^t\hat{\jmath} + 3t^2\hat{k}$

3. اگر $\vec{r}(t) = 3t\hat{\imath} - 15\sin(\pi t)\,\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ ہو تب $\vec{r}''(1)$ کی قیمت ----- ہے۔

A. $2\hat{\imath} - 3\,\hat{\jmath} + \hat{k}$ B. $-3\,\hat{\jmath} + \hat{k}$ C. 0 D. $2\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath} - \hat{k}$

1.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

1. اگر $\vec{r}(t) = \cos\omega t\,\hat{\imath} + \sin\omega t\,\hat{\jmath}$ ایک برداری تفاعل ہے، تب ثابت کیجیے کہ $\vec{r}'' = -\omega^2\vec{r}$

2. ایک ذرہ اس طرح گردش کرتا ہے کہ اس کا مقام بردار $\vec{r}(t) = \cos\omega t\,\hat{\imath} + \sin\omega t\,\hat{\jmath}$ ہو۔ تب ثابت کیجیے کہ $\vec{r}.\vec{v} = 0$، جہاں $\vec{v}$ اس ذرہ کی رفتار ہے۔

3. ایک ذرہ اس طرح گردش کرتا ہے کہ اس کا مقام بردار $\vec{r}(t) = (t-\sin t)\hat{\imath} + (1-\cos t)\hat{\jmath} + 4\sin\left(\frac{t}{2}\right)\hat{k}$ ہو۔ تب وقت t پر اس ذرہ کا اسراع اور رفتار محسوب کیجیے۔

1.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات(Long Answer Type Questions)

1. اگر $\vec{r}_1(t) = 3\hat{\imath} - t\hat{\jmath} + 5t^2\hat{k}$ اور $\vec{r}_2(t) = 3\hat{\imath} + 5t\,\hat{\jmath} - 3t^2\hat{k}$ دیے گیے ہیں، تب حاصل کیجیے۔

(i) $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$

(ii) $\vec{r}_1.\vec{r}_2$

2. اگر $\vec{r}_1(t) = \hat{\imath}\sin t + 3e^{-t}\hat{\jmath} - 3\cos t\,\hat{k}$ اور $\vec{r}_2(t) = 3t^2\hat{\imath} - (t+4)t\,\hat{\jmath} + (t^2-2t)\hat{k}$ تب $\frac{d}{dt}(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)$ حاصل کیجیے۔

اکائی 2۔ تفرقی عامل، گریڈینٹ

(Differential Operator, Gradient)

اکائی کے اجزا

2.0 تمہید

2.1 مقاصد

2.2 بنیادی تعریفات

2.3 تفرقی عامل

2.3.1 سمتی مشتقات

2.3.2 گریڈینٹ

2.4 اکتسابی نتائج

2.5 کلیدی الفاظ

2.6 نمونہ امتحانی سوالات

2.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

2.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

2.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

2.0 تمہید(Introduction)

پچھلی اکائی میں ہم برداری تفاعل کی تفصیلی جانکاری حاصل کر چکے ہیں۔ جہاں ہم نے برداری تفاعل کی انتہا، تسلسل اور تفرق کے بارے میں پڑھا۔ نیز اعلیٰ رتبوں کے مشتقات کی جانکاری حاصل کی اور تفرق کے الجبرا کے بارے میں پڑھا۔ اس اکائی میں ہم تفرقی عامل کے بارے میں پڑھیں گے۔ ساتھ ہی گریڈینٹ کی تعریف اور اس مختلف اطلاقات پر بحث کریں گے اور اس کے متعلق چند قضیوں کو ثابت کرنا سیکھیں گے اور مثالات کو ان کی مدد سے حل کریں گے۔

2.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے اختتام پر طلبا اس قابل ہو جائیں گے کہ تفرقی عامل کے بارے میں سمجھ سکیں۔ ساتھ ہی گریڈینٹ کی تعریف اور اس کے متعلق چند قضیوں کو ثابت کرنا سیکھ سکیں اور مثالات کو ان کی مدد سے حل کر سکیں۔

2.2 بنیادی تعریفات(Basic Definitions)

نقطہ میزانی تفاعل(Scalar Point Function): فرض کیجیے کہ S کسی فضا میں ایک دامنہ ہے، اگر ہر ایک نقطہ $P \in S$ سے ایک میزان f مطابقت رکھتا ہو تو f کو دامنہ S پر میزانی نقطہ تفاعل کہتے ہیں۔ جیسے:

a) کسی کمرہ میں کسی نقطہ پر درجہ حرارت(Temperature) ایک میزانی نقطہ تفاعل ہے۔

b) کسی دھات کی کثافت(Density)، کسی خاص نقطہ پر ایک میزانی نقطہ تفاعل ہے۔

c) کسی فضا میں ایک نقطہ پر کشش ثقل کی قوت(Gravitational Potential) ایک میزانی نقطہ تفاعل ہے۔

d) کسی سیال(Liquid) میں ایک نقطہ پر دباو(Pressure) ایک میزانی نقطہ تفاعل ہے۔

نقطہ برداری تفاعل(Vector Point Functions)

فرض کیجیے کہ S کسی فضا میں ایک دامنہ ہے، اگر ہر ایک نقطہ $P \in S$ سے ایک برداری تفاعل f مطابقت رکھتا ہو تو f کو دامنہ S پر برادری نقطہ تفاعل کہتے ہیں۔ جیسے:

a) فرض کیجیے کہ $v(t)$ کسی ذرہ کی خطہ R کے کسی نقطہ P پر رفتار ہے، تب v کو R میں ایک برداری نقطہ تفاعل کہتے ہیں۔

b) کسی میزانی نقطہ تفاعل کا گریڈینٹ ایک برداری نقطہ تفاعل ہے۔

c) فضا میں گردش کر رہے کسی شئے کے مختلف نقاط پر اسراع کو برداری نقطہ تفاعل کے طور پر ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

d) کسی مقناتیس(Magnate) یا کسی بجلی لے جانے والے تار(Current Carrying Wire) سے جاری ہونے والا مقناتیسی میدان(Magnetic Field) ایکبر داری نقطہ تفاعل ہے۔

نوٹ: میزانی نقطہ تفاعل کو نارمل حروف اور بر داری نقطہ تفاعل کو ان پر چھوٹا خط (یا بار) لگا کر ظاہر کریں گے۔

اگر کسی نقطہ $P(x, y, z)$ کا بالحاظ مبدا(Origin) مقام بر دار(Position Vector) r ہو تو

$$\bar{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

اور

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ڈیلٹا ہم سائگی(Delta Neighbourhood): فرض کیجیے کہ نقطہ P کسی فضا میں ہے اور $\delta > 0$ ایک مثبت عدد ہے۔ تب ان سبھی نقاط کا سٹ جن کے لیے فاصلہ $PQ < \delta$ ہو، نقطہ P کی ڈیلٹا-ہمسائگی کہتے ہیں۔ اگر نقطہ P کی ڈیلٹا-ہمسائگی میں سے ساخط کر دیا جائے تو اس کو خارج نقطہ P کی ڈیلٹا-ہمسائگی کہتے ہیں۔

انتہا(Limit): فرض کیجیے کہ f کسی نقطہ P کی خارج ہم سائگی پر متعرف ایک میزانی نقطہ تفاعل ہے اور فضا میں ہے اور فرض کیجیے کہ ایک عدد $l \in R$ ہے۔ اگر ہر ایک $\epsilon > 0$ کے لیے ایک مثبت عدد $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہو کہ

$$0 < QP < \delta \Rightarrow |f(Q) - l| < \epsilon$$

اس کو ہم اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں

$$\lim_{Q \to P} f = l$$

اسی طرح اگر g کسی نقطہ P کی خارج ہم سائگی پر متعرف ایک بر داری نقطہ تفاعل ہے اور $\overline{m}$ ایک بر دار ہے۔ اگر ہر ایک $\epsilon > 0$ کے لیے ایک مثبت عدد $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہو کہ

$$O < QP < \delta \Rightarrow |\overline{g}(Q) - \overline{m}| < \epsilon$$

اس کو ہم اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں

$$\lim_{Q \to P} \overline{g} = \overline{m}$$

تسلسل(Continuity)

مسلسل میزانی نقطہ تفاعل(Continuous Scalar Point Function): فرض کیجیے کہ f کسی نقطہ P کی ہم سائگی پر متعرف ایک میزانی نقطہ تفاعل ہے۔ اگر ہر ایک $\epsilon > 0$ کے لیے ایک مثبت عدد $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہو کہ

$$0 < QP < \delta \Rightarrow |f(Q) - f(P)| < \epsilon$$

اگر ہر ایک $0 > \epsilon$ کے لیے ایک مثبت عدد $0 > \delta$ اس طرح وجود رکھتا ہو کہ

$$0 < QP < \delta \Rightarrow |f(Q) - l| < \epsilon$$

تب ہم کہتے ہیں کہ f مسلسل تفاعل ہے۔

مسلسل برداری نقطہ تفاعل (Continuous Vector Point Function): فرض کیجیے کہ $\bar{g}$ کسی نقطہ P کی ہم سائگی پر متعرف ایک میزانی نقطہ تفاعل ہے۔ اگر ہر ایک $o > \epsilon$ کے لیے ایک مثبت عدد $0 > \delta$ اس طرح وجود رکھتا ہو کہ

$$0 < QP < \delta \Rightarrow |\bar{g}(Q) - \bar{g}(P)| < \epsilon$$

تب ہم کہتے ہیں کہ $\bar{g}$ مسلسل برداری تفاعل ہے۔

2.3 تفرقی عامل (Differential Operators)

2.3.1 سمتی مشتقات (Directional Derivatives)

میزانی نقطہ تفاعل کا سمتی مشتق (Directional Derivative of Scalar Point Function): فرض کیجیے کہ نقطہ P کسی فضا میں ہے اور A اکائی برادر e کی سمت میں نقطہ P سے ہو کر گزرنے والی ایک شعاع (Ray) ہے۔ فرض کیجیے کہ P کی ہم سائگی D میں ایک میزانی نقطہ تفاعل f ہے۔ مان لیجیے کہ نقطہ Q نقطہ P سے مختلف ہے اور $Q \in A \cap D$ ہے۔

اگر انتہا

$$\lim_{Q \to P} \frac{f(Q) - f(P)}{QP}$$

وجود رکھتی ہو تو یہ انتہا f کی نقطہ P پر اکائی برادر e کی سمت میں سمتی مشتق کہلاتی ہے۔ اس کو $\frac{\partial f}{\partial s}$ سے ظاہر کرتے ہیں، جہاں $S = PQ$ ہے۔

برداری نقطہ تفاعل کا سمتی مشتق (Directional Derivative of Vector Point Function): فرض کیجیے کہ نقطہ P کسی فضا میں ہے اور D اکائی برادر e کی سمت میں نقطہ P سے ہو کر گزرنے والی ایک شعاع (Ray) ہے۔ فرض کیجیے کہ P کی ہم سائگی D میں ایک برداری نقطہ تفاعل f ہے۔ مان لیجیے کہ نقطہ Q نقطہ P سے مختلف ہے اور $Q \in A \cap D$ ہے۔

اگر انتہا

$$\lim_{Q \to P} \frac{\bar{f}(Q) - \bar{f}(P)}{QP}$$

وجود رکھتی ہو تو یہ انتہا f کی نقطہ P پر اکائی بر ادر e کی سمت میں سمتی مشتق کہلاتی ہے۔اس کو $\frac{\partial \bar{f}}{\partial s}$ یا $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{e}}$ سے ظاہر کرتے ہیں، جہاں $S = PQ$ ہے۔

نوٹ:

(1) $x-$ محور کی سمت میں اکائی بردار $\hat{\imath}$، $y-$ محور کی سمت میں اکائی بردار $\hat{\jmath}$ اور $z-$ محور کی سمت میں اکائی بردار $\hat{k}$ ہیں۔

(2) اگر $\vec{r}_1(t)$ اور $\vec{r}_2(t)$ کسی وقفہ I میں دو تفرق پذیر برداری تفاعل ہوں جن کے اکائی بردار e کی سمت میں نقطہ P پر سمتی مشتقات ہیں۔

اور f ایک تفرق پذیر میزانی تفاعل ہو اور مان لیجیے کہ a اور b مستقلات (Constants) ہیں تب درجہ ذیل درست ہیں:

a) $\frac{\partial}{\partial t}[a\vec{r}_1(t)] = a\frac{\partial}{\partial t}[\vec{r}_1(t)]$

b) $\frac{\partial}{\partial t}[\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t)] = \frac{\partial}{\partial t}[\vec{r}_1(t)] \pm \frac{\partial}{\partial t}[\vec{r}_2(t)]$

c) $\frac{\partial}{\partial t}[a\vec{r}_1(t) + b\vec{r}_2(t)] = a\frac{\partial}{\partial t}[\vec{r}_1(t)] + b\frac{\partial}{\partial t}[\vec{r}_2(t)]$

d) $\frac{\partial}{\partial t}[f(t)\vec{r}_1(t)] = f(t)\frac{\partial}{\partial t}[\vec{r}_1(t)] + \frac{\partial}{\partial t}[f(t)]\vec{r}_1(t)$

e) $\frac{\partial}{\partial t}[\vec{r}_1(t).\vec{r}_2(t)] = \frac{\partial}{\partial t}[\vec{r}_1(t)].\vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t).\frac{\partial}{\partial t}[\vec{r}_2(t)]$

f) $\frac{\partial}{\partial t}[\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)] = \frac{\partial}{\partial t}[\vec{r}_1(t)] \times \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \times \frac{\partial}{\partial t}[\vec{r}_2(t)]$

2.3.2 گریڈینٹ (Gradient)

کسی میزانی نقطہ تفاعل کا گریڈینٹ (Gradient of a Scalar Point Function)

فرض کیجیے کہ f ایک میزانی نقطہ تفاعل ہے جس کے سمتی مشتقات اکائی برداروں $\hat{\imath}$، $\hat{\jmath}$، $\hat{k}$ کی سمت میں بالترتیب $\frac{\partial f}{\partial x}$، $\frac{\partial f}{\partial y}$، $\frac{\partial f}{\partial z}$ ہیں۔تب برداری تفاعل کے گریڈینٹ کو $grad f$ یا ∇f سے ظاہر کرتے ہیں جو درجہ ذیل طریقہ سے متعرف ہے

$$grad\ f = \nabla f = \imath\frac{\partial f}{\partial x} + \jmath\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z}$$

اب اگر

$$\bar{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

$$\Rightarrow d\bar{r} = (dx)\hat{\imath} + (dy)\hat{\jmath} + (dz)\hat{k}$$

اگر f ایک میزانی نقطہ تفاعل ہو تو

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$= \left(\hat{\imath}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot \left(\hat{\imath}dx + \hat{\jmath}dy + \hat{k}dz\right)$$

$$= \nabla f \cdot dr$$

گریڈینٹ کاالجبرا(Algebra of Gradient): اگر f_1 اور f_2 دو میزانی نقطہ تفاعل ہیں اور a کوئی مستقل ہے، تب

a) $\nabla(f_1 \pm f_2) = \nabla f_1 \pm \nabla f_2$

b) $\nabla(f_1 f_2) = f_1(\nabla f_2) + (\nabla f_1) f_2$

c) $\nabla(a f_1) = a \nabla f_1$

ثبوت۔

(a
$$\nabla(f_1 \pm f_2) = \hat{\imath}\frac{\partial(f_1 \pm f_2)}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial(f_1 \pm f_2)}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial(f_1 \pm f_2)}{\partial z}$$

$$= \left(\hat{\imath}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial f_1}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial f_1}{\partial z}\right) \pm \left(\hat{\imath}\frac{\partial f_2}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial f_2}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)$$

$$= \nabla f_1 \pm \nabla f_2$$

(b
$$\nabla(f_1 f_2) = \hat{\imath}\frac{\partial(f_1 f_2)}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial(f_1 f_2)}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial(f_1 f_2)}{\partial z}$$

$$= \hat{\imath}\left\{f_1\frac{\partial(f_2)}{\partial x} + \frac{\partial(f_1)}{\partial x}f_2\right\} + \hat{\jmath}\left\{f_1\frac{\partial(f_2)}{\partial y} + \frac{\partial(f_1)}{\partial y}f_2\right\} + \hat{k}\left\{f_1\frac{\partial(f_2)}{\partial z} + \frac{\partial(f_1)}{\partial z}f_2\right\}$$

$$= \left\{\hat{\imath}f_1\frac{\partial(f_2)}{\partial x} + \hat{\jmath}f_1\frac{\partial(f_2)}{\partial y} + \hat{k}f_1\frac{\partial(f_2)}{\partial z}\right\} + \left\{+\hat{\imath}\frac{\partial(f_1)}{\partial x}f_2 + \hat{\jmath}\frac{\partial(f_1)}{\partial y}f_2 + \hat{k}\frac{\partial(f_1)}{\partial z}f_2\right\}$$

$$= f_1\left\{\hat{\imath}\frac{\partial f_2}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial f_2}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial f_2}{\partial z}\right\} + \left\{+\hat{\imath}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial f_1}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial f_1}{\partial z}\right\}f_2$$

$$= f_1(\nabla f_2) + (\nabla f_1)f_2$$

(c
$$\nabla(a f_1) = \hat{\imath}\frac{\partial(a f_1)}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial(a f_1)}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial(a f_1)}{\partial z}$$

$$= a\left\{\hat{\imath}\frac{\partial(f_1)}{\partial x}\right\} + a\left\{\hat{\jmath}\frac{\partial(f_1)}{\partial y}\right\} + a\left\{\hat{k}\frac{\partial(f_1)}{\partial z}\right\}$$

$$= a\left\{\hat{\imath}\frac{\partial(f_1)}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial(f_1)}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial(f_1)}{\partial z}\right\}$$

$$= a \nabla f_1$$

مسطہ سطح(Level Surface): فرض کیجیے کہ f ایک میزانی نقطہ تفاعل ہے اور c کوئی حقیقی عدد ہے۔ اگر ایک نقطہ S $P \in$ اس طرح سے وجود رکھتا ہے کہ $f(P) = c$ ہو، تب S کو مسطہ سطح کہتے ہیں۔ c کی مختلف اقدار کے لیے، f سہ البعدی فضا میں مسطہ سطح کا ایک خاندان

تشکیل دیتا ہے۔ اگر کہ f ایک میزانی نقطہ تفاعل ہو اور Q کوئی دیا گیا نقطہ ہے، تب اگر ایک نقطہ $P \in S$ اس طرح سے وجود رکھتا ہے کہ $f(P) = c = f(Q)$ ہو، تب S کو نقطہ Q میں مسطح سطح کہتے ہیں۔

کسی سطح پر اکائی نارمل بردار (Unit normal vector to the surface)

فرض کیجیے کہ $f(x, y, z)$ ایک میزانی تفاعل ہے، تب $f(x, y, z) = c$ ایک سطح کو ظاہر کرتا ہے اور اس سطح پر اکائی نارمل بردار n اس طرح سے حاصل ہوگا

$$n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

قضیہ 1۔ کسی میزان f کا نقطہ $P(x, y, z)$ پر اکائی بردار $\bar{e}$ کی سمت میں سمتی مشتق $\nabla f . e$ ہوتا ہے۔

ثبوت: ہم جانتے ہیں کہ

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{ds}$$

$$= \left(\hat{\imath}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot \left(\hat{\imath}\frac{dx}{ds} + \hat{\jmath}\frac{dy}{ds} + \hat{k}\frac{dz}{ds}\right)$$

$$= \nabla f \cdot \bar{e}$$

جو کہ میزان f کا اکائی بردار $\bar{e}$ کی سمت میں سمتی مشتق ہے۔

قضیہ 2۔ مان لیجیے کہ $f(x, y, z) = c$ مسطح سطح ہے، جہاں c کوئی مستقل ہے، تب بردار ∇f مسطح سطح پر نارمل (Normal) ہوتا ہے۔

ثبوت: فرض کیجیے کہ $P(x, y, z)$ کسی سطح پر ایک نقطہ ہے اور اس پر $\bar{t}$ ایک اکائی مماسی بردار ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ $P(x, y, z)$ کا مقام بردار ہے

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} = \hat{\imath}\frac{\partial x}{\partial s} + \hat{\jmath}\frac{\partial y}{\partial s} + \hat{k}\frac{\partial z}{\partial s} = \bar{t}$$

اب

$$f(x, y, z) = c$$
$$\frac{df}{ds} = 0$$

لیکن

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\therefore \left(\hat{\imath}\frac{\partial f}{\partial x}+\hat{\jmath}\frac{\partial f}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right)\cdot\left(\hat{\imath}\frac{\partial x}{\partial s}+\hat{\jmath}\frac{\partial y}{\partial s}+\hat{k}\frac{\partial z}{\partial s}\right)=0$$

$$\nabla f\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial s}=0$$

جس سے ظاہر کہ ∇f مماسی مستوی پر عمودی ہے، یعنی ∇f مسطح سطح پر نارمل ہے۔

قضیہ 3۔ اگر اکائی بردار $\bar{n}$ مسطح سطح $f(x,y,z)=c$ کے نقطہ $P(x,y,z)$ پر f کی بڑھتی ہوئی سمت میں نارمل ہے، جہاں c کوئی مستقل ہے۔ تب

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial\bar{n}}\bar{n}$$

ثبوت: چوں کہ ∇f مسطح سطح پر نارمل ہے اور l کوئی میزانیہ ہے اس طرح سے کہ

$$\nabla f=l\bar{n}$$

تب f کا n کی سمت میں سمتی مشتق

$$\frac{\partial f}{\partial\bar{n}}=\nabla f.\bar{n}$$

$$=l\bar{n}.\bar{n}$$

$$=l(\bar{n}.\bar{n})=l$$ [چوں کہ $\bar{n}$ ایک اکائی بردار ہے]

اس لیے

$$f=ln=\frac{\partial f}{\partial n}n$$

نوٹ 1: ∇f کی مطلق قدر $|\nabla f|=l=\frac{\partial f}{\partial\bar{n}}$

قضیہ 4۔ ∇f اس سمت میں ایک بردار ہوتا ہے جس میں $\frac{\partial f}{\partial s}$ کی اعظم ترین قدر وجود رکھتی ہے۔

ثبوت: کسی تفاعل f کا نقطہ $P(x,y,z)$ پر اکائی بردار $\bar{e}$ کی سمت میں سمتی مشتق $\nabla f.\bar{e}$ ہوتا ہے، یعنی

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\nabla f.\bar{e}=\left(\frac{\partial f}{\partial\bar{n}}\bar{n}\right).\bar{e}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial\bar{n}}(\bar{n}.\bar{e})$$

جہاں n کسی سطح کے نقطہ P پر اکائی نارمل بردار ہے۔ اس لیے

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial \bar{n}} cos(\bar{e}, \bar{n})$$

تفاعل f کا نقطہ $P(x,y,z)$ پر اکائی بردار $\bar{e}$ کی سمت میں سمتی مشتق $\frac{\partial f}{\partial s}$ اعظم ترین ہوگا اگر n اور e کے درمیان زاویہ صفر ہو۔اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ e بردار n کے متوازی ہے۔

اس لیے سمتی مشتق سطح پر نارمل کے ساتھ اعظم ترین ہوگا۔

کسی سطح کے کسی نقطہ پر مماسی مستوی اور نارمل (Tangent plane and Normal to the surface)

فرض کیجیے کہ $f(x,y,z)$ ایک میزانی تفاعل ہے اور $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ہے، تب $f(x,y,z) = c$ ایک سطح ہے اور اس سطح کے نقطہ a پر مماس مستوی اور نارمل خط کی مساوات بالترتیب درجہ ذیل طرح سے حاصل ہوں گی

$$(\vec{r} - \bar{a}) \cdot \nabla f = 0$$ مماس مستوی

$$(\vec{r} - \bar{a}) \times \nabla f = 0$$ نارمل خط

مثال 1۔ اگر $f = x + y + z$، $g = x^2 + y^2 + z^2$ اور $h = xy + yz + zx$ تب ثابت کرو کہ

$$[\nabla f, \nabla g, \nabla h] = 0$$

حل۔ دیا ہے

$$f = x + y + z$$
$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 1, \frac{\partial f}{\partial y} = 1, \frac{\partial f}{\partial z} = 1$$

$$\therefore \nabla f = \hat{\imath}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial f}{\partial z} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$$

اسی طرح

$$g = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = 2x, \frac{\partial g}{\partial y} = 2y, \frac{\partial g}{\partial z} = 2z$$

$$\therefore \nabla g = \hat{\imath}\frac{\partial g}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial g}{\partial z} = 2x\hat{\imath} + 2y\hat{\jmath} + 2z\hat{k}$$

اور

$$h = xy + yz + zx$$

$$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x} = y + z, \frac{\partial h}{\partial y} = z + x, \frac{\partial h}{\partial z} = x + y$$

$$\therefore \nabla h = \hat{\imath}\frac{\partial h}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial h}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial h}{\partial z} = (y+z)\hat{\imath} + (z+x)\hat{\jmath} + (x+y)\hat{k}$$

اس لیے

$$[\nabla f, \nabla g, \nabla h] = \left(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}\right) \cdot \left\{\left(2x\hat{\imath} + 2y\hat{\jmath} + 2z\hat{k}\right) \times \left((y+z)\hat{\imath} + (z+x)\hat{\jmath} + (x+y)\hat{k}\right)\right\}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 0$$

مثال2۔ اگر $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ ہو تب دکھایئے کہ (a) $\nabla\ r\ = \frac{\vec{r}}{r}$ (b) $\nabla\ \frac{1}{r}\ = -\frac{\vec{r}}{r^3}$

حل۔ (a) دیا ہے

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

$$\Rightarrow r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\Rightarrow r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\Rightarrow 2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x, 2r\frac{\partial r}{\partial y} = 2y, 2r\ \frac{\partial r}{\partial z} = 2z$$

$$\Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

$$\therefore \nabla r = \hat{\imath}\frac{\partial r}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial r}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial r}{\partial z}$$

$$= \left(\frac{x}{r}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{y}{r}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{z}{r}\right)\hat{k}$$

$$= \frac{1}{r}\left(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}\right)$$

$$= \frac{\vec{r}}{r}$$

(b) اسی طرح

$$\nabla(r^n) = \left(nr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial x}\right)\hat{\imath} + \left(nr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial y}\right)\hat{\jmath} + \left(nr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial z}\right)\hat{k}$$

$$= nr^{n-1}\left\{\left(\frac{x}{r}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{y}{r}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{z}{r}\right)\hat{k}\right\}$$

$$= nr^{n-1}\left(\frac{1}{r}\right)\left(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}\right)$$

$$= nr^{n-1}\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\therefore \nabla(r^n) = nr^{n-2}\vec{r}$$

$n = -1$ درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{r}{r^3}$$

مثال3۔ اگر $f = 4xz^2 + x^2yz$ ہو، تب f کا نقطہ $(1, -2, -1)$ پر $2\imath - \jmath - 2k$ کی سمت میں سمتی مشتق حاصل کیجیے۔

حل۔ دیا ہے

$$f = 4xz^2 + x^2yz$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 2xyz + 4z^2, \frac{\partial f}{\partial y} = x^2z, \frac{\partial f}{\partial z} = x^2y + 8xz$$

$$\therefore grad\ f = \nabla f = \hat{\imath}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$= (2xyz + 4z^2)\hat{\imath} + (x^2z)\hat{\jmath} + (x^2y + 8xz)\hat{k}$$

نقطہ $(1, -2, -1)$ پر

$$\nabla f = \ 4 + 4\ \ i + \ -1\ \ j + \ -2 - 8\ \ k$$

$$= 8\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 10\hat{k}$$

دیا ہے $\vec{a} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 2\hat{k}$ تب

$$a = |a| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$$

اب f کا نقطہ $(1, -2, -1)$ پر $\vec{a}$ کی سمت میں سمتی مشتق $= \frac{\nabla f \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|}$

$$\frac{(8\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 10\hat{k}) \cdot (2\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 2\hat{k})}{3} =$$

$$\frac{1}{3}(16 + 1 + 20) =$$

$$\frac{37}{3} =$$

مثال4۔ نقطہ $(-1,1,2)$ سے کس سمت میں $f = xy^2z^3$ کا سمتی مشتق اعظم ترین ہوگا؟

حل۔ (a) دیا ہے

$$f = xy^2z^3$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = y^2z^3, \frac{\partial f}{\partial y} = 2xyz^3, \frac{\partial f}{\partial z} = 3xy^2z^2$$

$$\therefore grad\ f = \nabla f = \hat{\imath}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$= (y^2z^3)\hat{\imath} + (2xyz^3)\hat{\jmath} + (3xy^2z^2)\hat{k}$$

نقطہ $(-1,1,2)$ پر

$$\nabla f = (8)\hat{\imath} + (-16)\hat{\jmath} + (-12)\hat{k}$$

$$= 8\hat{\imath} - 16\hat{\jmath} - 12\hat{k}$$

$f = xy^2z^3$ کا سمتی مشتق ∇f کی سمت میں اعظم ترین ہوتا ہے۔ اس لیے

مثال5۔ سطح $xyz = 4$ کے نقطہ $\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ پر مماس مستوی اور نارمل خط حاصل کیجیے۔

حل۔ دیا ہے

$$f = xyz - 4$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = yz, \frac{\partial f}{\partial y} = xz, \frac{\partial f}{\partial z} = xy$$

$$\therefore grad\ f = \nabla f = \hat{\imath}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$= (yz)\hat{\imath} + (xz)\hat{\jmath} + (xy)\hat{k}$$

نقطہ $(1,2,2)$ پر

$$\nabla f = \ 4 \ i + \ \ 2 \ j + \ \ 2 \ k$$

$$= 4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$$

نقطہ $\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ پر مماس مستوی

$$(\vec{r} - \bar{a}) \cdot \nabla f = 0$$

$$\Rightarrow \left\{\left(xi + yj + zk\right) - \left(i + 2j + 2k\right)\right\} \cdot \left(4i + 2j + 2k\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left((x-1)i + \ \ y - 2 \ j + \ \ z - 2 \ k\right) \cdot \left(4i + 2j + 2k\right) = 0$$

$$\Rightarrow 4 \ x - 1 \ \ + 2 \ y - 2 \ \ + 2 \ z - 2 \ \ = 0$$

$$\Rightarrow 4x + 2y + 2z - 12 = 0$$

$$\Rightarrow 2x + y + z = 6$$

جو کہ ضروری مماس مستوی کی مساوات ہے۔

نقطہ $\imath + 2\jmath + 2k$ پر نارمل خط

$$(\vec{r} - \bar{a}) \times \nabla f = 0$$

$$\Rightarrow \left\{\left(x\imath + y\jmath + zk\right) - \left(\imath + 2\jmath + 2k\right)\right\} \times \left(4\imath + 2\jmath + 2k\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left((x-1)\imath + \ \ y - 2 \ \jmath + \ \ z - 2 \ k\right) \times \left(4\imath + 2\jmath + 2k\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \imath & \jmath & k \\ x-1 & y-2 & z-2 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow [2(y-2) - 2(z-2)]\hat{\imath} - [2(x-1) - 4(z-2)]\hat{\jmath} + [2(x-1) - 4(y-2)]\hat{k} = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

$$\therefore \begin{cases} 2 \ y-2 \ \ -2 \ z-2 \ \ = 0 \\ 2 \ x-1 \ \ -4 \ z-2 \ \ = 0 \\ 2 \ x-1 \ \ -4 \ y-2 \ \ = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y-2 &= z-2\ , \\ \dfrac{x-1}{2} &= z-2\ , \\ \dfrac{x-1}{2} &= y-2 \end{cases}$$

اس لیے تینوں مساوات مدد سے

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{1}$$

جو کہ ضروری نارمل خط کی مساوات ہے۔

2.4 اکتسابی نتائج(Learning Outcomes)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہو گئے ہوں گے کہ میزانی نقطہ تفاعل، برادری نقطہ تفاعل، سمتی مشتق کی تعریف کو سمجھ سکیں۔ نیز چند قضیوں اور مثالات کو ان کی مدد سے حل کر سکیں۔

2.5 کلیدی الفاظ(Keywords)

میزانی نقطہ تفاعل، برادری نقطہ تفاعل، سمتی مشتق

2.6 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

2.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. میزانی نقطہ تفاعل کی تعریف کیجیے۔
2. بر داری نقطہ تفاعل کی تعریف کیجیے۔
3. سمتی مشتق کی تعریف کیجیے۔
4. میزانی نقطہ تفاعل کی انتہا کی تعریف کیجیے۔
5. بر داری نقطہ تفاعل کیانتہا کی تعریف کیجیے۔
6. میزانی نقطہ تفاعل کے گریڈ یئنٹکی تعریف کیجیے۔
7. بر داری نقطہ تفاعل کے گریڈ ینٹ کی تعریف کیجیے۔
8. مسلسل میزانی نقطہ تفاعل کی تعریف کیجیے۔

9. مسلسل برداری نقطہ تفاعل کی تعریف کیجیے۔

10. کسی نقطہ پر ڈیلٹا -ہمسا گی کی تعریف کیجیے۔

11. کسی سطح پر مماس مستوی کی تعریف کیجیے۔

12. کسی سطح پر نارمل خط کی تعریف کیجیے۔

2.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1 اگر $f_1 = x + y + z$، $f_2 = x^2 + y^2 + z^2$ اور $f_3 = xy + yz + zx$ تب ثابت کرو کہ

$$[\nabla f_1, \nabla f_2, \nabla f_3] = 0$$

2 اگر $f = x^3 + y^3 + 3xyz$ ہو، تب نقطہ (1,1, −2) پر ∇f معلوم کیجیے۔

2.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1 اگر $r = x\imath + y\jmath + zk$ ہو تب دکھایئے کہ (a) $\nabla\ r\ = \frac{r}{r}$ (b) $\nabla\ \frac{1}{r}\ = -\frac{r}{r^3}$

2 اگر $f = xy + yz + zx$ ہو، تب f کا نقطہ (1,2,0) پر $\imath + 2\jmath + 2k$ کی سمت میں سمتی مشتق حاصل کیجیے۔ اس کی اعظم ترین قدر بھی حاصل کیجیے۔

3 اگر $f = xy^2 + yz^3$ ہو، تب f کا نقطہ (2, −1,1) پر $\imath + 2\jmath + 2k$ کی سمت میں سمتی مشتق حاصل کیجیے۔

4 سطح $2xz^2 - 3xy - 4x = 7$ کے نقطہ $\imath - \jmath + 2k$ پر مماس مستوی اور نارمل خط حاصل کیجیے۔

5 سطح $xz^2 + x^2y = z - 1$ کے نقطہ $\imath - 3\jmath + 2k$ پر مماس مستوی اور نارمل خط حاصل کیجیے۔

اکائی 3۔ بردار کا ڈائیور جینس اور کرل

(Divergence and curl of a Vector)

اکائی کے اجزا

3.0 تمہید

3.1 مقاصد

3.2 بردار کا ڈائیور جینس اور کرل

3.3 اکتسابی نتائج

3.4 کلیدی الفاظ

3.5 نمونہ امتحانی سوالات

3.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

3.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

3.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

3.0 تمہید(Introduction)

پچھلی اکائی میں کسی میزانی نقطہ تفاعل کے گریڈیئنٹ کے بارے میں معلومات حاصل کی۔اس اکائی میں ہم برداری تفاعل کے کرل اور ڈائور جینس کی جانکاری حاصل کریں گے۔اوران کے متعلق چند قضیوں اور مثالات کو حل کرنا سیکھیں گے۔ ڈائور جینس برداری علم احصا میں اس شرح کو بیان کرتا ہے جس پر ایک برداری فیلڈ کسی نقطہ پر پھیلتا یا سکڑتا ہے۔ حقیقی زندگی میں، یہ تصور کیا جا سکتا ہے کہ کسی علاقے سے باہر یا اس میں کتنا سیال بہتا ہے، موسم کے نمونوں، پائپوں میں سیال کا بہاؤ، اور برقی مقناطیسیت جیسے مظاہر کو متاثر کرتا ہے۔ڈائور جینس ایک عامل ہے جو کہ کسی برداری تفاعل پر لاگو ہوتا ہے جس سے ہمیں ایک میزانی قدر حاصل ہوتی ہے۔اگر دیا گیا تفاعل ایک میزانی نقطہ تفاعل ہے، تب اس کے ڈائور جینس کا کوئی مطلب نہیں رہتا ہے۔

طبیعیات میں، کرل(curl) کا ریاضیاتی تصور برداری فیلڈ کی گردش کو بیان کرتا ہے۔جب کسی سیال کے بہاؤ کے میں کسی شے کو رکھا جاتا ہے تو اس کا کرل(curl) یہ بتاتا ہے کہ شے کیسے گھومتی ہے، یا مقناطیسی فیلڈز کرنٹ لے جانے والے تار کے گرد کیسے برتاؤ کرتا ہے۔ہوائی جہاز کے پنکھ کی شکل اس کے ارد گرد ہوا کے بہاؤ میں ایک کرل پیدا کرنے کے لیے بنائی جاتی ہے۔یہ کرل لفٹ بناتا ہے، یہ وہ قوت ہے جو ہوائی جہاز کو ہوا میں رہنے کی اجازت دیتی ہے۔

3.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے اختتام پر طلبا اس قابل ہو جائیں گے کہ برداری تفاعل کے کرل اور ڈائور جینس کی تعریفات کو سمجھ کر ان پر چند قضیوں کے ثبوت پیش کر سکیں اور مثالات کو حل کر سکیں۔

3.2 بردار کا ڈائور جینس اور کرل(Divergence and curl of a Vector)

کسی بردار کا ڈائور جینس(Divergence of a Vector): فرض کیجیے کہ f ایک مسلسل تفرق پذیر برداری نقطہ تفاعل ہے، تب f کے ڈائور جینس کو $div\ \vec{f}$ سے ظاہر کرتے ہیں اور اس کا ضابطہ درجہ ذیل ہے

$$div\ f = \nabla . f = \imath . \frac{\partial f}{\partial x} + \jmath . \frac{\partial f}{\partial y} + k . \frac{\partial f}{\partial z} = \left(\imath \frac{\partial}{\partial x} + \jmath \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) . f$$

اگر $f = f_1 \imath + f_2 \jmath + f_3 k$ ہو، تب

$$div\ f = \nabla.\ f = \imath.\frac{\partial f}{\partial x} + \jmath.\frac{\partial f}{\partial y} + k.\frac{\partial \vec{f}}{\partial z}$$

$$= \imath.\left(\imath\frac{\partial f_1}{\partial x} + \jmath\frac{\partial f_2}{\partial x} + k\frac{\partial f_3}{\partial x}\right) + \jmath.\left(\imath\frac{\partial f_1}{\partial y} + \jmath\frac{\partial f_2}{\partial y} + k\frac{\partial f_3}{\partial y}\right) + k.\left(\imath\frac{\partial f_1}{\partial z} + \jmath\frac{\partial f_2}{\partial z} + k\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

لاپلاثین عامل(Laplacian Operator): لاپلاس ین عامل جسے ∇^2 سے ظاہر کیا جاتا ہے، ایک تفرقی عامل ہے جو کسی فیلڈ کے گھماؤ کی تبدیلی کی شرح کو ماپتا ہے۔ فرض کیجیے کہ ایک برداری نقطہ تفاعل f ہے، تب f کے گریڈینٹ کا ڈائور جینس سے لاپلاس ین عامل کی تعریف ہوتی ہے۔

$$\nabla^2 f = div\ \ grad\ f\ \ = \nabla.\ \nabla f$$

$$= \sum \imath.\frac{\partial}{\partial x}\left(\imath\frac{\partial f}{\partial x} + \jmath\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$= \imath.\frac{\partial}{\partial x}\left(\imath\frac{\partial f}{\partial x} + \jmath\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \jmath.\frac{\partial}{\partial y}\left(\imath\frac{\partial f}{\partial x} + \jmath\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z}\right) + k.\frac{\partial}{\partial z}\left(\imath\frac{\partial f}{\partial x} + \jmath\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \qquad [\because \imath.\imath = \jmath.\jmath = k.k = 1]$$

نوٹ: مساوات $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$ کو لاپلاس ین مساوات کہتے ہیں۔

سولے نائڈل بردار(Solenoidal Vector): فرض کیجیے کہ ایک برداری نقطہ تفاعل f ہے، تب f کو سولے نائڈل بردار کہتے ہیں اگر

$$div\ f = \nabla.\ f = 0$$

کسی بردار کا کرل(Curl of a Vector): فرض کیجیے کہ f ایک مسلسل تفرق پذیر برداری نقطہ تفاعل ہے، تب f کے کرل کو $\nabla \times \vec{f}$ یا $curl\ f$ سے ظاہر کرتے ہیں اور اس کا ضابطہ درجہ ذیل ہے

$$curl\ f = \imath \times \frac{\partial f}{\partial x} + \jmath \times \frac{\partial f}{\partial y} + k \times \frac{\partial f}{\partial z} = \left(\imath\frac{\partial}{\partial x} + \jmath\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right) \times f$$

$$= \left(\imath \frac{\partial}{\partial x} + \jmath \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}\right) \times f = \nabla \times f$$

اگر $f = f_1\imath + f_2\jmath + f_3k$ ایک تفرق پذیر برداری نقطہ تفاعل ہو، تب

$$curl\ f = \nabla \times f = \imath \times \frac{\partial f}{\partial x} + \jmath \times \frac{\partial f}{\partial y} + k \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial z}$$

$$= \imath \times \left(\imath \frac{\partial f_1}{\partial x} + \jmath \frac{\partial f_2}{\partial x} + k \frac{\partial f_3}{\partial x}\right) + \jmath \times \left(\imath \frac{\partial f_1}{\partial y} + \jmath \frac{\partial f_2}{\partial y} + k \frac{\partial f_3}{\partial y}\right) + k \times \left(\imath \frac{\partial f_1}{\partial z} + \jmath \frac{\partial f_2}{\partial z} + k \frac{\partial f_3}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\hat{\imath} \times \hat{\imath} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \hat{\imath} \times \hat{\jmath} \frac{\partial f_2}{\partial x} + \hat{\imath} \times \hat{k} \frac{\partial f_3}{\partial x}\right) + \left(\hat{\jmath} \times \hat{\imath} \frac{\partial f_1}{\partial y} + \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} \frac{\partial f_2}{\partial y} + \hat{\jmath} \times \hat{k} \frac{\partial f_3}{\partial y}\right) + \left(\hat{k} \times \hat{\imath} \frac{\partial f_1}{\partial z} + \hat{k} \times \hat{\jmath} \frac{\partial f_2}{\partial z} + \hat{k} \times \hat{k} \frac{\partial f_3}{\partial z}\right)$$

چوں کہ $\imath \times \imath = \jmath \times \jmath = k \times k = 0$ اور $\imath \times \jmath = k, \jmath \times k = \imath, k \times \imath = \jmath$

اس کے علاوہ $\imath \times k = -\jmath, \jmath \times \imath = -k, k \times \jmath = -\imath$ تب

$$curl\ f = \left(k \frac{\partial f_2}{\partial x} - \jmath \frac{\partial f_3}{\partial x}\right) + \left(-k \frac{\partial f_1}{\partial y} + \imath \frac{\partial f_3}{\partial y}\right) + \left(\jmath \frac{\partial f_1}{\partial z} - \imath \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)$$

$$= \imath \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) + \jmath \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right) + k \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \imath & \jmath & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

نوٹ: اگر دیا گیا برداری تفاعل مستقل برداری تفاعل ہو تو $curl\ f = 0$

غیر گردشی بردار (Irrotational Vector): کوئی بردار غیر گردشی بردار کہلاتا ہے اگر اس بردار کا کرل صفر ہو، یعنی $curl\ f = 0$

قضیہ۔ فرض کیجیے کہ f، g مسلسل تفرق پذیر برداری تفاعلات ہیں اور فرض کیجیے کہ ϕ ایک مسلسل تفرق پذیر میزانی تفاعل ہے، تب ثابت کیجیے کہ

(a $div\ \phi\vec{f} = (grad\ \phi)\cdot\vec{f} + \phi\left(div\ \vec{f}\right)$

(b $curl\ \phi f = \ grad\ \phi\ \ \times f + \phi\ \ curl\ f$

(c $grad\ \left(\vec{f}\cdot\vec{g}\right) = (\vec{g}\cdot\nabla)\vec{f} + \left(\vec{f}\cdot\nabla\right)\vec{g} + \vec{g}\times\left(curl\ \vec{f}\right) + \vec{f}\times(curl\ \vec{g})$

ثبوت۔ (a)

$$div\ \phi\vec{f} = \nabla\cdot\ \left(\phi\vec{f}\right)$$

$$= \left(\imath\frac{\partial}{\partial x} + \jmath\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\phi f$$

$$= \imath\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\phi f) + \jmath\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\phi f) + k\cdot\frac{\partial}{\partial z}(\phi f)$$

$$= \imath\cdot\left\{\frac{\partial\phi}{\partial x}f + \phi\frac{\partial f}{\partial x}\right\} + \jmath\cdot\left\{\frac{\partial\phi}{\partial y}f + \phi\frac{\partial f}{\partial y}\right\} + k \cdot\left\{\frac{\partial\phi}{\partial z}f + \phi\frac{\partial f}{\partial z}\right\}$$

$$= \left(\imath\frac{\partial\phi}{\partial x} + \jmath\frac{\partial\phi}{\partial y} + k\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\cdot f + \phi\left(\imath\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + \jmath\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + k\cdot\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$= \ grad\ \phi\ \ \cdot f + \phi\left(div\ f\right)$$

(b)

$$curl\ \phi f = \nabla\times\phi f$$

$$= \left(\imath\frac{\partial}{\partial x} + \jmath\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\phi f$$

$$= \imath\times\frac{\partial}{\partial x}(\phi f) + \jmath\times\frac{\partial}{\partial y}(\phi f) + k\times\frac{\partial}{\partial z}(\phi f)$$

$$= \imath\times\left\{\frac{\partial\phi}{\partial x}f + \phi\frac{\partial f}{\partial x}\right\} + \jmath\times\left\{\frac{\partial\phi}{\partial y}f + \phi\frac{\partial f}{\partial y}\right\} + k\times\left\{\frac{\partial\phi}{\partial z}f + \phi\frac{\partial f}{\partial z}\right\}$$

$$= \left(\imath\frac{\partial\phi}{\partial x} + \jmath\frac{\partial\phi}{\partial y} + k\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \times f + \phi\left(\imath \times \frac{\partial f}{\partial x} + \jmath \times \frac{\partial f}{\partial y} + k \times \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$= \ grad\ \phi\ \ \times f + \phi(\boldsymbol{curl}\ f)$$

(c)

$$grad\ (\vec{f}\cdot\vec{g}) = \nabla(\vec{f}\cdot\vec{g})$$

$$= \left(\imath\frac{\partial}{\partial x} + \jmath\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)(f\cdot g)$$

$$= \left(\imath\frac{\partial}{\partial x}(f\cdot g) + \jmath\frac{\partial}{\partial y}(f\cdot g) + k\frac{\partial}{\partial z}(f\cdot g)\right)$$

$$= \left\{\imath\left(f\cdot\frac{\partial}{\partial x}\ g\ \ + \frac{\partial}{\partial x}(f)\cdot g\right) + \jmath\left(f\cdot\frac{\partial}{\partial y}\ g\ \ + \frac{\partial}{\partial y}(f)\cdot g\right) + k\left(f\cdot\frac{\partial}{\partial z}\ g\ \ + \frac{\partial}{\partial z}(f)\cdot g\right)\right\}$$

$$= \left(\hat{\imath}\vec{f}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\vec{g}) + \hat{\jmath}\vec{f}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\vec{g}) + \hat{k}\vec{f}\cdot\frac{\partial}{\partial z}(\vec{g})\right) + \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}(\vec{f})\cdot\vec{g} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}(\vec{f})\cdot\vec{g} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(\vec{f})\cdot\vec{g}\right)$$

$$= (\vec{g}\cdot\nabla)\vec{f} + (\vec{f}\cdot\nabla)\vec{g} + \vec{g}\times(curl\ \vec{f}) + \vec{f}\times(curl\ \vec{g})$$

مثال1۔ اگر $f = x^2y\imath - 2xz\jmath + 2yzk$ تب $\nabla\cdot f$ اور $\nabla\times f$ حاصل کرو

حل۔ دیا ہے

$$f = x^2y\imath - 2xz\jmath + 2yzk$$

یہاں $f_1 = x^2y, f_2 = -2xz, f_3 = 2yz$ ہیں۔

$$\Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x} = 2xy, \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0, \frac{\partial f_3}{\partial z} = 2y$$

$$\because div\ \vec{f} = \nabla.\vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

$$\therefore \nabla\cdot\vec{f} = 2xy + 0 + 2y = 2y(x+1)$$

اسی طرح

$$\because Curl\ f = \nabla \times f = \begin{vmatrix} \imath & \jmath & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \imath & \jmath & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & -2xz & 2yz \end{vmatrix}$$

$$= \imath\ \ 2z + 2x\ \ + \jmath\ \ 0 - 0\ \ + k\ \ -2z - x^2$$

$$= 2(z + x)\hat{\imath} - (x^2 + 2z)\hat{k}$$

مثال2۔ اگر $r = x\imath + y\jmath + zk$، تب ثابت کرو کہ (a) $div\ r = 3$ (b) $Curl\ r = 0$

حل۔ (a) دیا ہے

$$r = x\imath + y\jmath + zk$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x} = 1, \frac{\partial f_2}{\partial y} = 1, \frac{\partial f_3}{\partial z} = 1$$

$$\therefore div\ r = \nabla \cdot r = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$

(b)

$$\because Curl\ r = \nabla \times r = \begin{vmatrix} \imath & \jmath & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \imath & \jmath & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= \imath\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right) + \jmath\left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)$$

$$= \imath \ (0-0) \ + \jmath \ (0-0) \ + k \ (0-0)$$

$$= 0$$

مثال3۔ اگر $f = 3y^4z^2\imath + 4x^3z^2\jmath - 3x^2y^2k$، تب ثابت کرو کہ f ایک سولے نائڈل برداری تفاعل ہے۔

حل۔ دیا ہے

$$f = 3y^4z^2\imath + 4x^3z^2\jmath - 3x^2y^2k$$

یہ ثابت کرنے کے لیے کہ f ایک سولے نائڈل برداری تفاعل ہے، ہم اس کا ڈائور جینس معلوم کریں گے۔ اس کے لیے پہلے ہمیں دیے گئے تفاعل کے تمام اجزا کا بالحاظ x، y اور z بالترتیب جزوی تفرق حاصل کرنا ہو گا، یعنی

$$\Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0, \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0$$

$$\therefore div \ r = \nabla \cdot r = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0$$

اس لیے دیا گیا تفاعل ایک سولے نائڈل برداری تفاعل ہے۔

مثال4۔ اگر $f = (\sin y + z)\imath + (x\cos y - z)\jmath + (x - y)k$، تب ثابت کرو کہ f ایک غیر گردشی برداری تفاعل ہے۔

حل۔ دیا ہے

$$f = (\sin y + z)\imath + (x\cos y - z)\jmath + (x - y)k$$

یہ ثابت کرنے کے لیے کہ f ایک غیر گردشی برداری تفاعل ہے، ہم اس کا کرل معلوم کریں گے، یعنی

$$\because Curl \ f = \nabla \times f = \begin{vmatrix} \imath & \jmath & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \imath & \jmath & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sin y + z & x\cos y - z & x - y \end{vmatrix}$$

$$= \imath \left(\frac{\partial (x-y)}{\partial y} - \frac{\partial (x\cos y - z)}{\partial z}\right) + \jmath \left(\frac{\partial (\sin y + z)}{\partial z} - \frac{\partial (x-y)}{\partial x}\right) + k \left(\frac{\partial (x\cos y - z)}{\partial x} - \frac{\partial (\sin y + z)}{\partial y}\right)$$

$$= \imath (-1+1) + \jmath (1-1) + k (\cos y - \cos y)$$

$$= 0$$

اس لیے دیا گیا تفاعل ایک غیر گردشی برداری تفاعل ہے۔

مثال5۔ اگر $f = x^2 - y^2$ ہو، تب $\nabla^2 f$ حاصل کرو

حل۔ دیا ہے

$$f = x^2 - y^2$$

$$\because \nabla^2 f = \nabla . \nabla f = div\ (\text{grad} f)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2 - y^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^2 - y^2) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(x^2 - y^2)$$

$$= 2 + (-2) + 0$$

$$= 0$$

مثال6۔ اگر $f = 3(x^2 - yz)\imath + 3(y^2 - xz)\jmath + 3(z^2 - xy)k$، تب $Curl\ f$ حاصل کیجیے۔

حل۔ دیا ہے

$$f = 3(x^2 - yz)\imath + 3(y^2 - xz)\jmath + 3(z^2 - xy)k$$

$$\because Curl\ f = \nabla \times f = \begin{vmatrix} \imath & \jmath & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

$$\therefore Curl\ f = \begin{vmatrix} \imath & \jmath & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3(x^2 - yz) & 3(y^2 - xz) & 3(z^2 - xy) \end{vmatrix}$$

$$= \imath \left(\frac{\partial\left(3\ z^2 - xy\ \right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(3\ y^2 - xz\ \right)}{\partial z}\right)$$

$$+ \jmath \left(\frac{\partial\left(3\ x^2 - yz\ \right)}{\partial z} - \frac{\partial\left(3\ z^2 - xy\ \right)}{\partial x}\right)$$

$$+ k \left(\frac{\partial\left(3\ y^2 - xz\ \right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(3\ x^2 - yz\ \right)}{\partial y}\right)$$

$$= \imath\ -3x + 3x\ \ + \jmath\ -3y + 3y\ \ + k\ -3z + 3z$$

$$= 0$$

مثال7۔ اگر $r = x\imath + y\jmath + zk$ ہو، تب ثابت کیجیے کہ $(f \times \nabla) \times r = -2f$

حل۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$(f \times \nabla) \times r = \left\{f \times \left(\imath \frac{\partial}{\partial x} + \jmath \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}\right)\right\} \times r$$

$$= \left((f \times \imath) \frac{\partial}{\partial x} + (f \times \jmath) \frac{\partial}{\partial y} + (f \times k) \frac{\partial}{\partial z}\right) \times r$$

$$= (f \times \imath) \times \frac{\partial(x\imath + y\jmath + zk)}{\partial x} + (f \times \jmath) \times \frac{\partial(x\imath + y\jmath + zk)}{\partial y}$$

$$+ (f \times k) \times \frac{\partial(x\imath + y\jmath + zk)}{\partial z}$$

$$= (f \times \imath) \times \imath + (f \times \jmath) \times \jmath + (f \times k) \times k$$

$$= \{(f \cdot \imath)\imath -\ \ \imath \cdot \imath\ f\} + \{(f \cdot \jmath)\jmath -\ \ \jmath \cdot \jmath\ f\} + \{(f \cdot k)k - (k \cdot k)f\}$$

$$= \{(f \cdot \imath)\imath - f\} + \{(f \cdot \jmath)\jmath - f\} + \{(f \cdot k)k - f\}$$

$$= (f \cdot \imath)\imath + (f \cdot \jmath)\jmath + (f \cdot k)k - 3f$$

$$= f - 3f$$

$$= -2f$$

مثال 8۔ اگر $f = x^2z\imath - 2y^3z^3\jmath + xy^2zk$ ہو، تب نقطہ $(1,-1,1)$ پر ذیل کو ثابت کیجیے

$$\nabla \times \vec{f} = -8\hat{\imath} \qquad \text{(b)} \qquad \nabla \cdot \vec{f} = -3 \qquad \text{(a)}$$

حل۔ (a) دیا ہے

$$f = x^2z\imath - 2y^3z^3\jmath + xy^2zk$$

یہاں $f_1 = x^2z, f_2 = -2y^3z^3, f_3 = xy^2z$ ہیں۔

$$\Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x} = 2xz, \frac{\partial f_2}{\partial y} = -6y^2z^3, \frac{\partial f_3}{\partial z} = xy^2$$

$$\therefore \nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 2xz - 6y^2z^3 + xy^2$$

نقطہ $(1,-1,1)$ پر $\nabla \cdot f$ کی قدر

$$\therefore \nabla \cdot \vec{f} = 2(1)(1) - 6(-1)^2(1)^3 + (1)(-1)^2$$
$$= 2 - 6 + 1 = -3$$

(b)

$$\because \nabla \times f = \begin{vmatrix} \imath & \jmath & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \imath & \jmath & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2z & -2y^3z^3 & xy^2z \end{vmatrix}$$

$$= \imath\left(\frac{\partial}{\partial y}\ xy^2z\ - \frac{\partial}{\partial z}\ -2y^3z^3\ \right) + \jmath\left(\frac{\partial}{\partial z}\ x^2z\ - \frac{\partial}{\partial x}\ xy^2z\ \right)$$
$$+ k\left(\frac{\partial}{\partial x}\ -2y^3z^3\ - \frac{\partial}{\partial y}\ x^2z\ \right)$$

$$= \imath\ 2xyz + 6y^3z^2\ + \jmath\ x^2 - y^2z\ + k\ -0 - 0$$

$$= \imath\ 2xyz + 6y^3z^2\ + \jmath\ x^2 - y^2z$$

نقطہ $(1,-1,1)$ پر $\nabla \times f$ کی قدر

$$\nabla \times f = \imath\{2(1)\ -1\ \ 1\ \ +6\ -1\ ^{3}\ 1\ ^{2}\} + \jmath\{\ 1\ ^{2} -\ \ -1\ ^{2}\ 1\ \}$$

$$= \imath\{-2-6\} + \jmath\{1-1\}$$

$$= -8\imath$$

3.3 اکتسابی نتائج(Learning Outcomes)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ ڈائور جینس اور کرل کی تعریفات کو سمجھ گئے ہوں گے اور اس کے متعلق کچھ قضیوں کے ثبوت کو اوران پر مبنی چند مثالات کے حل حاصل کرنا سیکھ گئے ہوں گے۔

3.4 کلیدی الفاظ(Keywords)

ڈائور جینس، کرل، نقطہ تفاعل، میزان، بردار

3.5 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

3.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. ڈائور جینس کی تعریف کیجیے۔
2. کرل کی تعریف کیجیے۔
3. کسی مستقل تفاعل کا ڈائور جینس ____________________ ہوتا ہے۔
4. لاپلاسی مساوات ____________________ ہے۔
5. اگر f کوئی برداری نقطہ تفاعل ہو، تو یہ Irrotational کہلائے گا اگر ____________________ ہے۔
6. اگر f کوئی برداری نقطہ تفاعل ہو، تو یہ سولے نائڈل بردار کہلائے گا اگر ____________________ ہے۔

3.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

1. ثابت کیجیے کہ $div\ \ u+v\ = div\ u + div\ v$
2. ثابت کیجیے کہ $curl\ \ u+v\ = curl\ u + curl\ v$
3. اگر $f = xy^2\imath + 2x^2yz\jmath - 3yz^2k$ ہو تو نقطہ $(1,-1,1)$ پر $div\ f$ اور $curl\ f$ حاصل کیجیے۔
4. دکھائیے کہ $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0$

3.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات(Long Answer Type Questions)

1. ثابت کیجیے کہ ڈائور جینس اور کرل بالحاظ کسی کارتیسی مختصاتی فریم(Cartesian Coordinate Frame) غیر متنوے(Invariant)

رہتا ہے۔

2. اگر c کوئی مستقل بردار ہے، تب ثابت کیجیے کہ $c.r$ $curl\ \frac{\mathbf{c}\times r}{\mathbf{r^3}} = -\frac{c}{\mathbf{r^3}} + \frac{3r}{\mathbf{r^5}}$

3. ثابت کیجیے کہ $\nabla^2[f(r)] = \frac{d^2f}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df}{dr}$، جہاں $r = x\imath + y\jmath + zk$ اور $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

4. n کی کس قدر کے لیے $r^n\bar{r}$ ایک سولے نائڈل ہے؟ جہاں $r = x\imath + y\jmath + zk$ اور $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

5. اگر $f = 3x^2y - z\ \imath + xz^3 + y^4\ \jmath - 2x^3z^2k$ ہو تو نقطہ $(2, -1, 0)$ پر $grad\ div\ \vec{f}$ حاصل کیجیے۔

اکائی 4۔ برداری تکمل

(Vector Integration)

اکائی کے اجزا

4.0	تمہید
4.1	مقاصد
4.2	برداری تکمل: خطی تکمل
4.3	اکتسابی نتائج
4.4	کلیدی الفاظ
4.5	نمونہ امتحانی سوالات
4.5.1	معروضی جوابات کے حامل سوالات
4.5.2	مختصر جوابات کے حامل سوالات
4.5.3	طویل جوابات کے حامل سوالات

4.0 تمہید(Introduction)

ہم گزشتہ درجوں میں یہ بات پڑھ اور سمجھ چکے ہیں کہ تکمل تفرق کا معکوس عمل ہوتا ہے۔ برداری تکمل ایک برداری میدان کو منحنی، سطح یا حجم پر مربوط کرنے کا ایک طریقہ ہے۔ یہ تکمل کے تصور کو برداری تفاعل تک لاگو کرتا ہے، جس کا نتیجہ بھی ایک بردار ہوتا ہے۔ جب کہ خطی تکمل کسی منحنی خطوط کے ساتھ کسی تفاعل کے تکمل کا حساب لگاتا ہے۔اس کی تشریح، کسی راہ(Path) پر کسی قوت کی مدد سے کیے جانے والے کام سے کی جاسکتی ہے۔ خطی تکمل میں برداری میدان کے میزانی ضرب اور منحنی کے ساتھ تفرق نقل مکانی بردار کا حساب لگانا شامل ہے۔ پھر خطی تکمل کو برداری میدان کے میزانی ضرب اور پیرامیٹر کی رینج پر تفرق نقل مکانی بردار کو مربوط کرکے شمار کیا جاتا ہے۔

کسی قوت کے ذریعے کیے گئے کام کا حساب لگانا، کسی قوت کے میدان کی صلاحیت(Potential) کا پتہ لگانا، برقی یا مقناطیسی میدان کے خطی تکمل حاصل کرنا، سیال کے بہاؤ کا تجزیہ کرنا، راستے میں تپش(Heat) کی کل منتقلی(Transfer) کا حساب لگان، ہموار منحنی خطوط اور سطحیں حاصل کرنا خطی تکمل کے چند اطلاقات ہیں۔

4.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کی تکمیل پر آپ کو اس قابل ہو جائیں گے کہ برداری تکمل اور خطی تکمل کو سمجھ کر اس سے متعلق چند مسئلوں کا حل حاصل کر سکیں۔ساتھ ہی خطی تکمل کے متعلق کچھ قضیوں کو ثابت کر سکیں اور چند مثالوں پر ان قضیون کو لاگو کر کے ان کا حل حاصل کر سکیں۔

4.2 برداری تکمل : خطی تکمل:(Vector Integration: Line Integral)

برداری تکمل(Vector Integration)

فرض کیجیے کہ $\vec{F}(t)$ کسی میزانی متغیر t کا ایک تفرق پذیر برداری تفاعل ہے اور مان لیجیے کہ $\frac{d\vec{F}(t)}{dt} = \vec{f}(t)$،تب $\vec{f}(t)$ کا تکمل $\int \vec{f}(t)\, dt = \vec{F}(t)$ ہوگا اور $\vec{F}(t)$ کو $\vec{f}(t)$ کا پریمیٹو(Primitive) کہتے ہیں۔

$\vec{f}(t)$ کے تمام پریمیٹو کا سٹ جس کو $\vec{f}(t)$ کا غیر متعین تکمل کہتے ہیں، درجہ ذیل ہوتا ہے

$$\int \vec{f}(t)\, dt = \vec{F}(t) + C$$

جہاں C ایک خود مختار مستقل ہے۔اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ غیر متعین تکمل یکتا نہیں ہوتا۔

اگر $\vec{f}(t) = \phi_1(t)\hat{\imath} + \phi_2(t)\hat{\jmath} + \phi_3(t)\hat{k}$ ہو، تو

$$\int \vec{f}(t)\, dt = \int \{\phi_1(t)\hat{\imath} + \phi_2(t)\hat{\jmath} + \phi_3(t)\hat{k}\}\, dt$$
$$= \hat{\imath}\int \{\phi_1(t)\}\, dt + \hat{\jmath}\int \{\phi_2(t)\}\, dt + \hat{k}\int \{\phi_3(t)\}\, dt + C$$

معین تکمل(Definite Integral)

فرض کیجیے کہ $t \in [a,b]$،تب معین تکمل کو dt $\int_a^b \vec{f}(t)\, dt$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ یہاں a کو تکمل کی ذیلی حد(Lower Limit) اور b کو تکمل کی بالائی حد(Upper Limit) کہتے ہیں۔ معین تکمل کو یا تو رقم(Sum) کی حد(Limit) کے طور پر متعارف کرایا جاتا ہے یا گر اس کا وقفہ $[a,b]$ میں مخالف مشتق(Anti Derivative)، F ہے، تو اس کی قدر آخری نقاط پر F کی قدروں کے درمیان فرق کے ذریعہ سے حاصل ہوتی ہے۔اس طرح معین تکمل ہے

$$\int_a^b \vec{f}(t)\, dt = F(b) - F(a)$$

اگر $\vec{f}(t) = \phi_1(t)\hat{\imath} + \phi_2(t)\hat{\jmath} + \phi_3(t)\hat{k}$ ہو، تو

$$\int_a^b \vec{f}(t)\, dt = \int_a^b \{\phi_1(t)\hat{\imath} + \phi_2(t)\hat{\jmath} + \phi_3(t)\hat{k}\}\, dt$$

$$= \hat{\imath}\int_a^b \phi_1(t)\, dt + \hat{\jmath}\int_a^b \phi_2(t)\, dt + \hat{k}\int_a^b \phi_3(t)\, dt$$

چند معیاری نتائج(Some Standard Results): فرض کیجیے کہ $\vec{g}$, $\vec{f}$ کسی میزانی متغیر t کے تفرق پذیر برداری تفاعلات ہیں اور ہم جانتے ہیں کہ تکمل تفرق کا معکوس عمل ہوتا ہے، تب درجہ ذیل پر غور کیجیے:

a) ہمیں معلوم ہے کہ $\vec{f} \cdot \vec{g}$ کا تفرق درجہ ذیل ہوتا ہے

$$\frac{d(\vec{f} \cdot \vec{g})}{dt} = \frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \vec{g} + \vec{f} \cdot \frac{d\vec{g}}{dt}$$

تب

$$\int \left(\frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \vec{g} + \vec{f} \cdot \frac{d\vec{g}}{dt}\right) dt = \vec{f} \cdot \vec{g} + C$$

یہاں C ایک **میزان** ہے۔

b) ہمیں معلوم ہے کہ $\vec{f} \times \vec{g}$ کا تفرق درجہ ذیل ہوتا ہے

$$\frac{d(\vec{f} \times \vec{g})}{dt} = \frac{d\vec{f}}{dt} \times \vec{g} + \vec{f} \times \frac{d\vec{g}}{dt}$$

تب

$$\int \left(\frac{d\vec{f}}{dt} \times \vec{g} + \vec{f} \times \frac{d\vec{g}}{dt}\right) dt = \vec{f} \times \vec{g} + C$$

یہاں مستقل C ایک **بردار** ہے۔

c) ہمیں معلوم ہے کہ $\vec{f}^2$ کا تفرق درجہ ذیل ہوتا ہے

$$\frac{d\left(\vec{f}^2\right)}{dt} = 2\vec{f} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt}$$

تب

$$\int \left(2\vec{f} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt}\right) dt = \vec{f}^2 + C$$

یہاں C ایک میزان ہے۔

d) ہمیں معلوم ہے کہ

$$\frac{d\left(\frac{d\vec{f}}{dt}\right)^2}{dt} = 2\frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}$$

تب

$$\int \left(2\frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\right) dt = \left(\frac{d\vec{f}}{dt}\right)^2 + C$$

یہاں C ایک میزان ہے۔

e) اگر $\vec{a}$ کوئی مستقل برداری ہے اور

$$\frac{d\left(\vec{a} \times \vec{f}\right)}{dt} = \vec{a} \times \frac{d\vec{f}}{dt}$$

تب

$$\int \left(\vec{a} \times \frac{d\vec{f}}{dt}\right) dt = \vec{a} \times \vec{f} + C$$

f) اگر

$$\frac{d\left(\vec{f} \times \frac{d\vec{f}}{dt}\right)}{dt} = \frac{d\vec{f}}{dt} \times \frac{d\vec{f}}{dt} + \vec{f} \times \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} = \vec{f} \times \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}$$ [چوں کہ $\vec{a} \times \vec{a} = 0$]

تب

$$\int \left(\vec{f} \times \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\right) dt = \vec{f} \times \frac{d\vec{f}}{dt} + C$$

g) اگر $|\vec{f}| = f$ ہو اور

$$\frac{d\left(\frac{\vec{f}}{f}\right)}{dt} = \frac{1}{f}\frac{d\vec{f}}{dt} - \frac{1}{f^2}\frac{df}{dt}\vec{f}$$

تب

$$\int \left(\frac{1}{f}\frac{d\vec{f}}{dt} - \frac{1}{f^2}\frac{df}{dt}\vec{f}\right) dt = \frac{\vec{f}}{f} + C$$

مثال1۔ اگر $\vec{f}(t) = e^t\hat{\imath} + e^{2t}\hat{\jmath} + t\hat{k}$ ہو تو متعین تکمل $\int_0^1 \vec{f}(t)\,dt$ کی قدر معلوم کیجیے۔

حل۔ دیا گیا برداری تفاعل ہے

$$\vec{f}(t) = e^t\hat{\imath} + e^{2t}\hat{\jmath} + t\hat{k}$$

تب

$$\int_0^1 \vec{f}(t)\,dt = \int_0^1 \left(e^t\hat{\imath} + e^{2t}\hat{\jmath} + t\hat{k}\right)dt$$

$$= \hat{\imath}\int_0^1 e^t\,dt + \hat{\jmath}\int_0^1 e^{2t}\,dt + \hat{k}\int_0^1 t\,dt$$

$$= [e^t]_0^1\hat{\imath} + \frac{1}{2}[e^{2t}]_0^1\hat{\jmath} + \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1\hat{k}$$

$$= (e-1)\hat{\imath} + \frac{1}{2}(e^2-1)\hat{\jmath} + \frac{1}{2}\hat{k}$$

مثال2۔ اگر $\vec{f}_1(t) = t\hat{\imath} - t^2\,\hat{\jmath} + (t-1)\hat{k}$ اور $\vec{f}_2(t) = 2t^2\hat{\imath} + 6t\hat{k}$ ہو تب مندرجہ کی قدر معلوم کیجیے:

(i) $\int_1^2 \vec{f}_1(t)\cdot\vec{f}_2(t)\,dt$

(ii) $\int_0^2 \vec{f}_1(t)\times\vec{f}_2(t)\,dt$

حل۔ (i) ہمیں دیا گیا ہے $\vec{f}_1(t) = t\hat{\imath} - t^2\,\hat{\jmath} + (t-1)\hat{k}$ اور $\vec{f}_2(t) = 2t^2\hat{\imath} + 6t\hat{k}$ دو برداری تفاعلات ہیں

تب

$$\vec{f}_1(t)\cdot\vec{f}_2(t) = 2t^3 + 6t^2 - 6t$$

اس لیے

$$\int_1^2 \vec{f}_1(t)\cdot\vec{f}_2(t)\,dt = \int_1^2 (2t^3 + 6t^2 - 6t)\,dt$$

$$= \int_1^2 (2t^3)\,dt + \int_1^2 (6t^2)\,dt + \int_1^2 (-6t)\,dt$$

$$= \left[\frac{2t^4}{4}\right]_1^2 + \left[\frac{6t^3}{3}\right]_1^2 + \left[-6\frac{t^2}{2}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}(2^4 - 2^1) + 2(2^3 - 2^1) - 3(2^2 - 2^1)$$

$$= \frac{1}{2}(16-2) + 2(8-2) - 3(4-2)$$

$$= 7 + 12 - 6$$

$$= 13$$

(iii) سب سے پہلے ہم دونوں تفاعلات کا برداری حاصل ضرب حاصل کریں گے

$$\vec{f}_1(t) \times \vec{f}_2(t) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ t & -t^2 & t-1 \\ 2t^2 & 0 & 6t \end{vmatrix}$$
$$= (-6t^3)\hat{\imath} - \{6t^2 - 2t^2(t-1)\}\hat{\jmath} + (2t^4)\hat{k}$$
$$\Rightarrow \quad \vec{f}_1(t) \times \vec{f}_2(t) = (-6t^3)\hat{\imath} - (8t^2 - 2t^3)\hat{\jmath} + (2t^4)\hat{k} \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

اب

$$\int_0^2 \{\vec{f}_1(t) \times \vec{f}_2(t)\}\, dt = \int_0^2 \{(-6t^3)\hat{\imath} - (8t^2 - 2t^3)\hat{\jmath} + (2t^4)\hat{k}\}\, dt$$
$$= -6\hat{\imath}\int_0^2 t^3\, dt + \hat{\jmath}\int_0^2 (8t^2 - 2t^3)\, dt + 2\hat{k}\int_0^2 t^4\, dt$$
$$= -6\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^2 \hat{\imath} - \left[\frac{8t^3}{3} - \frac{2t^4}{4}\right]_0^2 \hat{\jmath} + 2\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^2 \hat{k}$$
$$= -\frac{6}{4}(2^4 - 0)\hat{\imath} - \left(\frac{8(2)^3}{3} - \frac{2(2)^4}{4} - 0 + 0\right)\hat{\jmath} + 2\left(\frac{(2)^5}{5} - 0\right)\hat{k}$$
$$= -24\hat{\imath} - \left(\frac{64}{3} - \frac{32}{4}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{64}{5}\right)\hat{k}$$
$$= -24\hat{\imath} - \left(\frac{256 - 96}{12}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{64}{5}\right)\hat{k}$$
$$= -24\hat{\imath} - \left(\frac{40}{3}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{64}{5}\right)\hat{k}$$

مثال3۔ مان لیتے ہیں کہ $\vec{f}(t) = 5t^2\hat{\imath} + t\hat{\jmath} - t^3\hat{k}$ ہو تب $\vec{f}(t)$ کا دوسرا **مشتق** معلوم کیجیے، نیز **معین تکمل** $\int_1^2 \vec{f} \times \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\, dt$ کی قدر بھی معلوم کیجیے:

حل۔ ہمیں دیا گیا ہے کہ

$$\vec{f}(t) = 5t^2\hat{\imath} + t\hat{\jmath} - t^3\hat{k}$$
$$\Rightarrow \frac{d\vec{f}}{dt} = 10t\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3t^2\hat{k}$$

نتیجہ $\int \left(\vec{f} \times \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\right) dt = \vec{f} \times \frac{d\vec{f}}{dt} + C$ کی مدد سے

$$\vec{f} \times \frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 5t^2 & t & -t^3 \\ 10t & 1 & -3t^2 \end{vmatrix}$$
$$= (-3t^3 + t^3)\hat{\imath} - \{-15t^4 + 10t^4\}\hat{\jmath} + (5t^2 - 10t^2)\hat{k}$$
$$\Rightarrow \quad \vec{f} \times \frac{d\vec{f}}{dt} = -2t^3\hat{\imath} + 5t^4\hat{\jmath} - 5t^2\hat{k}$$

اب

$$\int_1^2 \vec{f} \times \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\, dt = \left[-2t^3\hat{\imath} + 5t^4\hat{\jmath} - 5t^2\hat{k}\right]_1^2$$

$$= \left(-2(2)^3\hat{\imath} + 5(2)^4\hat{\jmath} - 5(2)^2\hat{k}\right) - \left(-2(1)^3\hat{\imath} + 5(1)^4\hat{\jmath} - 5(1)^2\hat{k}\right)$$

$$= \left(-14\hat{\imath} + 75\hat{\jmath} - 15\hat{k}\right)$$

مثال4- اگر $\vec{f}(t) = 2t^3\hat{\imath} + 3e^{3t}\hat{\jmath} - (4\cos\pi t)\hat{k}$ ہے تو $\int_0^1 \vec{f}(t)dt$ کی قدر معلوم کیجیے۔

حل- دیا گیا ہے $\vec{f}(t) = 2t^3\hat{\imath} + 3e^{3t}\hat{\jmath} - (4\cos\pi t)\hat{k}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \vec{f}(t)dt = \left(\int_0^1 2t^3 dt\right)\hat{\imath} + \left(\int_0^1 3e^{3t} dt\right)\hat{\jmath} - \left(\int_0^1 4\cos\pi t\, dt\right)\hat{k}$$

$$= \left[2 \times \frac{t^4}{4}\right]_0^1 \hat{\imath} + \left[3 \times \frac{e^{3t}}{3}\right]_0^1 \hat{\jmath} - \left[4 \times \frac{\sin\pi t}{\pi}\right]_0^1 \hat{k}$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{4} - 0\right)\hat{\imath} + (e^3 - 1)\hat{\jmath} - \frac{4}{\pi} \times (\sin\pi - \sin 0)\hat{k}$$

$$= \frac{1}{2}\hat{\imath} + (e^3 - 1)\hat{\jmath}$$

مثال5- $\int_0^\pi [t^2\hat{\imath} + 7\,\hat{\jmath} - (5\cos t)\hat{k}]dt$ کی قدر معلوم کیجیے۔

حل-

$$\int_0^\pi [t^2\hat{\imath} + 7\,\hat{\jmath} - (5\cos t)\hat{k}]dt = \left(\int_0^\pi t^2 dt\right)\hat{\imath} + 7\left(\int_0^\pi dt\right)\hat{\jmath} - \left(5\int_0^\pi (\cos t)dt\right)\hat{k}$$

$$= \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^\pi \hat{\imath} + 7[t]_0^\pi \hat{\jmath} - 5[\sin t]_0^\pi \hat{k}$$

$$= \left(\frac{\pi^3}{3} - 0\right)\hat{\imath} + 7(\pi - 0)\hat{\jmath} - 5(\sin\pi - \sin 0)\hat{k}$$

$$= \frac{\pi^3}{3}\hat{\imath} + 7\pi\,\hat{\jmath}$$

مثال6- $\int_0^2 (3t^3\hat{\imath} + 5t^3\hat{\jmath})\, dt$ کی قدر معلوم کیجیے۔

حل-

$$\int_0^2 (3t^3\hat{\imath} + 5t^3\hat{\jmath})\, dt = \int_0^2 (3t^3 dt)\,\hat{\imath} + \int_0^2 (5t^3 dt)\,\hat{\jmath}$$

$$= 3\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^2 \hat{\imath} + 5\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^2 \hat{\jmath}$$

$$= \frac{3}{4}((2)^4 - 0)\hat{\imath} + \frac{5}{4}((2)^4 - 0)\hat{\jmath}$$

$$= \frac{3}{4} \times 16\hat{\imath} + \frac{5}{4} \times 16\hat{\jmath}$$

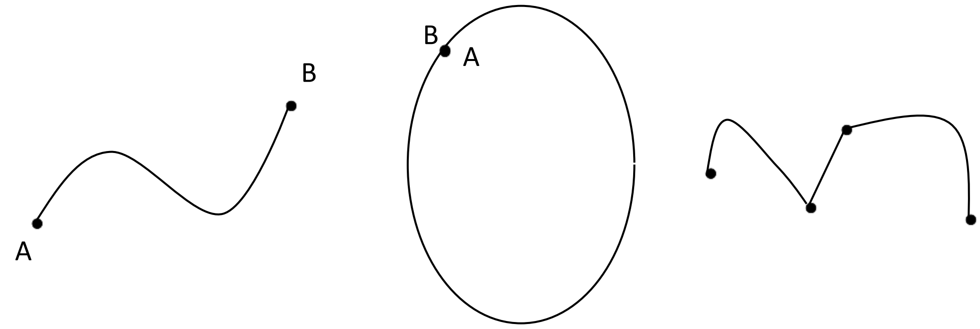
$$= 12\hat{\imath} + 20\hat{\jmath}$$

بند منحنی(Closed Curve)

فرض کیجیے کہ C خلا میں ایک منحنی ہے۔اگر A منحنی کا ابتدائی نقطہ ہو اور B منحنی C کا آخری نقطہ ہو۔اگر A سے B کی طرف C پر مبنی سمت مثبت ہو تو B سے A کی سمت کو منفی سمت کہا جاتا ہے۔اگر دو نقطے ایک دوسرے سے ملتے ہیں، تو منحنی کو بند و منحنی کہتے ہیں۔

ہموار منحنی(Smooth Curve)

ہموار منحنی ایک ایسی منحنی ہے جس میں تیز کونے یا سمت میں اچانک تبدیلی نہ ہو۔ہموار منحنی مسلسل تفرق پذیر ہے، یعنی اس میں تمام رتبوں کے مشتقات وجود رکھتے ہیں، اور اس کا مماس بردار مسلسل تبدیل ہوتا رہتا ہے۔اس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ کوئی منحنی ہموار منحنی کہلاتی ہے اگر یہ مسلسل طور پر تفرق پذیر ہو۔اگر کسی منحنی میں متناہی ہموار منحنیات موجود ہوں تو اس منحنی کو قطع وار(Piecewise) ہموار منحنی کہتے ہیں۔



شکل 4.1

خطی تکمل(Line Integral)

ایک خطی تکمل، جسے منحن خطی تکمل(Curvilinear Integral) بھی کہا جاتا ہے، تکمل کی ایک قسم ہے جہاں فضا میں ایک منحنی کے ساتھ کسی تفاعل کو محسوب کیا جاتا ہے۔یہ تکمل کے تصور کو سیدھے خط سے کسی بھی اختیاری(Arbitrary) منحنی خطوط تک پھیلاتا ہے، جس سے اس منحنی خطوط کے ساتھ جمع شدہ قدروں کے حساب کتاب کی اجازت ملتی ہے۔

فرض کیجیے کہ $\vec{r} = \vec{f}(t)$ ایک ہموار منحنی C کو ظاہر کرتا ہے جو دو نقطوں A اور B کو جوڑتا ہے اور مان لیجیے کہ منحنی C کے نقطہ P پر خوسی لمبائی کا مشتق ds ہے۔تب منحنی C کے نقطہ P پر مماس کے ساتھ اکائی بردار $\vec{I} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ ہوگا۔اب فرض کیجیے کہ $\vec{F}$ منحنی C کے ساتھ ایک مسلسل برداری نقطہ تفاعل ہے اور نقطہ P پر مماس کے ساتھ $\vec{F}$ کا جزو $\vec{F}(r) \cdot \vec{I}$ ہے۔اس لیے $\vec{F}(r)$ کا منحنی C کے ساتھ خطی تکمل درجہ ذیل ہوگا

$$\int \vec{F} \cdot \vec{I}\, ds = \int \left(\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}\right) ds = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

جسے $\vec{F}$ کا منحنی C کے ساتھ مماس خطی تکمل(Tangential Line Integral) بھی کہتے ہیں۔ دوسرے الفاظ میں کسی بھی منحنی کے ساتھ محسوب کیا گیا تکمل خطی تکمل کہلاتا ہے۔

خطی تکمل کی پیرامتری شکل (Line Integral in Parametric Form):

مان لیجیے کہ $\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}, t \in [a,b]$ ایک تفرق پذیر برداری تفاعل ہے جو ایک ہموار منحنی C کی تعریف کرتا ہے۔ تب خطی تکمل

$$\int_C \vec{f}(x,y,z)ds = \int_a^b f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

سادہ بند منحنی (Simple Closed Curve): ایسی منحنی جو خود کو کہیں پر بھی نہیں کاٹتی، سادہ بند منحنی (Simple Closed Curve) کہلاتی ہے۔

دائروی گردش (Circulation): فرض کیجیے کہ C ایک سادہ بند منحنی ہے اور

$$\vec{F}(r) = F_1\hat{\imath} + F_2\hat{\jmath} + F_3\hat{k}$$

جہاں $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ تب $d\vec{r} = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}$ تب $\vec{F}$ کا منحنی C کے ساتھ خطی تکمل، دائروی گردش (Circulation) کہلاتا ہے، جس کو درجہ ذیل طریقہ سے ظاہر کرتے ہیں

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_C (F_1dx + F_2dy + F_3dz)$$

برداری میدان کے ذریعہ کیا گیا کام (Work done by a Vector Field)

مان لیجیے کہ $\vec{F}$ کوئی برداری میدان ہے اور C برداری تفاعل $\vec{r}$ کے ذریعہ بیان کردہ ایک منحنی ہے۔ تب C کے ساتھ حرکت پذیر شئے پر F کے ذریعے کیا جانے والا کام درجہ ذیل ضابطہ کے ذریعے دیا جاتا ہے

$$W = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

مثال 7- نصف قطر 2 کے دائرہ پر $F(x,y) = \frac{(x^2+y^2)}{4} + \frac{xy}{2}$ کا خطی تکمل محسوب کیجیے۔

حل- دیا ہے

$$F(x,y) = \frac{(x^2+y^2)}{4} + \frac{xy}{2}$$

سب سے پہلے ہم دی گئی منحنی کو پیرامتری شکل میں تبدیل کرتے ہیں۔ چوں کہ دائرہ کا نصف قطر 2 ہے، اس لیے

$$\vec{r}(t) = 2cos\,t\,\hat{\imath} + 2sin\,t\,\hat{\jmath}, t \in [0,2\pi]$$

اب دیے گئے تفاعل کو پیرامتری شکل میں بدلنے کے لیے $x = 2\cos t\,, y = 2\sin t$ رکھتے ہیں

$$F\big(x(t),y(t)\big) = \frac{((2cos\,t)^2 + (2sin\,t)^2)}{4} + \frac{2cos\,t \times 2sin\,t}{2}$$
$$= \frac{4\cos^2 t + 4\sin^2 t}{4} + \frac{4cos\,t\,sin\,t}{2}$$
$$= (1 + 2cos\,t\,sin\,t)$$
$$= 1 + \sin 2t$$

اب خطی تکمل درجہ ذیل ہوگا

$$\int_0^{2\pi} f\big(x(t),y(t)\big)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_0^{2\pi}(1+\sin 2t)\sqrt{4\sin^2 t+4\cos^2 t}\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi} 2(1+\sin 2t)dt$$
$$= 2\left[t-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{2\pi}$$
$$= 2\left[2\pi-\frac{1}{2}\cos 4\pi-0+\frac{1}{2}\cos 0\right]$$
$$= 2\left[2\pi-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]$$
$$= 4\pi$$

مثال8- $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ محسوب کیجیے، جہاں C نیچے کی طرف کا آدھا دائرہ ہے جس کا نصف قطر 3 ہے اور $\vec{F}(x,y)=2x^2y\hat{\imath}-4x\,\hat{\jmath}$ ہے۔

حل- دیا ہے

$$F(x,y)=2x^2y\hat{\imath}-4x\,\hat{\jmath}$$

سب سے پہلے ہم دی گئی منحنی C جو نیچے کی طرف کا آدھا دائرہ ہے جس کا نصف قطر 3 ہے، کو پیرامتری شکل میں تبدیل کرتے ہیں

$$\vec{r}(t)=3cos\,t\,\hat{\imath}-3sin\,t\,\hat{\jmath},\,t\in[0,\pi]$$
$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt}=-3sin\,t\,\hat{\imath}-3cos\,t\,\hat{\jmath}$$

اب دیے گئے تفاعل کو پیرامتری شکل میں بدلنے کے لیے $x=3\cos t\,,\,y=-3\sin t$ رکھتے ہیں

$$F(x,y)=2x^2y\,\hat{\imath}-4x\,\hat{\jmath}$$
$$=2(3\cos t)^2(-3\sin t)\,\hat{\imath}-4(3\cos t)\,\hat{\jmath}$$
$$=-54\sin t\cos^2 t\,\hat{\imath}-12\cos t\,\,\hat{\jmath}$$

اور

$$\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}=(-54\sin t\cos^2 t\,\hat{\imath}-12\cos t\,\,\hat{\jmath})\cdot(-3sin\,t\,\hat{\imath}-3cos\,t\,\hat{\jmath})$$
$$=162\sin^2 t\cos^2 t+36\cos^2 t$$
$$=18[9(1-\cos^2 t)\cos^2 t+2\cos^2 t]$$
$$=18(11\cos^2 t-9\cos^4 t)$$
$$=18\left[11\left(\frac{1+cos\,2t}{2}\right)-9\left(\frac{1+cos\,2t}{2}\right)^2\right]$$
$$=18\left[11\left(\frac{1+cos\,2t}{2}\right)-9\left(\frac{1+cos^2\,2t+2\cos 2t}{4}\right)\right]$$
$$=18\left[11\left(\frac{1+cos\,2t}{2}\right)-9\left(\frac{1+\left(\frac{1+cos\,4t}{2}\right)+2\cos 2t}{4}\right)\right]$$
$$=18\left[11\left(\frac{1+cos\,2t}{2}\right)-9\left(\frac{2+1+cos\,4t+4\cos 2t}{8}\right)\right]$$

$$= 18\left[\frac{11}{2} + \frac{11}{2} cos\, 2t - \frac{27}{8} - \frac{9}{8} cos\, 4t - \frac{9}{2}\cos 2t\right]$$
$$= 18\left[\frac{17}{8} - \frac{9}{8} cos\, 4t + \cos 2t\right]$$

اب خطی تکمل درجہ ذیل ہو گا

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C \left(\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right)dt = \int_0^{\pi} 18\left[\frac{17}{8} - \frac{9}{8} cos\, 4t + \cos 2t\right]dt$$
$$= 18\left[\frac{17}{8}t - \frac{9}{32}\sin 4t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi}$$
$$= 18\left[\frac{17}{8}\pi - \frac{9}{32}\sin 4\pi + \frac{1}{2}\sin 2\pi - \frac{17}{8}(0) - \frac{9}{32}\sin 0 + \frac{1}{2}\sin 0\right]$$
$$= 18\left[\frac{17}{8}\pi\right]$$
$$= \frac{153}{4}\pi$$

مثال9۔ -1 سے 1 تک خطی تکمل $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ محسوب کیجیے جہاں $F = xy\hat{\imath} + yz\hat{\jmath} + zx\hat{k}$ اور منحنی C ذیل کے ذریعہ دی گئی ہے
$\vec{r} = t\hat{\imath} + t^2\hat{\jmath} + t^3\hat{k}$

حل۔ دی گئی منحنی ہے

$$\vec{r} = t\hat{\imath} + t^2\hat{\jmath} + t^3\hat{k}$$
$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{\imath} + 2t\hat{\jmath} + 3t^2\hat{k}$$

اب دیے گئے منحنی کو پیرامتری شکل میں بدلنے کے لیے $x = t, y = t^2, z = t^3$ رکھتے ہیں

$$F = t(t^2)\hat{\imath} + t^2(t^3)\hat{\jmath} + t(t^3)\hat{k}$$
$$= t^3\hat{\imath} + t^5\hat{\jmath} + t^4\hat{k}$$

اب

$$\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \left(t^3\hat{\imath} + t^5\hat{\jmath} + t^4\hat{k}\right)\cdot\left(\hat{\imath} + 2t\hat{\jmath} + 3t^2\hat{k}\right)$$
$$= t^3 + 2t^6 + 3t^6\hat{k}$$
$$= t^3 + 5t^6$$

اب خطی تکمل درجہ ذیل ہو گا

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{-1}^{1}\left(\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right)dt = \int_{-1}^{1}(t^3 + 5t^6)dt$$
$$= \left[\frac{t^4}{4} + \frac{5t^7}{7}\right]_{-1}^{1}$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{5}{7} - \frac{1}{4} + \frac{5}{7}$$
$$= \frac{10}{7}$$

مثال10۔ خطی تکمل $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ محسوب کیجیے جہاں $\vec{F} = x^2y^2\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ اور منحنی C مکافی $y^2 = 4x$ کے ذریعہ مستوی xy میں نقطہ (0,0) سے (4,4) تک دی گئی ہے۔

حل- دیا ہے $\vec{F} = x^2y^2\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ ہے اور مکافی

$$x = \frac{1}{4}y^2$$
$$\Rightarrow dx = \frac{2}{4}ydy$$
$$\Rightarrow dx = \frac{1}{2}ydy$$

چوں کہ مکافی مستوی xy میں نقطہ (0,0) سے (4,4) تک ہی تکمل حاصل کرنا ہے اس لیے خطی تکمل درجہ ذیل ہوگا

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^4 (x^2y^2\hat{\imath} + y\hat{\jmath})\cdot(dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath})$$
$$= \int_0^4 (x^2y^2dx + ydy)$$
$$= \int_0^4 \left(\left(\frac{1}{4}y^2\right)^2 (y^2)\frac{1}{2}ydy + ydy\right)$$
$$= \int_0^4 \left(\frac{1}{32}y^7dy + ydy\right)$$
$$= \left[\frac{y^8}{256} + \frac{y^2}{2}\right]_0^4$$
$$= \frac{4^8}{256} + \frac{4^2}{2} - 0 - 0$$
$$= \frac{256\times 256}{256} + 8$$
$$= 264$$

مثال11- نقطہ (1,4,2) سے (0،5،1) کو ملانے والے ایک خط کے ساتھ حرکت پذیر شئے پر $\vec{F}(x,y,z) = x\hat{\imath} + 3xy\hat{\jmath} - (x+z)\hat{k}$ کے ذریعے کیا جانے والا کام محسوب کیجیے۔

حل- دی گئی قوت

$$\vec{F}(x,y,z) = x\hat{\imath} + 3xy\hat{\jmath} - (x+z)\hat{k}$$

مان لیجیے کہ $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ تب $d\vec{r} = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}$ اس لیے

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = xdx + 3xydy - (x+z)dz$$

نقطہ (1,4,2) سے (0،5،1) کو ملانے والے خط کی مساوات

$$\frac{x-1}{0-1} = \frac{y-4}{5-4} = \frac{z-2}{1-2} = t\text{(مان لیجیے)}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{x-1}{-1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{-1} = t$$
$$\Rightarrow \quad x = 1-t, y = 4+t, z = 2-t$$
$$\Rightarrow \quad dx = -dt, dy = dt, dz = -dt, t\in[0,1]$$

اب

$$\begin{aligned}\vec{F}\cdot d\vec{r} &= -(1-t)dt + 3(1-t)(4+t)dt + (1-t+2-t)dt\\ &= (t-1)dt - 3(t^2+3t-4)dt + (3-2t)dt\\ &= [t-1-3t^2-9t+12+3-2t]dt\\ &= [-3t^2-10t+14]dt\end{aligned}$$

اس لیے کیا گیا کام

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_0^1 [-3t^2-10t+14]dt\\ &= -3\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 - 10\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + 14[t]_0^1\\ &= -(1-0) - 5(1-0) + 14(1-0)\\ &= 8\end{aligned}$$

مثال 12-دائرہ $x^2+y^2=4, z=0$ کے ساتھ $\vec{F}(x,y,z) = (2x-y+2z)\hat{\imath} + (x+y-z)\hat{\jmath} + (3x-2y-5z)\hat{k}$ کی دائروی گردش (Circulation) محسوب کیجیے۔

حل-دی گئی منحنی ہے

$$x^2+y^2=4, z=0 \Rightarrow dz=0$$

اس کو پیرامتری شکل میں بتدیل کرنے پر

$$x = 2\cos t\,, y = 2\sin t\,, z = 0$$

$\vec{F}(x,y,z) = (2x-y+2z)\hat{\imath} + (x+y-z)\hat{\jmath} + (3x-2y-5z)\hat{k}$ کی دائروی گردش درجہ ذیل ہو گی

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \oint_C (F_1dx + F_2dy + F_3dz)\\ &= \oint_C [(2x-y+2z)dx + (x+y-z)dy + 0]\\ &= \oint_C [(2x-y+2z)dx + (x+y-z)dy]\end{aligned}$$

دائرہ کے لیے $t \in [0,2\pi]$ اس لیے دائروی گردش

$$\begin{aligned}&= \oint_0^{2\pi} [(2\times 2\cos t - 2\sin t + 0)(-2\sin t)dt + (2\cos t + 2\sin t - 0)(2\cos t)dt]\\ &= \oint_0^{2\pi} (-8\sin t\cos t + 4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 4\sin t\cos t)dt\\ &= \oint_0^{2\pi} (4 - 4\sin t\cos t)dt\\ &= 2\oint_0^{2\pi} (2-\sin 2t)dt\\ &= 2\left[2t + \frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{2\pi}\end{aligned}$$

$$= 2\left[4\pi + \cos 4\pi - 0 - \frac{1}{2}\right]$$
$$= 2\left[4\pi - 1 - \frac{1}{2}\right]$$
$$= 8\pi - 3$$

4.3 اکتسابی نتائج(Learning Outcomes)

اس اکائی کی تکمیل پر آپ اس قابل ہوگئے ہوں گے کہ برداری تفاعل کا تفرق اور تکمل حاصل کر سکیں۔اس کے علاوہ طالب علم کو مماس بردار اور نارمل بردار کے بیچ کا فرق،اور کوئی بردار تفاعل کب عمودی ہوتا ہے، یہ سب بھی معلوم ہو جانا چاہیے۔مزید ہموار منحنی کی تعریف،اس کی مثال اور مختلف پروپرٹیز بھی معلوم ہو جانی چاہیے۔

4.4 کلیدی الفاظ(Keywords)

تکمل،واجبی تکمل، معین تکمل، برداری تکمل،رفتار، مماس،ہموار منحنی، بند منحنی

4.5 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

4.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. ہموار منحنی کی تعریف کرو۔
2. بند منحنی سے آپ کیا سمجھتے ہو؟
3. خطی تکمل کی تعریف کیجیے۔
4. برداری میدان کے ذریعہ کیے گئے کام سے آپ کیا سمجھتے ہیں؟

4.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

1. خطی تکمل $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ محسوب کیجیے جہاں $\vec{F} = 3xy\hat{\imath} - y^2\hat{\jmath}$ اور منحنی C مکافی $y = 2x^2$ کے ذریعہ مستوی xy میں نقطہ (0,0) سے (1,2) تک دی گئی ہے۔
2. دائرہ $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ کے ساتھ $\vec{F}(x, y, z) = y\hat{\imath} + z\hat{\jmath} + x\hat{k}$ کی دائروی گردش (Circulation) محسوب کیجیے۔
3. اگر $\vec{f}(t) = e^t\hat{\imath} + e^{-2t}\hat{\jmath} + t\hat{k}$ ہو تو متعین تکمل $\int_0^1 \vec{f}(t)\,dt$ کی قدر معلوم کیجیے۔

4.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. نقطہ (1,4,2) سے (0,5,1) کو ملانے والے ایک خط کے ساتھ حرکت پذیر ذرہ پر $\vec{F}(x,y,z) = 3x^2\hat{\imath} + (2xz - y)\hat{\jmath} - z\hat{k}$ کے ذریعے کیا جانے والا کام محسوب کیجیے۔

2. $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ کو محسوب کیجیے، جہاں $\vec{F}(x,y,z) = 3x^2\hat{\imath} + (2xz - y)\hat{\jmath} + z\hat{k}$ مبدا سے نقطہ (2,1,3) کو ملانے والے ایک خط کے ساتھ برداری میدان ہے۔

3. اگر $\vec{F}(x,y,z) = 3x^2\hat{\imath} + (2xz - y)\hat{\jmath} + z\hat{k}$ ہو تب $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ کو مبدا سے نقطہ (1,0,0) کو ملانے والے خط، نقطہ (1,0,0) سے نقطہ (1,1,0) کو ملانے والے خط اور نقطہ (1,1,0) سے (1,1,1) کو ملانے والے خط کے ساتھ محسوب کیجیے۔

تجویز کردہ اکتسابی مواد

(Suggested Books for Further Readings)

1. Calculus, 3rd Ed. Strauss, Monty J., Bradley L. and Smith Karl J. (2007)– Dorling Kindersley (India) Pvt. Ltd. (Pearson Education), Delhi, Indian Reprint 2011.
2. Basic Multivariable Calculus, Marsden, J.E., Tromba, A. (2004), Springer (SIE), First Indian Reprint.

Distance Mode, Bachelor of Science(فاصلاتی ضریعہ (بیچلر آف سائنس)

2^{nd}Semester Examination,2025 دوسرا سمسٹر

Paper :BNMM202DET,(Mathematics) Vector Calculus(برداری علم احصا)

جملہ نشانات:25 Maximum Marks 2Hrs: وقت: Time گھنٹے

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم اور حصہ سوم۔ ہر جواب کے لیے لفظوں کی تعداد اشارتاً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1۔ حصہ اول میں 5 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/خالی جگہ پر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **(5 × 1 = 5 Marks)**

2۔ حصہ دوم میں 6 سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی چار سوالات کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کے لیے 3 نمبرات مختص ہیں۔ **(4 × 3 = 12 Marks)**

3۔ حصہ سوم میں دو سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی ایک سوال کا جواب دینا ہے۔ ہر سوال کے لیے 8 نمبرات مختص ہیں۔ **(1 × 8 = 8 Marks)**

حصہ اول

سوال 1.

(i) $\lim_{t\to 1}\langle 2t^2\hat{\imath} - 3t\,\hat{\jmath} + t^3\hat{k}\rangle = \cdots$

A. $2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + \hat{k}$ B. $-3\hat{\jmath} + \hat{k}$ C. $2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}$ D. $2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k}$

(ii) ہموار منحنی کی تعریف کیجیے۔

(iii) اگر $\vec{r}(t) = \vec{a}e^{kt}\hat{\imath} + \vec{b}e^{-kt}\hat{\jmath}$ ایک برداری تفاعل ہے، جہاں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ مستقل بردار ہیں، تب درجہ ذیل میں سے کون درست ہے

A. $\vec{r}'' = k^2\vec{r}$ B. $\vec{r}'' - \vec{r} = 0$ C. $\vec{r}' = k^2\vec{r}$ D. $\vec{r}'' = k\vec{r}$

(iv) خطی تکمل کی تعریف کیجیے۔

(v) برداری تفاعل $\vec{r}(t) = t^3\hat{\imath} + e^t\hat{\jmath} - 7\cos(\pi t)\,\hat{k}$ کے لیے پہلا مشتق __________ ہے۔

حصہ دوم

2. مندرجہ ذیل ویکٹر تفاعل کے لیے $\vec{r}'(t)$ اور $\vec{r}''(t)$ معلوم کیجیے

(i) $\vec{r}(t) = 3t^2\hat{\imath} + t^{-1}\hat{\jmath} + e^{3t}\hat{k}$

(ii) $\vec{r}(t) = \sin t\,\hat{\imath} + 3\cos t\,\hat{\jmath}$

3. ∇f اس سمت میں ایک بردار ہوتا ہے جس میں $\frac{\partial f}{\partial s}$ کی اعظم ترین قدر وجود رکھتی ہے۔

4. دائرہ $x^2 + y^2 = 4, z = 0$ کے ساتھ $\vec{F}(x,y,z) = (2x - y + 2z)\hat{\imath} + (x + y - z)\hat{\jmath} + (3x - 2y - 5z)\hat{k}$ کی دائروی گردش (Circulation) محسوب کیجیے۔

5. مقام بردار $\vec{r}(t)$ بتایے جب کہ رفتار $\vec{v}(t)$ اور ابتدائی مقام $\vec{r}(0)$ دی گیا ہے

$\vec{v}(t) = t^3\hat{\imath} - e^t\hat{\jmath} + 3\hat{k}, \vec{r}(0) = \hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} + 3\hat{k}$

6. خطی تکمل $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ محسوب کیجیے جہاں $\vec{F} = 3xy\hat{\imath} - y^2\hat{\jmath}$ اور منحنی C مکافی $y = 2x^2$ کے ذریعہ مستوی xy میں نقطہ $(0,0)$ سے $(1,2)$ تک دی گئی ہے۔

7. اگر $f = xy^2\imath + 2x^2yz\jmath - 3yz^2k$ ہو تو نقطہ $(1,-1,1)$ پر $div\ f$ اور $curl\ f$ حاصل کیجیے۔

دکھایئے کہ $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0$

حصہ سوم

8. $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ کو محسوب کیجیے ، جہاں $\vec{F}(x,y,z) = 3x^2\hat{\imath} + (2xz - y)\hat{\jmath} + z\hat{k}$ مبدا سے نقطہ $(2,1,3)$ کو ملانے والے ایک خط کے ساتھ برداری میدان ہے۔

9. دائرہ $x^2 + y^2 = 4, z = 0$ کے ساتھ $\vec{F}(x,y,z) = (2x - y + 2z)\hat{\imath} + (x + y - z)\hat{\jmath} + (3x - 2y - 5z)\hat{k}$ کی دائروی گردش (Circulation) محسوب کیجیے۔

BNMM201DEP

لیب مینول

برداری علم احصا

(Vector Calculus)

بی۔ایس سی۔(آنرس)

چارسالہ پروگرام

دوسرا سمسٹر (ریاضی)

اکائی 1۔ برداری تفاعل کے مشتق، تفرقی عامل اور گریڈئینٹ سے متعلق مسائل

(Problems on Derivative of Vector Functions, Differential Operators and Gradients)

1.0 تمہید(Introduction)

برداری علم احصا(Vector Calculus)ریاضی کی ایک شاخ ہے جس کی تشکیل علم احصااور بردار مل کر کرتے ہیں۔وہ تفاعل جس کی قدر کوئیبر دار ہو برداری تفاعلکہلاتا ہے۔ان تفاعلات کی مدد سے ہم دواور سہ البعدی فضا(Two and Three Dimensional Space)میں پیرامتریائی تفاعل کو آسانی سے سمجھ سکتے ہیں اور کسی ذرہ کا کسی منحنی راستے(Curved Path)پر گردش کو بھی معلوم کیا جا سکتا ہے۔ ہم اس اکائی میں برداری تفاعل، اس کی انتہااور تسلسل کی تعریف کریں گے۔ نیز برداری اور میزانی تفاعلات کے مشتقات اور مشتق کے الجبراپر روشنی ڈالیں گے۔ساتھ ہی چند قضیوں کو ثابت کریں گے۔

میزانی متغیر کا برداری تفاعل(Vector Function of Scalar Variable)

فرض کیجیے کہ S حقیقی نمبرات کے سٹ $\mathbb{R}$ کا تحت سٹ ہے اور $t \in S$ ایک میزانیہ(Scalar)ہے،تب ہر ایک $t \in S$ کے لیے ایک یکتا بردار $\vec{r}$ ہوگا، تب $\vec{r}$ کو میزانی متغیر کا برداری تفاعل کہتے ہیں، یہاں برداری تفاعل $\vec{r}$ کا دامنہ S ہے اور اس کو $\vec{r} = \vec{f}(t)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔اگر f_1, f_2, f_3 حقیقی قدری تفاعل $\vec{r}$ کے اجزا ہوں، تو $\mathbb{R}^2$ اور $\mathbb{R}^3$ میں $\vec{r}$ کو درجہ ذیل شکل میں لکھ سکتے ہیں

$$\vec{r}(t) = f_1(t)\hat{\imath} + f_2(t)\hat{\jmath} \qquad \dots(1)$$

$$\vec{r}(t) = f_1(t)\hat{\imath} + f_2(t)\hat{\jmath} + f_3(t)\hat{k} \qquad \dots(2)$$

برداری تفاعل کی انتہا(Limit of a Vector Function)

مان لیجیے کہ $\vec{r}$ کوئی برداری تفاعل ہے جو ان تمام t کے لئے متعرف ہے جس کا دامنہ S ہے اور $a \in S$ ہے، تب اگر ایک بردار $\vec{l}$ کو $\vec{r}$ کی انتہا کہتے ہیں، جب کہ $t \to a$، اگر ہر ایک مثبت عدد $\epsilon > 0$ کے لیے اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$\left|\vec{r}(t) - \vec{l}\right| < \epsilon \text{ جب کہ } 0 < |t - a| < \delta$$

یا اس کو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں

$$\lim_{t \to a} \vec{r}(t) = \vec{l}$$

انتہا کی الجبرا(Algebra of Limit)

مان لیجیے کہ $\vec{r}_1(t)$ اور $\vec{r}_2(t)$ کسی حقیقی متغیر t کے تفاعلات ہیں اور $\lambda(t)$ کوئی میزانی تفاعل ہے۔جب $t \to a$ تب $\vec{r}_1(t)$، $\vec{r}_2(t)$ اور $\lambda(t)$ کی انتہا متناہی(Finite)ہو،تب

$$\lim_{t\to a}[\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t)] = \lim_{t\to a}\vec{r}_1(t) \pm \lim_{t\to a}\vec{r}_2(t)$$
$$\lim_{t\to a}[\lambda(t)\vec{r}_1(t)] = \left(\lim_{t\to a}\lambda(t)\right)\left(\lim_{t\to a}\vec{r}_1(t)\right)$$
$$\lim_{t\to a}[\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)] = \left(\lim_{t\to a}\vec{r}_1(t)\right) \cdot \left(\lim_{t\to a}\vec{r}_2(t)\right)$$
$$\lim_{t\to a}[\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)] = \left(\lim_{t\to a}\vec{r}_1(t)\right) \times \left(\lim_{t\to a}\vec{r}_2(t)\right)$$

تمام ضابطے $t \to \infty$ یا $t \to -\infty$ کے لیے بھی درست ہیں جب کہ تمام عبارتوں (Expressions) میں انتہا متناہی ہو۔

اب ہم کچھ مثالوں کی مدد سے ذہن نشیں کرتے ہیں۔

مثال-1 مان لیجے کہ $\vec{r}(t) = t^2\hat{\imath} + 5e^t\hat{\jmath} + 7\ \sin(\pi t)\ \hat{k}$، تب $\lim_{t\to 0}\vec{r}(t)$ کی قدر معلوم کریں۔

حل۔

$$\lim_{t\to 0}\vec{r}(t) = \left(\lim_{t\to 0}t^2\right)\hat{\imath} + \left(\lim_{t\to 0}5e^t\right)\hat{\jmath} + \left(\lim_{t\to 0}7\ \sin(\pi t)\right)\hat{k}$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{t\to 0}\vec{r}(t) = 5\,\hat{\jmath}$$

دوسرا طریقہ

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\vec{r}(t) &= \lim_{t\to 0}\langle t^2, 5e^t, 7\ \sin(\pi t)\rangle \\ &= \langle \lim_{t\to 0}t^2, \lim_{t\to 0}5e^t, \lim_{t\to 0}(7\ \sin(\pi t))\rangle \\ &= \langle 0,5,0\rangle\end{aligned}$$

برداری تفاعل کا مشتق (Derivative of Vector Function)

فرض کیجیے کہ $\vec{r}(t)$ وقفہ I پر ایک برداری تفاعل ہے اور $a \in I$ ہے۔ تب اگر انتہا

$$\lim_{t\to a}\frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(a)}{t - a}$$

وجود رکھتی ہو تو اس انتہا کو تفاعل $\vec{r}(t)$ کا نقطہ a پر مشتق کہتے ہیں اور یہ کہا جاتا ہے کہ برداری تفاعل $\vec{r}(t)$ نقطہ $t = a$ پر تفرق پذیر ہے۔
اس کو $\vec{r}'(t)$ یا $\left(\frac{dr\ t}{dt}\right)_{t=a}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

مشتقات کا الجبرا (Algebra of Derivatives)

اگر $\vec{r}_1(t)$ اور $\vec{r}_2(t)$ کسی وقفہ I میں دو تفرق پذیر برداری تفاعل ہوں اور f ایک تفرق پذیر میزانیتفاعل ہو اور مان لیجے کہ a اور b مستقلات (Constants) ہیں تب درجہ ذیل درست ہیں:

a) $\frac{d}{dt}[a] = 0$

b) $\frac{d}{dt}[a\vec{r}_1(t)] = a\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)]$

c) $\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t)] = \frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)] \pm \frac{d}{dt}[\vec{r}_2(t)]$

d) $\frac{d}{dt}[a\vec{r}_1(t) + b\vec{r}_2(t)] = a\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)] + b\frac{d}{dt}[\vec{r}_2(t)]$

e) $\frac{d}{dt}[f(t)\vec{r}_1(t)] = f(t)\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)] + \frac{d}{dt}[f(t)]\vec{r}_1(t)$

f) $\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t).\vec{r}_2(t)] = \frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)].\vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t).\frac{d}{dt}[\vec{r}_2(t)]$

g) $\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)] = \frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)] \times \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \times \frac{d}{dt}[\vec{r}_2(t)]$

کسی ذرہ کی رفتار(Velocity)اور اسراع(Acceleration)

اگر کسی فضا میں کسی نقطہ P کا مقام بردار $\vec{r}$ ہے اور اگر $\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$ ایک برداری تفاعل ہو، تب نقطہ P پر وقت t میں رفتار $\frac{d\vec{r}}{dt}$ ہوگی اور اس کو ہم $\vec{v}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔اسی طرح ایک ذرہ کا کسی نقطہ P پر اسراع

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

اسراع کو $\vec{a}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال2۔ اگر $\vec{r}(t) = 3t\hat{\imath} - 15\sin(\pi t)\,\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ ہو تب $\vec{r}''(1)$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل- دیا گیا ہے

$$\vec{r}(t) = 3t\hat{\imath} - 15\sin(\pi t)\,\hat{\jmath} + 3\hat{k}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}'(t) = 3\hat{\imath} - 15\pi\cos(\pi t)\,\hat{\jmath}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}''(t) = 15\pi^2\sin(\pi t)\,\hat{\jmath}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}''(1) = 15\pi^2(0)\hat{\jmath} = 0$$

1.1 تفرقی عامل(Differential Operators)

نقطہ میزانی تفاعل(Scalar Point Function): فرض کیجیے کہ S کسی فضا میں ایک دامنہ ہے،اگر ہر ایک نقطہ $P \in S$ سے ایک میزان f مطابقت رکھتا ہو تو f کو دامنہ S پر میزانی نقطہ تفاعل کہتے ہیں۔ جیسے: کسی کمرہ میں کسی نقطہ پر درجہ حرارت(Temperature) ایک میزانی نقطہ تفاعل ہے۔

نقطہ برداری تفاعل(Vector Point Functions)

فرض کیجیے کہ S کسی فضا میں ایک دامنہ ہے،اگر ہر ایک نقطہ $P \in S$ سے ایک برداری تفاعل f مطابقت رکھتا ہو تو f کو دامنہ S پر برادری نقطہ تفاعل کہتے ہیں۔ جیسے: کسی میزانی نقطہ تفاعل کا گراڈینٹ ایک برداری نقطہ تفاعل ہے۔

ڈیلٹاہم ساگی(Delta Neighbourhood): فرض کیجیے کہ نقطہ P کسی فضامیں ہے اور $\delta > 0$ ایک مثبت عدد ہے۔تب ان سبھی نقاط کا سٹ جن کے لیے فاصلہ $PQ > \delta$ ہو،نقطہ P کی ڈیلٹا-ہمسا گی کہتے ہیں۔اگر نقطہ P کی ڈیلٹا-ہمسا گی میں سے ساخط کر دیا جائے تو اس کو خارج نقطہ P کی ڈیلٹا-ہمسا گی کہتے ہیں۔

انتہا(Limit): فرض کیجیے کہ f کسی نقطہ P کی خارج ہم ساگی پر متعرف ایک میزانی نقطہ تفاعل ہے اور فضامیں ہے اور فرض کیجیے کہ ایک عدد $l \in R$ ہے۔اگر ہر ایک $\epsilon > 0$ کے لیے ایک مثبت عدد $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہو کہ

$$0 < QP < \delta \Rightarrow |f\ Q\ \ - l| < \epsilon$$

اس کو ہم اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں

$$\lim_{Q \to P} f = l$$

اسی طرح اگر g کسی نقطہ P کی خارج ہم ساگی پر متعرف ایک برداری نقطہ تفاعل ہے اور $\overline{m}$ ایک بردار ہے۔اگر ہر ایک $\epsilon > 0$ کے لیے ایک مثبت عدد $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہو کہ

$$O < QP < \delta \Rightarrow |\overline{g}\ Q\ \ - \overline{m}| < \epsilon$$

اس کو ہم اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں

$$\lim_{Q \to P} \overline{g} = \overline{m}$$

مسلسل میزانی نقطہ تفاعل: فرض کیجیے کہ f کسی نقطہ P کی ہم ساگی پر متعرف ایک میزانی نقطہ تفاعل ہے۔اگر ہر ایک $\epsilon > 0$ کے لیے ایک مثبت عدد $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہو کہ

$$0 < QP < \delta \Rightarrow |f\ Q\ \ - f\ P\ | < \epsilon$$

اگر ہر ایک $\epsilon > 0$ کے لیے ایک مثبت عدد $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہو کہ

$$0 < QP < \delta \Rightarrow |f\ Q\ \ - l| < \epsilon$$

تب ہم کہتے ہیں کہ f مسلسل تفاعل ہے۔

مسلسل برداری نقطہ تفاعل: فرض کیجیے کہ g کسی نقطہ P کی ہم ساگی پر متعرف ایک میزانی نقطہ تفاعل ہے۔اگر ہر ایک $\epsilon > O$ کے لیے ایک مثبت عدد $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہو کہ

$$0 < QP < \delta \Rightarrow |\overline{g}\ Q\ \ - \overline{g}\ P\ | < \epsilon$$

تب ہم کہتے ہیں کہ g مسلسلبر داری تفاعل ہے۔

میزانی نقطہ تفاعل کا کسی نقطہ پر سمتی مشتق: فرض کیجیے کہ نقطہ P کسی فضا میں ہے اور A اکائی برادر e کی سمت میں نقطہ P سے ہو کر گزرنے والی ایک شعا(Ray) ہے۔فرض کیجیے کہ P کی ہم ساگی D میں ایک میزانی نقطہ تفاعل f ہے۔مان لیجیے کہ نقطہ Q نقطہ P سے مختلف ہے اور $Q \in A \cap D$ ہے۔

اگر انتہا

$$\lim_{Q \to P} \frac{f(Q) - f(P)}{QP}$$

وجود رکھتی ہو تو یہ انتہا f کی نقطہ P پر اکائی برادر e کی سمت میں سمتی مشتق کہلاتی ہے۔اس کو $\frac{\partial f}{\partial s}$ سے ظاہر کرتے ہیں، جہاں $S = PQ$ ہے۔

برداری نقطہ تفاعل کا کسی نقطہ پر سمتی مشتق: فرض کیجیے کہ نقطہ P کسی فضا میں ہے اور A اکائی برادر e کی سمت میں نقطہ P سے ہو کر گزرنے والی ایک شعاع(Ray) ہے۔فرض کیجیے کہ P کی ہم سائگی D میں ایک برداری نقطہ تفاعل f ہے۔مان لیجیے کہ نقطہ Q نقطہ P سے مختلف ہے اور $Q \in A \cap D$ ہے۔

اگر انتہا

$$\lim_{Q \to P} \frac{\bar{f}(Q) - \bar{f}(P)}{QP}$$

وجود رکھتی ہو تو یہ انتہا f کی نقطہ P پر اکائی برادر e کی سمت میں سمتی مشتق کہلاتی ہے۔اس کو $\frac{\partial \bar{f}}{\partial s}$ یا $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{e}}$ سے ظاہر کرتے ہیں، جہاں $S = PQ$ ہے۔

کسی میزانی نقطہ تفاعل کا گریڈینٹ (Gradient of a Scalar Point Function)

فرض کیجیے کہ f ایک میزانی نقطہ تفاعل ہے جس کے سمتی مشتقات اکائی برداروں $\imath$، $\jmath$، k کی سمت میں بالترتیب $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ ، $\frac{\partial f}{\partial z}$ ہیں۔تب برداری تفاعل کے گریڈینٹ کو $grad\, f$ یا ∇f سے ظاہر کرتے ہیں جو درجہ ذیل طریقہ سے متعرف ہے

$$grad\ f = \nabla f = \imath \frac{\partial f}{\partial x} + \jmath \frac{\partial f}{\partial y} + k \frac{\partial f}{\partial z}$$

مسطح سطح (Level Surface): فرض کیجیے کہ f ایک میزانی نقطہ تفاعل ہے اور c کوئی حقیقی عدد ہے۔اگر ایک نقطہ $P \in S$ اس طرح سے وجود رکھتا ہے کہ $f(P) = c$ ہو، تب S کو مسطح سطح کہتے ہیں۔c کی مختلف اقدار کے لیے، f سہ البعدی فضا میں مسطح سطح کا ایک خاندان تشکیل دیتا ہے۔اگر کہ f ایک میزانی نقطہ تفاعل ہو اور Q کوئی دیا گیا نقطہ ہے، تب اگر ایک نقطہ $P \in S$ اس طرح سے وجود رکھتا ہے کہ $f(P) = c = f(Q)$ ہو، تب S کو نقطہ Q میں مسطح سطح کہتے ہیں۔

1.2 عملی مسائل

1. اگر $\vec{r}_1(t)$ اور $\vec{r}_2(t)$ کسی وقفہ I میں دو تفرق پذیر برداری تفاعل ہوں اور f ایک تفرق پذیر میزانیہ تفاعل ہو تو ثابت کیجیے کہ $\frac{d}{dt}[f(t)\vec{r}_1(t)] = f(t)\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)] + \frac{d}{dt}[f(t)]\vec{r}_1(t)$

☆☆☆☆☆

2 اگر $\vec{r}_1(t)$ اور $\vec{r}_2(t)$ کسی وقفہ I میں دو تفرق پذیر برداری تفاعل ہوں اور f ایک تفرق پذیر میزانیتفاعل ہو تو ثابت کیجیے
کہ $\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t).\vec{r}_2(t)] = \frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)].\vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t).\frac{d}{dt}[\vec{r}_2(t)]$

☆☆☆☆☆

3 اگر $\vec{r}_1(t)$ اور $\vec{r}_2(t)$ کسی وقفہ I میں دو تفرق پذیر برداری تفاعل ہوں اور f ایک تفرق پذیر میزانیتفاعل ہو توثابت کیجیے

کہ $\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)] = \frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t)] \times \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \times \frac{d}{dt}[\vec{r}_2(t)]$

☆☆☆☆☆

4 برداری تفاعل $\vec{r}(t) = t^3\hat{\imath} + e^t\hat{\jmath} - 7\cos(\pi t)\,\hat{k}$ کے لیے پہلا مشتق حاصل کیجیے۔

☆☆☆☆☆

5 اگر $\vec{r}(t) = \vec{a}e^{kt}\hat{\imath} + \vec{b}e^{-kt}\hat{\jmath}$ ایک برداری تفاعل ہے، جہاں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ مستقل بردار ہیں۔ دکھایئے کہ

$$\vec{r}'' = k^2\vec{r}$$

☆☆☆☆☆

6 ایک ذرہ اس طرح گردش کرتا ہے کہ اس کا مقام بردار $\vec{r}(t) = \cos \omega t\ \hat{\imath} + \sin \omega t\ \hat{\jmath}$ ہو۔ تب ثابت کیجیے کہ $\vec{r}.\vec{v} = 0$،
جہاں $\vec{v}$ اس ذرہ کی رفتار ہے۔

☆☆☆☆☆

7 اگر $\vec{r}(t) = \vec{a}e^{kt}\hat{\imath} + \vec{b}e^{-kt}\hat{\jmath}$ ایک برداری تفاعل ہے، جہاں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ مستقل بردار ہیں، تب دوسرا مشتق حاصل کیجیے۔

☆☆☆☆☆

8 اگر $\vec{r}(t) = 3t\hat{\imath} - 15\sin(\pi t)\,\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ ہو تب $\vec{r}''(1)$ کی قیمت حاصل کیجیے۔

☆☆☆☆☆

9 اگر f_1 اور f_2 دو میزانی نقطہ تفاعل ہیں، تب ثابت کیجیے $\nabla(f_1 f_2) = f_1(\nabla f_2) + (\nabla f_1) f_2$

☆☆☆☆☆

10 اگر f_1 اور f_2 دو میزانی نقطہ تفاعل ہیں، تب ثابت کیجیے $\nabla(f_1 \pm f_2) = \nabla f_1 \pm \nabla f_2$

☆☆☆☆☆

11 اگر f_1 میزانی نقطہ تفاعل ہے اور a کوئی مستقل ہے، تب ثابت کیجیے $\nabla(af_1) = a\nabla f_1$

☆☆☆☆☆

12 ثابت کیجیے کہ کسی میزان f کا نقطہ $P(x, y, z)$ پر اکائی بردار $\bar{e}$ کی سمت میں سمتی مشتق $\nabla f \cdot e$ ہوتا ہے۔

☆☆☆☆☆

13 اگراکائی بردار $\overline{n}$ مسطہ سطح $f(x, y, z) = c$ کے نقطہ $P(x, y, z)$ پر f کی بڑھتی ہوئی سمت میں نارمل ہے، جہاں c کوئی مستقل ہے۔تب ثابت کیجیے $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \overline{n}} \overline{n}$

☆☆☆☆☆

14 اگر $f_1 = x + y + z$، $f_2 = x^2 + y^2 + z^2$ اور $f_3 = xy + yz + zx$ تب ثابت کرو کہ

$$\left[grad f_1, grad f_2, grad f_3\right] = 0$$

☆☆☆☆☆

15 اگر $r = x\imath + y\jmath + zk$ ہو تب دکھائیے کہ $\nabla r^n = nr^{n-2}r$

☆☆☆☆☆

اکائی 2۔ڈائور جینس، کرل اور برداری تکمل سے متعلق مسائل
(Problems on Divergence, Curl and Vector Integration)

2.0 تمہید(Introduction)

ڈائور جینس برداری علم احصا میں اس شرح کو بیان کرتا ہے جس پر ایکبر داری فیلڈ کسی نقطہ پر پھیلتا یا سکڑتا ہے۔ حقیقی زندگی میں، یہ تصور کیا جا سکتا ہے کہ کسی علاقے سے باہر یا اس میں کتنا سیال بہتا ہے، موسم کے نمونوں، پائپوں میں سیال کا بہاؤ، اور برقی مقناطیسیت جیسے مظاہر کو متاثر کرتا ہے۔ڈائور جینس ایک عامل ہے جو کہ کسی برداری تفاعل پر لاگو ہوتا ہے جس سے ہمیں ایک میزانی قدر حاصل ہوتی ہے۔اگر دیا گیا تفاعل ایک میزانی نقطہ تفاعل ہے، تب اس کے ڈائور جینس کا کوئی مطلب نہیں رہتا ہے۔

طبیعیات میں، کرل(curl) کا ریاضیاتی تصور برداری فیلڈ کی گردش کو بیان کرتا ہے۔جب کسی سیال کے بہاؤ کے میں کسی شے کو رکھا جاتا ہے تو اس کا کرل(curl) یہ بتاتا ہے کہ شے کیسے گھومتی ہے، یا مقناطیسی فیلڈز کرنٹ لے جانے والے تار کے گرد کیسے برتاؤ کرتا ہے۔ہوائی جہاز کے پنکھ کی شکل اس کے ارد گرد ہوا کے بہاؤ میں ایک کرل پیدا کرنے کے لیے بنائی جاتی ہے۔یہ کرل لفٹ بناتا ہے، یہ وہ قوت ہے جو ہوائی جہاز کو ہوا میں رہنے کی اجازت دیتی ہے۔

بردار کا ڈائور جینس(Divergence of a Vector):فرض کیجیے کہ f ایک مسلسل تفرق پذیر برداری نقطہ تفاعل ہے، تب f کے ڈائور جینس کو $div\ \vec{f}$ سے ظاہر کرتے ہیں اور اس کا ضابطہ درجہ ذیل ہے

$$div\ f = \nabla . f = \imath . \frac{\partial f}{\partial x} + \jmath . \frac{\partial f}{\partial y} + k . \frac{\partial \vec{f}}{\partial z} = \left(\imath \frac{\partial}{\partial x} + \jmath \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) . f$$

اگر $f = f_1 \imath + f_2 \jmath + f_3 k$ ہو، تب

$$\begin{aligned} div\ f &= \nabla . f = \imath . \frac{\partial f}{\partial x} + \jmath . \frac{\partial f}{\partial y} + k . \frac{\partial \vec{f}}{\partial z} \\ &= \imath . \left(\imath \frac{\partial f_1}{\partial x} + \jmath \frac{\partial f_2}{\partial x} + k \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) + \jmath . \left(\imath \frac{\partial f_1}{\partial y} + \jmath \frac{\partial f_2}{\partial y} + k \frac{\partial f_3}{\partial y} \right) + k . \left(\imath \frac{\partial f_1}{\partial z} + \jmath \frac{\partial f_2}{\partial z} + k \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{aligned}$$

سولے نائڈل بردار(Solenoidal Vector):فرض کیجیے کہ ایک برداری نقطہ تفاعل f ہے، تب f کو سولے نائڈل بردار کہتے ہیں اگر

$$div\ f = \nabla . f = 0$$

لاپلاس ین عامل(Laplacian Operator): لاپلاس ین عاملجسے ∇^2 سے ظاہر کیا جاتا ہے، ایک تفرقیعامل ہے جو کسی فیلڈ کے گھماؤ کی تبدیلی کی شرح کو ماپتا ہے۔ فرض کیجیے کہ ایک برداری نقطہ تفاعل f ہے، تب f کے گریڈینٹ کا ڈائور جینس سے لاپلاس ین عامل کی تعریف ہوتی ہے۔

$$\begin{aligned}\nabla^2 &= div \quad grad \ f \ = \nabla. \ \nabla f\\ &= \sum \imath. \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\right)\\ &= \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{aligned}$$

فرض کیجیے کہ S کسی فضا میں ایک دامنہ ہے، اگر ہر ایک نقطہ $P \in S$ سے ایک برداری تفاعل f مطابقت رکھتا ہو تو f کو دامنہ S پر برادری نقطہ تفاعل کہتے ہیں۔

کسی بردار کا کرل(Curl of a Vector): فرض کیجیے کہ f ایک مسلسل تفرق پذیر برداری نقطہ تفاعل ہے، تب f کے کرل کو $\nabla \times \vec{f}$ یا $curl \ f$ سے ظاہر کرتے ہیں اور اس کا ضابطہ درجہ ذیل ہے

$$\begin{aligned}curl \ f &= \imath \times \frac{\partial f}{\partial x} + \jmath \times \frac{\partial f}{\partial y} + k \times \frac{\partial f}{\partial z} = \left(\imath \frac{\partial}{\partial x} + \jmath \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}\right) \times f\\ &= \left(\imath \frac{\partial}{\partial x} + \jmath \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}\right) \times f = \nabla \times f\end{aligned}$$

اگر $f = f_1\imath + f_2\jmath + f_3k$ ایک تفرق پذیر برداری نقطہ تفاعل ہو، تب

$$\begin{aligned}curl \ f = \nabla \times f &= \imath \times \frac{\partial f}{\partial x} + \jmath \times \frac{\partial f}{\partial y} + k \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial z}\\ &= \imath \times \left(\imath \frac{\partial f_1}{\partial x} + \jmath \frac{\partial f_2}{\partial x} + k \frac{\partial f_3}{\partial x}\right) + \jmath \times \left(\imath \frac{\partial f_1}{\partial y} + \jmath \frac{\partial f_2}{\partial y} + k \frac{\partial f_3}{\partial y}\right)\\ &\qquad + k \times \left(\imath \frac{\partial f_1}{\partial z} + \jmath \frac{\partial f_2}{\partial z} + k \frac{\partial f_3}{\partial z}\right)\\ &= \left(\imath \times \imath \frac{\partial f_1}{\partial x} + \imath \times \jmath \frac{\partial f_2}{\partial x} + \imath \times k \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\\ &\qquad + \left(\jmath \times \imath \frac{\partial f_1}{\partial y} + \jmath \times \jmath \frac{\partial f_2}{\partial y} + \jmath \times k \frac{\partial f_3}{\partial y}\right)\\ &\qquad + \left(k \times \imath \frac{\partial f_1}{\partial z} + k \times \jmath \frac{\partial f_2}{\partial z} + k \times k \frac{\partial f_3}{\partial z}\right)\end{aligned}$$

چوں کہ $\imath \times \imath = \jmath \times \jmath = k \times k = 0$ اور $\imath \times \jmath = k, \jmath \times k = \imath, k \times \imath = \jmath$

اس کے علاوہ $\imath \times k = -\jmath, \jmath \times \imath = -k, k \times \jmath = -\imath$ تب

$$curl \ f = \left(k \frac{\partial f_2}{\partial x} - \jmath \frac{\partial f_3}{\partial x}\right) + \left(-k \frac{\partial f_1}{\partial y} + \imath \frac{\partial f_3}{\partial y}\right) + \left(\jmath \frac{\partial f_1}{\partial z} - \imath \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)$$

$$= \imath \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) + \jmath \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right) + k \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \imath & \jmath & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

نوٹ: اگر دیا گیا برداری تفاعل مستقل برداری تفاعل ہو تو $curl\ f = 0$

غیر گردشی بردار (**Irrotational Vector**): کوئی بردار غیر گردشی بردار کہلاتا ہے اگر اس بردار کا کرل صفر ہو، یعنی $curl\ f = 0$

مثال 1۔ اگر $r = x\imath + y\jmath + zk$، تب ثابت کرو کہ (a) $Curlr = 0$ (b) $divr = 3$

حل۔ (a) دیا ہے

$$r = x\imath + y\jmath + zk$$
$$\Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x} = 1, \frac{\partial f_2}{\partial y} = 1, \frac{\partial f_3}{\partial z} = 1$$
$$\therefore divr = \nabla \cdot r = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$

(b)

$$\because Curlr = \nabla \times r = \begin{vmatrix} \imath & \jmath & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \imath & \jmath & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$
$$= \imath \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right) + \jmath \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right) + k \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)$$
$$= \imath\ 0 - 0\ + \jmath\ 0 - 0\ + k\ 0 - 0$$
$$= 0$$

2.1 برداری تکمل (Vector Integration)

اگر $\vec{r}(t)$ کوئی بردار تفاعل ہے تب کسی وقفہ I پر تفاعل $\vec{r}(t)$ ہموار ہوگا ان تمام t کی قیمتوں کے لیے جہاں r' مسلسل ہو اور $\vec{r}'(t) \neq 0$ اس طرح سے گراف کسی وقفہ پر ٹکڑوں کے اعتبار سے ہموار (Piecewise Smooth) کہلاتا ہے اگر ہم اس وقفہ کو معین نمبر (Finite Number) اوف تحت وقفہ (Sub Interval) لکھ سکیں جہاں پر تمام تحت وقفہ میں $\vec{r}(t)$ ہموار ہو۔

اعلا رتبہ مشتق (Higher Order Derivatives)

اگر $\vec{r}(t) = f(t)\hat{\imath} + g(t)\hat{\jmath} + h(t)\hat{k}$ ایک بردار تفاعل ہے تب ہم $\vec{r}(t)$ کا اعلا رتبہ **مشتق**(Higher Order Derivatives)
اس تفاعل $\vec{r}(t)$ کے اجزا تفاعل کے متواتر **مشتق**(Successive Derivative) نکال سکتے ہیں۔اس کا مطلب $\vec{r}(t)$ کا اگر ہمیں اعلا **مشتق** نکالنا ہے تو $f(t)$، $g(t)$، $h(t)$ کو تفرق کرتے ہیں تو اگر $\vec{r}(t) = f(t)\hat{\imath} + g(t)\hat{\jmath} + h(t)\hat{k}$
کا دوسرا مشتق نکالنا ہے تو

$$\vec{r}''(t) = \left(\vec{r}'(t)\right)' = f''(t)\hat{\imath} + g''(t)\hat{\jmath} + h''(t)\hat{k}$$

اور اسی طرح تیسرے مشتق کو لکھتے ہیں

$$\vec{r}'''(t) = f'''(t)\hat{\imath} + g'''(t)\hat{\jmath} + h'''(t)\hat{k}$$

اس طرح سے دیگر مشتقات کو لکھ سکتے ہیں۔ہم اعلا مشتقات کو کچھ اس طرح سے بھی لکھ سکتے ہیں

$$\frac{d^2}{dt^2}[\vec{r}(t)], \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \vec{r}''(t), \vec{r}''$$

$\frac{d^3}{dt^3}[\vec{r}(t)], \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}, \vec{r}'''(t), \vec{r}'''$ وغیرہ۔

بند منحنی(Closed Curve)

فرض کیجیے کہ C خلا میں ایکمنحنی ہے۔اگر A منحنی کا ابتدائی نقطہ ہو اور B منحنی C کا آخری نقطہ ہو۔اگر A سے B کی طرف C پر مبنی سمت مثبت ہو تو B سے A کی سمت کو منفی سمت کہا جاتا ہے۔اگر دو نقطے ایک دوسرے سے ملتے ہیں، تو منحنی کو بند و منحنی کہتے ہیں۔

ہموار منحنی(Smooth Curve)

ہموار منحنی ایک ایسی منحنی ہے جس میں تیز کونے یا سمت میں اچانک تبدیلی نہ ہو۔ہموار منحنی مسلسل تفرق پذیر ہے، یعنی اس میں تمام رتبوں کے مشتقات وجود رکھتے ہیں، اور اس کا مماس بردار مسلسل تبدیل ہوتا رہتا ہے۔اس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ کوئی منحنی ہموار منحنی کہلاتی ہے اگر یہ مسلسل طور پر تفرق پذیر ہو۔اگر کسی منحنی میں متناہی ہموار منحنیات موجود ہوں تو اس منحنی کو قطع وار(Piecewise) ہموار منحنی کہتے ہیں۔

خطی تکمل(Line Integral)

ایکخطیتکمل، جسے منحن خطی تکمل(Curvilinear Integral) بھی کہا جاتا ہے، تکمل کی ایک قسم ہے جہاں فضا میں ایکمنحنی کے ساتھ کسی تفاعل کو محسوب کیا جاتا ہے۔یہتکمل کے تصور کو سیدھے خط سے کسی بھی اختیاری(Arbitrary) منحنی خطوط تک پھیلاتا ہے، جس سے اس منحنی خطوط کے ساتھ جمع شدہ قدروں کے حساب کتاب کی اجازت ملتی ہے۔

فرض کیجیے کہ $\vec{r} = \vec{f}(t)$ ایک ہموار منحنی C کو ظاہر کرتا ہے جو دو نقطوں A اور B کو جوڑتا ہے اور مان لیجیے کہ منحنی C کے نقطہ P پر خوسی لمبائی کا مشتق ds ہے۔تب منحنی C کے نقطہ P پر مماس کے ساتھ اکائی بردار $\vec{I} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ ہوگا۔اب فرض کیجیے کہ $\vec{F}$ منحنی C کے ساتھ ایک مسلسل برداری نقطہ تفاعل ہے اور نقطہ P پر مماس کے ساتھ $\vec{F}$ کا جزو $\vec{I}\cdot\vec{F}(r)$ ہے۔اس لیے $\vec{F}(r)$ کا منحنی C کے ساتھ خطی تکمل درجہ ذیل ہوگا

$$\int \vec{F}\cdot\vec{I}\,ds = \int\left(\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{ds}\right)ds = \int \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

جسے $\vec{F}$ کا منحنی C کے ساتھ مماس خطی تکمل(Tangential Line Integral) بھی کہتے ہیں۔دوسرے الفاظ میں کسی بھی منحنی کے ساتھ محسوب کیا گیا تکمل خطی تکمل کہلاتا ہے۔

خطی تکمل کی پیرامتری شکل(Line Integral in Parametric Form):

مان لیجیے کہ $\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}, t \in [a,b]$ ایک تفرق پذیر برداری تفاعل ہے جو ایک ہموار منحنی C کی تعریف کرتا ہے۔تب خطی تکمل

$$\int_C \vec{f}(x,y,z)ds = \int_a^b f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

سادہ بند منحنی(Simple Closed Curve): ایسی منحنی جو خود کو کہیں پر بھی نہیں کاٹتی،سادہ بند منحنی(Simple Closed Curve) کہلاتی ہے۔

دائروی گردش(Circulation): فرض کیجیے کہ C ایک سادہ بند منحنی ہے اور

$$\vec{F}(r) = F_1\hat{\imath} + F_2\hat{\jmath} + F_3\hat{k}$$

جہاں $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ تب $d\vec{r} = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}$ تب $\vec{F}$ کا منحنی C کے ساتھ خطی تکمل،دائروی گردش(Circulation) کہلاتا ہے، جس کو درجہ ذیل طریقہ سے ظاہر کرتے ہیں

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_C (F_1dx + F_2dy + F_3dz)$$

برداری میدان کے ذریعہ کیا گیا کام(Work done by a Vector Field)

مان لیجیے کہ $\vec{F}$ کوئی برداری میدان ہے اور C برداری تفاعل $\vec{r}$ کے ذریعہ بیان کردہ ایکمنحنی ہے۔تب C کے ساتھ حرکت پذیر شئے پر F کے ذریعے کیا جانے والا کام درجہ ذیل ضابطہ کے ذریعے دیا جاتا ہے

$$W = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

مثال1- اگر $\vec{r}(t) = e^{3t}\hat{\imath} + (t^3 - t^2)\hat{\jmath} + \cos 3t\,\hat{k}$ ہو تو $\vec{r}'(t)$، $\vec{r}''(t)$ اور $\vec{r}'''(t)$ نکالیے۔اس کے علاوہ $t = 0$، $t = 1$ اور $t = 2$ پر بھی ان سب کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

حل-دیا گیا ہے کہ

$$\vec{r}(t) = e^{3t}\hat{\imath} + (t^3 - t^2)\hat{\jmath} + \cos 3t\,\hat{k}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}'(t) = 3e^{3t}\hat{\imath} + (3t^2 - 2t)\hat{\jmath} - 3\sin 3t\,\hat{k}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}''(t) = 9e^{3t}\hat{\imath} + (6t - 2)\hat{\jmath} - 9\cos 3t\,\hat{k}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}'''(t) = 27e^{3t}\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} + 27\sin 3t\,\hat{k}$$

$t = 0$ پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\vec{r}'(0) = 3e^0\hat{\imath} + 0\cdot\hat{\jmath} - 0\cdot\hat{k} = 3\hat{\imath}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}''(0) = 9e^0\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - 9\hat{k} = 9\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - 9\hat{k}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}'''(0) = 27e^0\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} = 27\hat{\imath} + 6\hat{\jmath}$$

$t = 1$ پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\vec{r}'(1) = 3e^3\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\sin 3\,\hat{k}$$
$$\Rightarrow \quad \vec{r}''(1) = 9e^3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 9\cos 3\,\hat{k}$$
$$\Rightarrow \quad \vec{r}'''(1) = 27e^3\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} + 27\sin 3\,\hat{k}$$

$t = 2$ پر بھی ہم اسی طرح سے نکال سکتے ہیں۔

3.2 عملی مسائل

1. اگر $f = 3y^4z^2\imath + 4x^3z^2\jmath - 3x^2y^2k$، تب ثابت کرو کہ f ایک سولے نائڈل برداری تفاعل ہے۔

☆☆☆☆☆

2. مان لیجیے کہ u مسلسل تفرق پذیر برداری تفاعلات ہے اور فرض کیجیے کہ ψ ایک مسلسل تفرق پذیر میزانی تفاعل ہے، تب ثابت کیجیے کہ $div\ \psi\vec{u} = (grad\ \psi) \cdot \vec{u} + \psi(div\ \vec{u})$ ہوتا ہے۔

☆☆☆☆☆

3. مان لیجیے کہ u،v مسلسل تفرق پذیر برداری تفاعلات ہیں، تب ثابت کیجیے کہ
$$grad\ (\vec{u}\cdot\vec{v}) = (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{u} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{v} + \vec{v}\times(curl\ \vec{u}) + \vec{u}\times(curl\ \vec{v})$$

☆☆☆☆☆

4. اگر $f = \quad x + 3y \ \imath + \quad y - 2z \ \jmath + \quad x + \lambda z \ k$ ،ایک سولے نوئڈل ہو تو λ کی قدر معلوم کیجیے۔

☆☆☆☆☆

5. ثابت کیجیے کہ ڈائور جینس اور کرل بالحاظ کسی کارتیسی مختصاتی فریم(Cartesian Coordinate Frame) غیر متنوے(Invariant)رہتا ہے۔

☆☆☆☆☆

6. اگر کوئی مستقل بردار ہے، تب ثابت کیجیے کہ $curl\,\frac{\bar{c}\times\vec{r}}{r^3} = -\frac{\bar{c}}{r^3} + \frac{3\vec{r}}{r^5}(\bar{c}.\vec{r})$

☆☆☆☆☆

7. ثابت کیجیے کہ $\vec{f} = 3y^4z\,\hat{\imath} + 4x^3z^2\hat{\jmath} - 3x^2y^2\hat{k}$ ایک غیر گردشیبر داری تفاعل ہے۔

☆☆☆☆☆

8. اگر $f = xy^2\imath + 2x^2yz\jmath - 3yz^2k$ ہو تو نقطہ $(1,-1,1)$ پر $div\vec{f}$ اور $curl\vec{f}$ حاصل کیجیے۔

☆☆☆☆☆

.9 اگر $f = 3x^2y - z\,\imath + xz^3 + y^4\,\jmath - 2x^3z^2k$ ہو تو نقطہ $(2, -1, 0)$ پر $grad\ div\ \vec{f}$ حاصل کیجیے۔

☆☆☆☆☆

10. اگر $\vec{r}_1(t) = 2\hat{\imath} + t\,\hat{\jmath} + t^3\hat{k}$ اور $\vec{r}_2(t) = t^2\hat{\imath} + e^t\hat{\jmath} + 5\hat{k}$ ہو تب $(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)'(t)$ کی قدر معلوم کیجیے۔

☆☆☆☆☆

11. اگر $\vec{r}_1(t) = 2\hat{\imath} + t\,\hat{\jmath} + t^3\hat{k}$ اور $\vec{r}_2(t) = t^2\hat{\imath} + e^t\hat{\jmath} + 5\hat{k}$ ہو تب $(\vec{r}_1{}' \times \vec{r}_2)(t)$ کی قدر معلوم کیجیے۔

☆☆☆☆☆

12. خطی تکمل $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ محسوب کیجیے جہاں $\vec{F} = 3xy\hat{\imath} - y^2\hat{\jmath}$ اور منحنی C مکافی $y = 2x^2$ کے ذریعہ مستوی xy میں نقطہ (0,0) سے (1,2) تک دی گئی ہے۔

☆☆☆☆☆

13. $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ کو محسوب کیجیے، جہاں $\vec{F}(x,y,z) = 3x^2\hat{\imath} + (2xz - y)\hat{\jmath} + z\hat{k}$ مبدا سے نقطہ (2,1,3) کو ملانے والے ایک خط کے ساتھ بردار ی میدان ہے۔

☆☆☆☆☆

14. اگر $\vec{F}(x, y, z) = 3x^2\hat{\imath} + (2xz - y)\hat{\jmath} + z\hat{k}$ ہو تب $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ کو مبدا سے نقطہ $(1,0,0)$ کو ملانے والے خط، نقطہ $(1,0,0)$ سے نقطہ $(1,1,0)$ کو ملانے والے خط اور نقطہ $(1,1,0)$ سے $(1,1,1)$ کو ملانے والے خط کے ساتھ محسوب کیجیے۔

☆☆☆☆☆

نمونہ امتحانی پرچہ

ریاضیات (لیب مینول)

BNMM201DEP

بی۔ایس سی۔(دوسرا سمسٹر)

وقت: 2 Hrs کل نمبر: 10

نوٹ: درج ذیل میں سے کوئی دو سوالات کے جواب دیجیے $(2 \times 5 = 10)$

1۔ برداری تفاعل $\vec{r}(t) = t^3\hat{\imath} + e^t\hat{\jmath} - 7\cos(\pi t)\,\hat{k}$ کے لیے پہلا مشتق حاصل کیجیے

2۔ اگر اکائی بردار $\overline{n}$ مسطح سطح $f(x, y, z) = c$ کے نقطہ $P(x, y, z)$ پر f کی بڑھتی ہوئی سمت میں نارمل ہے، جہاں c کوئی مستقل ہے۔ تب ثابت کیجیے $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \overline{n}}\overline{n}$

3۔ ثابت کیجیے کہ ڈائور جینس اور کرل بالحاظ کسی کارتیسی مختصاتی فریم (Cartesian Coordinate Frame) غیر متنوے (Invariant) رہتا ہے۔

4۔ $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ کو محسوب کیجیے ، جہاں $\vec{F}(x, y, z) = 3x^2\hat{\imath} + (2xz - y)\hat{\jmath} + z\hat{k}$ مبدا سے نقطہ (2,1,3) کو ملانے والے ایک خط کے ساتھ برداری میدان ہے۔

تصدیق نامہ

تصدیق کی جاتی ہے کہ بی۔ایس سی۔(دوسرا سمسٹر) برداری علم احصا کے تجرباتی حصہ کے کام کا یہ اصلی ریکارڈ

ہے، جسے ________________________________ نے مولانا

آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کے اسٹڈی سینٹر ________________________ میں تعلیمی سال

____________ کے دوران تیار کیا۔

دستخط کونسلر